«Золотой ключик 2020»

Задания для учащихся 6-7 классов

Ответь на вопросы, выбрав правильный вариант ответа

1. В тематической коллекции 10 марок. У Пети есть 6 марок такой коллекции, у Васи — 7, а у Тани — 8. Сколько у всех ребят одинаковых марок?

А. Не менее 2. **Б.** Не более 5. **В.** Не менее 1. **Г.** Ни одной.

 Количество марок указанной коллекции, которых нет хотя бы у одного из детей, равно (10 – 6) + (10 – 7) + (10 – 8) = 4 + 3 + 2 = 9. Следовательно, 10 – 9 = 1 марка должна быть обязательно у всех детей. При этом у ребят может быть ровно одна общая марка, если, например, у Васи и Тани будет по 4 марки, которых нет у Пети, а у Васи две марки, которых нет у Тани. Согласно условию, у всех детей может быть по 6 одинаковых марок, то есть более 5. Следовательно, правильный ответ единственный: не менее 1.

Ответ. В. Не менее 1.

2. Маша положила в чашку с чаем немного сахара. Если бы она положила втрое больше, то добавлять до того количества, которое она обычно кладет, пришлось бы вдвое меньше, чем при количестве, положенного Машей. Какую долю от своей нормы сахара положила Маша?

А. $\frac{1}{5}$. **Б.** $\frac{1}{3}$. **В.** $\frac{1}{2}$. **Г.** $\frac{3}{4}$.

 Если обозначить через y массу Машиной нормы сахара, а через x — массу сахара, которого Маша положила в чашку, то из условия следует равенство $y - x = 2(y - 3x)$ или $y = 5x$. Искомая доля равна $\frac{1}{5}$.

Ответ. А. $\frac{1}{5}$.

3. Петя за четыре недели решил 25 задач заочного тура конкурса «Золотой ключик». Каждую следующую неделю он решал больше задач, чем в предыдущую, а на четвёртой неделе решил вдвое больше задач, чем на первой. Сколько задач решил Петя на третьей неделе?

А. 5. **Б.** 6. **В.** 7. **Г.** 8.

 Обозначим количество задач, решённых Петей на 1-й неделе, через x_1, на 2-й — через x_2, на 3-й — через x_3 и на 4-й — через x_4. По условию, $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, $x_4 = 2x_1$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$. Из этих соотношений следует, что $5x_1 < 25$, $4x_4 > 25$. Следовательно, $x_1 < 5$, $x_4 > 6$. x_1 не может быть меньше 4, так как в этом случае $x_4 \le 6$. Следовательно, $x_1 = 4$, тогда $x_4 = 2x_1 = 8$. x_2 не может равняться 5, ибо в этом случае $x_3 = 25 - 4 - 5 - 8 = 8 = x_4$, что противоречит условию. x_2 не может равняться 7. Остаётся единственное: $x_2 = 6$, тогда $x_3 = 7$.

Ответ. В. 7 задач.

4. Маша ходила через день на тренировки и через два дня на занятия кружка. На протяжении некоторого времени нашлось 20 дней, когда Маша была хотя бы на одном виде этих внеклассных занятий. Сколько раз Маша за это время была на тренировке?

А. 12. **Б.** 15. **В.** 16. **Г.** 20.

□ Изобразим посещение Машей занятий по дням.

т	к	т		тк		т	к	т		тк		т	к	т		тк		т	к	т		тк		т	к	т		тк	

Условные обозначения: т — тренировка, к — занятие кружка.

Легко заметить, что через 6 дней всё повторяется. Поэтому за любые 6 дней количество дней, когда Маша была хотя бы на одном виде указанных внеклассных занятий, равно 4.

Следовательно, указанное событие произошло в течение 30 дней. За это время Маша была на тренировке 15 раз.

Ответ. Б. 15 раз.

5. У Пети есть мобильный телефон, заряда аккумулятора которого хватает на 5 ч разговора или 60 часов ожидания. Перед выходом Пети на прогулку телефон был полностью заряжен, а после возвращения — полностью разряжен. Сколько времени длилась Петина прогулка, если $\frac{2}{3}$ времени своей прогулки Петя разговаривал по телефону?

А. 7 ч 12 мин. **Б**. 7 ч 20 мин. **В.** 7 ч 36 мин. **Г.** 7 ч 40 мин.

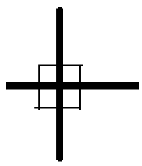
□ Если прогулка длилась 1 ч, то $\frac{2}{3}$ ч Петя разговаривал по телефону, а $\frac{1}{3}$ ч ожидал звонок. За это время использовано $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{60}=\frac{25}{180}=\frac{5}{36}$ части заряда аккумулятора. Так как за время прогулки аккумулятор был полностью разряжен, то прогулка длилась $1:\frac{5}{36}=\frac{36}{5}=7{,}2$ ч = 7 ч 12 мин.

Ответ. А. 7 ч 12 мин.

6. На плоскости через данную точку провели 8 различных прямых. Какое наибольшее число прямых углов могло при этом образоваться?

А. 4.**Б**. 8. **В.** 12. **Г.** 16.

□ Каждую пару прямых можно провести так, чтобы они образовывали 4 прямых угла (см. рис.). 8 различных прямых составляют 4 пары прямых. Следовательно, может образоваться 4·4 = 16 прямых углов.

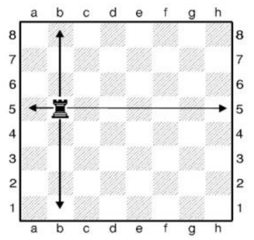


Ответ. Г. 16.

7. Шахматная ладья ходит по прямым линиям вперёд и назад, вправо и влево на столько клеток, на сколько захочет. И когда хочет, может остановиться. Если у ладьи встретится на пути какая-нибудь фигура другого цвета, то ладья может эту фигуру взять. При этом фигура снимается, а ладья ставится на её место. Сколькими способами на шахматную доску можно поставить чёрную и белую ладьи, чтобы они не били друг друга?

А. 4096-ю. **Б.** 4032-мя. **В.** 3200-ми. **Г.**2500-ми.

 Одну ладью на шахматную доску можно поставить на любую из 64 клеток. Какую бы клетку она не заняла бы, под её боем окажется 14 клеток, то есть 7 клеток на вертикали и 7 клеток на горизонтали, пересечением которых служит клетка, на которой уже стоит ладья (см. рис.). То есть, вторую ладью можно поставить на любую из 64 – 14 = 50 клеток. Следовательно, чёрную и белую ладьи можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга, $64 \cdot 50 = 3200$ способами.



Ответ. В. 3200-ми.

8. После снижения цены на изделие, которое стоило 50 руб., за оставшиеся одинаковые изделия магазин получил 2369 руб. На сколько процентов была снижена цена?

А. На 54%. **Б.** На 98%. **В.** На 54% или на 98%. **Г.** На 27% или на 49%.

 Так как $2369 = 23 \cdot 103$, 23 и 103 — простые числа и новая цена изделия меньше 50 руб., то осталось либо 103 изделия по цене 23 руб., либо 2369 изделий по цене 1 руб.

В первом случае изделие стало дешевле на 50 – 23 = 27 зедов, то есть цена была снижена на $\frac{27}{50} \cdot 100 = 54\%$. Во втором случае изделие стало дешевле на 50 – 1 = 49 зедов, то есть цена была снижена на $\frac{49}{50} \cdot 100 = 98\%$.

Ответ. В. На 54% или на 98%.

9. Имеется два правильных игральных кубика. На одном из них на трёх гранях изображена 1 точка, на одной — 2 точки, на двух — 5 точек. На другом — на одной грани 3 точки, на двух — 4 точки, на трёх — 6 точек. Что более вероятно: при одновременном подбрасывании двух кубиков сумма количеств точек на верхних гранях будет больше 8 или меньше 6?

А. Меньше 6. **Б.** Больше 8.
В. Одинаково вероятно. **Г.** Сравнить нельзя.

 Опыт состоит в одновременном подбрасывании двух игральных кубиков. В результате его проведения может произойти $6 \cdot 6 = 36$ равновозможных исходов. Для ответа на поставленный вопрос достаточно сравнить количество исходов, при которых указанная сумма больше 8 и меньше 6. Больше 8 точек вместе на верхних гранях будет изображено при выпадении пар (5; 4) или (5; 6). Первая пара выпадает при $2 \cdot 2 = 4$ исходах, вторая — при $2 \cdot 3 = 6$ исходах, то есть более 8 точек выпадает при 4 + 6 = 10 исходах. Меньше 6 точек вместе на верхних гранях будет изображено при выпадении пар (1; 3), (1; 4), (2; 3). Эти пары выпадают соответственно при $3 \cdot 1 = 3$ исходах, $3 \cdot 2 = 6$ исходах, $1 \cdot 1 = 1$ исходе, то есть менее 6 точек выпадает при 3 + 6 + 1 = 10 исходах.

Следовательно, одинаково вероятно как появление суммы, большей 8, так и суммы, меньшей 6.

Ответ. В. Одинаково вероятно.

10. Согласно расписанию, автобус курсирует по маршруту из пункта A в пункт B и обратно с постоянной скоростью и без остановок. На пути из A в B он был вынужден остановиться на некоторое время, поэтому на обратном пути увеличил скорость на 20%. Он прибыл в A вовремя. Какую часть планового времени, выделенного на путь из A в B, составляет продолжительность вынужденной остановки?

А. $\frac{1}{10}$. **Б.** $\frac{1}{6}$. **В.** $\frac{1}{5}$. **Г.** $\frac{1}{4}$.

□ Обозначим через x мин время в пути из A в B (или из B в A) по расписанию, а через t мин — продолжительность вынужденной остановки. На пути из A в B автобус был в движении x мин, он отклонился от расписания на t мин. Чтобы наверстать отставание, он увеличил скорость на 20% или на $\frac{1}{5}$, скорость превысила постоянную скорость в $1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ раза, в результате на пути из B в A автобус был $x : \frac{6}{5} = \frac{5}{6}x$ мин. Учитывая продолжительность вынужденной остановки и то, что в A автобус прибыл вовремя, получим уравнение: $t + \frac{5}{6}x = x$. Отсюда $t = \frac{1}{6}x$.

Ответ. Б. $\frac{1}{6}$.

11. Среди учеников начальной школы провели опрос: кто любит лето, а кто — зиму. Оказалось, что 90% любителей зимы любят и лето, а 72% любителей лета любят и зиму. Зато 10% всех опрошенных не любят ни зимы, ни лета. Сколько процентов опрошенных любит только один из указанных сезонов, но не любит другой?

А. 30%. **Б.** 25%. **В.** 20%. **Г.** 15%.

□ Обозначим через x% и y% проценты опрошенных, любящих зиму и любящих лето соответственно. Тогда и зиму, и лето любят $0{,}9x$% или $0{,}72y$% опрошенных. Имеем уравнение $0{,}9x = 0{,}72y$ или $x = 0{,}8y$.

Всех опрошенных можно разделить на следующие группы, ни в какие две из которых не попадает один и тот же учащийся:

а) любящие зиму, но не любящие лето, таких $x\cdot(1 - 0{,}9)\% = 0{,}1x$ % опрошенных;

б) любящие лето, но не любящие зиму, таких $y\cdot(1 - 0{,}72)\% = 0{,}28y$% опрошенных;

в) любящие и зиму, и лето, таких $0{,}72y$% опрошенных;

г) не любящие ни зимы, ни лета, таких 10% опрошенных.

На основании этой классификации получим уравнение:

$0{,}1x + 0{,}28y + 0{,}72y + 10 = 100$ или $0{,}1\cdot 0{,}8y + 0{,}28y + 0{,}72y + 10 = 100$, или $1{,}08y = 90$. Отсюда $y = \frac{250}{3}\%$, тогда $x = \frac{200}{3}\%$. Искомый процент опрошенных равен $0{,}1x + 0{,}28y = 0{,}1\cdot\frac{200}{3} + 0{,}28\cdot\frac{250}{3} = 30\%$.

Ответ. А. 30%.

12. Из 102 выпускников средней школы 28 участвовали в туристском походе на Кавказе, 30 — в Крыму, 25 — в Карпатах. Из тех, кто участвовал в походе на Кавказе, 8 человек принимали участие и в Крыму, а 7 — в Карпатах. Из тех, кто преодолевал Крымские горы, побывали в Карпатах 6 человек. Трое выпускников были участниками всех трёх походов. Сколько выпускников не участвовали ни в одном из этих походов?

А. 65. **Б**. 37. **В.** 32. **Г.** 19.

□ Если сложить данные о количествах выпускников, участвовавших в трёх указанных походах, то есть найти сумму 28 + 30 + 25 = 83, то дважды будут учтены те, кто участвовал в двух походах. Чтобы исправить это, от предыдущей суммы нужно вычесть количества выпускников, принимавших участие в двух походах. При этом выражение 28 + 30 + 25 – 8 – 7 – 6 = 62 не учитывает выпускников, участвовавших во всех трёх походах, то есть трёх человек. Итак, количество выпускников, принявших участие хотя бы в одном походе, равно 28 + 30 + 25 – 8 – 7 – 6 + 3 = 65. Тогда, количество выпускников, не участвовавших ни в одном из указанных походов, равно 102 – 65 = 37.

Ответ. Б. 37.

13. Два куска сыра имеют форму прямоугольного параллелепипеда каждый. Длина первого куска на 50% больше длины второго куска, а ширина и высота первого куска на 20% и на 30% меньше ширины и высоты второго куска соответственно. У какого куска сыра объём больше и на сколько процентов?

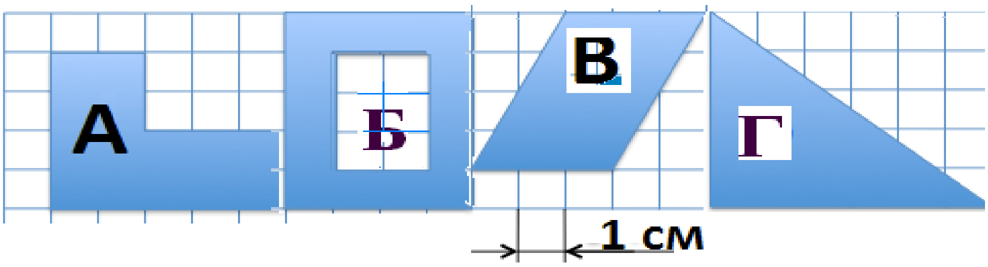
А. У первого, на 16%. **Б**. У второго, на 16%.

В. У первого, на $19\frac{1}{21}\%$. **Г.** У второго, на $19\frac{1}{21}\%$.

□ Обозначим через x, y, z длину, ширину и высоту второго куска сыра соответственно, тогда длина, ширина и высота первого куска сыра соответственно равны $1{,}5x$, $0{,}8y$ и $0{,}7z$. Объём V_2 второго куска сыра равен xyz, а первого V_1 — $1{,}5x\cdot 0{,}8y\cdot 0{,}7z = 0{,}84xyz$, то есть $V_1 = 0{,}84V_2$. Отсюда $V_2 = 1\frac{4}{21}V_1$. Таким образом, объём второго куска сыра в $1\frac{4}{21}$ раза больше объёма первого куска или на $\frac{4}{21}\cdot 100\% = 19\frac{1}{21}\%$ больше объёма первого куска.

Ответ. Г. Второго, на $19\frac{1}{21}\%$.

14. Какая фигура, изображённая на рисунках в ответах, имеет наименьшую площадь?



 Так как площадь одной клетки равна 1 см^2, то площади фигур А и Б численно равны количеству клеток, из которых они состоят, то есть соответственно 14 см^2 и 14 см^2. Поскольку площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов, то площадь фигуры Г равна $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5=15$ см^2.

Площадь фигуры В можно вычислить как разность площади прямоугольника со сторонами 5 см и 4 см и площадей двух равных прямоугольных треугольников с катетами 4 см и 2 см. Она равна $5\cdot4 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=12$ см^2. Следовательно, наименьшую площадь имеет фигура В.

Ответ. В.

15. На утреннике всем детям поровну раздали 120 конфет. Если бы Петя и Таня не заболели и пришли на утренник, то каждый ребёнок получил бы на 2 конфеты меньше. Сколько детей пришло на утренник?

А. 3. **Б.** 8. **В.** 10. **Г.** 12.

 Так как $120 = 2^3\cdot3\cdot5$, то делителями числа 120 являются числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 60, 120. Количество детей на утреннике может равняться только этим числам. Пары (3; 5), (4; 6), (6; 8), (8; 10), (10; 12), где первое число означает количество детей, пришедших на утренник, а второе — количество детей, которые должны были придти на утренник, удовлетворяют первому требованию (не пришло на утренник 2 ребёнка) — отличаются на 2. Но второе требование (каждый ребёнок получил бы на 2 конфеты меньше) выполняется только для пары (10; 12). Действительно, (120:10) – (120: 12) = 2, а (120:3) – (120: 5) $\neq$ 2, (120:4) – (120:6) $\neq$ 2, (120:6) – (120:8) $\neq$ 2, (120:8) – (120: 10) $\neq$ 2.

Ответ. В. 10.

Реши задачи и запиши их полные решения

1. Скорость самолёта (без ветра) — v, скорость ветра равна $a < v$. Самолёт летит против ветра S км, затем возвращается. При какой скорости ветра полёт пройдёт за наименьшее время?

 При $a > 0$ время полёта будет равняться $\frac{S}{v-a}+\frac{S}{v+a}=\frac{2Sv}{v^2-a^2}$. Так как чем меньше скорость ветра a, тем больше знаменатель, и тем меньше вся дробь, то полученное выражение принимает наименьшее значение при $a = 0$ и равно $\frac{2S}{v}$.

Ответ. При $a = 0$.

2. Сколько страниц в рукописи, если для их нумерации потребовалось цифр вдвое больше, чем страниц, и нумерация страниц в рукописи начинается с 1?

 В рукописи более 99 страниц, так как для нумерации 99 страниц требуется $9 + 90\cdot2 = 189$ цифр, что не равно $99\cdot2 = 198$. Обозначим через x количество страниц в рукописи сверх 99, нумеруемых трёхзначными числами. Тогда имеет место уравнение $2(99 + x) = 189 + 3x$. Отсюда $x = 9$. Следовательно, в рукописи $99 + 9 = 108$ страниц.

Ответ. 108 страниц.

3. Три машины выехали одновременно из одного пункта и прибыли в другой пункт одна за другой через равные промежутки времени. Скорость первой из них 80 км/ч, последней — 48 км/ч. Какова скорость машины, пришедшей второй?

 Обозначим расстояние от старта до финиша через S км. а скорость машины, пришедшей второй, через v км/ч. Тогда $\frac{S}{80}, \frac{S}{v}, \frac{S}{48}$ — время движения, соответственно, первой, второй и третьей машин. Из условия следует равенство

$\frac{S}{v} - \frac{S}{80} = \frac{S}{48} - \frac{S}{v}$ или $\frac{2}{v} = \frac{1}{80} + \frac{1}{48} = \frac{1}{30}$. Следовательно, $v = 60$ км/ч.

Ответ. 60 км/ч.

4. Толя, Витя и Дима участвовали в легкоатлетическом забеге. В какой-то момент времени оказалось, что они бегут рядом друг с другом, впереди них бежит половина участников забега и позади них — треть участников забега. Сколько спортсменов участвовало в забеге?

 Обозначим искомое количество спортсменов через x. Из условия следует равенство $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 3 = x$. Отсюда $x = 18$. Следовательно, в забеге участвовало 18 человек.

Ответ. 18.

5. В первенстве района по футболу среди школьных команд каждая команда сыграла с каждой из остальных по одному матчу. Могло ли в турнире участвовать 20 команд, если каждая команда выиграла столько же матчей, сколько и свела вничью?

 Предположим, что в турнире могло участвовать 20 команд. Тогда каждая из них сыграла 19 игр. Обозначим через a_i количество побед i-той команды, $i = 1, 2, \ldots, 20$. Так как количество ничьих i-той команды также равно a_i, а каждая команда сыграла 19 матчей, то количество поражений этой команды равно $19 - 2a_i$.

Поскольку общее количество побед участников турнира равно общему количеству их поражений, то имеет место равенство:
$a_1 + a_2 + \ldots + a_{20} = (19 - 2a_1) + (19 - 2a_2) + \ldots + (19 - 2a_{20})$ или $3(a_1 + a_2 + \ldots + a_{20}) = 190$. Левая часть последнего равенства делится на 3, а правая не делится на 3. Получили противоречие. Следовательно, в турнире не могло участвовать 20 команд.

Ответ. Не могло.

6. Круглый торт разрезали двумя перпендикулярными разрезами на четыре куска так, что ровно два куска имеют одинаковую массу. Может ли сумма масс двух других кусков равняться половине массы торта?

□ Изобразим разрезание торта на четыре куска с помощью рис. 1. Так как только два куска имеют одинаковые массы, то отрезки, изображающие разрезы на рис. 1, не проходят через центр O.

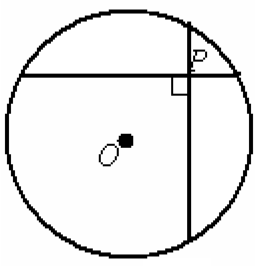


Рис. 1

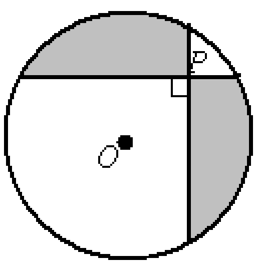


Рис. 2

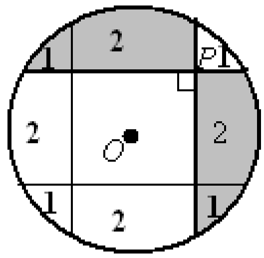


Рис. 3

На рис. 2 закрашены части круга, соответствующие равным по массам кускам, (обратите внимание на то, что разрезы не проходят через центр O).

Построим отрезки, симметричные относительно центра круга отрезкам, изображающие разрезы, и обозначим одинаковыми цифрами равные части круга (рис. 3). Их равенство следует из того, что они симметричны друг другу. Из рис. 3 следует, что сумма масс неравных кусков больше половины торта.

Ответ. Нет.

7. Площадь прямоугольного листа фанеры размерами 50 см $\times$ 40 см уменьшили на 800 см^2, отрезав полоски одинаковой ширины с двух смежных сторон. Какова ширина полоски, если известно, что она выражается целым числом сантиметров?

□ Обозначим искомую ширину полоски через x см. Так как площадь оставшейся части листа равна $50 \cdot 40 - 800 = 1200$ см^2, то имеем уравнение: $(50 - x)(40 - x) = 1200$. Множители в левой части полученного выражения натуральные числа и первый меньше 50, а второй — меньше 40. Поскольку $1200 = 40 \cdot 30$ и либо оба множителя должны быть кратны 10, либо один кратным 100, то $50 - x = 40$, $x = 10$. Тогда $40 - x = 30$.

Ответ. 10 см.

8. В мешке у Деда Мороза лежат шоколадные конфеты трех сортов: с миндалем, с орехами и с мармеладом. Снегурочка утверждает, что, какие бы сто конфет ни вынуть из мешка, среди них обязательно окажется и конфета с миндалем, и конфета с орехами, и конфета с мармеладом. Какое наибольшее возможное количество конфет в мешке?

□ Обозначим количества конфет каждого из трёх видов через a, b, с. Из условия вытекает, что каждая из сумм $a + b$, $a + c$, $b + c$ меньше 100. В противном случае найдётся 100 конфет, среди которых не будет конфет, по крайней мере, одного вида. Удвоенное количество конфет в мешке равно $a + b + a + c + b + c$. Следовательно, оно меньше $100 + 100 + 100 = 300$ конфет. Поэтому количество конфет в мешке меньше 150.

Наибольшее возможное количество конфет в мешке равно 148. Если конфет двух видов по 49, а третьего 50, то, какие бы сто конфет ни вынуть из мешка, среди них обязательно окажется конфета каждого вида. Более 148 конфет быть не может. Действительно, пусть количество конфет в мешке равно 149. Так как количества конфет каждого из трёх видов одновременно не могут быть больше 49, то найдётся вид конфет, количество которых меньше

50. Но тогда сумма количеств конфет двух других видов будет больше или равна 100. Получили противоречие.

Ответ. 148.

9. От прямоугольника 324 × 141 отрезают квадраты со стороной 141 до тех пор, пока это возможно. Затем от полученного прямоугольника отрезают квадраты, у которых сторона равна меньшей из сторон прямоугольника и т.д. Сколько квадратов всего получится и какого они будут размера?

 От прямоугольника можно отрезать квадрат с наибольшей стороной, если длина этой стороны равна меньшему размеру прямоугольника. Отрезав от данного прямоугольника два квадрата со стороной 141, получим прямоугольник, у которого больший размер — 141, а меньший — 324 – 141·2 = 42. Отрезав от него три квадрата со стороной 42, получим прямоугольник размерами 42×(141 – 42·3 = 15). От этого прямоугольника можно отрезать два квадрата со стороной 15, получим прямоугольник 15×12, от которого можно отрезать один квадрат со стороной 12. Останется прямоугольник 12×3, который разрезается на 12:3 = 4 квадрата со стороной 3. Таким образом, можно отрезать 2 квадрата 141×141, 3 квадрата 42×42, 2 квадрата 15×15, 1 квадрат 12×12 и 4 квадрата 3×3, всего 12 квадратов.

Ответ. 2 квадрата 141×141, 3 квадрата 42×42. 2 квадрата 15×15, 1 квадрат 12×12 и 4 квадрата 3×3, всего 12 квадратов.

10. У Пети 28 одноклассников. У них различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети? Здесь имеется в виду, что если Сергей тебе друг, то и ты Сергею тоже являешься другом.

 В классе 29 человек. Так как у них различное число друзей в этом классе, то количество «дружб» в классе должно равняться 29, то есть принимать значения от 0 до 28. Но если у кого-то 28 друзей, то все учащиеся этого класса имеют друзей, и ни у кого не может быть 0 «дружб». Получили противоречие. Таким образом, ситуация, приведенная в условии задания, невозможна.

Ответ. Ситуация невозможна.