Задания для 8 класса

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
А	Б	В	Б	Г	Б	А	В	Б	Б	Цифра 0	1)Нет 2)Нет 3)Да	360 см^2	4

1. В кошельке 20 монет – двухрублёвые, пятирублёвые и десятирублёвые. Известно, что всего этих монет в кошельке на сумму не более 58 рублей. Сколько в кошельке десятирублёвых монет?

А. Одна. **Б.** Две. **В.** Три. **Г.** Определить невозможно.

□ Обозначим через *x*. *y*, *z* количество монет соответственно двухрублёвых, пятирублёвых и десятирублёвых. Из условия следует система уравнения и неравенства:

$$\begin{cases} x+y+z=20, \\ 2x+5y+10z \le 58. \end{cases}$$

Воспользовавшись уравнением системы, получим равенства:

$$2x+5y+10z=2(x+y+z)+3y+8z=40+3y+8z.$$

Тогда неравенство системы равносильно неравенству $3y+8z \le 18.$

Так как по условию *y* и z – натуральные числа, то из полученного неравенства следует, что *z* может равняться только 1. Следовательно, в кошельке одна десятирублёвая монета.

Ответ. А. Одна.

2. В театральном зале 300 мест, которые разделены на 3 категории по стоимости билетов. Билет на место I категории стоит 500 руб., II – 400 руб., а III – 300 руб. Стоимость всех билетов на все места зала составляет 125 000 руб. Каких мест в зале больше и на сколько: I или III категории?

А. I, на 100 мест. **Б.** I, на 50 мест. **В.** III, на 50 мест. **Г.** III, на 100 мест.

□ Обозначим через *x*, *y*, *z* количество мест I, II и III категории соответственно. Тога из условия следует система уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=300, \\ 500x+400y+300z=125000. \end{cases}$$

Если правую и левую части первого уравнения умножить на 400, а затем их вычесть из правой и левой частей второго уравнения, то получим уравнение 100*x* – 100*z* = 5000 или *x* – *z* = 50. Следовательно, количество мест I категории больше количества мест III категории на 50.

Ответ. Б. I, на 50 мест.

3. Чтобы курьеру подняться с 1-го на 11-й этаж по лестнице, нужно затратить столько килокалорий, сколько ему потребуется, чтобы спуститься по такой же лестнице с 16-го этажа на 1-й. На какое количество этажей курьер может подняться по такой же лестнице, чтобы, вернувшись обратно, затратить такое же количество килокалорий, как и при подъёме на 10-й этаж?

А. На 4. **Б.** На 5. **В.** На 6. **Г.** На 7.

□ Обозначим через *x*, *y* количество килокалорий, которое затрачивает курьер соответственно при подъёме на один этаж и при спуске на один этаж. Из условия следует равенство 10*x* = 15*y* или $y=\frac{2}{3}x.$

При подъёме по лестнице на *k* этажей и при спуске по ней на *k* этажей курьер затрачивает *kx* + *ky* килокалорий. Из условия имеем уравнение *kx* + *ky* = 10*x* или $k\left(x+\frac{2}{3}x\right)=10x$ или $k=\frac{10x}{\frac{5}{3}x}=6$.

Следовательно, искомое количество этажей равно 6, курьер может подняться на 6 этажей.

Ответ. В. На 6.

4. За круглым столом сидят мужчины и женщины так, что по одну сторону от каждого сидящего сидит мужчина, а по другую – женщина. Сколько человек сидит за столом, если среди них по крайней мере трое мужчин, не более девяти женщин и напротив мужчины сидит женщина (стулья стоят на одинаковом расстоянии друг от друга вдоль стола)?

А. 16. **Б.** 12. **В.** 8. **Г.** 6.

□ Если рассаживать людей за столом в соответствии с условием, начиная с мужчины M_1 (см. рис.1), то приходим к выводу, что мужчины и женщины сидят парами – двое мужчин, двое женщин, двое мужчин и т. д. Следовательно, количество сидящих за столом кратно 4, из них половина мужчин, половина женщин. Из условия следует, что это количество не менее 8 и не более 16. А так как напротив мужчины сидит женщина, то только одно количество из 8, 12, 16 удовлетворяет этому условию. В этом можно убедиться изобразив рассадку на рисунках для каждого из указанных случае (см.рис.2,3,4).

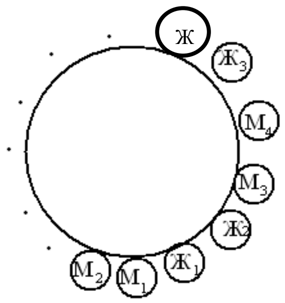


Рис. 1

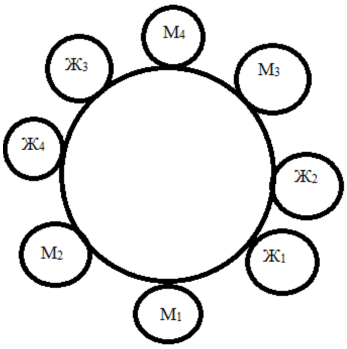


Рис.2

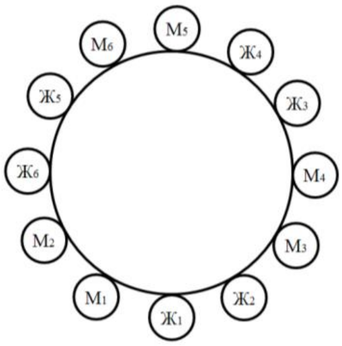


Рис. 3

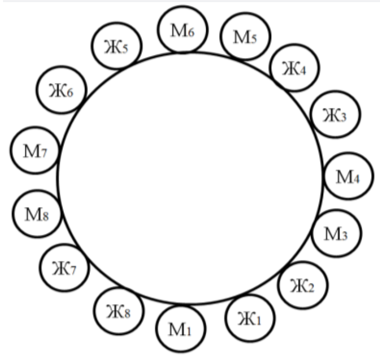


Рис. 4

Ответ: Б. 12

5. В компьютерной игре нужно преодолеть 10 препятствий. Каждое препятствие, которое не удалось преодолеть за отведенное время, заменяется одним и тем же небольшим количеством новых препятствий. Игра завершена, если не осталось непреодолённых препятствий. Приз получает тот, кто смог завершить игру, не преодолев не более 20 препятствий. Роман получил приз, преодолев 44 препятствия. Сколько препятствий ему не удалось преодолеть?

А. 20. **Б.** 19. **В.** 18. **Г.** 17.

 Обозначим через n искомое количество препятствий, а через k – количество добавляемых препятствий, когда не удалось преодолеть очередное препятствие. После каждого такого препятствия количество препятствий, которые нужно преодолеть, увеличивается на k – 1. Всего количество препятствий увеличилось на $n(k – 1)$. Из условия следует равенство $n(k – 1) = 44 – 10 = 34$. Условию удовлетворяет только одно решение $k = 3$, $n = 17$.

Ответ. Г. 17.

6. Два фермера привезли на оптовый рынок для продажи зерно. Первый привёз 10 мешков, а второй 16. Каждый продал в течение первого дня часть мешков (не менее одного, но не все) по одной и той же цене. Причём первый продал на 3 мешка больше, чем второй. На второй день цена на зерно уменьшилась так, что фермеры, продав оставшиеся мешки по одной и той же цене, выручили за два дня равные суммы денег. На сколько процентов уменьшилась цена на зерно во второй день?

А. На $33\frac{1}{3}$ %. **Б.** На $66\frac{2}{3}$ %. **В.** На 100%. **Г.** На 200%.

 Обозначим через x и y количества мешков, проданных соответственно первым и вторым фермером в первый день, а через c руб. и c_1 руб. цены одного мешка зерна в первый и второй день. Первый фермер выручил $cx + c_1(10 – x)$ руб., а второй – $cy + c_1(16 – y)$ руб. По условию имеем уравнение

$$cx + c_1(10 – x) = cy + c_1(16 – y) \text{ или } (x – y)(c – c_1) = 6c_1 \text{ или } \frac{6}{x-y} = \frac{c}{c_1} - 1.$$

Так как $x – y = 3$, то $\frac{c}{c_1} = 3$ или $\tilde{n} = 3\tilde{n}_1$.Цена на зерно на второй день уменьшилась на

$$\frac{c-c_1}{c}\cdot 100\% = \frac{3c_1 - c_1}{3c_1}\cdot 100\% = \frac{2}{3}\cdot 100\% = 66\frac{2}{3}\%.$$

Ответ. Б. $66\frac{2}{3}$ %

7. В трёх 5-х классах 5-А, 5-Б и в 5-В 94 учащихся. $\frac{3}{13}$ учащихся 5-А изучают дополнительный иностранный язык. В 5-Б дополнительный иностранный язык изучают $\frac{4}{11}$ учащихся 5-Б и 5-В, а в 5-В – $\frac{8}{29}$ учащихся этого класса. Сколько всего учащихся указанных трёх классов изучают дополнительный иностранный язык?

А. 37. **Б.** 36. **В.** 35. **Г.** 34.

 Количество учащихся 5-А класса делится, по условию, на 13, то есть оно может равняться 13 или 26, или 39, или 52. Тогда в 5-Б и в 5-В вместе соответственно 94 – 13 = 81, или 94 – 26 = 68, или 94 – 39 = 55, или 94 – 52 = 42 учащихся. Общее количество учащихся 5-Б и 5-В, по условию, делится на 11. Из четырёх полученных чисел на 11 делится только 55. Следовательно, в 5-Б и 5-В вместе 55 учащихся, а в 5-А – 39. Количество учащихся 5-В класса, по условию, делится на 29, то есть оно может равняться только 29, тогда в 5-Б – 55 – 29 = 26 учащихся. Таким образом, дополнительный иностранный язык изучают соответственно $39\cdot\frac{3}{13} = 9$, $55\cdot\frac{4}{11} = 20$ и $29\cdot\frac{8}{29} = 8$ учащихся, всего 9 + 20 + 8 = 37 человек.

Ответ. А. 37.

8. При оплате услуг через платёжный терминал взимается комиссионный сбор 5%. Терминал принимает суммы, кратные 10 рублям. Сергей хочет положить на счёт своего мобильного телефона не меньше 500 рублей. Какую минимальную сумму он должен положить в приёмное устройство данного терминала?

А. 550 руб. **Б.** 540 руб. **В.** 530 руб. **Г.** 520 руб.

 Обозначим искомую сумму через x рублей. Согласно условию задачи, должно выполняться неравенство $x(1 - 0{,}05) \geq 500$ или $x \geq 526\frac{6}{19}$.

Так как терминал принимает суммы, кратные 10 рублям, то минимальная сумма составит 530 рублей.

Ответ. В. 530 руб.

9. Заработные платы сотрудников некоторой фирмы составляли 2000, 3000, 4000 и 5000 зедов в месяц (зед – условная денежная единица). Средняя зарплата одного сотрудника этой фирмы выражалась целым числом тысяч зедов. Через некоторое время сотрудникам, получавшим 2000, 3000, 4000 зедов, увеличили зарплату на 1000 зедов; сотрудникам, получавшим 5000 зедов в месяц, зарплату оставили без изменения. Какова средняя зарплата сотрудников этой фирмы, если не все сотрудники получали одинаковые зарплаты?

А. 2000 зедов. **Б.** 3000 зедов. **В.** 4000 зедов. **Г.** 5000 зедов.

 Пусть в фирме работало n человек, сумма размеров их зарплат равна S зедов. После увеличения зарплат на 1000 зедов, эта сумма увеличилась на k тысяч зедов ($0 \leq k \leq n$), а средняя зарплата одного сотрудника – на $\frac{k}{n}$ тысяч зедов. Число $\frac{k}{n}$ будет целым или при $k = 0$ (если все сотрудники получали по 5000 зедов, что противоречит условию), или при $k = n$. В этом случае в фирме нет сотрудников, получавших 5000 зедов в месяц. В этом случае сотрудники получали в месяц или 2000, или 3000, или 4000 зедов. Но тогда средняя зарплата одного сотрудника не могла равняться ни 2000, ни 4000 зедов, так как это возможно лишь в случае, если все зарплаты одинаковы, что противоречит условию. Следовательно, размер средней зарплаты одного сотрудника равен 3000 зедов.

Ответ. Б. 3000 зедов.

10. В пиццерии подают два вида прямоугольной пиццы одинаковой толщины, но разного размера. Площадь маленькой пиццы составляет 78% площади большой пиццы и стоит 15 зедов (зед – условная денежная единица). Большая пицца стоит 20 зедов. Какую пиццу выгоднее покупать?

А. Одинаково. **Б.** Маленькую. **В.** Большую. **Г.** Определить невозможно.

 Обозначим через S см^2 площадь большой пиццы, тогда площадь маленькой пиццы будет равна $0{,}78S$ см^2. Выразим через S площадь каждой пиццы, которую можно приобрести на 1 зед. Площадь маленькой пиццы равна $0{,}78S$ см^2, она стоит 15 зедов, поэтому на 1 зед можно приобрести $0{,}78S:15 = 0{,}052\,S$ см^2 пиццы. Площадь большой пиццы равна S см^2, она стоит 20 зедов, поэтому на 1 зед можно приобрести $S:20 = 0{,}05S$ см^2 пиццы. Следовательно, на 1 зед можно приобрести большую площадь маленькой пиццы, чем большой. Выгоднее покупать маленькую пиццу.

Ответ. Б. Маленькую.

11. Каких цифр понадобится меньше всего для нумерации страниц книги объёмом 248 листов, если на первых двух и на последних двух страницах номера страниц не ставят?

 Книга содержит 496 страниц. Для их нумерации потребуются числа 3, 4, 5, …, 493, 494. Для записи двухзначных чисел цифры 1, 2, …, 9 требуются в одинаковом количестве (по 19), а цифра 0 – в меньшем (9). В записи двух последних цифр трёхзначных номеров одной сотни все цифры используются в равном количестве. Поэтому для записи трехзначных номеров цифр 0, 5, 6, 7, 8, 9 потребуется меньше, чем остальных. Для записи однозначных и двузначных номеров цифра 0 используется в значительно меньшем количестве, чем все остальные цифры. Следовательно, цифра 0 является искомой.

Ответ. Цифра 0.

12. Может ли сумма цифр года рождения человека, родившегося в 20-м столетии, быть в два раза больше суммы цифр года, в котором ему исполнилось:
1) 50 лет; 2) 60 лет; 3) 70 лет?

□ Юбилейный для этого человека год не может быть в 20-м столетии, так как должно выполняться равенство $1 + 9 + a + b = 2(1 + 9 + a + m + b)$ или $a + b + 2m + 10 = 0$, где через $\overline{19ab}$ обозначен год рождения, а через $\overline{19mb}$ – юбилейный год. Следовательно, юбилейный год имеет вид $\overline{20mb}$.

1) Имеем равенства: $m = a + 5 – 10 = a – 5$, $1 + 9 + a + b = 2\ (2 + a + b – 5)$ или $a + b = 16$. Наименьшее натуральное значение a, при котором это уравнение имеет решение во множестве натуральных чисел, равно 7. Тогда $b = 9$ и год 2029 – юбилейный, но в будущем. Следовательно, в этом случае условие не может выполняться.

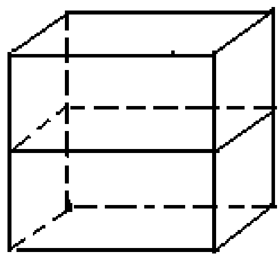
Случаи 2) и 3) рассматриваются аналогично.

2) $m = a – 4$, $1 + 9 + a + b = 2(2 + a + b – 4)$ или $a + b = 14$. Если $a = 5$, $b = 9$, то год 2019 – юбилейный в будущем.

3) $m = a – 3$, $1 + 9 + a + b = 2(2 + a + b – 3)$ или $a + b = 12$. Если $a = 4$, $b = 8$, то год 2018 – юбилейный для родившихся в 1948 году. Если $a = 3$, $b = 9$, то год 2009 – юбилейный для родившихся в 1939.

Ответ. 1(Нет; 2) нет; 3) да.

13. Из шести равных деревянных параллелепипедов склеили три параллелепипеда, каждый их которых состоит из двух, взятых из шести. Их площади поверхностей равны 64 см^2, 106 см^2, 130 см^2. Чему равна суммарная площадь поверхности шести деревянных параллелепипедов?



□ Обозначим площади трёх граней, выходящих из одной вершины данного деревянного параллелепипеда, через a см^2, b см^2, c см^2. Так как площади поверхностей склеенных параллелепипедов различны, то они получены склеиванием различных граней. Поэтому площади их поверхностей будут равны сумме учетверённой площади двух граней и удвоенной площади третьей грани (см. рис.). Имеет место следующая система уравнений:

$$\begin{cases} 4a + 4b + 2c = 64, \\ 4a + 2b + 4c = 106, \\ 2a + 4b + 4c = 130. \end{cases}$$ Сложив почленно эти уравнения, получим:

$10a + 10b + 10c = 300$, или $2(a + b + c) = 60$. Поскольку площадь поверхности каждого данного деревянного параллелепипеда равна $2(a + b + c)$, то искомая суммарная площадь поверхности шести равных деревянных параллелепипедов равна $60 \cdot 6 = 360$ см^2.

Ответ. 360 см^2.

14. Петя и Вася за неделю получили по 16 оценок «двоек», «троек», «четвёрок» и «пятёрок». Причём Петя получил «двоек» столько, сколько Вася получил «троек», а «троек» столько, сколько Вася «четвёрок», а «четвёрок» столько, сколько Вася получил «пятёрок». «Пятёрок» у Пети было столько, сколько у Васи «двоек». Сколько «двоек» получил Вася, если средние оценок Пети и Васи равны?

□ Обозначим через x, y, z, t количества соответственно «двоек», «троек», «четвёрок» и «пятёрок», полученных Васей. Тогда суммы Васиных и Петиных оценок соответственно равны $2x + 3y + 4z + 5t$ и $5x + 2y + 3z + 4t$. Так как у ребят одинаковые количества полученных оценок и равны средние их оценок, то равны и суммы полученных ими оценок. Поэтому имеем равенство $2x + 3y + 4z + 5t = 5x + 2y + 3z + 4t$ или $3x = y + z + t$. По условию, $x + y + z + t = 16$. Следовательно, $3x = 16 – x$, $x = 4$.

Вася получил 4 «двойки».

Ответ. 4.