Задания для 8 – 9 классов

1 часть

1. В классе из 25 учащихся 18 изучают английский язык, 15 — немецкий и 17 — французский. Для каждых двух языков найдётся ровно 5 учащихся, изучающих только эти два языка. Сколько учащихся изучают все три языка, если каждый учащийся изучал хотя бы один язык?

А. 6. **Б.** 5. **В.** 4. **Г.** 3.

 Обозначим количество учащихся класса, изучающих ровно один язык, через x, а все три — через y. По условию, ровно два языка изучают 5·3 = 15 учащихся, ровно один или все три языка — 25 – 15 = 10 учащихся. Если предположить, что у каждого изучающего иностранный язык есть учебник по этому языку и притом только один, то учебников всего 18 + 15 + 17 = 50. Из них по 30 учебникам учащиеся изучают ровно 2 языка. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 3y = 20, \\ x + y = 10. \end{cases}$$

Вычитая из левых частей первого уравнения левые части второго, а из правых — правые, получим: $2y = 10$ или $y = 5$. Следовательно, три языка изучают 5 учащихся, а 5 учащихся изучают ровно один язык, причём трое изучают английский язык, а двое — французский..

Ответ. Б. 5.

2. Интервалы движения маршрутных такси по трём кольцевым маршрутам, начинающимся от автостанции, составляют 20, 30 и 40 минут. Сколько раз с 9-00 до 15-00 маршрутные такси одновременно находятся на автостанции, если одна из таких встреч состоялась в 11-20?

А. 3. **Б.** 4. **В.** 5. **Г.** 6.

 Так как НОК (20, 30, 40) = 120, то встречи маршрутных такси на автостанции проходят через 120 минут или 2 часа. Следовательно, в указанный период встречи были в 9-20, 11-20, 13-20, всего 3.

Ответ. А. 3.

3. Первого сентября в одном из классов лицея собрались учащиеся, пришедшие из разных школ. Оказалось, что каждая девочка знакома с шестью девочками и девятью мальчиками. А каждый мальчик знаком с десятью девочками и семью мальчиками. Кого в классе больше — девочек или мальчиков?

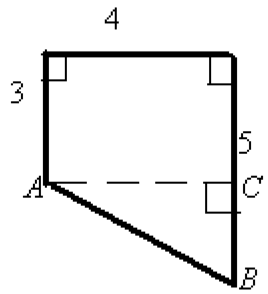
А. Мальчиков. **Б.** Девочек. **В.** Одинаковое количество. **Г.** Определить невозможно.

 Обозначим количество девочек через x, а количество мальчиков — через y. Представим, что все девочки вручили своим знакомым мальчикам карточки с адресами электронной почты. Из условия следует, что девочки раздали $9x$ карточек (каждая — девяти знакомым мальчикам), а мальчики получили всего $10y$ карточек (каждый от десяти знакомых девочек). Значит, $9x = 10y$. Отсюда следует, что $x > y$.

Ответ. Б. Девочек.

4. Аэроплан поднялся на высоту 1 км и пролетел 3 км на север, опустился на высоту 600 м и пролетел 4 км на восток, поднялся на высоту 2 км, пролетел 5 км на юг и приземлился. На каком расстоянии с точностью до 100 м он оказался от места взлёта?

А. 4,0 км. **Б.** 4,3 км. **В.** 4,5 км. **Г.** 5,0 км.



 На рисунке изображена проекция на землю маршрута движения аэроплана. Искомое расстояние находим по теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике ABC:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}5 \text{ км.}$$

Ответ. В. 4,5 км.

5. В классе мальчиков вдвое больше, чем девочек. Известно, что при случайном выборе двух дежурных вероятность того, что оба выбранных окажутся девочками, равна 0,1. Сколько в классе учащихся?

А. 15. **Б.** 18. **В.** 24. **Г.** 21.

 Обозначим количество девочек в классе через x, тогда мальчиков в классе $2x$, а всего учащихся $3x$. Двух дежурных можно выбрать $\frac{3x(3x-1)}{2}$ способами, а двух девочек — $\frac{x(x-1)}{2}$ способами. Так как вероятность события равна отношению количества исходов опыта, при которых наступает это событие, к общему количеству равновозможных исходов опыта, то, по условию, $\dfrac{\frac{x(x-1)}{2}}{\frac{3x(3x-1)}{2}} = 0{,}1$ или $10x - 10 = 9x - 3$, или $x = 7$. Следовательно, в классе $7 \cdot 3 = 21$ учащийся.

Ответ. Г. 21.

6. Две электрички выехали со станции в одном направлении с интервалом в 10 минут и двигались со скоростью 54 км/ч. С какой скоростью двигался встречный товарный поезд, если он встречал электрички через 6 минут одну после другой?

А. 144 км/ч. **Б.** 72 км/ч. **В.** 48 км/ч. **Г.** 36 км/ч.

 Расстояние между электричками равно $54 \cdot \frac{1}{6} = 9$ км. Обозначим скорость встречного поезда через x км/ч. Тогда скорость сближения поезда и электрички равна $(x + 54)$ км/ч. Имеем уравнение

$$\frac{1}{10} \cdot (x+54) = 9 \text{ или } x = 36 \text{ км/ч.}$$

Ответ. Г. 36 км/ч.

7. В два сосуда налита вода. Если вначале половину воды первого сосуда перелить во второй, а затем треть содержимого второго сосуда перелить в первый, то в обоих сосудах будет по 6 л воды. В каком сосуде вначале было больше воды?

А. В первом. **Б.** Одинаковые объёмы. **В.** Во втором. **Г.** Определить невозможно.

 Обозначим объём воды в первом сосуде через x л, а во втором — через y л. Составим таблицу, моделирующую переливания.

Сосуд	Вначале	После 1 переливания	После 2 переливания

Первый	x	$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+y\right)=\frac{2}{3}x$
Второй	y	$\frac{1}{2}x+y$	$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x+y\right)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y$

По условию, имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=6,\\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y=6.\end{cases} \text{ или } \begin{cases}2x+y=18,\\ x+2y=18.\end{cases}$$

Вычитая левые и правые части уравнений, получим уравнение $x-y=0$. Следовательно, вначале объёмы воды в сосудах были одинаковые.

Ответ. Б. Одинаковые объёмы.

8. Роман купил несколько пицц по 39 руб. за штуку и несколько тортов по 99 руб. за каждый. Всего он израсходовал более 350 руб., но меньше 370 руб. Сколько изделий кулинарии купил Роман?

А. 5. **Б.** 6. **В.** 7. **Г.** 8.

 Обозначим количество купленных пицц через x, а количество тортов — через y. Тогда из условия следует равенство

$39x + 99y = 351 + a$, где $0 \le a \le 18$, или $13x + 33y = 117 + \frac{a}{3}$.

Очевидно, что $y \le 3$. Если $y = 3$, то $13x = 117 - 99 + \frac{a}{3} = 18 + \frac{a}{3} \le 24$. Полученное уравнение не имеет натуральных решений.

Так как $y \ge 2$, то при $y = 2$ имеем уравнение $13x = 117 - 66 + \frac{a}{3} = 51 + \frac{a}{3} \le 57$.

Полученное уравнение имеет единственное решение в множестве натуральных чисел: $x = 4$. Следовательно, Роман купил $4 + 2 = 6$ изделий.

Ответ. Б. 6.

9. Прямоугольный лист бумаги разрезают по прямой на две части. Одну из полученных частей снова разрезают на 2 части и так делают несколько раз. Какое наименьшее количество разрезов нужно сделать, чтобы среди полученных частей оказалось два десятиугольника?

А. 10. **Б.** 11. **В.** 12. **Г.** 13.

 Один десятиугольник можно получить, сделав 6 разрезов. Для этого нужно от данного листа отрезать 4 вершины («уголки»), а затем от полученного восьмиугольника отрезать 2 вершины. Чтобы получить два десятиугольника, достаточно сначала лист разрезать на два четырёхугольника, а затем из каждого из них получить десятиугольник указанным способом. Всего потребуется 13 разрезов.

Получить два десятиугольника 12-ю разрезами нельзя. Это следует из того, что у них 20 вершин, а вначале у листа было 4 вершины. За один разрез количество вершин одного куска можно увеличить только на 1. Четыре вершины образуются при разрезании на две части по прямой, не проходящей через вершины.

Для получения двух десятиугольников обязательно нужно сделать такой разрез. Оставшиеся 20 – 4 – 4 = 12 вершин могут быть получены с помощью 12 разрезов. Всего потребовалось 13 разрезов. Более, чем один разрез, не проходящий через вершины листа, увеличивает общее количество необходимых разрезов.

Ответ. Г. 13.

10. В школе 1000 учащихся занимаются в различных школьных кружках и секциях. Кружков и секций, где занимается по 20 человек, в 10 раз меньше, чем тех, которые насчитывают в своём составе по 10 человек. В остальных кружках и секциях по 50 человек. Сколько кружков и секций в школе?

А. 54. **Б.** 55. **В.** 58. **Г.** 63.

□ Обозначим количество кружков и секций, в которых насчитывается 20 и 50 человек, через x и y соответственно. Тогда по 10 учащихся в $10x$ кружках и секциях. По условию, имеет место равенство: $20x + 100x + 50y = 1000$, или $120x + 50y = 1000$, или $12x + 5y = 100$. Из последнего равенства вытекает, что $x \le 8$, кроме того, x делится на 5. Отсюда следует, что $x = 5$, тогда $y = 8$. Итак, по 20 человек в 5 кружках и секциях, по 10 человек — в 50, по 50 человек — в 8, всего в школе 63 кружка и секции.

Ответ. Г. 63.

11. Какой угол образовывали часовая и минутная стрелки, если через 20 минут они образовывали такой же угол?

А. 55° или 125°. **Б.** 55°. **В.** 125°. **Г.** 65° или 115°.

□ За 20 минут — треть часа — минутная стрелка повернётся на треть полного оборота, то есть на 120°. А часовая стрелка — всего на 10°, так как движется в 12 раз медленнее. При этом минутная стрелка может успеть обогнать часовую стрелку (рис. 1) или нет (рис. 2). На рисунках жирными линиями показано начальное положение стрелок, тонкими — их положение через 20 минут. Пусть первоначально угол между стрелками был равен α. Тогда в первом случае получаем уравнение $2\alpha + 10° = 120°$, откуда $\alpha = 55°$. Во втором случае $2\alpha - 10° + 120° = 360°$, откуда $\alpha = 125°$.

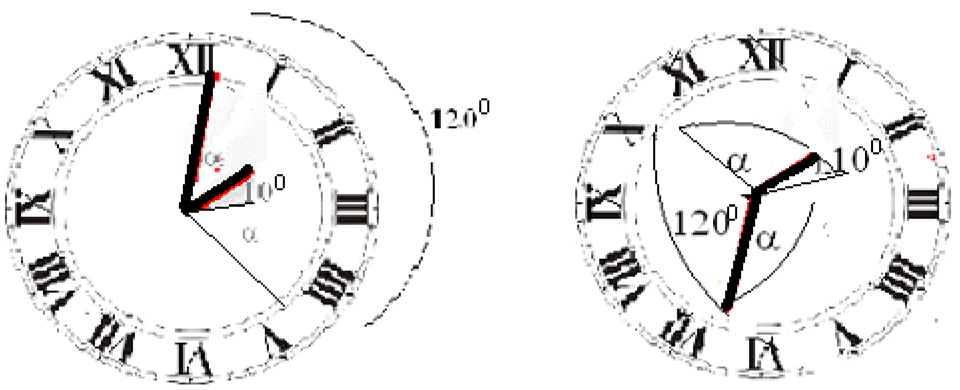
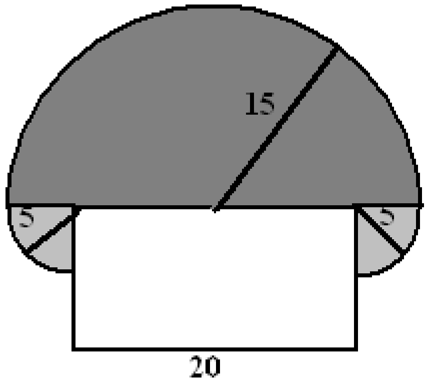


Рис. 1 Рис. 2

Ответ. А. 55° или 125°.

12. Посередине стены дома длиной 20 м, ширина которого 10 м, находится электрическая розетка. Шнур длиной 15 м соединяет с розеткой электрокосилку. Наибольшая площадь газона, которую можно скосить этой косилкой, приближённо равна … (выберите наиболее точное значение)



А. 492 м^2. **Б.** 442 м^2. **В.** 392 м^2. **Г.** 342 м^2.

 Множество точек, до которых может достать шнур, изображено на рисунке.

Искомая площадь равна полусумме площадей кругов радиусов 15 м и 5 м:

$$S = \frac{1}{2}\left(225\pi + 25\pi\right) = 125\pi \approx 392 \text{ м}^2.$$

Ответ. В. 392 м^2.

13. Неопытный предприниматель закупил партию яиц и, продав их по цене 40 зедов за десяток в связи с падением спроса, получил убыток в 800 зедов (зед — условная денежная единица). Вторую такую же партию предприниматель в связи с ростом спроса сумел продать по 50 зедов за десяток, и его прибыль составила 1200 зедов. По какой цене нужно продавать десяток яиц, чтобы получить прибыль 2000 зедов от продажи такой же партии яиц?

А. 60 зедов. **Б.** 56 зедов. **В.** 54 зеда. **Г.** 52 зеда.

 Обозначим через x количество десятков яиц в приобретенной партии, а через y зедов — цену десятка яиц, по которой предприниматель покупал их. Тогда $x \cdot y$ зедов заплатил предприниматель за каждую партию купленных яиц, а $40x$ зедов и $50x$ зедов соответственно получил предприниматель после продажи первой и второй партии. Из условия имеем систему уравнений: $\begin{cases} xy - 40x = 800, \\ 50x - xy = 1200. \end{cases}$

Сложив левые и правые части уравнений, получим: $10x = 2000$, $x = 200$. Тогда из первого уравнения получаем: $y = \dfrac{800 + 40x}{x} = \dfrac{800 + 40 \cdot 200}{200} = 44$ (зеда).

Обозначим через z зедов искомую цену десятку яиц, обеспечивающую прибыль в 2000 зедов. Имеем уравнение: $xz - xy = 2000$. Отсюда $z = \dfrac{2000 + xy}{x} = \dfrac{2000 + 44 \cdot 200}{200} = 54$ зеда. Следовательно, чтобы получить указанную прибыль, предприниматель должен продавать десяток яиц по 54 зеда.

Ответ. В. 54 зеда.

14. Можно ли на чашечных весах с помощью гирь 32 г и 56 г (эти гири имеются в неограниченном количестве, и их можно класть на обе чашки весов) отвесить: 1) 140 г; 2) 176 г?

А. 1) Нет; 2) да. **Б.** 1) Да; 2) нет. **В.** 1) Да; 2) да. **Г.** 1) Нет; 2) нет.

 1) Предположим, что можно с помощью гирь 32 г и 56 г отвесить 140 г. Тогда имеет место равенство $32x + 56y = 140$, где x и y — целые числа (они могут быть как положительными, так и отрицательными). Так как левая часть равенства делится, а правая не делится на 8, то ни при каких целых значениях x и y равенство не выполняется. Следовательно, 140 г нельзя отвесить с помощью указанных гирь.

2) Аналогично предыдущему, имеем равенство: $32x + 56y = 176$, где x и y — целые числа. Разделив обе части равенства на 8, получим: $4x + 7y = 22$. Очевидно, что это равенство выполняется при $x = y = 2$. Значит, 176 г можно отвесить с помощью указанных гирь.

Ответ. А 1) Нет; 2) да.

15. Антон, Борис, Владимир и Геннадий участвовали в соревновании по гимнастике. После окончания соревнований выяснилось, что Антон набрал больше баллов, чем Борис и Владимир вместе, но Антон и Борис вместе набрали столько же баллов, сколько Владимир и Геннадий вместе. Кроме того, Борис и Геннадий вместе набрали больше баллов, чем Антон и Владимир вместе. Расположите гимнастов по убыванию количеств набранных ими баллов.

А. Геннадий, Антон, Борис, Владимир. **Б.** Геннадий, Антон, Владимир, Борис.
В. Антон, Геннадий, Борис, Владимир. **Г.** Антон, Геннадий, Владимир, Борис.

 Обозначим количества баллов, набранных указанными участниками соревнований, первыми буквами их имён: А, Б, В, Г. По условию, имеем:

$$\text{А} > \text{Б} + \text{В}; \qquad (1)$$
$$\text{А} + \text{Б} = \text{В} + \text{Г}; \qquad (2)$$
$$\text{Б} + \text{Г} > \text{А} + \text{В}. \qquad (3)$$

Из неравенства (1) вытекает: А > Б, А > В, то есть Антон в расположении гимнастов по убыванию количеств набранных ими баллов занимает первое или второе место.

Вычитая из равенства (2) неравенство (1), после несложных преобразований получим: 2А < 2Г или А < Г. Итак, Геннадий в искомом расположении занимает первое место, Антон — второе.

Так как А < Г, то из равенства (2) вытекает, что В < Б.

Следовательно, искомое расположение имеет вид: Геннадий, Антон, Борис, Владимир.

Ответ. А. Геннадий, Антон, Борис, Владимир.

2 часть

1. В первенстве региона по хоккею участвует 20 команд. Верно ли, что в любой момент состязаний имеются две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое количество матчей?

 Каждая команда могла сыграть от 0 до 19 матчей. Поэтому количество игр каждой команды может принимать значения 0, 1, 2, …, 19. Если бы все 20 команд сыграли различное количество матчей, то среди участников первенства было бы по одной команде, сыгравших 0, 1, 2, …, 19 игр. Однако, если есть команда, сыгравшая 19 игр, то есть сыграла со всеми остальными командами, то нет команды, сыгравшей 0 игр. Получили противоречие, которое доказывает, в любой момент состязаний имеются две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое количество матчей.

Ответ. Верно.

2. В некоторой денежной системе используются монеты достоинством 1 зед, 2 зеда, 5 зедов и 10 зедов (зед — условная денежная единица). У Сергея 24 монеты на сумму 49 зедов. Обязательно ли среди этих монет есть хотя бы одна монета достоинством 2 зеда?

 Обозначим через x, y, z, t количества монет Сергея достоинством соответственно 1 зед, 2 зеда, 5 зедов и 10 зедов. Из условия имеем систему уравнений:

$\begin{cases} x+y+z+t=24 \\ x+2y+5z+10t=49. \end{cases}$ Вычтя из левой части второго уравнения левую часть первого, а из правой — правую, получим: $y + 4z + 9t = 25$.

Проверим, может ли значение y равняться нулю. Если $y = 0$, то последнее уравнение принимает вид: $4z + 9t = 25$.

Выясним, имеет ли оно решение в целых неотрицательных числах. Так как t не может быть чётным, то остаётся один вариант: $t = 1$, $z = 4$. Тогда $x = 19$.

Таким образом, среди монет Сергея монета достоинством 2 зеда может не содержаться: у него может быть 4 монеты по 5 зедов, 1 монета достоинством 10 зедов и 19 монет достоинством 1 зед. Этот ответ можно получить перебором.

Ответ. Нет.

3. Известно, что размеры комнаты выражаются целыми числами метров. Каковы размеры комнаты, если разность площади пола и его периметра численно равна 3?

 Обозначим размеры комнаты через m м и n м. По условию,

$mn - 2(m + n) = 3$. Тогда $m(n - 2) = 3 + 2n$ или, если $n \neq 2$ м, то $m = \frac{3+2n}{n-2} = 2 + \frac{7}{n-2}$. Число $\frac{7}{n-2}$ — целое при двух значениях n: $n_1 = 3$ и $n_2 = 2 + 7 = 9$. Тогда $m_1 = 2 + 7 = 9$, $m_2 = 2 + 1 = 3$. Следовательно, комната имеет размеры 3 м×9 м.

Ответ. 3 м×9 м.

4. В центре площадки размером 100 м × 100 м стоит столб. Можно ли на этой площадке поместить павильон прямоугольной формы размерами: 1) 30 м × 70 м; 2) 50 м × 50 м?

 1) Возможность поместить на площадке павильон прямоугольной формы размерами 30 м × 70 м показана на рис. 1. Очевидно, что столб в центре площадке не помешает это сделать. Здесь $AB = 70$ м, $MN = 35$ м, $NO = 50\sqrt{2} - 35 > 30$ м.

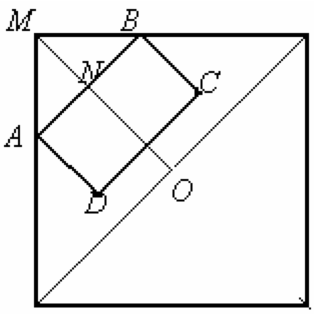


Рис. 1

2) Павильон размерами 50 м × 50 м поместить нельзя, так как каждый квадрат размерами $a \times a$ внутри квадрата размерами $2a \times 2a$ обязательно содержит центр большого квадрата. Для обоснования этого достаточно доказать, что расстояние от вершины квадрата со стороной a до отрезка длиной a, концы которого лежат на сторонах квадрата, меньше a (см. рис. 2).

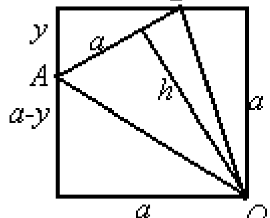


Рис. 2

Пусть h — расстояние от вершины квадрата O до отрезка AB. Тогда

$$S_{ABO} = \frac{1}{2}ah = a^2 - \frac{1}{2}\left(a(a-x) + a(a-y) + xy\right) = \frac{1}{2}\left(a(x+y) - xy\right)$$

.

Следовательно, $h = (x+y) - \frac{xy}{a}$.

Докажем, что $h < a$, если $x^2 + y^2 = a^2$:

$$x + y - \frac{xy}{a} < a \Leftrightarrow (x+y)^2 < \left(a + \frac{xy}{a}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 + 2xy < a^2 + 2xy + \frac{x^2y^2}{a^2}.$$

Получили верное неравенство. Следовательно, $h < a$.

Ответ. 1) Да; 2) нет.

5. Из каких положений шара на прямоугольном бильярдном столе можно ударом кия направить его так, чтобы, отразившись от всех бортов (угол падения равен углу отражения), он прошёл через первоначальное положение?

□ Предположим, что шар, вылетевший из точки M и отразившись от бортов в точках A_2, A_3, A_4, A_1, по закону: «угол падения равен углу отражения» возвратился в точку M. Из построений на рис. 1 следует, что точка M лежит на стороне параллелограмма $A_1A_2A_3A_4$, так как противоположные углы четырёхугольника $A_1A_2A_3A_4$ равны.

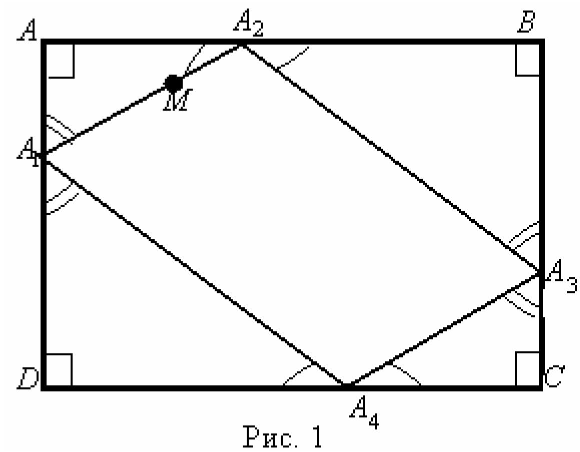


Рис. 1

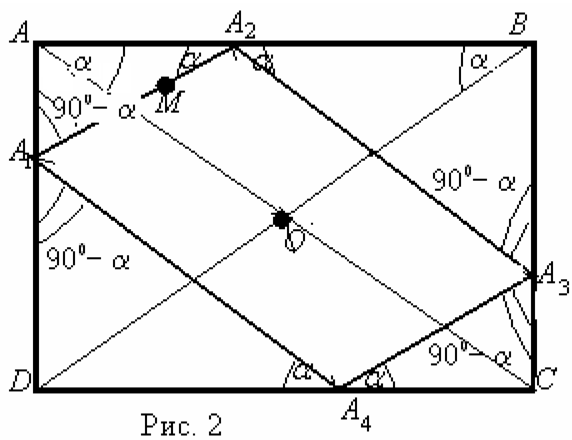


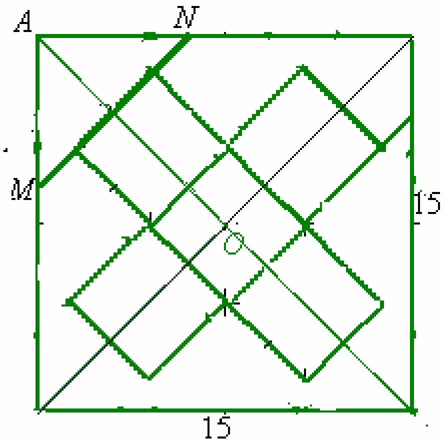
Рис. 2

Задача свелась к возможности построения параллелограмма $A_1A_2A_3A_4$ для данной точки M. Проведём через точку M прямую, параллельную диагонали BD, и обозначим точки её пересечения со сторонами прямоугольника через A_1 и A_2 (рис. 2). Через точки A_1 и A_2 проведём прямые, параллельные диагонали AC и обозначим точки их пересечения со сторонами прямоугольника через A_3 и A_4. Углы, образованные смежными сторонами четырёхугольника $A_1A_2A_3A_4$ со сторонами прямоугольника, равны по построению (см. рис. 2). Из этого следует, что четырёхугольник $A_1A_2A_3A_4$ — параллелограмм, а замкнутая ломаная линия $MA_2A_3A_4\ A_1$ является искомой траекторией.

Указанное построение возможно для всех точек прямоугольника, кроме его вершин и точки пересечения диагоналей. Следовательно, шар может находиться во всех точках бильярдного стола, кроме точки пересечения диагоналей и углов.

Ответ. Из всех положений, кроме точки пересечения диагоналей и углов стола.

6. Можно ли кубик с ребром 5 см завернуть в платок размером 15 см × 15 см так, чтобы все грани были обёрнуты?



 Диагональ квадрата со стороной 15 см приближённо, с недостатком, равна $\sqrt{2} \cdot 15 \approx 22$ см. Чтобы развёртка поверхности куба без одной грани поместилась так, как это показано на рисунке, достаточно, чтобы выполнялось неравенство $MN > 5$, где MN параллельна диагонали и находится на расстоянии 7,5 см от неё. Так как

$$MN = 2AB = 2(AO - BO) \geq 2(11 - 7{,}5) = 7,$$

то данный кубик можно обернуть платком размером 15 см × 15 см. Шестую грань кубика закроют 4 прямоугольных уголка, имеющие форму треугольника AMN.

Ответ. Можно.

7. В буфете продавались пирожки по 10 руб., булки по 12 руб., ватрушки по 14 руб., слойки по 16 руб. и коржики по 20 руб. Группа учащихся купила 14 изделий на 200 руб. Сумма цен купленных изделий равна 42 руб. Сколько и каких изделий куплено, если известно, что никаких изделий не было куплено больше шести и никаких изделий не было куплено в одинаковом количестве?

 Обозначим количества купленных указанных кулинарных изделий первыми буквами их названий: П, Б, В, С, К. Так как сумма цен купленных изделий равна 42 руб., то могли купить или булки, ватрушки, слойки (12 + 14 + 16 = 42) или пирожки, булки и коржики (10 + 12 + 20 = 42).

Если купили булки, ватрушки и слойки, то имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 12Б + 14В + 16С = 200, \\ Б + В + С = 14. \end{cases}$$

Умножив обе части второго уравнения системы на 12 и вычитая их из соответствующих частей первого уравнения, получим: 2В + 4С = 32 или В + 2С = 16.

Так как В и С — натуральные числа, по условию, меньшие 7, то полученному уравнению удовлетворяют следующие значения: $С_1 = 6$, $В_1 = 4$ и $С_2 = 5$, $В_2 = 6$. Тогда $Б_1 = 14 - (6 + 4) = 4$, $Б_2 = 14 - (5 + 6) = 3$.

По условию, количества купленных изделий разных видов различны. Следовательно, условию удовлетворяет только одно решение: Б = 3, В = 6, С = 5, то есть куплено 3 булки, 6 ватрушек и 5 слоек.

Если купили пирожки, булки и коржики, то имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 10П + 12Б + 20К = 200, \\ П + Б + К = 14. \end{cases}$$

Рассуждая аналогично предыдущему, получим уравнение Б + 5К = 30. Это уравнение не имеет решений, удовлетворяющих условию.

Ответ. 3 булки, 6 ватрушек и 5 слоек.

8. В связи со стихийным бедствием в соседнем районе в сельскую школу привезли учащихся 1 – 4 классов из этого района. Прибывших учеников поровну распределили по четырём классам. Оказалось, что в первом классе новички составили половину его состава, во втором классе они составили $\frac{2}{3}$ его состава, в третьем — $\frac{3}{4}$ его состава, а в четвёртом — $\frac{4}{5}$ его состава. Какое наименьшее количество учащихся могли привезти в указанную школу?

□ Обозначим через a количество учащихся, прибывших в указанную школу, а через x, y, z, t количества учащихся 1, 2, 3 и 4 классов соответственно после появления там новичков. Из условия вытекает, что $\frac{a}{4} = \frac{x}{2} = \frac{2y}{3} = \frac{3z}{4} == \frac{4t}{5}$. Отсюда следует, что $15a = 30x = 40y = 45z = 48t$ — целое число. Это число делится на 15, 30, 40, 45 и 48, то есть является их общим кратным. Последовательно найдём наименьшее общее кратное этих чисел. Наименьшее общее кратное чисел 15 и 30 равно 30, 30 и 40 равно 120, 120 и 45 — 360, 360 и 48 — 720.

Поэтому в рассматриваемую школу могли привезти самое меньшее 720:15 = 48 учащихся.

Ответ. 48.

9. В параллели 8-х классов мальчиков больше 34%, но меньше 35%. Какое наименьшее количество учащихся может быть в такой параллели?

□ Обозначим количество учащихся в параллели через x, а количество мальчиков в ней через m. По условию, выполняются неравенства $0{,}34x < m < 0{,}35x$. Следовательно, некоторое число x может быть количеством учащихся в параллели, если существует натуральное число, большее $0{,}34x$ и меньшее $0{,}35x$.

Для поиска искомого значения x исследуем функцию $y = [0{,}34x] – [0{,}35x]$, $x = 1, 2, \ldots$, где $[a]$ — наибольшее целое число, не превосходящее a. Нужно найти наименьшее значение аргумента x, при котором значение функции равно 1 и оба значения $0{,}34x$ и $0{,}35x$ — не целые.

Построим таблицу значений указанной функции.

x	1	2	3	4	…	9	…	11	12	…	15	…	18	…	20	…	23
0,34	0,34	0,68	1,02	1,36		3,06		3,74	4,08		5,1		6,12		6,8		7,82
0,35	0,35	0,7	1,05	1,4		3,15		3,85	4,2		5,25		6,3		7		8,05
[0,34x] – [0,35x]	0	0	0	0		0		0	0		0		0		1		1

Следовательно, $x = 23$ является наименьшим значением аргумента при котором выполняется указанное выше требование. Искомое значение количества учащихся равно 23.

Ответ. 23.

10.Прибыль от продажи 100 единиц товара за месяц составила 16 тыс. зедов (зед — условная денежная единица). Наблюдения показали, что понижение прибыли на единицу товара на a зедов увеличивает объём продаж за этот же период на a % от объёма продаж по прежней цене. При какой прибыли от продажи единицы товара месячная прибыль будет наибольшей?

□ Из условия следует, что прибыль от продажи единицы товара составила 16 000:100 = 160 зедов. Пользуясь условием, составим таблицу, отражающую зависимость общей прибыли от прибыли от продажи единицы товара и количества продаваемого товара с учётом изменения этого количества при изменении прибыли от продажи единицы товара.

Прибыль от продажи	160	150	140	130	120	110	100

единицы товара							
Количество	100	110	120	130	140	150	160
Месячная прибыль	16 000	16 500	16 800	16 900	16 800	16 500	16 000

Из таблицы видно, что для получения наибольшей месячной прибыли целесообразно довольствоваться прибылью 130 зедов от продажи единицы товара. Действительно, рассмотрим функцию $S = (100 + x)(160 + x)$, где x — количество зедов, S — месячная прибыль от продажи товара. Эта квадратичная функция $S = –x^2 + 260x – 16000$ принимает наибольшее значение при $x = \frac{260}{2} = 130$.

Ответ. При 130 зедах.