«Золотой сундучок 2019»
Ответы к заданиям для учащихся 6 класса

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
В	Г	Б	Г	В	А	А	Б	Б	Г	Апрель и июль; сентябрь и декабрь; март и ноябрь	В третьей.	8	Не может

Решения заданий для учащихся 6 класса

1. В классе количество мальчиков, родившихся летом, равно количеству девочек, родившихся не летом. Кого в классе больше: учеников, родившихся летом, или всех девочек?

А. Учеников, родившихся летом. **Б.** Девочек.
В. Поровну. **Г.** Определить нельзя.

Решение. Обозначим количество мальчиков, родившихся летом, через $m_л$, а через d, $d_л$, $d_н$ — количество всех девочек в классе, количество девочек, родившихся летом и количество девочек, родившихся не летом, соответственно. Количество учеников, родившихся летом, равно $m_л + d_л$, а количество всех девочек $d = d_л + d_н$. По условию, $m_л = d_н$. Следовательно, $d = d_л + m_л$, то есть количество девочек равно количеству учеников, родившихся летом.

Ответ. В. Поровну.

2. Нужно 510 кг арбузов разложить в сетки. Сколько из чисел 25, 26, 28, 32 может быть заведомо достаточным количеством сеток для выполнения задания, если в каждой сетке должно быть не более 20 кг арбузов, а масса одного арбуза не больше 4 кг?

А. Четыре. **Б.** Три. **В.** Два. **Г.** Одно.

Решение. В каждую сетку можно положить не менее 16 кг, поскольку 20 – 4 = 16. Если в сетке менее 16 кг, то в неё можно положить ещё один арбуз, не нарушая условие.

Так как $510 = 16\cdot31 + 14$, то 32 сеток хватит, чтобы выполнить задание.

Если все арбузы по 3 кг, то в одну сетку помещается ровно 18 кг. Из равенства $510 = 28\cdot18 + 6$ следует, что 28 сеток недостаточно для выполнения задания. Тем более 25 и 26. Следовательно, искомый ответ — одно число, 32.

Ответ. Г. Одно.

3. Петя посчитал сумму номеров нескольких квартир в подъезде, занумерованных последовательными натуральными числами и получил число 98. Сколько квартир «пересчитал» Петя, если номер первой из них был 11?

А. 6. **Б.** 7. **В.** 8. **Г.** 9.

Решение. Так как неполное частное от деления 98 на 11 равно 8, то комнат не более 8.

Если бы их было 8, то сумма номеров равнялась бы $11+ 12 + \ldots + 18 = 11 + (11 + 1) + (11 + 2) + \ldots + (11 + 7) = 11\cdot8 + 1 + 2 + \ldots + 7 = 88 + 28 = 116$. Не подходит.

Если их было 7, то сумма номеров равна $11\cdot7 + 1 + 2 + \ldots + 6 = 77 + 21 = 98$.
Следовательно, квартир было 7.

Ответ. Б. 7.

4. Планируется, что в финальной части турнира чемпионата мира по футболу 2022 года будет участвовать 32 команды, разделённые на 8 групп, в каждой группе четыре команды. Каждая команда в групповой части турнира будет играть с каждой по одному матчу. В плей-офф (организация соревнования при которой участник выбывает из турнира после первого же проигрыша) выходят от каждой группы две команды, занявшие первые два места. Далее будут проводиться игры одной восьмой финала, четвертьфинала, полуфинала, игра за 3-е место и финальный матч. Сколько всего игр будет проведено в финальной части турнира?

А. 51. **Б.** 52. **В.** 63. **Г.** 64.

Решение. Так как в групповой части турнира в каждой группе каждая команда будет играть с каждой по одному матчу, а в каждой группе по 4 команды, то в каждой группе в этой части турнира будет проведено по 6 матчей: 1-2, 1-3, 1-4, 2-3, 2-4, 3-4. Всего в групповой части турнира будет проведено $6\cdot8 = 48$ матчей. В одной восьмой финала, четвертьфинале, полуфинале, в матче за 3 место и финальном матче будет проведено соответственно $8 + 4 + 2 + 1 + 1 = 16$ матчей. Следовательно, общее количество игр в турнире равно $48 + 16 = 64$.

Ответ. Г. 64.

5. На листе бумаги провели 7 горизонтальных прямых и несколько вертикальных, при этом образовалось 24 прямоугольника, не содержащих внутри точек пересечения прямых. Сколько проведено вертикальных прямых?

А. 3. **Б.** 4. **В.**5. **Г.** 6.

Решение. Пусть проведено n вертикальных прямых. При пересечении 7 горизонтальных прямых с n вертикальными образуется 6 строк и $(n - 1)$ столбцов, всего $6(n - 1)$ пар, состоящих из строки и столбца. Каждая такая пара образует прямоугольник, не содержащий внутри точек пересечения прямых. Таким образом, образовано $6(n - 1)$ прямоугольников, не содержащих внутри точек пересечения прямых. По условию, $6(n - 1) = 24$ или $n - 1 = 4$. Отсюда $n = 5$. Следовательно, проведено 5 вертикальных линий.

Ответ. В. 5.

6. Пете на день рождения подарили большую прямоугольную коробку с кубиками. Он начал из этих кубиков строить башню. Вначале он снял из коробки верхний слой — 77 кубиков, затем боковой слой — 55 кубиков, и, наконец, передний слой. Сколько кубиков первоначально было в коробке?

А. 462. **Б.** 426. **В.** 246. **Г.** Определить невозможно.

Решение. У коробки есть три измерения: высота, ширина и длина. Чтобы узнать, сколько кубиков в верхнем слое, нужно ширину умножить на длину, в боковом — высоту на ширину. Поэтому размер ширины коробки (в кубиках) является общим множителем чисел 77 и 55. У этих чисел общие множители только 1 и 11, то есть ширина коробки может равняться или длине 1 кубика, или сумме длин 11 кубиков.

Но из условия следует, что ширина не может равняться длине 1 кубика.

Если ширина коробки равна сумме длин 11 кубиков, то длина — сумме длин 77:11 = 7 кубиков, а высота после того, как верхний слой был снят, сумме длин 55:11 = 5 кубиков. В результате снятия верхнего слоя высота уменьшилась на длину 1 кубика. Следовательно, первоначальная высота коробки равна сумме длин 5 + 1 = 6 кубиков. В коробке $11 \cdot 7 \cdot 6 = 462$ кубика.

Ответ. А. 462.

7. Вини-Пух и Малыш одновременно отправились из своих домов по одной и той же дороге, соединяющей их дома, навстречу друг другу. Вини-Пух преодолевает расстояние между их домами за 3 ч, а Малыш — за 4 ч. При каком наименьшем времени их нахождения в пути, из указанных в ответах, встреча друзей состоится?

А. 2 ч. **Б.** 1 ч 30 мин. **В.** 1 ч. **Г.** 30 мин.

Решение. Расстояние между домами примем за 1. За 1 ч Вини-Пух преодолевает $\frac{1}{3}$ этого расстояния, а Малыш — $\frac{1}{4}$. Так как они движутся навстречу друг другу, то за 1 ч они преодолеют $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ всего расстояния. Встреча состоится, если в пути они будут находиться не менее $1: \frac{7}{12} = \frac{12}{7}$ ч или не менее $1\frac{5}{7}$ ч ≈ 1 ч 43 мин. Этому условию удовлетворяет только ответ **А.**

Ответ. А. 2 ч.

8. В два книжных магазина завезли соответственно 38 книг и 42 книги. Все книги новые и различные. И только ровно по одному экземпляру одной книги попало в оба магазина. Покупатель решил приобрести там две различные книги, по одной в каждом магазине. Сколькими способами он может это сделать?

А. 1596-ю. **Б.** 1595-ю. **В.** 80-ю. **Г.** 79-ю.

Решение. В первом магазине покупатель может выбрать книгу 38-ю способами, во втором — 42-мя способами, в обоих магазинах — $38 \cdot 42 = 1596$-ю способами. При этом нужно отсюда вычесть 1 случай, когда в обоих магазинах будет выбрана одна и та же книга. Следовательно, у покупателя $1596 - 1 = 1595$ возможностей для выбора книг.

Ответ. Б. 1595-ю.

9. В Швамбрании длительность года такая же, как у нас, но при подсчёте возраста её жителей не учитывают воскресенья. 35-летний Василий Иванович поехал на заработки в Швамбранию. Каков его возраст в этой стране?

А. 28 лет. **Б.** 30 лет. **В.** 32 года. **Г.** 36 лет.

Решение. Будем определять длительность года количеством недель в нём. Так как в Швамбрании длительность года такая же, как у нас, то она состоит из того же количества недель. Поскольку в Швамбрании при подсчёте возраста её жителей не учитывают воскресенья, то есть при этом подсчёте неделя там состоит из 6 дней, то эта неделя составляет $\frac{6}{7}$ от длительности недели у нас. Следовательно, возраст Василия Ивановича в Швамбрании составляет $\frac{6}{7}$ от его настоящего возраста или $\frac{6}{7} \cdot 35 = 30$ годам.

Ответ. Б. 30 лет

10. В олимпиаде по математике участвовал 21 шестиклассник из 6-А, 6-Б, 6-В. Число участников олимпиады из 6-А на столько превосходило число участников из 6-В, на сколько число участников из 6-В превосходило число участников из 6-Б. Сколько учащихся из 6-А класса участвовало в олимпиаде?

А. 6. **Б.** 7. **В.** 8. **Г.** Данных недостаточно.

Решение. Из условия следует, что удвоенное число учащихся 6-В класса, принявших участие в олимпиаде, равно сумме количеств участников олимпиады из 6-А и 6-Б. Из того, что всего в олимпиаде участвовал 21шестиклассник, следует, что утроенное число участников из 6-В равно 21. Следовательно, в олимпиаде участвовало 7 учащихся из 6-В, а из 6-А и 6-Б вместе 14. При этом количество учащихся из 6-А может быть любым от 8 до 13.

Ответ. Г. Данных недостаточно.

11. Какие пары месяцев в каждом году начинаются в одни и те же дни недели?

Решение. В каждом году в одни и те же дни недели могут начинаться месяцы, начиная с марта в связи с тем, что в феврале в високосный и невисокосный годы различное количество дней. Искомыми могут быть такие пары месяцев, для которых сумма количеств дней между ними кратна семи и близка к числу, кратному 30. Это:

апрель и июль: $30 + 31 + 30 = 91 = 7 \cdot 13 = 30 \cdot 3 + 1$;

сентябрь и декабрь: $30 + 31 + 30 = 91 = 7 \cdot 13 = 30 \cdot 3 + 1$;

март и ноябрь: $31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 = 245 = 7 \cdot 35 = 30 \cdot 8 + 5$.

Для остальных месяцев, как легко проверить, сумма количеств дней между двумя месяцами не кратна семи. Например, для мая эти суммы последовательно равны: 31, 61, 92, 123, 153, 184, 214. Ни одно из этих чисел некратно 7.

Ответ. Апрель и июль; сентябрь и декабрь; март и ноябрь.

12. В киоске по продаже проездных талончиков три упаковки с номерами: 1) 158 100 — 158 199, 2) 158 200 — 158 299, 3) 158 300 — 158 399. В какой из упаковок больше всего «счастливых» талончиков? (талончик считается «счастливым», если сумма первых трёх цифр равна сумме трёх последних).

Решение. Сумма первых трёх цифр во всех трёх упаковках равна 14. В первой упаковке «счастливыми» будут талончики, в которых сумма двух последних цифр равна 13, во второй — 12, в третьей — 11.

Двузначные числа, сумма цифр которых равна 13, следующие: 49, 58, 67, 76, 85, 94, всего 6 чисел.

Двузначные числа, сумма цифр которых равна 12, следующие: 39, 48, 57, 66, 75, 84, 93, всего 7 чисел.

Двузначные числа, сумма цифр которых равна 11, следующие: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92, всего 8 чисел.

Следовательно, самое большее число «счастливых» талончиков в третьей упаковке.

Ответ. В. В третьей.

13. Каждый из 5 человек знает ровно одну новость, причём все новости различны. Они сообщают по телефону эти новости друг другу, причём когда *X* звонит *У*, он рассказывает *У* все новости, которые он к этому времени знает, но *У* при этом звонке ничего не рассказывает *X*. Какое наименьшее количество звонков необходимо, чтобы все услышали все эти 5 новостей?

Решение. Наименьшее количество звонков будет в том случае, если кто-то будет знать все новости, которые он затем сообщит каждому. Этого можно добиться, если все позвонят одному и тому же лицу (это потребует 5 – 1 = 4 звонка), а затем это лицо позвонит каждому из остальных (ещё 4 звонка). Всего 8 звонков.

Это количество звонков наименьшее. Предположим, что количество звонков на 1 меньше. Это возможно в следующих случаях.

1) Кто-то не позвонил лицу, у которого «собираются» все новости. Тогда это лицо не услышит все новости.
2) Лицо, собравшее все новости, не позвонило какому-то лицу. Тогда это лицо не услышит все новости.

Если же звонки 5 лиц будут проведены хаотично, не одному и тому же лицу, то количество звонков, при которых все услышат все новости, только увеличится.

Ответ. 8.

14. В шахматном турнире каждый участник сыграл по две партии с каждым. Может ли у участника этого турнира быть 5 ничьих и побед втрое больше, чем поражений?

Решение. Предположим, что может. Обозначим количество поражений данного участника через x. Тогда число его побед равно $3x$. Всего он сыграл $3x + x + 5 = 4x + 5$ партий. Это выражение при всех натуральных значениях x принимает нечётные значения. Так как каждый участник сыграл по две партии с каждым, то общее число партий, сыгранных каждым участником, чётно. Получили противоречие.

Ответ. Не может.