Решения заданий конкурса «Золотой сундучок 2021»
для учащихся 8 класса
Ответы к заданиям с выбором ответа

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Б	**А**	**В**	**Г**	**Д**	**В**	**Б**	**В**	**В**	**А**

1. В коробке несколько красных шариков, а остальные — белые. Если из коробки вынуть один красный шарик, то количество красных шариков в ней составит $\frac{1}{4}$ количества оставшихся в коробке шариков. Когда из коробки вынули два белых шарика , то количество белых шариков в ней составило $\frac{1}{3}$ количества оставшихся в коробке шариков. Сколько шариков в коробке?

А. 4. **Б.** 5. **В.** 6. **Г.** 7.

Решение. Обозначим количество красных шариков в коробке через x, а количество белых шариков — через y. Тогда изначально в коробке было $x + y$ шариков.

Если из коробки вынуть один красный шарик, то в коробке останется $x + y - 1$ шариков. Из условия следует равенство $x - 1 = \frac{1}{4}(x + y - 1)$ или $3x - y = 3$.

Когда из коробки вынули два белых шарика, то всего шариков в коробке осталось $x + y - 2$, из них $y - 2$ белых. Из условия следует равенство $y - 2 = \frac{1}{3}(x + y - 2)$ или $x - 2y = -4$. Получили систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x - y = 3, \\ x - 2y = -4. \end{cases}$$

Выразив y из первого уравнения через x и подставив во второе, получим уравнение $5x = 10$. Следовательно, $x = 2$, $y = 3\cdot 2 - 3 = 3$. В коробке $2 + 3 = 5$ шариков.

Ответ. Б. 5.

2. Куб, ребро которого равно p см, где p — натуральное число, сначала покрасили, а затем разрезали на единичные кубики. При каких значениях p количество кубиков, у которых нечетное число окрашенных граней равно количеству кубиков, у которых окрашено четное число граней? (ноль — четное число, так как делится на 2 без остатка)

А. 4. **Б.** 5. **В.** 6. **Г.** 7.

Решение. После разрезания данного куба образуется p^3 единичных кубиков, из которых $(p-2)^3$ не имеют ни одной окрашенной грани. Две окрашенные грани будут иметь кубики, ровно одно ребро которых располагалось на ребре данного куба. Так как у куба 12 ребер, то таких кубиков $12(p - 2)$. Следовательно, количество кубиков, у которых окрашено четное число граней равно $(p-2)^3 + 12(p-2)$.

Ровно три окрашенные грани имеет 8 кубиков, у которых одна из вершин является вершиной данного куба. Так как у куба 6 граней, то количество кубиков, которые имеют только одну окрашенную грань равно $6(p-2)^2$. Следовательно, количество кубиков, у которых окрашено нечетное число граней равно $6(p-2)^2 + 8$.

Если количество кубиков, у которых нечетное число окрашенных граней равно количеству кубиков, у которых окрашено четное число граней, то справедливо равенство $(p-2)^3 + 12(p-2) = 6(p-2)^2 + 8$.

Сделав в нем замену $p - 2 = x$, получим уравнение $x^3 - 8 = 6x^2 - 12\underline{x}$ или $(x-2)(x^2 - 4x + 4) = 0$ или $(x-2)^3 = 0$. Следовательно, $x = 2$, а $p = 4$.

Ответ. А.4

3. Клумба имеет форму прямоугольника с периметром 14 метров. На сколько увеличится площадь этой клумбы, если длину каждой стороны увеличить на 1 метр?

А. На 15 м^2. **Б.** На 14 м^2. **В.** На 8 м^2. **Г.** На 7 м^2.

Решение. Обозначим длину меньшей стороны прямоугольника через a м, а большей — через b м. Тогда периметр прямоугольника будет равен $2a + 2b$ (м), что по условию равно 14 м. Получаем равенство $2a + 2b = 14$. Отсюда выразим b через a: $b = 7 - a$.

Площадь прямоугольника равна $ab = a(7 - a) = 7a - a^2$.

Если мы увеличим стороны на 1 метр, то площадь увеличенного прямоугольника будет равна $(a + 1)(b + 1) = (a + 1)(8 - a) = 8a - a^2 + 8 - a = 7a + 8 - a^2$.

Найдём разность этих выражений: $7a + 8 - a^2 - (7a - a^2) = 8$. Получили, что площадь увеличенного прямоугольника больше площади изначального на 8 м^2.

Ответ. В. На 8 м^2.

4. Фирма планировала получить 8% прибыли от продажи партии товара. В связи с падением спроса четверть товара, оставшегося от продажи трех четвертей, фирма продала на 20% дешевле. Каков процент прибыли получился в результате продажи всей партии товара?

А. 5,6%. **Б**. 4,2%. **В**. 3,6%. **Г.** 2,6%.

Решение. Обозначим через x количество единиц продаваемого товара, через y зедов (зед — условная денежная единица) — цену, по которой покупалась единица товара; z зедов — цена для продажи единицы купленного товара, которая обеспечивает 8% прибыли. Следовательно, $xz = 1{,}08xy$. Тогда xz — выручка, обеспечивающая 8% прибыли. По цене z зедов продали $\frac{3}{4}$ единиц товара, при этом выручили $\frac{3}{4}xz = 0{,}75\ xz$ зедов. От продажи $\frac{1}{4}x$

товара по цене 0,8z фирма выручила $\frac{1}{4}x \cdot 0,8z = 0,2\,xz$ зедов. Всего от продажи купленного товара фирма выручила $0,75\,xz + 0,2\,xz = 0,95\,xz$ зедов.

Так как $xz = 1,08xy$, то справедливо равенство $0,95\,xz = 1,08xy \cdot 0,95 = 1,026\,xy$. Этот результат показывает, что в результате продажи всей партии товара прибыль составила 2,6%.

Ответ. Г. 2,6%.

5. Код сейфа состоит из 5-и двоек и троек. Известно, что в коде двоек не меньше чем троек, а при делении на 12 остаток равен 5. Чему равна сумма цифр кода?

А.11. **Б.** 12. **В.** 13. **Г.** 14.

Решение. Из условия следует, что при делении кода на 4 остаток равен остатку от деления числа 5 на 4, то есть 1. При делении кода на 4 остаток равен остатку от деления на 4 числа, образованного двумя последними цифрами кода. Из чисел 22, 23, 32, 33 только последнее при делении на 4 имеет остаток равный 1. Следовательно, искомый код имеет вид *авс*33, где *а*, *в*, *с* — цифры 2 или 3.

Так как в коде двоек не меньше чем троек, то код имеет вид 22233.Но остаток при делении на 12 этого кода равен 9. Следовательно искомого кода не существует.

Ответ. Д

6. В группе детского сада 5 мальчиков и 7 девочек. Сколько существует вариантов раздать на утреннике 83 конфеты так, чтобы все мальчики получили по одинаковому количеству конфет, и все девочки тоже получили по одинаковому количеству конфет?

А. Ни одного. **Б.** Один. **В.** Два. **Г.** Три.

Решение. Обозначим количество конфет, которые получил каждый мальчик, через *x,* а количество конфет, которые получила каждая девочка, через *y*. Тогда всего дети получили $5 \cdot x + 7 \cdot y$ конфет, что по условию равно

83. Отсюда $5 \cdot x = 83 - 7 \cdot y$. Тогда, $83 - 7 \cdot y$ должно делиться на 5, т.е. заканчиваться 0 или 5. Очевидно, y не может быть больше 12, так как $83 - 7 \cdot 12 < 0$. Так как $83 - 7 \cdot y$ должно заканчиваться 0 или 5, то $7 \cdot y$ должно заканчиваться либо 3, либо 8. Таких значений y, меньших 12, только два: 9 и 4.

Ответ. В. Два

7. Боря старше Димы, сумма возрастов Сережи и Антона меньше суммы возрастов Бори и Димы, а сумма возрастов Сережи и Димы равна сумме возрастов Бори и Антона. Кто младше всех?

А. Дима. **Б.** Антон. **В.** Сережа. **Г.** Определить невозможно.

Решение. Будем обозначать возрасты ребят первыми буквами их имён. Тогда условие можно будет записать с помощью таких соотношений:

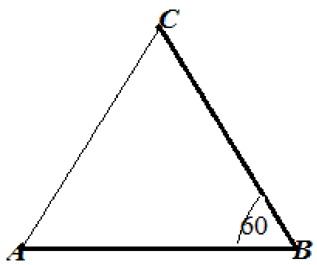
Б > Д; Б + Д > С + А; Б + А = С + Д.

Из 2-го и 3го соотношений следует, что Д > А. Так как Б > Д, Д > А, то Б > А. Из равенства Б + А = С + Д следует, С – А = Б – Д > 0, т.е. С > А. Следовательно, младше всех Антон.

Ответ. Б. Антон..

8. Турист прошёл 8 км по прямой дороге, затем он снова пошёл по прямой дороге, которая составляла с предыдущей дорогой угол 60°. По этой дороге он тоже преодолел 8 км и устроил привал. Найдите расстояние от точки выхода до места привала.

А. 4 км. **Б.** 6 км. **В.** 8 км. **Г.** 16 км.

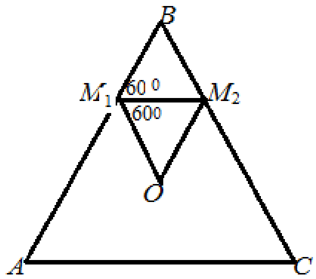


Решение. На рисунке изображена траектория движения туриста: из точки A он вышел, в точке B повернул на другую дорогу, в точке C устроил привал. По условию, AB = 8 км, BC = 8 км, $\angle ABC$ = 60°. Требуется найти AC. Равнобедренный треугольник ABC является равносторонним. Следовательно, AC = 8 км.

Ответ. В. 8 км.

9. Бильярдный шар находился в центре бильярдного стола , имеющего форму правильного треугольника.. После удара шар двигался параллельно одному из бортов и отразился сначала от одного борта, затем от другого. Под каким углом он отразится от третьего борта? (При ударе о борт угол отражения равен углу падения).

А. 30°. **Б.** 45°. **В.** 60°. **Г.** 90°.



Решение. Докажем, что шар должен быть направлен под углом 60° к первому борту стола. Действительно, если шар вышел из центра стола, точки O, и попал в точку M_1, где отрезок OM_1 параллелен BC (см. рис.), то угол OM_1A равен углу CBA и равен 60°, так как при ударе о борт угол отражения равен углу падения. Следовательно, 60° равен и угол BM_1M_2, где M_2 — точка стороны BC. А тогда 60° равны углы CM_2O и M_1M_2O . Отразившись от борта BC шар будет двигаться параллельно борту AB . Следовательно, от борта AC он отразится под углом 60°.

Ответ. В. 60°.

10. Петя — любитель математики — во время прогулок, складывая четырёхзначный номер проезжающего автомобиля с числом, образованными теми же цифрами, но в обратном порядке, нашёл наибольший общий делитель всех полученных сумм. Чему он равен?

А. 11. **Б.** 101. **В.** 110. **Г.** 111.

Решение. Произвольное четырёхзначное число имеет вид: $1000a + 100b + 10c + d$, где a, b, c, d — цифры соответственно тысяч, сотен, десятков, единиц. Число, образованное теми же цифрами, но в обратном порядке, равно $1000d + 100c + 10b + a$. Сумма указанных чисел равна $1001a + 110b + 110c + 1001d$. Первое и последнее слагаемые при всех произвольных a и d делятся на 1001 или на 7, 11, 13 ($1001 = 7{\cdot}11{\cdot}13$), а второе и третье — на 110 или на 2, 5, 11. Следовательно, искомым наибольшим общим делителем является число 11.

Ответ. А. 11.

11. В семье моего товарища произведение возрастов двух детей, сейчас равно возрасту их отца. Может ли это произойти и через несколько лет? (возраст — это целое число полностью прожитых лет).

Решение. Обозначим возраст первого ребёнка в настоящее время через x, возраст второго — через y, возраст отца — через z. По условию $xy = z$. Предположим, что и через k лет произведение возрастов двух детей будет равняться возрасту их отца, то есть выполняется равенство

$$(x + k)(y + k) = z + k \text{ или } k^2 + ky + kx = k \text{ или } k = 1 - (x + y).$$

Так как $x + y$ больше 2, то k отрицательно. Поэтому в будущем не может произведение возрастов двух детей равняться возрасту их отца, если сейчас это справедливо.

Ответ. Не может.

12. В школе 5 шестых классов. Может ли так быть, что в 6-А и 6-Б вместе 27 учащихся, в 6-Б и 6-В — 39, в 6-В и 6-Г — 57, в 6-Г и 6-Б Д — 33, в 6-Д и 6-А — 48 учащихся?

Решение. Обозначим количество учеников каждого класса заглавной буквой этого класса. Тогда в 6-А учится А учеников, в 6-Б Б учеников и.д. Согласно условию, составим равенства:

А + Б = 27, Б + В = 39, В + Г = 57, Г + Д = 33, Д + А = 48.

Если сложить все правые и левые части полученных равенств, то получим, что удвоенное количество учащихся во всех шестых классах равно 204, а А + Б + В + Г + Д = 102. Вычтя из этого равенства равенства В + Г = 57, Д + А = 48, получим, что Б = 102 – (57 + 48) < 0, что невозможно. Получили противоречие. Следовательно, ответ на вопрос, поставленный в условии, отрицателен.

Ответ. Не может.