Задания для 9 класса

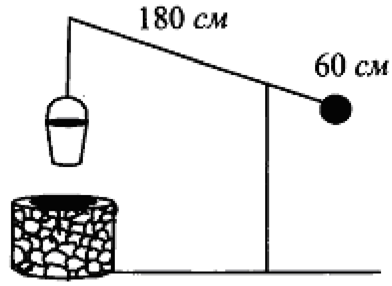
1. Петя ушёл в школу между восемью и девятью часами, когда стрелки его часов были совмещены. Из школы он возвратился между двумя и тремя часами дня, при этом стрелки его часов были направлены в прямо противоположные стороны. Сколько времени отсутствовал Петя дома?

А. 5 ч. **Б.** 5 ч 20 мин. **В.** 5 ч 40 мин. **Г.** 6 ч.

 Пусть стрелки совмещены между восемью и девятью часами. Повернём часовую стрелку на 180° по часовой стрелке. Она будет показывать время между двумя и тремя часами дня, причём стрелки будут направлены в прямо противоположные стороны. Так как часовая стрелка за 1 час поворачивается на 360:12 = 30°, то на 180° она повернётся за 160:30 = 6 часов.

Так как за 1 час минутная стрелка возвращается в исходное положение, то через 6 часов она будет в том же положении, когда стрелки были совмещены.

Ответ. Г. 6 ч.

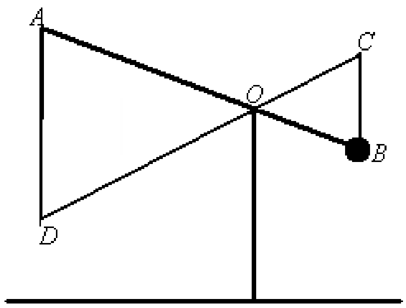


2. На рисунке изображён колодец «Журавль». Короткое плечо имеет длину 60 см, а длинное — 180 см. На сколько сантиметров опустится ведро, если конец короткого плеча поднимется на 42 см?

А. На 126 см. **Б.** На 184 см. **В.** На 205 см. **Г.** На 226 см.

 На рисунке схематично изображена описанная ситуация. В точке A подвешено ведро, BC = 42 см, AO = 180 см, OB = 60 см, отрезки CB и AD параллельны. Требуется найти AD.

Треугольники OBC и OAD подобны по первому признаку подобия треугольников (равенству углов): $\angle AOD = \angle BOC$, как вертикальные, $\angle OAD = \angle OBC$, как накрест лежащие углы при параллельных прямых CB и AD и секущей AB. Из подобия вытекает пропорциональность сторон:



$$\frac{AD}{BC} = \frac{AO}{BO}, \frac{AD}{42} = \frac{180}{60}, AD = 126 \text{ см.}$$

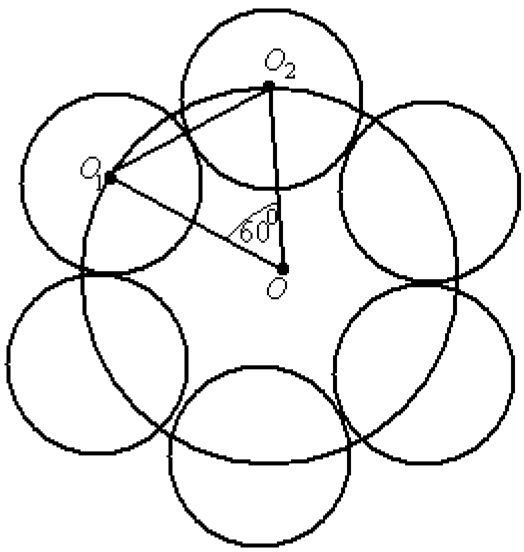
Ответ. А. На 126 см.

3. Центры шести одинаковых монет расположены на окружности радиуса 5 см так, что каждая монета касается двух соседних. Каков диаметр монеты?

А. 10 см. **Б.** 7,5 см. **В.** 5 см. **Г.** 2,5 см.

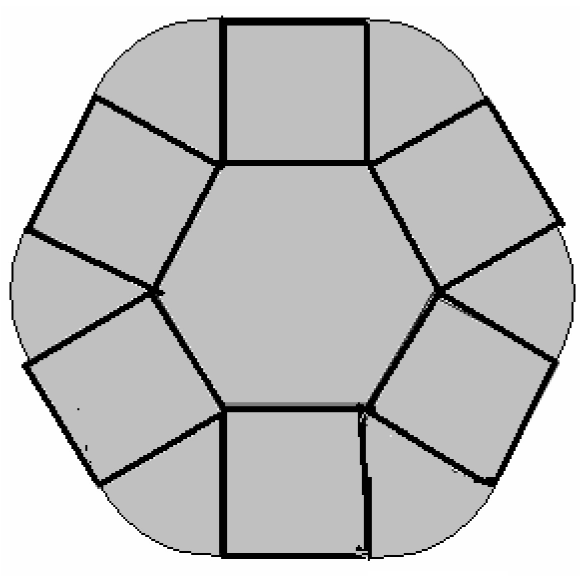
 На рисунке изображено расположение монет. Из условия следует, что $\angle O_1OO_2 = 60°$, $OO_1 = OO_2 = 5$ см. Так как окружности с центрами в точках O_1 и O_2 касаются, то точка касания принадлежит отрезку O_1O_2 и является его серединой. Следовательно, искомый диаметр равен 5 см.

Ответ. В. 5 см.



4. Круг радиуса 4 см перемещается по столу так, что его центр обходит контур правильного шестиугольника со стороной 4 см. Найдите площадь части стола, образованной следом круга. Выберите из приведенных в ответах наиболее точное значение.

А. 147 см^2. **Б.** 188 см^2. **В.** 157 см^2. **Г.** 217 см^2.



□ Изобразим множество точек, являющихся объединением кругов радиусов 4 см с центрами в точках контура правильного шестиугольника со стороной 4 см (см. рис.). Полученная фигура состоит из этого шестиугольника, 6-и квадратов 4×4 и 6-и секторов радиуса 4 см и углом 60°. Её площадь равна

$$6\cdot\frac{1}{2}\cdot4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot4+6\cdot16+\pi\cdot4^2\approx188\text{ см}^2.$$

Ответ. Б. 188 см^2.

5. Средний возраст членов некоторой спортивной команды равен 24 годам. Когда вместо ушедшего ветерана, возраст которого 32 года, пришёл 20-летний игрок, средний возраст членов команды стал равняться 22 годам. Сколько человек в команде?

А. 5. **Б.** 6. **В.** 7. **Г.** 8.

□ Обозначим через n количество игроков в команде. Тогда $32 + s = 24\cdot n$, где через s обозначена сумма возрастов членов команды, кроме ветерана. По условию, $20 + s = 22\cdot n$. Вычитая левые и правые части этого уравнения из соответствующих частей предыдущего, получим: $2n = 12$, $n = 6$. В команде 6 человек.

Ответ. Б. 6.

6. В параллели 9-х классов мальчиков больше 34%, но меньше 35%. Сколько из чисел 50, 60, 98, 100, 101, 123 могут быть количеством учащихся в параллели?

А. 1. **Б.** 2. **В.** 3. **Г.** 4.

□ Обозначим количество учащихся в параллели через x, а количество мальчиков в ней через m. По условию, выполняются неравенства $0{,}34x < m < 0{,}35x$. Следовательно, некоторое число x может быть количеством учащихся в параллели, если существует натуральное число, большее $0{,}34x$ и меньшее $0{,}35x$. Среди указанных чисел только два числа обладают этим свойством:

$101\cdot0{,}34 = 34{,}34 < 35 < 35{,}35 = 101\cdot0{,}35$;

$123\cdot0{,}34 = 41{,}82 < 42 < 43{,}05 = 123\cdot0{,}35$.

Ответ. Б. 2.

7. У Васи и Пети по 12 монет достоинствами 1 руб., 2 руб., 5 руб. у каждого. Сумма денег у Васи в два раза больше, чем у Пети. Сколько денег у Пети, если монет по 2 руб. у него столько, сколько у Васи по 5 руб., а монет по 5 руб. столько, сколько у Васи по 1 руб.?

А. 50 руб. **Б.** 48 руб. **В.** 24 руб. **Г.** 25 руб.

□ Обозначим через a, b, c количества монет достоинством соответственно по 1 руб., 2 руб., 5 руб. у Васи. Тогда, по условию, у Пети b, c, a монет достоинством

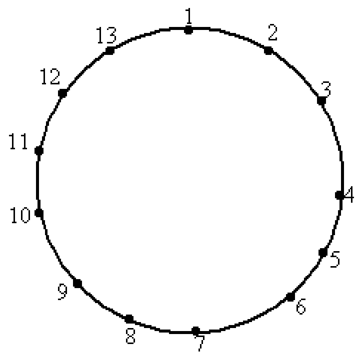
соответственно по 1 руб., 2 руб., 5 руб. Сумма денег у Васи равна $a + 2b + 5c$ (руб.), а у Пети — $b + 2c + 5a$ (руб.). Из условия следует равенство:
$a + 2b + 5c = 2b + 4c + 10a$ или $c = 9a$. Так как $a \neq 0$ и $a + b + c = 12$, то $a = 1$, $c = 9$, $b = 2$. У Пети $2\cdot1 + 9\cdot2 + 1\cdot5 = 25$ руб.

Ответ. Г. 25 руб.

8. Экзамен сдавали 13 студентов. Экзаменатор перед началом экзамена рассадил их за круглым столом и попросил назвать тех, кто, по их мнению, сдаст экзамен. Каждый из них о себе и двух своих соседях промолчал, а обо всех остальных написал: «Никто из этих 10 человек экзамена не сдаст». Все сдавшие экзамен сказали правду, а все остальные ошиблись. Сколько учащихся из экзаменующихся сдали экзамен?

А. Один. **Б.** Два. **В.** Три. **Г.** Определить невозможно.

□ Предположим, что никто не сдал экзамен. Тогда высказывание каждого ученика истинно. Но правду сказали все сдавшие экзамен и только они. Следовательно, все ученики сдали экзамен. Получили противоречие.

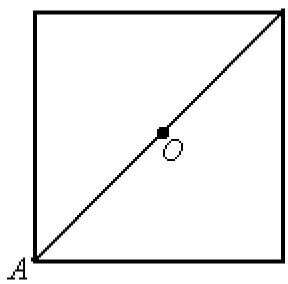


Отсюда вытекает, что хотя бы один из учеников сдал экзамен. Пусть это будет ученик №1 (см рисунок). Он сказал правду. Поэтому ученики, номера которых 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. 11 и 12 экзамен не сдали. Кроме №1, экзамен могли сдать №2 и №13. Если экзамен сдал №2, то он сказал правду и экзамен не мог сдать №13: Никто из этих 10 человек экзамена не сдаст. Аналогично, если экзамен сдал №13, то он сказал правду и экзамен не мог сдать №2. таким образом только один из учеников №2 и №13 мог сдать экзамен. Следовательно, экзамен сдали два ученика.

Ответ. Б. Два.

9. В углах квадратного участка 20 м × 20 м стоят распылители воды. Орошаемая каждым распылителем часть поверхности земли имеет форму круга, центром которого является основание распылителя. Радиусы орошаемых кругов равны, так как регулируются одним краном. Каково наименьшее значение этого радиуса, если участок полит весь? Выберите наиболее точное значение.

А. 10 м. **Б.** 13 м. **В.** 14 м. **Г.** 15 м.

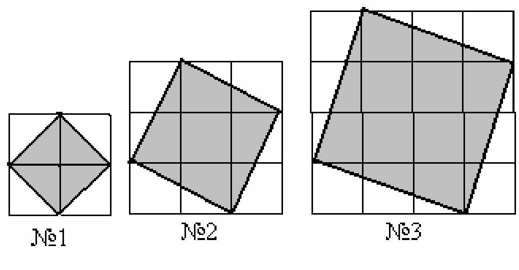


□ Изобразим участок квадратом со стороной 20 м. Участок будет полит, если его центр будет принадлежать орошаемым кругам.

Наименьший радиус круга с центром в вершине квадрата и содержащего центр квадрата равен половине диагонали квадрата. Следовательно, искомое значение равно $\frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \approx 14{,}1$ м.

Ответ. Г. 15 м.

10. На рисунке на клеточной бумаге с клетками одинаковых размеров изображены закрашенные фигуры, площади которых превосходят площадь



одной клетки на фигуре 1 в 2 раза, на фигуре 2 в 5 раз, на фигуре 3 в 10 раз. Найдите номер фигуры, изображённой по тому же правилу, что и фигуры 1, 2, 3, на которой площадь закрашенного квадрата превосходит площадь одной клетки в 5185 раз?

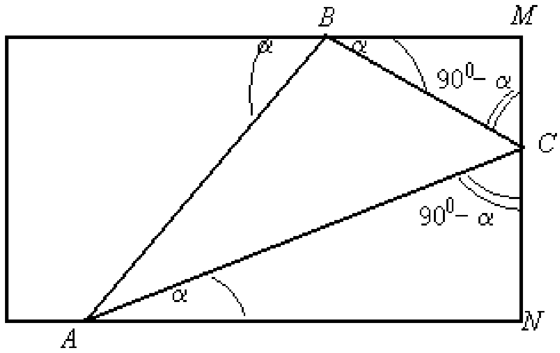
А. 71. **Б.** 72. **В.** 73. **Г.** 74.

 Площадь закрашенного квадрата на каждом рисунке равна разности площади большого квадрата, состоящего из клеток и содержащего закрашенный квадрат, и суммы площадей 4-х равных прямоугольных треугольников, отсекаемых сторонами закрашенной фигуры. Из двух таких прямоугольных треугольников можно составить прямоугольник, состоящий из клеток, количество которых равно номеру фигуры.

Обозначим через n номер фигуры. Если принять площадь одной клетки за единицу площади, то, учитывая, что длина стороны квадрата выражается числом, на 1 превосходящим номер фигуры, получим, что площадь S_n закрашенной фигуры с номером n равна $(n + 1)^2 - 2n = n^2 + 1$. Имеем уравнение $n^2 + 1 = 5185$, $n^2 = 5184$, $n = \pm 72$. Следовательно, искомый номер равен 72.

Ответ. Г. 72.

11.Известно, что общая масса трёх учеников не менее 120 кг. Когда их взвесили по двое, то весы показали не более 100 кг, не более 80 кг и не более 60 кг. Каковы массы этих учащихся?



 Обозначим массы учеников через m_1, m_2, m_3. Предположим, что $m_1 + m_2 \le 100$, $m_1 + m_3 \le 80$, $m_2 + m_3 \le 60$. Это всегда можно обеспечить выбором нумерации.

Сложив левые и правые части этих неравенств, получим неравенство $2(m_1 + m_2 + m_3) \le 240$ или $m_1 + m_2 + m_3 \le 120$. Но по условию $m_1 + m_2 + m_3 \ge 120$. Следовательно, $m_1 + m_2 + m_3 = 120$.

Если сложить неравенства $m_1 + m_2 \le 100$, $m_1 + m_3 \le 80$, то получим неравенство $m_1 + m_2 + m_1 + m_3 \le 180$, или $m_1 \le 60$. Аналогично получим неравенства $m_2 \le 40$, $m_3 \le 20$. Так как $m_1 + m_2 + m_3 = 120$, то $m_1 = 60$, $m_2 = 40$, $m_3 = 20$.

Ответ. 60 кг, 40 кг, 20 кг.

12.Одного из школьников 9 «А» класса перевели в 9 «Б» класс. Может ли средний рост школьников в каждом из этих классов (9 «А» и 9 «Б») увеличиться?

 Может, если рост переведенного школьника меньше среднего роста «А» класса и больше среднего роста «Б» класса. Докажем это.

Обозначим рост учащихся 9 «А» класса через a_1, a_2, …, a_n, а рост учащихся 9 «Б» класса через $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

Предположим, что перевели школьника с ростом a_1 и справедливо неравенство $a_1 < \frac{a_1 + ... + a_n}{n}$. Тогда $na_1 < a_1 + ... + a_n$ или $n(a_2 + \ldots + a_n) > (n - 1)$

($a_1 +\ \ldots + a_n$). Следовательно $\dfrac{a_2 + \ldots + a_n}{n-1} > \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$, то есть средний рост в «А» классе увеличился.

Предположим, что справедливо неравенство $\dfrac{b_1 + \ldots + b_k}{k} < a_1$. Тогда $b_1 + b_2 + \ldots + b_k) < ka_1$ или $(k + 1)(b_1 + b_2 + \ldots + b_k) < k(a_1 + b_1 + \ldots + b_k)$. Следовательно $\dfrac{b_1 + \ldots + b_k}{k} < \dfrac{a_1 + b_1 + \ldots + b_k}{k+1}$, то есть средний рост в «Б» увеличился.

Ответ. Может.

13. Может ли шар, лежащий возле борта на бильярдном столе прямоугольной формы после удара кием отразиться сначала от одного борта, затем от соседнего и пройти через исходное положение, если отражение от борта происходит по закону: угол падения равен углу отражения?

 Предположим, что существует траектория, удовлетворяющая условию. На рисунке она изображена замкнутой ломаной *ABCA*. Пользуясь законом отражения, найдём угол *CAN*. Он равен α. Так как *BM* и *BN* параллельны, то угол *BAN* также равен α, где α — угол, под которым шар направили к борту *BM*. Но $\angle BAN = \angle BAC + \angle CAN$. Следовательно, $\angle BAC = 0$. Получили противоречие. Ответ на поставленный вопрос отрицательный.

Ответ. Не может.

14. В футбольном турнире 14 команд сыграли между собой 6 туров — каждая команда сыграла с шестью разными командами. Обязательно ли найдутся три команды, не сыгравшие между собой пока ни одного матча?

 Рассмотрим одну из команд. Она сыграла с шестью командами и с семью не сыграла. Среди этих семи команд есть две, не сыгравшие пока между собой. Действительно, если среди этих семи команд нет двух, не сыгравших пока между собой, то все эти семь команд сыграли между собой, для чего им потребовалось сыграть $\dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$ матч. Однако за один тур эти семь команд могут провести между собой только 3 матча, а за 6 туров — $3 \cdot 6 = 18$ матчей. Следовательно, среди этих семи команд есть две, пока не сыгравшие между собой, и вместе с рассмотренной они образуют три команды, не сыгравшие между собой пока ни одного матча.

Ответ. Обязательно.