

Задания для 4-5 классов

1-я часть

Выберите правильный ответ из приведенных.

1. Во сколько раз минутная стрелка движется быстрее часовой?

А. В 6 раз. Б. В 9 раз. В. В 10 раз. Г. В 12 раз.

Часовая стрелка делает один оборот за 12 ч, а минутная — за 1 ч. Следовательно, минутная стрелка движется быстрее часовой в $12:1 = 12$ раз.

Ответ. Г. В 12 раз.

2. Старые часы отстают на 20 секунд за 1 час. На сколько минут отстанут эти часы через 24 часа после того, как они будут поставлены правильно?

А. На 7 мин. Б. На 8 мин. В. На 9 мин. Г. На 10 мин.

Через 24 часа после того, как часы будут поставлены правильно, они отстанут на $20 \cdot 24 = 480 \text{ с} = 8 \text{ мин.}$

Ответ. Б. На 8 мин.

3. Одни из двух часов отстают на 25 минут и показывают 7 ч 40 мин. Какое время показывают вторые часы, если они спешат на 15 минут?

А. 7 ч 15 мин. Б. 7 ч 25 мин. В. 8 ч. 5 мин. Г. 8 ч 20 мин.

Вторые часы идут впереди первых на $15 + 25 = 40$ мин. В то время, когда первые часы показывают 7 ч 40 мин, вторые покажут $7 \text{ ч } 40 \text{ мин} + 40 \text{ мин} = 8 \text{ ч } 20 \text{ мин.}$

Ответ. Г. 8 ч 20 мин.

4. Сколько раз в сутки минутная стрелка на механических часах обгоняет часовую?

А. 24. Б. 23. В. 22. Г. 21.

В начале суток стрелки совмещены. Первый раз минутная стрелка обгонит часовую после 1-го часа, второй раз — после 2-х часов, и т. д., одиннадцатый раз — после 11-и часов. В 12 часов стрелки совмещены. Следовательно, за 12 часов минутная стрелка обгоняет часовую 11 раз, а за сутки — 22 раза.

Ответ. В. 22 раза.

5. На фабрике специальная машинка разрезает за час 500 восьмиметровых лент на одинаковые ленточки по 2 м в каждой. Сколько времени потребуется, чтобы на той же машинке разрезать 400 десятиметровых лент такой же ширины на такие же ленточки, если время на 1 разрез не зависит от длины ленты?

А. 60 мин. Б. 62 мин. В. 64 мин. Г. 70 мин.

Восьмиметровую ленту на двухметровые разрезают тремя разрезами. Чтобы разрезать 500 восьмиметровых лент на двухметровые требуется $3 \cdot 500 = 1500$ разрезов. Для разрезания 400 десятиметровых лент на двухметровые требуется $4 \cdot 400 = 1600$ разрезов. Время, необходимое для этого, составляет $60:1500 \cdot 1600 = 64$ минуты.

Ответ. В. 64 мин.

6. Надя разрезала несколько длинных лент на короткие ленточки. Всего она сделала 20 разрезов и получила 28 ленточек. Надя резала ленты только поперёк. Сколько длинных лент она разрезала?

А. 8. Б. 10. В. 12. Г. 14.

□ При разрезании каждой ленты количество ленточек на 1 больше количества разрезов. Так как при разрезании каждой ленты количество ленточек на 1 больше количества разрезов, то количество длинных лент равно $28 - 20 = 8$.

Ответ. А. 8.

7. Сколькими различными способами из 2 длинных лент можно получить 8 ленточек, если разрезать каждую ленту? Резать ленты можно только поперёк. Два способа считаются различными, если они отличаются количеством разрезов хотя бы одной ленты.

А. 6-ю.

Б. 5-ю.

В. 4-мя.

Г. 3-мя.

□ Из 2 длинных лент можно получить 8 ленточек, разрезая каждую ленту, $8 - 2 = 6$ разрезами. Эти 6 разрезов могут распределиться между 2 лентами следующими различными способами:

$$5 + 1$$

$$4 + 2$$

$$3 + 3$$

$$1 + 5$$

$$2 + 4.$$

Всего $2 + 2 + 1 = 5$ способов.

Ответ. Б. 5-ю.

8. Имеется некоторое количество лент длиной 10 м и столько же лент длиной 12 м общей длиной 132 м. Сколько разрезов без наложения лент придётся сделать, чтобы разрезать все ленты на ленточки длиной 2 м?

А. 61.

Б. 54.

В. 45.

Г. 40.

□ Если взять по одной ленте каждого размера, то сумма их длин равна 22 м, значит, количество лент каждого размера равно $132:22 = 6$.

При разрезании ленты длиной 10 м на двухметровые приходится делать $10:2 - 1 = 4$ разреза, а при разрезании ленты длиной 12 м на двухметровые приходится делать $12:2 - 1 = 5$ разрезов.

Общее количество разрезов равно $4 \cdot 6 + 5 \cdot 6 = 54$.

Ответ. Б. 54.

9. Имеется 3 фотографии неизвестных учащихся и 3 их ученических билета, но без фотографий. Сколько существует всего различных вариантов вложения фотографий в ученические билеты?

А. 12.

Б. 6.

В. 4.

Г. 3.

□ Обозначим учащихся числами 1, 2, 3, а их фотографии — соответственно буквами а, б, в. Тогда все различные варианты вложения фотографий в ученические билеты будут выглядеть так:

1а, 1б, 1в, 2а, 2б, 2в, 3а, 3б, 3в

2б, 2в, 2а, 2в, 2а, 2б

3в, 3б, 3в, 3а, 3б, 3а

Каждый столбец описывает один вариант вложения фотографий. Всего 6 вариантов.

Ответ. Б. 6.

10. Имеется 3 фотографии неизвестных учащихся и 3 их ученических билета, но без фотографий. Сколько существует всего различных вариантов вложения фотографий в ученические билеты, в которых ровно двум владельцам билетов вложены их фотографии?

А. 0.

Б. 1.

В. 2.

Г. 3.

2) Пусть общая длина меньших отрезаемых кусочков составляет 1 часть. Поскольку больший кусочек в $10:5 = 2$ раза длиннее меньшего и более длинных кусочков было вдвое больше, чем коротких, то длина всех больших составит $2 \cdot 2 = 4$ части. Общая длина отрезаемых кусочков, то есть $3 \text{ м} = 300 \text{ см}$, составит $1 + 4 = 5$ частей. На одну часть приходится $300:5 = 60 \text{ см}$. Это длина всех меньших кусочков, их количество равно $60:5 = 12$, а количество больших — $12 \cdot 2 = 24$.

3) Так как в условии не сказано, каких кусочков больше, то нужно рассмотреть два случая. Будем вначале считать, что больших кусочков на 15 больше, чем меньших. Если бы меньших кусочков было столько же, сколько и больших, то, учитывая, что длина большего на $10 - 5 = 5 \text{ см}$ больше длины меньшего, общая длина всех кусочков была бы на $5 \cdot 15 = 75 \text{ см}$ больше, чем 300 см , то есть равнялась бы $300 + 75 = 375 \text{ см}$. Каждая пара, состоящая из большего и меньшего кусочков, имела бы длину 15 см , количество пар, значит, и больших кусочков равнялось бы $375:15 = 25$, а коротких — $25 - 15 = 10$.

Для случая, когда меньших кусочков на 15 больше, чем больших, аналогичными рассуждениями приходим к выводу, что коротких кусочков получилось 30, а длинных 15.

Ответ. 1) 20 и 20; 2) 12 меньших и 24 больших; 3) 30 и 15 или 10 и 25.

15. Сшили одеяло из одинаковых квадратных лоскутов. В каждом месте, где соединялись 4 лоскута, пришивали пуговицу.

1) Сколько было пришито пуговиц, если на пошив одеяла ушло: а) 10 лоскутов в ширину и 15 в длину; б) 15 лоскутов в ширину и 20 в длину?

2) Сколько лоскутов в ширину и сколько в длину ушло на пошив одеяла, если было пришито 437 пуговиц?

1) Четыре одинаковых квадратных лоскута соединяются только внутри прямоугольника, но не на его сторонах. Если прямоугольник состоит из a лоскутов в ширину и b лоскутов в длину, то количество пришитых пуговиц равно $(a - 1)(b - 1)$.

а) Искомое количество равно $9 \cdot 14 = 126$.

б) Искомое количество равно $14 \cdot 19 = 266$.

2) Так как прямоугольник состоит из a лоскутов в ширину и b лоскутов в длину, то количество пришитых пуговиц равно $(a - 1)(b - 1)$. Число 437 разлагается в произведение двух целых чисел следующим образом: $437 = 19 \cdot 23 = 1 \cdot 437$. Следовательно, $a - 1 = 19$, а $b - 1 = 23$ или $a - 1 = 1$, а $b - 1 = 437$. Тогда $a = 20$, а $b = 24$ или $a = 2$, а $b = 438$. Но так как лоскуты одинаковы, то второй случай невозможен: не может одеяло в длину быть больше, чем в ширину в $438:2 = 219$ раз

Ответ. 1) а) 126; б) 266; 2) 20 и 24.

16. Из одинаковых палочек выложили границу фигуры квадратной формы со стороной 1 метр. Затем с помощью таких же палочек разделили её на равные квадратики так, что два соседних квадратика разделены одной палочкой.

1) Сколько потребовалось палочек, если длина каждой палочки равна: а) 10 см; б) 5 см?

2) Какова длина палочек, если их потребовалось 1300?

1) Указанное в условии построение можно изобразить в виде квадратной сетки, то есть квадрата, разделённого на равные квадратики. Задача сводится к нахождению

количества отрезков квадратной сетки, которые являются сторонами квадратиков сетки.

а) Если длина палочек 10 см, то в ряду сетки $100:10 = 10$ квадратиков и рядов 10. Квадратная сетка образована 22 отрезками длиной 100 см. На каждом таком отрезке 10 маленьких отрезков. Всего маленьких отрезков $22 \cdot 10 = 220$.

б) Если длина палочек 5 см, то в ряду сетки $100:5 = 20$ квадратиков и рядов 20. Отрезки длиной 5 см, ограничивающие квадратики, лежат на 42 отрезках длиной 100 см. Всего таких отрезков $42 \cdot 20 = 840$.

2) Из решения предыдущего задания следует, что длина палочек меньше 5 см. Если она равна 4 см, то отрезков длиной 4 см на отрезке длиной 100 см помещается $100:4 = 25$. Количество отрезков длиной 100 см, образующих сетку, равно 52. Тогда отрезков длиной 4 см на них $52 \cdot 25 = 1300$. Следовательно, искомая длина равна 4 см.

Ответ. 1) а) 220; б) 840; 2) 4 см.

17. Из одинаковых кубиков склеили куб. Для склеивания каждой пары граней у двух соседних кубиков требуется 1 г клея. 1) Сколько всего клея потребовалось, если кубиков было: а) 8; б) 27?

2) Сколько было использовано кубиков, если потребовалось 300 г клея?

□ 1) а) У 8 кубиков граней $6 \cdot 8 = 48$, а у полученного куба граней 6. Каждая из этих 6 граней состоит из 4-х граней исходных кубиков. Всего не склеивалось $6 \cdot 4 = 24$ грани, а склеивалось $48 - 24 = 24$ грани. Для склеивания каждой пары граней у двух соседних кубиков потребовался 1 г клея. Следовательно, всего понадобилось $24:2 = 12$ г клея.

2) У 27 кубиков граней $6 \cdot 27 = 162$, а у полученного куба граней 6. Каждая из этих 6 граней состоит из 9 граней исходных кубиков. Всего не склеивалось $6 \cdot 9 = 54$ грани, а склеивалось $162 - 54 = 108$ граней. Для склеивания каждой пары граней у двух соседних кубиков потребовался 1 г клея. Следовательно, всего понадобилось $108:2 = 54$ г клея.

2) Если потребовалось 300 г клея, то склеивалось 600 граней маленьких кубиков. Значит, кубиков было больше 100. Но $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$, значит, сторона куба должна содержать более 4 кубиков. Если куб состоял из 125 кубиков, то есть $5 \cdot 5 \cdot 5$, то граней $125 \cdot 6 = 750$. А на каждой грани большого куба 25 граней маленьких кубиков. Следовательно, не склеивалось $25 \cdot 6 = 150$ граней, а склеивалось $750 - 150 = 600$. Искомое количество кубиков 125.

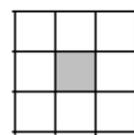
Ответ. 1) а) 12г; б) 54 г; 2) 125.

Ответ: 1) а) 12г; б) 54 г; 2) 125 кубиков.

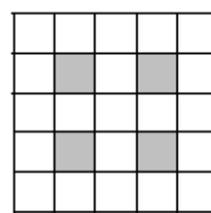
Третья часть

Напишите полное решение каждого задания.

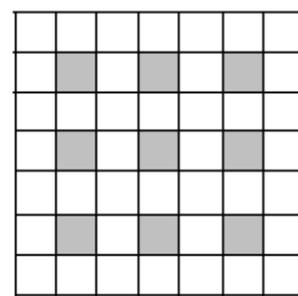
18. На рисунке изображены первые три фигуры последовательности, составленные из равных квадратов. Следующие фигуры образуются так, как третья из второй, вторая из первой. Сколько незакрашенных клеток



1-я
фигура



2-я фигура



3-я фигура

содержит: 1) 5-я фигура; 2) 10-я фигура; 3) 100-я фигура?

□ Анализируя первые три фигуры, приходим к выводу, что количество клеток, содержащейся в каждой фигуре, является квадратом натурального числа, причём, если n — номер фигуры, то количество клеток равно $(2n + 1)^2$ (при $n = 1$ количество клеток равно $(2 \cdot 1 + 1)^2 = 9$; при $n = 2$ количество клеток равно $(2 \cdot 2 + 1)^2 = 25$; при $n = 3$ количество клеток равно $(2 \cdot 3 + 1)^2 = 49$).

Количество закрашенных клеток равно квадрату номера фигуры, то есть n^2 . Тогда количество незакрашенных клеток равно $(2n + 1)^2 - n^2$.

В условии сказано, что следующие фигуры образуются по тому же самому закону. Поэтому для подсчёта количества незакрашенных клеток применима та же формула.

1) Искомое число равно $(2 \cdot 5 + 1)^2 - 5^2 = 121 - 25 = 96$.

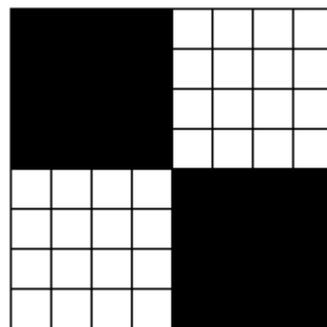
2) Искомое число равно $(2 \cdot 10 + 1)^2 - 10^2 = 441 - 100 = 341$.

3) Искомое число равно $(2 \cdot 100 + 1)^2 - 100^2 = 40\,401 - 10\,000 = 30\,401$.

Ответ. 1) 96; 2) 341; 3) 30401.

19. Имеется квадрат размером $8n \times 8n$ клеток, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Закрашены в чёрный цвет клетки, образующие квадраты размером $4n \times 4n$ клеток, стоящие в левом верхнем и в правом нижнем углах, например, как на рисунке. Сколько в этом квадрате можно указать квадратов, составленных из $2n \times 2n$ клеток и имеющих одинаковое количество закрашенных и незакрашенных клеток, если: 1) $n = 1$; 2) $n = 2$; 3) $n = 10$?



□ 1) Нужно подсчитать для квадрата 8×8 клеток количество квадратов, составленных из $2 \times 2 = 4$ клеток и имеющих 2 закрашенные и 2 незакрашенные клетки.

Квадраты, удовлетворяющие условию, изображены на рис. 1. Они получаются передвижением центрального квадрата, изображённого на рис. 2, влево, вправо, вверх, вниз на одну клетку. Таких сдвигов всего $4 \cdot 3 = 12$. Искомое количество равно 13.

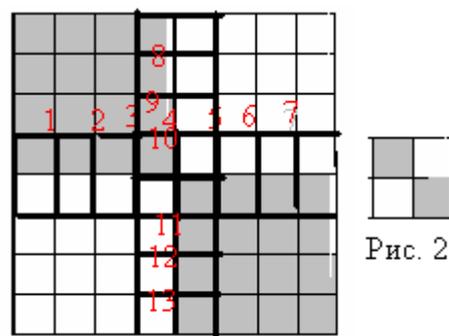


Рис. 1

Рис. 2

2) Нужно подсчитать для квадрата 16×16 клеток количество квадратов, составленных из $4 \times 4 = 16$ клеток и имеющих 4 закрашенные и 4 незакрашенные клетки.

Анализируя условия и решение предыдущего задания, приходим к выводу, что нужно подсчитать количество сдвигов на 1 клетку влево, вправо, вверх, вниз квадрата, состоящего из 16 клеток, центр которого совпадает с центром исходного квадрата, до его сторон. Это количество равно $4 \cdot (8 - 2) = 24$. Искомое количество равно 25.

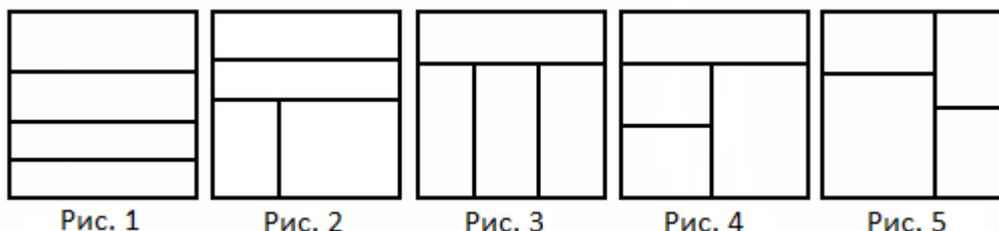
3) Исходный квадрат имеет размеры 80×80 клеток, закрашенные квадраты — 40×40 клеток. Квадраты, количество которых нужно подсчитать, имеют размеры 20×20 клеток. Количество сдвигов центрального квадрата, удовлетворяющих условию, равно $4(40 - 10) = 120$. Искомое количество равно 121.

Ответ. 1) 13; 2) 25; 3) 121.

20. Квадратный участок со стороной 90 м, ограждённый сеткой, делят на 4 участка прямоугольной формы.

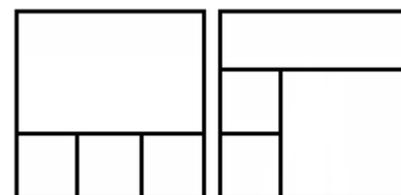
- 1) Хватит ли 200 погонных метров сетки для ограждения новых участков?
- 2) Какое наименьшее количество погонных метров сетки наверняка хватит для ограждения новых участков?
- 3) Сколько погонных метров сетки понадобится для ограждения новых участков, если ровно три участка имеют квадратную форму?

□ Пусть квадрат является изображением участка. Тогда разделению участка на 4 участка прямоугольной формы соответствует разбиение квадрата на 4 прямоугольника. На рис. 1, 2, 3, 4, 5 изображены возможные варианты такого разбиения.



- 1) 200 погонных метров сетки может не хватить, если разбиение на участки изображено на рис. 1. В этом случае требуется $90 \cdot 3 = 270$ погонных метра.
- 2) На рис. 1 требуется ровно 270 погонных метров сетки для ограждения участков. На рис. 2, 3 и 4 сумма длин отрезков может быть как угодно близка к 270 м, но не может ее превышать. На рис. 5 потребуется всего 180 м. Таким образом, 270 метров сетки наверняка хватит.

3) Этому условию удовлетворяет только разбиения, изображённые на рис. 6 и 7. Для варианта на рис. 6 требуется $90 + 30 + 30 = 150$ погонных метров. Для варианта на рис. 7 требуется $90 + 30 + 60 = 180$ погонных метров



Ответ. 1) Нет; 2) 270 м. 3) 150 м или 180 м.