Задания для 7 класса

1. На часах 8 ч 20 мин. Чему равен угол между часовой и минутной стрелками?
А. 110°. **Б.** 120°. **В.** 130°. **Г.** 140°.

□ Часовая стрелка за 1 час поворачивается на 360°: 12 = 30°, а за 1 минуту — на 30°: 60 = $\frac{1}{2}$°. Минутная стрелка за 1 час поворачивается на 360°, а за 1 минуту — на 360°: 60 = 6°. С 0 ч 0 мин до 8 ч 20 мин часовая стрелка повернётся на $30°\cdot 8 + 20\cdot\frac{30°}{60} = 240° + 20\cdot\frac{1}{2}° = 250°$, а минутная сделала полных 8 оборотов и, кроме того, повернулась на угол, равный 6°·20 = 120°. Угол между стрелками равен 250° – 120° = 130°.

Ответ. В. 130°.

2. Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из городов А и В и встретились через час. Каждый из них, прибыв в пункт назначения, провел там 2 часа, после чего выехал в обратном направлении. Велосипедисты встретились вновь. Через сколько времени после первой встречи это произошло, если они ехали с постоянной скоростью?
А. Через 5 ч. **Б.** Через 4 ч. **В.** Через 3 ч. **Г.** Через 2 ч.

□ Если бы велосипедисты после прибытия в пункты назначения сразу выехали в обратном направлении и встретились, то до второй встречи после первой они бы проехали вместе удвоенное расстояние между А и В. Так как расстояние от А до В они вместе преодолели за 1 час, то до второй встречи после первой им понадобилось бы 2 часа. Из условия следует, что вторая встреча после первой произошла через 4 часа.

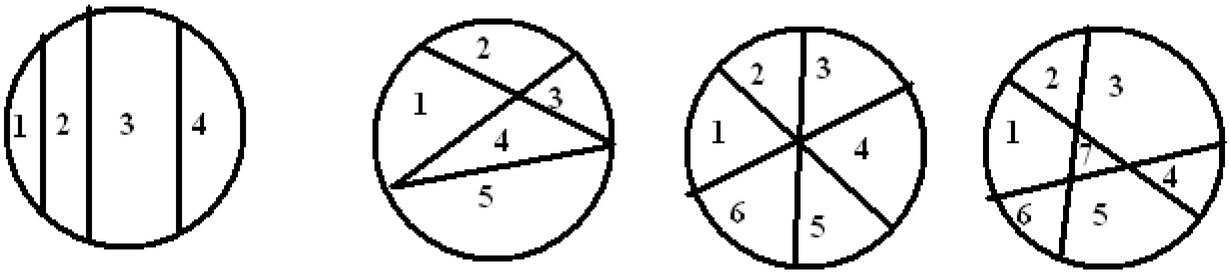
Ответ. Б. Через 4 ч.

3. Маша живёт в километре от школы, а Витя на расстоянии трёх километров. Какое значение, приведенное в ответах, наверняка правильно указывает расстояние между домами Маши и Вити?
А. 2 км. **Б.** 4 км. **В.** Не менее 3 км. **Г.** Не более 4 км.

□ Если бы дома Вити и Маши и школа были бы расположены на одной прямой, то искомое расстояние равнялось бы или 3 – 1 =2 км, если они расположены по одну сторону от школы, или 3 + 1 = 4 км, если они расположены по разные стороны от школя. В остальных случаях оно или находится между 2 км и 4 км, так как, по свойствам расстояний, кратчайшее расстояние между двумя точками — это длина отрезка прямой, прямой, соединяющего эти точки.
Следовательно, из предложенных ответов правильный ответ **Г.** Не более 4 км.

Ответ. Г. Не более 4 км.

4. Круглый торт разрезали с помощью трёх прямолинейных разрезов так, что на каждом куске оказалась ровно одна розочка. Сколько из чисел, больших 3 и меньших 11, могло быть количеством розочек на торте?
А. 4. **Б.** 5. **В.** 6. **Г.** 7.



 Торт тремя прямолинейными разрезами можно разрезать на 4, 5, 6, 7 частей (см. рис.).

Так как первый прямолинейный разрез делит торт на две части, а каждый следующий увеличивает количество частей, то 3 розочки не может быть на торте. Не может быть и больше 7, поскольку наибольшее количество частей, на которые три прямые разбивают плоскость, равно 7. Действительно, две прямые разбивают плоскость самое большее на 4 части, а каждая третья прямая, пересекающая две данные прямые, может разбить на 2 части самое большее 3 из четырёх частей.

Ответ. А. 4.

5. В двух кучках по 100 камушков. На первом шаге перекладываем 5 камушков из первой кучки во вторую. На втором шаге перекладываем 6 камушков из второй кучки в первую. Затем снова перекладываем 5 камушков из первой кучки во вторую, потом перекладываем 6 камушков из второй кучки в первую. И так далее. Через сколько шагов обе кучки снова будут содержать по 100 камушков?

А. Через 11. **Б.** Через 10. **В.** Через 9. **Г.** Через 8.

 В следующей таблице представлено изменение количества камушков в двух кучках.

I	100	95	101	96	102	97	103	98	104	99	105	100
II	100	105	99	104	98	103	97	102	96	101	95	100

Таким образом, через 11 шагов обе кучки снова будут содержать по 100 камушков.

Ответ. А. 11.

6. В коробке 100 жетонов, отличающихся лишь цветом: 20 красных, 20 жёлтых, 20 зелёных, 20 синих, остальные — чёрные и белые. Какое наименьшее количество жетонов нужно взять, не глядя, из коробки, чтобы среди них обязательно оказалось не менее десяти жетонов одного цвета?

А. 40. **Б.** 47. **В.** 55. **Г.** 61.

 Если в коробке было 10 чёрных и 10 белых жетонов, то, взяв по 9 жетонов каждого цвета, получим 54 жетона, среди которых не будет 10 жетонов одного цвета. Следовательно, искомое число больше 54.

Если взять 55 жетонов, то среди них обязательно окажется 10 жетонов одного цвета. Если окажется, что красных, жёлтых, зелёных и синих жетонов взято менее 10 каждого цвета, то среди не менее $55 - 4 \cdot 9 = 19$ жетонов найдётся или 10 чёрных, или 10 белых.

Ответ. В. 55.

7. За ужином Таня съела столько же пирожных, сколько и её дочка, а Маша в три раза больше, чем её дочка, причём каждая съела целое количество пирожных. Сколько пирожных съела Маша, если ужинало трое и было съедено 15 пирожных?

А. 3. **Б.** 6. **В.** 9. **Г.** Определить нельзя.

 Из условия следует, что Таня и Маша — родственники: одна из них является мамой другой, третья сидящая за ужином — дочка одной из них и внучка другой.

Если Таня — мама, то Маша — дочка. Тогда Таня и Маша съели вместе в 3 + 3 = 6 раз больше пирожных, чем дочка Маши. Примем количество пирожных, съеденных дочкой Маши, за 1 часть, тогда количество пирожных съеденных Таней и Машей вместе, составляет 6 частей. Общее количество съеденных пирожных составляют 6 + 1 = 7 частей. Так как число 15 на 7 не делится, то в этом случае высказанное предположение неверно.

Если Маша — мама, то Таня — дочка. Тогда Маша съела пирожных в три раза больше, чем её дочка и в три раза больше, чем её внучка. Примем количество пирожных, съеденных Таней, за 1 часть, тогда количество пирожных, съеденных её дочкой, также составляет 1 часть, а количество пирожных, съеденных Машей, — 3 части. Тогда общее количество съеденных пирожных составляет 1 + 1 + 3 = 5 частей. На 1 часть приходится 15:5 = 3 пирожных, Маша съела 3·3 = 9 пирожных.

Ответ. В. 9.

8. В некотором месяце сред больше, чем четвергов, а вторников больше, чем понедельников. Какой день недели 13-го числа этого месяца?

А. Суббота. **Б.** Воскресенье. **В.** Четверг. **Г.** Пятница.

 В месяце 30 дней. В противном случае или сред столько же, сколько четвергов, или понедельников столько же, сколько вторников.

Так как в течение 28 дней количество всех дней недели одинаковое (по 4), то оставшиеся два дня — вторник и среда.

Если месяц начинается не со вторника, то последний день или не вторник, или не среда, следовательно, условие нарушается.

Если же месяц начинается со вторника, то в нём 29-го числа вторник, 30-го — среда, то есть условие выполняется.

В этом месяце 13-го числа воскресенье.

Ответ. Б. Воскресенье.

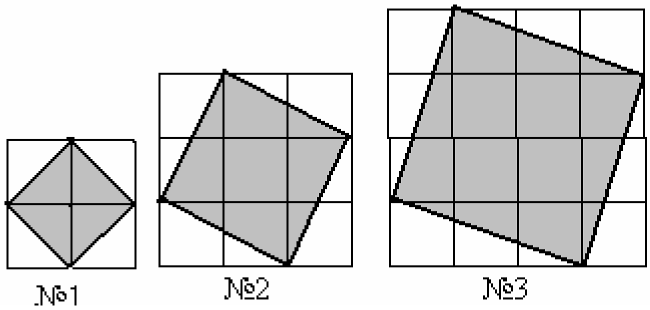
9. Десять человек сдавали экзамен. Они вытягивали билеты наугад по очереди по одному из 10 билетов, лежащих на столе, причём каждый вытягивал билет из оставшихся. Один из экзаменующихся знал ответы ко всем 10 билетам, один — к билетам № 1, 2, …, 9, один — к билетам 1, 2, …, 8, и т. д., один только к билету №1. Какое наибольшее количество экзаменующихся могло вытянуть билет, ответ на который они не знали?

А. 5. **Б.** 6. **В.** 9. **Г.** 10.

 Обозначим экзаменующегося, знающего ответы на k билетов, через k, $k = 1, 2, \ldots, 10$. Найдём искомое количество. Оно не может равняться 10, так как один знает все ответы. А 9 может. Например, первым билет №2 берёт учащийся 1, затем учащийся 2 берёт билет №3, далее учащийся 3 берёт билет №4, потом учащийся 4 берёт билет №5 и т. д. и, наконец, учащийся 9 берёт билет №10. Перечисленные учащиеся ответы на взятые билеты не знают. После этого учащемуся 10 остался билет №1, ответ на который он знает. Следовательно, наибольшее количество экзаменующихся могло вытянуть билет, ответ на который они не знали, равно 9.

Ответ. В. 9.

10. На рисунке на клеточной бумаге с клетками одинаковых размеров изображены закрашенные фигуры, площади которых превосходят площадь одной клетки на фигуре 1 в 2 раза, на фигуре 2 в 5 раз, на фигуре 3 в 10 раз. Во сколько раз превосходит площадь одной клетки площадь 100-й закрашенной фигуры, построенной по тому же правилу, что и фигуры 1, 2, 3?



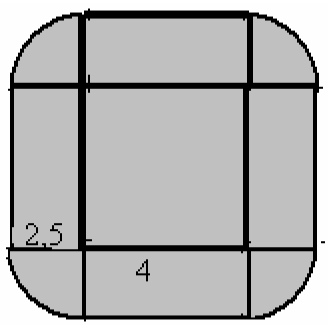
А. В 730 раз. **Б.** В 1 001 раз. **В.** В 5 626 раз. **Г.** В 10 001 раз.

□ Площадь закрашенной фигуры на каждом рисунке равна разности площади большого квадрата, состоящего из клеток и содержащего закрашенный квадрат, и суммы площадей 4-х равных прямоугольных треугольников, отсекаемых сторонами закрашенной фигуры. Из двух таких прямоугольных треугольников можно составить прямоугольник, состоящий из клеток, количество которых равно номеру фигуры.

Обозначим через k номер фигуры. Если принять площадь одной клетки за единицу площади, то, учитывая, что длина стороны квадрата выражается числом, на 1 превосходящим номер фигуры, получим, что площадь S_k закрашенной фигуры с номером k равна $(k+1)^2 - 2k$. Из этого выражения следует, что $S_{100} = (100+1)^2 - 200 = 10\,001$.

Ответ. Г. В 10 001 раз.

11.Круг радиуса 2,5 см перемещается по столу так, что его центр обходит контур квадрата со стороной 4 см. Чему равна площадь части стола, образованная следом круга, с точностью до 1 см^2?



□ Изобразим множество точек, являющихся объединением кругов радиусов 2,5 см с центрами в точках контура квадрата со стороной 10 см (см. рис.). Полученная фигура состоит из квадрата 4 см × 4 см, 4-х прямоугольников 4 см × 2,5 см, 4-х четвертей круга радиуса 2,5 см. Её площадь равна $4^2 + 4\cdot4\cdot2{,}5 + \pi\cdot2{,}5^2 \approx 76$ см^2.

Ответ. 76 см^2.

12.Имеются гирьки массой 1 г, 2 г, 3 г, …, 22 г, 23 г. Можно ли их разложить на четыре равные по массе кучки?

□ Масса всех гирек равна 1 + 2 + 3 + … + 22 + 23 = (1 + 23) + (2 + 22) + … + (11 + 13) + 12 = 24·11 + 12 = 12·23 = 276 г. Следовательно, если можно разложить все гирьки на четыре равные по массе кучки, то масса гирек в каждой кучке должна равняться 276:4 = 69 г. Разложение может быть, например, таким:

1-я кучка — 23 г + 22 г + 21 г + 3 г = 69 г;
2-я кучка — 20 г + 19 г + 18 г + 12 г = 69 г;
3-я кучка — 17 г + 16 г + 15 г + 14 г + 7 г = 69 г;
4-я кучка — 13 г + 11 г + 10 г + 9 г + 8 г + 6 г + 5 г + 4 г + 2 г + 1 г = 69 г.

Ответ. Можно.

13.Имеется тысяча билетов с номерами 000, 001, 002, …, 998, 999 и сто ящиков с номерами 00, 01, 02, …, 98, 99. Билет разрешается опускать в ящик, если номер ящика получается зачёркиванием одной цифры в записи номера билета. Может ли после некоторого раскладывания всех билетов по указанному правилу хотя бы один ящик оказаться пустым?

 Может. Например, ящик с номером 98 может быть пустым, если билеты с номерами, содержащими цифры 9, 9, 8, опустить в ящик 99, билеты с номерами, содержащими цифры 9, 8, 8 опустить в ящик 88, а билеты с номерами, содержащими цифру, отличную от 8 и 9, опустить в ящик с номером, содержащем эту цифру.

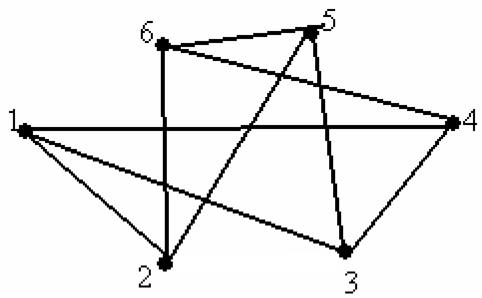
Ответ. Может.

14.Может ли у каждого из учащихся в классе быть ровно трое друзей в этом классе, если в классе: 1) 25 учащихся; 2) 18 учащихся?

 Обозначим через n количество учащихся в классе. Тогда количество «дружб», по условию, равно $\frac{3n}{2}$.

1) Так как при $n = 25$ число $\frac{3n}{2}$ не является целым, то при 25 учащихся в классе условие не может быть выполнено.

2) При $n = 18$ количество «дружб» равно 27. Покажем, что у каждого из учащихся в классе может быть ровно трое друзей. Разобьём класс на 4 группы: в трёх группах по 4 человека, а в одной — 6. В группах по 4 человека любые двое могут быть друзьями, причём члены каждой из этих групп больше ни с кем в классе не дружат. Тогда у каждого из этих учащихся в классе ровно трое друзей. «Дружбы» членов группы из 6 человек показаны на рисунке.



Ответ. 1) Нет; 2) да.