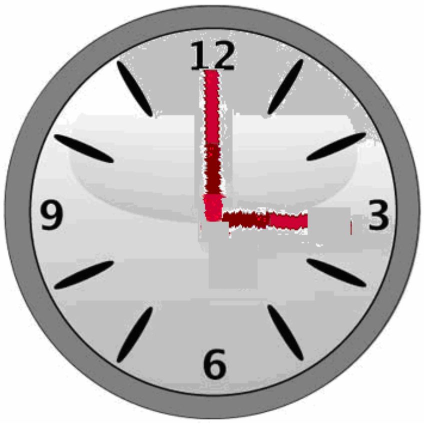
Задания для учащихся 8 – 9 классов

1 часть

1. Какое время дня показывают часы в тот момент, когда положения часовой и минутной стрелок совпадают и находятся между цифрами 3 и 4 на циферблате? Выберите наиболее точное значение из приведенных.

А. 15. 16. **Б.** 15. 17. **В.** 15. 18. **Г.** 15. 19.



□ Пусть на часах 3 часа (см. рис.). Совпадение стрелок произойдёт через время, за которое часовая стрелка повернётся на угол α, а минутная — на угол $90° + \alpha$. За 1 минуту часовая стрелка поворачивается на угол $\frac{30°}{60} = \frac{1}{2}°$, а минутная — на $\frac{360°}{60} = 6°$. Обозначим через t искомое количество минут после 3-х часов. Тогда $6t = 90° + \alpha = 90° + \frac{1}{2}t$. Отсюда $5\frac{1}{2}t = 90$, $t = \frac{2}{11}\cdot 90 = 16\frac{4}{11}$ мин $\approx$16 мин. Искомое время — 15. 16.

Ответ. А. 15. 16.

2. Тридцати двум учащимся класса были заданы вопросы: «Любите ли Вы математику?» и «Любите ли Вы историю?». Оказалось, что каждый ученик назвал каждый из двух предложенных предметов или любимым или нелюбимым. При этом не любят математику 12 учащихся, историю — 19 учащихся, а математику и историю одновременно 6 учащихся. Сколько учащихся любят оба предмета?

А. 6. **Б.** 7. **В.** 8. **Г.** 10.

□ Так как 6 учащихся не любят и математику и историю, то 32 – 6 = 26 учащихся любят или только математику, или только историю, либо оба эти предмета.

Из условия следует, что математику любят 32 – 12 = 20 учащихся, а историю — 32 – 19 = 13 учащихся. Среди 20 + 13 = 33 учащихся дважды учтены те, которые любят и математику, и историю. Их количество равно 33 – 26 = 7.

Ответ. Б. 7.

3. В конкурсе «Волшебный сундучок» приняло участие 25 восьмиклассников школы. Из них 80% правильно решили не менее одной задачи. Среди школьников, решивших более одной задачи, ровно четвёртая часть решили правильно, по крайней мере, 3 задачи, а 4 задачи решила правильно ровно треть учащихся, решивших не менее трёх задач. Сколько учащихся правильно решили ровно одну задачу?

А. 16. **Б.** 12. **В.** 10. **Г.** 8.

□ Не менее одной задачи правильно решили $25\cdot 0{,}8 = 20$ учащихся. Так как среди решивших более одной задачи четверть решили правильно, по крайней мере, 3 задачи, то количество учащихся, решивших более одной задачи, кратно 4: 4, или 8, или 12, или 16, или 20. Из этих чисел на 3 делится только 12. Следовательно, более одной задачи решили 12 учащихся, а 20 – 12 = 8 учащихся решили правильно ровно одну задачу.

Ответ. Г. 8.

4. Какое наибольшее количество масс предметов можно уравновесить на чашечных весах с помощью гирь массами 11 кг, 13 кг, 15 кг и 16 кг, если гири можно класть на обе чашки?

А. 9. **Б.** 10. **В.** 15. **Г.** Более 20.

 Из чисел 1, 3, 5, 6 можно получить 15 различных натуральных чисел с помощью операций сложения и вычитания: 1, 2 = 3 – 1, 3, 4 = 3 + 1, 5, 6, 7 = 6 + 1, 8 = 5 + 3, 9 = 5 + 3 + 1, 10 = 5 + 6 – 1, 11 = 6 + 5, 12 = 6 + 5 + 1, 13 = 6 + 5 + 3 – 1, 14 = 3 + 5 = 6, 15 = 1 + 3 + 5 + 6. Операции вычитания соответствует размещение гири на чаше с товаром. Замена слагаемых 1, 3, 5, 6 на 11, 13, 15, 16 количество различных чисел в указанных равенствах не изменяет. Кроме того, можно получить и другие числа: 1 = 16 – 15, 2 = 15 – 13, 3 = 16 – 13, 4 = 15 – 11, 5 = 16 – 11, 7 = 16 + 15 – 11 – 13, 10 = 15 + 11 – 16, и т. д. Всего можно уравновесить более 20 масс.

Ответ. Г. Более 20.

5. В ящике одинаковое количество белых и чёрных шариков, каждых меньше 50. После того, как в ящик положили 4 шарика, белые составили 52% от количества всех шариков. Сколько белых шариков было в ящике первоначально?

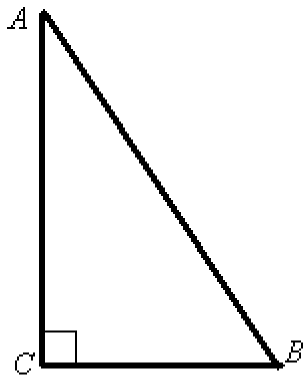
А. 11. **Б.** 23. **В.** 35. **Г.** 48.

 Обозначим через x количество белых шариков в ящике. После того, как в ящик положили 4 шарика, их могло стать $x + 3$ или $x + 4$, а чёрных соответственно $x + 1$ или x. По условию имеем равенства $x + 4 = 0{,}52y$ и $x = 0{,}48y$ или $x + 3 = 0{,}52y$ и $x + 1 = 0{,}48y$, где y — количество шариков в ящике после того, как в ящик положили 4 шарика. Значение $0{,}52y$ для $y \le 102$ является целым числом только при $y = 25$, $y = 50$ $y = 75$, $y = 100$. Имеем уравнение $2x + 4 = y$. Только при $y = 50$ и $y = 100$ оно имеет целые решения $x = 23$ и $x = 48$.

Ответ. Д. 23 или 48.

6. Два автомобиля одновременно отъехали от зданий, расстояние между которыми 4,5 км, по прямолинейным дорогам, пересекающимся под прямым углом, и одновременно подъехали к их пересечению. Скорость одного автомобиля 60 км/ч, другого — 80 км/ч. Сколько примерно времени прошло с момента выезда автомобилей до момента их встречи? Выберите наиболее точное значение.

А. 2 мин 30 с. **Б.** 3 мин. **В.** 3 мин 30 с. **Г.** 4 мин.



 Обозначим места выезда автомобилей буквами A и B, а место их встречи — буквой C. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 4,5 км. Обозначим искомое время через t. Тогда $AC = 80t$, $BC = 60t$. По теореме Пифагора имеем: $3600t^2 + 6400t^2 = 4{,}5^2$ или $t^2 = (4{,}5)^2{:}100^2$. Тогда $t = 4{,}5{:}100 = 0{,}045$ ч = 2,7 мин. ≈ 2 мин. 30 с.

Ответ. А. 2 мин 30 с.

7. В шахматном школьном турнире участвовало 12 шахматистов. Каждый сыграл с каждым по одной партии. После окончания турнира оказалось, что ровно один участник набрал 5,5 очка и занял одиннадцатое место. В шахматах за победу присуждается 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за поражение — 0 очков. На какое количество очков из приведенных победитель мог опередить игрока, занявшего второе место?

А. На 2. **Б.** На 1,5. **В.** На 1. **Г.** На 0,5.

 Шахматисты, занявшие места с 1-го по 10-е, набрали по крайней мере по 6 очков каждый, то есть всего участники, занявшие первые 11 мест всего набрали не менее 5,5 + 6·10 = 65,5 очка. Всего в турнире было сыграно $\frac{12\cdot 11}{2}=66$ партий, то есть разыгрывалось 66 очков. Следовательно, участник, занявший последнее место набрал или 0 очков, или 0,5 очка. Если он набрал 0,5 очка, то участники занявшие первые 10 мест набрали по 6 очков, то есть победитель опередил игрока, занявшего второе место, на 0 очков. Если же участник, занявший последнее место набрал 0 очков, то победитель набрал 6,5 очков, занявший второе место — 6 очков. Следовательно, победитель мог опередить игрока, занявшего второе место, не более, чем на 0,5 очка. Этому выводу удовлетворяет только один из ответов.

Ответ. Г. На 0,5.

8. Из пункта А в пункт В с интервалом в 10 мин вышли два поезда со скоростью 60 км/ч. Какую скорость имел встречный поезд, если он повстречал эти поезда через 4 мин один после другого?

А. 50 км/ч. **Б.** 45 км/ч. **В.** 40 км/ч. **Г.** 35 км/ч.

 Пусть v км/ч — скорость встречного поезда, s — расстояние между пунктами А и В. Тогда (v + 60) км/ч — скорость сближения каждого из поездов, вышедших из пункта А, со встречным поездом. Из условия следует, что расстояние между поездами, вышедшими из А, равно $60\cdot\frac{1}{6}=10$ км. Это расстояние встречные поезда проходят за 4 мин или за $\frac{1}{15}$ ч. Следовательно, $\frac{10}{v+60}=\frac{1}{15}$ или v = 90 км/ч.

Ответ. Д. 90 км/ч.

9. Цех может изготовлять за день не более 100 изделий типа А и не более 300 изделий типа Б. Отдел технического контроля может за день проверить не более 150 изделий. Стоимость изделия А вдвое больше стоимости Б. Сколько изделий типа А и сколько изделий типа Б следует выпускать за день, чтобы общая стоимость продукции была наибольшей и все изделия прошли технический контроль в день изготовления.

А. 100 и 50. **Б.** 75 и 75. **В.** 50 и 100. **Г.** Определить невозможно.

 Введём следующие обозначений: x и y — искомые количества изделий А и Б соответственно, a — стоимость одного изделия типа Б, S — стоимость изготовленной продукции. Из условия вытекают следующие соотношения:

$$\begin{cases} x\le 100, \\ y\le 300, \\ x+y\le 150. \end{cases}$$

Стоимость продукции будет наибольшей, если выпущено наибольшее количество изделий, то есть если $x + y = 150$. Составим выражение для общей стоимости выпущенной продукции. $S = 2ax + a(150 - x) = ax + 150a$. Получили линейную функцию $S = S(x)$, a — положительная константа. Эта функция принимает наибольшее значение при наибольшем значении x, то есть при $x = 100$. Тогда $y = 50$.

Ответ. А. 100 и 50.

10. В соревнованиях по настольному теннису принимало участие n учащихся, среди них мастер спорта Сергей. Соревнования проходили на одном теннисном столе. Первую пару решили определить жребием. Для этого написали имена всех участников на одинаковых бумажках, положили их в непрозрачный мешочек и извлекли наугад две бумажки. Какова вероятность того, что в первой партии будет играть Сергей?

А. $\frac{2}{n}$. **Б.** $\frac{2}{n-1}$. **В.** $\frac{1}{n-1}$. **Г.** $\frac{1}{n}$.

□ Так как исходы опыта можно считать равновозможными, то вероятность того, что при извлечении двух бумажек на одной из них окажется имя Сергея, равна отношению количества тех пар бумажек, на одной из которых стоит имя Сергея, на общее количество всех возможных пар бумажек.

Поскольку количество участников равно n, то имя Сергея может встретиться на одной из бумажек в $(n-1)$-й паре бумажек.

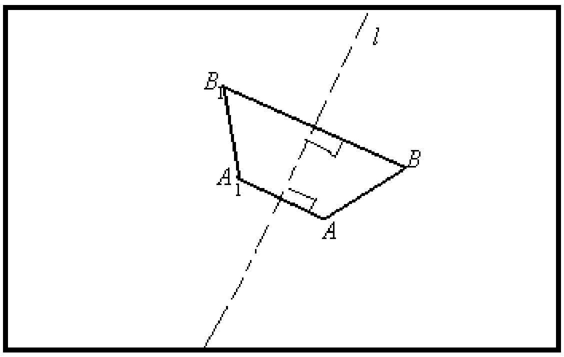
Найдём общее количество всех возможных пар бумажек. Каждая из n бумажек образует пару с любой из остальных $(n-1)$ бумажек, при этом в произведении $n(n-1)$ каждая пара бумажек учитывается дважды. Поэтому общее количество всех возможных пар бумажек равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Тогда искомая вероятность равна $\frac{n-1}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n}$.

Ответ. А. $\frac{2}{n}$.

11. Лист бумаги согнули вдвое по прямой и прокололи только в двух местах, расстояние между которыми равно 3 см и находящихся на расстоянии 2 см и 4 см от линии сгиба. Затем лист развернули и измеряли расстояние между этими местами. Какое из приведенных чисел не могло получиться?

А. 4. **Б.** 8. **В.** $\sqrt{41}$. **Г.** $\sqrt{39}$.

□ На рис. 1 изображён развёрнутый лист бумаги, точки A и B изображают места проколов по одну сторону от линии сгиба l, а точки A_1 и B_1 — им соответствующие по другую сторону. По условию, точки A и A_1, B и B_1 симметричны относительно прямой l. Поэтому четырёхугольник AA_1B_1B — равнобедренная трапеция, у которой $AB = A_1B_1 = 3$ см, $AA_1 = 4$ см, $BB_1 = 8$ см. Найдём диагональ AB_1 (см. рис. 2). Из прямоугольного треугольника ABK имеем: $AK^2 = AB^2 - BK^2 = 9 - 4 = 5$.



I

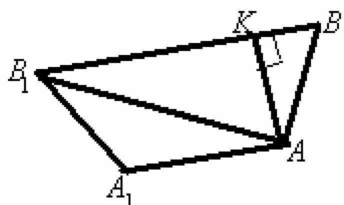


Рис. 2

Из прямоугольного треугольника AB_1K имеем: $AB_1^2 = AK^2 + KB_1^2 = 5 + 36 = 41$. Следовательно, не могло получиться число $\sqrt{39}$.

Ответ. Г. $\sqrt{39}$.

12. В коробке лежат кубики одинакового размера, грани которых раскрашены в два цвета: красный и зелёный. Кубики раскрашены так, что любые два нельзя перепутать, как бы их не переворачивали. Какое наибольшее количество кубиков могло быть в коробке?

А. 8. **Б.** 9. **В.** 10. **Г.** 11.

 Количество различных раскрасок кубика в два цвета приведено в таблице.

Цвет	Количество граней	Количество кубиков
Красный	6	1
Красный	5	1
Красный	4	2
Красный	3	2
Красный	2	2
Красный	1	1
Красный	0	1

Ответ. В. 10.

13. Какое наименьшее количество кругов радиусом 1 см нужно взять, чтобы полностью ими покрыть квадрат со стороной 2 см?

А. 3. **Б.** 4. **В.** 5. **Г.** 6.

 Четырёх кругов достаточно, чтобы покрыть квадрат со стороной 2 см (см. рис. 1). Трёх кругов недостаточно. В этом случае один из них содержит две вершины квадрата, и сторона квадрата является диаметром (рис. 2). Тогда середина противоположной стороны не может быть покрыта, если два других круга покрывают точки квадрата вблизи вершин квадрата B и A.

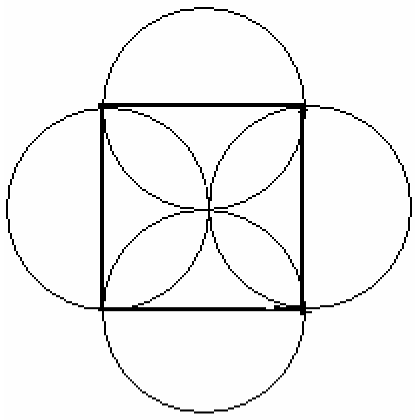


Рис. 1

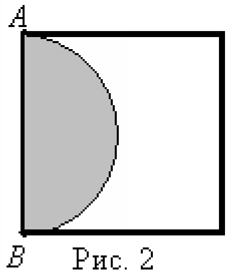
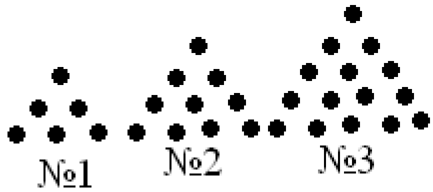


Рис. 2

Ответ. Б. 4.

14. На рисунке изображены три первые фигуры последовательности фигур, составленных из точек. Каждая следующая фигура этой последовательности получается из предыдущей, как 2-я из 1-й, 3-я из 2-й. Сколько точек содержит фигура с номером 20?



А. 130. **Б.** 253. **В.** 460. **Г.** 231.

 Анализируя построение каждой следующей фигуры из предыдущей, замечаем, что для каждой следующей фигуры количество точек равно сумме количества точек предыдущей фигуры и увеличенному на 2 номеру фигуры. Обозначив количество точек фигуры с номером n через a_n, получим серию равенств:

$$a_2 = a_1 + 2 + 2,$$
$$a_3 = a_2 + 3 + 2,$$
$$a_4 = a_3 + 4 + 2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{20} = a_{19} + 20 + 2.$$

Сложив правые части этих равенства и их левые части и приведя подобные члены, получим:

$$a_{20} = a_1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 20 + 2\cdot 19 = 6 + 209 + 38 = 253.$$

Ответ. Б. 253.

15. Если в следующем году маме увеличат зарплату на 20%, то доходы семьи возрастут на 6%, если папе, — то на 10%. А если бабушке увеличат пенсию на 20%, то доходы семьи увеличатся на 3 200 рублей. Каков месячный доход семьи в этом году, если он состоит из зарплат мамы, папы и пенсии бабушки?

А. 100 000 руб. **Б.** 90 000 руб. **В.** 80 000 руб. **Г.** 60 000 руб.

 Обозначим через x_1, x_2, x_3 руб. соответственно размеры зарплат мамы, папы и пенсии бабушки, а через x руб. — общий месячный доход семьи. Тогда из условия следуют равенства:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = x, \\ 1,2x_1 + x_2 + x_3 = 1,06x, \\ x_1 + 1,2x_2 + x_3 = 1,1x, \\ x_1 + x_2 + 1,2x_3 = x + 3200. \end{cases}$$

Сложив левые и правые части 2-го, 3-го и 4-го равенств и воспользовавшись 1-м равенством, получим следующие равенства:

$$3,2(x_1 + x_2 + x_3) = 3,2x = 3,16x + 3200.$$

Следовательно, $0,04x = 3200$ или $x = 80\,000$ (руб.).

Ответ. В. 80 000 руб.

2 часть

1. По одной и той же кольцевой трассе движутся два велосипедиста в одну и ту же сторону. Длина кольцевой дороги равна 2400 м. Один велосипедист проходит кольцевой маршрут на 2 минуты скорее, чем другой. Найдите скорость более быстрого велосипедиста, если велосипедисты движутся равномерно и съезжаются каждые 24 минуты.

 Некоторый момент, когда оба велосипедиста находились в одной и той же точке, примем за начало отсчёта времени. Велосипедисты окажутся рядом следующий раз вновь в тот момент, когда разность пройденных ими путей будет равна 2400 м. Обозначим через x м/мин и y м/мин, $x > y$, скорости велосипедистов. Так как они движутся в одну сторону, то $(x - y)$ м/мин — скорость их сближения. По условию, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{2400}{x-y} = 24, \\ \dfrac{2400}{y} - \dfrac{2400}{x} = 2, \end{cases}$$ или $$\begin{cases} \dfrac{100}{x-y} = 1, \\ \dfrac{1200}{y} - \dfrac{1200}{x} = 1, \end{cases}$$ из первого уравнения имеем: $x - y = 100$. Тогда второе уравнение примет вид: $\dfrac{1200}{x-100} - \dfrac{1200}{x} = 1$ или $x^2 - 100x - 120\,000 =$

0. Отсюда x = 400 или x = –300. Второе значение не удовлетворяет условию. Следовательно, искомая скорость равна 400 м/мин.

Ответ. 400 м/мин.

2. Какое наименьшее количество четырёхтонных грузовиков потребуется, чтобы перевезти все грузы, массы которых равны 370 кг, 372 кг, 374 кг, …, 426 кг, 428 кг, 430 кг?

 Количество грузов равно количеству чётных чисел в последовательности чисел 370, 371, 372, …, 429, 430, содержащей 430 – 369 = 61 число. Так как чётных чисел в ней на одно больше, чем нечётных, то искомое количество грузов равно 31.

Имеет место 15 равенств:

370 + 428 = 798, 372 + 426 = 798, …, 398 + 400 = 798.

Один четырёхтонный грузовик может перевезти 5 пар грузов общей массой 798·5 = 3990 кг. Так как, кроме этих пар, имеется ещё груз массой 430 кг, то трёх грузовиков недостаточно, чтобы удовлетворить требованиям задачи.

Ответ. Четыре.

3. На столе лежит монета достоинством 5 рублей. Какое наибольшее количество монет можно положить на стол так, чтобы они касались лежащей на столе и не налегали друг на друга и чтобы все были достоинства: 1) 5 руб.; 2) 1 руб.?

 1) Нетрудно показать, что искомое количество равно 6. Это следует из рис. 1.

2) Для ответа на этот вопрос достаточно найти угол α на рис. 2. Из равнобедренного треугольника $O_1O_2O_3$ имеем:

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2,25}=\dfrac{4}{9}\approx 0,444$. Из таблиц следует, что $30° > \dfrac{\alpha}{2} > 26°$. Следовательно, $60° > \alpha > 52°, 6\alpha < 360°, 7\alpha > 360°$. Поэтому и в этом случае искомое количество тоже равно 6.

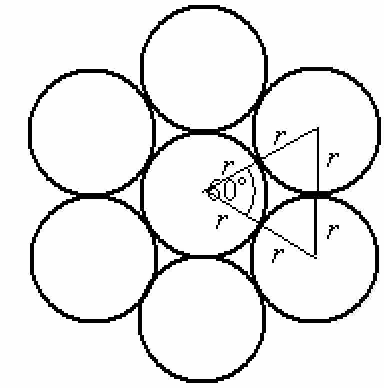


Рис. 1

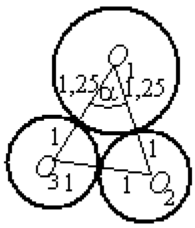


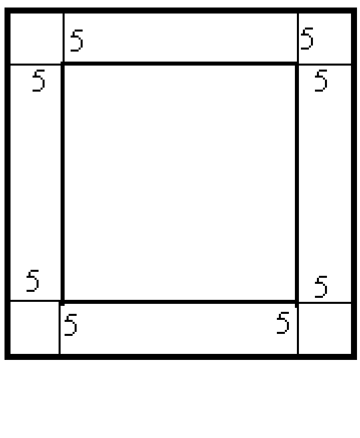
Рис. 2

Ответ. 1) 6; 2) 6.

4. На листе бумаги размерами 35 см × 35 см закрашено 3 круга диаметрами 6 см каждый. Всегда ли можно ли из него вырезать круг диаметром 10 см, не затронув закрашенные круги?

 Рассмотрим квадрат, состоящий из точек данного квадрата, удалённых от его сторон на расстояние, не меньшее 5 см (см. рис.). Сторона этого квадрата равна 25 см, а его площадь — 625 см^2.

Пусть O_1, O_2, O_3 — центры данных закрашенных кругов. Рассмотрим 3 круга с центрами в точках O_1, O_2, O_3 радиусами 8,1 см. Сумма площадей этих кругов равна $3\pi\cdot 65,61$ см^2 и не превосходит 620 см^2. Следовательно, существуют точки построенного «внутреннего» квадрата, не принадлежащие рассматриваемым кругам. Круг с центром в такой точке радиусом 5 см не имеет общих точек с закрашенными кругами.



Ответ. Всегда.

5. Встретились несколько друзей. Каждый из них обменялся рукопожатием с каждым, кроме Феди, который по рассеянности некоторым пожал руку, а некоторым – нет. Всего было сделано 197 рукопожатий. Сколько рукопожатий сделал Федя?

 Обозначим через *n* количество встретившихся друзей. Если бы все они обменялись рукопожатиями, то количество рукопожатий равнялось бы $\frac{n(n-1)}{2}$. Это выражение по условию принимает значение, большее 197. Наибольшее *n* при котором $\frac{n(n-1)}{2} \prec 197$ равно 20: $\frac{20(20-1)}{2} = 190$. Двадцать друзей без Феди обменялись 190 рукопожатиями. Следовательно Федя сделал 197 – 190 = 7 рукопожатий.

Ответ. 7.

6. В классе 30 человек писали контрольную работу по математике. Были получены оценки «2», «3», «4» и «5». Сумма всех оценок равна 93, причём троек больше, чем пятёрок, но меньше, чем четвёрок. Кроме того, количество четвёрок делится на 10, а количество пятёрок чётное. Сколько каких оценок получили писавшие контрольную работу?

 Обозначим через *x, y, z, t* соответственно количества оценок «2», «3», «4» и «5», полученных на контрольной работе. Тогда из условия имеем равенства:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 30, \\ 2x + 3y + 4z + 5t = 93. \end{cases}$$

Вычитая из левой и правой части второго равенства соответственно удвоенные левые и правые части первого равенства, получим: $y + 2z + 3t = 33$. Так как *z* делится на 10, а *y, z, t* — натуральные числа, то $z = 10$. Тогда предыдущее равенство принимает вид: $y + 3t = 13$. Поскольку *t* — число чётное, а $y > t$, то $t = 2$, а значит, $y = 7$. Из исходных равенств следует, что $x = 11$.

Ответ. «2» — 11, «3» — 7, «4» — 10 и «5» — 2.

7. Один фермер привёз на рынок 5 тонн ячменя, который он хотел бы продать по 990 зедов за тонну, и 6 тонн ржи по 970 зедов за тонну (зед — условная денежная единица). У другого фермера 6 тонн ячменя по 980 зедов за тонну и 7 тонн ржи тоже по 980 зедов за тонну. Каждый фермер согласен отдать весь свой товар, если итоговая сумма совпадёт с той, которую он намеревался выручить за всю партию. Перекупщик хочет скупить обе партии товара, назначив одни и те же для обоих фермеров цены ячменя и ржи. Какие именно цены он должен назначить, чтобы скупить обе партии товара?

 Обозначим через *x, y* цены, которые должен назначить перекупщик, чтобы скупить обе партии товара. Так как первый фермер намеревался выручить за всю партию 990·5 + 970·6 = 10 770 зедов, а второй — 980·6 + 980·7 = 12 740 зедов, то из условия имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x + 6y = 10770, \\ 6x + 7y = 12740, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 5x + 6y = 10770, \\ x + y = 1970. \end{cases}$$

Второе уравнение получено вычитанием из левой и правой частей второго уравнения соответствующих частей первого. Отсюда:

$$\begin{cases} 5x + 6(1970 - x) = 10770, \\ y = 1970 - x, \end{cases} \begin{cases} x = 1050, \\ y = 920. \end{cases}$$ Следовательно, перекупщик должен назначить 1050 зедов за тонну ячменя и 920 зедов за тонну ржи.

Ответ. 1050 зедов за тонну ячменя и 920 зедов за тонну ржи.

8. В коробке есть карандаши разного цвета и разного размера. Можно ли из коробки взять два карандаша, которые бы отличались и цветом, и размером?

 Возьмём любой карандаш, затем все карандаши такого же размера. Из условия следует, что в коробке остались карандаши. Если взятые карандаши одного цвета, то в коробке имеется карандаш другого цвета. Вместе с выбранным вначале карандашом они образуют искомую пару.

Если среди взятых карандашей есть два карандаша разных цветов, то нужно взять любой карандаш из оставшихся в коробке и из двух указанных выбрать тот, цвет которого отличается от цвета выбранного.

Ответ. Можно.

9. Какое наибольшее количество понедельников в году может быть 13-го числа?

 Составим таблицу, в которой отразим количества дней и недель между 13-ми числами соседних месяцев в невисокосном году.

Дата	13 01	13. 02	13. 03	13. 04	13. 05	13. 06	13. 07	13. 08	13. 09	13. 10	13. 11	13. 12	
Кол. дней до 13-го числа след месяца		31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	
Кол. недель		4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	
Кол. дней сверх полных недель		3	0	3	2	3	2	3	3	2	3	2	

Если 13.01 — понедельник, то следующий понедельник 13-го числа будет только в октябре. Это следует из того, что сумма количеств дней сверх полных недель будет кратна 7 только для 9 слагаемых: 3 + 0 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3 +3 + 2 = 21 = 7·3.

Если 13. 02 — понедельник, то 13.03 — тоже понедельник и следующий понедельник 13-го числа будет в ноябре: 3 + 2 + 3 + 2 + 3 +3 + 2 + 3 = 21 = 7·3.

Очевидно, что четырёх понедельников 13-го числа в невисокосном году не может быть. Искомое количество понедельников в невисокосном году равно 3.

Если год високосный, то последняя строка в вышеприведенной таблице имеет вид:

3	1	3	2	3	2	3	3	2	3	2
	7			7						

Нетрудно убедиться, что понедельники 13-го числа могут быть в январе, апреле, июле. Больше трёх понедельников 13-го числа в високосном году быть не может.

Ответ. Три.

10. Торговая фирма приобрела партию товара и определила цену единицы товара так, чтобы прибыль составила 40%. В связи с низким спросом три четверти товара вынуждены были продавать по сниженной цене. На сколько примерно процентов (с точностью до 0,1%) можно снизить цену, чтобы прибыль от продажи всей партии товара составила 20 %?

 Обозначим через x количество единиц продаваемого товара, через a — цену, по которой фирма приобрела единицу товара, p — количество процентов, на которое нужно снизить первоначальную цену.

Тогда ax — затраты фирмы.

Единицу товара планировали продавать по цене $1{,}4a$, $0{,}25x$ единиц товара продали по цене $1{,}4a$, $0{,}75x$ единиц товара продавали по цене $1{,}4a\cdot(1 - 0{,}01p)$.

За весь проданный товар выручили $1{,}4a\cdot 0{,}25x + 0{,}75x\cdot 1{,}4a(1 - 0{,}01p) = (0{,}35 + 1{,}05(1 - 0{,}01p))xa$.

«Прибыль» составляет $(0{,}35 + 1{,}05(1 - 0{,}01p) - 1)xa = (0{,}4 - 0{,}0105p)xa$. Полученный процент прибыли равен $\frac{(0{,}4-0{,}0105p)ax}{ax}\cdot 100\% = (0{,}4-0{,}0105p)\cdot 100\%$, что, по условию равно 20%.

Из уравнения $0{,}4 - 0{,}0105p = 0{,}2$ получаем: $p \approx 19{,}0\%$ с точностью до 0,1%.

Ответ. Приближённо на 19,0%.