Задания для 9 класса

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
В	Б	Г	В	Б	Б	В	А	Г	А	Цифра 3	В 1940-м	5 кг, 4 кг, 3 кг, 0 кг	Всегда

1. В кошельке 20 монет – двухрублёвые, пятирублёвые и десятирублёвые. Известно, что всего этих монет в кошельке на сумму не менее 55 рублей, но не более 58 рублей. Какую сумму денег составляют эти монеты?

А. 55 руб. **Б.** 56 руб. **В.** 57 руб. **Г.** 58 руб.

Обозначим через x. y, z количество монет соответственно двухрублёвых, пятирублёвых и десятирублёвых. Из условия следует система уравнения и неравенства:

$$\begin{cases} x+y+z=20, \\ 55 \le 2x+5y+10z \le 58. \end{cases}$$

Воспользовавшись уравнением системы, получим равенства:

$$2x+5y+10z=2(x+y+z)+3y+8z=40+3y+8z.$$

Тогда двойное неравенство системы равносильно двойному неравенству $15 \le 3y+8z \le 18$.

Так как по условию y и z – натуральные числа, то из полученного неравенства следует, что z может равняться только 1. Тогда $y = 3$, а $x = 20 – 1 – 3 = 16$. Искомая сумма $2\cdot16 + 3\cdot5 + 10 = 57$.

Ответ. В. 57 руб.

2. В компьютерной игре нужно преодолеть 10 препятствий. За первое препятствие, которое не удалось преодолеть за отведенное время, добавляется два новых, а за каждую следующую такую неудачу количество добавляемых препятствий увеличивается на 1. Игра завершена, если не осталось непреодолённых препятствий. Приз получает тот, кто смог завершить игру, хотя при этом не смог преодолеть не более 20 препятствий. Кирилл получил приз, преодолев 55 препятствий. Сколько препятствий ему не удавалось преодолеть?

А. 8. **Б.** 9. **В.** 12. **Г.** 14.

Обозначим через n искомое количество препятствий После первого непреодолённого препятствия количество препятствий увеличилось на 1, после второго – на 2, и т. д, после n-го – на n. Всего количество препятствий увеличилось на $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n+1}{2}\cdot n$. Из условия следует уравнение $\frac{n+1}{2}\cdot n = 55 – 10$ или $n^2 + n – 90 = 0$. Решая квадратное уравнение, получим: $n = 9$.

Ответ. Б. 9.

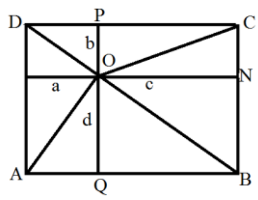
3. В начале года в сбербанк на счет было внесено 10 000 рублей, по окончании года было снято 1000 рублей. Сколько процентов начислял сбербанк в год, если по окончании следующего года на счету оказалось 13 200 руб.?

А. 30%. **Б.** 25%. **В.** 21%. **Г.** 20%.

Обозначим искомое количество процентов через p. Через год на счету будет $10000\left(1+\frac{p}{100}\right)=(10000+100p)$ руб. После снятия со счета 1000 руб. на нем останется $(9\,000 + 100p)$ руб. В конце следующего года после начисления процентов на счету будет $(9000+100p)\left(1+\frac{p}{100}\right)=\left(p^2+190p+9000\right)$ руб., что по условию равно 13 200 руб. Имеем уравнение $p^2 + 190p – 4\,200 = 0$. Его корни: –210 и 20. Условию задачи удовлетворяет только второе значение корня. Следовательно, сбербанк начислял в год 20%.

Ответ. Г. 20%

4. На прямоугольной платформе основание мачты зафиксировано с помощью тросов, соединяющих основание со скобами в углах платформы. Длины тросов до двух противоположных углов равны 5 м и 14 м. Какова длина четвёртого троса, если длина третьего равна 10 м?



А. 9 м. **Б.** 10 м. **В.** 11 м. **Г.** 12 м.

Изобразим платформу прямоугольником *ABCD*, а основание мачты – точкой *O*. По условию, *OD* = 5 м, *OB* = 14 м, *OA* = 10 м. Нужно найти *OC*.

Проведём через точку O прямые MN и PQ, параллельные сторонам прямоугольника и обозначим расстояния от точки O до сторон прямоугольника через a, b, c, d, как показано на рисунке.

Пользуясь теоремой Пифагора и условием, получим равенства: $a^2 + b^2 = 25$, $c^2 + d^2 = 196$, $a^2 + d^2 = 100$. Из них следует равенство:

$b^2 + c^2 = (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) - (a^2 + d^2) = 25 + 196 - 100 = 121.$

Следовательно, $OC = \sqrt{b^2 + c^2} = 11$ м. **Ответ. В.** 11 м.

5. На сколько процентов нужно уменьшить цену товара, чтобы увеличение его продажи в 2 раза принесло увеличение дохода в 1,5 раза?

А. На 50%. **Б.** На 25%. **В.** На 20%. **Г.** На 15%.

Обозначим через c руб. доход от продажи единицы товара. В данном случае уменьшение цены происходит за счет уменьшения дохода с единицы товара.

Обозначим через p искомый процент. Тогда уменьшенный доход с единицы товара будет равен $c\left(1-\frac{p}{100}\right)$ руб. Продав k единиц товара по первоначальной цене, получили доход kc руб. При продаже $2k$ единиц товара по уменьшенной цене, получим доход $2kc\left(1-\frac{p}{100}\right)$ руб. По условию, $2kc\left(1-\frac{p}{100}\right) = \frac{3}{2}kc$ или $1-\frac{p}{100} = \frac{3}{4}$, $p = 25\%$. **Ответ. Б.** На 25%.

6. В тире предлагают такую игру. Игрок вносит 1000 руб. в кассу и получает 10 пулек бесплатно. После каждого удачного выстрела его сумма денег увеличивается на 20%, а после каждого промаха уменьшается на 20%. Игрок 5 раз попал в цель и 5 раз промахнулся. Полученная им сумма денег …

А. увеличилась не менее чем на 100 руб. **В.** равна 1000 руб.

Б. уменьшилась более чем на 150 руб. **Г.** изменилась не более чем на 10%.

После каждого удачного выстрела сумма денег a руб. увеличивается и становится равной $1{,}2a$ руб., а после каждого промаха уменьшается и становится равной $0{,}8a$ руб.

После 10 выстрелов, из которых 5 попаданий и 5 промахов, сумма денег игрока равна $(1{,}2)^5 \cdot (0{,}8)^5 \cdot 1000 = (1{,}2 \cdot 0{,}8)^5 \cdot 1000 = (0{,}96)^5 \cdot 1000$. Так как $(0{,}96)^5 < 0{,}85$, то сумма стала меньше $1000 \cdot 0{,}85 = 850$ руб., то есть уменьшилась более чем на $1000 - 850 = 150$ руб.

Ответ. Б. уменьшилась более чем на 150 руб.

7. За круглым столом сидят мужчины и женщины так, что через одного человека от каждого сидящего в одном направлении сидит мужчина, а в противоположном – женщина. Сколько человек сидит за столом, если среди них по крайней мере пять женщин, и не более 11 мужчин?

А. 24. **Б.** 20. **В.** 16. **Г.** 12.

Если рассаживать людей за столом в соответствии с условием, начиная с мужчины $М_1$ (см. рис. 1), то приходим к выводу, что если через один стул убрать стулья, то оставшиеся сидящие сидят парами – двое мужчин, две женщины, двое мужчин и т. д. На убранных стульях рассаживание приводит к такой же закономерности. При этом рассаживания на этих двух группах стульев никак не связаны. Следовательно, количество сидящих за столом кратно 8, из них половина мужчин, половина женщин. Из условия следует, что это количество не менее 12 и не более 20, то есть равно 16. На рис.2 изображена рассадка 16 человек, соответствующая условию.

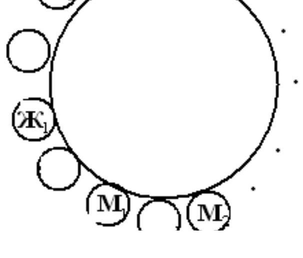


Рис. 1

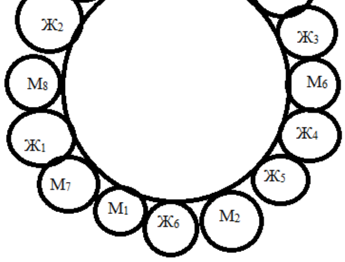


Рис. 2

Ответ. В. 16

8. Все 8 участников шахматного турнира набрали разное количество очков. Известно, что второй призер набрал столько же очков, сколько вместе 4 последних шахматиста. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие 3 и 7 места? (В шахматах победа за победу присуждают 1 очко, за ничью – $\frac{1}{2}$ очка, за поражение – 0 очков. Турнир проводится в один круг, то есть каждый участник играет по одному разу со всеми остальными).

А. Выиграл игрок, занявший 3 место. **Б.** Сыграли вничью.
В. Выиграл игрок, занявший 7 место **Г.** Определить невозможно.

 Пусть первые три места заняли соответственно игроки А, Б и В. Четыре игрока, занявшие последние места, сыграли между собой 6 игр и уже только в этих играх набрали шесть очков. Это значит, что у Б не менее шести очков. У А их ещё больше – 6,5 или 7 (а больше за 7 игр не набрать). Если А имеет 6,5 очков, то у Б меньше, то есть ровно 6.

А если А имеет 7 очков, то он у всех выиграл, в том числе и у Б, поэтому у Б тоже только 6 очков. Значит, и у последних четырёх игроков ровно 6 очков, то есть все очки они набрали в играх между собой, а остальным проиграли. В частности, игрок В выиграл у игрока на седьмом месте.

Ответ. А. Выиграл игрок, занявший 3 место.

9. В одном доме 5 этажей и несколько подъездов, а в другом на 2 подъезда меньше, но этажей 8. Какое из приведенных в ответах чисел может равняться количеству подъездов в первом доме, если в нём количество квартир меньше, чем во втором доме, хотя в каждом подъезде этих домов одинаковое количество этажей, и на всех этажах во всех подъездах в обоих домах одинаковое число квартир?

А. 3. **Б.** 4. **В.** 5. **Г.** 6.

 Обозначим через x количество подъездов в первом доме, тогда во втором их $x – 2$. Через k обозначим количество квартир на этаже. Тогда в первом доме $5xk$ квартир, а во втором – $8(x – 2)k$ квартир. По условию, $5xk < 8(x – 2)k$ или $5x < 8x – 16$, $3x > 16$, $x > 5$. Следовательно, в первом доме может быть 6 подъездов.

Ответ. Г. 6.

10. Самоходный каток для укатки дороги имеет ширину захвата, равную 1,2 м. Причем каждая следующая полоса прохождения перекрывает предыдущую на четверть ее ширины. Сколько времени понадобится, чтобы провести укатку участка шоссе длиной 250 м и шириной 6,5 м, если каток будет двигаться со скоростью 2,5 км/ч и на каждый разворот требуется 2 минуты?

А. 62 мин. **Б.** 60 мин. **В.** 56 мин. **Г.**48 мин.

 Так как следующая полоса перекрывает предыдущую на $\frac{1}{4}\cdot 1,2$ = 0,3 м., то за одну «ходку» каток укатывает полосу шириной 1,2 – 0,3 = 0,9 м. Таких полос помещается на участке 7, то есть неполному частному от деления числа 6,5 на 0,9, и еще остается полоска шириной 6,5 – 7·0,9 = 0,2 м. Поэтому каток должен сделать 8 «ходок». На каждую из них он тратит 0,25 : 2,5 = 0,1 ч = 6 мин., на 8 «ходок» – 48 минут. С учетом 7 разворотов искомое время равно 48 + 7·2 = 62 мин.

Ответ. А. 62 мин.

11. Каких цифр понадобится больше всего для нумерации страниц книги объёмом 240 листов, если на первых двух и на последних двух страницах номера страниц не ставят?

 Книга содержит 480 страниц. Для их нумерации потребуются числа 3, 4, 5, …, 477, 478. Для записи двузначных чисел цифры 1, 2, …, 9 требуются в одинаковом количестве, а цифра 0 – в меньшем. В записи трёхзначных номеров, использованных для нумерации, цифры 1, 2, 3 используются в равном количестве, а остальные цифры – в меньшем количестве. Так как для записи однозначных номеров из цифр 1, 2, 3 используется только цифра 3, то она и является искомой.

Ответ. Цифры 3.

12. Сумма цифр года рождения известного режиссёра в два раза больше суммы цифр года, в котором ему исполнилось 65 лет. В каком году родился режиссёр?

 Обозначим год рождения режиссёра через $\overline{19ab}$. Предположим, что юбилейный год – $\overline{20mn}$. Из условия следует равенство $1 + 9 + a + b = 2(2 + 0 + m + n)$ или $a + b + 6 = 2(m + n)$.

Так как год $\overline{20mn}$ наступил через 65 лет после года $\overline{19ab}$, то возможны случаи:

1) $n = b + 5$, $m = a + 6 - 10$ или $m = a - 4$;
2) $n = b + 5 - 10$, или $n = b - 5$, $m = a + 6 + 1 - 10 = a - 3$.

В случае 1) имеем уравнение $6 + a + b = 2(a + b + 1)$ или $a + b = 4$. Из всех целых решений полученного уравнения условию удовлетворяет только одно: $a = 4$, $b = 0$, так как $m = a - 4 \geq 0, b \geq 0$.

В случае 2) имеем уравнение $6 + a + b = 2(a + b - 8)$ или $a + b = 22$. Так как $0 \leq a \leq 9$; $0 \leq b \leq 9$, то это уравнение не имеет решений, удовлетворяющих условию.

Следовательно, при сделанном предположении искомым является год 1940.

Нетрудно убедиться, что юбилейный год не может быть в XX столетии, а год рождения в XVIII ст.

Ответ. В 1940-м.

13. Для сбора урожая лука на даче приготовили 4 ящика. Когда закончили сбор, то оказалось, что в первом, втором и третьем ящиках вместе не менее 12 кг лука, в первом, втором и четвёртом – не более 9 кг лука, во втором, третьем и четвёртом – не более 7 кг лука, а в первом, третьем и четвёртом – не более 8 кг лука. Сколько лука было в каждом ящике?

□ Обозначим через x, y, z, t массу лука в килограммах соответственно в первом, втором, третьем и четвёртом ящиках. Из условия следует система неравенств:

$$\begin{cases} x + y + z \geq 12, \\ x + y + t \leq 9, \\ x + z + t \leq 8, \\ y + z + t \leq 7. \end{cases}$$

Складывая левые и правые части трёх последних неравенств системы, получим неравенство $2x + 2y + 2z + 3t \leq 24$ или $x + y + z + 1{,}5t \leq 12$. Так как $x + y + z \geq 12$ и $t \geq 0$, то из полученного неравенства следуют равенства: $t = 0$, $x + y + z = 12$. Вычитая из левой и правой частей последнего равенства последовательно соответствующие части второго и четвёртого неравенств системы, получим: $z \geq 3$, $y \geq 4$, $x \geq 5$. Учитывая, что $x + y + z = 12$, методом от противного легко показать, что в этих неравенствах могут стоять только знаки равенства. Следовательно, $x = 5$; $y = 4$; $z = 3$

Ответ. 5 кг; 4 кг; 3 кг; 0 кг.

14. Пирог, имеющий квадратную форму, разрезали прямолинейными разрезами, параллельными боковым краям пирога и его диагоналям. Всегда ли полученные кусочки можно разделить между двумя сладкоежками так, чтобы их доли были равны?

□ Изобразим пирог и его разрезы на клетчатой бумаге, пользуясь условием (см. рис. 1). Получилось 8 фигур: 4 треугольника и 4 трапеции. Если за единицу площади выбрать площадь одной клетки, то площади полученных фигур указаны на рисунке. Так как сумма площадей закрашенных фигур равна сумме площадей незакрашенных фигур (4,5 + 17,5 + 8 + 2 = 2 + 4 + 13,5 + 12,5 = 32), то рассмотренный пример свидетельствует о том, что можно удовлетворить требование задачи.

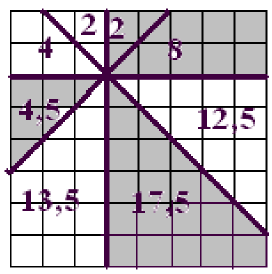


Рис. 1

Для доказательства в общем виде рассмотрим рис. 2, где a – длина стороны квадрата. Из построения следует, что доказательство равенства сумм площадей закрашенных и незакрашенных фигур сводится к доказательству равенства $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$, где S_1, S_2, S_3, S_4 – площади прямоугольников 1, 2, 3, 4:

$S_1 + S_2 = xy + (a - x - y)y = ay - y^2$,

$S_3 + S_4 = (a - y)x + (a - y)(y - x) = ay - y^2$.

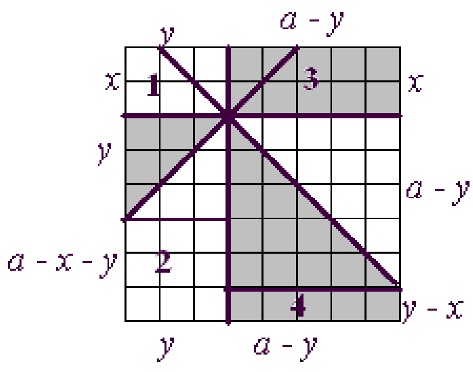


Рис. 2

Ответ. Всегда