«Золотой ключик 2020»

Задания для учащихся 8-9 классов

Ответь на вопросы, выбрав правильный вариант ответа

1. Шифр сейфа четырёхзначный. Известно, что произведение его цифр равно 60. За какое наименьшее число попыток можно наверняка угадать код?

А. За 72. **Б.** За 60. **В.** За 54. **Г.** За 48.

□ Число 60 можно представить в виде произведения четырёх однозначных натуральных чисел тремя способами:

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6.$$

Если все сомножители, то есть все цифры кода, различны, то, переставляя их, получим $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ различных варианта кода. Если же ровно две цифры из четырёх одинаковые, то вариантов кода будет в два раза меньше, то есть $24:2 = 12$, так как перестановка двух одинаковых цифр в каждом варианте не приводит к новому варианту. Следовательно, всего существует $12 + 24 + 24 = 60$ кодов, удовлетворяющих условию. Наименьшее число попыток, гарантирующих угадывание кода, равно 60.

Ответ. Б. За 60.

2. Автобус и троллейбус выехали одновременно из противоположных концов одного маршрута. Автобус до встречи ехал 30 минут, а после встречи за 20 минут доехал до конца маршрута. Через сколько минут прибыл бы троллейбус на конец маршрута, если бы скорости движения автобуса и троллейбуса были постоянны?

А. Через 60 мин. **Б.** Через 55 мин. **В.** Через 45 мин. **Г.** Через 40 мин.

□ Весь маршрут автобус преодолел за $30 + 20 = 50$ мин. Обозначим через S км длину маршрута. Так как скорость автобуса во время движения не изменялась, то до встречи автобус проехал $\frac{30}{50}S = \frac{3}{5}S$ (км), а после встречи — $\frac{2}{5}S$ км. Так как $\frac{2}{5}S$ км троллейбус проехал за 30 мин = 0,5 ч, и его скорость постоянна, то его скорость равна $\frac{2}{5}S : 0{,}5 = \frac{4}{5}S$ км/ч. Следовательно, расстояние $\frac{3}{5}S$ км он проедет за $\frac{3}{5}S : \frac{4}{5}S = \frac{3}{4}$ ч или за 45 минут.

Ответ. В. Через 45 мин.

3. В школе 96 девятиклассников. Количество отличников и половина хорошистов составляют вместе 54 человека. Каких девятиклассников — отличников или троечников (то есть учащихся, у которых много троек) — и на сколько больше, если двоечников в школе нет?

А. Троечников, на 12. **Б.** Троечников, на 8.

В. Отличников, на 8. **Г.** Отличников, на 12.

□ Обозначим через a, x, t количества отличников, хорошистов, троечников среди 96 девятиклассников соответственно. Из условия следуют равенства:

$a + x + t = 96$, $a + 0{,}5x = 54$. Следовательно, $0{,}5x + t = (a + x + t) - (a + 0{,}5x) = 96 - 54 = 42$. Чтобы выяснить, кого больше — отличников или троечников и на сколько, вычислим разность между их количествами. Имеем: $a - t = (a + 0{,}5x) - (0{,}5x + t) = 54 - 42 = 12$,то есть отличников больше троечников на 12.

Ответ. Г. Отличников, на 12.

4. Имеются куски проволоки 4-х различных размеров в большом количестве. Из них изготовили каркасы четырёх прямоугольных параллелепипедов, объёмы которых соответственно равны 6 дм^3, 8 дм^3, 12 дм^3, 24 дм^3 и грани которых не являются квадратами. Во сколько раз длина наибольшего куска проволоки больше длины наименьшего?

А. В 2 раза. **Б.** В 2,5 раза. **В.** В 3 раза. **Г.** В 4 раза.

 Обозначим через a, b, c, d длины кусков проволоки. Так как объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению его измерений, то из условия имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} abc = 6, \\ abd = 8, \\ acd = 12, \\ bcd = 24. \end{cases}$$

Перемножив отдельно левые и правые части уравнений, получим: $a^3b^3c^3d^3 = 6\cdot8\cdot12\cdot24$ или $(abcd)^3 = 2\cdot3\cdot2^3\cdot2^2\cdot3\cdot2^3\cdot3$ или $(abcd)^3 = 2^9\cdot3^3$ или $(abcd)^3 = (2^3\cdot3)^3$. Отсюда $abcd = 2^3\cdot3 = 24$.

Деля левую часть полученного равенства $abcd = 24$ последовательно на левые части уравнений системы, а правую — на правые, будем иметь: $d = 4$, $c = 3$, $b = 2$, $a = 1$. Следовательно, длина наибольшего куска проволоки 4 дм, больше длины наименьшего куска 1 дм в 4:1 = 4 раза.

Ответ. Г. В 4 раза.

5. На конечной остановке в трамвай сели пассажиры и половина из них заняла места для сидения. Сколько человек сели на конечной остановке в трамвай, если после первой остановки число пассажиров увеличилось на 8% и известно, что трамвай вмещает не более 70 человек?

А. 50. **Б.** 56. **В.** 60. **Г.** 64.

 Пусть на конечной остановке в трамвай село x человек. Так как половина из них заняла места для сидения, то число x — чётное. Оно не больше 70, $0{,}08x$ — число целое. Из чисел от 1 до 70 этими свойствами обладает только число 50, так как $0{,}08\cdot50 = 4$ (хотя 0,08 числа 25 равняется 2 и является целым числом, но оно нечётное). Следовательно, на конечной остановке в трамвай село 50 человек.

Ответ. А. 50.

6. Фермеры Пётр Николаевич и Николай Петрович привезли на рынок отборные яблоки в одинаковом количестве. Пётр Николаевич продал в 7 раз меньше яблок, чем Николай Петрович, а осталось у него в 8 раз больше яблок, чем у Николая Петровича. Какое из чисел, приведенных в ответах, может равняться количеству яблок, привезенных каждым из фермеров?

А. 343. **Б.** 385. **В.** 394. **Г.** В 405.

□ Пусть Пётр Николаевич продал x яблок, а у Николая Петровича осталось y яблок. Тогда у первого из названных фермеров осталось $8y$ яблок, а второй — продал $7x$ яблок. Так как они привезли по одинаковому количеству яблок, то имеем уравнение: $x + 8y = 7x + y$ или $7y = 6x$.

Каждый фермер привёз на рынок $x + 8y = 8y + \frac{7y}{6} = \frac{55y}{6}$ яблок. Следовательно, количество яблок, привезенных каждым фермером, должно делиться на 55. Из приведенных в ответах чисел этому условию удовлетворяет только число 385.

Действительно, искомое количество яблок может равняться 385. В этом случае у Николая Петровича осталось 385:55·6 = 42 яблока, продал он 385 – 42 = 343 яблока, а Пётр Николаевич продал 385 – 42·8 = 49 яблок, что в 343:49 = 7 раз меньше, чем его напарник.

Ответ. Б. 385.

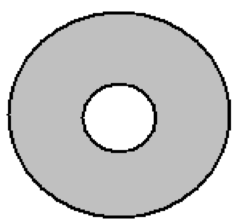
7. В четверти Петя получал по алгебре оценки «2», «3», «4», «5». Среднее арифметическое всех оценок оказалось равным 3,5. Как изменится это среднее арифметическое, если одну оценку «4» заменить на две оценки «3» и «5»?

А. Увеличится. **Б.** Уменьшится.
В. Не изменится. **Г.** Установить невозможно.

□ Обозначим количество оценок, полученных Петей по алгебре в четверти, через n. Сумма всех этих его оценок, то есть произведение среднего арифметического всех оценок на их количество, равна $3{,}5n$. Если одну оценку «4» заменить на две оценки «3» и «5», то сумма всех оценок станет равной $3{,}5n - 4 + 8 = 3{,}5n + 4$, количество оценок будет равняться $n + 1$, а среднее арифметическое всех оценок — $\frac{3{,}5n+4}{n+1}$. Сравним это значение с числом 3,5: $\frac{3{,}5n+4}{n+1} - 3{,}5 = \frac{0{,}5}{n+1} > 0$. Следовательно, среднее арифметическое оценок увеличится.

Ответ. А. Увеличится.

8. Имеется круглая пластинка с вырезанным круглым отверстием (см. рис.). Ширина кольца на пластинке равна диаметру отверстия. Во сколько раз площадь кольца на пластинке больше площади отверстия?



А. В 9 раз. **Б.** В 8 раз. **В.** В 6 раз. **Г.** В 3 раза.

□ Обозначим радиус отверстия через r, тогда радиус пластинки равен $3r$, площадь отверстия πr^2, площадь пластинки (с отверстием) $9\pi r^2$, площадь кольца — $9\pi r^2 - \pi r^2 = 8\pi r^2$. Она больше площади отверстия в $8\pi r^2 : \pi r^2 = 8$ раз.

Ответ. Б. В 8 раз. .

9. Из пункта А в одном и том же направлении выехали три велосипедиста: второй — через 12 мин после первого, третий — через 18 мин после второго. Через 30 мин после своего выезда из А третий велосипедист догнал второго, а ещё через 12 мин догнал первого. Через сколько времени после своего выхода из А второй велосипедист догнал первого?

А. Через 2 ч 6 мин. **Б.** Через 2 ч 48 мин.

В. Через 3 ч 30 мин. **Г.** Через 4 ч 12 мин.

 Пусть скорости первого, второго и третьего велосипедистов соответственно равны v_1, v_2 и v_3 (м/мин). Из условия следует, что в момент своего выезда третий велосипедист находился на расстоянии $18v_2$ м от второго и на расстоянии $(12 + 18)v_1$ м $= 30v_1$ м от первого велосипедиста. Так как скорости их сближения равны разностям скоростей их движения, то из условия имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{18v_2}{v_3 - v_2} = 30, \\ \dfrac{30v_1}{v_3 - v_1} = 42, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 18v_2 = 30(v_3 - v_2), \\ 30v_1 = 42(v_3 - v_1), \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 8v_2 = 5v_3, \\ 12v_1 = 7v_3. \end{cases} \text{ Отсюда } \frac{2}{3}\frac{v_2}{v_1} = \frac{5}{7}, \frac{v_2}{v_1} = \frac{15}{14}.$$

Искомое время равно $= \dfrac{12v_1}{v_2 - v_1} = \dfrac{12}{\dfrac{v_2}{v_1} - 1} = \dfrac{12}{\dfrac{15}{14} - 1} = 168$ мин = 2 ч 48 мин.

Ответ. Б. Через 2 ч 48 мин.

10. Мастер делает за 1 ч целое число деталей, большее 5, а ученик — на 2 детали меньше. Один мастер выполняет заказ за целое число часов, а два ученика вместе — на 1 ч быстрее. Из какого количества деталей состоит заказ? Производительности учеников одинаковы.

А. Из 24-х. **Б.** Из 28-и. **В.** Из 32-х. **Г.** Из 36-и.

 Пусть мастер за 1 ч изготовляет x деталей, а заказ выполняет за y ч. Тогда ученик за 1 ч изготовляет $(x - 2)$ детали, а два ученика вместе выполняют заказ за $(y - 1)$ ч. Так как объём заказа равен произведению количества деталей, изготавливаемых за 1 ч, на количество часов, затрачиваемых на изготовление заказа, то имеем уравнение:

$$xy = 2(x - 2)(y - 1), \text{ или } y = \frac{2x - 4}{x - 4}, \text{ или } y = 2 + \frac{4}{x - 4}.$$

Поскольку y — целое число, то $\dfrac{4}{x-4}$ — также число целое. Поэтому 4 делится на $x - 4$. Так как $x > 5$, то $x - 4$ может равняться 2 или 4, то есть x может равняться 6 или 8. Тогда y равняется 4 или 3. В обоих случаях $xy = 24$, то есть заказ состоит из 24 деталей.

Ответ. А. Из 24-х.

11. Вкладчик положил в банк некоторую сумму денег под определённый процент. Через год он снял $\frac{1}{6}$ часть суммы, которая была к этому времени на его счете. А ещё через год он снял сумму денег, на 20% превышающую размер вложенного вклада. В результате на счёте ничего не осталось. Какой процент годовых начисляют в данном банке?

А. 10%. **Б.** 15%. **В.** 20%. **Г.** 25%.

 Обозначим сумму денег, положенных в банк, через a, а через p% — процент годовых, которые начисляет банк своим вкладчикам. Тогда через год сумма денег на счёте будет равна $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$, а после снятия $\frac{1}{6}$ части суммы, которая была к этому времени на его счете, — $a\left(1+\frac{p}{100}\right)-\frac{1}{6}\cdot a\left(1+\frac{p}{100}\right)=\frac{5}{6}a\left(1+\frac{p}{100}\right)$. По истечении второго года сумма денег на счёте равнялась $\frac{5}{6}a\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=\frac{5}{6}a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$, а по условию она равна $a+\frac{1}{5}a=\frac{6}{5}a$, то есть сумме, которую он снял со счёта через 2 года. Имеем уравнение $\frac{5}{6}a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2=\frac{6}{5}a$. Отсюда $\left(1+\frac{p}{100}\right)^2=\frac{36}{25}, 1+\frac{p}{100}=\frac{6}{5}, \frac{p}{100}=\frac{1}{5}$, $p = 20\%$.

Ответ. В. 20%.

12. В прошлом году в конкурсах «Золотой ключик» и « Золотой сундучок» приняло участие треть учащихся моего класса. Все участники получили дипломы в тех конкурсах, в которых они участвовали. Известно, что 20% дипломов принадлежат учащимся, которые участвовали в обоих конкурсах. Сколько учеников в моем классе, если в нём не более 40 учащихся?

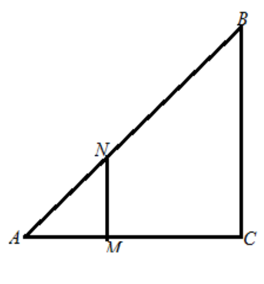
А. 20. **Б.** 25. **В.** 27. **Г.** 42.

 Обозначим через x количество учащихся в классе, а через y — количество полученных дипломов. По условию, в конкурсе участвовало $\frac{1}{3}x$ учащихся. Так как $0{,}2y$ дипломов получили $0{,}1y$ учащихся (2 диплома получил каждый из этих учащихся), то в конкурсе участвовало $0{,}8y + 0{,}1y = 0{,}9y$ учащихся. Следовательно, $\frac{1}{3}x = 0{,}9y$ или $x = 2{,}7y$. Так как x и y — целые числа, то y может принимать значения 10, 20, 30, … . Таким образом, в моём классе 27 учащихся.

Ответ. В. 27.

13. Площадку освещает фонарь, находящийся на столбе на высоте 4 метра. Длина тени от Саши (его рост 160 см) — 150 см. На каком расстояние от столба он стоит?

А.325 см. **Б**. 275 см. **В.** 250 см. **Г.** 225 см.



 Изобразим столб отрезком BC, мальчика — отрезком MN, а его тень отрезком AM (см. рис.). Из подобия треугольников AMN и ACB следует равенство $\frac{CB}{MN}=\frac{AC}{AM}$. Отсюда $AC=\frac{AM\cdot CB}{MN}=\frac{150\cdot 400}{160}=375$ см. Тогда $MC = AC - AM = 375$

– 150 = 225 см. Следовательно, Саша стоит на расстоянии 225 см от столба.

Ответ. Г. 225 см.

14. Имеется два правильных игральных кубика На одном из них на трёх гранях изображена 1 точка, на одной — 2 точки, на двух — 5 точек. На другом — на одной грани 3 точки, на двух — 4 точки, на трёх — 6 точек. Что более вероятно: при одновременном подбрасывании двух кубиков сумма количеств точек на верхних гранях будет больше 8 или меньше 6?

А. Меньше 6. **Б.** Больше 8. **В.** Одинаково вероятно. **Г.** Сравнить нельзя.

 Опыт состоит в одновременном подбрасывании двух игральных кубиков. В результате его проведения может произойти 6·6 = 36 равновозможных исходов. Для ответа на поставленный вопрос достаточно сравнить количество исходов, при которых указанная сумма больше 8 и меньше 6. Больше 8 точек вместе на верхних гранях будет изображено при выпадении пар (5; 4) или (5; 6). Первая пара выпадает при 2·2 = 4 исходах, вторая — при 2·3 = 6 исходах, то есть более 8 точек выпадает при 4 + 6 = 10 исходах. Меньше 6 точек вместе на верхних гранях будет изображено при выпадении пар (1; 3), (1; 4), (2; 3). Эти пары выпадают соответственно при 3·1 = 3 исходах, 3·2 = 6 исходах, 1·1 = 1 исходе, то есть менее 6 точек выпадает при 3 + 6 + 1 = 10 исходах. Следовательно, одинаково вероятно как появление суммы, большей 8, так и суммы, меньшей 6.

Ответ. В. Одинаково вероятно..

15. Согласно расписанию, автобус курсирует по маршруту из пункта *A* в пункт *B* и обратно с постоянной скоростью и без остановок. На пути из *A* в *B* он был вынужден остановиться на некоторое время, поэтому на обратном пути увеличил скорость на 25%. Приехав в *A* с 10-минутным отклонением от расписания, он уменьшил свою последнюю скорость на 24% и прибыл в *B* вовремя. Какова была продолжительность вынужденной остановки?

А. 36 мин. **Б.** 32 мин. **В.** 28 мин. **Г.** 24 мин.

 Обозначим через x мин время в пути из *A* в *B* (или из *B* в *A*) по расписанию, а через t мин — продолжительность вынужденной остановки. Пусть на первом упомянутом пути из *A* в *B* автобус был в движении x мин, он отклонился от расписания на t мин. Чтобы наверстать отставание, он увеличил скорость на 25%, скорость превысила постоянную скорость в $\frac{5}{4}$ раза, в результате на пути из *B* в *A* автобус был $\frac{4}{5}x$ мин. Учитывая продолжительность вынужденной остановки и 10-минутное отклонение от расписания, получим уравнение: $t + \frac{4}{5}x + 10 = x$.

На втором упомянутом пути из *A* в *B* автобус двигался со скоростью, равную последней скорости, умноженной на (1 – 0, 24) = 0,76, или первоначальной, умноженной на произведение $\frac{5}{4}\cdot 0{,}76 = 0{,}95 = \frac{19}{20}$. Поэтому в пути он был $\frac{20}{19}x$

мин. Учитывая, что он прибыл в B вовремя, то есть наверстал 10-минутное отклонение от расписания, получим второе уравнение: $\frac{20}{19}x - 10 = x$.

Из этого уравнения имеем: $x = 190$ (мин). Подставив это значение в первое уравнение, получим: $t + \frac{4}{5}\cdot 190 + 10 = 190$, откуда $t = 28$. Следовательно, время вынужденной остановки равно 28 мин.

Ответ. В. 28 мин.

Реши задачи и запиши их полные решения

1. На утренник в детском саду купили 10 кг конфет по цене 288 руб и 455 руб за 1 кг. Каких конфет купили больше — дорогих или дешёвых — и на сколько, если и тех, и других купили целое число килограммов и заплатили за все конфеты 3882 руб?

□ Обозначим через x, y количества килограммов дешёвых и дорогих конфет соответственно. Тогда из условия следуют равенства:

$$x + y = 10,\ 288x + 455y = 3882.$$

Следовательно, $288(10 - y) + 455y = 3882$ или $167y = 1002$, $y = 6$. Тогда $x = 10 - 6 = 4$. Купили больше дорогих конфет на $6 - 4 = 2$ кг.

Ответ. Дорогих, на 2 кг.

2. Цена товара была дважды повышена на одно и то же число процентов. На сколько процентов повышалась цена товара каждый раз, если его первоначальная цена составляла 200 руб, а окончательная — 338 руб?

□ Пусть цена каждый раз повышалась на x процентов. Тогда после первого повышения она составила $200 + \frac{200}{100}x = 200 + 2x$ (руб), а после второго — $200 + 2x + (200 + 2x)\cdot 0{,}01x$ (руб) или $200 + 4x + 0{,}02x^2$ (руб).

Из условия следует уравнение

$0{,}02x^2 + 4x + 200 = 338$ или $x^2 + 200x - 6900 = 0$.

Корни этого уравнения: $x_1 = -100 + \sqrt{10000 + 6900} = -100 + 130 = 30,\ x_2 < 0$.

Следовательно, искомый процент равен 30. **Ответ.** 30%.

3. Расстояние между концами маршрута автобуса 12 км. Автобус делает 4 промежуточные остановки. Известно, что сумма длин любых двух соседних промежутков между остановками меньше 5 км, а любых трёх — больше 6 км. Найдите расстояние между первой и последней из промежуточных остановок, если это расстояние выражается целым числом километров.

□ Обозначим на рисунке 4 промежуточные остановки буквами A_1, A_2, A_3, A_4. Из условия следуют неравенства:

$AA_1 + A_1A_2 < 5$, $A_1A_2 + A_2A_3 < 5$, $A_2A_3 + A_3A_4 < 5$, $A_3A_4 + A_4B < 5$.

Если сложить левые и правые части этих неравенств, то получил неравенство

$(AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4B) + (A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4) < 20.$

Так как сумма в первых скобках равна расстоянию между концами маршрута, то есть 12 км, а сумма во вторых скобках больше 6 км, то справедливо неравенство: $6 < A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 < 20 – 12 = 8$.

Следовательно, искомое расстояние равно 7 км.

Ответ. 7 км.

4. Сколько страниц в рукописи, если для их нумерации потребовалось цифр втрое больше, чем страниц, и нумерация страниц в рукописи начинается с 1?

□ В рукописи более 999 страниц, так как для нумерации 999 страниц требуется $9 + 90·2 + 900·3 = 2889$ цифр, что меньше $999·3 = 2997$. Обозначим через x количество страниц в рукописи сверх 999, нумеруемых четырёхзначными числами. Тогда имеет место уравнение $3(999 + x) = 2889 + 4x$. Отсюда $x = 108$. Следовательно, в рукописи $999 + 108 = 1107$ страниц.

Ответ. 1107 страниц.

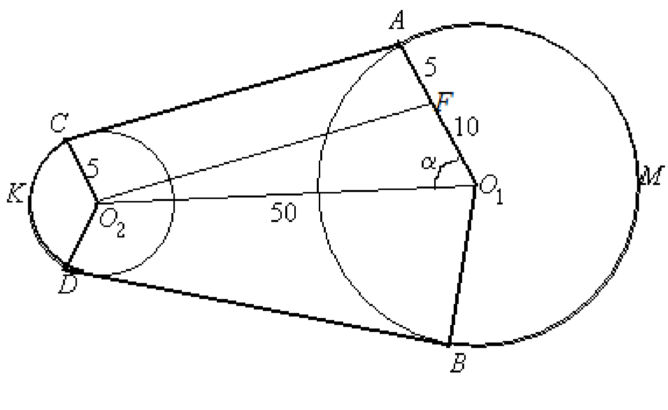
5. Для перевозки груза выделены 4-, 7- и 8-тонные грузовики. Каждый автомобиль должен сделать только один рейс. Сколько грузовиков каждого вида использовали для перевозки 44 т груза?

□ Обозначив искомые количества 4-, 7- и 8-тонных грузовиков соответственно через x, y и z, получим уравнение $4x + 7y + 8z = 44$. Из свойств делимости целых чисел вытекает, что y делится на 4. Так как $y \neq 0$, то y может равняться только 4. Тогда составленное уравнение примет вид: $4x + 8z = 16$ или $x + 2z = 4$. 7- и один 8-. Этому уравнению удовлетворяют только значения $z = 1$, $x = 2$. Следовательно, требуется два 4-, четыре 7- и один 8-тонный грузовик.

Ответ. 2;4;1.

6. Какую примерно длину может иметь цепь велосипеда, диаметры шестерёнок которого 30 см и 10 см, а расстояние между их центрами 50 см?

□ На рисунке изображена математическая модель шестерёнок велосипеда, O_1 и O_2 — их центры, $ACKDBMA$ — цепь велосипеда. По свойству касательной к окружности $AO_1 \perp AC$. Через точку O_2 проведём прямую O_2F, параллельную AC. Из треугольника O_2FO_1 имеем:



$\cos\alpha = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 30 - \frac{1}{2}\cdot 10}{50} = \dfrac{1}{5}$, $\alpha \approx 80°$. Поэтому дуга $AMB \approx 360° – 80°·2 = 200°$, её длина $l_{AMB} = \dfrac{\pi \cdot 30 \cdot 200}{360} \approx 50$ (см). Аналогично, $\overset{\frown}{CKD} \approx 160° \Rightarrow l_{CKD} = \dfrac{\pi \cdot 10 \cdot 160}{360} \approx 13$ (см). По теореме Пифагора, $AC = O_2F = \sqrt{2500 - 100} \approx 49$ (см). Так как $AC = DB$, то искомое расстояние $l \approx 2·49 + 50 + 13 = 161$ (см). **Ответ.** ≈ 161 см.

7. Когда Карлсон пришёл в гости к Малышу, он съел 3 порции рыбы, 4 порции мяса и 2 порции каши. Но после этого так растолстел, что не мог подняться из-за стола. Если бы он съел 2 порции рыбы, 3 порции мяса и 4 порции каши или 4 порции рыбы, 2 порции мяса и 3 порции каши, то спокойно мог бы встать. От чего больше толстеют: от каши или от мяса?

 Обозначим порции блюд первыми буквами их названий: р, м, к. По условию, имеем следующие два неравенства:

3р + 4м + 2к > 2р +3м + 4к; 3р + 4м + 2к > 4р + 2м + 3к (знак «>» означает «больше толстеет»). Преобразуя каждое из этих неравенств, получим: 1р + 1м > 2к, 2м > 1р + 1к. Складывая почленно два последних неравенства, будем иметь: 3м > 3к, или 1м > 1 к. Таким образом, больше толстеют от мяса, чем от каши.

Ответ. От мяса.

8. Несколько монет, диаметр которых равен 2,5 см, лежат на столе так, что каждая монета касается двух других, центры монет лежат на окружности и на части поверхности стола, ограниченной монетами, можно положить монету диаметром 1,5 см. Сколько больших монет лежит на столе?

 Легко убедиться, что монет больше четырёх. Рассмотрим рис. 1. Четырёхугольник $O_1O_2O_3O_4$ является квадратом со стороной 2,5 см. Следовательно, так как по теореме Пифагора $O_1O_3 = \sqrt{2,5^2+2,5^2} = 2,5\sqrt{2}$, то $AB = O_1O_3 - O_1O_2 = 2,5\left(\sqrt{2}-1\right) < 1,5$.

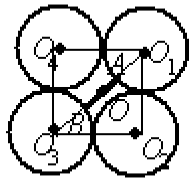


Рис. 1

Расстояние от точки O до монет меньше радиуса маленькой монеты, следовательно, нельзя в образовавшемся зазоре поместить маленькую монету.

Рассмотрим случай, когда монет 5 (см. рис. 2). Точки O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 — центры кругов, изображающих монеты диаметром 2,5 см, являются вершинами правильного пятиугольника. Точка O — центр его симметрии, точка K — точка касания двух кругов. Следовательно, треугольник OO_1K, и угол OO_1K равен 90°. Поэтому имеют место соотношения $OO_1 = \dfrac{O_1K}{\sin\angle O_1OK} = \dfrac{1,25}{\sin 36°} > 2$, так как sin 36° ≈ 0,6. Поскольку $OA = OO_1 - O_1A > 2 - 1,25 = 0,75$, то расстояние от точки O до монет больше радиуса маленькой монеты.

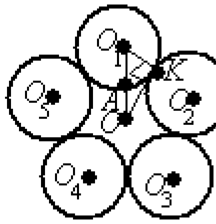


Рис. 2

Нетрудно убедиться, что с увеличением количества монет «зазор» только увеличится. В случае, когда количество монет равно 6, 7, …, рассуждения не отличаются от приведенных.

Ответ. Не менее 5.

9. Велосипедист каждую минуту проезжает на 500 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь в 120 км он затрачивает на 2 ч больше, чем мотоциклист. Во сколько раз скорость мотоциклиста превышает скорость велосипедиста?

 Обозначим через v км/ч скорость мотоциклиста. Так как велосипедист каждую минуту проезжает на 500 м меньше, чем мотоциклист, то каждый час он проезжает на 500·60 = 30 000 м = 30 км меньше, чем мотоциклист. Поэтому скорость велосипедиста составляет $(v - 30)$ км/ч.

Поскольку на путь в 120 км велосипедист затрачивает на 2 ч больше, чем мотоциклист, то имеем уравнение:

$$\frac{120}{v-30}-\frac{120}{v}=2 \text{ или } v^2 - 30v - 1\,800 = 0.$$

Корни полученного квадратного уравнения 60 и –30. Условию удовлетворяет только один корень этого уравнения: $v = 60$. Следовательно, скорость мотоциклиста 60 км/ч, а скорость велосипедиста — 60 – 30 = 30 км/ч, то есть скорость мотоциклиста превышает скорость велосипедиста в 60:30 = 2 раза.

Ответ. В 2 раза.

10. Кандидат в депутаты во время избирательной кампании имеет право на одно бесплатное выступление в газете и на платные выступления по радио и по телевидению. Выступление в газете увеличивает число сторонников кандидата на 1000 человек; каждое выступление по радио увеличивает количество голосов на 40% и стоит 32 тыс. руб.; каждое выступление по телевидению — на 80% и стоит 47 тыс. руб. Определить количество и последовательность выступлений кандидата в этих средствах массовой информации, при которых кандидат получит наибольшее возможное количество голосов, если на всю кампанию можно израсходовать не более 112 тыс. руб.

 Из условия вытекает, что допустимая сумма расходов даёт возможность дважды выступить по радио и один раз по телевидению: 32 + 32 + 47 = 111 (тыс. руб.), что увеличивает число сторонников (без учёта 1000 человек) в $1{,}4\cdot1{,}4\cdot1{,}8 = 3{,}528$ раза. В то же время два выступления по телевидению стоят 94 тыс. руб. и увеличивают число сторонников в $1{,}8\cdot1{,}8 = 3{,}24$ раза. Аналогично, три выступления по радио при стоимости в 96 тыс. руб. увеличивают число голосов в $1{,}4\cdot1{,}4\cdot1{,}4 = 2{,}744$ раза.

Обозначив начальное количество сторонников кандидата через a, получим, что всевозможные последовательности выступлений кандидата приведут к следующим количествам голосов за этого кандидата:

$(a + 1000)\cdot1{,}4\cdot1{,}4\cdot1{,}8 = 3{,}528a + 3528;$
$(1{,}4a + 1000)\cdot1{,}4\cdot1{,}8 = 3{,}528a + 2520;$
$(1{,}4\cdot1{,}4a + 1000)\cdot1{,}8 = 3{,}528a + 1800;$
$(1{,}4\cdot1{,}8a + 1000)\cdot1{,}4 = 3{,}528a + 1400:$
$1{,}4\cdot1{,}4\cdot1{,}8a + 1000 = 3{,}528a + 1000.$

Обратите внимание на то, что изменение порядка выступлений по радио и телевидению не меняет количества голосов. Следовательно, наибольшее возможное количество голосов будет при следующей последовательности: вначале выступление в газете, затем в любом порядке два выступления по радио и выступление по телевидению, всего 4 выступления.

Ответ. Вначале выступление в газете, затем в любом порядке два выступления по радио и выступление по телевидению, всего 4 выступления.