Решение заданий для 8-9 классов

1-я часть

Выберите правильный ответ из приведенных.

1. Какое точное время между 6 и 7 часами показывают часы, когда положения их часовой и минутной стрелок совмещаются?

А. 6 ч $11\frac{8}{11}$ мин. **Б.** 6 ч $22\frac{3}{11}$ мин. **В.** 6 ч $27\frac{4}{11}$ мин. **Г.** 6 ч $32\frac{8}{11}$ мин.

□ В 6 часов часовая и минутная стрелки направлены в противоположные стороны. Пусть часы показывают 6 ч и x мин. (x — время от 6.00 до момента времени, когда положения стрелок совмещаются). Так как минутная стрелка за 1 мин поворачивается на 6°, а часовая — на 0,5°, то совмещение стрелок по условию означает справедливость равенства $6x = 0{,}5x + 180$ или $x = \frac{360}{11} = 32\frac{8}{11}$ мин. Искомое время — 6 ч $32\frac{8}{11}$ мин.

Ответ. **Г.** 6 ч $32\frac{8}{11}$ мин.

2. В 12 часов дня часовая и минутная стрелки совмещаются. В какое точное время впервые после полудня стрелки снова совместятся?

А. В 12 ч $54\frac{6}{11}$ мин. **Б.** В 13 ч $5\frac{5}{11}$ мин. **В.** В 13 ч $55\frac{5}{11}$ мин. **Г.** В 14 ч $5\frac{5}{11}$ мин.

□ Обозначим через x мин искомое время, отсчитываемое после 12 ч. Так как минутная стрелка за 1 мин поворачивается на 6°, а часовая — на 0,5°, то совмещение стрелок по условию означает справедливость равенства $6x = 0{,}5x + 360$ или $x = \frac{720}{11} = 65\frac{5}{11}$ мин.Впервые после полудня стрелки снова совместятся в 12 ч + $65\frac{5}{11}$ мин = 13 ч $5\frac{5}{11}$ мин.

Ответ. Б. В 13 ч $5\frac{5}{11}$ мин.

3. Около половины седьмого вечера Петя посмотрел на часы: минутная стрелка была ровно на 3 минутные деления впереди часовой стрелки. Какое время показывали часы?

А. 18 ч 30 мин. **Б.** 18 ч 33 мин. **В.** 18 ч 34 мин. **Г.** 18 ч 36 мин.

□ Пусть часы показывают 6 ч и x мин. Так как минутная стрелка за 1 мин поворачивается на 6°, а часовая — на 0,5°, то за x мин минутная стрелка повернётся на $6x$°, а часовая — на 0,5°. Поворот на три минутных деления — это поворот на угол 18°. Из условия следует равенство $6x - 18 = 0{,}5x + 180$ или $\frac{11}{2}x = 198$ или $x = 36$ мин.

Искомое время — 18 ч 36 мин.

Ответ: Г. 18 часов 36 мин.

4. Через сколько минут часовая и минутная стрелки будут направлены в противоположные стороны впервые после того, как они совместились?

А. Через $27\frac{4}{11}$ мин. **Б.** Через $30\frac{4}{11}$ мин. **В.** Через $32\frac{8}{11}$ мин. **Г.** Через 36 мин.

 Обозначим через t мин время, через которое стрелки впервые после совмещения стали противоположно направленными. За время t минутная стрелка повернулась на $6t°$, а часовая — на $0,5\,t°$. Так как угол между ними стал равным 180°, то справедливо равенство $6t - 0,5t = 180$ или $t = 32\frac{8}{11}$ мин. Искомое время $32\frac{8}{11}$ мин.

Ответ. В. $32\frac{8}{11}$ мин.

5. Один мотоциклист преодолел расстояние между двумя пунктами за 1 ч 30 мин, а второй — за 1 ч 12 мин. Во сколько раз скорость второго мотоциклиста больше скорости первого?

А. В 1,2 раза. **Б.** В 1,3 раза. **В.** В 1,35 раза. **Г.** В 1,4 раза.

 Обозначим скорость первого мотоциклиста через v км/ч, а скорость второго — через w км/ч. При прохождении одинаковых расстояний скорости движения двух тел обратно пропорциональны значениям времени, за которое они преодолели это расстояние, то есть $\frac{v}{w} = \frac{1,2}{1,5} = \frac{4}{5}$. Следовательно, скорость мотоциклиста из А относится к скорости мотоциклиста из В, как 4:5. Скорость второго мотоциклиста больше скорости первого в 5:4 = 1,25 раза.

Ответ. Д. В 1,25 раза.

6. Из А в В и из В в А выехали одновременно два мотоциклиста. Первый мотоциклист преодолел расстояние между А и В за 2 ч 15 мин, а второй — за 1 ч 48 мин. Через какое время они встретились?

А. Через 45 мин. **Б.** Через 1 ч. **В.** Через 1 ч 15 мин. **Г.** Через 1,5 ч.

 Обозначим скорость первого мотоциклиста через v км/ч, а скорость второго — через w км/ч, расстояние от А до В — через s км. Скорости мотоциклистов соответственно равны: $v = \frac{s}{2,25}\frac{\text{км}}{\text{ч}}, w = \frac{s}{1,8}\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. При движении двух тел навстречу друг другу скорость сближения равна сумме их скоростей, то есть мотоциклисты сближаются со скоростью $\frac{s}{2,25} + \frac{s}{1,8} = \frac{s}{\frac{9}{4}} + \frac{s}{\frac{9}{5}} = s\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Следовательно, расстояние s км они преодолеют за $s : s = 1$ ч. Это значит, что они встретятся через 1 час.

Ответ. Б. Через 1 час.

7. Из А в В и из В в А выехали одновременно два мотоциклиста. Первый прибыл в В через 2,5 ч после встречи, а второй прибыл в А через 1 ч 36 мин после встречи. Сколько часов был в пути каждый мотоциклист, если весь путь они преодолевали, не меняя скорости движения?

А. 4,5 ч и 3,6 ч. **Б.** 4,6 ч и 3,5 ч. **В.** 4,1 ч и 3,9 ч. **Г.** 4,9 ч и 3, 1 ч.

 Обозначим скорость первого мотоциклиста через v км/ч, а скорость второго — через w км/ч, время, которое мотоциклисты ехали до встречи, — через t ч. Первый мотоциклист до встречи проехал vt км, а второй — wt км. Первый мотоциклист после встречи за 2,5 ч проехал wt км, следовательно, он ехал со скоростью $\frac{wt}{2,5}$ км/ч. Имеем уравнение: $\frac{wt}{2,5} = v$. Аналогично, второй мотоциклист после встречи за 1,6 ч проехал vt км, следовательно, он ехал со скоростью $\frac{vt}{1,6}$ км/ч. Имеем уравнение: $\frac{vt}{1,6} = w$. Выразив t из каждого из этих уравнений, получим: $t = \frac{2,5v}{w} = \frac{1,6w}{v}$. Отсюда $\left(\frac{v}{w}\right)^2 = 0,64,\ \frac{v}{w} = 0,8,\ t = 2$ ч. Следовательно, первый мотоциклист был в пути 2 + 2,5 = 4,5 ч, а второй — 2 + 1,6 = 3,6 ч.

Ответ. А. 4,5 ч и 3,6 ч.

8. Из А в В и из В в А выехали одновременно два мотоциклиста. Они встретились через 3 ч. Первый мотоциклист прибыл в В на 1 ч 6 мин позже, чем второй в А. Во сколько раз скорость второго мотоциклиста больше скорости первого?

А. В 1,5 раза. **Б.** В 1,3 раза. **В.** В 1,2 раза. **Г.** В 1,15 раза.

 Обозначим скорость первого мотоциклиста через v км/ч, а скорость второго — через w км/ч. Первый мотоциклист до встречи проехал $3v$ км, а второй — $3w$ км. Первый мотоциклист после встречи проехал $3w$ км, следовательно, он затратил после встречи на путь в В $\frac{3w}{v}$ ч. Аналогично, второй мотоциклист после встречи проехал $3v$ км, следовательно, он затратил после встречи на путь в А $\frac{3v}{w}$ ч. Имеем уравнение: $\frac{3w}{v} - \frac{3v}{w} = 1,1$. Обозначив $\frac{w}{v}$ через y, получим уравнение $3y - \frac{3}{y} = 1,1$ или $30y^2 - 11y - 30 = 0$. Отсюда $y = 1,2$. Следовательно, скорость второго мотоциклиста больше скорости первого в 1,2 раза.

Ответ. В. В 1,2 раза.

9. Имеется 4 фотографии неизвестных людей и 4 их паспорта, но без фотографий. Фотографии рассеянный служащий наугад вкладывает в паспорта. Какова вероятность того, что он все фотографии правильно вложит в паспорта?

А. $\frac{3}{8}$. **Б.** $\frac{1}{4}$. **В.** $\frac{1}{8}$. **Г.** $\frac{1}{24}$.

 Так как фотографии вкладываются в паспорта случайно, то исходы вложений фотографий равновозможны. Обозначим через A событие: «Все фотографии правильно вложит в паспорта». Вероятность $P(A)$ события A равна отношению количества m исходов, при которых наступает событие A, к числу n всех равновозможных исходов опыта: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Обозначим паспорта числами 1, 2, 3, 4, а предназначенные им фотографии — соответственно буквами а, б, в, г. Тогда все вложения будут выглядеть так:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1а	1а	1а	1а	1а	1а	1б	1б	1б	1б	1б	1б
2б	2б	2в	2в	2г	2г	2а	2а	2в	2в	2г	2г
3в	3г	3б	3г	3б	3в	3в	3г	3а	3г	3а	3в
4г	4в	4г	4б	4в	4б	4г	4в	4г	4а	4в	4а

13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
1в	1в	1в	1в	1в	1в	1г	1г	1г	1г	1г	1г
2б	2б	2а	2а	2г	2г	2а	2а	2в	2в	2б	2б
3а	3г	3б	3г	3а	3б	3б	3в	3а	3б	3а	3в
4г	4а	4г	4б	4б	4а	4в	4б	4б	4а	4в	4а

Каждый столбец из 4-х пар обозначений характеризует одно вложение. Всего 24 вложения, то есть n = 24.

Найденное количество вариантов можно подсчитать следующими рассуждениями.

К цифре 1 можно присоединить любую из 4-х указанных букв. Какую букву мы бы не присоединили к 1, к цифре 2 можно присоединить любую из трёх оставшихся букв. Поэтому есть $4 \cdot 3 = 12$ способов присоединения букв к цифрам 1 и 2. Для любого из этих 12 вариантов к цифре 3 можно присоединить букву двумя способами. Таким образом, есть $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ способа присоединения букв к цифрам 1, 2 и 3. Для любого из этих 24 вариантов к цифре 4 можно присоединить букву единственным способом. Следовательно, искомое количество вариантов равно $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Поскольку только один набор 1а, 2б, 3в, 4г (см. столбец 1), удовлетворяет условию, то m = 1. Следовательно, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{24}$.

Ответ: Г. $\frac{1}{24}$.

10. Имеется 4 фотографии неизвестных людей и 4 их паспорта, но без фотографий. Фотографии рассеянный служащий наугад вкладывает в паспорта. Какова вероятность того, что ровно три фотографии будут правильно вложены в паспорта?

А. 0. **Б.** $\frac{1}{24}$. **В.** $\frac{1}{12}$. **Г.** $\frac{1}{8}$.

□ Так как фотографии вкладываются в паспорта случайно, то исходы вложений фотографий равновозможны. Обозначим через A событие: «Ровно три фотографии правильно вложены в паспорта». Вероятность $P(A)$ события A равна отношению количества m исходов, при которых наступает событие A, к числу n всех равновозможных исходов опыта: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Если правильно вложены три фотографии, то правильно будет вложена и четвёртая. Следовательно, не существует вложений, в которых правильно вложены ровно три фотографии, то есть $m = 0$. Поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = 0$.

Ответ. А. 0.

11. Имеется 4 фотографии неизвестных людей и 4 их паспорта, но без фотографий. Фотографии рассеянный служащий наугад вкладывает в паспорта. Какова вероятность того, что ни одна фотография не будет правильно вложена в паспорт?

А. $\frac{1}{8}$. **Б.** $\frac{1}{4}$. **В.** $\frac{3}{8}$. **Г.** $\frac{3}{4}$.

 Так как фотографии вкладываются в паспорта случайно, то исходы вложений фотографий равновозможны. Обозначим через B событие: «Ни одна фотография не вложена правильно в паспорт». Вероятность $P(B)$ события B равна отношению количества m исходов, при которых наступает событие B, к числу n всех равновозможных исходов опыта: $P(B) = \frac{m}{n}$.

Обозначим паспорта числами 1, 2, 3, 4, а предназначенные им фотографии — соответственно буквами а, б, в, г. Общее количество исходов равно 24 (см. решение задания 9). Подсчитаем количество исходов, благоприятствующих событию B. Все вложения, при которых ни одна фотография не будет правильно вложена в паспорт, будут выглядеть так:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1б	1б	1б	1в	1в	1в	1г	1г	1г
2а	2в	2г	2а	2г	2г	2а	2в	2в
3г	3г	3а	3г	3б	3а	3б	3а	3б
4в	4а	4в	4б	4а	4б	4в	4б	4а

Всего 9 наборов, то есть $m = 9$. Следовательно, $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$.

Ответ. В. $\frac{3}{8}$.

12. Имеется 4 фотографии неизвестных людей и 4 их паспорта, но без фотографий. Фотографии рассеянный служащий наугад вкладывает в паспорта. Какова вероятность того, что ровно две фотографии будут правильно вложены в паспорта?

А. $\frac{1}{8}$. **Б.** $\frac{1}{4}$. **В.** $\frac{3}{8}$. **Г.** $\frac{1}{2}$.

 Так как фотографии вкладываются в паспорта случайно, то исходы вложений фотографий равновозможны. Обозначим через C событие: «Ровно две фотографии будут правильно вложены в паспорта». Вероятность $P(C)$ события C равна отношению количества m исходов, при которых наступает событие C, к числу n всех равновозможных исходов опыта: $P(C) = \frac{m}{n}$.

Обозначим паспорта числами 1, 2, 3, 4, а предназначенные им фотографии — соответственно буквами а, б, в, г. Общее количество исходов равно 24 (см. решение задания 9). Подсчитаем количество исходов, благоприятствующих событию *C*. Все вложения, при которых ровно две фотографии будут правильно вложены в паспорта, будут выглядеть так:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1а	1а	1а	1б	1в	1г
2б	2в	2г	2а	2б	2б
3г	3б	3в	3в	3а	3в
4в	4г	4б	4г	4г	4а

Всего 6 вложений, то есть $m = 6$. Следовательно, $P(C)=\frac{m}{n}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$.

Ответ. Б. $\frac{1}{4}$.

Вторая часть

Запишите к каждому заданию ответ.

13. Сейф открывается, если три цифры кода будут набраны в нужном порядке. На кнопках изображены цифры 0, 1, 2, …, 9. На каждый новый набор кода требуется ровно 4 секунды. За какое время сейф можно наверняка открыть, если:

1) известна третья цифра кода;

2) известна одна цифра кода, но неизвестно её место;

3) известно, что сумма трёх чисел кода нечётна?

□ 1) Количество упорядоченных пар, составленных из 10 цифр, равно $10^2 = 100$. Требуемое время не превосходит 4 с·100 = 400 с = 6 мин 40 с.

2) Рассматривая известную цифру на 1-м, 2-м и 3-м местах кода и применяя результат решения задания 1), получим: 400·3 = 1200 с. Далее необходимо исключить варианты, рассмотренные более одного раза. Вариант с тремя совпадающими цифрами рассмотрен трижды, значит, от полученного ответа необходимо отнять $2\cdot 4\,\text{с}=8\,\text{с}$. Варианты с ровно двумя совпадающими цифрами, равными известной, рассмотрены по два раза. Таких вариантов $3\cdot 9=27$. Значит, из ответа необходимо отнять еще $27\cdot 4\,\text{с}=108\,\text{с}$. Таким образом, получим: 1200 с – 8 с – 108 с = 1084 с = 18 мин 4 с.

3) Всего кодов 10^3. Сумма чисел кода нечётна, если или все эти числа нечётны (их 5·5·5 = 125), или одно нечётное, а два чётные (их 3·5·5·5 = 375). Всего 125 + 375 = 500 вариантов. Следовательно, искомое время равно 500·4 = 2 000 с = 33 мин. 20 с.

Ответ. 1) 6 мин 40 с; 2) 18 мин 4 с; 3) 33 мин 20 с.

14. Можно ли прямоугольник, составленный из равных квадратиков, разрезать на фигурки, состоящие из четырёх квадратиков и имеющие форму буквы **Г**, если прямоугольник имеет размеры: 1) 16×12 квадратиков; 2) 15×16 квадратиков; 3) $8(m\cdot n)$ квадратиков, где $m > 1$, $n > 1$?

□ Из указанных в условии фигурок можно составить прямоугольник 2×4 (рис. 1) и прямоугольник 3×8 (рис. 2).

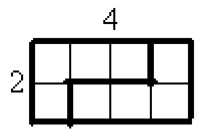

Рис. 1

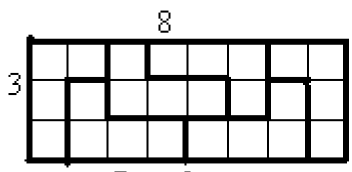

Рис. 2

Указанные в 1) и 2) прямоугольники можно разбить или на прямоугольники размеров 4×2 или 3×8 квадратиков:

16×12 = 4·4 × 6·2 = 24 прямоугольника 4 × 2;

15×16 = 5·3 × 2·8 = 10 прямоугольников 3 × 8.

Это можно сделать и для прямоугольника, состоящего из $8(m \cdot n)$ квадратиков Если прямоугольник имеет размеры $4m\times 2n$, то его можно разбить на mn прямоугольников размеров 4 × 2. Если же прямоугольник имеет размеры $8m\times n$, где n не делится на 2 и не делится на 3, то отрезав от него прямоугольник $8m\times 3$(который можно разбить на прямоугольники 3×8) оставшуюся часть можно разбить на прямоугольники 4×2. Прямоугольник размерами $8m\times 3p$ можно разбить на $m \cdot p$ прямоугольников размеров 8×3.

Ответ. 1) – 3). Можно.

15.Купили 60 шоколадных батончиков трёх видов соответственно по 50 г, 40 г и 30 г. Стоимость одного батончика первого вида 24 руб., второго — 21 руб., третьего — 18 руб. Общая масса покупки равна 2,5 кг. Какова стоимость покупки?

 Обозначим количество батончиков по 50 г через x, по 40 г — через y, по 30 г — через z. Из условия следует система уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=60, \\ 50x+40y+30z=2500 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+y+z=60, \\ 5x+4y+3z=250. \end{cases}$$

Если правую и левую часть первого уравнения умножить на 3 и к обеим частям полученного уравнения прибавить соответствующие части второго уравнения, то будем иметь уравнение

$$8x + 7y + 6z = 430.$$

Утроенная левая часть этого уравнения является выражением для стоимости покупки. Следовательно, вся покупка стоила 430·3 = 1290 руб.

Ответ. 1290 руб.

16.Поезд движется от станции X до станции Y по расписанию так: на протяжении первых двух минут он набирает скорость, преодолевая при этом 1 км, затем движется 40 минут со скоростью 72 км/ч, а за 2 км от станции Y начинает тормозить и через 3 минуты прибывает на станцию Y.

1) Найдите расстояние между станциями X и Y.
2) Вычислите среднюю скорость движения поезда.
3) Какова средняя скорость движения поезда с точностью до 1 км/ч, если он сделал не предусмотренную расписанием остановку на промежуточной станции Z длительностью 2 минуты и прибыл на станцию Y на 7 минут позднее запланированного времени?

 1) Так как за 40 минут или за $\frac{2}{3}$ часа поезд со скоростью 72 км/ч проедет $72\cdot\frac{2}{3}=48$ км, а разгон и торможение требуют 2 + 1 = 3 км, то расстояние между станциями X и Y равно 48 + 3 = 51 км.

2) Расстояние 51 км поезд преодолевает за 2 + 40 + 3 = 45 мин или $\frac{3}{4}$ часа. Следовательно, его средняя скорость равна $51:\frac{3}{4}=51\cdot\frac{4}{3}=17\cdot 4=68$ км/ч.

3) Из условия следует, что поезд для преодоления 51 км дополнительно потратил 7 – 2 = 5 мин, то есть всего 45 + 5 = 50 мин или $\frac{5}{6}$ ч. Следовательно, его средняя скорость равна $51:\frac{5}{6}=51\cdot\frac{6}{5}=\frac{306}{5}\approx 61$ км/ч.

Ответ. 1) 51 км; 2) 68 км/ч; 3) ≈ 61 км/ч.

17. Робот может двигаться по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Один его «шаг» состоит в передвижении на 2 метра в одном направлении и на 1 метр в перпендикулярном ему направлении.

1) На какое наибольшее расстояние может удалиться робот за 5 «шагов»?
2) Может ли робот за 8 «шагов» попасть в точку, которая получается из данной перемещением на 8 метров в одном направлении и на 14 метров в перпендикулярном ему направлении?
3) Какое наименьшее количество «шагов» потребуется роботу, чтобы попасть в точку, которая получается из данной перемещением на 30 м в одном направлении, а затем на 24 м в перпендикулярном ему направлении?

 Рассмотрим прямоугольную систему координат, построенную по заданным направлениям, и единицей измерения расстояний в 1 м. Если робот находится в точке (x; y), то за один «шаг» он может попасть в одну из восьми точек: (x + 2; y + 1), (x – 2; y + 1), (x + 2; y – 1), (x – 2; y – 1), (x + 1; y + 2), (x – 1; y + 2), (x + 1); y – 2), (x – 1; y – 2). Каждая из этих точек находится от точки (x; y) на расстоянии $\sqrt{5}$ м.

1) Из начала координат O робот за 5 «шагов» может попасть в точку (10; 5), находящуюся на расстоянии $\sqrt{100+25}=5\sqrt{5}$ м от точки O. Это наибольшее расстояние, на которое может удалиться робот за 5 «шагов», так как его положение после всех «шагов» находится на прямой, проходящей через начало координат.

2) За 5 «шагов» робот из точки O может попасть в точку (5; 10). За 8 – 5 = 3 «шага»: (5; 10)→ (7; 11)→ (6; 13)→ (8; 14) робот попадёт в точку (8; 14). Следовательно, за 8 «шагов» робот может попасть в точку, которая получается из данной перемещением на 8 метров в одном направлении и на 14 метров в перпендикулярном ему направлении.

3) Предположим, что робот за m «шагов» типа (x; y) → (x + 2; y + 1) и за n «шагов» типа (x; y) → (x + 1; y + 2) переместится из начала координат в точку (30; 24). Тогда справедливы равенства

$$\begin{cases} 2m+n=30, \\ m+2n=24 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3m=36, \\ m+2n=24. \end{cases}$$

Следовательно, m = 12, n = 6, то есть за 12 + 6 = 18 «шагов» можно попасть в точку (30; 24). Это наименьшее количество искомых «шагов». Если бы их было 17, то робот удалился бы на расстояние не более $17\sqrt{5}=\sqrt{1445}$ м, а расстояние от начала координат до точки (30; 24) равно $\sqrt{900+576}=\sqrt{1476}>17\sqrt{5}$.

Ответ. 1) $5\sqrt{5}$ м; 2) может; 3) 18.

Третья часть

Напишите полное решение каждого задания.

18.Мобильный оператор «АХ» берёт 1 зед (зед — условная денежная единица) за подключение и 2 зеда за каждую минуту разговора, а мобильный оператор «ОХ» берёт за первую минуту разговора 1 зед, а за каждую следующую на 0,5 зеда больше, чем за предыдущую. Качество обслуживания у обоих операторов одинаковое.

1) Услугами какого оператора выгоднее пользоваться, если каждый день звонить:
   а) 5 – 6 раз по 7 – 8 минут;
   б) 10 – 11 раз по 3 – 4 минуты?

2) При какой средней длительности с точностью до минуты ежедневных звонков выгоднее пользоваться услугами оператора «АХ»?

 1) Расчёт стоимости представлен в следующей таблице.

Кол. разг.	Продолж. 1 разг., мин	Стоимость обслуживания оператором «АХ», зед	Стоимость обслуживания оператором «ОХ», зед
5	7	$(1 + 2\cdot7)\cdot5 = 15\cdot5 = 75$	$(1 + 1,5 + 2 + 2,5 + 3 + 3,5 + 4)\cdot5 = 17,5\cdot5 = 87,5$
5	8	$(1 + 2\cdot8)\cdot5 = 17\cdot5 = 85$	$(1 + 1,5 + 2 + 2,5 + 3 + 3,5 + 4 + 4,5)\cdot5 = 22\cdot5 = 110$
6	7	$(1 + 2\cdot7)\cdot6 = 15\cdot6 = 90$	$(1 + 1,5 + 2 + 2,5 + 3 + 3,5 + 4)\cdot6 = 17,5\cdot6 = 105$
6	8	$(1 + 2\cdot8)\cdot6 = 17\cdot6 = 102$	$(1 + 1,5 + 2 + 2,5 + 3 + 3,5 + 4 + 4,5)\cdot6 = 22\cdot6 = 132$
10	3	$(1 + 2\cdot3)\cdot10 = 7\cdot10 = 70$	$(1 + 1,5 + 2)\cdot10 = 4,5\cdot10 = 45$
10	4	$(1 + 2\cdot4)\cdot10 = 9\cdot10 = 90$	$(1 + 1,5 + 2 + 2,5)\cdot10 = 7\cdot10 = 70$
11	3	$(1 + 2\cdot3)\cdot11 = 7\cdot11 = 77$	$(1 + 1,5 + 2)\cdot11 = 4,5\cdot11 = 49,5$
11	4	$(1 + 2\cdot4)\cdot11 = 9\cdot11 = 99$	$(1 + 1,5 + 2 + 2,5)\cdot11 = 7\cdot11 = 77$

Таким образом, при 1-м режиме разговоров выгоднее пользоваться услугами оператора «АХ», при втором — услугами оператора «ОХ».

2) Используя расчёты, приведенные в таблице, достаточно сравнить стоимости звонков длительностью 5 и 6 минут.

«АХ» — 5 мин $s_1 = 1 + 2\cdot5 = 11$ «ОХ» — 5 мин $s_2 = 1 + 1,5 + 2 + 2,5 + 3 = 10$

«АХ» — 6 мин $s_1 = 1 + 2\cdot6 = 13$ «ОХ» — 6 мин $s_2 = 1 + 1,5 + 2 + 2,5 + 3 + 3,5 = 13,5$

Следовательно, выгоднее пользоваться услугами оператора «АХ» при средней длительности разговоров не менее 6 мин.

Ответ. 1) а) оператора «АХ»; б) оператора «ОХ»; 2) не менее 6 мин.

19.Длина и ширина помещения прямоугольной формы выражаются целыми числами метров. Численное значение его периметра (в м) отличается от численного значения площади (в м^2) на целое число.

1) Каковы размеры помещения, если численное значение его периметра (в м) отличается от численного значения площади (в $м^2$) на 7?
2) Каковы размеры помещения, если его длина в 3 раза больше ширины и периметр больше площади?
3) При каких размерах помещения его периметр больше площади, если выполнены условия задания и ширина больше 2 м?

 Обозначим длину одной стороны помещения через x м, а ширину — через y м.
1) По условию, $2x + 2y = xy + p$, где p равно или 7 или – 7. Так как при $y = 2$ $p = 4$, то $y \neq 2$ и $x = \frac{2y - p}{y-2} = 2 + \frac{4-p}{y-2}$. Если $p = 7$, то $x = 2 - \frac{3}{y-2}$ и натуральным может быть только при $y = 5$: $x = 2 - \frac{3}{5-2} = 1$. Следовательно, помещение имеет размеры 1 м × 5 м.

Если $p = -7$, то $x = 2 + \frac{11}{y-2}$ и является натуральным при $y_1 = 3$ и $y_2 = 13$. Тогда $x_1 = 13$, $x_2 = 3$. Следовательно, помещение имеет размеры 3 м × 13 м.

2) По условию, $x = 3y$ и $2x + 2y > xy$, или $6y + 2y > 3y^2$, или $y < \frac{8}{3}$, то есть $y = 1$ м или 2 м, Соответствующие значения x равны 3 м или 6 м. Следовательно, помещение имеет размеры или 2 м × 6 м, или 1 м × 3 м.
3) По условию, $2x + 2y = xy + p$, где p — целое положительное число. Из условия следует, что $y > 2$. Тогда $x = \frac{2y-p}{y-2} = 2 + \frac{4-p}{y-2}$. Тогда или $y = 3$, $x = 2 + 4 - p$, или $y = 4 - p + 2$, $x = 3$. Следовательно, помещение может иметь следующие размеры:

p	1	2	3
x м×y м	3 м × 5 м	3 м × 4 м	3 м × 3 м

Ответ. 1) 1 м × 5 м или 3 м × 13 м; 2) 2 м × 6 м или 1 м × 3 м; 3) 3 м × 5 м или 3 м × 4м или 3 м × 3 м.

20. Имеются гирьки массой 1 г, 2 г, 3 г, …, n г.
1) Можно ли разложить гирьки на k равных по массе кучек, если: а) $n = 51$, $k = 3$; б) $n = 51$, $k = 13$; в) $n = 51$, $k = 39$?
2) На сколько равных по массе кучек можно разложить все гирьки для $n = 43$?
3) Для каких значений n все гирьки можно разложить на 5 равных по массе кучек?

 1) Найдём массу всех гирек:
$1 + 2 + … + 51 = (1 + 51) + (2 + 50) + (3 + 49) + … + (25 + 27) + 26 = 25·52 + 26 = 51·26$ г. Следовательно, если можно разложить 51 гирьку на k равных по массе кучек, то k должно быть делителем числа $51·26$.
а) Если $k = 3$, то масса каждой кучки должна равняться $51·26:3 = 442$ г. Нетрудно убедиться, что гирьки 1 г, 2 г, …, 9 г можно разложить на три равные по массе кучки: $9 + 6 = 8 + 7 = 5 + 4 + 3 + 2 + 1$.
Гирьки 10 г, 11 г, 12 г, 13 г, 14 г, 15 г можно разложить на три равные по массе кучки: $10 + 15 = 11 + 14 = 12 + 13$.

Если соединить два указанных разложения, то получим разложение гирек на кучки при $n = 15$. Аналогичными рассуждениями за ещё шести таких присоединений по 6 гирек можно разложить все гирьки 1 г, …, 51 г.
б) Если $k = 13$, то масса одной кучки равна 102 г. Гирьки 1 г, …, 25 г можно разложить на 13 равных по массе кучек: $25 = 24 + 1 = 23 + 2 = \ldots = 13 + 12$.
26 гирек 26 г, …, 51 г можно разложить на 13 равных по массе кучек: $26 + 51 = 27 + 50 = \ldots = 38 + 39$. Соединив эти разложения, получим разложение гирек 1 г, …, 51 г на 13 равных по массе кучек.
в) Число $51 \cdot 26 : 39 = 34$ меньше массы некоторых гирек. Поэтому на 39 равных по массе кучек нельзя разложить все гирьки.
2) Найдём массу всех 43 гирек: $1 + 2 + \ldots + 43 = (1 + 43) + (2 + 42) + \ldots + (21 + 23) + 22 = 22 \cdot 43$. Число $22 \cdot 43$ делится на 2, 11, 22, 43, 86, $11 \cdot 43$. Частное от деления $22 \cdot 43$ на 43, 86, $11 \cdot 43$ меньше массы некоторых гирек. Поэтому эти делители не могут быть количеством кучек равных масс, на которые разложимы все гирьки.
Делители 2, 11, 22 могут быть количеством кучек равных масс, на которые разложимы все гирьки. Масса всех гирек равна 966 г. Разложить на две равные кучки нетрудно. Если кучек 22, то масса каждой кучки равна 43 г. Так как $43 = 42 + 1 = 41 + 2 = \ldots = 23 + 20 = 22 + 21$, то такое разложение возможно. Соединив пары кучек в одну, получим 11 кучек, равных по массе.
3) Найдём массу всех гирек:

$$1 + 2 + \ldots + n = (1 + n) + (2 + (n - 1)) + (3 + (n - 2)) + \ldots =$$

$$= \begin{cases} k(n+1) = \dfrac{n}{2}(n+1), \text{ если } n = 2k, \\ k(n+1) + k + 1 = kn + 2k + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2}, \text{ если } n = 2k + 1. \end{cases}$$

Рассмотренные ранее случаи приводят к гипотезе, что указанное разложение возможно, если n или $n + 1$ делятся на 5 и частное $\dfrac{n(n+1)}{2} : 5$ больше или равно n, то есть $n \geq 9$.
Пусть 5 является делителем n или $n + 1$. Тогда все гирьки можно разложить на 5 равных кучек. Возможность разложения гирек при $n = 9$, $n = 10$, $n = 14$ и $n = 15$ следует из равенств
$9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4$; $10 + 1 = 9 + 2 = 8 + 3 = 7 + 4 = 6 + 5$;
$14 + 7 = 13 + 8 = 12 + 9 = 11 + 10 = 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$;
$15 + 9 = 14 + 10 = 13 + 11 = 12 + 8 + 4 = 7 + 6 + 5 + 3 + 2 + 1$.
Так как 10 гирек, массы которых выражаются 10-ю последовательными числами, можно всегда разложить на 5 равных по массе кучек, то, пользуясь приведенными разложениями, можно разложить все гирьки при n или $n + 1$ кратным 5.

Ответ. 1 а) Да; б) да; в) нет. 2), 2, 11, 22; 3) для n или $n + 1$ кратным 5, $n \geq 9$.