

**Решения задач первой части заочного этапа
олимпиады «Абитуриент 2018»**

1. Упростите выражения: (а) $\sqrt{8-2\sqrt{15}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{5}$;
(б) $(x + \frac{1}{x})^2 + (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 + \dots + (x^n + \frac{1}{x^n})^2$.

Решение (а). $\sqrt{8-2\sqrt{15}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} - \sqrt{5} = \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 - \sqrt{5} = -1$

Ответ. -1 .

Решение (б). $(x + \frac{1}{x})^2 + (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 + \dots + (x^n + \frac{1}{x^n})^2 = (x^2 + x^4 + \dots + x^{2n}) + (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^{2n}}) + 2n = \frac{x^2(1-x^{2n})}{1-x^2} + \frac{\frac{1}{x^2}(1-\frac{1}{x^{2n}})}{1-\frac{1}{x^2}} + 2n = \frac{x^2(1-x^{2n})}{1-x^2} + \frac{1-x^{2n}}{x^2(1-x^2)} + 2n = \frac{(1-x^{2n})(x^{2n+2}+1)}{x^{2n}(1-x^2)} + 2n$.

Ответ. $\frac{(1-x^{2n})(x^{2n+2}+1)}{x^{2n}(1-x^2)} + 2n$.

2. Решите уравнения: (а) $\frac{6}{(x+1)(x+2)} + \frac{8}{(x-1)(x+4)} = 1$;

(б) $\sqrt{x+7} + \sqrt{x+14} + \sqrt{x+23} = 12$.

Решение (а). Перепишем уравнение в виде: $\frac{6}{x^2+3x+2} + \frac{8}{x^2+3x-4} = 1$. Заменой $x^2 + 3x = y$ получаем уравнение $\frac{6}{y+2} + \frac{8}{y-4} = 1$ или $14y - 8 = y^2 - 2y - 8$, $y \neq -2$, $y \neq 4$. Следовательно, $y^2 - 16y = 0$; $y_1 = 0$, $y_2 = 16$. Возвращаясь к исходной переменной, получим два уравнения: $x^2 + 3x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -3$ и $x^2 + 3x = 16$, $x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$.

Ответ. $\{0, -3, \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}\}$.

Решение (б). Легко видеть, что $x = 2$ является корнем этого уравнения. Других корней это уравнение не имеет, так как функция $y = \sqrt{x+7} + \sqrt{x+14} + \sqrt{x+23}$, является возрастающей, как сумма возрастающих функций, а значит, данное уравнение имеет не более одного корня.

Ответ. 2.

3. Решите уравнение $x^3 - y^3 = 91$ в целых числах.

Решение. Так как $91 = 1 \cdot 91 = 7 \cdot 13 = 13 \cdot 7 = 91 \cdot 1 = -1 \cdot (-91) = -7 \cdot (-13) = -13 \cdot (-7) = -91 \cdot (-1)$, а $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$, при этом выражение $x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$ для любых действительных значений x и y , то решениями данного уравнения в целых числах являются решения совокупности четырёх систем:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + xy + y^2 = 91, \end{cases} \begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 + xy + y^2 = 13, \end{cases} \begin{cases} x - y = 13, \\ x^2 + xy + y^2 = 7, \end{cases} \begin{cases} x - y = 91, \\ x^2 + xy + y^2 = 1, \end{cases}$$

Решения первых двух систем: $(-5; -6)$, $(6; 5)$; $(3; -4)$, $(4; -3)$. Остальные системы решений в целых числах не имеют.

Ответ. $(-5; -6)$, $(6; 5)$; $(3; -4)$, $(4; -3)$.

4. Решите систему $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91; \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$

Решение. Так как $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)$, то данная система равносильна системе $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$ Сложив и вычтя уравнения этой системы,

будем иметь: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ 2xy = 6 \end{cases}$ или $\begin{cases} (x+y)^2 = 16, \\ (x-y)^2 = 4. \end{cases}$ Эта система равносильна совокупности четырёх систем: $\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=2, \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=-2, \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=-4, \\ x-y=2, \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=-4, \\ x-y=-2. \end{cases}$ Их решения: $(3; 1), (1; 3), (-1; -3), (-3; -1)$.

Ответ. $(3; 1), (1; 3), (-1; -3), (-3; -1)$.

5. Найдите наименьшее натуральное n такое, что $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < 0,01$.

Решение. По условию $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} < 0,01$. Отсюда получаем $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} > 100$. Наименьшее натуральное n , при котором выполняется это неравенство, равно 2501. Действительно, последовательность $\{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\}$ возрастающая, при этом $\sqrt{2501} + \sqrt{2500} > 50 + 50 = 100$, $\sqrt{2500} + \sqrt{2499} < 50 + 50 = 100$.

Ответ. 2501.

6. Известно, что многочлен $5x^6 - mx^5 + 2nx^2 - 2x + 3$ делится на $x^2 - 1$ без остатка. Найдите значение $m + n$.

Решение. Так как данный многочлен делится на $x^2 - 1$ без остатка, то он равен произведению $x^2 - 1$ на некоторый многочлен. Следовательно числа 1 и -1 являются его корнями. Подставляя их в равенство $5x^6 - mx^5 + 2nx^2 - 2x + 3 = 0$, получим систему уравнений $\begin{cases} m - 2n = 6, \\ m + 2n = -10 \end{cases}$ или $\begin{cases} m - 2n = 6, \\ m = -2. \end{cases}$ Из первого уравнения найдём $n = -4$. Тогда $m + n = -6$.

Ответ. -6 .

7. Числа a, b, c, d образуют арифметическую прогрессию, а числа $a+1, b+1, c+3, d+9$ — геометрическую. Найдите числа a, b, c, d .

Решение. По условию, $b = a + p$, $c = a + 2p$, $d = a + 3p$, где p — разность арифметической прогрессии; $b+1 = (a+1)q$, $c+3 = (a+1)q^2$, $d+9 = (a+1)q^3$, где q — знаменатель геометрической прогрессии.

Из первых равенств этих соотношений имеем:

$$a + p + 1 = (a + 1)q, \quad p = (a + 1)(q - 1). \quad (1)$$

Из вторых равенств указанных соотношений и равенства (1) имеем:

$$a + 2(a + 1)(q - 1) + 3 = (a + 1)q^2, \quad \text{или} \quad (a + 1)(q - 1)^2 = 2. \quad (2)$$

Из третьих равенств указанных соотношений и равенства (1) имеем:

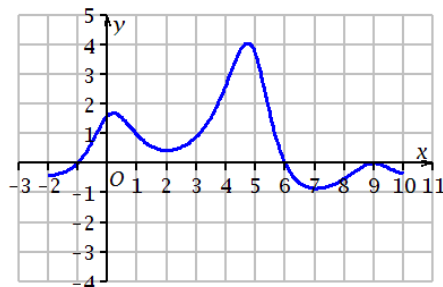
$$a + 3(a + 1)(q - 1) + 9 = (a + 1)q^3, \quad \text{или} \quad (a + 1)(q^3 - 3q + 2) = 8. \quad (3)$$

Рассмотрим систему из уравнений (2) и (3): $\begin{cases} (a + 1)(q - 1)^2 = 2, \\ (a + 1)(q^3 - 3q + 2) = 8. \end{cases}$ Так как

$q \neq 1$, то, выразив $a + 1$ из первого уравнения и подставив во второе, получим уравнение $q^3 - 4q^2 + 5q - 2 = 0$. Корнем этого уравнения является $q = 2$, так как $q^3 - 4q^2 + 5q - 2 = q^2(q - 2) - 2q(q - 2) + q - 2 = (q - 2)(q^2 - 2q + 1) = (q - 2)(q - 1)^2$. Тогда $a = 1$. Из (1) находим $p = 2$. Следовательно, $a = 1$, $b = 1 + 2 = 3$, $c = 1 + 2 \cdot 2 = 5$, $d = 1 + 3 \cdot 2 = 7$.

Ответ. $a = 1, b = 3, c = 5, d = 7$.

8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, которая определена на промежутке $[-2; 10]$. Решите систему неравенств $\begin{cases} f(x) \geq 0; \\ x^2 + x - 6 > 0 \end{cases}$ во множестве целых чисел.



Решение. Данная система равносильна системе $\begin{cases} x \in [-1; 6] \cup \{9\}, \\ x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty). \end{cases}$ Её решением является множество $(2; 6] \cup 9$, что в пересечении с множеством целых чисел даёт $\{3; 4; 5; 6; 9\}$.

Ответ. $\{3; 4; 5; 6; 9\}$.

9. Найдите наименьшее значение многочлена

$$P(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4).$$

Решение. Многочлен $P(x)$ можно представить в следующем виде: $P(x) = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6)$. Множество его значений совпадает с множеством значений функции $f(y) = y(y+2)$, $y \geq -2\frac{1}{4}$, так как при замене $y = x^2 + 5x + 4$ получим $P(x)$, а $y = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{9}{4}$. Квадратный трёхчлен $y(y+2) = y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1$ принимает наименьшее значение, равное -1 , при $y = -1 \geq -2\frac{1}{4}$.

Ответ. -1 .

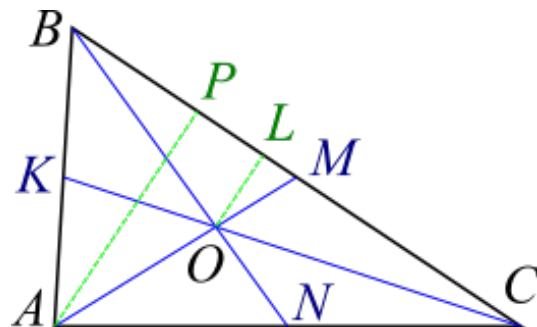
10. Найдите количество четырёхзначных натуральных чисел, в записи которых цифры расположены по убыванию (слева направо).

Решение. Четыре различные цифры для указанных чисел можно выбрать, согласно комбинаторному правилу умножения, $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ способами. При этом каждая четвёрка цифр будет повторяться, согласно комбинаторному правилу умножения, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ раза. Расположению цифр по убыванию удовлетворяет только один из этих 24 наборов. Поэтому количество искомых чисел равно $5040 : 24 = 210$.

Ответ. 210.

11. Площадь треугольника равна $3\sqrt{15}$, а длины двух его медиан равны 3 и 6. Найдите длину третьей медианы.

Решение. Дан треугольник ABC , AM , BN и CK — его медианы, $AM = 6$, $BN = 3$, площадь треугольника ABC равна $3\sqrt{15}$, O — точка пересечения его медиан (см. рис.). Требуется найти длину медианы CK .



Проведем $AP \perp BC$, $OL \perp BC$. $\triangle MOL$ подобен $\triangle MAP$ по двум углам: $\angle M$ — общий, $\angle MLO = \angle MPA = 90^\circ$. По свойству точки пересечения средних линий треугольника, $AO : OM = 2 : 1$. Поэтому $OL : AP = MO : AM = 1 : 3$. Учитывая, что M — середина BC , площадь $S_{\triangle BOM} = \frac{1}{2}OL \cdot MB = \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{P} \cdot \frac{1}{2}BC = \frac{1}{6}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{6} \cdot 3\sqrt{15} = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

По свойствам медиан, $BO = 2$, $OM = 2$, $AO = 4$. Обозначив острый угол между медианами AM и BN через α , получим: $S_{\triangle BOM} = \frac{1}{2}BO \cdot OM \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin \alpha = 2 \sin \alpha$. Отсюда $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Применив теорему косинусов к треугольнику ABO , получим: $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos \angle AOB$. Поскольку $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, то $\cos \angle AOB = \frac{1}{4}$ или $-\frac{1}{4}$. Тогда

$$AB^2 = 16 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} = 16, AB = 4 \text{ или } AB^2 = 16 + 4 + 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} = 24, AB = 2\sqrt{6}.$$

По формуле для вычисления медианы $OK = \frac{1}{2}\sqrt{2AO^2 + 2BO^2 - AB^2}$ имеем: $OK = \frac{1}{2}\sqrt{32 + 8 - 16} = \sqrt{6}$, $CK = 3OK = 3\sqrt{6}$ или $OK = \frac{1}{2}\sqrt{32 + 8 - 24} = 2$, $CK = 3OK = 6$.

Ответ. $3\sqrt{6}$ или 6.

12. Фигура, не являющаяся квадратом, является объединением двух квадратов со стороной 1 см, имеющих общий центр и общие оси симметрии. Найдите отношение периметра этой фигуры к её площади.

Решение. Из условия следует, что при повороте вокруг точки O на 45° квадраты $ABCD$ и $MNPQ$ совмещаются. Следовательно, данная фигура ограничена ломаной, состоящей из 16 равных звеньев. Из равнобедренного прямоугольного треугольника EDK следует, что $DK = \sqrt{2}ED = \sqrt{2}(OD - OE) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$. Значит периметр данной фигуры равен $16 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$.

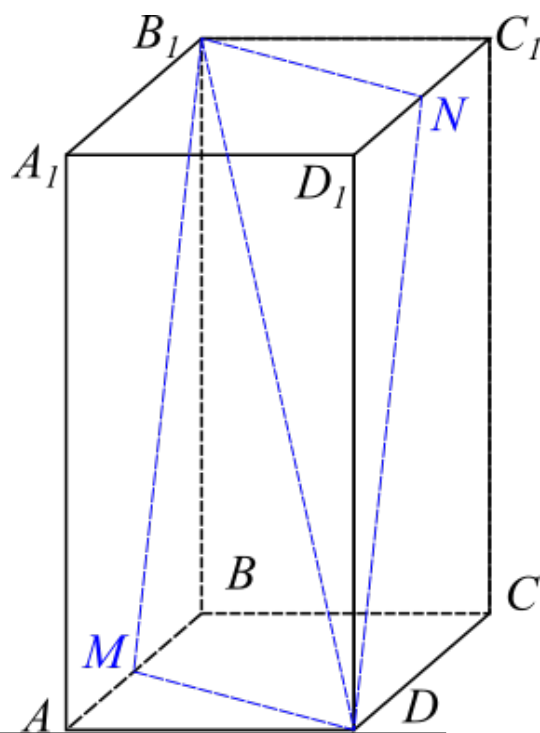
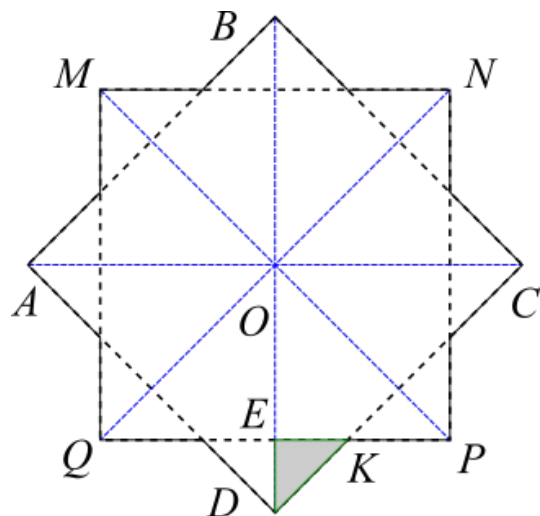
Площадь этой фигуры равна сумме площадей квадрата $MNPQ$ и восьми треугольников EDK . Имеем равенство $S = 1 + 8 \cdot \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2})^2 = 1 + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} + 1 = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$. Искомое отношение равно $\frac{8\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = 4$.

Ответ. 4.

13. Длины рёбер прямоугольного параллелепипеда равны 2 см, 3 см, 6 см. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через середину ребра длиной 2 см и диагональ параллелепипеда, не пересекающую этого ребра.

Решение. На рисунке изображён прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$: $AB = 2$, $AD = 3$, $AA_1 = 6$. Если M — середина AB , то необходимо найти площадь сечения, проходящего через M и диагональ DB_1 . Из теоремы о параллельности линий пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью следует, что данное сечение — параллелограмм $DNB_1 M$, площадь которого равна удвоенной площади треугольника $MB_1 D$. По теореме Пифагора имеем $MB_1 = \sqrt{37}$, $MD = \sqrt{10}$, $B_1 D = 7$. По формуле Герона находим

$$\begin{aligned} S_{\triangle MB_1 D} &= \sqrt{\frac{\sqrt{37} + \sqrt{10} + 7}{2} \cdot \frac{-\sqrt{37} + \sqrt{10} + 7}{2} \cdot \frac{\sqrt{37} - \sqrt{10} + 7}{2} \cdot \frac{\sqrt{37} + \sqrt{10} - 7}{2}} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{((\sqrt{10} + 7)^2 - (\sqrt{37})^2) \cdot ((\sqrt{37})^2 - (\sqrt{10} - 7)^2)} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(14\sqrt{10} + 22) \cdot (14\sqrt{10} - 22)} = \frac{1}{4} \sqrt{1476} = \frac{1}{4} \sqrt{36 \cdot 41} = \frac{3}{2} \sqrt{41}, \end{aligned}$$



откуда $S_{MB_1ND} = 3\sqrt{41}$.

Ответ. $3\sqrt{41}$.

14. Коля и Вася за ноябрь получили по 15 оценок: тройки, четвёрки и пятёрки. При этом Коля получил пятёрок столько же, сколько Вася четвёрок, четвёрок столько же, сколько Вася троек, а троек столько же, сколько Вася пятёрок. Оказалось, что средний балл за ноябрь у мальчиков одинаковый. Сколько троек получил Коля в ноябре?

Решение. Обозначим количество пятёрок, четвёрок, троек, полученных Колей, через x, y, z соответственно. По условию задачи, Вася получил пятёрок, четвёрок, троек соответственно z, x, y (введённые обозначения содержатся в таблице).

	количество троек	количество четвёрок	количество пятёрок
Коля	z	y	x
Вася	y	x	z

Из условия имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{3z + 4y + 5x}{15} = \frac{3y + 4x + 5z}{15}; \\ x + y + z = 15, \end{cases} \quad \begin{cases} y + x = 2z; \\ x + y + z = 15. \end{cases} \quad \text{Отсюда } z = 5.$$

Ответ. 5.

15. В шахматном турнире участвовали ученики 10 и 11 классов. Каждый участник играл с каждым другим один раз. Одиннадцатиклассников было в 10 раз больше, чем десятиклассников, и они набрали вместе в 4,5 раза больше очков, чем все десятиклассники. Сколько учеников 10-го класса участвовало в турнире и сколько они набрали баллов?

Решение. Обозначим количество десятиклассников, участвовавших в турнире через $x \in \mathbb{N}$, а количество очков, которое они набрали, — через $y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда одиннадцатиклассников было $10x$, и они набрали $4,5y$ очков. Всего в турнире участвовало $11x$ учащихся, сыграно всего $\frac{11x(11x-1)}{2} = 5,5x(11x-1)$ партий, значит все участники набрали $5,5x(11x-1)$ очков. Имеем уравнение: $5,5x(11x-1) = 5,5y$ или $y = x(11x-1)$.

Изучим, насколько большим может быть значение величины y . Чтобы десятиклассники набрали наибольшее количество очков, необходимо, чтобы они выиграли у всех одиннадцатиклассников, и тем самым принесли своей команде $x \cdot 10x$ очков. Кроме того, сыграв между собой, они получают $\frac{x(x-1)}{2}$ очков. Следовательно, сумма этих значений не меньше y : $10x^2 + \frac{x(x-1)}{2} \geq 11x^2 - x$ или $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \leq 0$; $x(x-1) \leq 0$. Значит $x = 1$, $y = 10$.

Ответ. Один десятиклассник, 10 баллов.