«Золотой сундучок 2019»
Ответы к заданиям для учащихся 9 класса

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
В	В	Б	Г	Б	Б	Г	В	А	Г	$(p-1)(q-1)(r-1)$	Одним.	В первой.	Могла.

Решения заданий для учащихся 9 класса

1. Сумма номеров домов на «нечетной» стороне улицы равна 143. Сколько домов на этой стороне улицы?

А. 7. **Б.** 9. **В.** 11. **Г.** 13.

Решение. Обозначим номер первого дома на рассматриваемой стороне квартала через a, а через k — количество домов на этой стороне квартала. Тогда номера домов на этой стороне улицы — a, $a + 2$, …, $a + 2(k - 1)$, а их сумма равна $ka + 2(1 + \ldots + (k - 1))$. Преобразовав полученное выражение и, воспользовавшись условием, получим равенство $k(a + k - 1) = 143 = 11\cdot13$.
Так как множители в левой части равенства целые и не могут равняться 1, то $k = 11$ или $k = 13$.
Если $k = 13$, то $a + 13 - 1 = 11$ или $a = -1$. Этого быть не может, так как a — натуральное число.
Если $k = 11$, то $a + 11 - 1 = 13$ или $a = 3$. Следовательно, на этой стороне квартала 11 домов.

Ответ. В. 11.

2. В лесу растут белые грибы, маслята и подосиновики. Два человека вместе собрали 70 грибов, оба собрали одинаковое количество маслят и одинаковое количество подосиновиков, причём $\frac{5}{9}$ «улова» первого составляют маслята, а $\frac{7}{17}$ «улова» второго — подосиновики. Кто собрал больше белых грибов и на сколько?

А. Первый, на 1. **Б.** Второй, на 1. **В.** Первый, на 2. **Г.** Второй, на 2.

Решение. Количество грибов, собранных первым, кратно 9, то есть равно $9a$. Количество грибов, собранных вторым — кратно 17, то есть равно $17c$. По условию, $9a + 17c = 70$. Значение c не может быть больше 3. Легко проверить, что c не может равняться ни 3, ни 1: в первом случае $9a = 19$, во втором — $9a = 53$. Следовательно, $c = 2$, $a = 4$, то есть первый собрал 36 грибов, а второй — 34. Тогда из условия следует, что они собрали по $36\cdot\frac{5}{9} = 20$ маслят и $34\cdot\frac{7}{17} = 14$ подосиновиков. Значит, первый нашёл еще $(36 - 20 - 14) = 2$ белых гриба, а второй — $(34 - 20 - 14) = 0$, то есть первый нашёл на 2 белых гриба больше, чем второй.

Ответ. В. Первый, на 2.

3. Планируется, что в финальной части турнира чемпионата мира по футболу 2026 года будет участвовать 48 команд, разделённых на 16 групп, в каждой группе три команды. Каждая команда в групповой части турнира будет играть с каждой по одному матчу. В плей-офф (организация соревнования при которой участник выбывает из турнира после первого же проигрыша) выходят от каждой группы две команды, занявшие первые два места. Далее будут проводиться игры одной шестнадцатой финала, одной восьмой финала, четвертьфинала, полуфинала, игра за 3-е место и финальный матч. Сколько всего игр будет проведено в финальной части турнира?

А. 79. **Б.** 80. **В.** 63. **Г.** 64.

Решение. Так как в групповой части турнира в каждой группе каждая команда будет играть с каждой по одному матчу, и в каждой группе по 3 команды, то в каждой группе в этой части турнира будет проведено по 3 матча: 1-2, 1-3, 2-3. Всего в групповой части турнира будет проведено $3\cdot16 = 48$ матчей. В одной шестнадцатой финала, одной восьмой финала, четвертьфинале, полуфинале, в матче за 3 место и финальном матче будет проведено соответственно $16 + 8 + 4 + 2 + 1 + 1 = 32$ матча. Следовательно, общее количество игр в финальной части турнира равно $48 + 32 = 80$.

Ответ. Б. 80.

4. Учащемуся предложили выполнить тест, содержащий 10 заданий с двумя альтернативными ответами: «да», «нет». Он не готов к этому заданию, поэтому на все вопросы ответил наугад. Какова вероятность того, что он правильно ответит хотя бы на два вопроса теста?

А. $\frac{1}{5}$. **Б.** $\frac{1}{1024}$. **В.** $\frac{11}{1024}$. **Г.** $\frac{1013}{1024}$.

Решение. Опыт состоит в том, что учащемуся предстоит 10 раз выбрать ответ из двух возможных: «да», «нет». Каждый раз у него 2 варианта для выбора, поэтому общее количество исходов опыта будет равно: $\underbrace{2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}_{10 \text{ раз}}=1024$.

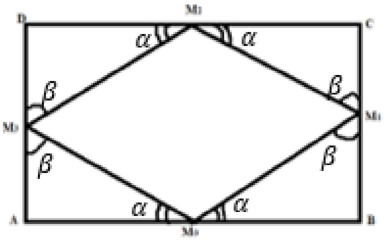
Событие «учащийся правильно ответит хотя бы на два вопроса теста» наступает при всех исходах опыта, кроме тех, когда он выбрал 10 раз ответ «нет» (при одном исходе опыта) или ровно 1 раз выбрал ответ «да» (при 10 исходах опыта). Таким образом, искомое событие наступает при 1024 – 1 – 10 = 1013 исходах опыта. Его вероятность равна $\dfrac{1013}{1024}$.

Ответ. Г. $\dfrac{1013}{1024}$.

5. Бильярдный шар находится на середине большого борта бильярдного стола прямоугольной формы. После удара шар отразился от трёх бортов и попал в исходное положение. Какова примерно длина этого пути шара с точностью до 1 дм, если длина стола 3 м, а ширина 2 м? (При ударе о борт угол отражения равен углу падения).

А. 70 дм . **Б.** 73 дм . **В.** 75 дм . **Г.** 78 дм.

Решение. На рисунке изображена траектория движения шара, удовлетворяющая условию. Из построения следует, что четырехугольник $M_0M_1M_2M_3$ – параллелограмм. Из равенства прямоугольных треугольников AM_0M_3 и BM_0M_1, следует равенство $M_0M_1 = M_0M_3$, то есть $BM_1 = M_1C$, $CM_2 = M_2D$, $DM_3 = M_3A$, то есть $M_0M_1M_2M_3$ – середины соответствующих сторон. Пользуясь теоремой Пифагора, найдём длину пути шара:



$$4M_0M_1 = 4\sqrt{M_0A^2 + AM_1^2} = 4\sqrt{\frac{9}{4}+1} = 2\sqrt{13} \approx 7{,}3 \text{ м.}$$

Ответ. Б. 73 дм.

6. В каждой из нескольких параллелей школы 1% круглых отличников. Известно, что таких учащихся не менее, чем в 30% количества классов в этих параллелях и не более, чем в 60% количества параллелей. Какое наибольшее количество учащихся может быть в школе, если в каждой параллели одинаковое количество классов, и во всех классах одинаковое количество учеников?

А. 400. **Б.** 600. **В.** 800. **Г.** 1200.

Решение. Обозначим количество параллелей через $\boldsymbol{p}$, количество классов в каждой параллели через $\boldsymbol{k}$, а количество учащихся в каждом классе через $\boldsymbol{n}$. Тогда в указанных параллелях учатся $\boldsymbol{pkn}$ учащихся и среди них $0{,}01\boldsymbol{pkn}$ круглых отличников. По условию справедливы неравенства:

$$0{,}01\,pkn \geq 0{,}3\,pk\,, \quad 0{,}01\,pkn \leq 0{,}6\,p.$$

Из первого неравенства следует, что $n \geq 30$, а из второго $kn \leq 60$. Так как k и n —целые числа, то из этих неравенств следует, что или $k = 1$ или $k = 2$. Если $k = 2$,то $n = 30$ и в школе $0{,}6\,p$ круглых отличников. Следовательно, $p = 5$ или $p = 10$. В этом случае наибольшее значение $\boldsymbol{pkn}$ равно 600.

Если $k = 1$, то $30 \leq n \leq 60$. Следовательно, $p \leq 0{,}01\,pn \leq 0{,}6p$, что невозможно.

Ответ: Б. 600.

7. Вини-Пух и Малыш отправились одновременно из своих домов в 10-00 по одной и той же дороге, соединяющей их дома, навстречу друг другу. Встретившись через некоторое время, они продолжали путь по той же дороге с теми же скоростями. Вини-Пух добрался до дома Малыша через 1 ч после встречи, а Малыш к дому Вини-Пуха — через 4 ч после встречи. В котором часу произошла их встреча?

А. В 15 ч. **Б.** В 14 ч. **В.** В 13 ч. **Г.** В 12 ч.

Решение. Обозначим скорости передвижения Вини-Пуха и Малыша соответственно через x км/ч и y км/ч. Пусть встреча произошла в t ч. Тогда до встречи Вини-Пух прошёл $(t – 10)x$ км, а Малыш — $(t – 10)y$ км. Эти расстояния после встречи преодолели соответственно Малыш за 4 ч и Вини-Пух за 1 ч. Из условия имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{(t-10)x}{y} = 4, \\ \dfrac{(t-10)y}{x} = 1. \end{cases}$$

Разделив левую часть первого уравнения на левую часть второго, а правую часть на правую, получим: $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 = 4$, $\dfrac{x}{y} = 2$, $x = 2y$. Тогда из первого уравнения будем иметь: $t – 10 = 2$, $t = 12$. Следовательно, встреча произошла в 12 ч.

Ответ. Г. В 12 ч.

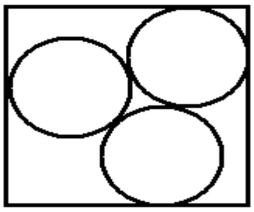
8. Две бригады рабочих укладывали плитки на двух участках дороги (первая бригада на первом участке, вторая — на втором), причём объём работы на втором участке вдвое больше, чем на первом, но в первой бригаде на 10 рабочих меньше, чем во второй. Производительность труда всех рабочих одинакова. Бригады одновременно начали работу, и, когда первая бригада закончила работу, вторая ещё работала. Какое наименьшее число рабочих могло быть в первой бригаде?

А. Определить невозможно. **Б.** 12. **В.** 11. **Г.** 10.

Решение. Пусть объём работы на первом участке равен a, производительность труда одного рабочего равна c, а количество рабочих в первой бригаде равно x, $x \in \mathbf{N}$. Тогда объём работы на втором участке равен $2a$, а количество рабочих во второй бригаде равно $x + 10$. Первая бригада закончила работу за $\frac{a}{cx}$ единиц времени, а вторая — за $\frac{2a}{c(x+10)}$ единиц времени. По условию, имеем неравенство $\frac{a}{cx} < \frac{2a}{c(x+10)}$, или $\frac{1}{x} < \frac{2}{x+10}$, или $x + 10 < 2x$, или $x > 10$. Наименьшее натуральное число, удовлетворяющее этому неравенству, равно 11.

Ответ. В. 11.

9. Какова примерно площадь квадратной салфетки, изображённой на рисунке, если диаметры кругов на ней равны 10 см? Выберите наиболее точное значение.



А. 400 см^2. **Б.** 450 см^2. **В.** 500 см^2. **Г.** 550 см^2.

Решение. Геометрической моделью указанной в условии салфетки является квадрат и три равных круга диаметром 10 см, касающиеся друг друга и сторон квадрата, как показано на рис. 1. Обозначим сторону квадрата через a.

Пусть O_1, O_2, O_3 — центры кругов, M и N — точки касания кругов со сторонами квадрата, а треугольник O_1AO_2 — прямоугольный. Из условия касания следует, что $AO_2 = a - O_1M - O_2N = a - 10$.

Диагональ квадрата BD является осью симметрии фигуры, состоящей из трёх кругов, поскольку точка O_2 принадлежит ей, а O_1 и O_3 симметричны относительно неё.

Так как $\angle O_1O_2O_3$ равен 60°, то в силу симметрии $\angle AO_2O_1 = \angle O_3O_2K = (90° - 60°):2 = 15°$. Из прямоугольного треугольника O_1AO_2 имеем равенство $\frac{a-10}{\cos 15°} = 10$ или $a = 10 + 10\cos 15°$. Так как $\cos 15° \approx 0{,}966$, то $a \approx 19{,}66$, $a^2 \approx 386{,}5$.

Ответ. А. 400 см^2.

10. Каждый из 20 человек знает ровно одну новость, причём все новости различны. Они передают по телефону эти новости друг другу, причём когда X звонит Y, он рассказывает Y все новости, которые он к этому времени знает, но Y при этом звонке ничего не рассказывает X. Какое наименьшее количество звонков необходимо, чтобы все услышали все эти 20 новостей?

А. 41. **Б.** 40. **В.** 39. **Г.** 38.

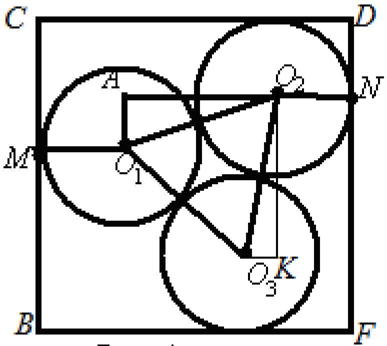


Рис. 1

Решение. Наименьшее количество звонков будет в том случае, если кто-то будет знать все новости, которые он затем расскажет каждому. Этого можно добиться, если все позвонят одному и тому же лицу (для этого потребуется 19 звонков), а затем это лицо позвонит каждому из остальных (ещё 19 звонков). Всего 38 звонков.

Это количество звонков наименьшее. Предположим, что количество звонков на 1 меньше. Это возможно в следующих случаях.

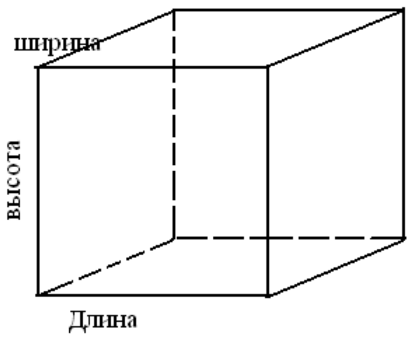
1) Кто-то не позвонил лицу, у которого «собираются» все новости. Тогда это лицо не услышит все новости.
2) Лицо, собравшее все новости, не позвонило какому-то лицу. Тогда это лицо не услышит все новости.

Если же звонки 20 лиц будут проведены хаотично, не одному и тому же лицу, то количество звонков, при которых все услышат все новости, только увеличится.

Ответ. Г. 38.

11. Пете на день рождения подарили большую прямоугольную коробку с одинаковыми к кубиками. По каждому из трёх направлений кубики плотно уложены в коробке. Длина основания коробки равна сумме длин p рёбер кубика, , а его ширина — сумме длин q рёбер кубика, высота коробки — сумме длин r рёбер кубика (см. рис.). Петя начал из этих кубиков строить башню. Вначале он снял из коробки верхний слой кубиков, затем боковой слой, и, наконец, передний слой. Сколько кубиков осталось в коробке?

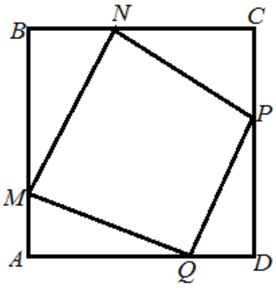
Решение. Количество кубиков в верхнем слое равно произведению количества кубиков, уложенных по ширине коробки на количество кубиков, уложенных по длине коробки, то есть $q\cdot p$. После снятия верхнего слоя высота части коробки, занятой кубиками, уменьшилась на длину одного ребра кубика и стала равной сумме длин $r - 1$ рёбер кубика, ширина и длина части коробки, занятой кубиками, не изменились. Количество кубиков в боковом слое равно произведению количества кубиков, уложенных по ширине коробки на количество кубиков, уложенных по высоте коробки, то есть $(r - 1)\cdot q$ кубикам. После снятия бокового слоя длина части коробки, занятой кубиками, уменьшилась на длину одного ребра кубика и стала равной сумме длин $p - 1$ рёбер кубика, ширина и высота не изменились. Количество кубиков в переднем слое равно $(r - 1)\cdot(p - 1)$.



Таким образом, всего Петя снял $qp + (r - 1)\cdot q + (r - 1)\cdot(p - 1) = qp + qr + rp - (p + q + r) + 1$. Общее количество кубиков в коробке равно $p\cdot q\cdot r$. Следовательно, в коробке осталось $p\cdot q\cdot r - (qp + qr + rp) + (p + q + r) - 1 = (p - 1)(q - 1)(r - 1)$ кубиков.

Ответ. $(p - 1)(q - 1)(r - 1)$.

12. Сколькими способами можно на границе квадратного участка поставить 4 столба так, чтобы расстояние между ними было не меньше длины стороны участка?



Решение. Один способ очевидный − в вершинах квадрата. Других способов нет. Докажем это. Предположим, что $MNPQ$ − четырёхугольник, вершины которого лежат на сторонах квадрата и хотя бы одна из его вершин не совпадает с вершиной квадрата, а длины его сторон не меньше длины стороны квадрата a (см. рис.). Из предположения и неравенств треугольника следуют неравенства:
$4a \le MN + NP + PQ + QM < (MB + BN) + (NC + CP) + (PD + DQ) + (QA + \mathrm{AM}) = 4a$, то есть $4a < 4a$. Получили противоречие. Следовательно все вершины четырёхугольника $MNPQ$ являются вершинами квадрата.

Ответ. Одним.

13. В киоске по продаже проездных талончиков имеется две упаковки с номерами: 1) 159 000 — 159 499, 2) 679 500 — 679 999. В какой из упаковок больше всего «счастливых» талончиков? (талончик считается «счастливым», если сумма первых трёх цифр равна сумме трёх последних).

Решение. Для сравнения количеств «счастливых» талончиков в упаковках составим таблицу, в которой для каждой упаковки укажем суммы двух последних цифр «счастливых» талончиков в каждой из пяти сотен.

1-я упаковка	сумма двух последних цифр «счастливых» талончиков	2-я упаковка	сумма двух последних цифр «счастливых» талончиков
159 000-159099	15	679 500-679 599	17
159 100-159199	14	679 600-679 699	16
159 200-159299	13	679 700-679 799	15
159 300-159399	12	679 800-679 899	14
159 400-159499	11	679 900-679 999	13

Из этой таблицы следует, что в 1-й упаковке «счастливых» талончиков больше, чем во второй, так как количество двузначных чисел, сумма цифр которых равны 11 и 12 больше количества двузначных чисел, сумма цифр которых равны 17 и 16. Действительно, 11 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6 = 6 + 5 = 7 + 4 = 8 + 3 = 9 + 2.
12 = 3 + 9 = 4 + 8 = 5 + 7 = 6 + 6 = 7 + 5 = 8 + 4 = 9 + 3.
16 = 7 + 9 = 8 + 8 = 9 + 7.
17 = 8 + 9 = 9 + 8.

Ответ. В первой.

14. Доля девочек в 9-х классах гимназии "Престиж" равнялась 50%, а в лицее "Лидер" — 62, 5%. В следующем учебном году в каждом из указанных учреждений доля девочек не изменилась. Могла ли доля девочек в двух учреждениях стать большей, чем в предыдущем учебном году?

Решение. Могла. Например, если в гимназии в 9-х классах было 40 девочек и 40 мальчиков, а в лицее 30 мальчиков и 50 девочек, то общая доля девочек в двух учреждениях равна (40+50):160 = 0,5625,т.е. 56,25%.
В следующем учебном году в гимназии состав учащихся не изменялся, а в лицее стало 36 мальчиков и 60 девочек. Доля девочек в лицее равна 60:96 = 0,625 или 62,5%. Доля девочек в двух учреждениях равна 100/176 ≈ 0,56818, то есть приближённо равна 56,82%, что больше 56,25%.

Ответ. Могла.