

№ 1-2 (62-63) / 2018

Основан в 1970г.

ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Механика деформируемого твердого тела

Болнокин В.Е., Пачева М.Н., Сторожев В.И., Зыонг Минь Хай, Чан Ба Ле Хоанг Методика анализа модели плоского гидроакустического экрана с периодической системой внутренних туннельных цилиндрических полостей 3

Моисеенко И.А., Моисеенко В.А. Нормальные волны в функционально градиентных сплошных цилиндрах 16

Бондаренко Н.С., Гольцев А.С. Коэффициенты интенсивности напряжений при термоупругом изгибе изотропных пластин с теплоизолированным разрезом в случае произвольного теплообмена..... 35

Механика жидкости, газа и плазмы

Глухова Ж.Л., Гольцов В.А. Влияние водородоупругих напряжений на концентрационные профили водорода..... 45

Беззуб А.А., Белоусов В.В. Моделирование гидродинамических и теплофизических процессов в ванне агрегата ковш-печь 54

Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика

Канин В.А. Напряженное состояние пород вокруг пластовой горной выработки при ее охране искусственными поддерживающими опорами..... 62

<i>Грищенков Н.Н., Голубев Ф.М., Сажнев В.П.</i> Прогноз сдвижения земной поверхности при ликвидации угледобывающих предприятий в различных угленосных районах Донбасса.....	71
<i>Глухов А.А., Анциферов В.А.</i> Оценка влияния фактора газо- и водонасыщенности угольных пластов на сейсмоакустические параметры регистрируемых волновых полей.....	82

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

©2018. В.Е. Болнокин, М.Н. Пачева, В.И. Сторожев, Зыонг Минь Хай, Чан Ба Ле Хоанг

МЕТОДИКА АНАЛИЗА МОДЕЛИ ПЛОСКОГО ГИДРОАКУСТИЧЕСКОГО ЭКРАНА С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ВНУТРЕННИХ ТУННЕЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОЛОСТЕЙ

Представлена разработка теоретической численно-аналитической методики анализа модели трансформации упругих волн при их распространении по толщине контактирующего с акустическими средами деформируемого слоя, содержащего периодический ряд однотипных параллельных плоским граням внутренних протяженных туннельных цилиндрических полостей. Методика базируется на введении представлений потенциалов волнового поля для многосвязного слоя в виде суперпозиций разнотипных базисных решений в основных координатах и в локальных цилиндрических координатных системах с полюсами в центрах сечений перфорирующих полостей. Используются теория Флоке, теоремы сложения цилиндрических функций, разложения Якоби, а также метод ортогональных рядов, с применением которого задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных коэффициентов в рядах по базисным частным решениям волновых уравнений.

Ключевые слова: плоский гидроакустический экран, перфорированный упругий слой, внутренние туннельные полости, внешняя акустическая среда, краевая задача волновой механики, численно-аналитическая методика анализа, уравнения для волновых потенциалов, метод суперпозиции рядов по базисным частным решениям, теория Флоке, теоремы сложения цилиндрических функций, метод ортогональных рядов, бесконечные системы алгебраических уравнений.

Введение. Решение задач дальнейшего поиска механизмов эффективного функционирования систем гидроакустического экранирования [1-5] в качестве подлежащих анализу направлений предполагает, в частности, исследование моделей трансформации упругих волн при их распространении по толщине контактирующего с акустическими средами деформируемого слоя с различными типами внутренней неоднородности физико-механических и структурно-геометрических характеристик [6-10]. Одним из типов изучаемых в этой связи актуальных конструкций гидроакустических экранов является плоскопараллельный упругий слой с периодическим рядом внутренних туннельных параллельных плоским граням протяженных однотипных цилиндрических полостей. Применительно к объектам данной структуры актуальная проблема анализа процессов волнового деформирования может быть исследована на базе представляемой в данной работе численно-аналитической методики.

1. Постановка и численно-аналитическая методика исследования рассматриваемой проблемы. Предполагается, что рассматриваемая конструкция гидроакустического экрана в модели представляет собой перфорированный изотропный слой с параметрами Ламе λ , μ и плотностью ρ , содержит бесконечный периодический ряд отстоящих друг от друга на расстояние $2l$ туннельных цилиндрических полостей радиуса R ($R < h$) с центрами на оси Ox_1 и занимает в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$ область

$$V_L = \{-h \leq x_3 \leq h, (x_1, x_2) \in R^2\} \setminus \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} V_p, \quad (1)$$

где $V_p = \{(x_1 - 2pl)^2 + x_2^2 \leq R^2, -\infty < x_2 < \infty\}$ – подобласти-полости с граничными поверхностями $\Gamma_p = \{(x_1 - 2pl)^2 + x_2^2 = R^2, -\infty < x_2 < \infty\}$, в сечениях которых плоскостью Ox_1x_3 введены локальные полярные координатные системы $O_p r_p \theta_p$, $r_p \cdot \exp(i\theta_p) = x_1 - 2pl + ix_3$, с центрами в точках $O_p(2pl, 0)$.

Полубесконечные области $V_+ = \{h < x_3, (x_1, x_2) \in R^2\}$ и $V_- = \{x_3 < -h, (x_1, x_2) \in R^2\}$ полагаются заполненными идеальной слабо сжимаемой жидкостью. Процессы распространения гидроакустических волн в этих областях соответственно описываются уравнениями для потенциалов φ_+, φ_- акустических полей, а также соотношениями связи указанных потенциалов с полями скоростей \vec{v}_+, \vec{v}_- волновых колебательных смещений частиц акустической среды и волновыми акустическими давлениями p_+, p_- :

$$\Delta \varphi_{\pm} = (c_0^{(\pm)})^{-2} \partial_t^2 \varphi_{\pm}, \quad \vec{v}_{\pm} = -\text{grad } \varphi_{\pm}, \quad p_{\mp} = \rho_0^{(\pm)} \partial_t \varphi_{\pm}, \quad (2)$$

где $c_0^{(\pm)} = (\kappa^{(\pm)} \rho_0^{(\pm)})^{-2}$ – скорости объемных акустических волн в жидкостях, $\kappa^{(\pm)}$ – адиабатические модули сжимаемости для акустических сред, $\rho_0^{(\pm)}$ – плотности акустических сред в невозмущенном состоянии. В рассматриваемом случае предполагается, что из глубины полубесконечной области V_- вдоль положительного направления оси Ox_3 на поверхность $\Gamma_- = \{x_3 = -h, (x_1, x_2) \in R^2\}$ нормально падает плоская монохроматическая волна гидроакустического давления с циклической частотой ω и комплексным потенциалом $\varphi_-^{(0)} = P_0^{(-)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_f^{(-)} x_3))$, в котором $P_0^{(-)}$ – задаваемый амплитудный параметр, $k_f^{(-)}$ – волновое число. При этом в заполняющей V_- акустической среде возникает отраженная волна с потенциалом $\varphi_-^{(1)} = P_1^{(-)} \cdot \exp(-i(\omega t + k_f^{(-)} x_3))$, а в области V_+ с граничной поверхностью $\Gamma_+ = \{x_3 = h, (x_1, x_2) \in R^2\}$ генерируется прошедшая экранирующий слой V_L акустическая волна с потенциалом $\varphi_+ = P_0^{(+)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_f^{(+)} x_3))$. На поверхностях контакта слоя V_L с жидкостными полупространствами V_+ и V_- задаются условия

$$\begin{aligned} (\sigma_{33} + p_{\pm})_{x_3=\pm h} &= 0, & (\sigma_{3j})_{x_3=\pm h} &= 0 \quad (j = 1, 2), \\ (\partial_t u_3 - v_{3\pm})_{x_3=\pm h} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $v_{3\pm}$ – соответствующие компоненты векторов \vec{v}_+ , \vec{v}_- скоростей движения частиц акустических сред.

В слое V_L экранирующего элемента при рассматриваемых воздействиях формируется поле двухпарциальных упругих волн, описываемых посредством введения соответствующих потенциалов $\Phi(x_1, x_3, t)$, $\Psi(x_1, x_3, t)$ для комплексного вектора волновых упругих перемещений

$$\begin{aligned}\vec{u}(x_1, x_3, t) &= (u_1(x_1, x_3, t), u_3(x_1, x_3, t)) = \\ &= \text{grad } \Phi(x_1, x_3, t) + \text{rot } \Psi(x_1, x_3, t) \cdot e_2.\end{aligned}\quad (4)$$

Вводимые потенциалы подлежат определению из уравнений

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu)D^2\Phi(x_1, x_3, t) - \rho\partial^2/\partial t^2\Phi(x_1, x_3, t) &= 0, \\ \mu D^2\Psi(x_1, x_3, t) - \rho\partial^2/\partial t^2\Psi(x_1, x_3, t) &= 0.\end{aligned}\quad (5)$$

При указанном характере воздействий экранирующий слой V_L находится в состоянии динамической плоской деформации в плоскостях, коллинеарных Ox_1x_3 . Соответственно, в случае введения комплексных амплитудных характеристик волновых упругих перемещений $\{u_{r_p}^{(L)}(r_p, \theta_p), u_{\theta_p}^{(L)}(r_p, \theta_p)\}$ и динамических напряжений $\sigma_{\alpha\beta}^{(L)}(r_p, \theta_p)$ ($\alpha, \beta = r_p, \theta_p$) для материала слоя V_L , граничные условия на свободных от напряжений поверхностях Γ_p записываются в виде

$$(\sigma_{rr}^{(L)}(R, \theta_p))_{\Gamma_p} = 0, \quad (\sigma_{r\theta}^{(L)}(R, \theta_p))_{\Gamma_p} = 0.\quad (6)$$

В рамках разрабатываемой методики для потенциалов волнового поля в V_L , с учетом свойства периодичности упругих перемещений и напряжений вдоль Ox_1 с периодом $2l$, обеспечивающего возможность применения теории Флоке [11, 12], вводятся представления в виде суперпозиций разнотипных базисных решений в основных координатах Ox_1x_3 и в локальных координатных системах $O_p r_p \theta_p$ с подлежащими определению группами постоянных коэффициентов $A_{n\pm}$, $C_{n\pm}$, B_q , G_q :

$$\begin{aligned}\Phi &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n+}x_3) + A_{n-} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n-}x_3)) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{q=-\infty}^{\infty} B_q \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_q^{(1)}(\alpha r_p) \exp(iq\theta_p) \right] \cdot \exp(i\omega t),\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}\Psi &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n+}x_3) + C_{n-} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n-}x_3)) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_q \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_q^{(1)}(\beta r_p) \exp(iq\theta_p) \right] \cdot \exp(i\omega t),\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}\alpha &= (\rho\omega^2/(\lambda + 2\mu))^{1/2}, \quad \beta = (\rho\omega^2/\mu)^{1/2}, \quad a = (\lambda + 2\mu)/\mu, \\ \zeta_{n\pm} &= \pm(\rho\omega^2/(\lambda + 2\mu) + n^2\pi^2/l^2)^{1/2}, \\ \xi_{n\pm} &= \pm(\rho\omega^2/\mu + n^2\pi^2/l^2)^{1/2},\end{aligned}\tag{9}$$

в которых $H_q^{(1)}(z)$ - цилиндрические функции Ханкеля первого рода с индексом q и аргументом z . В окрестностях граничных поверхностей Γ_+ , Γ_- с использованием описываемых в работе [12] соотношений введенные потенциалы могут быть преобразованы к виду

$$\begin{aligned}\Phi_{\pm} &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n+}x_3) + A_{n-} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n-}x_3)) + \right. \\ &+ \sum_{q=-\infty}^{\infty} B_q(2/l)(-i)^{q+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm q\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (q\pi l^{-1})^2)^{1/2})^q \cdot \\ &\left. \exp(iq\pi l^{-1}x_1 \mp \zeta_{qp}x_3) \right] \cdot \exp(i\omega t),\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{\pm} &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n+}x_3) + C_{n-} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n-}x_3)) + \right. \\ &+ \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_q(2/l)(-i)^{q+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm q\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (q\pi l^{-1})^2)^{1/2})^q \cdot \\ &\left. \exp(iq\pi l^{-1}x_1 \mp \zeta_{qp}x_3) \right] \cdot \exp(i\omega t),\end{aligned}\tag{11}$$

где выбор знака \pm зависит от значения координатной переменной x_3 и соответствует $\text{sgn}(x_3)$, а остальные используемые обозначения совпадают с приведенными приведены в работе [12]. Граничные представления, получаемые из соотношений (9), (10) на Γ_+ и Γ_- , представляют собой ортогональные ряды по переменной x_1 . В свою очередь, представления (7), (8) могут быть записаны на контуре Γ_0 в центральной локальной координатной системе как ортогональные разложения по переменной θ_0 с использованием теорем сложения цилиндрических функций в форме, приводимой в работах [11, 12], а также с применением полученных в [13] соотношений

$$\begin{aligned}\exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n\pm}x_3) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} i^s((\zeta_{n\pm} - n\pi l^{-1})/(\zeta_{n\pm}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} \times \\ &\times J_s(((\zeta_{n\pm}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2}r) \cdot \exp(is\theta),\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}\exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n\pm}x_3) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} i^s((\xi_{n\pm} - n\pi l^{-1})/(\xi_{n\pm}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} \times \\ &\times J_s(((\xi_{n\pm}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2}r) \cdot \exp(is\theta),\end{aligned}\tag{13}$$

на основе которых преобразуемые представления (7), (8) последовательно принимают вид

$$\begin{aligned}
 \Phi = & \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+} i^q ((\varsigma_{n+} - n\pi l^{-1}) / (\varsigma_{n+}^2 - (n\pi l^{-1})^2))^{1/2} \cdot \\
 & \cdot J_q(((\varsigma_{n+}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} r_0) \cdot \exp(iq\theta_0) + \\
 & + \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n-} i^q ((\varsigma_{n-} - n\pi l^{-1}) / (\varsigma_{n-}^2 - (n\pi l^{-1})^2))^{1/2} \cdot \\
 & \cdot J_q(((\varsigma_{n-}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} r_0) \cdot \exp(iq\theta_0) + \\
 & + \sum_{q=-\infty}^{\infty} B_q \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_q^{(1)}(\alpha r_p) \exp(iq\theta_p) \cdot \exp(i\omega t),
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi = & \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+} i^q ((\xi_{n+} - n\pi l^{-1}) / (\xi_{n+}^2 - (n\pi l^{-1})^2))^{1/2} \cdot \\
 & \cdot J_q(((\xi_{n+}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} r_0) \cdot \exp(iq\theta_0) + \\
 & + \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n-} i^q ((\xi_{n-} - n\pi l^{-1}) / (\xi_{n-}^2 - (n\pi l^{-1})^2))^{1/2} \cdot \\
 & \cdot J_q(((\xi_{n-}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} r_0) \cdot \exp(iq\theta_0) + \\
 & + \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_q \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_q^{(1)}(\beta r_p) \exp(iq\theta_p) \cdot \exp(i\omega t),
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi = & \sum_{q=-\infty}^{\infty} [\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n+} i^q ((\varsigma_{n+} - n\pi l^{-1}) / (\varsigma_{n+}^2 - (n\pi l^{-1})^2))^{1/2} \cdot \\
 & \cdot J_q(((\varsigma_{n+}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} r_0) + \\
 & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n-} i^q ((\varsigma_{n-} - n\pi l^{-1}) / (\varsigma_{n-}^2 - (n\pi l^{-1})^2))^{1/2} \cdot \\
 & \cdot J_q(((\varsigma_{n-}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} r_0) + \\
 & + B_q H_q^{(1)}(\alpha r_0) + S_q J_q(\alpha r_0)] \exp(iq\theta_0) \cdot \exp(i\omega t) = \\
 = & \sum_{q=-\infty}^{\infty} [\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n+} \chi_{nq} + J_q(\gamma_{n+} r_0) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n-} \chi_{nq} - J_q(\gamma_{n-} r_0) + \\
 & + B_q H_q^{(1)}(\alpha r_0) + S_q J_q(\alpha r_0)] \exp(iq\theta_0) \cdot \exp(i\omega t),
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi = & \sum_{q=-\infty}^{\infty} [\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n+} i^q ((\xi_{n+} - n\pi l^{-1}) / (\xi_{n+}^2 - (n\pi l^{-1})^2))^{1/2} \cdot \\
 & \cdot J_q(((\xi_{n+}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} r_0) +
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n-} i^q ((\xi_{n-} - n\pi l^{-1}) / (\xi_{n-}^2 - (n\pi l^{-1})^2))^{1/2} \cdot \\
& \quad \cdot J_q((\xi_{n-}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} r_0) + \\
& \quad + G_q H_q^{(1)}(\beta r_0) + P_q J_q(\beta r_0)] \exp(iq\theta_0) \cdot \exp(i\omega t) = \\
= & \sum_{q=-\infty}^{\infty} [\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n+} \eta_{nq+} J_q(\delta_{n+} r_0) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n-} \eta_{nq-} J_q(\delta_{n-} r_0) + \\
& \quad + G_q H_q^{(1)}(\beta r_0) + P_q J_q(\beta r_0)] \exp(iq\theta_0) \cdot \exp(i\omega t), \\
S_q = & \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_p(H_{q-p}^{(1)}(2\alpha kl) + H_{p-q}^{(1)}(2\alpha kl)), \\
P_q = & \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} G_p(H_{q-p}^{(1)}(2\phi kl) + H_{p-q}^{(1)}(2\beta kl)).
\end{aligned}$$

Заключительный этап реализации представляемой численно-аналитической методики заключается в получении и использовании найденных в виде разложений в ортогональные ряды контурных представлений для характеристик волновых деформационных полей в экранирующем слое на центральной цилиндрической поверхности:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} = & (-2\mu) \times \\
& \times \sum_{q=-\infty}^{\infty} [[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+} \chi_{nq+} (a\gamma_{n+}^2 J_q(\gamma_{n+} r_0) + \\
& + \gamma_{n+} (-J_{q+1}(\gamma_{n+} r_0) + q(\gamma_{n+} r_0)^{-1} J_q(\gamma_{n+} r_0)) - (q/r_0)^2 J_q(\gamma_{n+} r_0)) + \\
& + A_{n-} \chi_{nq-} (a\gamma_{n-}^2 J_q(\gamma_{n-} r_0) + \\
& + \gamma_{n-} (-J_{q+1}(\gamma_{n-} r_0) + q(\gamma_{n-} r_0)^{-1} J_q(\gamma_{n-} r_0)) - (q/r_0)^2 J_q(\gamma_{n-} r_0)) - \\
& - C_{n+} \eta_{nq+} iqr_0^{-1} (\delta_{n+} (-J_{q+1}(\delta_{n+} r_0) + \\
& + q(\delta_{n+} r_0)^{-1} J_q(\delta_{n+} r_0)) + r_0^{-1} J_q(\delta_{n+} r_0)) - \\
& - C_{n-} \eta_{nq-} iqr_0^{-1} (\delta_{n-} (-J_{q+1}(\delta_{n-} r_0) + \\
& + q(\delta_{n-} r_0)^{-1} J_q(\delta_{n-} r_0)) + r_0^{-1} J_q(\delta_{n-} r_0)))] + \\
& + B_q(a\alpha^2 H_q^{(1)}(\alpha r_0) + \alpha(-H_{q+1}^{(1)}(\alpha r_0) + \\
& + q(\alpha r_0)^{-1} H_q^{(1)}(\alpha r_0)) - (q/r_0)^2 H_q^{(1)}(\alpha r_0)) + \\
& + S_q(a\alpha^2 J_q(\alpha r_0) + \alpha(-J_{q+1}(\alpha r_0) + \\
& + q(\alpha r_0)^{-1} J_q(\alpha r_0)) - (q/r_0)^2 J_q(\alpha r_0)) + \\
& - G_q iqr_0^{-1} (\beta(-H_{q+1}^{(1)}(\beta r_0) + q(\beta r_0)^{-1} H_q^{(1)}(\beta r_0)) + r_0^{-1} H_q^{(1)}(\beta r_0)) - \\
& - P_q iqr_0^{-1} (\beta(-J_{q+1}(\beta r_0) + q(\beta r_0)^{-1} J_q(\beta r_0)) + \\
& + r_0^{-1} J_q(\beta r_0))] \exp(iq\theta_0) \cdot \exp(i\omega t),
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r\theta} = & (2\mu) \times \\
 & \times \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+} \eta_{nq+} ((\delta_{n+}^2/2) J_q(\delta_{n+} r_0) + \right. \\
 & + \delta_{n+} (-J_{q+1}(\delta_{n+} r_0) + q(\delta_{n+} r_0)^{-1} J_q(\delta_{n+} r_0)) - (q/r_0)^2 J_q(\delta_{n+} r_0)) + \\
 & \quad + C_{n-} \eta_{nq-} ((\delta_{n-}^2/2) J_q(\delta_{n-} r_0) + \\
 & + \delta_{n-} (-J_{q+1}(\delta_{n-} r_0) + q(\delta_{n-} r_0)^{-1} J_q(\delta_{n-} r_0)) - (q/r_0)^2 J_q(\delta_{n-} r_0)) - \\
 & \quad - A_{n+} \chi_{nq+} i q r_0^{-1} (\gamma_{n+} (-J_{q+1}(\gamma_{n+} r_0) + \\
 & \quad + q(\gamma_{n+} r_0)^{-1} J_q(\gamma_{n+} r_0)) + r_0^{-1} J_q(\gamma_{n+} r_0)) - \\
 & \quad - A_{n-} \chi_{nq-} i q r_0^{-1} (\gamma_{n-} (-J_{q+1}(\gamma_{n-} r_0) + \\
 & \quad + q(\gamma_{n-} r_0)^{-1} J_q(\gamma_{n-} r_0)) + r_0^{-1} J_q(\gamma_{n-} r_0)) \left. \right] + \\
 & \quad + G_q((\beta^2/2) H_q^{(1)}(\beta r_0) + \beta (-H_{q+1}^{(1)}(\beta r_0) + \\
 & \quad + q(\beta r_0)^{-1} H_q^{(1)}(\beta r_0)) - (q/r_0)^2 H_q^{(1)}(\beta r_0)) + \\
 & \quad + P_q((\beta^2/2) J_q(\beta r_0) + \beta (-J_{q+1}(\beta r_0) + \\
 & \quad + q(\beta r_0)^{-1} J_q(\beta r_0)) - (q/r_0)^2 J_q(\beta r_0)) + \\
 & \quad - B_q i q r_0^{-1} (\alpha (-H_{q+1}^{(1)}(\alpha r_0) + q(\alpha r_0)^{-1} H_q^{(1)}(\alpha r_0)) + r_0^{-1} H_q^{(1)}(\alpha r_0)) - \\
 & \quad - P_q i q r_0^{-1} (\alpha (-J_{q+1}(\alpha r_0) + q(\alpha r_0)^{-1} J_q(\alpha r_0)) + \\
 & \quad + r_0^{-1} J_q(\alpha r_0)) \left. \right] \exp(i q \theta_0) \cdot \exp(i \omega t). \tag{19}
 \end{aligned}$$

Соответственно, для точек на плоских гранях Γ_+ , Γ_- экранирующего слоя записываются представления для характеристик напряженного состояния:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{31}^{(\pm)} = & 2\mu \partial_1 \partial_3 \Phi_{\pm} + \mu (\partial_1^2 - \partial_3^2) \Psi_{\pm} = \\
 = & [2\mu \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+} i n \pi l^{-1} \zeta_{n+} \cdot \exp(i n \pi l^{-1} x_1 + \zeta_{n+} x_3) + \right. \\
 & \quad + A_{n-} i n \pi l^{-1} \zeta_{n-} \cdot \exp(i n \pi l^{-1} x_1 + \zeta_{n-} x_3)) + \\
 & \quad \left. + \sum_{q=-\infty}^{\infty} B_q (2/l) (-i)^{q+1} \times \right. \\
 & \quad \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm q \pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (q \pi l^{-1})^2)^{1/2})^q (i q \pi l^{-1}) (\mp \zeta_{qp}) \cdot \\
 & \quad \left. \cdot \exp(i q \pi l^{-1} x_1 \mp \zeta_{qp} x_3) \right] + \\
 & + \mu \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+} ((i n \pi l^{-1})^2 - (\zeta_{n+})^2) \exp(i n \pi l^{-1} x_1 + \xi_{n+} x_3) + \right. \\
 & \quad \left. + C_{n-} ((i n \pi l^{-1})^2 - (\zeta_{n-})^2) \exp(i n \pi l^{-1} x_1 + \xi_{n-} x_3) \right] +
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_q(2/l)(-i)^{q+1} \times \\
 & \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm q\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (q\pi l^{-1})^2)^{1/2})^q \cdot ((iq\pi l^{-1})^2 - (\zeta_{qp})^2) \cdot \\
 & \quad \cdot \exp(iq\pi l^{-1}x_1 \mp \zeta_{qp}x_3)] \cdot \exp(i\omega t), \\
 & \sigma_{33}^{(\pm)} = (\lambda \partial_1^2 + (\lambda + 2\mu) \partial_3^2) \Phi_{\pm} + 2\mu \partial_1 \partial_3 \Psi_{\pm} = \\
 & = [\sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+} (\lambda (in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu) (\zeta_{n+})^2) \cdot \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n+}x_3) + \\
 & \quad + A_{n-} (\lambda (in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu) (\zeta_{n-})^2) \cdot \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n-}x_3)) + \\
 & \quad + \sum_{q=-\infty}^{\infty} B_q(2/l)(-i)^{q+1} \times \\
 & \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm q\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (q\pi l^{-1})^2)^{1/2})^q (\lambda (iq\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu) (\mp \zeta_{qp})^2) \cdot \\
 & \quad \cdot \exp(iq\pi l^{-1}x_1 \mp \zeta_{qp}x_3)] + \tag{21} \\
 & \quad + 2\mu \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+} (in\pi l^{-1}) (\zeta_{n+}) \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n+}x_3) + \\
 & \quad + C_{n-} (in\pi l^{-1}) (\zeta_{n-}) \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n-}x_3)) + \\
 & \quad + 2\mu \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_q(2/l)(-i)^{q+1} \times \\
 & \quad \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm q\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (q\pi l^{-1})^2)^{1/2})^q \cdot (iq\pi l^{-1}) (\mp \zeta_{qp}) \\
 & \quad \cdot \exp(iq\pi l^{-1}x_1 \mp \zeta_{qp}x_3)] \cdot \exp(i\omega t),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \partial_t u_3 = \partial_t (\partial_3 \Phi_{\pm} + \partial_1 \Psi_{\pm}) = \\
 & [\sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+} \zeta_{n+} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n+}x_3) + A_{n-} \zeta_{n-} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n-}x_3)) + \\
 & + \sum_{q=-\infty}^{\infty} B_q(2/l)(-i)^{q+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm q\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (q\pi l^{-1})^2)^{1/2})^q \cdot (\mp \zeta_{qp}) \cdot \\
 & \quad \cdot \exp(iq\pi l^{-1}x_1 \mp \zeta_{qp}x_3) + \\
 & \quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+} (in\pi l^{-1}) \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n+}x_3) + \\
 & \quad + C_{n-} (in\pi l^{-1}) \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n-}x_3)) + \tag{22}
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_q(2/l)(-i)^{q+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm q\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (q\pi l^{-1})^2)^{1/2})^q (iq\pi l^{-1}) \cdot \exp(iq\pi l^{-1}x_1 \mp \zeta_{qp}x_3) \cdot \exp(i\omega t),$$

а также для характеристик поля гидроакустических волн

$$\begin{aligned} v_{3-} &= (ik_f^{(-)})(-P_0^{(-)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_f^{(-)}x_3)) + P_1^{(-)} \cdot \exp(-i(\omega t + k_f^{(-)}x_3))), \\ v_{3+} &= (-ik_f^{(+)})P_0^{(+)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_f^{(+)}x_3)), \\ p_- &= \rho_0^{(-)} \partial_t \varphi_- = \\ &= (-i\omega \rho_0^{(-)}) \cdot (P_0^{(-)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_f^{(-)}x_3)) + P_1^{(-)} \cdot \exp(-i(\omega t + k_f^{(-)}x_3))), \\ p_+ &= \rho_0^{(+)} \partial_t \varphi_+ = P_0^{(+)} \rho_0^{(+)} (-i\omega) \cdot \exp(-i(\omega t - k_f^{(+)}x_3)). \end{aligned} \quad (23)$$

При этом, ввиду учтенного свойства периодичности, из серии краевых условий на цилиндрических поверхностях рассматриваются только условия для центральной контурной поверхности Γ_0 .

Свойства ортогональности контурных представлений позволяют эффективно трансформировать функциональные краевые условия в бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов $A_{n\pm}$, $C_{n\pm}$, B_q , G_q , $P_1^{(-)}$, $P_0^{(+)}$ в представлениях характеристик волновых полей, имеющую вид:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+} \chi_{nq+} (a\gamma_{n+}^2 J_q(\gamma_{n+}R) + \gamma_{n+}(-J_{q+1}(\gamma_{n+}R) + \\ &\quad + q(\gamma_{n+}R)^{-1} J_q(\gamma_{n+}R)) - (q/R)^2 J_q(\gamma_{n+}R)) + \\ &\quad + A_{n-} \chi_{nq-} (a\gamma_{n-}^2 J_q(\gamma_{n-}R) + \gamma_{n-}(-J_{q+1}(\gamma_{n-}R) + \\ &\quad + q(\gamma_{n-}R)^{-1} J_q(\gamma_{n-}R)) - (q/R)^2 J_q(\gamma_{n-}R)) - \\ &\quad - C_{n+} \eta_{mq+} i q R^{-1} (\delta_{n+}(-J_{q+1}(\delta_{n+}R) + \\ &\quad + q(\delta_{n+}R)^{-1} J_q(\delta_{n+}R)) + r_0^{-1} J_q(\delta_{n+}R)) - \\ &\quad - C_{n-} \eta_{mq-} i q R^{-1} (\delta_{n-}(-J_{q+1}(\delta_{n-}R) + \\ &\quad + q(\delta_{n-}R)^{-1} J_q(\delta_{n-}R)) + R^{-1} J_q(\delta_{n-}R)) + \\ &\quad + B_q (a\alpha^2 H_q^{(1)}(\alpha R) + \alpha(-H_{q+1}^{(1)}(\alpha R) + q(\alpha R)^{-1} H_q^{(1)}(\alpha R)) - (q/R)^2 H_q^{(1)}(\alpha R)) + \\ &\quad + S_q (a\alpha^2 J_q(\alpha R) + \alpha(-J_{q+1}(\alpha R) + q(\alpha R)^{-1} J_q(\alpha R)) - (q/R)^2 J_q(\alpha R)) + \\ &\quad - G_q i q R^{-1} (\beta(-H_{q+1}^{(1)}(\beta R) + q(\beta R)^{-1} H_q^{(1)}(\beta R)) + R^{-1} H_q^{(1)}(\beta R)) - \\ &\quad - P_q i q R^{-1} (\beta(-J_{q+1}(\beta R) + q(\beta R)^{-1} J_q(\beta R)) + r_0^{-1} J_q(\beta R)) = 0 \\ &\quad (q = -\infty, \infty); \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+} \eta_{nq+} ((\delta_{n+}^2/2)J_q(\delta_{n+}R) + \delta_{n+}(-J_{q+1}(\delta_{n+}R) + \\
& \quad + q(\delta_{n+}R)^{-1}J_q(\delta_{n+}R)) - (q/R)^2J_q(\delta_{n+}R)) + \\
& \quad + C_{n-} \eta_{nq-} ((\delta_{n-}^2/2)J_q(\delta_{n-}R) + \delta_{n-}(-J_{q+1}(\delta_{n-}R) + \\
& \quad + q(\delta_{n-}R)^{-1}J_q(\delta_{n-}R)) - (q/R)^2J_q(\delta_{n-}R)) - \\
& - A_{n+} \chi_{nq+} i q R^{-1} (\gamma_{n+} (-J_{q+1}(\gamma_{n+}R) + q(\gamma_{n+}R)^{-1}J_q(\gamma_{n+}R)) + R^{-1}J_q(\gamma_{n+}R)) - \\
& - A_{n-} \chi_{nq-} i q R^{-1} (\gamma_{n-} (-J_{q+1}(\gamma_{n-}R) + q(\gamma_{n-}R)^{-1}J_q(\gamma_{n-}R)) + R^{-1}J_q(\gamma_{n-}R)) + \\
& + G_q((\beta^2/2)H_q^{(1)}(\beta R) + \beta(-H_{q+1}^{(1)}(\beta R) + q(\beta R)^{-1}H_q^{(1)}(\beta R)) - (q/R)^2H_q^{(1)}(\beta R)) + \\
& \quad + P_q((\beta^2/2)J_q(\beta R) + \beta(-J_{q+1}(\beta R) + q(\beta R)^{-1}J_q(\beta R)) - (q/R)^2J_q(\beta R)) + \\
& \quad - B_q i q R^{-1} (\alpha(-H_{q+1}^{(1)}(\alpha R) + q(\alpha R)^{-1}H_q^{(1)}(\alpha R)) + R^{-1}H_q^{(1)}(\alpha R)) - \\
& \quad - P_q i q R^{-1} (\alpha(-J_{q+1}(\alpha R) + q(\alpha R)^{-1}J_q(\alpha R)) + R^{-1}J_q(\alpha R)) = 0 \\
& \quad (q = -\infty, \infty);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2[A_{n+} i n \pi l^{-1} \zeta_{n+} \cdot \exp(\zeta_{n+} h) + A_{n-} i n \pi l^{-1} \zeta_{n-} \cdot \exp(\zeta_{n-} h) + \\
& \quad + B_n(2/l)(-i)^{n+1} \times \\
& \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm n \pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n \pi l^{-1})^2)^{1/2})^n (i n \pi l^{-1}) (\mp \zeta_{np}) \cdot \exp(-\zeta_{np} h)] + \\
& + (C_{n+} ((i n \pi l^{-1})^2 - (\zeta_{n+})^2) \exp(\xi_{n+} h) + C_{n-} ((i n \pi l^{-1})^2 - (\zeta_{n-})^2) \exp(\xi_{n-} h)) + \\
& \quad + G_n(2/l)(-i)^{n+1} \times \\
& \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm n \pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n \pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \cdot ((i n \pi l^{-1})^2 - (\zeta_{np})^2) \exp(-\zeta_{np} h) = 0 \\
& \quad (n = -\infty, \infty);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2[A_{n+} i n \pi l^{-1} \zeta_{n+} \cdot \exp(-\zeta_{n+} h) + A_{n-} i n \pi l^{-1} \zeta_{n-} \cdot \exp(-\zeta_{n-} h) + \\
& \quad + B_n(2/l)(-i)^{n+1} \cdot \\
& \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm n \pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n \pi l^{-1})^2)^{1/2})^n (i n \pi l^{-1}) (\mp \zeta_{np}) \cdot \exp(\zeta_{np} h)] + \\
& + (C_{n+} ((i n \pi l^{-1})^2 - (\zeta_{n+})^2) \exp(-\xi_{n+} h) + C_{n-} ((i n \pi l^{-1})^2 - (\zeta_{n-})^2) \exp(-\xi_{n-} h)) + \\
& \quad + G_n(2/l)(-i)^{n+1} \cdot \\
& \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm n \pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n \pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \cdot ((i n \pi l^{-1})^2 - (\zeta_{np})^2) \exp(\zeta_{np} h) = 0 \\
& \quad (n = -\infty, \infty);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{n+}(\lambda(in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{n+})^2) \cdot \exp(-\zeta_{n+}h) + \\
 & + A_{n-}(\lambda(in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{n-})^2) \cdot \exp(-\zeta_{n-}h) + \\
 & + B_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \cdot \\
 & \cdot (\lambda(in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{np})^2) \cdot \exp(-\zeta_{np}h) + \\
 & + 2\mu(C_{n+}(in\pi l^{-1})(\zeta_{n+}) \exp(-\xi_{n+}h) + C_{n-}(in\pi l^{-1})(\zeta_{n-}) \exp(-\xi_{n-}h)) + \\
 & + 2\mu G_n(2/l)(-i)^{n+1} \times \\
 & \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \cdot (in\pi l^{-1})(\zeta_{np}) \exp(-\zeta_{qp}h) = \\
 & = \nu_{n0}(-i\omega\rho_0^{(-)}) \cdot P_0^{(-)} \cdot \exp(-ik_f^{(-)}h) + P_1^{(-)} \cdot \exp(ik_f^{(-)}h), \\
 & (\nu_{00} = 1; \nu_{n0} = 0, n \neq 0), (n = -\infty, \infty);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{n+}(\lambda(in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{n+})^2) \cdot \exp(\zeta_{n+}h) + \\
 & + A_{n-}(\lambda(in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{n-})^2) \cdot \exp(\zeta_{n-}h) + \\
 & + B_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \cdot \\
 & \cdot (\lambda(in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{np})^2) \cdot \exp(-\zeta_{np}h) + \\
 & + 2\mu(C_{n+}(in\pi l^{-1})(\zeta_{n+}) \exp(\xi_{n+}h) + C_{n-}(in\pi l^{-1})(\zeta_{n-}) \exp(\xi_{n-}h)) + \\
 & + 2\mu G_n(2/l)(-i)^{n+1} \times \\
 & \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \cdot (in\pi l^{-1})(-\zeta_{np}) \exp(-\zeta_{qp}h) = \\
 & = \nu_{n0}(-i\omega\rho_0^{(+)}) \cdot P_0^{(+)} \exp(ik_f^{(+)}h), \\
 & (\nu_{00} = 1; \nu_{n0} = 0, n \neq 0), (n = -\infty, \infty);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{n+}\zeta_{n+} \exp(-\zeta_{n+}h) + A_{n-}\zeta_{n-} \exp(-\zeta_{n-}h) + \\
 & + B_n(2/l)(-i)^{n+1} \times \\
 & \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \cdot (\zeta_{np}) \exp(-\zeta_{np}x_3) + \\
 & + C_{n+}(in\pi l^{-1}) \exp(-\xi_{n+}h) + C_{n-}(in\pi l^{-1}) \exp(-\xi_{n-}h) + \\
 & + G_n(2/l)(-i)^{n+1} \times \\
 & \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n (in\pi l^{-1}) \cdot \exp(-\zeta_{qp}h) =
 \end{aligned}$$

$$= \nu_{n0}(ik_f^{(-)})(-P_0^{(-)} \cdot \exp(-ik_f^{(-)}h) + P_1^{(-)} \cdot \exp(ik_f^{(-)}h)) \\ (n = -\infty, \infty);$$

$$A_{n+}\zeta_{n+} \exp(\zeta_{n+}h) + A_{n-}\zeta_{n-} \exp(\zeta_{n-}h) + \\ + B_n(2/l)(-i)^{n+1} \times \\ \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \cdot (-\zeta_{np}) \exp(-\zeta_{np}x_3) + \\ + C_{n+}(in\pi l^{-1}) \exp(\xi_{n+}h) + C_{n-}(in\pi l^{-1}) \exp(\xi_{n-}h) + \\ + G_n(2/l)(-i)^{n+1} \times \\ \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1})/(\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n (in\pi l^{-1}) \cdot \exp(-\zeta_{qp}h) = \\ = \nu_{n0}(-ik_f^{(+)})P_0^{(+)} \cdot \exp(ik_f^{(+)}h) \\ (n = -\infty, \infty).$$

Полученные системы при численной реализации описываемой методики подлежат редукции, порядок которой определяется на основе контроля качества удовлетворения граничным условиям.

Выводы. Представлена методика теоретического численно-аналитического анализа показателей эффективности функционирования плоских элементов систем гидроакустического экранирования в виде многосвязного изотропного деформируемого слоя с периодическим рядом коллинеарных внутренних туннельных цилиндрических полостей одинакового кругового сечения. Анализ рассматриваемой модели элементов экранирования реализуется с использованием комплекса приемов получения ортогональных контурных представлений в рядах для характеристик волнового деформирования слоя многосвязного поперечного сечения и сведен к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов вводимых рядов по базисным частным решениям волновых уравнений. Полученные системы подлежат редукции при численной реализации представленной методики.

1. *Кормилицын Ю.Н.* Устройство подводных лодок: в 2 т. Т. 1. / Ю.Н. Кормилицын, О.А. Хализев. – СПб: «Элмор», 2008. – 336 с.
2. *Кормилицын Ю.Н.* Устройство подводных лодок: в 2 т. Т. 2. / Ю.Н. Кормилицын, О.А. Хализев. – СПб: «Элмор», 2009. – 280 с.
3. *Корякин Ю.А.* Корабельная гидроакустическая техника: состояние и актуальные проблемы / Ю.А. Корякин, С.А. Смирнов, Г.В. Яковлев. – СПб: Наука, 2004. – 410 с.
4. *Свердлин Г.М.* Физические основы прикладной гидроакустики. Гидроакустические преобразователи и антенны / Г.М. Свердлин, Ю.П. Огурцов. – СПб: СПб ГЭТУ «ЛЭТИ», 2009. – 165 с.
5. *Урик Р.Дж.* Основы гидроакустики / Р.Дж. Урик. – Л.: Судостроение, 1978. – 448 с.

6. Болнокин В.Е. Исследование систем гидроакустического экранирования для подводных транспортных средств / В.Е. Болнокин, В.И. Сторожев, Зыонг Минь Хай. – Воронеж: Научная книга, 2016. – 196 с.
7. Глазанов В.Е. Некоторые задачи распространения звука в упругих средах. Курс лекций / В.Е. Глазанов. – Таганрог: Таганрогский радиотехнический институт, 1970. – 123 с.
8. Глазанов В.Е. Экранирование гидроакустических антенн / В.Е. Глазанов. – Л.: Судостроение, 1986. – 148 с.
9. Глазанов В.Е. Экранирование гидроакустических преобразователей / В.Е. Глазанов, А.В. Михайлов. – СПб.: Элмор, 2004. – 246 с.
10. Глазанов В.Е. Акустические экраны для подводных преобразователей и антенн. Теория и расчет / В.Е. Глазанов. – СПб.: СПб ГЭТУ «ЛЭТИ», 2013. – 175 с.
11. Гузь А.Н. Дифракция упругих волн в многосвязных телах / А.Н. Гузь, В.Т. Головчан. – Киев: Наукова думка, 1972. – 255 с.
12. Головчан В.Т. Распространение упругих волн сдвига в упругом слое, перфорированном рядом цилиндрических полостей / В.Т. Головчан, А.Н. Гузь // Прикладная механика. – 1976. – Т. 12, № 9. – С. 18–33.
13. Космодамианский А.С. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред / А.С. Космодамианский, В.И. Сторожев. – К.: Наукова думка, 1985. – 176 с.

V.E. Bolnokin, M.N. Pacheva, V.I. Storozhev, Duong Minh Hai, Tran Ba Le Hoang
Method of analysis of the model of a plane hydroacoustic screen with a periodic system of the internal tunnel cylindrical cavity.

The development of a theoretical numerical-analytical technique for analyzing the model of transformation of elastic waves during their propagation through the thickness of a contacted with acoustic media deformable layer containing a periodic series of internal extended tunneling cylindrical cavities of the same type parallel to flat faces of layer is presented. The technique is based on introducing representations of the wave field potentials for a multiply connected layer in the form of superposition of different types of solutions of wave equations in the main coordinates and in local cylindrical coordinate systems with poles at the centers of the cross sections of the tunnel cavities. The Floquet theory, the theorem of addition of cylindrical functions, the Jacobi expansion, as well as the method of orthogonal series is used. The problem is reduced to an infinite system of linear algebraic equations with respect to constant coefficients in series containing basic particular solutions of wave equations.

Keywords: flat hydroacoustic screen, perforated elastic layer, internal tunnel cavities external acoustic medium, wave mechanics boundary value problem, numerical-analytical analysis technique, equations for wave potentials, superposition of series on partial solutions, Floquet theory, addition theorems for cylindrical functions, orthogonal series method, infinite systems of algebraic equations.

Ин-т машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», Донецк
Центральный научно-исследовательский Институт Военно-морских сил Вьетнама, Хайфон
ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ» МОН РФ, Москва
stvistvi@mail.ru

Получено 06.02.18

УДК 539.3:534.1

©2018. И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко

НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ФУНКЦИОНАЛЬНО ГРАДИЕНТНЫХ СПЛОШНЫХ ЦИЛИНДРАХ

Волновое движение описывается на основе полной системы уравнений линейной динамической теории упругости. Модуль сдвига и плотность изотропного материала цилиндра задаются экспоненциально-степенной функцией от радиальной координаты. Базисные решения системы дифференциальных уравнений модели строятся в матричной форме в виде разложений радиальных составляющих решения в равномерно и абсолютно сходящиеся обобщенные степенные ряды по радиальной координате. Представлены также дисперсионные соотношения, описывающие спектры гармоник нормальных волн для случаев жестко закрепленной и свободной граничной поверхности. Изучены эффекты влияния параметров радиальной неоднородности на топологию дисперсионных спектров, распределение фазовых и групповых скоростей распространяющихся нормальных волн.

Ключевые слова: функционально-градиентные материалы, изотропный волновод, нормальные волны, базисные решения, дисперсионные соотношения, фазовая скорость, групповая скорость.

Введение. Упругие тела цилиндрической геометрии представляют собой важнейший по фундаментальной и прикладной значимости класс объектов математического моделирования в волновой механике деформируемых сред. В классическом случае однородного изотропного материала уравнения, определяющие модели указанного класса задач, разрешимы через цилиндрические функции, что становится невозможным при переходе к рассмотрению нового поколения функционально-градиентных материалов. Для построения общих аналитических решений системы дифференциальных уравнений указанных моделей в последнем случае оказался плодотворным подход, основанный на задании специального вида функционального закона радиального изменения физико-механических характеристик материала волновода. Таким способом построены в аналитическом виде базисные решения модели и исследованы эффекты влияния фактора радиальной неоднородности материала на топологию дисперсионных спектров, фазовых и групповых скоростей распространяющихся осесимметричных нормальных волн в трансверсально-изотропных цилиндрах [1,2], а также неосесимметричных нормальных волн в цилиндрически ортотропных цилиндрах [3] с экспоненциальным законом радиальной неоднородности материала волновода. В данном исследовании указанная методика распространена на более общий случай экспоненциально-степенного закона радиальной неоднородности изотропного материала волновода.

1. Постановка задачи. Рассматривается цилиндрический волновод, занимающий в нормированной параметром R_* безразмерной цилиндрической системе координат $Or\theta z$ область V

$$V = \{r \in [0, 1], \theta \in [-\pi, \pi], z \in (-\infty, \infty)\}$$

с граничной поверхностью Γ

$$\Gamma = \{r = 1, \theta \in [-\pi, \pi], z \in (-\infty, \infty)\},$$

имеющий в поперечном сечении форму круга. Полагается, что изотропный материал волновода является функционально-неоднородным в радиальных направлениях по таким своим физико-механическим свойствам ($\nu = const$)

$$\rho(r) = \tilde{\rho} \exp(f_{\lambda,q}(r)), \quad G(r) = \tilde{G} \exp(f_{\lambda,q}(r)), \quad f_{\lambda,q}(r) = \lambda r^q. \quad (1)$$

Здесь $\rho(r)$ и $G(r)$ – соответственно плотность и нормированный параметром C_* модуль сдвига неоднородного материала; $\tilde{\rho}$ и \tilde{G} соответственно плотность и нормированный параметром C_* модуль сдвига однородного материала. Параметры λ ($\lambda \in \mathbb{R}$) и q ($q \in \{0\} \cup \mathbb{N}$) в представлениях (1) характеризуют соответственно относительный максимальный уровень и форму локализации в теле волновода радиальной неоднородности материала.

Пространственная линейная математическая модель динамического напряженно-деформированного состояния упругих тел с усложненными физико-механическими свойствами в системе координат $Or\theta z$ включает систему дифференциальных уравнений движения

$$\begin{aligned} \partial_r \sigma_{rr} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{r\theta} + \partial_z \sigma_{rz} + r^{-1} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) - (\rho R_*^2 / C_*) \partial_t^2 u_r &= 0, \\ \partial_r \sigma_{r\theta} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + \partial_z \sigma_{\theta z} + 2r^{-1} \sigma_{r\theta} - (\rho R_*^2 / C_*) \partial_t^2 u_\theta &= 0, \\ \partial_r \sigma_{rz} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta z} + \partial_z \sigma_{zz} + r^{-1} \sigma_{rz} - (\rho R_*^2 / C_*) \partial_t^2 u_z &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

определяющие соотношения обобщенного линейного закона Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (2G / (1 - 2\nu)) ((1 - \nu) \varepsilon_{rr} + \nu (\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz})), \\ \sigma_{\theta\theta} &= (2G / (1 - 2\nu)) ((1 - \nu) \varepsilon_{\theta\theta} + \nu (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz})), \\ \sigma_{zz} &= (2G / (1 - 2\nu)) ((1 - \nu) \varepsilon_{zz} + \nu (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta})), \\ \sigma_{\theta z} &= G \varepsilon_{\theta z}, \quad \sigma_{rz} = G \varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{r\theta} = G \varepsilon_{r\theta}; \end{aligned} \quad (3)$$

уравнения связи между компонентами тензора малых деформаций ε_{nm} ($n, m = r, \theta, z$) и отнесенными к нормирующему параметру R_* компонентами безразмерного вектора динамических упругих волновых перемещений u_n ($n = r, \theta, z$)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \partial_r u_r, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = r^{-1} u_r + r^{-1} \partial_\theta u_\theta, \quad \varepsilon_{zz} = \partial_z u_z, \\ \varepsilon_{\theta z} &= \partial_z u_\theta + r^{-1} \partial_\theta u_z, \quad \varepsilon_{rz} = \partial_z u_r + \partial_r u_z, \quad \varepsilon_{r\theta} = r^{-1} \partial_\theta u_r + (\partial_r - r^{-1}) u_\theta. \end{aligned} \quad (4)$$

Во введенных представлениях σ_{nm} ($n, m = r, \theta, z$) – отнесенные к нормирующему параметру C_* безразмерные характеристики напряженно-деформированного

состояния на основных площадках цилиндрической координатной системы; t – время; $\partial_s = \partial/\partial s$ ($s = r, \theta, z, t$).

Представленная модель включает также однородные граничные условия свободной

$$\sigma_{rs}|_{(r,\theta,z)\in\Gamma} = 0 \quad (s = r, \theta, z) \quad (5)$$

либо жестко закрепленной

$$u_s|_{(r,\theta,z)\in\Gamma} = 0 \quad (s = r, \theta, z) \quad (6)$$

граничной поверхности.

2. Получение рекуррентных соотношений. В рамках представленной модели для исследуемых нормальных волн вдоль оси Oz в радиально неоднородных протяженных цилиндрах геометрии V с круговой частотой ω , нормированным параметром R_* продольным волновым числом \tilde{k} ($\tilde{k} \in \mathbb{C}$) и окружным волновым числом τ ($\tau \in \mathbb{C}$) в матричной форме вводятся следующие комплексные представления

$$\mathbf{U}(r, \theta, z, t) = \exp\left(-\delta f_{\lambda,q}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z\right) \mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) \quad (7)$$

Здесь δ ($\delta \in \mathbb{R}$) – произвольный параметр; $f_{\lambda,p}(r)$ – заданный соотношениями (1) функциональный закон радиальной неоднородности материала; $\mathbf{U}(r, \theta, z, t)$ – вектор-столбец с безразмерными компонентами вектора упругих перемещений

$$\mathbf{U}(r, \theta, z, t) = [u_r(r, \theta, z, t), u_\theta(r, \theta, z, t), u_z(r, \theta, z, t)]^T; \quad (8)$$

$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r)$ – вектор-столбец с элементами

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) = [\tilde{u}_r^{(\tau)}(r), \tilde{u}_\theta^{(\tau)}(r), \tilde{u}_z^{(\tau)}(r)]^T; \quad (9)$$

$\mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta)$ – диагональная матрица размерности 3×3 , отличные от нуля элементы которой равны

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta)\right]_{1,1} &= \cos(\tau\theta + \beta), & \left[\mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta)\right]_{2,2} &= \sin(\tau\theta + \beta), \\ \left[\mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta)\right]_{3,3} &= i \cos(\tau\theta + \beta) \quad (\beta \in \{0, \pi/2\}). \end{aligned} \quad (10)$$

Параметр β в соотношениях (10) задает тип симметрии волновых движений относительно плоскости $\theta = 0$ с выделением при $\beta = 0$ условно симметричных волн со свойствами

$$\begin{aligned} u_r(r, -\theta, z, t) &= u_r(r, \theta, z, t), & u_\theta(r, -\theta, z, t) &= -u_\theta(r, \theta, z, t), \\ u_z(r, -\theta, z, t) &= u_z(r, \theta, z, t), \end{aligned}$$

а при $\beta = \pi/2$ – условно антисимметричных волн со свойствами

$$\begin{aligned} u_r(r, -\theta, z, t) &= -u_r(r, \theta, z, t), & u_\theta(r, -\theta, z, t) &= u_\theta(r, \theta, z, t), \\ u_z(r, -\theta, z, t) &= -u_z(r, \theta, z, t). \end{aligned}$$

На окружное волновое число τ в соотношениях (10) из геометрических соображений накладывается ограничение вида $\tau \in \mathbb{Z}$.

В рассматриваемом волноводе с учетом представлений (7) подлежат независимому исследованию осесимметричные продольно-сдвиговые ($\tau = 0$, $\beta = 0$) и крутильные ($\tau = 0$, $\beta = \pi/2$) волны, а также неосесимметричные волны ($\tau \in \mathbb{N}$, $\beta = 0$). В последнем случае варианты $\beta = 0$ и $\beta = \pi/2$ эквивалентны с точностью до поворота цилиндрической системы координат в плоскости $(r\theta)$ на угол $\pi/(2\tau)$.

В приведенных соотношениях и далее: i – мнимая единица; выделение жирным шрифтом применяется для обозначения матричных и векторных объектов; \mathbf{O} и $\hat{\mathbf{O}}$ – нулевые соответственно квадратная матрица и вектор-столбец; \mathbf{I} – единичная квадратная матрица; обозначения $[\mathbf{X}]_{j,p}$ и $[\mathbf{X}]_j$ при $j, p \in \mathbb{N}$ используются для индексного доступа к элементам соответственно матричных и векторных объектов, а при j либо p заданных индексным диапазоном вида $n..m$ или (n_1, n_2, \dots, n_m) – для определения соответственно подматрицы либо подвектора; операция $[\]$ – для определения матричных и векторных объектов (формально $[\mathbf{X}] \equiv \mathbf{X}$); операция транспонирования \mathbf{X}^T ; операция комплексного сопряжения $\bar{\mathbf{X}}$; операция обращения неособенной квадратной матрицы \mathbf{X}^{-1} ; $\|\mathbf{X}\|$ – мультипликативная согласованная евклидова норма [4].

На основании соотношений (3), (4), (7) – (10) в матричной форме получаются комплексные представления

$$\mathbf{S}(r, \theta, z, t) = \exp\left((1 - \delta) f_{\lambda,q}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z\right) \mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r), \quad (11)$$

где $\mathbf{S}(r, \theta, z, t)$ – вектор-столбец с безразмерными компонентами тензора напряжений

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(r, \theta, z, t) &= [\sigma_{rr}(r, \theta, z, t), \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, z, t), \sigma_{zz}(r, \theta, z, t), \\ &\sigma_{\theta z}(r, \theta, z, t), \sigma_{rz}(r, \theta, z, t), \sigma_{r\theta}(r, \theta, z, t)]^T; \end{aligned} \quad (12)$$

$\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r)$ – вектор-столбец с элементами

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r) = [\tilde{\sigma}_{rr}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{zz}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{\theta z}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{rz}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(\tau)}(r)]^T; \quad (13)$$

$\mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta)$ – диагональная матрица размерности 6×6 , отличные от нуля элементы которой равны

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta)]_{j,j} &= \cos(\tau\theta + \beta) \quad (j = \overline{1,3}), & [\mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta)]_{4,4} &= i \sin(\tau\theta + \beta), \\ [\mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta)]_{5,5} &= i \cos(\tau\theta + \beta), & [\mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta)]_{6,6} &= \sin(\tau\theta + \beta). \end{aligned} \quad (14)$$

Получаются также в матричной форме дифференциальные соотношения связи между векторами $\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r)$ и $\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r)$

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r) = \tilde{G} \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r), \quad (15)$$

где $\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)$ – матричный дифференциальный оператор размерности 6×3 , отличные от нуля элементы которого имеют вид

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{1,1} &= C_1 D(r) + C_2 r^{-1}, & [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{2,1} &= C_2 D(r) + C_1 r^{-1}, \\ [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{3,1} &= C_2 (D(r) + r^{-1}), \\ [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{1,2} &= [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{3,2} = C_2 \tau r^{-1}, & [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{2,2} &= C_1 \tau r^{-1}, \\ [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{1,3} &= [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{2,3} = -C_2 \tilde{k}, & [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{3,3} &= -C_1 \tilde{k}, \\ [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{4,2} &= [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{5,1} = \tilde{k}, & [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{4,3} &= [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{6,1} = -\tau r^{-1}, \\ [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{5,3} &= D(r), & [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{6,2} &= D(r) - r^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь $C_1 = 2(1 - \nu)/(1 - 2\nu)$, $C_2 = 2\nu/(1 - 2\nu)$, $D(r) = d_r - \delta \lambda q r^{q-1}$, $d_r = d/dr$.

С учетом представлений (7) – (14) на основании системы дифференциальных уравнений движения (2) получается однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами относительно амплитудных составляющих компонент безразмерного вектора динамических упругих волновых перемещений

$$\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r) \cdot \mathbf{U}^{(\tau)}(r) = \hat{\mathbf{O}}, \quad (16)$$

где $\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)$ – матричный дифференциальный оператор размерности 3×3 с элементами

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{1,1} &= C_1 (r^2 d_r^2 + (1 + (1 - 2\delta) \lambda q r^q) r d_r - 1) - \tau^2 C_2 + \\ &+ \kappa^2 r^2 + \lambda q r^q (-\delta q (1 + (1 - \delta) \lambda r^q) C_1 + C_2), \\ [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{1,2} &= \tau (C_3 r d_r + \lambda q r^q ((1 - \delta) C_2 - \delta) - C_4), \\ [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{1,3} &= -\tilde{k} r (C_3 r d_r + \lambda q r^q ((1 - \delta) C_2 - \delta)), \\ [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{2,1} &= -\tau (C_3 r d_r - \lambda q r^q (\delta C_2 - 1 + \delta) + C_4), \\ [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{2,2} &= r^2 d_r^2 + (1 + (1 - 2\delta) \lambda q r^q) r d_r - 1 - \tau^2 C_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\kappa^2 r^2 - \lambda q r^q (1 + \delta q + \delta (1 - \delta) \lambda q r^q), \\
 & \left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r) \right]_{2,3} = \left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r) \right]_{3,2} = \tilde{k} \tau C_3 r, \\
 & \left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r) \right]_{3,1} = \tilde{k} r (C_3 (r d_r + 1) + \lambda q r^q (1 - \delta - \delta C_2)), \\
 & \left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r) \right]_{3,3} = r^2 d_r^2 + (1 + (1 - 2\delta) \lambda q r^q) r d_r - \tau^2 + \\
 & + \left(\Omega^2 - \tilde{k}^2 C_1 \right) r^2 - \delta \lambda q^2 r^q (1 + (1 - \delta) \lambda r^q).
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \Omega^2 &= \tilde{\rho} \omega^2 R_*^2 / \left(C_* \tilde{G} \right), \quad C_3 = 1 / (1 - 2\nu), \\
 C_4 &= (3 - 4\nu) / (1 - 2\nu), \quad \kappa^2 = \Omega^2 - \tilde{k}^2.
 \end{aligned}$$

Ставится задача построения базисного набора частных решений уравнения (16). В качестве метода построения указанных решений используется подход, основанный на представлениях компонент искомого векторных решений обобщенными степенными рядами радиальной координаты. С учетом физической модели рассматриваемой задачи, а также структуры уравнения (16), для искомого решений вводятся матричные представления рядами с неопределенными векторными коэффициентами следующего вида

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) = \mathbf{A}_1(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+\eta} \mathbf{X}_m^{(\tau,\eta)} \quad \left\| \mathbf{X}_0^{(\tau,\eta)} \right\| \neq 0 \quad (17)$$

и ограничениями на параметр η

$$\begin{aligned}
 \eta \in \{-1; 0\} \text{ или } Re(\eta) > 0, \text{ если } \left[\mathbf{X}_0^{(\tau,\eta)} \right]_3 &= 0, \\
 \eta \in \{0; 1\} \text{ или } Re(\eta) > 1, \text{ если } \left[\mathbf{X}_0^{(\tau,\eta)} \right]_3 &\neq 0,
 \end{aligned} \quad (18)$$

следующими из критериев ограниченности и непрерывности всех характеристик волновых полей при $r \rightarrow 0$. Полагается, что ряд (17) сходится равномерно и абсолютно на любом отрезке $r \in [0, r_1]$ ($1 < r_1 < \infty$). В представлении (17) $\mathbf{A}_1(r)$ – диагональная матрица размерности 3×3 , отличные от нуля элементы которой равны

$$\left[\mathbf{A}_1(r) \right]_{1,1} = \left[\mathbf{A}_1(r) \right]_{2,2} = r, \quad \left[\mathbf{A}_1(r) \right]_{3,3} = 1; \quad (19)$$

$\left\{ \mathbf{X}_m^{(\tau,\eta)} \right\}_{m=0}^{\infty}$ – зависящие от параметров η и τ искомые наборы векторных коэффициентов. Представление (17) с учетом соотношения (15) определяет вид разложения для вектора $\mathbf{S}^{(\tau)}(r)$

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r) = \tilde{G} \mathbf{A}_2(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+\eta} \mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau,\eta)}, \quad (20)$$

где $\mathbf{A}_2(r)$ – диагональная матрица размерности 6×6 , отличные от нуля элементы которой равны

$$[\mathbf{A}_2(r)]_{j,j} = 1 \quad (j = 1, 2, 3, 6), \quad [\mathbf{A}_2(r)]_{j,j} = r^{-1} \quad (j = 4, 5); \quad (21)$$

$\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)$ ($m = \overline{0, \infty}$) – прямоугольные матрицы размерности 6×3 , отличные от нуля элементы которых равны

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{1,1} &= (v + 1 - \delta\lambda qr^q) C_1 + C_2, & [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{1,2} &= \tau C_2, \\ [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{2,1} &= (v + 1 - \delta\lambda qr^q) C_2 + C_1, & [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{2,2} &= \tau C_1, \\ [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{3,1} &= (v + 2 - \delta\lambda qr^q) C_2, & [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{3,2} &= \tau C_2, \\ [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{1,3} &= [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{2,3} = -\tilde{k} C_2, & [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{3,3} &= -\tilde{k} C_1, \\ [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{4,2} &= [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{5,1} = \tilde{k} r^2, & [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{4,3} &= [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{6,1} = -\tau, \\ [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{5,3} &= [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{6,2} = v - \delta\lambda qr^q. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $v = m + \eta$.

В результате подстановки представления (17) в уравнение (16) получается матричное функциональное уравнение

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} r^m \left(\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)} \mathbf{X}_m^{(\tau,\eta)} + \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,2)} \mathbf{X}_{m-2}^{(\tau,\eta)} + \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)} \mathbf{X}_{m-q}^{(\tau,\eta)} + \right. \\ \left. + \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,4)} \mathbf{X}_{m-2-q}^{(\tau,\eta)} + \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,5)} \mathbf{X}_{m-2q}^{(\tau,\eta)} \right) = \hat{\mathbf{O}} \quad (r \in [0, r_1]), \end{aligned} \quad (23)$$

в котором полагается, что $\mathbf{X}_j^{(\tau,\eta)} = \hat{\mathbf{O}}$ ($j < 0$). Из условия выполнения уравнения (23) при $r = 0$ получается уравнение для определения начального векторного коэффициента

$$\mathbf{Q}_0^{(\tau,\eta,1)} \mathbf{X}_0^{(\tau,\eta)} = \hat{\mathbf{O}}. \quad (24)$$

Условие нетривиальной разрешимости уравнения (24)

$$\det \left(\mathbf{Q}_0^{(\tau,\eta,1)} \right) = 0 \quad (25)$$

определяет с учетом ограничений (18) допустимые значения параметра η . Функциональное уравнение (23) порождает также рекуррентные соотношения для определения последующих векторных коэффициентов $\mathbf{X}_m^{(\tau,\eta)}$ ($m = \overline{1, \infty}$)

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)} \mathbf{X}_m^{(\tau,\eta)} = \\ = - \left(\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,2)} \mathbf{X}_{m-2}^{(\tau,\eta)} + \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)} \mathbf{X}_{m-q}^{(\tau,\eta)} + \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,4)} \mathbf{X}_{m-2-q}^{(\tau,\eta)} + \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,5)} \mathbf{X}_{m-2q}^{(\tau,\eta)} \right) \quad (26) \\ (m = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,n)}$ ($n = \overline{1,5}$) – квадратные матрицы размерности 3×3 , отличные от нуля элементы которых равны

$$\begin{aligned}
 \left[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)} \right]_{1,1} &= v(v+2)C_1 - \tau^2, & \left[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)} \right]_{1,2} &= \tau(vC_1 - v - 2), \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)} \right]_{1,3} &= -v\tilde{k}C_3, & \left[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)} \right]_{2,1} &= \tau(v - (v+2)C_1), \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)} \right]_{2,2} &= v(v+2) - \tau^2C_1, & \left[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)} \right]_{2,3} &= \tau\tilde{k}C_3, \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)} \right]_{3,3} &= v^2 - \tau^2, & \left[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,2)} \right]_{1,1} &= \left[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,2)} \right]_{2,2} = \Omega^2 - \tilde{k}^2, \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,2)} \right]_{3,1} &= \tilde{k}vC_3, & \left[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,2)} \right]_{3,2} &= \tilde{k}\tau C_3, \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,2)} \right]_{3,3} &= \Omega^2 - \tilde{k}^2C_1, & \left[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)} \right]_{1,2} &= \lambda q \tau ((1-\delta)C_1 - 2 + \delta), \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)} \right]_{1,1} &= \lambda q (((q-2v-2)\delta - q + v + 2)C_1 - 2), \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)} \right]_{1,3} &= \lambda q \tilde{k} (\delta - (1-\delta)C_2), & \left[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)} \right]_{2,1} &= \lambda q \tau (\delta C_1 - \delta - 1), \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)} \right]_{2,2} &= \lambda q ((q-2v-2)\delta - q + v), \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)} \right]_{3,3} &= \lambda q ((q-2v)\delta - q + v), & \left[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,4)} \right]_{3,1} &= \lambda q \tilde{k} (1 - \delta - \delta C_2), \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,5)} \right]_{1,1} &= -\delta(1-\delta)\lambda^2 q^2 C_1, & \left[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,5)} \right]_{2,2} &= -\delta(1-\delta)\lambda^2 q^2, \\
 \left[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,5)} \right]_{3,3} &= -\delta(1-\delta)\lambda^2 q^2.
 \end{aligned} \tag{27}$$

3. Базисные решения в случае крутильных волн. Как уже отмечалось, осесимметричный случай ($\tau = 0$) подлежит отдельному рассмотрению. При $\tau = 0$ и $\beta = \pi/2$ представления (7) – (14) преобразуются к такому виду

$$\begin{aligned}
 u_\theta(r, z, t) &= \exp\left(-\delta f_{\lambda,q}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z\right) \tilde{u}_\theta^{(TW)}(r), \\
 \mathbf{S}(r, z, t) &= \exp\left((1-\delta) f_{\lambda,q}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z\right) \mathbf{T}_2^{(TW)} \tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(r),
 \end{aligned} \tag{28}$$

где $\mathbf{S}(r, z, t)$ – вектор-столбец с ненулевыми компонентами тензора безразмерных напряжений

$$\mathbf{S}(r, z, t) = [\sigma_{\theta z}(r, z, t), \sigma_{r\theta}(r, z, t)]^T; \tag{29}$$

$\tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(r)$ – вектор-столбец с элементами

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(r) = [\tilde{\sigma}_{\theta z}^{(TW)}(r), \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(TW)}(r)]^T; \tag{30}$$

$\mathbf{T}_2^{(TW)}$ – диагональная матрица размерности 2×2 , отличные от нуля элементы которой равны

$$\left[\mathbf{T}_2^{(TW)} \right]_{1,1} = i, \quad \left[\mathbf{T}_2^{(TW)} \right]_{2,2} = 1. \tag{31}$$

Из условия разрешимости (25) и уравнения (24), соответственно принявших вид

$$\left[\mathbf{Q}_0^{(0,\eta,1)} \right]_{2,2} = \eta(\eta + 2) = 0, \quad \eta(\eta + 2) x_0^{(TW)} = 0,$$

с учетом ограничений (18) определяется единственное допустимое значение параметра $\eta = 0$ и соответствующее ему начальное значение $x_0^{(TW)} = b$, где b – произвольная постоянная. Тогда решение целевой задачи с учетом соотношений (28) – (31) может быть представлено через базисные решения $\tilde{u}_\theta^{(TW,B)}(r)$ и $\tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(r)$ так:

$$\tilde{u}_\theta^{(TW)}(r) = b\tilde{u}_\theta^{(TW,B)}(r), \quad \tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(r) = b\tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(r), \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\theta^{(TW,B)}(r) &= \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+1} x_m^{(TW)}, \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(r) &= \mathbf{A}_2^{(TW)} \sum_{m=0}^{\infty} r^m x_m^{(TW)} \mathbf{H}_m^{(TW)}(r). \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь

$$\mathbf{H}_m^{(TW)}(r) = \begin{bmatrix} \tilde{k}r^2 \\ m - \delta\lambda qr^q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2^{(TW)}(r) = \begin{bmatrix} r^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а для определения $x_m^{(TW)}$ из рекуррентных уравнений (26) с учетом соотношений (27) получаются явные рекуррентные представления

$$\begin{aligned} x_m^{(TW)} &= 0 \quad (m < 0), \quad x_0^{(TW)} = 1, \\ x_m^{(TW)} &= w_m^{(TW,1)} x_{m-2}^{(TW)} + w_m^{(TW,2)} x_{m-q}^{(TW)} + w_m^{(TW,3)} x_{m-2q}^{(TW)} \quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (34)$$

В соотношениях (34)

$$\begin{aligned} w_m^{(TW,1)} &= -\kappa^2 / (m(m+2)), \\ w_m^{(TW,2)} &= \lambda q (\delta(2m+2-q) - m + q) / (m(m+2)), \\ w_m^{(TW,3)} &= \delta(1-\delta)\lambda^2 q^2 / (m(m+2)). \end{aligned} \quad (35)$$

Следует отметить, что при $m \rightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотические оценки для коэффициентов (35)

$$w_m^{(TW,1)} \approx -m^{-2}\kappa^2, \quad w_m^{(TW,2)} \approx m^{-1}(2\delta-1)\lambda q, \quad w_m^{(TW,3)} \approx m^{-2}\delta(1-\delta)\lambda^2 q^2,$$

следствием которых является абсолютная и равномерная сходимость разложений в (33) на любом конечном отрезке $r \in [r_0, r_1]$ ($0 < r_0 < r_1 < \infty$) [5].

4. Базисные решения в случае продольно-сдвиговых волн. При $\tau = 0$ и $\beta = 0$ представления (7) – (14) приобретают такой вид

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(r, z, t) &= \exp\left(-\delta f_{\lambda,p}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z\right) \mathbf{T}_1^{(LSW)} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r), \\ \mathbf{S}(r, z, t) &= \exp\left((1 - \delta) f_{\lambda,p}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z\right) \mathbf{T}_2^{(LSW)} \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)}(r), \end{aligned} \quad (36)$$

где $\mathbf{U}(r, z, t)$ и $\mathbf{S}(r, z, t)$ – вектор-столбцы с ненулевыми компонентами соответственно вектора безразмерных перемещений и тензора безразмерных напряжений

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(r, z, t) &= [u_r(r, z, t), u_z(r, z, t)]^T, \\ \mathbf{S}(r, z, t) &= [\sigma_{rr}(r, z, t), \sigma_{\theta\theta}(r, z, t), \sigma_{zz}(r, z, t), \sigma_{rz}(r, z, t)]^T; \end{aligned} \quad (37)$$

$\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r)$ и $\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)}(r)$ – вектор-столбцы с элементами

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r) &= [\tilde{u}_r^{(LSW)}(r), \tilde{u}_z^{(LSW)}(r)]^T, \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)}(r) &= [\tilde{\sigma}_{rr}^{(LSW)}(r), \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(LSW)}(r), \tilde{\sigma}_{zz}^{(LSW)}(r), \tilde{\sigma}_{rz}^{(LSW)}(r)]^T; \end{aligned} \quad (38)$$

$\mathbf{T}_1^{(LSW)}$ и $\mathbf{T}_2^{(LSW)}$ – диагональные матрицы размерности соответственно 2×2 и 4×4 , отличные от нуля элементы которых равны

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_1^{(LSW)}]_{1,1} &= 1, \quad [\mathbf{T}_1^{(LSW)}]_{2,2} = i, \\ [\mathbf{T}_2^{(LSW)}]_{j,j} &= 1 \quad (j = \overline{1,3}), \quad [\mathbf{T}_2^{(LSW)}]_{4,4} = i. \end{aligned} \quad (39)$$

Из условия разрешимости (25), принявшего вид

$$\det\left(\left[\mathbf{Q}_0^{(0,\eta,1)}\right]_{(1,3),(1,3)}\right) = \eta^3 (\eta + 2) C_1 = 0,$$

с учетом ограничений (18) определяются соответствующие кратному корню $\eta = 0$ два допустимых одинаковых значения параметра $\eta_1 = 0$ и $\eta_2 = 0$, которым соответствуют различные векторные решения уравнения (24), с точностью до произвольного скалярного множителя записанные так

$$\mathbf{X}_0^{(LSW,\eta_1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_0^{(LSW,\eta_2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

С учетом представлений (40) на основе векторных коэффициентов $\mathbf{X}_m^{(LSW,\eta_1)}$ и $\mathbf{X}_m^{(LSW,\eta_2)}$ ($m = \overline{0, \infty}$) определяются матричные коэффициенты

$$\mathbf{X}_m^{(LSW)} = \left[\mathbf{X}_m^{(LSW,\eta_1)}, \mathbf{X}_m^{(LSW,\eta_2)}\right] \quad (m = \overline{0, \infty}). \quad (41)$$

Основываясь на представлениях (40), (41), а также на справедливости соотношений

$$\det \left(\left[\mathbf{Q}_m^{(0,\eta_j,1)} \right]_{(1,3),(1,3)} \right) = m^3 (m+2) C_1 \neq 0 \quad (j = \overline{1,2}; m \geq 1),$$

рекуррентные уравнения (26) с учетом соотношений (27) преобразуются в последовательность явных рекуррентных представлений следующего вида

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m^{(LSW)} &= \mathbf{O} \quad (m < 0), \quad \mathbf{X}_0^{(LSW)} = \mathbf{I}, \\ \mathbf{X}_m^{(LSW)} &= \mathbf{W}_m^{(LSW,1)} \mathbf{X}_{m-2}^{(LSW)} + \\ &+ \mathbf{W}_m^{(LSW,2)} \mathbf{X}_{m-q}^{(LSW)} + \mathbf{W}_m^{(LSW,3)} \mathbf{X}_{m-2-q}^{(LSW)} + \mathbf{W}_m^{(LSW,4)} \mathbf{X}_{m-2q}^{(LSW)} \\ &(m = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь

$$\mathbf{W}_m^{(LSW,p)} = - \left(\left[\mathbf{Q}_m^{(0,0,1)} \right]_{(1,3),(1,3)} \right)^{-1} \left[\mathbf{Q}_m^{(0,0,p+1)} \right]_{(1,3),(1,3)} \quad (p = \overline{1,4}). \quad (43)$$

Таким образом, решение целевой задачи с учетом соотношений (36) – (39) представимо через базисные решения так:

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r) = \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(r) \mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)}(r) = \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(r) \mathbf{B}, \quad (44)$$

где \mathbf{B} – вектор-столбец второго порядка с произвольными постоянными компонентами; $\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(r)$ и $\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(r)$ – матричные базисные решения такого вида

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(r) &= \mathbf{A}_1^{(LSW)}(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m \mathbf{X}_m^{(LSW)}, \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(r) &= \mathbf{A}_2^{(LSW)}(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m \mathbf{H}_m^{(LSW)}(r) \mathbf{X}_m^{(LSW)}. \end{aligned} \quad (45)$$

Здесь $\mathbf{H}_m^{(LSW)}(r) = \left[\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r) \right]_{(1,2,3,5),(1,3)}$; $\mathbf{A}_p^{(LSW)}(r)$ ($p = \overline{1,2}$) – диагональные матрицы размерности соответственно 2×2 и 4×4 , отличные от нуля элементы которых равны

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{A}_1^{(LSW)}(r) \right]_{1,1} &= r, \quad \left[\mathbf{A}_1^{(LSW)}(r) \right]_{2,2} = 1, \\ \left[\mathbf{A}_2^{(LSW)}(r) \right]_{j,j} &= 1 \quad (j = \overline{1,3}), \quad \left[\mathbf{A}_2^{(LSW)}(r) \right]_{4,4} = r^{-1}. \end{aligned}$$

Поскольку при $m \rightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотические оценки для норм матричных коэффициентов (43)

$$\left\| \mathbf{W}_m^{(LSW,1)} \right\| \approx m^{-1} \left| \tilde{k} \right| (1 + C_2), \quad \left\| \mathbf{W}_m^{(LSW,2)} \right\| \approx m^{-1} q \sqrt{2} |\lambda (1 - 2\delta)|,$$

$$\left\| \mathbf{W}_m^{(LSW,3)} \right\| \approx m^{-2} q \left| \lambda \tilde{k} (\delta (1 + C_2) - 1) \right|, \quad \left\| \mathbf{W}_m^{(LSW,4)} \right\| \approx m^{-2} \lambda^2 q^2 \sqrt{2} |\delta (1 - \delta)|,$$

следовательно, разложения в соотношениях (45) сходятся абсолютно и равномерно на любом конечном отрезке $r \in [r_0, r_1]$ ($0 < r_0 < r_1 < \infty$) [5].

5. Базисные решения в неосесимметричном случае.. При $\tau \in \mathbb{N}$ условие разрешимости (25) принимает вид

$$\left((\eta + 2)^2 - \tau^2 \right) (\eta^2 - \tau^2)^2 = 0. \quad (46)$$

С учетом ограничений (18) определяются три допустимых корня η_j ($j = \overline{1, 3}$) уравнения (46) $\eta_1 = \tau - 2$, $\eta_2 = \tau$, $\eta_3 = \tau$. Соответствующие этим корням решения уравнения (24) с точностью до произвольного скалярного множителя записываются в таком виде

$$\mathbf{X}_0^{(\tau, \eta_1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_0^{(\tau, \eta_2)} = \begin{bmatrix} 2 + \tau (1 - C_1) \\ (\tau + 2) C_1 - \tau \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_0^{(\tau, \eta_3)} = \begin{bmatrix} \tilde{k} \\ -\tilde{k} \\ 2C_4/C_3 \end{bmatrix}. \quad (47)$$

В случае $\eta = \eta_j$ ($j = \overline{2, 3}$) рекуррентные уравнения (26) с учетом

$$\det \left(\mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta_j, 1)} \right) = m^2 (m + 2) (m + 2\tau)^2 (m + 2(\tau + 1)) C_1 \neq 0 \quad (m \geq 1)$$

совместно с (47) и условием

$$\mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_j)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (j = \overline{1, 3}; \quad m < 0) \quad (48)$$

преобразуются в явные рекуррентные представления для определения последующих векторных коэффициентов $\mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_j)}$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_j)} &= \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 1)} \mathbf{X}_{m-2}^{(\tau, \eta_j)} + \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 2)} \mathbf{X}_{m-q}^{(\tau, \eta_j)} + \\ &+ \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 3)} \mathbf{X}_{m-2-q}^{(\tau, \eta_j)} + \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 4)} \mathbf{X}_{m-2q}^{(\tau, \eta_j)} \end{aligned} \quad (49)$$

$$(m = 1, 2, \dots), \quad (j = \overline{2, 3}).$$

Здесь

$$\mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, p)} = - \left(\mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta_j, 1)} \right)^{-1} \mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta_j, p+1)} \quad (p = \overline{1, 4}; \quad j = \overline{2, 3}). \quad (50)$$

Поскольку для $\eta = \eta_1$ определитель системы линейных уравнений, порождаемой рекуррентными уравнениями (26)

$$\det \left(\mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta_1, 1)} \right) = m (m - 2)^2 (m + 2\tau) (m + 2(\tau - 1))^2 C_1$$

обращается в нуль при $m = 2$, следовательно, рекуррентные уравнения (26) для $\eta = \eta_1$ требуют отдельного рассмотрения в случаях $m = 1$, $m = 2$ и $m \geq 3$. С учетом соотношений (48) при $m = 1$ получается

$$\mathbf{X}_1^{(\tau, \eta_1)} = - \left(\mathbf{Q}_1^{(\tau, \eta_1, 1)} \right)^{-1} \mathbf{Q}_1^{(\tau, \eta_1, 3)} \mathbf{X}_{1-q}^{(\tau, \eta_1)}; \quad (51)$$

при $m = 2$ показано, что нетривиальное решение, записанное с точностью до произвольного скалярного множителя в виде

$$\mathbf{X}_2^{(\tau, \eta_1)} = \left[\frac{[\mathbf{Z}]_1}{\left(\left[\mathbf{Q}_2^{(\tau, \eta_1, 1)} \right]_{1,2} - \left[\mathbf{Q}_2^{(\tau, \eta_1, 1)} \right]_{1,1} \right)}, \frac{[\mathbf{Z}]_1}{\left(\left[\mathbf{Q}_2^{(\tau, \eta_1, 1)} \right]_{1,1} - \left[\mathbf{Q}_2^{(\tau, \eta_1, 1)} \right]_{1,2} \right)}, 0 \right]^T, \quad (52)$$

где

$$\mathbf{Z} = - \left(\mathbf{Q}_2^{(\tau, \eta_1, 2)} \mathbf{X}_0^{(\tau, \eta_1)} + \mathbf{Q}_2^{(\tau, \eta_1, 3)} \mathbf{X}_{2-q}^{(\tau, \eta_1)} + \mathbf{Q}_2^{(\tau, \eta_1, 5)} \mathbf{X}_{2-2q}^{(\tau, \eta_1)} \right),$$

существует только при выполнении условия

$$(\tau, q) \in \{(1, 1)\} \cup \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{1\} \cup \{0\}); \quad (53)$$

при $m \geq 3$ представления (49), (50) остаются справедливыми и для случая $\eta = \eta_1$.

Окончательно, решение целевой задачи с учетом соотношений (47) – (53) представляются так

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) = \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau, B)}(r) \mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r) = \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau, B)}(r) \mathbf{B}, \quad (54)$$

где \mathbf{B} – вектор-столбец третьего порядка с произвольными компонентами;

$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau, B)}(r)$ и $\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau, B)}(r)$ – матричные базисные решения следующего вида

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau, B)}(r) &= \mathbf{A}_1(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m \left[r^{\eta_1} \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_1)}, r^{\eta_2} \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_2)}, r^{\eta_3} \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_3)} \right], \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau, B)}(r) &= \mathbf{A}_2(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m \left[r^{\eta_1} \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta_1)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_1)}, \right. \\ &\quad \left. r^{\eta_2} \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta_2)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_2)}, r^{\eta_3} \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta_3)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_3)} \right]. \end{aligned} \quad (55)$$

При этом справедливость следующих асимптотических оценок при $m \rightarrow \infty$ для норм матричных коэффициентов (50)

$$\left\| \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 1)} \right\| \approx m^{-1} \left| \tilde{k} \right| (1 + C_2), \quad \left\| \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 2)} \right\| \approx m^{-1} q \sqrt{3} |\lambda (1 - 2\delta)|,$$

$$\left\| \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 3)} \right\| \approx m^{-2} q \left| \lambda \tilde{k} (\delta (1 + C_2) - 1) \right|, \quad \left\| \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 4)} \right\| \approx m^{-2} \lambda^2 q^2 \sqrt{3} |\delta (1 - \delta)|$$

$$(j = \overline{1, 3})$$

обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость разложений в (55) на любом конечном отрезке $r \in [r_0, r_1]$ ($0 < r_0 < r_1 < \infty$) [5].

6. Получение дисперсионных соотношений. Рассмотренные математические модели волновых процессов в протяженных цилиндрах кругового поперечного сечения включают условия свободной (5) либо жестко закрепленной (6) граничной поверхности, которые с учетом представления решений целевой задачи через базисные решения порождают дисперсионное уравнение, определяющее спектр целевой задачи, а также уравнение для определения неизвестного векторного коэффициента B (продольно-сдвиговые и неосесимметричные волны).

Для крутильных волн дисперсионные соотношения с учетом представлений (28) – (33) соответственно получают вид

$$\left[\tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(1) \right]_2 = 0, \quad b = 1,$$

либо

$$\tilde{u}_\theta^{(TW,B)}(1) = 0, \quad b = 1.$$

В случае продольно-сдвиговых волн дисперсионные соотношения с учетом представлений (36) – (39), (44), (45) соответственно записываются так:

$$\det \left(\left[\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(1) \right]_{(1,4),(1..2)} \right) = 0, \quad \left[\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(1) \right]_{(1,4),(1..2)} \mathbf{B} = \hat{\mathbf{O}},$$

либо

$$\det \left(\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(1) \right) = 0, \quad \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(1) \mathbf{B} = \hat{\mathbf{O}}.$$

В случае неосесимметричных волн дисперсионные соотношения с учетом представлений (7) – (14), (54), (55) соответственно получают следующий вид

$$\det \left(\left[\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)}(1) \right]_{(1,5,6),(1..3)} \right) = 0, \quad \left[\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)}(1) \right]_{(1,5,6),(1..3)} \mathbf{B} = \hat{\mathbf{O}},$$

либо

$$\det \left(\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(1) \right) = 0, \quad \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(1) \mathbf{B} = \hat{\mathbf{O}}.$$

7. Анализ результатов численного эксперимента. В качестве однородного материала для представлений (1) был выбран алюминий с характеристиками

$$\tilde{G} = 2.61, \quad \nu = 0.35, \quad \tilde{\rho} = 2700 \text{ кг/м}^3, \quad C_* = 10^{10} \text{ н/м}^2. \quad (56)$$

При численном эксперименте значение параметра δ бралось фиксированным $\delta = 1/2$. Этот выбор обуславливался результатами проведенного с высокой точностью вычислений анализа скорости сходимости разложений базисных решений (33), (45) и (55). В Таблице 1 приведены порядки значений $\left| x_m^{(TW)} \right|$, полученные при следующих значениях параметров: $\lambda = \ln(3/2)$; $q = 6$; $\tilde{k} = 2$; $\Omega = 1$.

Таблица 1

	$m = 0$	$m = 20$	$m = 40$	$m = 60$	$m = 80$	$m = 100$
$\delta = -1$	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-11}	10^{-14}	10^{-18}
$\delta = 0$	1	10^{-4}	10^{-9}	10^{-14}	10^{-18}	10^{-24}
$\delta = 1/2$	1	10^{-4}	10^{-9}	10^{-14}	10^{-20}	10^{-27}
$\delta = 1$	1	10^{-3}	10^{-7}	10^{-11}	10^{-16}	10^{-22}
$\delta = 2$	1	10^{-2}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-12}	10^{-17}

Расчет фрагментов спектров бегущих нормальных изгибных волн ($\tau = 1$) проводился в диапазонах изменения безразмерных волновых параметров $\Omega \in [0; 60]$ и $\tilde{k} \in [0; 65]$. Выполнен анализ ряда эффектов влияния параметров неоднородности на топологическую структуру и свойства действительных ветвей дисперсионных спектров указанных волн в радиально неоднородном $(\lambda, q) \in (\ln(1/2), 6)$ (Рис. 1) и однородном $(\lambda, q) = (0, 0)$ цилиндрах со свободной граничной поверхностью.

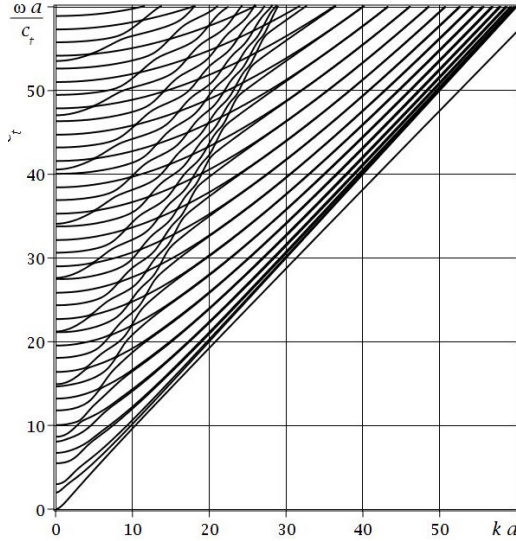


Рис. 1. Спектр бегущих изгибных волн в радиально неоднородном $(\lambda, q) \in (\ln(1/2), 6)$ свободном цилиндре.

В представлении нормализованной частоты $\Omega = \omega a / c_t$ и нормализованного волнового числа $\tilde{k} = ka$ используются обозначения для нормирующего параметра размерности длины $a = R_*$ и скорости эквиволуминальной волны $c_t = \sqrt{C_* \tilde{G} / \tilde{\rho}}$. На основе анализа количественных различий в поведении мод сопоставляемых спектров (Рис. 2-11) с использованием функции сравнения

$$\Delta\Omega(ka) = (\omega_{\lambda,q}(ka) - \omega_{0,0}(ka)) a / c_t$$

для мод с одинаковыми номерами (на рисунках представлены номера сопостав-

ляемых мод спектров), при общем качественном подобии спектров, сделан ряд заключений. Во-первых, установлено, что эффект влияния фактора неоднородности наиболее проявляется для всех исследованных мод сопоставляемых спектров в длинноволновом диапазоне $ka \in [0, 15]$ (Рис. 2, 4), а также для низшей моды практически во всем исследованном диапазоне $ka \in [4, 60]$ (Рис. 2). При этом для мод начиная со второй в длинноволновом диапазоне $ka \in [0, 20]$ отмечается системное локальное повышение фазовых скоростей для неоднородного цилиндра по сравнению с однородным цилиндром (Рис. 2, 4), а в коротковолновом диапазоне $ka \in [40, 60]$ наблюдается стабилизация относительного поведения мод сопоставляемых спектров (Рис. 2-5).

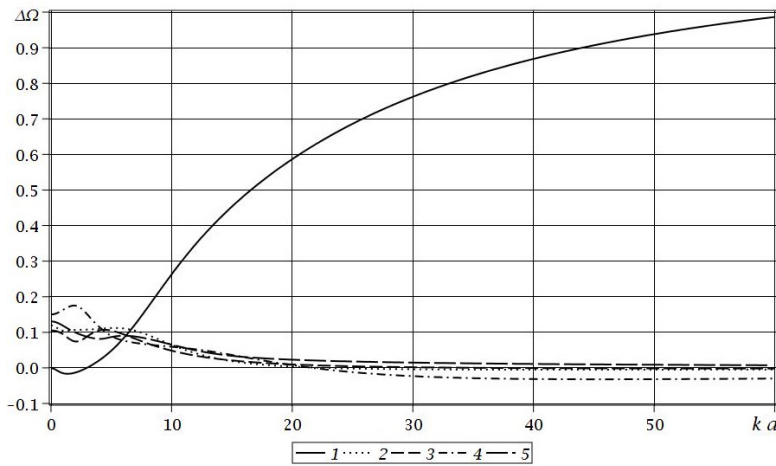


Рис. 2.

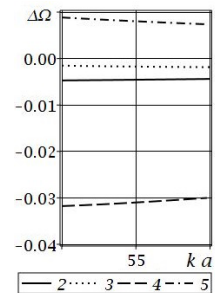


Рис. 3.

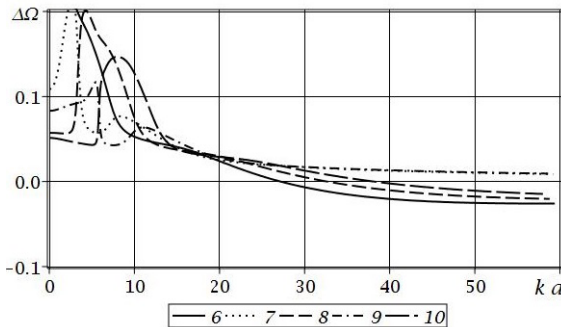


Рис. 4.

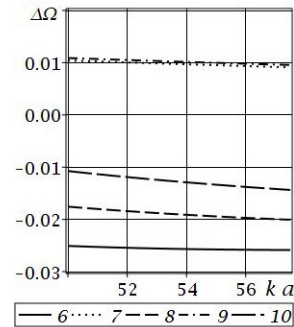


Рис. 5.

Во-вторых, выявлено существенное влияние зон локального сближения и расщепления мод на их траектории в соответствующих спектрах для неоднородного и однородного цилиндров. Этот эффект отчетливо наблюдается на рис. 6 – 11.

Ниже представлены графики нормализованных фазовых c_p/c_t (рис. 12) и групповых c_g/c_t (рис. 13-19) скоростей бегущих нормальных изгибных волн в

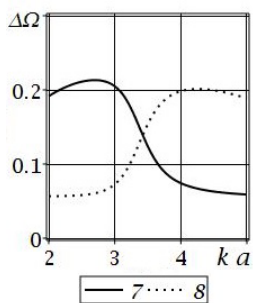


Рис. 6.

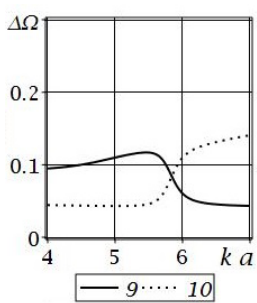


Рис. 7.

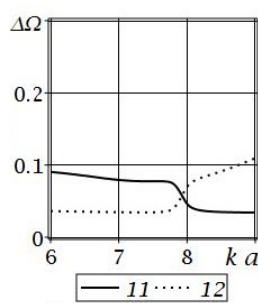


Рис. 8.

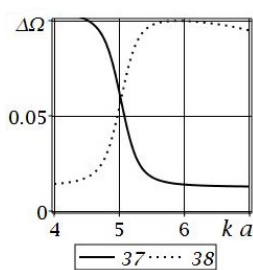


Рис. 9.

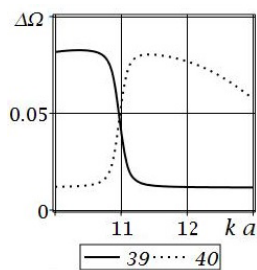


Рис. 10.

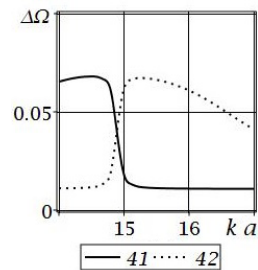


Рис. 11.

радиально неоднородном $(\lambda, q) \in (\ln(1/2), 6)$ свободном цилиндре.

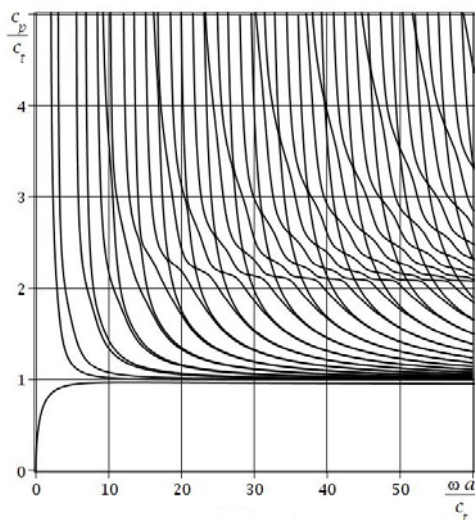


Рис. 12.

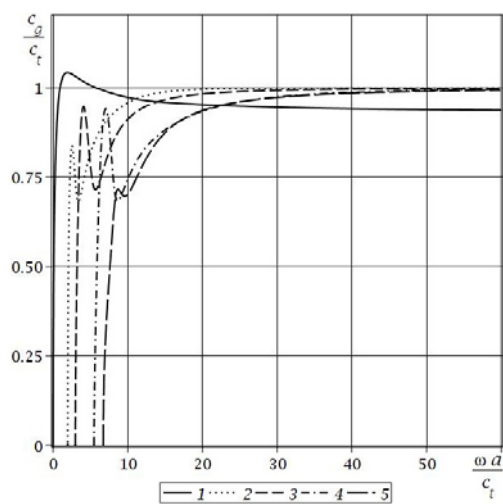


Рис. 13.

Анализ приведенных графиков позволяет сделать следующие выводы. Установлено, что характер предельного асимптотического стремления фазовых и групповых скоростей мод бегущих волн с одинаковыми номерами в высокоча-

стотном коротковолновом диапазоне из спектров для однородного и неоднородного цилиндров совпадает. При этом отчетливо иллюстрируется известный факт [6] о том, что фазовая и групповая скорости низшей моды спектра асимптотически стремятся к скорости рэлеевских волн, в то время как фазовая и групповая скорости мод начиная со второй стремятся к скорости эквиволлюминальной волны c_t (Рис. 12, 13). Также отмечаются ярко выраженные характерные участки «обмена» групповыми скоростями смежных мод в зонах их локального сближения и отгалкивания (Рис. 14-19).

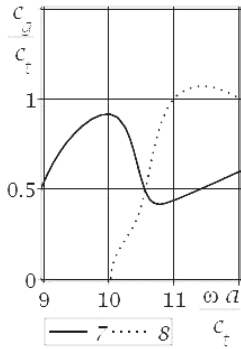


Рис. 14.

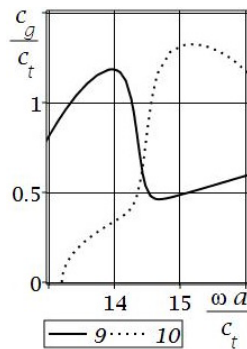


Рис. 15.

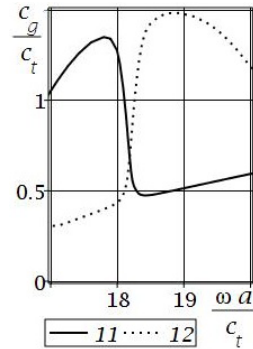


Рис. 16.

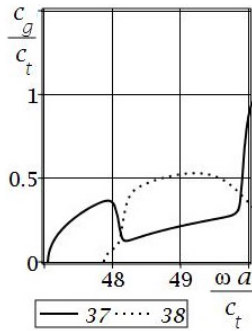


Рис. 17.

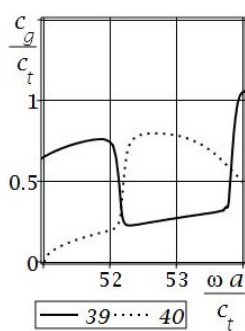


Рис. 18.

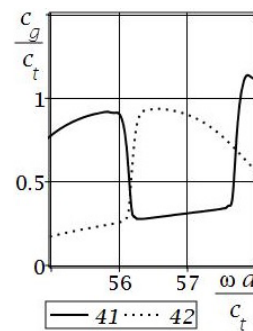


Рис. 19.

Выводы. Разработана методика построения базисных множеств частных решений уравнений волнового деформирования изотропных цилиндров кругового поперечного сечения с экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью материала для краевых задач о спектрах осесимметричных и неосесимметричных нормальных упругих волн. Разработаны программные приложения для реализации алгоритмов решения рассматриваемого класса задач, с применением которых проведен сравнительный анализ топологического строения дисперсионных спектров, распределений фазовых и групповых скоростей бегущих нормальных изгибных волн в однородных и радиально неоднородных изотропных протяженных цилиндрах кругового поперечного сечения для случая свобод-

ной граничной поверхности, проанализированы и описаны эффекты влияния на указанные характеристики экспоненциально-степенной радиальной неоднородности материала волновода. Полученные результаты перспективны для использования в прикладных исследованиях, связанных с расчетами характеристик волноводных компонентов акустоэлектронных устройств, анализа моделей ультраакустической диагностики.

1. *Моисеенко И.А.* Спектры нормальных упругих волн кручения в экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах / И.А. Моисеенко. // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – Вып. 9 (55). – С. 139–145.
2. *Моисеенко И.А.* Продольные волны в экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах / И.А. Моисеенко. // Вестник Запорожского национального университета: Сборник научных статей. Физико-математические науки. – Запорожье: Запорожский национальный университет. – 2015. – № 3. – С. 179–189.
3. *Моисеенко И.А.* Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн в ортотропных цилиндрах с функционально-градиентной радиальной неоднородностью / И.А. Моисеенко, В.И. Сторожев. // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 112–124.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
5. *Туляков Д.Н.* Асимптотики решений рекуррентных соотношений / Д.Н. Туляков. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук. – Москва. – 2011. – 236 с.
6. *Гринченко В.Т.* Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – К.: Наук. думка. – 1981. – 284 с.

I.A. Moiseyenko, V.A. Moiseyenko

Normal waves in functionally graded solid cylinders.

The wave motion is described on the basis of a complete system of linear dynamical equations of elasticity theory. The shear modulus and density of the isotropic material of cylinder are specified by an exponential-power function of the radial coordinate. The basic solutions of the system of differential equations of the model are constructed in matrix form in the form of decompositions of the radial components of the solution into uniformly and absolutely converging generalized power series in radial coordinate. The dispersion relations describing the harmonic spectra of normal waves in the case of free and rigidly fixed of boundary surface, is presented. The effects of the parameters of radial inhomogeneity on the topology of dispersion spectra, the distribution of phase and group velocities of propagating normal waves are studied.

Keywords: *FGMs, isotropic waveguide, normal waves, basic solutions, dispersion relations, phase velocity, group velocity.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры”, Макеевка
miamia733@mail.ru

Получено 28.04.18

УДК 539.3

©2018. Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев

КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ТЕРМОУПРУГОМ ИЗГИБЕ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫМ РАЗРЕЗОМ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Решена задача термоупругого изгиба для изотропной пластины с теплоизолированным разрезом в случае произвольного теплообмена с внешней средой. Использована обобщённая теория в варианте $\{1, 0\}$ -аппроксимации. Исходная задача сведена к системам сингулярных интегральных уравнений. Исследовано влияние длины разреза, величины и характера теплообмена с окружающей средой на коэффициенты интенсивности напряжений.

Ключевые слова: : *изотропная пластина, теплоизолированный разрез, термоупругий изгиб, сингулярные интегральные уравнения, коэффициенты интенсивности напряжений.*

Введение. Одним из подходов к теоретическому численно-аналитическому исследованию задач механики разрушения тонкостенных элементов конструкций является метод граничных интегральных уравнений, в котором для построения ядер интегральных уравнений используется двумерное интегральное преобразование Фурье [1].

В подавляющем количестве работ по данной тематике использована классическая теория пластин и оболочек, основанная на гипотезе недеформируемых нормалей. Однако, для композитных материалов, обладающих низкой сдвиговой жёсткостью, использование этой теории становится неприемлемым. Особенно это касается случаев нагрузки, приводящей к поперечному изгибу. Поэтому использование уточнённых теорий пластин и оболочек, учитывающих явления, связанные с поперечными сдвигами и обжатием, является актуальным.

В монографиях [2, 3] предложены методики сведения трёхмерных уравнений теории упругости к двумерным, основанные на идее И.Н. Векуа [4] использования с этой целью полиномов Лежандра. Все их можно рассматривать как различные реализации обобщённой теории оболочек. Один из этих методов построения теории пластин и оболочек различных степеней приближения известен под названием $\{m, n\}$ -аппроксимации, где m – порядок приближения тангенциальных перемещений, n – порядок приближения нормального перемещения. Он основан на аппроксимации перемещений и напряжений рядами Фурье по полиномам Лежандра с удовлетворением граничных условий для напряжений на лицевых поверхностях. Этот метод используется и активно развивается [5, 6].

В термомеханике разрушения тонкостенных элементов конструкций метод $\{m, n\}$ -аппроксимации использован в работах [7, 8, 9]. Проведены комплексные исследования для изотропных пластин при наличии однородного теплового потока. При действии потока температурного момента исследован лишь случай

симметричного теплообмена и влияние внешней среды на термоупругий изгиб в случае одностороннего теплообмена. Используемый метод реализован в варианте $\{1, 0\}$ -аппроксимации, которая является аналогом теории типа Тимошенко. Это обусловлено тем, что при задании больших m и n приходится иметь дело со значительно более сложной структурой исходных уравнений.

В данной статье исследована зависимость коэффициентов интенсивности температурных напряжений в изотропной пластине с теплоизолированным разрезом от его длины, величины и характера теплообмена с окружающей средой при температурной нагрузке, приводящей к изгибу, в случае произвольного теплообмена.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропную пластину толщиной $2h$, содержащую теплоизолированный разрез L , удалённый от краёв пластины на расстояние, значительно превышающее его длину. Пластина находится в тепловом контакте с внешней средой нулевой температуры по закону Ньютона.

Используем обобщённую теорию в варианте $\{1, 0\}$ -аппроксимации, для которой имеют место следующие представления [10, 3]:

— компоненты вектора перемещений

$$u_x = uP_0 + \gamma_x h P_1, \quad u_y = vP_0 + \gamma_y h P_1, \quad u_z = w_0 P_0, \quad (1)$$

— компоненты тензора напряжений

$$\sigma_x = \frac{N_x}{2h} P_0 + \frac{3M_x}{2h^2} P_1 \quad (x \rightarrow y), \quad \tau_{xy} = \frac{S}{2h} P_0 + \frac{3H}{2h^2} P_1,$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q_{x0}}{2h} (P_0 - P_2) \quad (x \rightarrow y), \quad \sigma_z = 0, \quad (2)$$

— температура

$$T = T_0 P_0 + T_1 P_1, \quad (3)$$

где $u, v, w_0, \gamma_x, \gamma_y$ — обобщённые перемещения; $N_x, N_y, S, M_x, M_y, H, Q_{x0}, Q_{y0}$ — обобщённые усилия и моменты; P_k ($k = \overline{0, 2}$) — полиномы Лежандра. В рамках данной аппроксимации обобщённые перемещения, усилия и моменты являются следующими аналогами компонентов термоупругого состояния теории типа Тимошенко: u, v — аналоги перемещений точек срединной плоскости пластины, w_0 — аналог прогиба пластины; γ_x, γ_y — аналоги углов поворота нормали; N_x, N_y, S — аналоги мембранных усилий; M_x, M_y — аналоги изгибающих моментов; H — аналог крутящего момента; Q_{x0}, Q_{y0} — аналоги перерезывающих сил; T_0 — аналог средней температуры; T_1 — аналог температурного момента.

Систему уравнений термоупругости $\{1, 0\}$ -аппроксимации запишем в безразмерной системе координат x_1, x_2 , определённой с точностью до полутолщины пластины h .

Уравнения теплопроводности [10]

$$\Delta T_k + A_{k0} T_0 + A_{k1} T_1 = 0 \quad (k = 0, 1). \quad (4)$$

Уравнения Дюамеля-Неймана в перемещениях [3]

$$\begin{aligned} N_1 &= B_0 \{ \partial_1 u + \nu \partial_2 v - \alpha (1 + \nu) T_0 \}, & N_2 &= B_0 \{ \partial_2 v + \nu \partial_1 u - \alpha (1 + \nu) T_0 \}, \\ S &= \frac{1 - \nu}{2} B_0 (\partial_2 u + \partial_1 v), & M_1 &= D_0 \{ \partial_1 \gamma_1 + \nu \partial_2 \gamma_2 - \alpha (1 + \nu) T_1 \}, \\ M_2 &= D_0 \{ \partial_2 \gamma_2 + \nu \partial_1 \gamma_1 - \alpha (1 + \nu) T_1 \}, & H &= \frac{1 - \nu}{2} D_0 (\partial_2 \gamma_1 + \partial_1 \gamma_2), \\ Q_{10} &= \Lambda_0 (\gamma_1 + \partial_1 w_0), & Q_{20} &= \Lambda_0 (\gamma_2 + \partial_2 w_0). \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения равновесия [3]

$$\begin{aligned} \partial_1 N_1 + \partial_2 S &= 0, & \partial_1 S + \partial_2 N_2 &= 0, \\ \partial_1 M_1 + \partial_2 H - Q_{10} &= 0, & \partial_1 H + \partial_2 M_2 - Q_{20} &= 0, & \partial_1 Q_{10} + \partial_2 Q_{20} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, & A_{00} &= -\frac{6}{\Delta_1} \{ Bi^+ Bi^- + 3 (Bi^+ + Bi^-) \}, \\ A_{01} &= \frac{A_{10}}{3} = -\frac{15}{\Delta_1} (Bi^+ - Bi^-), & A_{11} &= -\frac{30}{\Delta_1} \{ Bi^+ Bi^- + 2 (Bi^+ + Bi^-) + 3 \}, \\ \Delta_1 &= 2Bi^+ Bi^- + 9 (Bi^+ + Bi^-) + 36, \\ \partial_j &= \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2), & B_0 &= 3D_0 = \frac{2}{1 - \nu^2}, & \Lambda_0 &= \frac{5}{6(1 + \nu)}. \end{aligned}$$

ν , α – коэффициент Пуассона и температурный коэффициент линейного расширения соответственно; Bi^+ и Bi^- – критерий Био на верхней и нижней лицевых поверхностях пластины.

Мембранные усилия и перерезывающие силы в соотношениях (5), (6) определены с точностью до значения Eh (E – модуль Юнга), а моменты – с точностью до Eh^2 .

Термоупругое состояние в пластине с разрезом представим в виде суперпозиции термоупругого состояния в сплошной пластине, называемого основным термоупругим состоянием, и возмущения, вносимого разрезом, которое называется возмущённым термоупругим состоянием. Силовые компоненты возмущённого состояния, в силу их сингулярного характера в окрестности концов разреза, определяют коэффициенты интенсивности температурных напряжений. При этом они определяются как силовыми компонентами основного термоупругого состояния, так и скачками температуры на линии разреза. Соответственно и коэффициенты интенсивности температурных напряжений представимы в виде суммы двух слагаемых. Первое находится из решения силовой задачи для силовых компонентов основного термоупругого состояния, а второе – из решения термоупругой задачи для скачков температуры на линии разреза. Поскольку

методика решения силовых задач хорошо известна [1], то интерес представляет решение термоупругой задачи, обусловленное скачками температуры.

Основное термоупругое состояние будем считать известным. Для определения возмущённого термоупругого состояния используем систему уравнений термоупругости (4) – (6). Граничные условия для компонент возмущённого термоупругого состояния на линии разреза L с нормалью n и касательной t имеют вид [11]:

– для задачи теплопроводности (4)

$$\left. \frac{\partial T_0}{\partial n} \right|_L = - \left. \frac{\partial T_0^o}{\partial n} \right|_L, \quad \left. \frac{\partial T_1}{\partial n} \right|_L = - \left. \frac{\partial T_1^o}{\partial n} \right|_L, \quad (7)$$

– для задачи термоупругости (5), (6)

$$\begin{aligned} N_n|_L &= -N_n^o|_L, & S_{nt}|_L &= -S_{nt}^o|_L, \\ M_n|_L &= -M_n^o|_L, & H_{nt}|_L &= -H_{nt}^o|_L, & Q_n|_L &= -Q_n^o|_L, \end{aligned} \quad (8)$$

где N_n , S_{nt} , M_n , H_{nt} , Q_n – усилия и моменты на элементе длины разреза с нормалью n и касательной t ; компоненты с верхним индексом "о" соответствуют основному термоупругому состоянию. Эти граничные условия сформулированы для случая свободных берегов разреза и отсутствия контакта между ними.

Поскольку рассматриваются только разрезы на значительном удалении от края пластины, предполагаем, что возмущённое термоупругое состояние не распространяется до линии внешней границы. То есть оно носит локальный характер и его компоненты равны нулю на внешнем граничном контуре. Тогда граничные условия на внешней границе для компонент возмущённого термоупругого состояния не принимаются в расчёт. Достоверность такого предположения проверяется после решения задачи.

2. Методика решения. Рассматриваемая задача термоупругости решена методом двумерного интегрального преобразования Фурье. Применяя это преобразование к системе исходных уравнений (4) – (6) получим её представление в пространстве трансформант. При этом, учитывая разрывный характер искомых функций на линии разреза L , преобразование Фурье их частных производных определяем по следующей формуле [12]:

$$F \{ \partial_j G \} = (-i \xi_j) \tilde{G} + \frac{1}{2\pi} \int_L n_j [G] \exp \left\{ i \left(\vec{\xi}, \vec{x}' \right) \right\} dL \quad (j = 1, 2).$$

Здесь $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ – координаты текущей точки в пространстве трансформант; $[G] = G^+ - G^-$ – скачок функции G при переходе через линию разреза L , где G^+ и G^- – это граничные значения функции G в соответствии с выбранным направлением нормали \vec{n} ; $\vec{x}' = (x'_1, x'_2)$ – координаты точки на линии L . Направление интегрирования образует прямой угол с нормалью при вращении против часовой стрелки.

Полученная в пространстве трансформант система исходных уравнений решается относительно искомых функций. В результате находятся интегральные представления трансформант компонент температуры, обобщённых усилий и моментов. Применяя формулу обращения для двумерного интегрального преобразования Фурье к полученным выражениям находим интегральные представления компонент возмущённого термоупругого состояния в исходном пространстве. В результате подстановки найденных интегральных представлений в граничные условия (7) – (8) получаем системы сингулярных интегральных уравнений (СИУ) типа Коши. После численного решения этих систем находятся скачки температуры, перемещений и углов поворота на линии разреза L . Теперь используя интегральные представления искомых величин находим температуру, обобщённые усилия и моменты возмущённого термоупругого состояния в любой точке пластины. Найденные силовые компоненты определяют также коэффициенты интенсивности температурных напряжений на концах разреза L . Для них получены аналитические формулы на базе интегральных представлений внутренних силовых факторов. Влияние исходных параметров задачи на величину коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) в случае термоупругого изгиба составляет суть исследования данной статьи.

Необходимо заметить, что решение уравнений (4) с граничными условиями (7) составляет решение отдельной задачи теплопроводности, которое приведено в работе [13]. В данной статье решена задача термоупругого изгиба изотропной пластины с теплоизолированным разрезом в случае произвольного теплообмена.

Рассмотрим прямолинейный теплоизолированный разрез длиной $2l$ в безразмерной системе координат. Разрез расположен вдоль оси абсцисс симметрично относительно начала координат. Интегральные представления внутренних силовых факторов в этом случае примут вид

$$P_j^q(x_1, x_2) = -\frac{l}{2\pi} \sum_{k=1}^{\kappa} \int_{-1}^1 K_{jk}^q(x_1 - ls, x_2) \psi_k^q(s) ds \quad (q = 0, 1; j = \overline{1, 5}), \quad (9)$$

где $P_j^0 = N_j$, $P_j^1 = M_j$, ($j = 1, 2$); $P_3^0 = S$; $P_3^1 = H$; $P_4^1 = Q_{10}$; $P_5^1 = Q_{20}$; $\kappa = 4$ для $P_1^0 - P_3^0$; $\kappa = 7$ для $P_1^1 - P_3^1$; $\kappa = 5$ для P_4^1, P_5^1 ; K_{jk}^q – ядра интегральных представлений, представляющие собой линейные комбинации специальных G -функций, например,

$$K_{12}^1 = \frac{1}{3r} \cos \varphi \cos 2\varphi + \frac{\Lambda_0}{4} r \left\{ \cos \varphi G_{1,0}(\sqrt{2}, 5r) - \cos 3\varphi G_{2,1}(\sqrt{2}, 5r) \right\}.$$

Здесь

$$r = \sqrt{(x_1 - ls)^2 + x_2^2}, \quad \sin \varphi = \frac{x_2}{r},$$

$G_{1,0}(z)$ и $G_{2,1}(z)$ – специальная G -функция, определяемая выражением [14]

$$G_{n,\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-n} K_{n+\nu}(z) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{\Gamma(\nu+k)}{(n-k)!} \left(\frac{2}{z}\right)^{2k} \quad (n > 0, \operatorname{Re} \nu > -1),$$

где $K_n(z)$ – функция Макдональда, $\Gamma(\nu)$ – гамма-функция.

В интегральных представлениях (9) неизвестные функции ψ_k^q , зависящие от координаты точки разреза L , определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_1^0 &= \frac{d[u]}{ds}, & \psi_2^0 &= \frac{d[v]}{ds}, & \psi_1^1 &= \frac{d[\gamma_1]}{ds}, & \psi_2^1 &= \frac{d[\gamma_2]}{ds}, & \psi_3^1 &= \frac{d[w_0]}{ds}, \\ \psi_4^1 &= [\gamma_1], & \psi_5^1 &= [\gamma_2], & \psi_3^0 &= \psi_6^1 = [T_0], & \psi_4^0 &= \psi_7^1 = [T_1]. \end{aligned}$$

С использованием интегральных представлений (9) и граничных условий (8), получим системы сингулярных интегральных уравнений для определения неизвестных функций ψ_j^q . При этом функции $\psi_3^0, \psi_4^0, \psi_6^1, \psi_7^1$ находятся при решении задачи теплопроводности (4), (7).

В общем случае приходим к двум системам сингулярных интегральных уравнений, одна из которых определяет безмоментное термоупругое состояние, а вторая – термоупругий изгиб.

Система СИУ для безмоментного термоупругого состояния

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^0(s)}{s-\zeta} ds = F_j^0(\zeta) \quad (j = 1, 2; |\zeta| \leq 1). \quad (10)$$

Система СИУ для термоупругого изгиба

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^1(s)}{s-\zeta} ds + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^3 \int_{-1}^1 E_{jk}^1(\zeta-s) \psi_k^1(s) ds = F_j^1(\zeta) \\ (j = \overline{1, 3}; |\zeta| \leq 1). \end{aligned} \quad (11)$$

Разностные ядра системы (11) $E_{jk}^1(\zeta-s)$ являются линейными комбинациями G-функций и их первообразных, например,

$$\begin{aligned} E_{22}^1(\zeta-s) &= -1, 5\Lambda_0 l^2 (\zeta-s) G_{2,0}(\sqrt{2, 5}|\zeta-s|) + 0, 3\sqrt{2, 5}\Lambda_0 \text{sign}(\zeta-s) \times \\ &\times \left\{ \text{IG}_{2,2}(\sqrt{2, 5}|\zeta-s|) - \text{IG}_{0,0}(\sqrt{2, 5}|\zeta-s|) \right\}, \quad \text{IG}_{n,\nu}(s) = \int_0^s G_{n,\nu}(t) dt. \end{aligned}$$

Правые части этих систем СИУ представляют собой суммы значений обобщённых усилий и моментов основного термоупругого состояния на линии разреза и интегралов от скачков компонент температуры с разностными ядрами, представляющими собой линейные комбинации G-функций, зависящих от параметров теплообмена.

Из требования непрерывности обобщённых перемещений в вершинах разреза следуют дополнительные условия на искомые функции

$$\int_{-1}^1 \psi_j^q(s) ds = 0 \quad (q = 0, 1; j = \overline{1, 3}). \quad (12)$$

Решения СИУ (10) при ограничениях (12) могут быть получены аналитически [15] в классе функций, неограниченных на концах отрезка $[-1, 1]$:

$$\psi_j^0(\zeta) = -\frac{1}{\pi\sqrt{1-\zeta^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-s^2}}{s-\zeta} F_j^0(s) ds \quad (j = 1, 2).$$

Система (11) является системой СИУ типа Коши первого рода, которая при дополнительных условиях (12) может быть решена численно, методом механических квадратур. После решения этой системы остальные искомые функции находим по формулам

$$\psi_{j+3}^1(s) = \int_{-1}^s \psi_j^1(t) dt \quad (j = 1, 2),$$

а внутренние силовые факторы возмущённого термоупругого состояния находим с помощью интегральных представлений (9).

При решении задач механики разрушения необходимым этапом является определение КИН. Если источником напряжений является температура, то кроме термоупругих силовых компонентов фактором влияния на величину коэффициентов интенсивности являются также скачки температуры на линии разреза. В задачах термомеханики разрушения именно эти составляющие КИН и являются предметом исследования. С этой целью все силовые составляющие основного термоупругого состояния не принимаются в расчёт, то есть предполагаются равными нулю. Тогда проведённые исследования позволяют оценить вклад скачков температуры на линии разреза в возможную причину разрушения тонкостенных элементов конструкций.

Выражения для КИН получим с использованием интегральных представлений для обобщённых усилий и моментов (9), сравнивая коэффициенты при особенности $r^{-1/2}$ в ненулевых компонентах тензора напряжений с известными асимптотическими представлениями напряжений. В случае температурной нагрузки это КИН для поперечного (K_{II}) и продольного (K_{III}) сдвига:

$$K_{II}^{\pm} = \mp 0, 25\sqrt{\pi lh} E \left\{ P_0 \lim_{s \rightarrow \pm 1} \left[\psi_1^0(s) \sqrt{1-s^2} \right] + P_1 \lim_{s \rightarrow \pm 1} \left[\psi_1^1(s) \sqrt{1-s^2} \right] \right\},$$

$$K_{III}^{\pm} = \mp 0, 25\sqrt{\pi lh} E \Lambda_0 (P_0 - P_2) \lim_{s \rightarrow \pm 1} \left\{ \psi_3^1(s) \sqrt{1-s^2} \right\}. \quad (13)$$

Поскольку температурные напряжения по своему характеру неравномерны по толщине пластины (2), то и КИН (13) на основании свойств полиномов Лежандра имеют максимальные по абсолютной величине значения в различных точках по толщине. Так, K_{II} достигает максимального по модулю значения на

одной из лицевых поверхностей пластины, а K_{III} – в срединной плоскости пластины.

$$K_{II}^{\max} = 0,25\sqrt{\pi lh}E \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ \sum_{q=0,1} |\psi_1^q(s)| \sqrt{1-s^2} \right\},$$

$$K_{III}^{\max} = 0,375\sqrt{\pi lh}E\Lambda_0 \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ |\psi_3^1(s)| \sqrt{1-s^2} \right\}. \quad (14)$$

Именно эти величины и являются предметом исследования в задачах термомеханики разрушения тонкостенных элементов конструкций.

3. Анализ численных результатов. Исследовалась зависимость максимальных по модулю значений КИН (14) от геометрических параметров разреза и величины теплообмена с внешней средой для случая верхнего одностороннего теплообмена ($Bi^+ = Bi$, $Bi^- = 0$). Температурная нагрузка на линии разреза, приводящая к изгибу, предполагалась следующей:

$$\left. \frac{\partial T_0^o}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T_1^o}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = q_1 = \text{const} \neq 0.$$

Значение коэффициента Пуассона принималось равным 0,3. Силовые компоненты основного термоупругого состояния не учитывались, то есть принимались равными нулю.

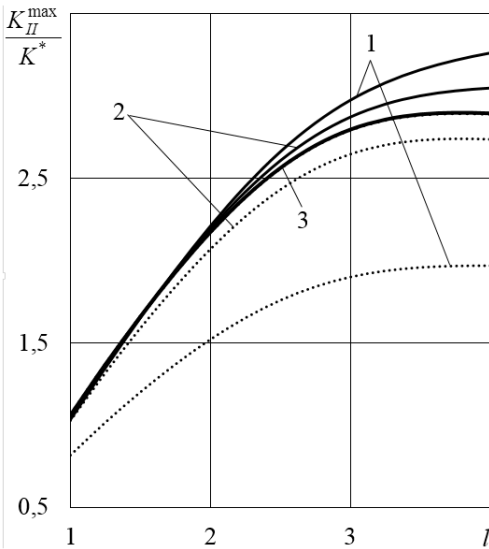


Рис. 1

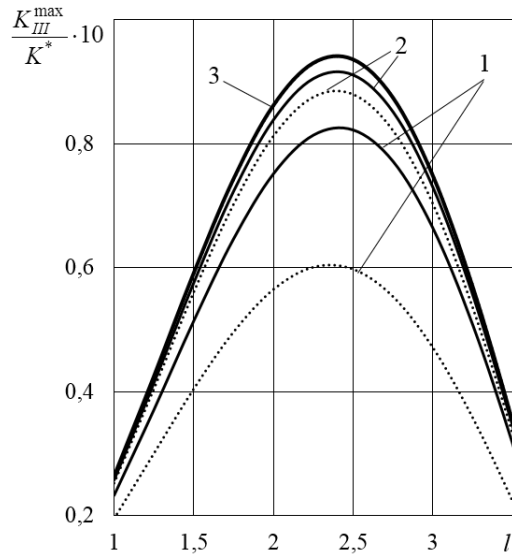


Рис. 2

Результаты численных исследований представлены на рисунках 1 и 2 в виде графиков зависимостей относительных максимальных значений КИН от длины разреза при различных уровнях теплообмена. Рис. 1 соответствует КИН для поперечного сдвига K_{II}^{\max} , а рис. 2 – КИН для продольного сдвига K_{III}^{\max} . Значения

КИН приведены в отношении к величине $K^* = 0,25\alpha q_1 E\sqrt{lh}$, которая соответствует значению КИН в пластине без теплообмена при действии однородного потока тепла перпендикулярно линии разреза. Сплошными кривыми показаны зависимости в случае одностороннего теплообмена, пунктирными – в случае симметричного теплообмена ($Bi^+ = Bi^- = Bi$). Цифрами 1, 2, 3 обозначены графики, отвечающие значениям критерия Био (Bi) 1; 0,1; 0,001 соответственно.

Из графиков можно сделать вывод, что относительные максимальные значения КИН поперечного сдвига возрастают с увеличением длины разреза. Для малых длин этот рост существенный, но с увеличением длины разреза он замедляется. Относительные максимальные значения КИН продольного сдвига вначале растут, а затем убывают. Такое поведение имеет следующее объяснение.

Величина КИН, по отношению к которой приведены значения на графиках (K^*), не является постоянной, а изменяется как \sqrt{l} с увеличением длины разреза. Этот КИН обусловлен касательными напряжениями вдоль линии разреза на его противоположных берегах. В этом направлении смещения малы из-за большой жёсткости среды.

КИН продольного сдвига (K_{III}) обусловлен касательными напряжениями вдоль линии трещины (по толщине пластины) на противоположных плоскостях разреза. В этом направлении смещения обусловлены изгибом пластины со свободными поверхностями плоскостей разреза, а не растяжением-сжатием. То есть жёсткость перпендикулярно плоскости пластины будет существенно меньше, чем в плоскости пластины. Поэтому со значительным ростом длины разреза касательные напряжения продольного сдвига будут расти медленней, чем касательные напряжения поперечного сдвига. Тогда отношение K_{III}^{\max}/K^* будет уменьшаться. При этом абсолютные значения K_{II}^{\max} и K_{III}^{\max} всегда увеличиваются с ростом длины разреза.

Из графиков также следует, что максимальные по модулю значения КИН (K_{II}^{\max} , K_{III}^{\max}) в случае одностороннего теплообмена больше, чем в случае симметричного теплообмена. С увеличением параметра теплообмена (Bi) максимальные по модулю значения КИН для поперечного сдвига (K_{II}^{\max}) увеличиваются в случае одностороннего теплообмена и уменьшаются в случае симметричного теплообмена. Максимальные по модулю значения КИН для продольного сдвига (K_{III}^{\max}) уменьшаются с увеличением параметра теплообмена (Bi) в не зависимости от характера теплообмена.

Закключение. Таким образом, можно сделать вывод, что при оценке трещиностойкости тонкостенных элементов конструкций при температурных нагрузках, приводящих к изгибу, необходимо учитывать длину возможных дефектов, величину и характер теплообмена с окружающей средой.

1. Шевченко В.П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек // Концентрация напряжений / Под ред. А.Н. Гузя, А.С. Космодамианского, В.П. Шевченко — Киев: А.С.К., 1998. — 387 с. — (Механика композитов: в 12т.; Т.7). — С. 159–196.

2. Хома И.Ю. Обобщённая теория анизотропных оболочек / И.Ю. Хома. — К.: Наук. думка, 1986. — 172 с.
3. Пелех Б.Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б.Л. Пелех, В.А. Лазько. — К.: Наук. думка, 1982. — 296 с.
4. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек / И.Н. Векуа. — М.: Наука, 1982. — 285 с.
5. Тучапський Р.І. Рівняння тонких анизотропних пружних оболонок обертання методу $\{m, n\}$ -апроксимації / Р.І. Тучапський // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2015. — Т. 58, № 3. — С. 43–56.
6. Zozulya V. V. A higher order theory for shells, plates and rods / V.V. Zozulya // International Journal of Mechanical Sciences. — 2015. — Vol. 103, November. — P. 40–54.
7. Бондаренко Н.С. Исследование влияния длины разреза на коэффициенты интенсивности напряжений в изотропной пластине на базе обобщённой теории / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // Труды ИПММ НАН Украины. — 2015. — Том 29. — С. 20–28.
8. Бондаренко Н.С. Исследование влияния внешней среды на термоупругое состояние изотропной пластины с теплоизолированным разрезом при одностороннем теплообмене / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // Теоретическая и прикладная механика. — 2014. — № 9 (55). — С. 42–52.
9. Бондаренко Н.С. Исследование влияния внешней среды на состояние термоупругого изгиба изотропных пластин с теплоизолированным разрезом / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // Труды ИПММ НАН Украины. — 2016. — Т. 30. — С. 20–28.
10. Пелех Б.Л. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек / Б.Л. Пелех, М.А. Сухорольский. — К.: Наук. думка, 1980. — 216 с.
11. Кит Г.С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г.С. Кит, М.Г. Кривцун. — К.: Наук. думка, 1984. — 280 с.
12. Шевченко В.П. Задачи термоупругости тонких оболочек с разрезами: учеб. пособие / В.П. Шевченко, А.С. Гольцев. — К.: УМК ВО, 1988. — 84 с.
13. Бондаренко Н.С. Использование обобщенной теории в задачах теплопроводности для изотропных пластин с теплоизолированным разрезом / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. — 2012. — № 1. — С. 26–32.
14. Хижняк В.К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учеб. пособие // В.К. Хижняк, В.П. Шевченко. — Донецк: ДонГУ, 1980. — 128 с.
15. Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям / А.Д. Полянин, А.В. Манжиров. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 608 с.

N.S. Bondarenko, A.S. Goltsev

Stress intensity factors at the thermoelastic bending of isotropic plates with heat-insulated cut in the case of arbitrary heat exchange.

The thermoelastic bending problem for an isotropic plate with a heat-insulated cut in the case of arbitrary heat exchange with the external environment is solved. The generalized theory in the version of the $\{1, 0\}$ -approximation is used. The initial problem is reduced to systems of singular integral equations. The influence of the cut length, the value and character of heat exchange with the external environment on stress intensity factors is investigated.

Keywords: *isotropic plate, heat-insulated cut, thermoelastic bending, singular integral equations, stress intensity factors.*

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ

УДК (669.788+669.234):539.37

©2018. Ж.Л. Глухова, В.А. Гольцов

ВЛИЯНИЕ ВОДОРОДОУПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ НА КОНЦЕНТРАЦИОННЫЕ ПРОФИЛИ ВОДОРОДА

Осуществлено математическое моделирование диффузионного насыщения металла водородом из области с повышенным содержанием водорода и проведены компьютерные расчеты концентрационных профилей в двух случаях: по уравнению Фика и с учетом вклада в процесс проникновения водорода возникающих при этом водородоупругих напряжений. Исследовано влияние ВК-напряжений на концентрационные профили водорода.

Ключевые слова: системы металл-водород, водородоупругие напряжения, диффузия водорода, концентрационная неоднородность, концентрационные профили.

Введение. Растворенный в металле водород вызывает сильную дилатацию кристаллической решетки. Соответственно, любые неоднородности и перераспределения водорода, любые градиенты его концентрации, обусловленные внешними или внутренними причинами, вызывают появление в металле внутренних механических водородных концентрационных (ВК-) напряжений [1-3]. Когда ВК-напряжения не превосходят предел упругости металла, все диффузионно-кооперативные процессы в неравновесных системах металл-водород реализуются за счет упругих деформаций кристаллической решетки и соответствующего перераспределения внедренных атомов водорода. Таким образом, все многообразные диффузионные эффекты [1-10], имеющие место в неравновесных твердых растворах водорода в металлах, имеют единую физическую основу и являются проявлением единого обобщенного явления – явления водородоупругости [7,10].

Исследование различных проявлений водородоупругости в процессе насыщения металла водородом имеет не только важное прикладное значение в связи с развитием водородной энергетики и экономики, целью которых является получение и использование новых возобновляемых источников энергии, но также представляет несомненный теоретический интерес. В соответствии с вышесказанным в настоящей работе была поставлена задача – осуществить математическое моделирование процесса насыщения металла водородом и провести компьютерные расчеты концентрационных профилей как в «чистом» виде, в соответствии с уравнением Фика, так и с учетом вклада в процесс проникновения водорода возникающих при этом водородных напряжений.

1. Разработанная модель и методика расчета. Для исследования выбрана система Pd-H. В работе решена задача о диффузионном насыщении во-

дородом бесконечной упругой среды из шарообразной области, концентрация водорода в которой поддерживается постоянной. Сферическая симметрия позволяет рассматривать трехмерную задачу в простом, с расчетной точки зрения, варианте. Исследования проводили методом математического моделирования.

Сначала была решена чисто диффузионная задача (без учета ВК-напряжений). Распределение концентрации водорода в среде с течением времени в этом случае дает решение уравнения Фика в сферических координатах:

$$D \left(\frac{2\partial c}{r\partial r} + \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} \right) = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (1)$$

где r – расстояние, отсчитываемое от центра шара.

Предполагалось, что концентрация в каждой точке шарообразной области радиусом R одинакова и равна c_o , причем с течением времени значение концентрации здесь не изменяется. А в бесконечной среде, окружающей эту область, в начальный момент времени концентрация водорода равна нулю. Для такого случая начальные условия были записаны в виде:

$$c = \begin{cases} c_o & \text{для } 0 \leq r \leq R \\ 0 & \text{для } r > R \end{cases} \quad (2)$$

где R – радиус шарообразной области; c_o – концентрация водорода в шаре.

Для рассматриваемой задачи с учетом того, что среда бесконечная, граничные условия записаны следующим образом:

$$c(\infty, t) = 0, \quad (3)$$

$$c(r, t) = c_o \text{ для } 0 \leq r \leq R. \quad (4)$$

Уравнение (1) с начальными условиями (2) и граничными условиями (3)-(4) было решено численными методами на ЭВМ. Концентрация водорода в шарообразной области, из которой происходит насыщение водородом бесконечной среды, была принята равной $c_o = 0,006$ Н/Pd (критическая температура гидридного превращения для данной концентрации $T_{кр} = 277$ К). Расчеты выполнены для $R = 0,1$ мм для двух значений температуры: 110°C и 240°C . Значения коэффициентов диффузии водорода D при этих температурах были взяты из экспериментальных данных, представленных в [9]. Программа позволяет получать и выводить на экран концентрационные кривые $c=f(r)$ через заданный интервал времени.

Далее изучали диффузионное насыщение водородом бесконечной упругой среды из шарообразной области, в которой концентрация водорода поддерживалась постоянной, с учетом влияния на диффузионный процесс возникающих из-за расширения кристаллической решетки металла водородом ВК-напряжений. Диффузионно-упругая модель была построена на основе уравнений изотермической водородоупругости [10]. При этом задача была сформулирована и решена следующим образом. Из бесконечной упругой среды мысленно вынимается шар

радиусом R , который насыщается водородом до концентрации c_0 , что приводит к линейному концентрационному расширению металла [1]. Далее наводороженный шар уже большего радиуса вновь помещается в сферическую полость исходного радиуса R . Это вызывает возникновение деформаций шара и упругой среды и, соответственно, появление упругих напряжений. При рассмотрении поведения концентрационных неоднородностей в виде шара с учетом возникающих водородоупругих напряжений мы имеем случай полярно-симметричного напряженного состояния. При этом отличным от нуля будет только радиальное перемещение u_r . Все компоненты деформаций и напряжений за исключением ε_{rr} , $\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi}$ и σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$ будут равны нулю (в сферической системе координат).

Для рассматриваемой задачи уравнение диффузии [10]. в сферических координатах, принимает следующий вид:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = D \left[\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right] - \frac{DK}{T} c \left[\frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 2 \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} \right], \quad (5)$$

где $K = A_{M\alpha H} / (\rho R_A)$, A_M – атомная масса металла (в нашем случае палладия), α_H – коэффициент водородного концентрационного линейного расширения металла, ρ – плотность металла, R_A – универсальная газовая постоянная, σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$ – компоненты тензора напряжений, T – абсолютная температура.

Так как время релаксации для диффузии значительно больше времени релаксации для механических движений, то вместо уравнения движения, как уже отмечалось в [10], можно использовать уравнение равновесия, которое в сферических координатах записываем в виде:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r} \sigma_{rr} - 2 \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} = 0. \quad (6)$$

Компоненты тензора напряжений σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$ и тензора деформаций ε_{rr} , $\varepsilon_{\theta\theta}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$, как известно, связаны соотношениями:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{rr} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta}) - \frac{E}{1-2\nu} \alpha_{HC}; \quad (7)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta}) - \frac{E}{1-2\nu} \alpha_{HC}; \quad (8)$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Компоненты тензора деформаций выражаются через компоненты вектора смещений u_r следующим образом

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad (9)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}. \quad (10)$$

В уравнении равновесия (6) напряжения σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ были выражены через деформации согласно уравнениям (7)-(8), а последние через смещения в соответствии с (9)-(10). Далее для того, чтобы уравнения диффузии и равновесия имели более компактный вид, были введены следующие обозначения

$$A = \frac{E}{1 + \nu}, \quad B = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad F = -\frac{E}{1 - 2\nu}\alpha_n, \quad G = \frac{DK}{T}, \quad (11)$$

$$L = A + B, \quad M = -G(A + 3B), \quad N = -3GF. \quad (12)$$

С учетом указанных выше преобразований уравнение равновесия в смещениях записали в виде

$$L \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2L}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2L}{r^2} u + F \frac{\partial c}{\partial r} = 0. \quad (13)$$

В диффузионном уравнении (5) также был осуществлен переход к переменным c и u_r . После соответствующих преобразований диффузионное уравнение принимает вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{2D}{r} \frac{\partial c}{\partial r} + Mc \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{4M}{r} c \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + N \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{2N}{r} \frac{\partial c}{\partial r}. \quad (14)$$

Таким образом, была получена система двух дифференциальных уравнений (13)-(14) с двумя неизвестными, которая при заданных начальных и граничных условиях определяет распределение $c = f(r, t)$ и $u_r = f(r, t)$.

Для рассматриваемой задачи граничные условия были заданы соотношениями

$$c(\infty, t) = 0, \quad (15)$$

$$c(r, t) = c_o \text{ для } 0 \leq r \leq R. \quad (16)$$

$$u_r = (\infty, t) = 0. \quad (17)$$

Начальные условия для концентрации в данной задаче, как и в чисто диффузионном случае имеют вид (2).

Анализ уравнений (13), (14) показывает, что начальное распределение смещений $u_r(r, 0)$ можно получить из уравнения (14) по заданным начальным условиям для концентраций водорода.

Таким образом, дифференциальные уравнения (13)-(14) с граничными и начальными условиями (15)-(17) и (2) совместно с выражениями (7)-(10) составляют замкнутую систему уравнений, являющихся математической моделью диффузионного насыщения водородом бесконечной упругой среды из шарообразной области, концентрация водорода в которой поддерживается постоянной, с учетом влияния водородоупругих напряжений.

Математическое моделирование и расчеты выполнены для системы палладий-водород при следующих значениях констант: модуль Юнга $E=1,15 \times 10^{11}$ Па; коэффициент Пуассона $\nu=0,3$; коэффициент водородного концентрационного линейного расширения $\alpha_n=0,063$. Расчеты выполнили для значений температуры 110°C и 240°C . Радиус шарообразной области приняли равным $0,1\text{мм}$. Концентрации водорода в этой области $c_0=0,006$ Н/Pd (концентрация выбиралась из условия, чтобы исходные возникающие напряжения в металле не превосходили бы $\sigma_{0,2}$, для отожженного Pd $\sigma_{0,2}=56$ МПа).

2. Результаты расчетов и их обсуждение. В результате численных расчетов получена картина пространственно-временного изменения концентрации водорода в бесконечной упругой среде при ее насыщении из шарообразной области радиусом R_0 , в которой поддерживается постоянная концентрация водорода. Программа позволяет выводить на экран концентрационные кривые через заданные временные интервалы. Результаты компьютерных исследований обобщены на рис. 1-4. На всех рисунках показано изменение концентрации водорода в бесконечной среде на расстоянии равном $10 R_0$.

На рис.1 представлены кривые распределения концентрации водорода в бесконечной упругой среде при ее насыщении при температуре 110°C . Концентрационные кривые, рассчитанные по уравнению Фика, показаны сплошными линиями 1 и 3. Кривая 1 соответствует моменту времени 10с и кривая 3 – моменту времени 120с . Обе кривые являются вогнутыми. Концентрационные кривые, рассчитанные по водородоупругой модели, показаны пунктирными линиями 2 и 4 для тех же моментов времени 10с (кривая 2) и 120с (кривая 4). Как видно из рисунка 1, водородоупругие напряжения при заданном значении температуры не оказывают значительного влияния на скорость диффузионного процесса. «Глубина проникновения водорода» для выделенных моментов времени в двух случаях практически одинакова: в момент времени 10с концентрация становится равной нулю на расстоянии приблизительно равном $4 R_0$ (см. кривая 1, соответствующая уравнению Фика, и кривая 2, соответствующая водородоупругой модели). В момент времени 120с концентрационные кривые, соответствующие обеим моделям, также выходят в ноль практически на одинаковом расстоянии – около $7 R_0$ (см кривые 3 и 4). Существенным является влияние водородоупругих напряжений на форму концентрационной кривой. Концентрационные кривые 1 и 3, рассчитанные по уравнению Фика, являются вогнутыми, как уже упоминалось выше, а кривые 2 и 4, рассчитанные по водородоупругой модели, имеют точку перегиба, на что указывает экстремальный характер функции, выражающей модуль производной (см. рис.2). В области, приграничной с наводороженным шаром, концентрационные кривые 2 и 4, рассчитанные по водородоупругой модели, выпуклые и лежат выше фиковских, а на удалении – вогнутые и лежат ниже фиковских. С увеличением времени насыщения точка перегиба кривых соответствуют большие значения концентрации водорода (см. точку А для момента времени 10с и A_1 для момента времени 120с на рис.1). Сравнение кривых 1 и 2 выше точки А и кривых 3 и 4 выше точки A_1 указывает

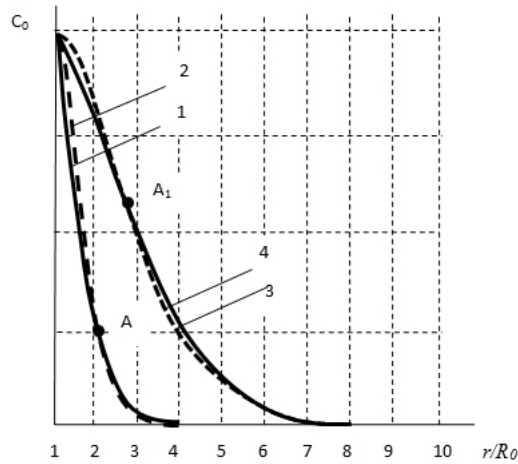


Рис. 1. Концентрационные кривые при температуре 110°C для моментов времени 10с и 120с: r – расстояние, отсчитываемое от центра шарообразной насыщенной водородом области, R_0 – радиус этой шарообразной области, в которой поддерживается постоянная концентрация водорода c_0 . Кривая 1 и кривая 3, показанные сплошной линией, соответствуют решению по Фику для моментов времени 10с и 120с, соответственно, кривая 2 и кривая 4, показанные пунктирной линией, соответствуют водородоупругой модели для моментов времени 10с и 120с.

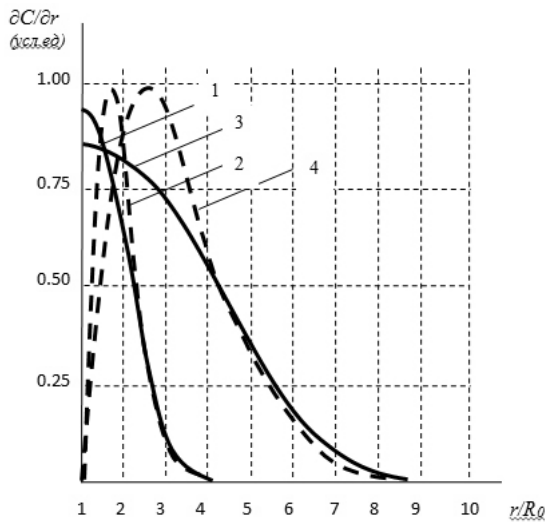


Рис. 2. Модуль производной функции $c = f(r)$ для концентрационных кривых, представленных на рис. 1 (все кривые на рисунке нормированы на максимальное значение производной).

на незначительное увеличение с течением времени и количественного различия концентрации в области, приграничной с наводороженным шаром. Учитывая эти тенденции в поведении концентрационных кривых, можно сделать вывод, что водородоупругие напряжения способствуют формированию приповерхност-

ного слоя повышенной концентрации водорода.

При температуре 240°C наблюдаются такие же в целом закономерности в поведении концентрационных кривых, рассчитанных по уравнению Фика и по водородоупругой модели, как и описанные выше для 110°C . Результаты расчетов представлены на рис. 3. На рис. 4 даны графики модуля производной функции $c = f(r)$ для каждой кривой рис. 3. С увеличением температуры и, соответственно, коэффициента диффузии водорода влияние водородоупругих напряжений на скорость диффузионного процесса уменьшается (в момент времени 120с кривые 3 и 4 не выходят в ноль, см рис. 3). Сравнение концентрационных кривых, рассчитанных по уравнению Фика и согласно водородоупругой модели, при температуре 240°C показывает, что выпуклость в приповерхностной области и вогнутость на удалении у кривой, соответствующей водородоупругой модели, сохраняется, но количественные расхождения концентрационных кривых при 240°C уже незначительны. При 240°C не прослеживается тенденция к формированию слоя с повышенной концентрацией.

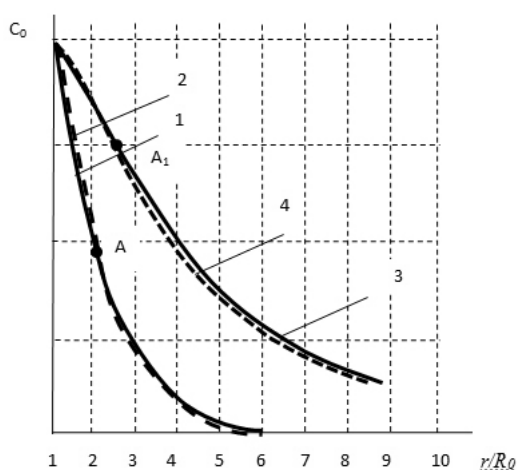


Рис. 3. Концентрационные кривые при температуре 240°C для моментов времени 10с и 120с: r – расстояние, отсчитываемое от центра шарообразной насыщенной водородом области, R_0 – радиус этой шарообразной области, в которой поддерживается постоянная концентрация водорода c_0 . Кривая 1 и кривая 3, показанные сплошной линией, соответствуют решению по Фика для моментов времени 10с и 120с, соответственно, кривая 2 и кривая 4, показанные пунктирной линией, соответствуют водородоупругой модели для моментов времени 10с и 120с.

Установленные и описанные в данной работе закономерности в поведении водорода хорошо согласуются с экспериментальными результатами, полученными при насыщении водородом образцов из ниобия [11] и палладия [12,13]. В [13] для случая насыщения образца водородом показано, что при понижении температуры водород все медленнее проникает вглубь металла, локализуясь в основном в тонком приповерхностном слое. Авторами работ [13,14] локализация водорода вблизи поверхности объясняется автолокализацией внедренных атомов собственным полем деформаций.

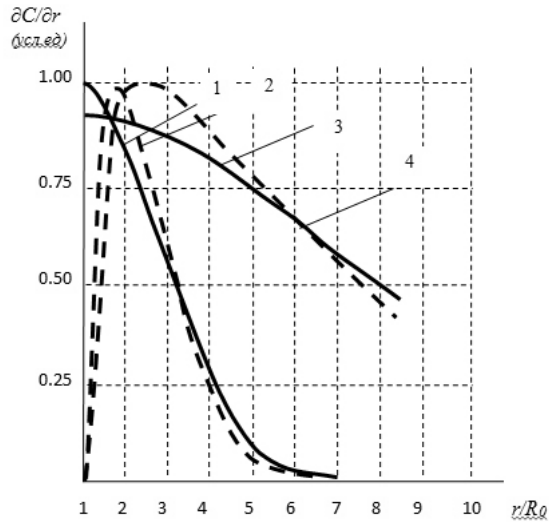


Рис. 4. Модуль производной функции $c = f(r)$ для концентрационных кривых, представленных на рис. 3 (все кривые на рисунке нормированы на максимальное значение производной).

Заключение. В настоящей работе построена модель диффузионного насыщения водородом металла из области с повышенным содержанием водорода с учетом явления водородоупругости и показано влияние ВК-напряжений на форму концентрационных кривых. Концентрационные кривые, рассчитанные по водородоупругой модели, являются выпуклыми в приповерхностном слое и вогнутыми на удалении в отличие от фиковских кривых, вогнутых во всей области. Различия указывают на то, что водородоупругие напряжения способствуют формированию приповерхностного слоя повышенной концентрации водорода.

С ростом температуры и, соответственно, увеличением коэффициентов диффузии водорода влияние водородоупругих напряжений на диффузионный процесс в целом и форму концентрационных кривых существенно уменьшается.

1. Водород в металлах: в 2 т. / под ред. Г. Алефельда и И. Фелькля. – М.: Мир, 1981. – Т. 1 – 475 с, Т. 2 – 430 с.
2. Goltsov V.A. Fundamentals of Hydrogen Treatment of Materials / Progress in Hydrogen Treatment of Materials. – Donetsk-Coral Gables: Kassiopeya Ltd., 2001. – P. 3–37.
3. Goltsov V.A. Progress in Hydrogen Treatment of Materials / V.A. Goltsov. – Donetsk-Coral Gables: Kassiopeya Ltd., 2001. – 543 p.
4. Kandasamy K. Influences of self-induced stress on permeation flux and space-time variation of concentration during diffusion of hydrogen in a palladium alloy / K. Kandasamy // Int. J. Hydrogen Energy. – 1995. – Vol. 20, № 6. – P. 455–463, .
5. Lewis F.A. Baranowski B. And Kandasamy K. Uphill diffusion effects induced by self-stress during hydrogen diffusion through metallic membranes / F.A. Lewis // J.of the Less-Common Metals. – 1987. – Vol. 134.–P. 27–31.
6. Lewis F.A. The “Uphill” diffusion of hydrogen: strain-gradient-induced effects in palladium alloy membranes / F.A. Lewis, K. Kandasamy, B. Baranowski // Int. J. Hydrogen Energy. – 1988. – Vol. 13, № 17. – P. 439–442.

7. Гольцов В.А. Явление водородоупругости и его роль в диффузионном рассасывании концентрационных неоднородностей / В.А. Гольцов, Ж.Л. Глухова, А.Л. Редько // ФММ. – 1996. – Т. 82, № 2. – С. 49–55.
8. Гольцов В.А. Упругое изменение формы палладиевой пластины под действием водорода. I. Результаты эксперимента / В.А. Гольцов, Ж.Л. Глухова // ФММ. – 2000. – Т. 90, № 4. – С. 68–73
9. Фром Е. Газы и углерод в металлах / Е. Фром, Е. Гебхарт. – М.:Металлургия, 1980.–712 с.
10. Гольцов В.А. Термодинамические основы явления водородоупругости / В.А. Гольцов, А.Л. Редько, Ж.Л. Глухова // ФММ. – 2003.– Т. 95, № 1. С. 21–26.
11. Surface bulk uptake of hydrogen by Niobium / M. Strongin, I. Colbert, G.I. Dienes, D. Welch // Phys. Rev. B: Condens. Mater. – 1982,– Vol. 26, № 6. – P. 2715–2719.
12. Bloch J. Kinetics and mechanisms of metal hydrogen formation – a preview / J. Bloch, M.H. Mintz // J. Alloys and Compounds. – 1997. – Vol. 253–254. – P. 529–541.
13. Влияние химического и деформационного взаимодействия атомов водорода на их диффузию в металлах / Л.И. Смирнов, В.А. Гольцов, Б.А. Лобанов, Э.В. Рузин // ФММ. –1985. – Т. 60, № 4. – С. 770–775.
14. Гольцов В.А. Диффузия и растворимость водорода в металлах и упорядочивающихся сплавах / В.А. Гольцов, В.В. Латышев, Л.И. Смирнов // Взаимодействие водорода с металлами. – М.: Наука. – 1987. – Гл. 4. – С. 105–143.

J.L. Glukhova, V.A. Goltsov

The Influence of Hydrogen-Elastic Stresses on Hydrogen Concentration Profiles.

Mathematical simulation of diffusion metal saturation with hydrogen from high hydrogen content region is made and computer calculations of concentration profiles are carried out for two cases: by Fick's diffusion equation and taking into account contribution of hydrogen-elastic stresses to the hydrogen-penetration process. The influence of hydrogen-concentration stresses on hydrogen concentration profiles is investigated.

Keywords: *metal-hydrogen systems, hydrogen-elastic stresses, hydrogen diffusion, concentration inhomogeneity, concentration profiles.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет»,
Донецк
zhglukhova@yandex.ru

Получено 30.03.18

УДК 669.18:001.891.54.

©2018. А.А. Беззуб, В.В. Белоусов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ И ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ВАННЕ АГРЕГАТА КОВШ-ПЕЧЬ

Статья посвящена моделированию гидродинамических и теплофизических процессов в ванне агрегата ковш-печь АКП. Представлены физическая и математическая модели процессов переноса в АКП. Выбран и обоснован метод численной реализации, а также представлены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: Агрегат ковш-печь, численное моделирование, конечно-разностная сетка, естественная и вынужденная конвекция.

Введение. За последние десятилетия утвердилась новая концепция производства стали, в соответствии с которой сталеплавильный агрегат предназначен, главным образом, для расплавления шихты и доведения расплава по температуре, т.е. для получения полупродукта. Сталь с заданным составом, качеством и свойствами получают на агрегате ковш-печь. Этот агрегат наиболее рационально обеспечивает возможность гибкого управления процессом формирования физико-химического состояния расплава для достижения поставленной цели - получение высококачественной стали с заданным химическим составом и свойствами.

Вместе с тем, несмотря на широкое внедрение агрегата ковш-печь (АКП) в производстве, существуют ряд проблем, решение которых существенно влияет на качество металла и износостойкостью самого агрегата. Решение этих проблем путем лабораторного или промышленного эксперимента не эффективно и затратно.

Поэтому, целью данной работы является формулировка математической модели и вычислительного алгоритма расчета и теплофизических процессов в ванне АКП.

1. Физическая и математическая постановки задачи. Рассматривается сталеразливочный ковш с вместимостью – 60 т. жидкой стали, с начальной температурой футеровки – 900°C , начальной температурой жидкого металла в ковше – 1600°C . Процесс наполнения жидкой сталью не рассматривается. В модели ведется учет воздействия конвективного теплообмена с окружающей средой, учитывается температура окружающей среды. Теплоизоляция сталеразливочного ковша представляет собой систему из пяти слоев – четыре из которых теплоизоляционных, а пятый – непосредственно стальная основа – броня.

Несимметричность расположения пробок не позволило решать задачу в цилиндрических координатах. Поэтому, для генерации сетки выбраны декартовы координаты, где в торцевых частях области подбором шагов аппроксимирова-

лось основание цилиндра. Расчетная область представлена на рисунке 1, а, б, в, г.

Гидродинамические и теплофизические процессы в сталеразливочном ковше описываются [1]:

Уравнением теплопроводности:

$$A\rho \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] = \lambda \Delta T. \quad (1)$$

Уравнением Навье-Стокса в трех компонентах и уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \bar{g}\beta\Delta T + \bar{g}\beta_{\Gamma}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Где c – теплоемкость при постоянном давлении, Дж/кг, ρ – плотность расплава, кг/м³; T – текущая температура, °C; t – текущее время; u, v, w – компоненты скорости вдоль координат x, y, z соответственно, м/с; λ – коэффициент теплопроводности, Дж/кгК; P – давление, Н/м²; g – ускорение свободного падения, м/с²; β – коэффициент объемного расширения, 1/К; β_{Γ} – коэффициент газосодержания, определенный в работе [2].

На всех внутренних стенках АКП выполняется условия прилипания и непроницаемости для компонент скорости. Между теплоизолирующими слоям стенок АКП, выполняются граничные условия 4 рода:

$$\lambda_i \frac{\partial T}{\partial n} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T}{\partial n}, \quad T_i = T_{i+1}. \quad (6)$$

Где: λ_i – коэффициент теплопроводности i -го слоя футеровки, Вт/м·К.

На внешней границе стенок АКП выполняются следующие граничные условия:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha(T_{\delta} - T_{cp})$$

T_{δ} – температура брони; T_{cp} – температура окружающей среды; α – коэффициент теплообмена. Коэффициент α находится по формуле М.А. Михеева $Nu = C(Gr Pr)^n$ [3].

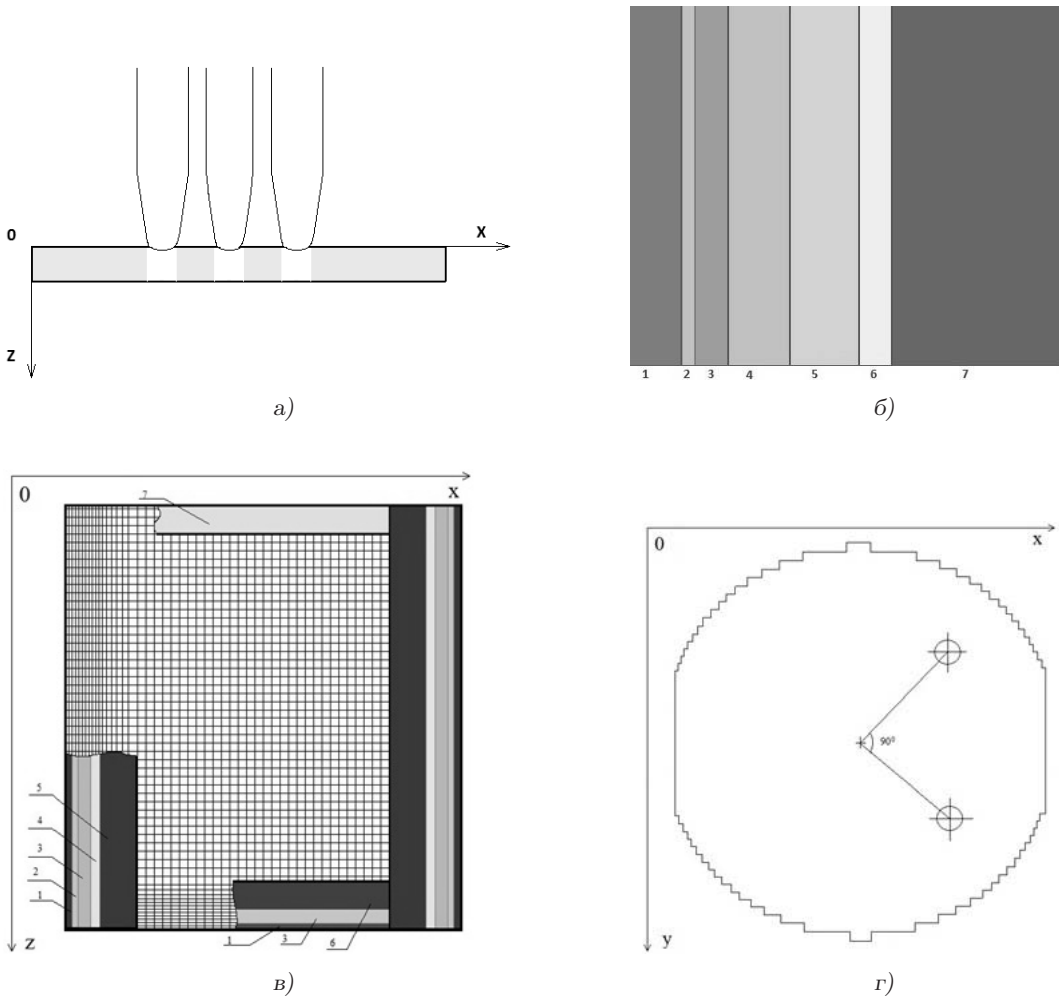


Рис. 1. Расчётная область а) шлака – вид сбоку; б) области стенок сталь-ковша. 1-броня, 2-теплоизоляционная бумага, 3-теплоизоляционные маты, 4-теплоизоляционный кирпич, 5-арматурный слой, 6-магнезит, 7-рабочая ПУ футеровка; в) область в плоскости z-x. 1-броня, 2-теплоизоляционная бумага, 3-арматурный слой, 4-магнезит, 5-рабочая ПУ футеровка, 6-бетон, 7-шлак; г) область в плоскости x-y.

Распределение начальной температуры в многослойной конструкции ковша получено в ранее созданной математической модели [4] и представлено на рис. 2.

В основе метода решения лежит так называемый «двухполевой метод» или вихрь ω - функция тока ψ . Из уравнений (2) – (4) исключается давление. Для этого выполняются следующие действия: дифференцируется первое уравнение по y , второе уравнение по x , и вычитается из второго уравнения первое; дифференцируется первое уравнение по z , а третье уравнение по x , вычитается из первого уравнения третье; дифференцируется второе уравнение по z , а третье уравнение по y , вычитается из третьего уравнения второе.

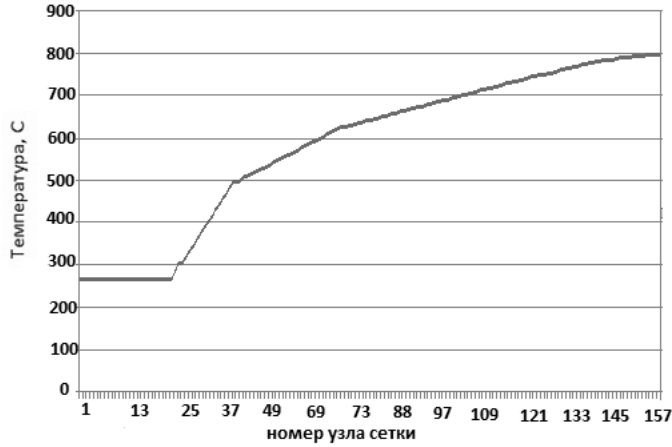


Рис. 2. Распределение температуры в футеровке сталь-ковша после 24 часового прогревания на сушке

Обычно вектор вихря определяется следующим образом:

$$\omega = \nabla \times \vec{V}; \quad (7)$$

или (в покомпонентной записи через орты i, j, k) в виде: $\omega = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$, где

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \omega_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \\ \omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \quad (8)$$

Решается уравнение для вихря скорости [1]. Значения скорости определяются из решений трех уравнений Пуассона, которые легко выводятся из уравнения неразрывности (5) с учетом определения вихря скорости (7)

$$\nabla^2 \vec{V} = \nabla \times \omega,$$

или в скалярной форме:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z}; \\ \Delta v &= \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x}; \\ \Delta w &= \frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (9)$$

Граничные условия для вихря скорости записываются следующим образом:

– условия непроницаемости и прилипания при $x - const$ с учетом условий (8) записываются в виде:

$$\omega_x = 0; \quad \omega_y = -\partial w / \partial x; \quad \omega_z = -\partial v / \partial x;$$

– условия непроницаемости и прилипания при $y - const$:

$$\omega_x = \partial w / \partial y; \quad \omega_y = 0; \quad \omega_z = -\partial u / \partial y;$$

– условия непроницаемости и прилипания при $z - const$:

$$\omega_x = -\partial v / \partial z; \quad \omega_y = \partial u / \partial z; \quad \omega_z = 0.$$

Наиболее приемлемым методом решения уравнений переноса, применяемым для широкого класса задач механики сплошных сред, является метод конечных разностей (метод сеток). Сущность его состоит в том, что область непрерывного изменения аргумента заменяется конечным дискретным множеством точек (узлов), образующих пространственно-временную разностную сетку [5].

Применение неявной разностной схемы для уравнений переноса позволит повысить устойчивость алгоритма, что проявляется в увеличении допустимых значений шага Δt . Несмотря на то, что при переходе к неявным аппроксимациям время счета на каждом слое возрастает, общий расчет машинного времени сокращается из-за уменьшения числа расчетных слоев. Неявные схемы имеют более сложную конструкцию, чем явные, а значит требуют дополнительных усилий при разработке схемы и ее отладке на ЭВМ. Она перспективна в первую очередь для решения стационарных задач по методу установления, а также при расчете крупномасштабных нестационарных процессов, когда выбор большого шага по времени не противоречит физическому смыслу.

Наиболее эффективные неявные методы, основаны на идее экономичных методов [5], позволяющих свести решение многомерных задач к решению последовательности одномерных задач записанных в форме возмущенного оператора и разности против потока [1].

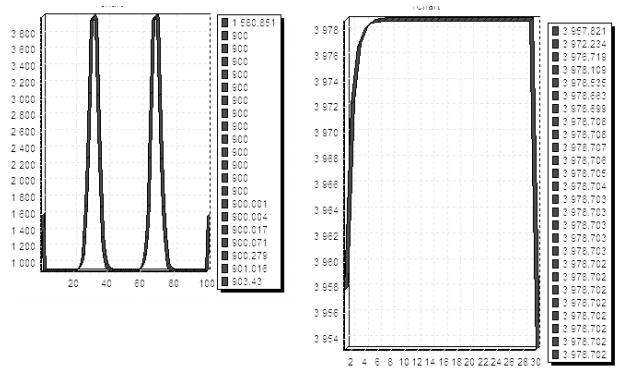
Один из популярнейших методов решения стационарных уравнений (Пуассона) является метод установления [6].

Задача реализовалась на конечно разностной сетке $100 \times 100 \times 100$ на языке Delphi .

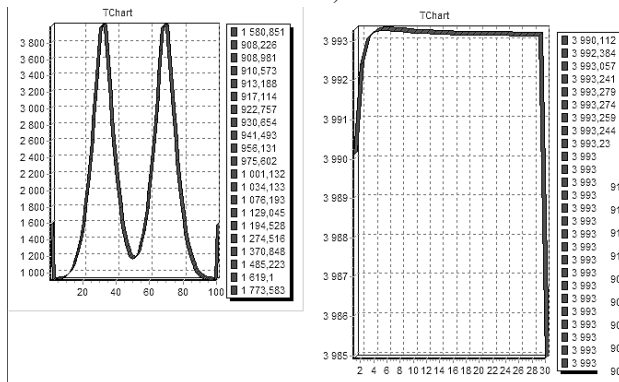
2. Результаты численного моделирования. Рассмотрим динамику нагрева шлака в агрегате ковш-печь (АКП). На рис. 3 представлены результаты расчета в плоскостях XZ (правый рисунок) и YZ (левый рисунок) в центральной части.

Как видно, три электрода расположенные в верхней части АКП и погруженные в шлак, уже в первые секунды показывают четкую границу нагрева. Со временем, зона активного нагрева увеличивается и уже через 10 минут жидкий шлак накрывает всю зону, выполняя функцию не только нагревателя расплава,

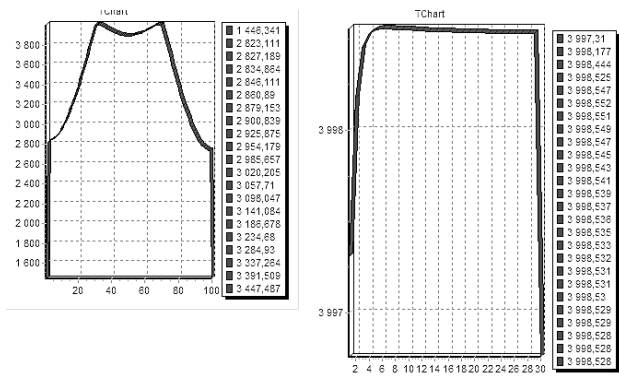
Моделирование гидродинамических и теплофизических процессов



а)



б)



в)

Рис. 3. Распределение температуры в плоскостях XZ (правый рисунок) и YZ (левый рисунок) в центральной части в момент времени 10 сек, 5 мин и 10 мин.

но и рафинирования расплава, т.к. неметаллические включения, имеющиеся в расплаве, могут быть задержаны в шлаковой области.

Полученные результаты наводят на мысль, а если рассчитать такие режимы нагрева электрода, которые позволили временно отключать подачу электроэнергии. На рис. 4 показаны распределение температуры для нескольких режимов нагрева электродов. Для рассматривалась интегральная температура на границе расплав – шлак

$$T_{in} = \int_x \int_y T dx dy$$

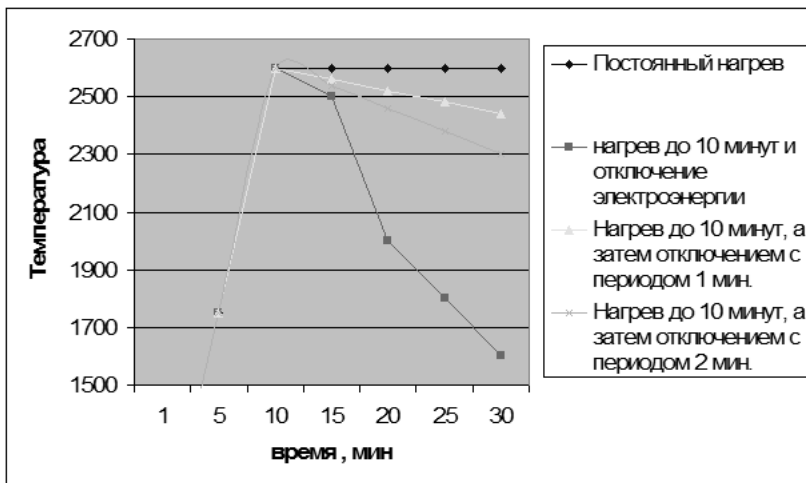


Рис. 4. Распределение температуры для нескольких режимов нагрева электродов

Как видно если нагреть шлак, а затем его не подпитывать, электроэнергией, то он начинает остывать за счет конвективного перемешивания, вызванного барботажем. Два других режима с периодическим отключением и включением электродов показали, что температура нижней поверхности шлака значительно выше температуры плавления стали.

3. Выводы. Таким образом, разработана математическая модель нагрева шлака в АКП, результаты расчета которой могут лечь в основу граничных условий для моделирования гидродинамических и тепломассообменных процессов в АКП.

1. Затвердевание металлов и металлических композиций / В.А. Лейбензон, Ф.В. Недопекин, В.В. Белоусов [и др.] – Киев: «Наукова думка», 2009. – 409 с.
2. Белоусов В.В. Численное моделирование процессов перемешивания при продувке ванны агрегата "ковш-печь" / В.В. Белоусов, Е.И. Куликов, В.Ф. Комаров // Математичне моделювання. – 2007. – № 2(17). – С. 61–63
3. Белоусов В.В. Основы тепломассопереноса и теплофизика замкнутых объемов / В.В. Белоусов, Н.И. Болонов. – Донецк: Юго-Восток, 2003. – 134 с.

4. Белоусов В.В. Математическая модель гидродинамических и тепломассобменных процессов в агрегате ковш – печь / В.В. Белоусов, В.И. Бондаренко, Ф.В. Недопекин [и др.] // Вестник Череповецкого государственного университета. – 2017. – № 1. – С. 20–27.
5. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
6. Затвердевание металлических композиций: производство и моделирование / В.В. Белоусов, Ф.В. Недопекин, В.А. Лейбензон [и др.] – Донецк: Юго-Восток, 2005. – 231 с.

A.A. Bezzub, V.V. Bilousov

Modeling of hydrodynamic and thermophysical processes in the bath of the ladle-furnace unit.

The article is devoted to the simulation of hydrodynamic and thermal physics in the bath of the ACP ladle-furnace unit. The physical and mathematical models of transfer processes in the АКР are presented. The method of numerical implementation was chosen and justified, and the results of numerical simulation were presented.

Keywords: *Ladle-furnace unit, numerical simulation, finite-difference grid, natural and forced convection..*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
v.v.bilousov@gmail.com

Получено 16.05.18

ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

УДК 622.831

©2018. В.А. Канин

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОРОД ВОКРУГ ПЛАСТОВОЙ ГОРНОЙ ВЫРАБОТКИ ПРИ ЕЕ ОХРАНЕ ИСКУССТВЕННЫМИ ПОДДЕРЖИВАЮЩИМИ ОПОРАМИ

Выполнено математическое моделирование напряженного состояния горного массива вокруг пластовой выемочной выработки после прохода лавы с помощью метода конечных элементов при разных соотношениях прочности вмещающих пород и материала искусственной опоры.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, охрана горной выработки, вмещающие породы, напряженное состояние, прочность поддерживающей крепи.

Введение. Силовое взаимодействие ограждающих крепежных конструкций с расслоившимися породами кровли определяется как свойствами пород, так и деформационными характеристиками самих конструкций. При использовании крепи постоянного сопротивления зона расслоения пород при тонкослоистой структуре кровли меньше, чем в случае использования крепи нарастающего сопротивления. Уменьшая опускание породной консоли кровли, крепежные конструкции постоянного сопротивления способствуют также сохранению связей в слоях и в случае нарушения таких связей, при очень незначительных опусканиях кровли, могут быстро развить сопротивление до рабочего и тем самым предотвратить развитие заколов или обрушений пород кровли. Разница во взаимодействии «жестких» и «податливых» опор с окружающими породами хорошо видна на примере их работы в условиях, когда кровля угольного пласта сложена породными слоями, прочность которых по мере удаления от пласта возрастает. Нагрузка на опору в этих условиях будет увеличиваться по мере последовательного вступления в контакт с ней очередного породного слоя до тех пор, пока она не превысит сопротивление материала опоры одноосному сжатию. Если материал опоры теряет при этом несущую способность – опора разрушается. Но если материал опоры способен оказывать сопротивление сжатию после перехода в запредельное состояние, то развивающиеся в нем пластические деформации обеспечивают опоре податливость и создают условия для нового расслоения кровли, что исключает возможность взаимодействия опоры со всей вышележащей толщей пород. При относительно прочных окружающих породах указанный ре-

зультат достигается независимо от степени жесткости (податливости) опоры, но у более жестких опор это происходит при меньших деформациях окружающих пород, а значит и при меньшей потере высоты поддерживаемого пространства. Если же сопротивление сжатию окружающих пород меньше предела прочности материала поддерживающей опоры, то по мере возрастания контактных напряжений, может происходить – либо внедрение опоры в почву выработки, либо локальное разрушение пород кровли (обыгрывание крепи). Перечисленные обстоятельства практически исключают возможность эффективного применения «жестких» крепежных конструкций без использования элементов податливости. Уточнение ряда деталей силового взаимодействия поддерживающих опор различной жесткости с окружающими породами выполнялось методом конечных элементов.

1. Математическая модель. Моделируемая область горного массива, примыкающая к сопряжению выемочной выработки с лавой, была разбита на 1050 конечных прямоугольных элементов. Вблизи выработки и поддерживающей опоры сетка разбивки сгущалась, что позволило получить решение о перераспределении напряжений с достаточной точностью. Моделирование выполнялось для условий охраны выемочной выработки арочной формы сечением $13,8\text{ м}^2$, высотой 3,6 м и шириной 4,2 м, пройденной по пласту мощностью 1,5 м на глубине 800 м. Ширина поддерживающей опоры – 1,5 м. Прочность угольного пласта – 15 МПа. Значения этих параметров на всех этапах моделирования оставались постоянными, а значения прочностных характеристик породного массива и материала поддерживающей опоры варьировались. Поскольку отличительной особенностью поведения слабых пород на большой глубине является их выраженное запредельное деформирование, то модель вмещающих пород, угольного пласта и ограждающей крепежной конструкции принята с учетом возможности имитации запредельного состояния. Для этого вычисления напряжений проводились путем итерационного повторения следующей процедуры. Вся нагрузка к верхней части модели прикладывалась ступенями. На каждой ступени проверялось условие прочности по теории Кулона-Мора с учетом сцепления, угла внутреннего трения и коэффициента разуплотнения материала после перехода его в запредельное состояние. Моделирование необратимых деформаций разрушения выполнялось с использованием процедуры начальных напряжений [1]. При этом нагрузка в узлах, примыкающих к элементу, перешедшему в запредельное состояние, корректировалась с таким расчетом, чтобы соотношение полученных напряжений и деформаций соответствовало реальному поведению породы, установленному с помощью лабораторных испытаний на жестких прессах. Такой пересчет на каждом шаге нагружения повторялся многократно. В целом же задача решалась за сотни итераций, в процессе выполнения которых прослеживалась сходимости решения, и при необходимости шаг нагружения автоматически уменьшался.

2. Результаты моделирования. На первом этапе исследований моделировалось поведение устойчивого массива. Прочность окружающих пород на сжа-

тие (σ_n) принята равной 60 МПа, сцепление – 0,5 МПа, модуль упругости (деформации) – 2 МПа, угол внутреннего трения – 30° , прочность материала поддерживающей опоры (σ_o) – 5,0 МПа. Полученные для этих условий распределения нормальных напряжений, а также зоны запредельных напряжений представлены на рис. 1. Распределения напряжений на этом и на всех последующих рисунках характеризуют геомеханические ситуации, которые возникают на последней стадии деформирования поддерживающей опоры после удаления лавы за пределы зоны активных сдвижений.

На разрезе 1а нормальные вертикальные компоненты напряжений распределены следующим образом. В правом боку выемочной выработки со стороны нетронутого массива наблюдается область (1) повышенного горного давления, концентрация которого над краевой частью пласта достигает трех. Область повышенных напряжений с концентрацией 1,5-1,8 наблюдается и в средней части поддерживающей опоры. Над и под выработанным пространством лавы образовались зоны растяжения (3 и 4), так как выработанное пространство не оказывает сопротивления смещениям. Зоны растягивающих напряжений (5 и 6) сформировались также над и под выработкой. Переходной участок между зонами разгрузки и повышенных напряжений наблюдается со стороны нетронутого массива в области 7.

Области запредельного состояния, сформировавшиеся при заданных прочностных характеристиках угольного пласта, вмещающих пород и материала опоры, показаны на рис. 1б. Со стороны нетронутого массива в запредельное состояние перешла краевая часть угольного пласта (область 1) и вся поддерживающая опора (область 2). Коэффициент разрыхления угля в пределах первой области составляет 1,3. Коэффициентом разрыхления поддерживающей опоры – 1,15-1,2.

На втором этапе исследований над угольным пластом был выделен слой непосредственной кровли мощностью 3,0 м со следующими характеристиками: прочность на сжатие (σ_n) – 35 МПа; сцепление – 0,1 МПа; модуль упругости (деформации) – 0,5 МПа. Прочностные характеристики остальной части породного массива и поддерживающей опоры приняты такими же, как и на первом этапе. Полученные для этих условий распределения нормальных напряжений в сравнении с результатами, представленными на рис. 1, изменились незначительно. Заметная разница отмечается только в областях запредельного состояния. Так, на рис. 2 видно, что над поддерживающей опорой непосредственная кровля разрушилась. Над правой частью опоры, со стороны примыкания к выемочной выработке, в кровле наблюдается область повышенного разуплотнения пород (область 1). Со стороны нетронутого массива в запредельное состояние перешла не только краевая часть угольного пласта, как это происходило на предыдущем этапе моделирования, но и вся остальная часть массива, примыкающая к правому борту выработки (область 2), а центр зоны максимального разуплотнения у полости выемочной выработки переместился в породы кровли. Степень разрыхления материала опоры также возросла, составляя в ее ядре 1,25. Это

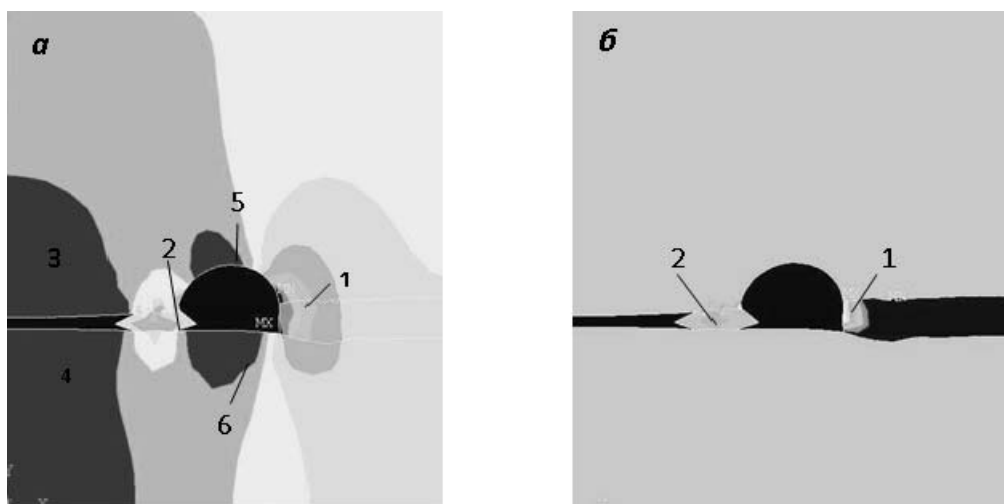


Рис. 1. Распределение напряжений вокруг выемочной выработки, охраняемой поддерживающей опорой прочностью 5 МПа при вмещающих породах прочностью 60 МПа: а – нормальные вертикальные компоненты напряжений; б – пластические (запредельные) зоны напряжений.

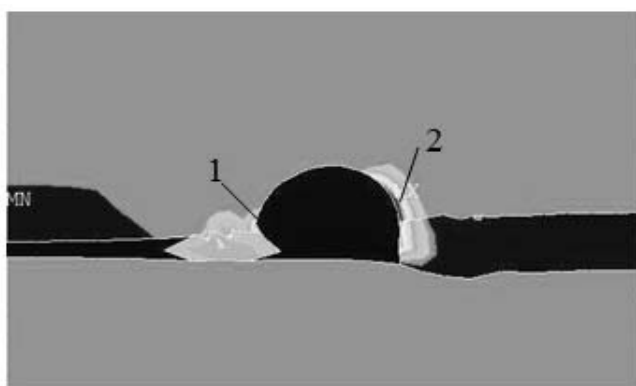


Рис. 2. Распределение областей запредельного состояния при прочных вмещающих породах и пониженной прочности непосредственной кровли.

говорит о том, что с уменьшением прочности вмещающих пород нагрузка на опору возросла, в результате чего и произошла интенсификация ее разрушения.

На третьем этапе исследований прочность окружающих пород на сжатие была принята равной 30-40 МПа, сцепление – 0,1 МПа; модуль упругости (деформации) – 0,5 МПа, прочность на сжатие поддерживающей опоры оставалась равной 5,0 МПа. Результаты моделирования, полученные для этих условий, представлены на рис. 3. Как видно из этого рисунка, характер распределения нормальной вертикальной компоненты напряжений при уменьшении прочности вмещающих пород (рис. 3а) в сравнении с рис. 1а изменяется несущественно. Единственная область, где эти изменения заметны, приурочена к краевой части

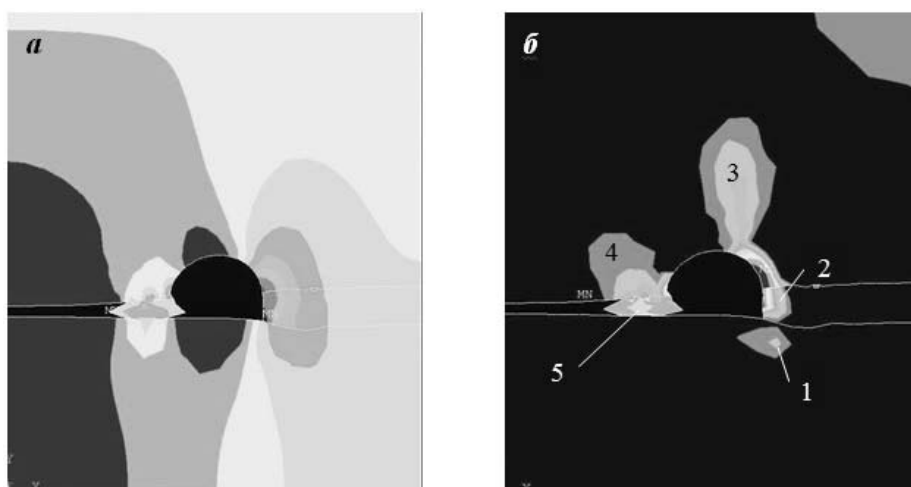


Рис. 3. Распределение напряжений вокруг выемочной выработки, охраняемой поддерживающей опорой прочностью 5 МПа при вмещающих породах прочностью 30-40 МПа: а – нормальные вертикальные компоненты напряжений; б – пластические (запредельные) зоны напряжений.

пласта со стороны нетронутого массива. Здесь уровень вертикальных сжимающих напряжений уменьшился, что, по-видимому, связано с интенсивным разрушением краевой части пласта. В то же время области запредельного состояния (рис. 3б) заняли достаточно большую площадь на вертикальном разрезе участка горного массива, примыкающего к выемочной выработке. Со стороны нетронутого массива в запредельное состояние перешла не только краевая часть пласта, как это происходило на предыдущем этапе моделирования, но и остальная часть массива, примыкающая к правому борту выработки (область 2), а центр зоны максимального разуплотнения у полости выработки переместился в породы кровли. В кровле выработки развилась также обширная область запредельного состояния 3, представляющая опасность с точки зрения возможного обрушения породы. В связи с этим при залегании в кровле пласта неустойчивых легко обрушающихся пород необходимо предусматривать мероприятия по их закреплению в области 3 для снижения опасности завала выработки. Но в технологическом плане данная задача упрощается тем, что, учитывая форму области 3, закрепление кровли может иметь локальный характер. Кроме того, следует отметить, что развитие этой области происходит только при усадке поддерживающей опоры более чем на 35 %. Область запредельного состояния в породах кровли развилась также и над поддерживающей опорой (область 4), но в данном случае это является положительным моментом, подтверждающим возможность использования опор прочностью 5 МПа в качестве обрезной крепи. В запредельное состояние перешла и сама опора (область 5), в ядре которой произошло снижение уровня сжатия.

На четвертом этапе исследований моделирование проводилось в тех же горно-

геологических условиях, но при повышенной в 2,4 раза прочности материала поддерживающей опоры (12 МПа). Как видно из данных, представленных на рис. 4, увеличение прочности опоры привело к уменьшению уровня сжатия краевой части пласта и увеличению его внутри опоры (рис. 4а). Существенные

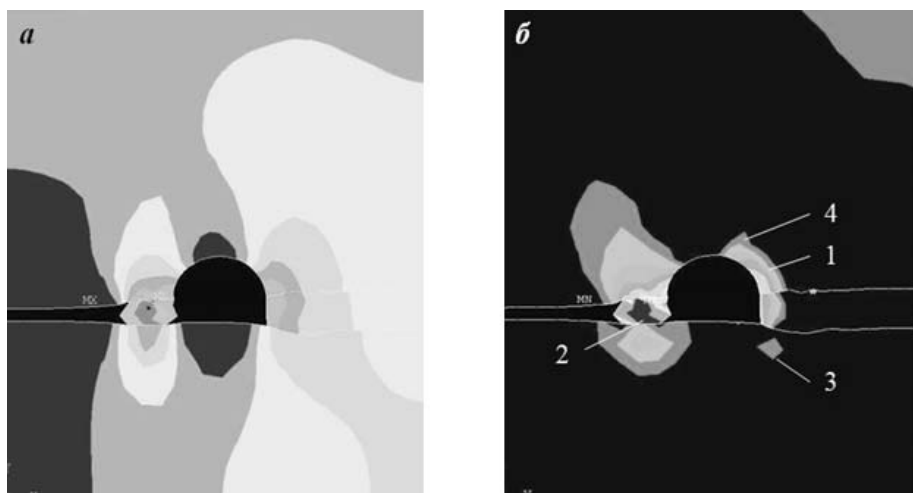


Рис. 4. Распределение напряжений вокруг выемочной выработки, охраняемой поддерживающей опорой в условиях $\sigma_0 = 12$ МПа и $\sigma_n = 30-40$ МПа: а – нормальные вертикальные компоненты напряжений; б – пластические (запредельные) зоны деформаций.

изменения произошли и в характере формирования областей запредельного состояния (зон разрушений). С увеличением прочности поддерживающей опоры наиболее обширной становится зона разрушений 5, сформировавшаяся в кровле пласта – непосредственно над опорой (рис. 4б). Появилась обширная зона разрушений 6 в почве пласта – под основанием опоры. Зона разрушений 4 в породах кровли над правой частью сечения выработки существенно сократилась. Сократилась также и зона разрушений 3, расположенная в почве выработки под краевой частью пласта. А зона разрушений 1 и по форме и по размерам осталась практически такой же – и в пределах угольного пласта, и в пределах пород кровли. В то же время, как это видно из сравнения рис. 3б и 4б, суммарная протяженность участков периметра выемочной выработки, соприкасающихся с зонами разрушений, увеличилась и соответственно с этим увеличилась площадь участков кровли и почвы выработки, для обеспечения устойчивости которых необходимо производить инъекционное или анкерное закрепление пород.

Заключение. Анализируя выявленные особенности формирования зон разрушений вокруг выемочной выработки, охраняемой различными по степени податливости поддерживающими опорами и при различной прочности окружающих пород, можно сделать следующие выводы:

1. Поддерживающие опоры прочностью 5 МПа в условиях прочных вмещающих пород ($\sigma_{сж} \geq 60$ МПа) функции обрезающей крепи не выполняют, о чем

свидетельствует полное отсутствие зон разрушений на контакте опоры с кровлей пласта (рис. 1б).

- Во всех промоделированных условиях, где были использованы поддерживающие опоры прочностью 5 МПа (рис. 1б; 2 и 3б), зоны разрушений в породах почвы под этими опорами отсутствуют. Следовательно, поддерживающие опоры, подобные охранным полосам из газобетонных блоков, оказывают щадящее действие на породы почвы, и ни при каких условиях не способствуют их выдавливанию в полость выемочной выработки.
- В неустойчивых легко обрушающихся породах ($\sigma_{сж} \leq 30-40$ МПа) или при наличии таких пород в непосредственной кровле пласта поддерживающие опоры прочностью 5 МПа способны выполнять функцию обрезной крепи, на что указывают зоны разрушений, сформировавшиеся над этими опорами в породах кровли (рис. 2 и 3б). Как следует из данных, представленных на рис. 5, которые были получены на втором этапе моделирования и характеризуют динамику формирования зоны разрушений в непосредственной кровле пласта в процессе деформирования опоры (ϵ), зона разрушений пород начинает проявляться при усадке опоры на 12 %. Применительно к опорам из газобетонных блоков [2] это значение характеризует работу опоры в области условно постоянного сопротивления, в которой происходят незначительные колебания несущей способности материала.

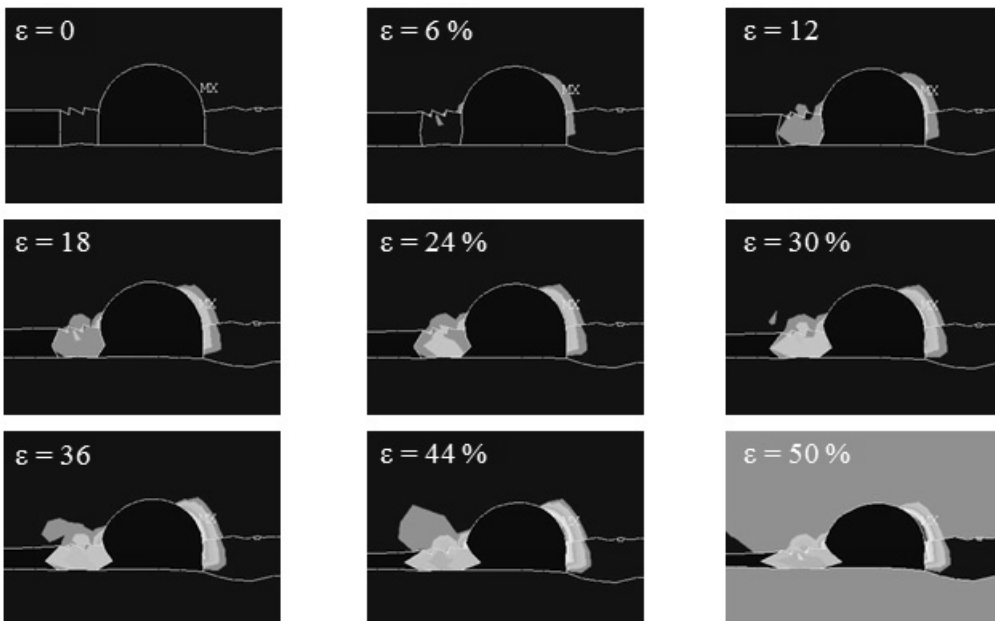


Рис. 5. Динамика формирования зоны разрушений в непосредственной кровле пласта при деформировании поддерживающей опоры прочностью 5 МПа. Модель 2.

4. Повышение прочности (жесткости) поддерживающих опор в условиях неустойчивых легко обрушающихся пород не решает проблему безаварийного поддержания пластовых выемочных выработок и в целом даже ухудшает горнотехническую ситуацию. С точки зрения безопасности работ это связано с увеличением протяженности зон разрушений по контуру выработки, обуславливающих повышение опасности вывалов и обрушений пород кровли, а с точки зрения эффективности охраны выемочной выработки ситуация ухудшается вследствие повышения вероятности выдавливания пород почвы. Причем, как это видно из данных представленных на рис. 6, формирование зоны разрушений пород под основанием поддерживающей опоры начинается при $\varepsilon = 8\%$, а при $\varepsilon = 27\%$ зона разрушений становится достаточно обширной. Зона разрушений пород над поддерживающей опорой прочностью 12 МПа начинает формироваться при $\varepsilon = 2\%$, что является положительным качеством. Но в отличие от характера формирования зоны разрушений над опорой прочностью 5 МПа в данном случае зона разрушений уже на первых стадиях деформирования опоры захватывает и породы приконтурной области выемочной выработки, что является еще одним ее недостатком. Все эти данные хорошо согласуется с результатами анализа опыта охраны выемочных выработок различными видами ограждающих крепежных конструкций [4], где было показано, например, что эффективное применение железобетонных опор было достигнуто только на пластах с породами средней устойчивости и устойчивыми.

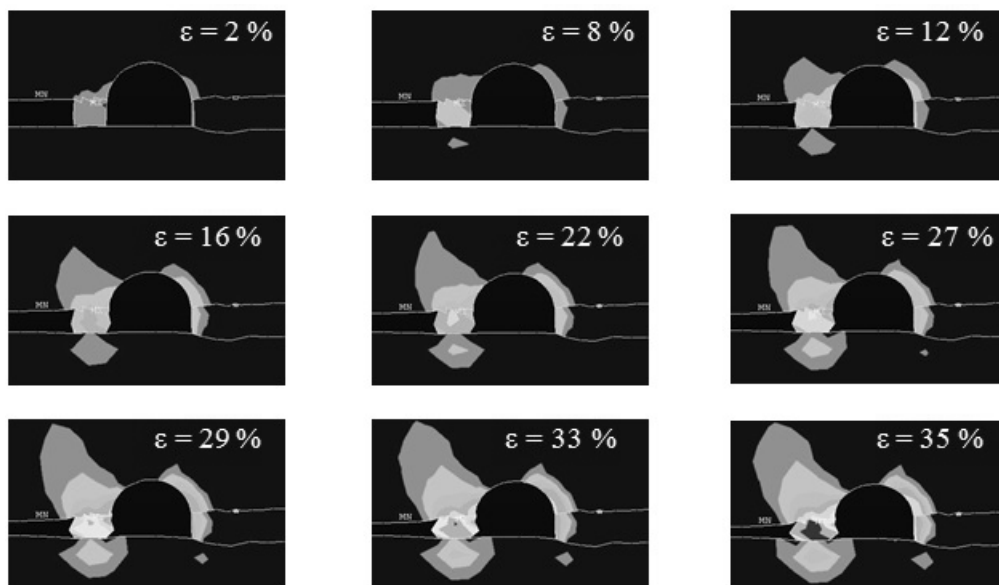


Рис. 6. Динамика формирования зон разрушений вокруг выемочной выработки в процессе деформирования поддерживающей опоры прочностью 12 МПа. Модель 4.

5. При охране пластовых выемочных выработок в условиях неустойчивых легко обрушающихся пород, после деформирования поддерживающих опор (независимо от их прочности) на 8-12 % практически по всему борту выемочной выработки, противоположному выработанному пространству, образуется область запредельного состояния, которая к заключительной стадии процесса увеличивается по площади примерно в два раза. В этой области возможны разрушения породы с последующими вывалами в полость выработки, приводящие к нарушению устойчивости выработки в целом.

Таким образом, при выборе материала и конструкции поддерживающих опор для эффективной охраны и безаварийного поддержания пластовых выемочных выработок несущую способность опор и их податливость (жесткость) в обязательном порядке необходимо соотносить с прочностными характеристиками вмещающих пород. Если же материал поддерживающих опор уже задан, но в процессе их эксплуатации изменяются прочностные характеристики вмещающих пород, то на формирование зон разрушений вокруг выемочной выработки можно влиять, регулируя податливость и несущую способность поддерживающих опор за счет ввода в их конструкцию прокладок различной жесткости.

1. *Назимко В.В.* Геомеханические основы устойчивости подготавливающих выработок в зонах разгрузки при воздействии очистных работ: Дисс. ... д-ра техн. наук: 05.15.02, 05.15.11. – Донецк, 1989. – 337 с.
2. *Канин В.А.* Охрана горных выработок газобетонной крепью / В.А. Канин, А.В. Анциферов – Донецк: ООО «АЛЛАН», 2004. – 396 с.

V.A.Kanin

The stress state of rocks around the reservoir mine workings under its protection by artificial support supports.

Mathematical simulation of rock mass stress state around in-seam extraction working after longwall driving is carried out with the help of finite-element method with different correlations of surrounding rock strength and artificial support material.

Keywords: *computer modeling, protection of mine workings, enclosing rock, tension, support strength.*

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ),
Донецк
ranimi@ranimi.org

Получено 16.04.18

УДК 550.834:622.12

©2018. Н.Н. Грищенко, Ф.М. Голубев, В.П. Сажнев

ПРОГНОЗ СДВИЖЕНИЯ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ЛИКВИДАЦИИ УГЛЕДОБЫВАЮЩИХ ПРЕДПРИЯТИЙ В РАЗЛИЧНЫХ УГЛЕНОСНЫХ РАЙОНАХ ДОНБАССА

В настоящей статье рассмотрен вопрос прогноза деформаций земной поверхности при активизации процесса сдвижения земной поверхности при затоплении ликвидируемых угольных шахт. Описана методика конечно-элементного моделирования деформаций горного массива и земной поверхности в различных угленосных районах Донбасса. Установлена необходимость принятия в расчёт затапливаемых очистных выработок, глубина которых превышает 500 метров, при прогнозе сдвижений земной поверхности вызванных затоплением ликвидируемых угольных шахт Центрального района Донбасса.

Ключевые слова: сдвижения земной поверхности, затопление горных выработок, ликвидация шахт, МКЭ модели.

Введение. Ввиду особенностей залегания и отработки угольных пластов в различных районах Донбасса (различные глубины, углы падения, различный состав горных пород) характер сдвижения земной поверхности при затоплении в этих районах может существенно различаться. Для анализа процесса сдвижения земной поверхности в различных районах Донбасса был подготовлен ряд конечно-элементных моделей, а также проанализированы результаты расчетов по действующей нормативной методике прогноза активизации сдвижений. Установлено, что при отработке и последующем затоплении свит угольных пластов деформации земной поверхности могут достигать значений, представляющих опасность для зданий с низким деформационным ресурсом и для различных коммуникаций.

Сдвигения и деформации в массиве горных пород и на земной поверхности происходят как при отработке запасов угля, так и при затоплении горных выработок в результате ликвидации шахт, в результате чего могут пострадать здания, сооружения и коммуникации.

В то время как прогнозирование деформаций земной поверхности, вызванных подземными очистными работами, осуществляется достаточно эффективно при помощи действующих отраслевых стандартов, существующие способы прогнозирования деформаций, вызванных активизацией геомеханических процессов при затоплении ликвидируемых шахт, требуют уточнения. Они не учитывают влияния литологического состава горного массива, что способно серьёзно сказаться на точности прогноза деформаций земной поверхности. Действующая методика прогноза деформаций земной поверхности, вызванных активизацией геомеханических процессов, описанная в нормативном документе [1], не позволяет учитывать влияние выработок, глубина которых превышает 500 метров. Однако, как показывает практика обследования зданий и сооружений, влияние

затопления лав с глубиной отработки более 500 метров также может нести существенную опасность для зданий, попадающих в зоны влияния этих очистных выработок. Это обстоятельство делает актуальным вопрос усовершенствования действующей методики.

Активизация процесса сдвижения земной поверхности от затопления горных выработок может существенно различаться в разных районах Донбасса из-за различных горнотехнических и горно-геологических факторов. Поэтому исследование характера и степени опасности сдвижения горных пород при затоплении ликвидируемых шахт необходимо проводить с учетом ряда факторов, характерных для каждого района.

К ним можно отнести следующие факторы:

- средняя для района глубина горных работ;
- выемочная мощность пласта;
- степень метаморфизма углей;
- литологический состав затопленной толщи породного массива.

Для проведения исследований характера сдвижений при затоплении горных выработок в различных районах Донбасса был подготовлен ряд конечно-элементных моделей. При этом районы с довольно близкими условиями отработки объединялись в одну модель.

Анализ различных районов Донбасса по залегающим в них маркам угля приведен в таблице 1.

Таблица 1. Анализ процентного содержания марок угля в угленосных районах Донбасса

Район	Марки угля
Красноармейский	Г+К-92%, Ж-2%, Д-6%
Донецко-Макеевский	А-5%, Т-15%, ОС-10%, К-14%, Ж-20%, Г-29%, Д-9%
Торезо-Снежнянский	А-50 %, ПА-30%, Т-15%, ОС-1%
Центральный (ЦРД)	Т+ПА – 30%, ПС – 10%, К - 17%, ПЖ – 12%, Г – 7%
Лисичанский	Д-85%, Г – 15%
Алмазно-Марьевский	Г-43%, Ж-17%, К-16%, ОС-9%, Т-12%, А - 3%
Луганский	Г-87%, Ж – 6 %, К- 5%, ОС – 2%
Краснодонский	ПА - 1%, Т – 22%, ОС- 6%, К – 14%, Ж – 27%, Г – 30 %
Боково-Хрустальский	А-100%
Должанско-Ровенецкий	А-100%

Одним из основных факторов, от которых зависит характер сдвижения горных пород при подъеме уровня грунтовых вод после затопления шахт, является высота зоны водопроницающих трещин над старыми очистными выработками. По исследованиям ряда учёных [4, 5] она составляет от 30 до 80 мощностей пласта и при наличии нарушений способна достигать нескольких сотен метров. При полном обрушении кровли, высоту зоны водопроницающих трещин согласно

исследованиям [6] можно определить как:

$$H_T = \frac{70 \cdot \sqrt{-1 \cdot m e^{-A}}}{(1.6 \cdot e^{-0.06f} - 0.09)}, \quad (1)$$

где c – относительный центр распределения пород по их мощности в подрабатываемой толще, м; m – вынимаемая мощность пласта, м; A – содержание глинистых пород в долях от подрабатываемой толщи; f – коэффициент крепости горных пород по шкале проф. Н. Н. Протождяконова.

Остальные факторы, определяющие характер сдвижения горных пород, подробно описаны в геологических исследованиях [5]. На основании данных геологических исследований и анализа проектов отработки для изучения характера деформаций земной поверхности в различных районах Донбасса, вызванных затоплением очистных выработок, были составлены таблицы со средними для районов углами падения, высотой зон водопроводящих трещин (ЗВТ) и средней глубиной отработки лав (таблица 2).

Таблица 2. Объединение угленосных районов по основным горно-геологическим и горнотехническим факторам

Район	Средний угол падения пласта, градусы	Высота ЗВТ, м	Средняя глубина отработки, м
Донецко-Макеевский и Красноармейский	10	100	800-1000
Торезо-Снежнянский	15	100	600
Центральный (ЦРД)	60	130	500
Лисичанский и Краснодонский	20	52	750
Луганский и Алмазно-Марьевский	15	52	1000
Боково-Хрустальский и Должанско-Ровенецкий	25	70	700

На основании такого анализа были подготовлены шесть типовых конечно-элементных моделей, в которых были учтены приведенные выше факторы, влияющие на величину оседаний земной поверхности.

Для объективного отображения свойств горных пород в модели были заложены следующие физико-механические характеристики:

- модуль Юнга (МПа);
- коэффициент Пуассона;
- плотность (кг/м³);
- удельное сцепление;
- угол внутреннего трения (град).

В моделях были приняты следующие условия отработки:

- отработано две лавы длиной по 200 метров;
- способ управления кровлей – полное обрушение;
- марка угля – наиболее распространенная для каждого района;

- глубина отработки – характерная для каждого района;
- мощность обрабатываемых пластов – средняя по району.

В моделируемой толще послойно задавались физико-механические свойства песчано-глинистых сланцев, песчаника, наносов. Для построения использовались стратиграфические колонки, приведенные в геологических исследованиях работы [5]. В моделях учитывались исследования В. Н. Реввы, Е. И. Питаленко, М. Ю. Иконникова [6, 7], согласно которым песчаники с глинисто-слюдистым цементом теряют свои прочностные характеристики более интенсивно, чем породы с кремнисто-карбонатным цементом. Характер изменения свойств пород при их водонасыщении представлен на рисунке 1.

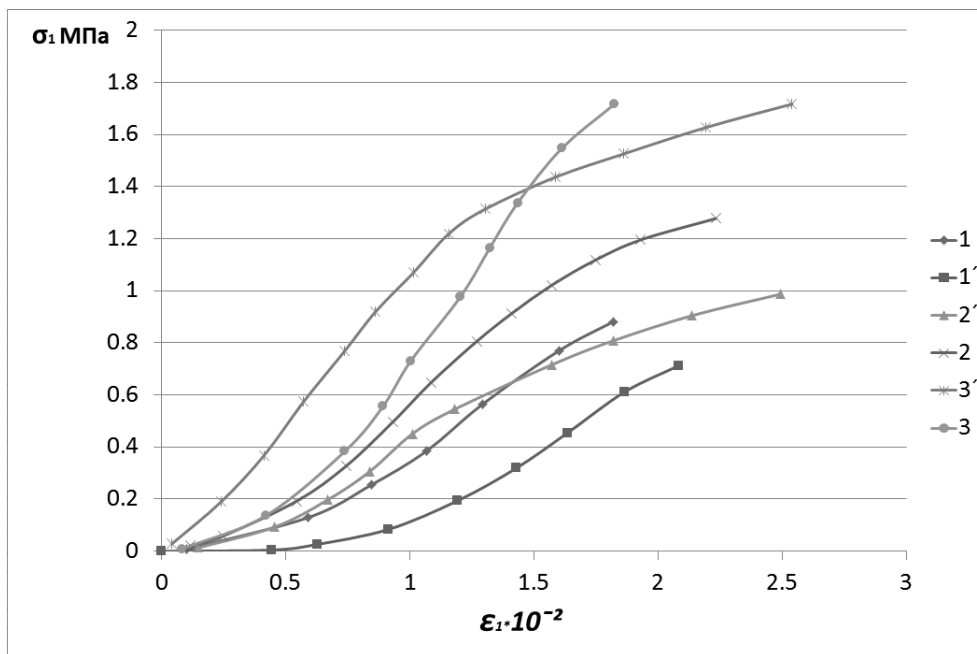


Рис. 1. Влияние водонасыщения на прочность песчаников при одноосном сжатии: 1, 1' - сухой и влажный песчаник с кремнисто-слюдистым цементом; 2, 2' - сухой и влажный песчаник с глинисто-слюдистым цементом; 3, 3' - сухой и влажный песчаник с карбонатным цементом [6].

Нагрузка на модели задавалась равной давлению породного столба на кровлю очистной выработки под действием силы земной гравитации. Сопротивление сдвигу твердых пород в моделях описывается теорией Кулона-Мора, которая отражает линейную зависимость предельного сопротивления сдвигу по поверхности скольжения от нормального давления и аппроксимируется отрезком прямой [8]:

$$\tau = C + \sigma_n \times tg\varphi \quad (2)$$

где τ – предельное касательное напряжение, Па; C – сцепление; σ_n – нормальное напряжение, Па; φ – угол внутреннего трения, градусы.

Прогноз сдвижения земной поверхности при ликвидации угледобывающих предприятий

В результате расчёта была получена модель деформирования горного массива, которая соответствует основным положениям геомеханики и теоретическим представлениям, изложенным в работах А. А. Борисова и ряда других авторов. Результаты моделирования оседаний, вызванных отработкой и затоплением очистных выработок, приведены на рисунках 2–7.

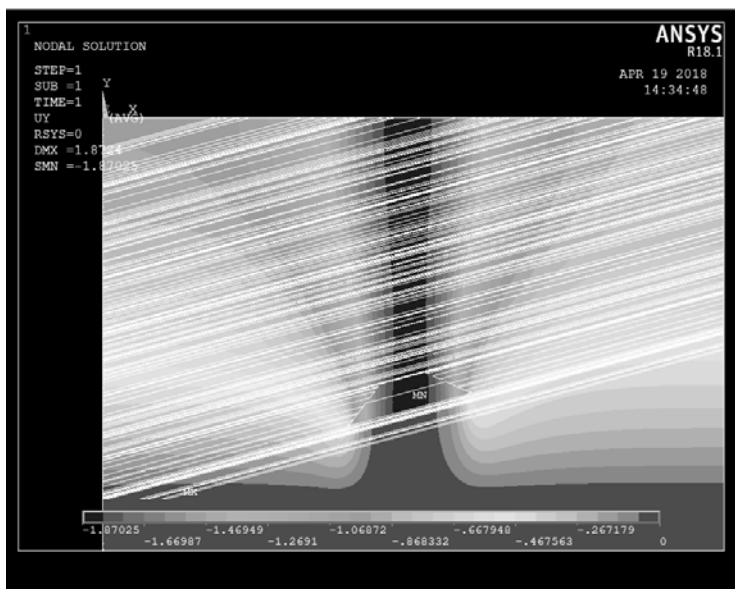


Рис. 2. Модель Краснодонского и Лисичанского районов.

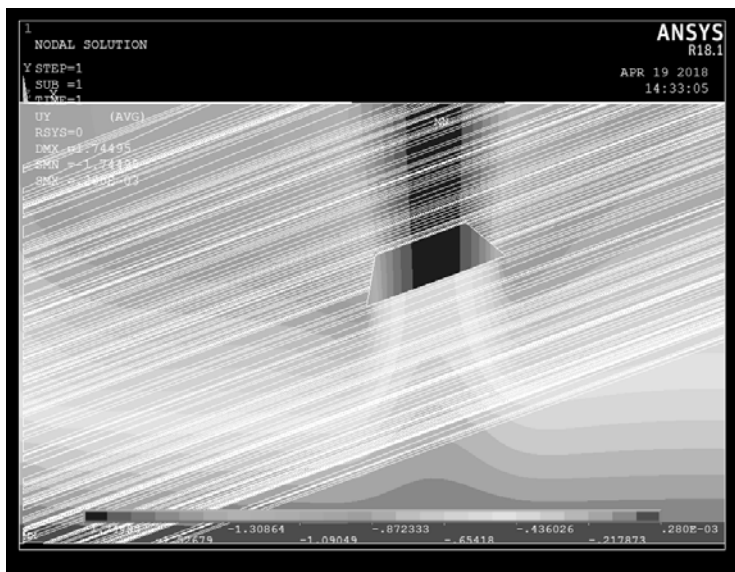


Рис. 3. Модель Торезо-Снежнянского района.



Рис. 4. Модель Боково-Хрустальского и Должанов-Ровенецкого районов.

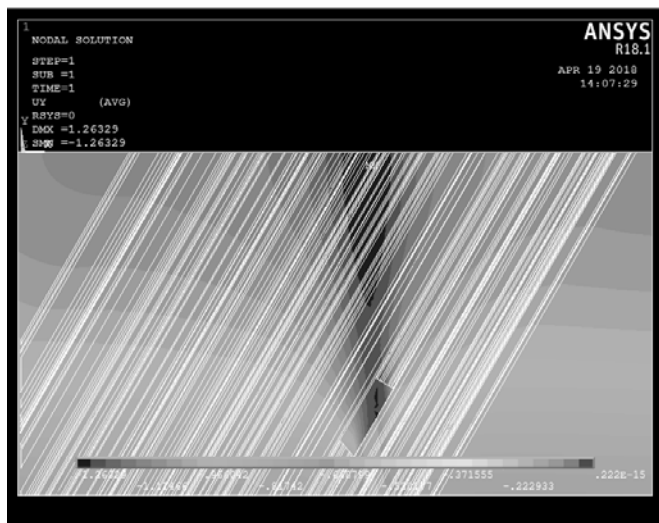


Рис. 5. Модель Центрального района Донбасса.

По результатам моделирования был составлен сводный график оседаний земной поверхности (рис. 8).

Результаты моделирования показывают, что наиболее опасными для затопления являются угленосные районы с большим удельным содержанием слабых вмещающих пород и малыми глубинами отработки угольных пластов. Согласно результатам моделирования, при увеличении угла падения размеры оседаний для одиночных выработок снижаются, а граничные углы, напротив, увеличиваются. Моделирование также показывает, что даже затопление выработок на глубинах свыше 500 метров может приводить к активизации процесса сдвижения. Следует отметить важный осложняющий фактор для ликвидации с последую-

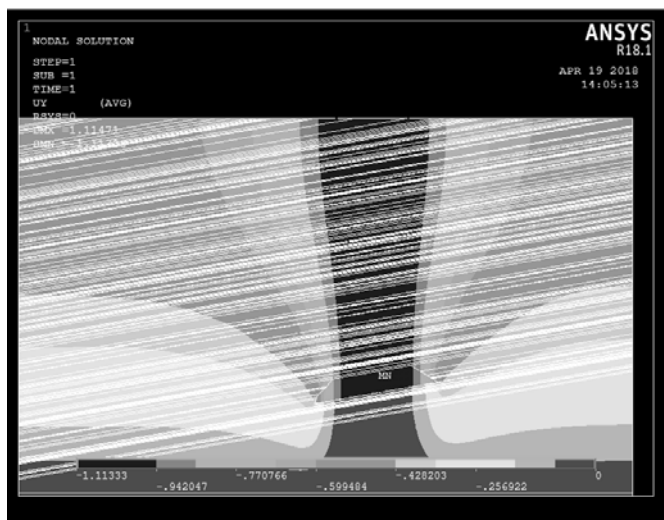


Рис. 6. Модель Донецко-Макеевского и Красноармейского районов

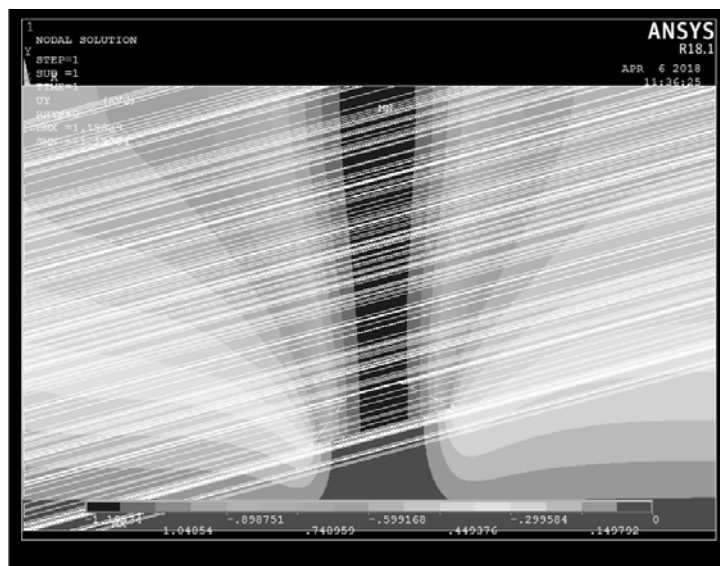


Рис. 7. Модель Алмазно-Марьевского и Луганского районов

щим затоплением шахт Центрального района Донбасса – отработку угольных пластов свитами (от 20 до 30 пластов), что оказывает суммарное негативное влияние на сдвижение земной поверхности. Использование существующей методики позволяет оценивать деформации, вызванные исключительно очистными работами, находящимися выше глубины 500 метров. Однако даже расчет по существующей методике показывает, что в некоторых точках города Горловки деформации, вызванные активизацией геомеханических процессов, могут дости-

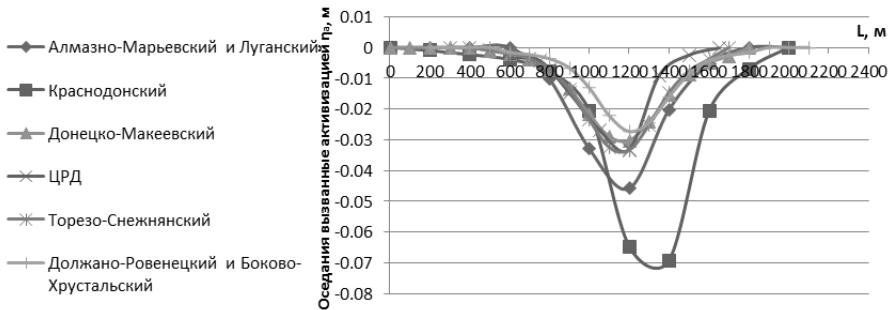


Рис. 8. Сводный график оседаний земной поверхности для различных угленосных районов Донбасса.

гать 1,5 мм/м (рис. 9, 10). Это может привести к разрушению зданий с низким деформационным ресурсом, а также вызвать порывы чугунных самотечных канализационных сетей и водопроводов малого диаметра.



Рис. 9. Прогнозные оседания на горном отводе шахты «Комсомолец», рассчитанные по действующей методике расчета деформаций земной поверхности при затоплении горных выработок (НД 12.12.004- 98)

Красными точками на вышеприведенных рисунках отмечены здания, наиболее пострадавшие в результате подработки земной поверхности. Как видно из рис. 10, некоторые здания не попадают в зону влияния активизации деформаций земной поверхности, рассчитанную по действующей методике. Однако, учитывая исследования на моделях, такие здания попадут в зону влияния активизации сдвижений вследствие затопления ликвидируемых шахт. При этом они попадут в зону влияния выработок, расположенных на глубинах более 500 метров. Характерно, что у таких выработок в условиях ЦРД размеры полумульды по падению могут превышать 1000 метров. Поэтому для сохранения жилого фонда города необходимо производить постоянный мониторинг за сдвижением



Рис. 10. Прогнозные горизонтальные деформации на горном отводе шахты «Комсомолец», рассчитанные по действующей методике расчета деформаций земной поверхности при затоплении горных выработок (НД 12.12.004- 98)

земной поверхности, как в пределах прогнозируемых зон активизации, так и в районах влияния глубоких выработок.

В районах с пологим залеганием шахта, как правило, отрабатывает от одного до десяти пластов. При малом количестве отработанных горизонтов деформации земной поверхности, вызванные активизацией геомеханических процессов при затоплении горных выработок, зачастую оказываются гораздо меньшими, и не представляют опасности для зданий. Пример расчета деформаций по методике, описанной в [1], приведен на рис. 11.

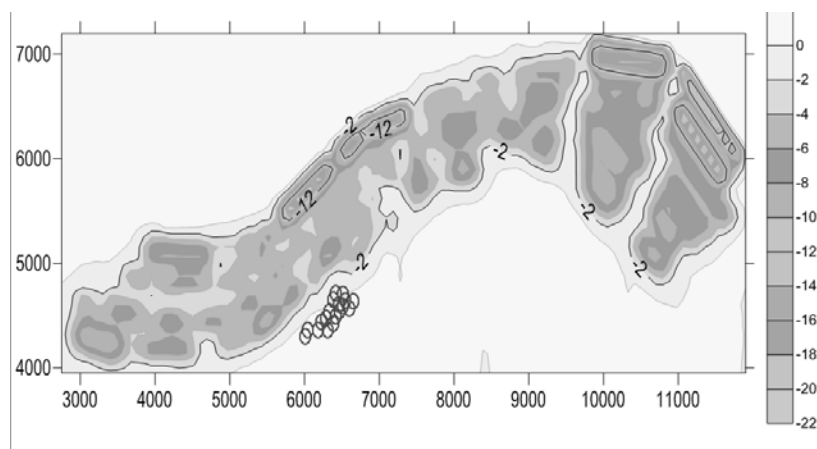


Рис. 11. График оседаний на горном отводе шахты «Бутовская», рассчитанных по действующей методике расчета деформаций земной поверхности при затоплении горных выработок (НД 12.12.004- 98)

Стоит отметить, что в большинстве подрабатываемых районов присутствует до 20% зданий с низким деформационным ресурсом, и даже невысокие величины деформаций земной поверхности, вызванных активизацией геомеханических процессов, в результате затопления могут привести к их серьёзным повреждениям, вплоть до разрушения. Поэтому для сохранения жилого фонда и усовершенствования методики прогноза деформаций земной поверхности следует проводить последовательный мониторинг оседаний земной поверхности от момента составления проекта затопления ликвидируемых шахт до момента выхода воды на проектный уровень.

Выводы. Согласно результатам проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

- затопление очистных выработок на глубинах более 500 метров может спровоцировать сдвиги и деформации земной поверхности, что особенно опасно в районах со слабыми вмещающими породами;
- даже незначительное влияние на поверхность глубоких выработок может быть опасным при отработке пластов свитами;
- для сохранения жилого фонда необходимо поводить наблюдения за сдвижением земной поверхности при ликвидации угольных шахт не только в зонах прогнозируемой активизации согласно действующей методике, но и в зонах влияния глубоких очистных выработок.

1. Ликвидация угольных шахт. Защита земной поверхности от затопления горных выработок. Рекомендации: КД 12.12.004- 98: Утв. Министерством угольной промышленности Украины 20.12.98. – Донецк, 1998. – 46 с.
2. Геомеханические процессы отработки крутых пластов: новые исследования и решения / Е.И. Питаленко, Кулибаба С.Б., Гавриленко Ю.Н. [и др.] – Донецк: ДУНВГО, 2007. – 384 с.
3. *Мохов А.В.* Морфология зон водопроводящих трещин сдвига на участках подземных разработок каменноугольных залежей / А.В. Мохов // ГИАБ.– 2008. – № 1. – С. 273–280.
4. *Илюгин Д.А.* Прогноз развития зоны водопроводящих трещин при разработке яковлевского месторождения богатых железных руд: дисс ... канд. техн. наук: 25.00.16. – СПб, 2014 – 125 с.
5. Геология месторождений угля и горючих сланцев СССР: [в 12 т.]. – М.: Госгеолтехиздат, 1963. – Т. 1. / [под ред. И.А. Кузнецова]. – 1963. – 1210 с.
6. *Алексеев А.Д.* Разрушение горных пород в объемном поле сжимающих напряжений / А.Д. Алексеев, В.Н. Рева, Н.А. Рязанцев. – К.: Наукова думка, 1989. – 168 с.
7. *Питаленко Е.И.* Влияние увлажнения горного массива на активизацию геомеханических процессов при закрытии угольных шахт / Е.И. Питаленко, В.В. Васютина, В.Н. Рева // Научные труды УкрНИИМИ НАН Украины. – 2011. – № 8. – С. 117–128.
8. Математическое моделирование в задачах оценки эффективности и безопасности горных работ / М.Ю. Иконников, Ю.Р. Иконников, Е.А. Слащева [и др.] – М-во образования и науки Украины, Нац. горн. ун-т. – Днепропетровск: НГУ, 2015. – 215 с.

N.N. Grishchenkov, P.M. Golubev, V.P. Sazhnev

Forecast of the movement of the earth's surface during the liquidation of coal mining enterprises in various coal-bearing regions of Donbass.

This article addresses the issue of forecasting deformations of the earth's surface when the process of displacement of the earth's surface during flooding of liquidated coal mines is activated. The technique of finite-element modeling of deformations of the rock mass and the earth's surface in various coal-bearing areas of the Donbass is described. The necessity of taking into account the flooded mine workings, the depth of which exceeds 500 meters, is established when predicting displacements of the earth's surface caused by flooding of the liquidated coal mines of the Central region of Donbass.

Keywords: *displacement of the earth's surface, flooding of mine workings, liquidation of mines, FEM models.*

Республиканский академический научно-исследовательский и
проектно-конструкторский институт горной геологии,
геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ),
Донецк
ranimi@ranimi.org

Получено 17.05.18

УДК 550.834:622.12

©2018. А.А. Глухов, В.А. Анциферов

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ФАКТОРА ГАЗО- И ВОДОНАСЫЩЕННОСТИ УГОЛЬНЫХ ПЛАСТОВ НА СЕЙСМОАКУСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ РЕГИСТРИРУЕМЫХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

В работе дана оценка степени влияния фактора газо- и водонасыщенности угольных пластов на сейсмоакустические параметры регистрируемых волновых полей. Апробирован подход Френкеля-Био для описания распространения сейсмических колебаний в трещиноватом углепородном массиве. Результаты расчетов по модели Френкеля-Био объясняют практическую сложность распознавания природы флюида сейсмическим методам, по крайней мере, при использовании обычного в современных методиках диапазона частот от 0 до 500 Гц. Скоростные характеристики и структура волновых пакетов не претерпевают существенного изменения. Спектральные характеристики доли колебаний, образованных вкладом флюида лежат в диапазоне частот свыше 500 Гц. Это служит предпосылкой для разработки перспективных высокочастотных источников сейсмических колебаний.

Ключевые слова: *газо- и водонасыщенность угольных пластов, сейсмический метод, подход Френкеля-Био.*

Дизъюнктивная нарушенность является основным фактором, усложняющим отработку угольных пластов на шахтных полях ДНР [1]. При этом не только усложняются технологии выемки угля, но и резко снижается безопасность ведения горных работ. В зонах влияния тектонических разрывных нарушений снижается устойчивость пород кровли угольных пластов, проявляются участки напряженности массива горных пород. Представляют особую опасность прорывы подземных вод в горные выработки, внезапные выбросы угля и газа. Прогноз заполненных газом либо водой участков горных пород, как правило, приуроченных к дизъюнктивам, является отдельной актуальной задачей первостепенной важности. К сожалению, геофизические методы не позволяют однозначно ответить на данный вопрос [1].

Сейсмоакустические исследования, являются одним из наиболее перспективных средств определения параметров геологических аномалий [1]. В данной статье, представлены результаты оценки возможности использования данного метода для выявления участков потенциальной опасности выбросов воды и газа. В основе оценки лежит использование математического моделирования на основе подхода Френкеля-Био.

В работах Био [2,3] были получены соотношения между напряжениями и деформациями в двухфазной среде, а чуть позднее Френкелем [4] была предложена теория распространения акустических волн в насыщенной жидкостью пористой среде. Био и Френкель теоретически обосновали существование в пористой среде трех типов волн – быстрой продольной (продольная волна I рода),

медленной продольной (волна Био или продольная волна II рода) и поперечной волны. Быстрая продольная и поперечная волны подобны волнам в «классической» упругой среде [5, 8]. Продольная волна II рода является особенностью пористо-упругой среды. Скорость её распространения существенно меньше, чем у быстрой продольной волны. К тому же, эта волна отличается тем, что быстро затухает. Наиболее значительную роль волны Био играют в случае большой сжимаемости заполняющего поровое пространство флюида (например, для воздуха либо метана, заполняющего зоны трещиноватости в области влияния геологических нарушений угленосных массивов) [5 – 6, 8].

Для анализа возможности оценки состояния горного массива с учетом его водо- и газонасыщенности был разработан программный модуль для моделирования сейсмических волн в пористой среде по модели Френкеля-Био.

Система координат, используемая в настоящих исследованиях изображена на рис. 1. Угленосные толщи Донбасса представляют собой типичную слоисто-однородную структуру, включающую ритмично чередующиеся различные типы пород. Как правило, параметры угля и породных прослоев на расстояниях порядка базы сейсмических наблюдений (150–300 м) для большинства задач можно считать одинаковыми. Поэтому в ненарушенном угленосном массиве характеристики угля и пород можно считать изменяющимися только по направлению перпендикуляра к плоскости напластования. В связи с этим начало координат O помещаем в точку возбуждения сигнала. Тогда ось x целесообразно направить на приемник колебаний, ось y – в плоскости напластования перпендикулярно оси x , а ось z – перпендикулярно плоскости напластования.

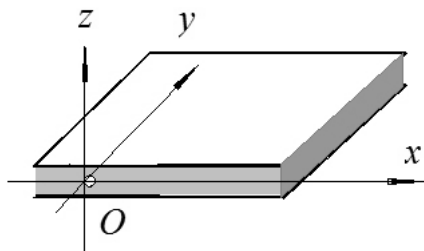


Рис. 1. Используемая система координат.

Система уравнений Френкеля-Био в смещениях имеет вид [4 – 5, 7]:

$$\begin{aligned} \mu \Delta \mathbf{u} + (A + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + Q \text{grad div } \mathbf{w} = \\ = \rho_{11} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} + b_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} Q \text{grad div } \mathbf{u} + R \text{grad div } \mathbf{U} = \\ = \rho_{22} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - b_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$b_0 = \phi^2 \eta_f / K_{pr}, \quad A = H - 2\mu - 2\phi C + \phi^2 M,$$

$$Q = \phi C - \phi^2 M, \quad R = \phi^2 M, \quad H = \frac{(K_s - K_b)^2}{D - K_b} + K_b + \frac{4\mu}{3},$$

$$C = \frac{K_s (K_s - K_b)}{D - K_b}, \quad M = \frac{K_s^2}{D - K_b},$$

$$D = K_s [1 + m (K_s / K_f - 1)],$$

$$\rho_{12} = \rho_f \phi (1 - \alpha_f), \quad \rho_{11} = (1 - \phi) \rho_s - \rho_{12}, \quad \rho_{22} = \phi \rho_f - \rho_{12}.$$

В представленных соотношениях μ – модуль сдвига пористой среды; ρ_s – плотность матрицы упругого скелета пород; ρ_f – плотность жидкости; η – динамическая вязкость. Коэффициент $\phi = \tilde{V}_f / \tilde{V}$ – эффективная пористость, вычисляемая как отношение объема \tilde{V}_f сообщающихся между собой пустот в общем объеме \tilde{V} породы, через которую происходит движение флюидов; $\mathbf{w} = \phi (\mathbf{U} - \mathbf{u})$ – поток флюида относительно упругого скелета, где \mathbf{U} и \mathbf{u} – вектора смещений во флюиде и упругом скелете, соответственно. Модули объемного сжатия упругого скелета и жидкости представлены как K_s и K_f , соответственно. K_b – модуль объемного сжатия пористой среды при дренажных условиях. Дренажные условия соответствуют состоянию пористой среды при постоянном поровом давлении ($P_f = const$). При определении K_b насыщенную флюидом породу помещают в непроницаемую эластичную оболочку, которую флюид может свободно покидать.

Коэффициент K_{pr} называется коэффициентом проницаемости. Под проницаемостью понимают способность пропускать через себя флюид. Её можно описать законом Дарси, согласно которому скорость пропускания флюида через среду прямо пропорциональна градиенту давления и обратно пропорциональна ее динамической вязкости η :

$$\vec{v} = -\frac{K_{pr}}{\eta} \text{grad}(p).$$

Извилистость α_f характеризует то расстояние, которое проходит флюид по поровому пространству в направлении градиента давления. Для однородной пористой структуры, в которой все поры ориентированы в направлении градиента давления, $\alpha_f = 1$.

Величины ρ_{11} и ρ_{22} рассматриваются в модели Био в качестве «эффективных» масс упругой и жидкой фаз.

Пусть $S = (A + \mu - Q \phi)$, $G = Q \phi$, тогда для y компоненты колебаний, записывая через V и v – значения смещений частиц флюида и упругого скелета, соответственно, имеем:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = \rho_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + b_0 \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial t} \right), \quad (3)$$

$$\rho_{22} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - b_0 \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial t} \right) = 0. \quad (4)$$

Для x компоненты колебаний имеем:

$$\begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + S \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\ + G \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial z} \right) - b_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \rho_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \\ = Q \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + R \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial z} \right) + b_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где U и u – смещения частиц флюида и упругого скелета, соответственно, в направлении x .

Аналогично для z компоненты колебаний имеем (волны SV):

$$\begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + S \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\ + G \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} \right) - b_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial W}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \rho_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \\ = Q \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + R \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} \right) + b_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial W}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

где W и w – смещения частиц флюида и упругого скелета, соответственно, в направлении z .

Общий подход к получению конечно-разностного решения систем волновых уравнений описан многими авторами, и его математическая основа не представляет новизны. В качестве модельной используется двухмерная однородная прямоугольная решетка, расположение узлов которой ориентировано вдоль осей x и z выбранной (см. рис.1) системы координат. Каждому из узлов решетки ставится в соответствие участок реальной углевмещающей толщи с её характеристиками. Для получения решения системы уравнений Био использовалась явная конечно-разностная трехслойная схема.

Введем следующее обозначение:

$$\alpha_{ij}^{\pm} = \frac{\rho_{ij}}{\tau^2} \pm \frac{b_0}{2\tau}.$$

Тогда легко показать, что искомые смещения частиц флюида $U_{m,n}^{p+1}$ и $W_{m,n}^{p+1}$ и $V_{m,n}^{p+1}$ в момент времени $p+1$ имеет вид:

$$\begin{aligned} U_{m,n}^{p+1} = & -\frac{\alpha_{12}^-}{\alpha_{22}^+} u_{m,n}^{p+1} + \\ & + \frac{1}{\alpha_{22}^+} \left(\left(\frac{2\rho_{12}}{\tau^2} - \frac{2Q}{h^2} \right) u_{m,n}^p + \left(\frac{2\rho_{22}}{\tau^2} - \frac{2R}{h^2} \right) U_{m,n}^p - \alpha_{12}^+ u_{m,n}^{p-1} - \alpha_{22}^- U_{m,n}^{p-1} + \right. \\ & \left. + \frac{Q}{h^2} \left(u_{m+1,n}^p + u_{m-1,n}^p \right) + \right. \\ & \left. + \frac{Q}{4h^2} \left(u_{m+1,n+1}^p - u_{m+1,n-1}^p - u_{m-1,n+1}^p + u_{m-1,n-1}^p \right) + \right. \\ & \left. + \frac{R}{h^2} \left(U_{m+1,n}^p + U_{m-1,n}^p \right) + \right. \\ & \left. + \frac{R}{4h^2} \left(W_{m+1,n+1}^p - W_{m+1,n-1}^p - W_{m-1,n+1}^p + W_{m-1,n-1}^p \right) \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} W_{m,n}^{p+1} = & -\frac{\alpha_{12}^-}{\alpha_{22}^+} w_{m,n}^{p+1} + \\ & + \frac{1}{\alpha_{22}^+} \left(\left(\frac{2\rho_{12}}{\tau^2} - \frac{2Q}{h^2} \right) w_{m,n}^p + \left(\frac{2\rho_{22}}{\tau^2} - \frac{2R}{h^2} \right) W_{m,n}^p - \alpha_{12}^+ w_{m,n}^{p-1} - \alpha_{22}^- W_{m,n}^{p-1} + \right. \\ & \left. + \frac{Q}{h^2} \left(w_{m,n+1}^p + w_{m,n-1}^p \right) + \right. \\ & \left. + \frac{Q}{4h^2} \left(u_{m+1,n+1}^p - u_{m+1,n-1}^p - u_{m-1,n+1}^p + u_{m-1,n-1}^p \right) + \right. \\ & \left. + \frac{R}{h^2} \left(W_{m,n+1}^p + W_{m,n-1}^p \right) + \right. \\ & \left. + \frac{R}{4h^2} \left(U_{m+1,n+1}^p - U_{m+1,n-1}^p - U_{m-1,n+1}^p + U_{m-1,n-1}^p \right) \right). \end{aligned} \quad (10)$$

$$V_{m,n}^{p+1} = \frac{2\rho_{12}}{\alpha_{22}^+ \tau^2} v_{m,n}^p - \frac{\alpha_{12}^+}{\alpha_{22}^+} v_{m,n}^{p-1} + 2 \frac{\rho_{22}}{\alpha_{22}^+ \tau^2} V_{m,n}^p - \frac{\alpha_{22}^-}{\alpha_{22}^+} V_{m,n}^{p-1} - \frac{\alpha_{12}^-}{\alpha_{22}^+} v_{m,n}^{p+1}. \quad (11)$$

Соотношения для вычисления смещений частиц упругого скелета $u_{m,n}^{p+1}$, $w_{m,n}^{p+1}$ и $v_{m,n}^{p+1}$ в момент времени $p+1$ можно представить как:

$$w_{m,n}^{p+1} = \frac{1}{\left(\alpha_{11}^+ - \alpha_{12}^- \frac{\alpha_{12}^-}{\alpha_{22}^+} \right)} \left[\left(\frac{2\rho_{11}}{\tau^2} - \frac{4\mu}{h^2} - \frac{2S}{h^2} - \frac{\alpha_{12}^-}{\alpha_{22}^+} \left(\frac{2\rho_{12}}{\tau^2} - \frac{2Q}{h^2} \right) \right) w_{m,n}^p + \right. \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{2\rho_{12}}{\tau^2} - \frac{2G}{h^2} - \frac{\alpha_{12}^-}{\alpha_{22}^+} \left(\frac{2\rho_{22}}{\tau^2} - \frac{2R}{h^2} \right) \right) W_{m,n}^p - \\
 & - \left(\alpha_{11}^- - \frac{\alpha_{12}^- \alpha_{12}^+}{\alpha_{22}^+} \right) w_{m,n}^{p-1} - \left(\alpha_{12}^+ - \frac{\alpha_{12}^- \alpha_{22}^-}{\alpha_{22}^+} \right) W_{m,n}^{p-1} + \\
 & + \frac{\mu}{h^2} \left(w_{m+1,n}^p + w_{m-1,n}^p \right) + \frac{1}{h^2} \left(S + \mu - \frac{\alpha_{12}^-}{\alpha_{22}^+} Q \right) \left(w_{m,n+1}^p + w_{m,n-1}^p \right) + \\
 & + \frac{1}{4h^2} \left(S - \frac{\alpha_{12}^-}{\alpha_{22}^+} Q \right) \left(u_{m+1,n+1}^p - u_{m+1,n-1}^p - u_{m-1,n+1}^p + u_{m-1,n-1}^p \right) + \\
 & + \frac{1}{h^2} \left(G - \frac{\alpha_{12}^-}{\alpha_{22}^+} R \right) \left(W_{m,n+1}^p + W_{m,n-1}^p \right) + \\
 & + \frac{1}{4h^2} \left(G - \frac{\alpha_{12}^-}{\alpha_{22}^+} R \right) \left(U_{m+1,n+1}^p - U_{m+1,n-1}^p - U_{m-1,n+1}^p + U_{m-1,n-1}^p \right) \Big],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{m,n}^{p+1} = & \frac{1}{\left(\alpha_{11}^+ - \alpha_{12}^- \frac{\alpha_{12}^-}{\alpha_{22}^+} \right)} \left[\left(\frac{2\rho_{11}}{\tau^2} - \frac{4\mu}{h^2} - \frac{2S}{h^2} - \frac{\alpha_{12}^-}{\alpha_{22}^+} \left(\frac{2\rho_{12}}{\tau^2} - \frac{2Q}{h^2} \right) \right) u_{m,n}^p + \right. \\
 & + \left(\frac{2\rho_{12}}{\tau^2} - \frac{2G}{h^2} - \frac{\alpha_{12}^-}{\alpha_{22}^+} \left(\frac{2\rho_{22}}{\tau^2} - \frac{2R}{h^2} \right) \right) U_{m,n}^p - \\
 & - \left(\alpha_{11}^- - \frac{\alpha_{12}^+ \alpha_{12}^-}{\alpha_{22}^+} \right) u_{m,n}^{p-1} - \left(\alpha_{12}^+ - \frac{\alpha_{12}^- \alpha_{22}^-}{\alpha_{22}^+} \right) U_{m,n}^{p-1} + \\
 & + \frac{\mu}{h^2} \left(u_{m,n+1}^p + u_{m,n-1}^p \right) + \frac{1}{h^2} \left(S + \mu - \frac{\alpha_{12}^-}{\alpha_{22}^+} Q \right) \left(u_{m+1,n}^p + u_{m-1,n}^p \right) + \\
 & + \frac{1}{4h^2} \left(S - \frac{\alpha_{12}^-}{\alpha_{22}^+} Q \right) \left(w_{m+1,n+1}^p - w_{m+1,n-1}^p - w_{m-1,n+1}^p + w_{m-1,n-1}^p \right) + \\
 & + \frac{1}{h^2} \left(G - \frac{\alpha_{12}^-}{\alpha_{22}^+} R \right) \left(U_{m+1,n}^p + U_{m-1,n}^p \right) + \\
 & \left. + \frac{1}{4h^2} \left(G - \frac{\alpha_{12}^-}{\alpha_{22}^+} R \right) \left(W_{m+1,n+1}^p - W_{m+1,n-1}^p - W_{m-1,n+1}^p + W_{m-1,n-1}^p \right) \right].
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 v_{m,n}^{p+1} = & \frac{1}{\left(\alpha_{11}^+ - \frac{(\alpha_{12}^-)^2}{\alpha_{22}^+} \right)} \left[\left(\left(\frac{2\rho_{11}}{\tau^2} - \frac{4\mu}{h^2} \right) - \alpha_{12}^- \frac{2\rho_{12}}{\alpha_{22}^+ \tau^2} \right) v_{m,n}^p + \right. \\
 & + \frac{\mu}{h^2} \left(v_{m+1,n}^p + v_{m-1,n}^p + v_{m,n+1}^p + v_{m,n-1}^p \right) - \\
 & - \left(\alpha_{11}^- - \alpha_{12}^- \frac{\alpha_{12}^+}{\alpha_{22}^+} \right) v_{m,n}^{p-1} + \frac{2}{\tau^2} \left(\rho_{12} - \rho_{22} \frac{\alpha_{12}^-}{\alpha_{22}^+} \right) V_{m,n}^p - \left(\alpha_{12}^+ - \alpha_{12}^- \frac{\alpha_{22}^-}{\alpha_{22}^+} \right) V_{m,n}^{p-1} \Big].
 \end{aligned} \tag{14}$$

При выполнении вычислений на первом этапе следует использовать соотношения (12), (13) и (14). Затем, подставляя результат вычислений $u_{m,n}^{p+1}$, $w_{m,n}^{p+1}$ и

$v_{m,n}^{p+1}$ в (9), (10) и (11), получать значения искомого смещения частиц флюида $U_{m,n}^{p+1}$, $W_{m,n}^{p+1}$ и $V_{m,n}^{p+1}$.

При проведении исследований выбран интервал петрофизического разреза Донбасса, вмещающий угли марки Ж. Моделировался угольный пласт мощностью 1.0 м во вмещающих породах, представленных алевролитами и аргиллитами. Всего было проведено более 70 расчетов, в которых в диапазоне характерном для углей марки Ж варьировались характеристики угля и пород. Значения эффективной пористости принимались равными 40 %, что соответствует максимальным значениям параметра в зонах дробления и повышенной трещиноватости в непосредственной близости от мест тектонических разрывов угольного пласта [1]. В качестве флюида использовалась вода и воздух. Для сравнения были проведены расчеты для модели, в которой распространение волн подчиняется закону Гука по схеме, подробно изложенной в [1].

В частности, предполагая водное насыщение, параметры флюида определялись так: плотность $\rho = 1,0 \text{ г/см}^3$, модуль объемного сжатия $k = 2,2 \cdot 10^{10} \text{ дин/см}^2$, динамическая вязкость $\eta = 0,006 (\text{г} \cdot \text{см})/\text{с}$ (0,6 сантипуаз). Для трещиноватого угля при пористости 40 % значение проницаемости для воды бралось $300 \cdot 10^{-8} \text{ см}^2$. Для извилистости в настоящих исследованиях при расчетах использовалось значение $a_f = 1.0$, что соответствует ориентации трещин вдоль напластования.

На рис. 2 изображены усредненные частотные, а на рис. 3 скоростные спектры колебаний, полученные для различных моделей. Видно, что для моделей с учетом флюидов на частотах свыше 500 Гц проявляются локальные максимумы. Их амплитуды составляют до 30% от максимального значения. Данные локальные максимумы практически одинаковы для газа и для воды. Т.е с учетом того, что любые трещины всегда заполнены либо газом, либо водой, распознать природу флюида по спектру колебаний не представляется возможным. Усложняет картину распознавания тот факт, что нижний предел изменения частоты практически совпадает с верхним пределом частотного диапазона волн, обрабатываемых в рамках современных методик использования ударного источника [1]. Источники взрывного типа, генерирующие информативные колебания на частотах до 1000 Гц на шахтах Донбасса имеют крайне ограниченное применение ввиду их потенциальной опасности.

Скоростные спектры для всех моделей характеризуются двумя локальными максимумами. Для модели без флюида их интерпретация очевидна. Это продольные и поперечные волны, распространяющиеся во вмещающихся породах вдоль границ с углем. В шахтной сейсморазведке они известны как боковые [1]. Изменения скоростного спектра для моделей Френкеля-Био незначительны. Во всяком случае, в рамках представленных моделей говорить о отдельном наблюдении продольных волн I и II второго рода не представляется возможным. Скорее можно говорить о незначительном уменьшении скорости продольной волны I рода, являющейся в данном случае аналогом боковой волны. Скорости поперечных волн практически не изменяются.

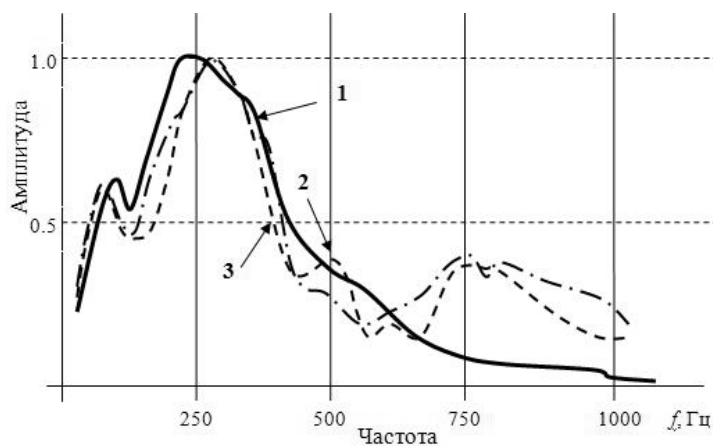


Рис. 2. Усредненные частотные спектры. 1 – продольная волна в модели без флюида; 2 – продольная волна по скелету угля, насыщенного водой; 3 – продольная волна по скелету угля, насыщенного газом;

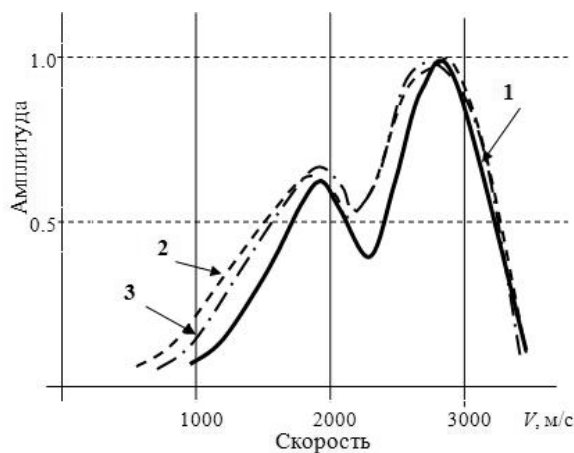


Рис. 3. Усредненные скоростные спектры. 1 – продольная волна в модели без флюида; 2 – продольная волна по скелету угля, насыщенного водой; 3 – продольная волна по скелету угля, насыщенного газом;

Таким образом, в настоящей работе сделана попытка оценки степени влияния фактора газо- и водонасыщенности угольных пластов на сейсмоакустические параметры регистрируемых волновых полей. Апробирован подход Френкеля-Био для описания распространения сейсмических колебаний в трещиноватом угленородном массиве. Результаты расчетов по модели Френкеля-Био объясняют практическую сложность распознавания природы флюида сейсмическим методом, по крайней мере, при использовании обычного в современных методиках диапазона частот от 0 до 500 Гц. Скоростные характеристики и структура волновых пакетов не претерпевают существенного изменения. Спектральные характеристики доли колебаний, образованных вкладом флюида лежат в диапазоне

частот свыше 500Гц. Это служит предпосылкой для разработки перспективных высокочастотных источников сейсмических колебаний.

1. *Анциферов А.В.* Математическое моделирование в шахтной сейсморазведке / А.В. Анциферов, А.А. Глухов. – Киев: Наукова думка, 2012. – 255 с.
2. *Био М.А.* Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде / М.А. Био // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. – 1963. – Т. 6, № 82. – С. 103–134.
3. *Biot M.A.* General theory of three-dimensional consolidation / М.А. Biot // J. Appl. Phys. – 1941. – Vol. 12. – P. 155–164.
4. *Френкель Я.И.* К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве / Я.И. Френкель // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз. – 1944. – Т. 8, № 4. – С. 133–149.
5. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. Part I. Low frequency range / М.А. Biot // J. Acoust. Soc. Amer. – 1956. – Vol. 28, No 2. – P. 168–178.
6. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. Part II. Higher frequency range / М.А. Biot // J. Acoust. Soc. Amer. – 1956. – Vol. 28, No 2. – P. 179–191.
7. *Био М.А.* Теория упругости и консолидации анизотропной пористой среды / М.А. Био // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. – 1957. – Т. 1, № 35. – С. 140–147.
8. *Tolstoy I.* Acoustics, elasticity, and thermodynamics of porous media: Twenty-one papers by М.А. Biot. / I. Tolstoy. – New York: AIP Press, 1992. – 272 p.

A.A. Glukhov, V.A. Antsiferov

Evaluation of the impact of gas- and water saturation factors of coal layers on seismoacoustic parameters of the recorded wavefields.

The paper evaluates effects of gas- and water saturation factors of coal layers on seismoacoustic parameters of the recorded wavefields. Fraenkel-Biot approach is implemented to describe seismic energy propagation in the fractured solid. The results of Frenkel-Bio model calculations explain the complexity of distinguishing in practice the fluid nature by seismic technique, at least when using the average frequency bandwidth of 0 – 500 Hz applied in modern methods. Velocity properties and wavetrain patterns do not undergo significant changes. Spectral characteristics of a fraction of energy generated due to the fluid contribution are in the frequency bandwidth beyond 500 Hz. This serves as a background to develop the promising high-frequency sources of seismic energy.

Keywords: *gas- and water saturation of coal layers, seismic technique, Fraenkel-Biot approach.*

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ), Донецк
Glukhov1964@yandex.ru

Получено 22.05.18