

Задания первой части заочного этапа олимпиады «Абитуриент 2020»

1. Известно, что $(\sqrt{2} - 1)^7 = \sqrt{57122} - \sqrt{57121}$. Докажите, что

$$(\sqrt{2} + 1)^7 = \sqrt{57122} + \sqrt{57121}.$$

2. Вычислите $\left(1 + \frac{1}{15^2-1}\right)\left(1 + \frac{1}{16^2-1}\right)\left(1 + \frac{1}{17^2-1}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{286^2-1}\right)$.

3. Решите уравнение: $(\sqrt{x^2 + 3x} - 2)(\sqrt{x^2 + 3x} + 3) = -6$.

4. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 4y^2 - 9x^2 = 36 + 36x, \\ 4y^2 + 9x^2 = 36 - 18xy. \end{cases}$$

5. Найдите наименьшее значение a , при котором уравнение $x^2 - 6x + 5 = 6 - 8a - 2a^2$ имеет решение.

6. Найдите наименьшее значение выражения $|x - 2| + |x| + |x + 2| + |x + 4|$.

7. Даны функции $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x > -1; \\ -1 - 2x, & x \leq -1 \end{cases}$ и $g(x) = x^2 - x$. Найдите наименьший корень уравнения $f(1 - |x|) = g(x + 2)$.

8. Изобразите на координатной плоскости множество всех точек (x, y) , удовлетворяющих условию $x^2 = y + \sqrt{y + x}$.

9. В прямоугольный треугольник ABC вписан квадрат так, что две его вершины лежат на гипотенузе AC , а две другие — на катетах AB и BC . Найдите углы треугольника, если известно, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC , относится к стороне квадрата как $13 : 6$.

10. В пространстве даны три равных отрезка. Всегда ли существует такая плоскость, что ортогональные проекции отрезков на эту плоскость равны?

11. Внутри куба с ребром 2 см выбрано 9 точек. Докажите, что среди них найдутся две, расстояние между которыми меньше $\sqrt{3}$ см.

12. На предприятии доля сотрудников с высшим образованием составляла 80%. После того, как на работу было принято 30 новых специалистов с высшим образованием, их доля увеличилась до 85%. Сколько сотрудников теперь работает на предприятии?

13. Из пункта A в пункт B в 11:00 одновременно отправились автобус и пешеход. После прибытия в пункт B автобус, не задерживаясь, поехал обратно и встретил пешехода в пункте C в 11:10. Вернувшись в пункт A , автобус снова без задержки направился в пункт B и догнал пешехода в пункте D , находящемся на расстоянии $1/3$ км от пункта C . Найдите скорость автобуса (в км/ч), если расстояние между пунктами A и B равно 4 км, а скорости автобуса и пешехода постоянны.

Решение задач первой части заочного этапа необходимо прислать в электронном виде не позднее **19 декабря** на e-mail: olimpiada.fmit.donnu@gmail.com или доставить в письменном виде по адресу: Главный корпус ДонНУ, пр. Гурова, 14, ауд. 405 или ауд. 801. В начале работы нужно указать: Фамилию, имя, отчество; Электронный адрес и контактный телефон; Населённый пункт, в котором учитесь; Номер школы, класс; Фамилию, имя, отчество учителя математики.

Желаем Вам успехов!