Задания для 8 класса

1. В классе 25 учащихся. Из них 19 занимаются спортом, 20 — изучают дополнительно иностранный язык, 22 — осваивают компьютер, 23 — увлекаются музыкой. Каково наименьшее количество учащихся класса, у которых все четыре перечисленных увлечения?

А. 9. **Б.** 8. **В.** 7. **Г.** 6.

 Из условия вытекает, что 25 – 19 = 6 учащихся не занимаются спортом, 25 – 20 = 5 учащихся не изучают дополнительно иностранный язык, 25 – 22 = 3 учащихся не осваивают компьютер, 25 – 23 = 2 учащихся не увлекаются музыкой. Таким образом, не более 6 + 5 + 3 + 2 = 16 учащихся не имеют хотя бы одного из перечисленных увлечений. Следовательно, по крайней мере 25 – 16 = 9 учащихся имеют все четыре перечисленных увлечения. Наименьшее количество таких учащихся равно 9. Это происходит в случае, если у всех указанных 16 учащихся отсутствует ровно по одному из перечисленных увлечений.

Ответ. А. 9.

2. Между 4 и 5 часами дня минутная стрелка на часах была ровно на два минутных деления впереди часовой стрелки. Какое время показывали часы?

А. 16 ч 20 мин. **Б.** 16 ч 22 мин. **В.** 16 ч 23 мин. **Г.** 16 ч 24 мин.

 Понятно, что между 4 и 5 часами дня часы показывали 16 часов с минутами. Обозначим через n количество делений, которое успела пройти минутная стрелка после 16 часов. Часовая стрелка двигается в 12 раз медленнее минутной, следовательно она за это же самое время прошла $\frac{n}{12}$ делений. Поскольку от начала часа минутная стрелка прошла на 22 деления больше, чем часовая (в начале часа она отставала на 20 делений, а в конце уже была на 2 деления впереди), то получаем уравнение $n = \frac{n}{12} + 22$, или $11n = 12 \cdot 22$. Следовательно, $n = 24$, искомое время равно 16 часов 24 мин.

Ответ: Г. 16 часов 24 мин.

3. Имеется тысяча билетов с номерами 000, 001, 002, …, 998, 999 и сто ящиков с номерами 00, 01, 02, …, 98, 99. Билет разрешается опускать в ящик, если номер ящика получается зачёркиванием одной цифры в записи номера билета. Какое наибольшее количество билетов может оказаться в одном ящике после некоторого раскладывания всех билетов по указанному правилу?

А. 30. **Б.** 28. **В.** 21. **Г.** 10.

 Покажем, что наибольшее количество всех трёхзначных номеров билетов, содержащих в записи номера билета две данные цифры в указанном порядке, равно 28.

Пусть $\overline{ab}$ — номер ящика. Запишем номера билетов, которые могут быть опущены в этот ящик:

$\overline{0ab}$, $\overline{1ab}$, ..., $\overline{9ab}$; $\overline{a0b}$, $\overline{a1b}$, ..., $\overline{a9b}$; $\overline{ab0}$, $\overline{ab1}$, ..., $\overline{ab9}$.

Всего тридцать, но если a и b — различные цифры, то среди них ровно две пары записаны дважды: $\overline{aab}, \overline{abb}$, различных номеров 28.

А если a и b — одинаковые цифры, то число $\overline{aaa}$ записано трижды, различных номеров 27.
Следовательно, искомое количество равно 28.

Ответ. Б. 28.

4. Собралось 10 друзей, среди которых самым младшим был Вова — любитель математики. Он нашёл отношение суммы возрастов всех остальных друзей к сумме возрастов всех собравшихся. Какое из чисел, приведенных в ответах, он не мог получить?

А. $\frac{9}{10}$. **Б.** $\frac{10}{11}$. **В.** $\frac{11}{12}$. **Г.** $\frac{12}{13}$.

 Число $\frac{9}{10}$ он не мог получить, ибо тогда отношение его возраста к сумме возрастов всех собравшихся равнялось бы 0,1 и он не мог бы тогда быть самым младшим.
Все остальные значения, приведенные в ответах, он мог получить.
Например, если 8 друзьям по 11 лет, девятому 12 лет, а Вове 10 лет, то указанное отношение равно $\frac{11\cdot 8+12}{11\cdot 8+12+10}=\frac{100}{110}=\frac{10}{11}$.
Если 8 друзьям по 12 лет, девятому 14 лет, а Вове 10 лет, то указанное отношение равно $\frac{12\cdot 8+14}{12\cdot 8+14+10}=\frac{110}{120}=\frac{11}{12}$.
Если 8 друзьям по 13 лет, девятому 16 лет, а Вове 10 лет, то указанное отношение равно $\frac{13\cdot 8+16}{13\cdot 8+16+10}=\frac{120}{130}=\frac{12}{13}$.

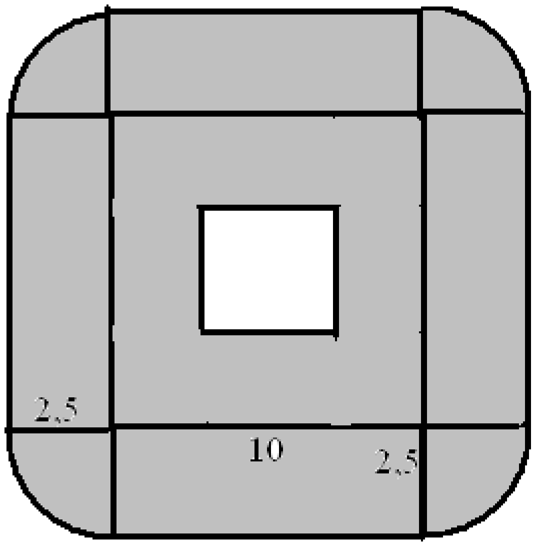
Ответ. А. $\frac{9}{10}$.

5. Два корабля после встречи двигались своими курсами прямолинейно с постоянными скоростями 15 км/ч и 20 км/ч. Какое из приведенных в ответах значений не может быть расстоянием между ними через 3 часа?
А. 10 км. **Б.** 15 км. **В.** 75 км. **Г.** 105 км.
 Если курсы кораблей противоположны, то расстояние между ними через 3 часа будет (15 + 20)·3 = 105 км. Если их курсы совпадают, то оно равно (20 – 15)·3 = 15 км. В остальных случаях это расстояние равно длине стороны треугольника, у которого две другие стороны равны 15·3 = 45 км и 20·3 = 60 км. Из неравенств треугольника следует, что искомое расстояние меньше 105 км и больше 15 км. Следовательно, оно не может равняться 10 км. Так как можно построить треугольник со сторонами 45, 60, 75, то 75 км могло быть указанным расстоянием.

Ответ. А. 10 км.

6. Круг радиуса 2,5 см перемещается по столу так, что его центр обходит контур квадрата со стороной 10 см. Найдите площадь части стола, образованной следом круга. Выберите из приведенных в ответах наиболее точное значение.

А. 225 см^2. **Б.** 201 см^2. **В.** 195 см^2. **Г.** 190 см^2.



 Изобразим множество точек, являющихся объединением кругов радиусов 2,5 см с центрами в точках контура квадрата со стороной 10 см (см. рис.). Полученная фигура состоит из 4-х прямоугольников 10×2,5, 4-х четвертей круга радиуса 2,5 см и квадрата 10 см×10 см с вырезанным квадратом 5 см×5 см. Её площадь равна $4\cdot 10\cdot 2{,}5 + \pi\cdot 2{,}5^2 + 10^2 - 5^2 \approx$ 195 см^2.

Ответ. В. 195 см^2.

7. Вы прошли мимо дома, номер которого равен $2n + 1$ (нечётная сторона улицы). Мимо скольких домов по этой стороне улицы ещё нужно пройти, чтобы дойти до дома, номер которого в 5 раз больше?

А. $4n + 2$. **Б.** $4n + 1$. **В.** $4n$. **Г.** $4n - 1$.

 Номер дома, до которого нужно пройти, равен $10n + 5$. Количество нечётных чисел между числами $10n + 5$ и $2n + 1$ равно $((10n + 3) - (2n + 1)) : 2 = 4n + 1$. Это и есть искомое количество.

Ответ. Б. $4n + 1$.

8. Каков трёхзначный номер комнаты в гостинице, если он совпадает с половиной суммы всех шести двузначных чисел, которые можно образовать из цифр номера?

А. 182. **Б.** 298. **В.** 198. **Г.** 188.

 Обозначим номер комнаты через $\overline{abc}$, где a — цифра сотен, b — цифра десятков, c — цифра единиц. Из условия следует равенство

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = \frac{1}{2}\left(\overline{ab} + \overline{ba} + \overline{ac} + \overline{ca} + \overline{bc} + \overline{cb}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(10a + b + 10b + a + 10a + c + 10c + a + 10b + c + 10c + b\right) = 11(a + b + c).$$

Следовательно, $89a = 10c + b$ или $89a = \overline{cb}$. Так как число $\overline{cb}$ двузначное, то $a = 1$. Тогда $\overline{bc} = 98$. Искомый номер 198.

Ответ. В. 198.

9. Двое играют в шахматы с часами, включая часы, когда приходит очередь делать ход, и выключая после сделанного хода. После того, как они сделали по 35 ходов, часы каждого игрока показывали 2 часа 30 минут. Какое из приведенных чисел не могло быть наибольшим значением разности показаний часов игроков в начале каждого из 70 ходов?

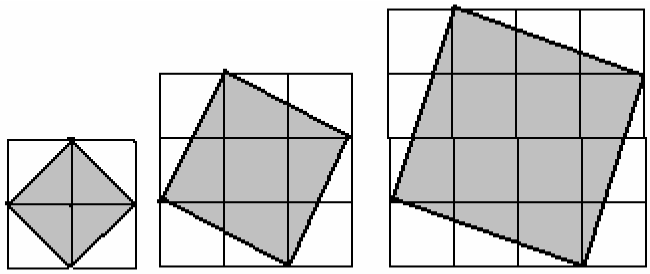
А. 2 мин. **Б.** 5 мин. **В.** 1 час. **Г.** 2 часа.

 Если указанная в условии разность равна 2 мин., то на один ход каждый тратил не более 4 минут. Действительно, в начале хода могло быть на 2 минуты меньше, чем у соперника, и не более 2 минут ушло на опережение часов соперника. Тогда за 70 ходов потрачено не более 280 минут. А по условию, прошло 5 часов или 300 минут.

Все остальные числа могут быть значениями разности показаний часов игроков в начале некоторого хода. Действительно, пусть, например, начинающий партию над первым ходом думал 5 мин., а над остальными 34-ю ходами — по 2ч 25 мин : 34 = 145 мин : 34 ≈ 4,27 мин; второй игрок над каждым ходом думал по 2ч 30 мин : 35 = 150 мин : 35 ≈ 4,28 мин. То есть перед первым ходом второго игрока 5 мин могли быть наибольшими значениями разности показаний часов игроков. Аналогично это показывается для 1 ч и для 2 ч.

Ответ. А. 2 мин.

10. На рисунке на клеточной бумаге с клетками одинаковых размеров изображены закрашенные фигуры, площади которых превосходят площадь одной клетки на фигуре 1 в 2 раза, на фигуре 2 в 5 раз, на фигуре 3 в 10 раз. Во сколько раз превосходит площадь одной клетки площадь закрашенного квадрата на фигуре с номером n, построенной по тому же правилу, что и фигуры 1, 2, 3?



№1 №2 №3

А. В $n^2 - n$ раз. **Б.** В $n^2 + n$ раз. **В.** В $n^2 + 1$ раз. **Г.** В $n^2 - 1$ раз.

 Площадь закрашенного квадрата на каждом рисунке равна разности площади большого квадрата, состоящего из клеток и содержащего закрашенный квадрат, и суммы площадей 4-х равных прямоугольных треугольников, отсекаемых сторонами закрашенной фигуры. Из двух таких прямоугольных треугольников можно составить прямоугольник, состоящий из клеток, количество которых равно номеру фигуры.

Если принять площадь одной клетки за единицу площади, то, учитывая, что длина стороны квадрата выражается числом, на 1 превосходящим номер фигуры, получим, что площадь S_n закрашенной фигуры с номером n равна $(n + 1)^2 - 2n = n^2 + 1$. Следовательно, искомое отношение равно $n^2 + 1$.

Ответ. В. В $n^2 + 1$ раз.

11. Имеются гирьки массой 3 г, 6 г, 9 г, …, 66 г, 69 г. Можно ли их разложить на четыре равные по массе кучки?

 Масса всех гирек равна 3 + 6 + 9 + … + 66 + 69 = 3(1 + 2 + 3 + … + 22 + 23) = = 3((1 + 23) + (2 + 22) + … + (11 + 13) + 12) = 3·(24·11 + 12) = 3·23·12 = 828 г. Следовательно, если можно разложить все гирьки на четыре равные по массе кучки, то масса гирек в каждой кучке должна равняться 828:4 = 207 г. Разложение может быть, например, таким:

1-я кучка — 69 г + 66 г + 63 г + 9 г = 207 г;
2-я кучка — 60 г + 57 г + 54 г + 36 г = 207 г;
3-я кучка — 51 г + 48 г + 45 г + 42 г + 21 г = 207 г;
4-я кучка — 39 г + 33 г + 30 г + 27 г + 24 г + 18 г + 15 г + 12 г + 6 г + 3 г = 207 г.

Ответ. Можно.

12. Цена торта равнялась 110 зедов (зед — условная денежная единица) и состояла из стоимостей продуктов, изготовления и реализации. Когда стоимость продуктов возросла на 20%, а расходы на изготовление и реализацию, возросли на 10%, то цена торта стала равняться 129 зедам. Какова будет цена торта, если после возрастания цен стоимость продуктов ещё увеличится на 5%, а расходы на изготовление и реализацию увеличатся ещё на 10%?

 Обозначим через x зедов, y зедов, z зедов первоначальные расходы на продукты, изготовление и реализацию торта соответственно. Тогда на основании условия имеем следующие 2 уравнения:

$$\begin{cases} x+y+z=110, \\ 1,2x+1,1(y+z)=129. \end{cases}$$

Умножив обе части первого уравнения на 1,1 и вычтя из каждой части 2-го уравнения соответствующую часть 1-го, получим: $0,1x = 8$, $x = 80$. Подставив это значение в первое уравнение, будем иметь: $y + z = 30$.

Требуется найти значение выражения $1,05\cdot1,2x + 1,1\cdot1,1(y + z)$ при $x = 80$, $y + z = 30$: $1,05\cdot1,2\cdot80 + 1,1\cdot1,1\cdot30 = 137,1$. Искомая цена равна 137,1 зеда.

Ответ. 137,1 зеда.

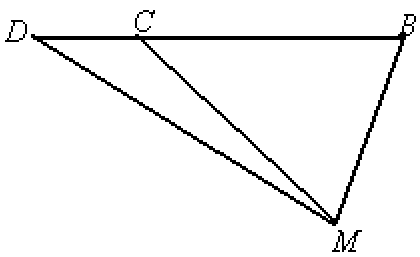
13. В футбольном турнире 6 команд сыграли между собой 2 тура — каждая команда сыграла с двумя разными командами. Обязательно ли найдутся три команды, не сыгравшие пока между собой?

 Рассмотрим одну из команд. Она сыграла с двумя командами и с тремя не сыграла. Предположим, что среди этих трёх команд нет двух, не сыгравших пока между собой. Тогда все эти три команды сыграли между собой, для чего им потребовалось сыграть 3 матча. Однако за один тур эти три команды могли провести между собой только 1 матч, а за 2 тура — 2 матча. Следовательно, среди этих трёх команд есть две, не сыгравшие пока между собой. Вместе с рассмотренной командой они образуют три команды, не сыгравшие пока между собой.

Ответ. Обязательно.

14. Как расположены дуб, сосна и берёза, если с любого места расстояние до сосны меньше хотя бы одного из расстояний до дуба или берёзы?

 Обозначим места расположения дуба, сосны и берёзы соответственно буквами D, C, B. Известно, что для любой точки M расстояние MC меньше или MD, или MB. Если точки D, C, B не лежат на одной прямой, то нетрудно указать точки, в которых нарушается условие задачи. Например, такой точкой является центр окружности, описанной около треугольника DCB. Следовательно, точки D, C, B лежат на одной прямой. Если точка C лежит вне отрезка BD, то легко также указать точки, в которых нарушается условие задачи. Покажем, что для произвольной точки C, лежащей между D и B, условие выполняется.



Пусть M — произвольная точка плоскости, не лежащая на прямой BD. Соединим точку C, лежащую между точками B и D, с точкой M (см. рис.). Если CM перпендикулярна BD, то CM короче и DM, и BM. Если CM не перпендикулярна BD, то один из углов DCM или BCM тупой, и сторона, лежащая против него, (DM или BM) больше CM.

Нетрудно показать, что условие выполняется и для точек, лежащих на прямой BD.

Ответ. Сосна находится между дубом и берёзой.