Решения задач очного тура
олимпиады «Абитуриент-2016»

Часть 1. Тестовые задания

1. Сколько двузначных чисел при зачеркивании последней цифры уменьшаются в 11 раз?

А. 7 Б. 9 В. 10 Г. 20

Решение. Пусть $\overline{ab} = 10a + b$ — двузначное число, удовлетворяющее условию. Тогда $11a = 10a + b$ или $a = b$. Так как a принимает значения 1,…,9, то 9 двузначных чисел (11, 22, … , 99) удовлетворяют условию.

Ответ. Б. 9

2. Если $a \le b$, то выражение $\sqrt{(a-b)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}$ равно…

А. $a-b$ Б. $b+a$ В. $b-a$ Г. a

Решение. Имеем $\sqrt{(a-b)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} = \sqrt{(a-b)(a-b)} = |a-b| = b-a$.

Ответ. В. $b-a$

3. Если областью определения функции $y = f(x)$ является промежуток $[-1;1]$, то областью определения функции $y = 2f(2x+3)+1$ является промежуток…

А. $[-1;3]$ Б. $[1;5]$ В. $[-2;-1]$ Г. $[3;11]$

Решение. Область определения функции $y = 2f(2x+3)+1$ состоит из всех значений x, удовлетворяющих двойному неравенству $-1 \le 2x+3 \le 1$ или $-2 \le x \le 1$. Искомым является промежуток $[-2;-1]$.

Ответ. В. $[-2;-1]$

4. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x^2 - y^2 = 31$?

А. 1 Б. 2 В. 3 Г. 4

Решение. Так как $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, а 31 — простое число, то искомые решения уравнения являются решениями одной из следующих систем:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=31 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y=31 \\ x-y=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-31 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y=-31 \\ x-y=-1 \end{cases}.$$

Каждая из этих систем имеет одно целочисленное решение.

Ответ. Г. 4

5. Предприниматель повысил цену на товар на 20% в связи с резким увеличением спроса и получил при этом 32% прибыли. Сколько процентов прибыли получил бы предприниматель, если бы не повысил цену?

А. 10% Б. 12% В. 16% Г. 15%

Решение. Пусть v — объем товара, z — цена единицы товара до повышения, a — его себестоимость. Тогда из условия следует равенство $v \cdot 1,2z = 1,32a$ или $v \cdot z = 1,1b$. Так как vz — это предполагаемый доход до повышения цен, то из полученного равенства следует, что предприниматель планировал получить 10% прибыли.

Ответ. А. 10%

6. Укажите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases}(3y-4|x|)(x-a)=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}$ имеет ровно три решения.

А. $\{\pm 1\}$ Б. $\{0;\pm 1\}$ В. $\{\pm 5/3;\pm 1\}$ Г. $\{\pm 3/5;\pm 1\}$

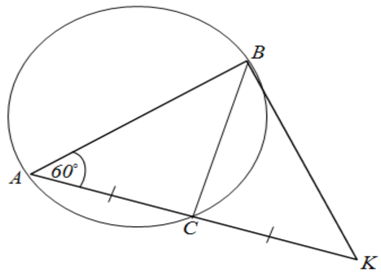
Решение. Данная система равносильна совокупности систем $\begin{cases}3y-4|x|=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}$ и $\begin{cases}x-a=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}$. Первая система имеет два решения: $\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$ и $\left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$. Вторая система не имеет решений при $|a|>1$, имеет одно решение при $|a|=1$ и два решения при $|a|<1$: $\left(a;\sqrt{1-a^2}\right)$ и $\left(a;-\sqrt{1-a^2}\right)$. Следовательно, исходная система имеет ровно три решения, если $a=\pm 1$ или $a=\pm\frac{3}{5}$.

Ответ. Г. $\{\pm 3/5;\pm 1\}$

7. Из точки A окружности проведен диаметр AB и хорда AC, которая продолжена за точку C на расстояние CK, равное AC. Найдите BC, если $KB=10$ см и $\angle CAB=60^\circ$.

А. 8 *см* Б. $5\sqrt{3}$ *см* В. 5 *см* Г. 7,5 *см*

Решение. Так как угол C опирается на диаметр, то он прямой. Следовательно, треугольник ACB прямоугольный. Медиана BC треугольника ABK является высотой. Следовательно, треугольник ABK — равнобедренный, $AB=BK$. Имеем $BC=AB\sin\angle CAB=10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$.

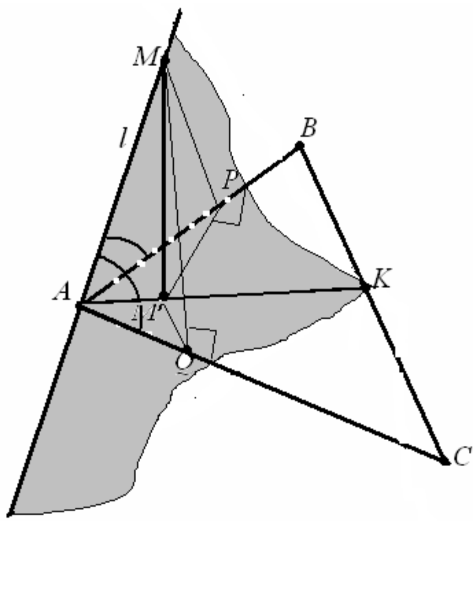


Ответ. Б. $5\sqrt{3}$ *см*

8. Прямая l пересекает плоскость треугольника ABC в вершине A и одинаково наклонена к сторонам $AB=4$ см и $AC=6$ см. Чему равна разность длин отрезков, на которые делит отрезок BC плоскость, проходящая через прямую l перпендикулярно плоскости треугольника, если $BC=5$ см?

А. 1 *см* Б. $\sqrt{3/2}$ *см* В. $\sqrt{2/3}$ *см* Г. 0 *см*

Решение. Пусть точка M принадлежит прямой l, а M' — ее ортогональная проекция на плоскость треугольника ABC. Проведем из точки M' перпендикуляры к сторонам AB и AC. Точки P и Q — их основания. По теореме о трех перпендикулярах, $MP\perp AB$ и $MQ\perp AC$. Прямоугольные треугольники AMP и AMQ равны, так как у них общая гипотенуза и равны острые углы. Следовательно, $MP=MQ$. Тогда равны прямоугольные треугольники $MM'P$ и $MM'Q$ по двум сторонам. Следовательно,



$M'P = MQ$, т.е. точка M' равноудалена от сторон угла BAC. Поэтому AM' — биссектриса, K —точка её пересечения с BC и $\frac{BK}{AB} = \frac{KC}{AC}; \frac{BK}{KC} = \frac{4}{6}$, т.е. $BK : KC = 2 : 3$. Так как $BC = 5$ см , то $BK = 2$ см и $KC = 3$ см. Значит, искомая разность равна 1 см.

Ответ. А. 1 см

Часть 2. Задания с полным обоснованием

9. Решите уравнение $\sin^4 - \cos^4 x = -1 - x^4$.

Решение. Так как $\sin^4 - \cos^4 x = \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = -\cos 2x$, то данное уравнение равносильно уравнению $\cos 2x = x^4 + 1$. Это уравнение равносильно системе $\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ x^4 + 1 = 1 \end{cases}$, потому что $\cos 2x \le 1$, а $x^4 + 1 \ge 1$. Полученная система имеет одно решение $x = 0$.

Ответ. $x = 0$

10. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + \sqrt{xy} = 6 \\ y + \sqrt{xy} = 3 \end{cases}$.

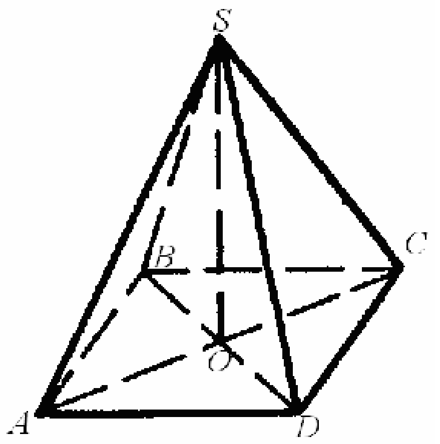
Решение. Данная система равносильна системе $\begin{cases} x + \sqrt{xy} = 6 \\ x - y = 3 \end{cases}$. Выразив y из второго уравнения и подставив в первое, получим уравнение $x + \sqrt{x(x-3)} = 6$ или $\sqrt{x(x-3)} = 6 - x$. Из полученного уравнения следует уравнение $x(x-3) = (6-x)^2$ или $x^2 - 3x = 36 - 12x + x^2$, откуда $9x = 36$ и $x = 4$. Так как $x = 4$ удовлетворяет уравнению $x + \sqrt{x(x-3)} = 6$, то $x = 4$ и $y = 4 - 3 = 1$ являются решением исходной системы.

Ответ. $(4;1)$

11. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 4 см. Каково наибольшее значение площади сечения пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания и вершину пирамиды?

Решение. Пусть квадрат $ABCD$ — основание правильной четырехугольной пирамиды , точка S — вершина пирамиды, а точка O — ее проекция (см. рис.). Треугольник ASC является сечением пирамиды плоскостью, проходящей через вершину S и диагональ AC. По условию, $SC = SA = 4$ см. Имеем равенство

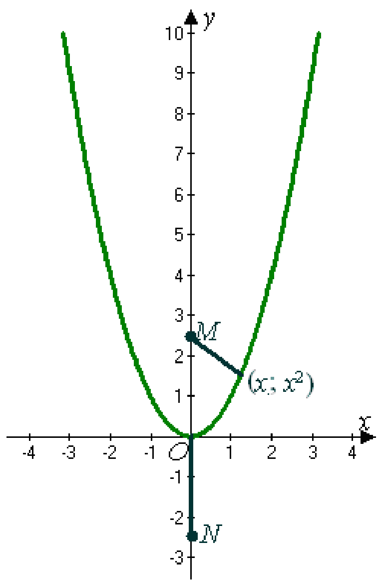
$$S_{ASC} = \frac{1}{2} SA \cdot SC \sin\angle ASC = 8 \sin\angle ASC .$$



Так как $\sin\angle ASC \le 1$, то наибольшее значение S_{ASC} достигается, когда $\angle ASC$ прямой и $\sin\angle ASC = 1$. Это значение равно 8 см^2.

Ответ. 8 см^2

12. На оси симметрии параболы $y = x^2$ дана точка на расстоянии 2,5 см от ее вершины. Найдите наименьшее расстояние от этой точки до точек параболы.



Решение. Существуют две точки, лежащие на оси симметрии параболы на заданном расстоянии от вершины: одна в верхней полуплоскости, другая в нижней (см. рис.). Если данная точка лежит в нижней полуплоскости и имеет координаты $(0;-2,5)$, то наименьшее расстояние равно 2,5 см. Если данная точка лежит в верхней полуплоскости, то она имеет координаты $(0;2,5)$. Ее расстояние до произвольной точки параболы $(x;x^2)$ равно

$$\sqrt{x^2+\left(x^2-2,5\right)^2}=\sqrt{x^4-4x^2+6,25}=\sqrt{\left(x^2-2\right)^2+2,25}\,.$$

Наименьшее значение полученного выражения достигается при $x^2 = 2$ и оно равно 1,5 см.

Ответ. 1,5 см или 2,5 см.