«Золотой сундучок 2019»

Ответы к заданиям для учащихся 8 класса

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Б	Б	Б	Б	Б	В	В	Б	Б	Г	9.	Можно	Можно	В первой.

Решения заданий для учащихся 8 класса

1. В девятом классе школы мальчиков было на 10 больше, чем девочек. После летних каникул количество учеников в десятом классе, образованном из указанного девятого класса, уменьшилось на 10%, причём девочек стало меньше на 20%, а мальчиков — на 5%. Сколько учеников в десятом классе?

А. 26. **Б.** 27. **В.** 28. **Г.** 29.

Решение. Обозначим через x количество девочек в девятом классе. Тогда мальчиков в нём $x + 10$, а всего учеников — $2x + 10$. Из условия следует равенство $0{,}9(2x + 10) = 0{,}8x + 0{,}95(x + 10)$.
Преобразовав это уравнение, получим: $5x = 50$ или $x = 10$. Тогда в десятом классе $0{,}9\cdot(2\cdot10 + 10) = 27$ учеников.

Ответ. Б. 27.

2. Два куба с объемами V и W имеют общую часть. Часть куба, имеющего объем V, которая не является общей для обоих кубов, составляет 90% его объема, а часть куба, имеющего объем W, которая не является общей для обоих кубов, составляет 85% его объема. Какое из соотношений, приведенных в ответах, для V и W является верным?

А. $V = \frac{2}{3}W$. **Б.** $V = \frac{3}{2}W$. **В.** $V = \frac{85}{90}W$. **Г.** $V = \frac{90}{85}W$.

Решение. Объем общей части двух кубов равен $0{,}1\ V$ или $0{,}15\ W$. Следовательно, $0{,}1V = 0{,}15\ W$, или $2V = 3W$, или $V = \frac{3}{2}W$.

Ответ. Б. $V = \frac{3}{2}W$.

3. Три кренделя, пять коврижек и 6 баранок стоят вместе 24 зеда (зед — условная денежная единица). Какое изделие из перечисленных самое дорогое, если стоимость каждого из этих изделий выражается целым числом зедов?

А. Крендель. **Б.** Коврижка. **В.** Баранка. **Г.** Определить невозможно.

Решение. Обозначим через x зедов, y зедов, z зедов соответственно стоимости одного кренделя, одной коврижки и одной баранки. Из условия следует равенство $3x + 5y + 6z = 24$. Так как $3x$, $6z$, 24 делятся на 3 при любых целых x и z, то $5y$ делится на три. Поскольку 5 и 3 — взаимно простые числа, то y делится на 3 и поэтому может принимать значения 3, 6, 9 ... . Так как $5y > 24$ при всех этих значениях, кроме $y = 3$, то $y = 3$. Тогда $3x + 6z = 9$ или $x + 2z = 3$. Следовательно, $x = z = 1$. Поэтому коврижка самая дорогая.

Ответ. Б. Коврижка.

4. Победителю шахматного турнира пообещали выдать следующую премию: на каждую клетку шахматной доски положить рублёвые монеты так, чтобы на всех клетках оказалось различное количество монет. Какую наименьшую сумму может составить эта премия?

А. 2144 руб. **Б.** 2080 руб. **В.** 2016 руб. **Г.** 1952 руб.

Решение. Наименьшая сумма, удовлетворяющая условию задания, имеет вид: 1 + 2 + … + 64 (руб.). Она равна (1+ 64) + (2 + 63) + … + (32 + 33) = 65·32 = 2080 руб.

Ответ. Б. 2080 руб.

5. Рабочую неделю на фирме сократили с 5 дней до 4 дней, сохранив длительность рабочего дня. На сколько процентов нужно увеличить производительность труда, чтобы при тех же расценках за выполняемую работу зарплата за неделю выросла на 20%?

А. На 75%. **Б.** На 50%. **В.** На 25%. **Г.** На 20%.

Решение. Предположим, что фирма изготовляет некоторую продукцию, и работник ежедневно изготовлял a единиц продукции и за неделю получал m зедов (зед – условная денежная единица). При этом, ежедневно рабочий зарабатывал $\frac{m}{5}$ зедов, а за изготовление одного изделия — $\frac{m}{5a}$ зедов.

После увеличения производительности труда работник изготовлял ежедневно b единиц продукции и за неделю получил $1{,}2m$ зедов. При этом, ежедневно рабочий зарабатывал $\frac{1,2m}{4}$ зедов, а за изготовление одного изделия — $\frac{1,2m}{4b}$ зедов. Так как расценки за единицу продукции не изменились, то справедливо равенство $\frac{m}{5a} = \frac{1,2m}{4b}$. Тогда $b = 1{,}25 \cdot 1{,}2a = 1{,}5a.$ Следовательно, производительность нужно увеличить на 50%.

Ответ. **Б.** На 50%.

6. Планируется, что в финальной части турнира чемпионата мира по футболу 2026 года будет участвовать 48 команд, разделённые на 16 групп, в каждой группе три команды. Каждая команда в групповой части турнира будет играть с каждой по одному матчу. В плей-офф (организация соревнования, при которой участник выбывает из турнира после первого же проигрыша) выходят от каждой группы две команды, занявшие первые два места. Далее будут проводиться игры $\frac{1}{16}$ финала, $\frac{1}{8}$ финала, четвертьфинала, полуфинала, игра за 3-е место и финальный матч. Сколько игр в финальной части турнира проведёт команда — победительницы турнира??

А. 5. **Б.** 6. **В.** 7. **Г.** 8.

Решение. Так как каждая команда в групповой части турнира будет играть с каждой по одному матчу, а в группе 3 команды, то каждая команда в этой части турнира проведёт по 2 матча. Поскольку в плей-офф выходят от каждой группы две команды, занявшие первые два места, то есть всего $16 \cdot 2 = 32$ команды, то команда-победительница будет играть в одной шестнадцатой финала, в одной восьмой финала, четвертьфинале, полуфинале и финальном матче. Следовательно, общее количество игр этой команды равно $2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$.

Ответ. В. 7.

7. На плоскости проведено несколько параллельных прямых и несколько им перпендикулярных, при этом образовался 91 прямоугольник, не содержащий внутри точек пересечения прямых. На сколько больше проведено одних линий по сравнению с другими, если прямых было не больше 50?

А. На 8. **Б.** На 7. На 6. **Г.** На 5.

Решение. Пусть проведено m параллельных прямых и n им перпендикулярных. При пересечении m параллельных прямых с n им перпендикулярными образуется $(m-1)(n-1)$ прямоугольников, не содержащих внутри точек пересечения прямых. По условию, $(m-1)(n-1) = 91$, причём $m > 1$ и $n > 1$. Так как $m - 1$ и $n - 1$ — натуральные числа, большие 1, а $91 = 13 \cdot 7$, то $m - 1 = 13$, $n - 1 = 7$ или $m - 1 = 7$, $n - 1 = 13$, то есть $m = 14$, $n = 8$ или $m = 8$, $n = 14$. Следовательно, количество одних линий больше количества других на $14 - 8 = 6$.

Ответ. В. На 6.

8. В Швамбрании длительность года такая же, как у нас, но при подсчёте возраста её жителей не учитывают субботы и воскресенья. 25-летний житель этой страны переехал в нашу страну. Каков его возраст у нас?

А. 40. **Б.** 35. **В.** 30. **Г.** 28.

Решение. Будем определять длительность года количеством недель в нём. Так как в Швамбрании длительность года такая же, как у нас, то они состоят из одинакового количества недель. Поскольку в Швамбрании при подсчёте возраста её жителей не учитывают субботы и воскресенья, то есть при этом подсчёте неделя там состоит из 5 дней, то эта неделя составляет $\frac{5}{7}$ от длительности недели у нас. Следовательно, длительность недели у нас составляет $\frac{7}{5}$ длительности недели в Швамбрании. Поэтому возраст жителя, переехавшего в нашу страну, у нас составляет $\frac{7}{5}$ от его возраста в своей стране, то есть он равен $\frac{7}{5} \cdot 25 = 35$ годам.

Ответ. Б. 25.

9. Четверо учеников А, Б, В и Г имеют разные успехи по математике. Они утверждают следующее:

- А: Я не отличник, но и не двоечник.

- Б: Я не двоечник.
- В: Я отличник.
- Г: Я двоечник.

Кто из них отличник, если только один из них лжёт?

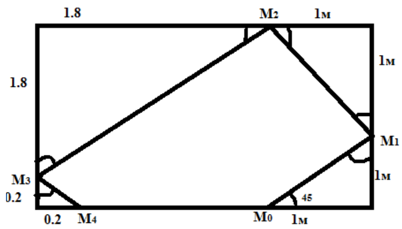
А. А. **Б**. Б. **В**. В. **Г.** Г.

Решение. По условию, А, Б, В и Г имеют разные успехи по математике, то есть среди них один отличник, один двоечник, и двое не отличники, но и не двоечники.
Так как, по условию, только один из них лжёт, то возможны два случая: В лжёт и В говорит правду. Если В лжёт, то есть он не отличник, то А, Б и Г говорят правду. Это означает, что Г — двоечник, А — не отличник, Б — отличник.
Если В говорит правду, то он отличник и лжёт кто-то из учеников А, Б или Г. А не может лгать, ибо в этом случае он двоечник, и среди указанных четырёх учащихся 2 двоечника, что невозможно. По этой же причине Б не может лгать. Тогда лгун Г, но в этом случае снова два двоечника.
Следовательно, В не может говорить правду, и отличником является Б.

Ответ. Б. Б.

10. Бильярдный шар находится в точке M_0 возле большого борта бильярдного стола прямоугольной формы на расстоянии 1м от ближайшей лузы. После удара под углом 45° к этому борту шар отразился от трёх бортов. На каком расстоянии от ближайшей лузы он ударился о четвертый борт, если ширина стола 2 м, а длина 2,8 м? (При ударе о борт угол отражения равен углу падения).

А. 100 см. **Б.** 80 см. **В.** 40 см. **Г.** 20 см.



Решение. Изобразим движение шара на рисунке, пользуясь условием (см.рис.). Из построений следует, что шар ударится четвертый раз в точке M_4, находящейся на расстоянии 0,2м от ближайшей лузы.

Ответ. Г. 20 см.

11. Николай с сыном и Пётр с сыном пошли на рыбалку. Николай поймал столько же рыб, сколько и его сын, и Пётр поймал столько же рыб, сколько его сын. Все вместе поймали 27 рыб. Сколько рыб поймал Николай?

Решение. Обозначим количество рыб, пойманных Николаем и Петром, соответственно через x и y. Тогда всего было поймано $2x + 2y$ рыб, что, по условию, равно 27. Равенство $2x + 2y = 27$ невозможно, так как левая часть делится на 2, а правая не делится. Следовательно, на рыбалку пошли не 4, а 3 человека: Николай, его сын Пётр и внук, сын Петра. Все они поймали одинаковое количество рыб, то есть каждый, в том числе и Николай, поймал по 27:3 = 9 рыб.

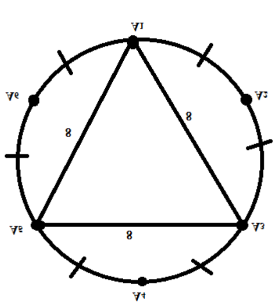
Ответ. 9.

12. Фермеры Пётр и Фёдор продают на рынке арбузы, большие и маленькие, не пользуясь весами. У Петра три больших и один маленький стоят вместе столько же, сколько пять больших у Фёдора. А два больших арбуза и один маленький стоят вместе у Петра столько же, сколько три больших и один маленький вместе у Фёдора. Можно ли по этим данным выяснить, что дороже: один большой арбуз и два маленьких у Петра, или пять маленьких арбузов у Федора?

Решение. Пусть у Петра большой арбуз стоит b_P, а маленький — m_P. У Фёдора большой арбуз стоит b_F, а маленький — m_F. Тогда из условий задачи имеем два уравнения: $3b_P + m_P = 5b_F$, $2b_P + m_P = 3b_F + m_F$.
Отсюда получаем: $5m_F = (2b_P + m_P - 3b_F)5 = 10b_P + 5m_P - 3(3b_P + m_P) = b_P + 2m_P$. То есть пять маленьких арбузов у Фёдора стоят столько же, сколько один большой и два маленьких у Петра.

Ответ. Можно.

13. Можно ли на квадратном участке со стороной 20 м посадить 6 деревьев так, чтобы среди любых трёх из них нашлось два, расстояние между которыми 8 метров?



Решение. На рисунке изображены шесть точек так, что любая тройка точек $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, являющиеся вершинами правильного шестиугольника. Так как $A_1A_3 = A_2A_4 = A_4A_6 = A_3A_5 = A_5A_1 = A_6A_2 = 8$ м, то среди любых трех их них найдется два, расстояние между которыми 8 метров.

Радиус R окружности описанной около шестиугольника

$A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5\ A_6$ равен радиусу окружности, описанной около правильного треугольника $A_1\ \ A_3\ \ A_5$ со стороной 8м и равен $\frac{8}{\sqrt{3}}$. Следовательно шестиугольник $A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5\ A_6$ можно поместить в квадрат со стороной 20м. Следовательно, 6 деревьев можно посадить так, как указано в условии.

Ответ. Можно.

14. В киоске по продаже проездных талончиков имеется три упаковки с номерами: 1) 158 400 — 158 599, 2) 256 200 — 256 399, 3) 462 000 — 462 199. В какой из упаковок больше всего «счастливых» талончиков? (талончик считается «счастливым», если сумма первых трёх цифр равна сумме трёх последних).

Решение. В первой упаковке «счастливыми» в первой сотне являются талончики, в которых сумма двух последних цифр равна 1 + 5 + 8 – 4 = 14 – 4 = 10, а во второй сотне — 14 – 5 = 9.
Во второй упаковке «счастливыми» в первой сотне являются талончики, в которых сумма двух последних цифр равна 2 + 5 + 6 – 2 = 13 – 2 = 11, а во второй сотне — 13 – 3 = 10.
В третьей упаковке «счастливыми» в первой сотне являются талончики, в которых сумма двух последних цифр равна 4 + 6 + 2 – 0 = 12 – 0 = 12, а во второй сотне — 12 – 1 = 11.
Двузначные числа, сумма цифр которых равна 12, следующие: 39, 48, 57, 66, 75, 84, 93, всего их 7.
Двузначные числа, сумма цифр которых равна 11, следующие: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92, всего их 8.
Двузначные числа, сумма цифр которых равна 10, следующие: 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, всего их 9.
Двузначные числа, сумма цифр которых равна 9, следующие: 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, всего их 9.
Следовательно, в первой упаковке 9 + 9 = 18 «счастливых» талончиков, во второй —8 + 9 = 17, в третьей — 7 + 8 = 15. Наибольшее количество «счастливых» талончиков в первой упаковке.

Ответ. В первой.