

ISSN 0136-4545

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

---

---

**Журнал  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ  
МЕХАНИКИ**

---

---

**№ 4 (77)**

**2021**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:** д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**

**ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:** д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**

**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:** **М.Н. Пачева**

#### **РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

*д-р техн. наук, проф. А.В. Анциферов, д-р техн. наук, проф. В.Е. Болнокин, д-р техн. наук, проф. Н.И. Болонов, д-р физ.-мат. наук, проф. А.О. Ватульян, д-р техн. наук, проф. Л.П. Вовк, д-р техн. наук, проф. В.А. Глазунов, д-р техн. наук, с.н.с. А.А. Глухов, д-р физ.-мат. наук, проф. А.С. Гольцев, д-р физ.-мат. наук, проф. Г.В. Горр, д-р техн. наук, проф. В.В. Губанов, д-р техн. наук, с.н.с. В.А. Дрибан, д-р физ.-мат. наук, проф. А.М. Ковалев, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. Б.И. Коносевиц, д-р физ.-мат. наук, проф. И.А. Моисеенко, д-р техн. наук, проф. В.Ф. Мущанов, д-р техн. наук, проф. А.А. Петраков, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. С.Н. Судаков, д-р техн. наук, проф. Г.М. Улитин, д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Шалдырван.*

**EDITOR-IN-CHIEF:** Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**

**DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF:** Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**

**EXECUTIVE SECRETARY:** **M.N. Pacheva**

#### **EDITORIAL BOARD:**

*Dr. of tech., prof. A.V. Antsiferov, Dr. of tech., prof. V.E. Bolnokin, Dr. of tech., prof. N.I. Bolonov, Dr. of phys. and math., prof. A.O. Vatulyan, Dr. of tech., prof. L.P. Vovk, Dr. of tech., prof. V.A. Glazunov, Dr. of tech., senior researcher A.A. Glukhov, Dr. of phys. and math., prof. A.S. Goltsev, Dr. of phys. and math., prof. G.V. Gorr, Dr. of tech., prof. V.V. Gubanov, Dr. of tech., senior researcher V.A. Driban, Dr. of phys. and math., prof. A.M. Kovalev, Dr. of phys. and math., senior researcher B.I. Konosevich, Dr. of phys. and math., prof. I.A. Moiseyenko, Dr. of tech., prof. V.F. Mushchanov, Dr. of tech., prof. A.A. Petrakov, Dr. of phys. and math., senior researcher S.N. Sudakov, Dr. of tech., prof. G.M. Ulitin, Dr. of phys. and math., prof. V.A. Shaldyrvan.*

Адрес редакции: 83001 Донецк, ул. Университетская, 24  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
Тел. 302 92 71, E-mail: jtam\_donnu@mail.ru

Технический редактор: Пачева М.Н.

Научный журнал «Журнал теоретической и прикладной механики» включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (приказ МОН ДНР № 616 от 14.07.2021 г) по следующим группам научных специальностей и специальностям: 01.02.00 — Механика; 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ; 05.23.17 — Строительная механика; 25.00.20 — Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика.

Журнал включен в перечень РИНЦ (Лицензионный договор № 27-01/2020 от 23.01.2020 г.).

Утверждено к печати ученым советом  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016г.

© Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Донецкий национальный университет», 2021

№ 4 (77) / 2021

Основан в 1970г.

# ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

## СОДЕРЖАНИЕ

### Механика твердого тела

- Горр Г.В., Мазнев А.В.* О движении гиростата Лагранжа и динамически симметричного гиростата..... 5

### Механика деформируемого твердого тела

- Калоеров С.А., Мироненко А.Б., Полянский М.А.* Электромагнитоупругое состояние пластинки с криволинейными отверстиями..... 20
- Болнокин В.Е., Глуценко А.В., Дубяго Л.В., Сторожев В.И.* Изгибные волны в окружном направлении кольцевой трансверсально-изотропной пластины с закрепленными краями..... 35

### Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

- Лазебная Л.А.* Математическое моделирование гидродинамических процессов в анизотропной сплошной среде: применение к угольным пластам..... 44
- Перинская Е.В.* Математическое моделирование конвективного процесса в многокомпонентной сплошной среде..... 52

### Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика

- Канин В.А., Пащенко А.А.* Продолжительность подготовительного периода выбросов угля и газа..... 61



**№ 4 (77) / 2021**

*Founded in 1970.*

# **JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS**

## **C O N T E N T S**

### **Rigid Body Dynamics**

- Gorr G.V., Mazniev A.V.* On the motion of the Lagrange gyroscope and the dynamically symmetric gyrostat..... 5

### **Solid Mechanics**

- Kaloerov S.A., Mironenko A.B., Polyanskiy M.A.* Electromagneticelastic state of the plate with curved holes..... 20

- Bolnokin V.E., Glushchenko A.V., Dubyago L.V., Storozhev V.I.* Flexural waves in the circumferential direction of an annular transversely isotropic plate with fixed edges..... 35

### **Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes**

- Lazebnaya L.A.* Mathematical modeling of hydrodynamic processes in anisotropic continuous medium: application to coal seams..... 44

- Perinskaya E.V.* Mathematical modeling of the convective process in a multicomponent continuous medium ..... 52

### **Geomechanics, Rock Damage, Mining Aerogas dynamics and Thermal Physics**

- Kanin V.A., Pashchenko A.A.* Duration of the preparatory period of coal and gas emissions..... 61



## МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 531.38; 531.39

©2021. Г.В. Горр, А.В. Мазнев

## О ДВИЖЕНИИ ГИРОСКОПА ЛАГРАНЖА И ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ГИРОСТАТА

В статье исследовано движение гироскопа Лагранжа, основанное на применении комплексного подхода в истолковании движения твердого тела, имеющего неподвижную точку. Наряду с кратким изложением полученных ранее результатов, установлены новые свойства движения гироскопа Лагранжа. Для динамически симметричного гиростата с переменным гиростатическим моментом изучены прецессионные движения относительно вертикали.

**Ключевые слова:** гироскоп Лагранжа, комплексный подход, истолкование движения, изоконические движения, переменный гиростатический момент.

**Введение.** Решению Ж. Лагранжа [1] посвящена обширная литература. К. Якоби [2] показал, что движение гироскопа Лагранжа может быть разложено на два движения Пуансо [3] – прямое и обращенное. Значительные результаты по изучению движения этого гироскопа установили Г. Дарбу [4,5], В. Гесс [6] и другие. Опубликованы многочисленные монографии, в которых исследовано движение гироскопа Лагранжа. Наиболее полное изложение свойств движения симметричного гироскопа дано в монографиях К. Магнуса [7], Э. Раусса [8], Ф. Кляйна и А. Зоммерфельда [9], Г.К. Сулова [10], Г.В. Горра, Л.В. Кудряшовой, Л.А. Степановой [11], А.В. Борисова и И.С. Мамаева [12].

С помощью уравнений неподвижного годографа вектора угловой скорости, предложенных П.В. Харламовым [13], в статьях В.С. Ефимова [14,15] рассмотрены свойства движения гироскопа Лагранжа методом Пуансо [3]. Следует отметить, что в [16] исследовано большинство решений на основании теоремы Пуансо и уравнений [13]. Развитие метода Пуансо получено в статье [17], в которой предложен модифицированный метод Пуансо. Согласно подходу [17] движение тела представляется качением без скольжения подвижного аксоида вектора, коллинеарного вектору угловой скорости тела, по неподвижному аксоиду этого вектора. Применение модифицированного метода Пуансо [17] позволило во многих решениях уравнений Эйлера-Пуассона установить более наглядное представление о свойствах движения твердого тела, имеющего неподвижную точку (см., например, статью [18]). Кинематическая формула [17], которая связывает угол прецессии тела и полярный угол неподвижного годографа в уравнениях П.В. Харламова [13], позволила разработать комплексный подход [19] в истолковании

движения тела, имеющего неподвижную точку. Суть этого подхода состоит в том, что наиболее полные свойства движения тела можно получить, используя углы Эйлера, параметры Родрига-Гамильтона, прямую теорему Пуансо и модифицированный метод Пуансо.

В данной статье комплексный подход применен к исследованию решения Ж. Лагранжа; приведен не только краткий анализ полученных ранее результатов, но и установлены новые свойства движения симметричного гироскопа. В частности, для изоконических движений динамически симметричного гиростата, рассмотрено интегрирование уравнений класса Эйлера-Пуассона с учетом переменности гиристатического момента.

**1. Две модели гиристата.** Рассмотрим уравнения движения гиристата, имеющего неподвижную точку под действием силы тяжести [11]

$$(\overline{A\omega} + \overline{\lambda}(t))^\bullet = (\overline{A\omega} + \overline{\lambda}(t)) \times \overline{\omega} + \overline{s} \times \overline{v}, \quad (1)$$

$$\dot{\overline{v}} = \overline{v} \times \overline{\omega}, \quad (2)$$

где введены обозначения:  $\overline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  – вектор угловой скорости;  $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$  – единичный вектор, сонаправленный с силой тяжести;  $\overline{s} = (s_1, s_2, s_3)$ ,  $s = mg |\overline{OC}|$  ( $m$  – масса тела,  $g$  – ускорение свободного падения,  $O$  – неподвижная точка,  $C$  – центр масс гиристата);  $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$  – тензор инерции гиристата;  $\overline{\lambda}(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$  – гиристатический момент; точка над переменными  $\overline{\omega}(t)$ ,  $\overline{v}(t)$ ,  $\overline{\lambda}(t)$  обозначает дифференцирование по времени.

Уравнения (1), (2) имеют два первых интеграла

$$\overline{v} \cdot \overline{v} = 1, \quad (\overline{A\omega} + \overline{\lambda}(t)) \cdot \overline{v} = k. \quad (3)$$

Здесь  $k$  – произвольная постоянная.

Запишем уравнения (1), (2) и интегралы (3) в скалярной форме, полагая  $\lambda_1(t) = 0$ ,  $\lambda_2(t) = 0$ ,  $A_2 = A_1$ ,

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_1 &= \omega_2 [(A_1 - A_3) \omega_3 - \lambda_3(t)] + s_2 v_3 - s_3 v_2, \\ A_1 \dot{\omega}_2 &= -\omega_1 [(A_1 - A_3) \omega_3 - \lambda_3(t)] + s_3 v_1 - s_1 v_3, \\ A_3 \dot{\omega}_3 &= -\dot{\lambda}_3(t) + s_1 v_2 - s_2 v_1, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\dot{v}_1 = \omega_3 v_2 - \omega_2 v_3, \quad \dot{v}_2 = \omega_1 v_3 - \omega_3 v_1, \quad \dot{v}_3 = \omega_2 v_1 - \omega_1 v_2, \quad (5)$$

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1, \quad A_1 (\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2) + (A_3 \omega_3 + \lambda_3(t)) v_3 = k. \quad (6)$$

Систему (4)-(6) будем относить к первой модели гиристата.

Вторую модель гиристата опишем уравнениями, которые следуют из (4)-(6) при условии  $\lambda_3(t) = B\Omega_0$ , где  $B$  и  $\Omega_0$  – постоянные, характеризующие соответственно момент инерции ротора относительно оси вращения и его постоянную угловую скорость. Обозначая  $\lambda_3(t) = \lambda$ , из системы (4), (5) в случае  $s_2 = 0$ ,  $s_1 = 0$ , получим



$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_1 &= [\omega_0 (A_1 - A_3) - \lambda] \omega_2 - s_3 v_2, \\ A_1 \dot{\omega}_2 &= -[\omega_0 (A_1 - A_3) - \lambda] \omega_1 + s_3 v_1, \quad \dot{\omega}_3 = 0 \quad (\omega_3 = \omega_0), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\dot{v}_1 = \omega_0 v_2 - \omega_2 v_3, \quad \dot{v}_2 = \omega_1 v_3 - \omega_0 v_1, \quad \dot{v}_3 = \omega_2 v_1 - \omega_1 v_2. \quad (8)$$

В рассматриваемом случае интеграл моментов из (6) примет вид

$$A_1 (\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2) + (A_3 \omega_0 + \lambda) v_3 = k, \quad (9)$$

а уравнения (7), (8) допускают и интеграл энергии

$$A_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + A_3 \omega_0^2 = 2(E + s_3 v_3), \quad (10)$$

где  $E$  – произвольная постоянная. В динамике гиростата с симметричным распределением масс иногда полагают  $\lambda = 0$ , так как значение параметра  $\lambda$  не отражается на свойствах существования аналога интеграла Лагранжа и интегралов  $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$  и (9), (10), и при  $\lambda \neq 0$  интегрирование уравнений Эйлера-Пуассона осуществляется в квадратурах по Якоби. В данной статье будем рассматривать оба варианта  $\lambda = 0$  и  $\lambda \neq 0$ , поскольку, например, для изоконических движений гиростата условие  $\lambda \neq 0$  является существенным.

**2. Случай  $\lambda=0$ .** Как сказано во введении, решение Лагранжа рассмотрено во многочисленных публикациях. Положим в уравнениях (7), интегралах (9), (10)  $\lambda = 0$ . В плоскости  $z = \omega_0$  подвижной системы координат  $Oxyz$  с единичными векторами  $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$  введем полярные координаты  $\rho, u$ :

$$\omega_1 = \rho(t) \cos u(t), \quad \omega_2 = \rho(t) \sin u(t). \quad (11)$$

Тогда, в силу уравнений (7), (8) и соотношений  $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$ , (9)-(11) решение Лагранжа запишем в виде

$$\omega_3 = \omega_0, \quad \omega_1 = \rho \cos u, \quad \omega_2 = \rho \sin u, \quad \rho^2 = \frac{2s_3 v_3 + \mu_1}{A_1}, \quad (12)$$

$$\dot{u} = -\frac{\mu_2}{A_1} + \frac{s_3 (k - A_3 \omega_0 v_3)}{A_1 (2s_3 v_3 + \mu_1)}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{A_1 \rho} \left[ (k - A_3 \omega_0 v_3) \cos u - A_1 \sin u \cdot \sqrt{F(v_3)} \right], \\ v_2 &= \frac{1}{A_1 \rho} \left[ (k - A_3 \omega_0 v_3) \sin u + A_1 \cos u \cdot \sqrt{F(v_3)} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

$$v_3 = \sqrt{F(v_3)}, \quad \sqrt{F(v_3)} = \frac{1}{A_1^2} \left[ A_1 (1 - v_3^2) (2s_3 v_3 + \mu_1) - (k - A_3 \omega_0 v_3)^2 \right], \quad (15)$$

где  $\mu_1 = 2E - A_3 \omega_0^2$ ,  $\mu_2 = (A_1 - A_3) \omega_0$ .

Варианты сведения задачи интегрирования уравнения из (15) изучать не будем, так как представление решения Ж. Лагранжа через элементарные или эллиптические функции времени рассмотрено во многих публикациях (см., например, [7-12]). Для применения комплексного подхода в истолковании движения гироскопа Лагранжа запишем на основании (12), (14) векторные уравнения годографов  $\bar{\omega}(t)$ ,  $\bar{v}(t)$  в системе  $Oxyz$ :

$$\bar{\omega}_H(t) = \rho(t) \cos u(t) \bar{i}_1 + \rho(t) \sin u(t) \bar{i}_2 + \omega_0 \bar{i}_3, \quad (16)$$

$$\bar{v}_H(t) = v_1(t) \bar{i}_1 + v_2(t) \bar{i}_2 + v_3(t) \bar{i}_3. \quad (17)$$

Используя результаты статьи [15], уравнения неподвижного годографа представим следующим образом

$$\bar{\omega}_H(t) = \omega_\xi(t) \bar{\epsilon}_1 + \omega_\eta(t) \bar{\epsilon}_2 + \omega_\zeta(t) \bar{\epsilon}_3, \quad (18)$$

где

$$\omega_\xi(t) = \omega_\rho(t) \cos \alpha(t), \quad \omega_\eta = \omega_\rho(t) \sin \alpha(t), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \omega_\zeta &= \frac{k}{A_1} + \frac{\mu_2}{A_1} v_3(t), \\ \omega_\rho^2 &= -\frac{\mu_2^2}{A_1^2} v_3^2(t) + \frac{2}{A_1^2} (s_3 A_1 - k \mu_2) v_3(t) + \frac{\mu_1}{A_1} - \frac{k^2}{A_1^2} + \omega_0^2, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{A_1^2 \omega_\rho^2} \{ -s_3 \mu_2 v_3^2(t) + [s_3 k - \mu_1 \mu_2 - \mu_2 \omega_0 (A_1 \omega_0 + \mu_2)] v_3(t) + \\ &\quad + \omega_0 (k \mu_2 - s_3 A_1) \}. \end{aligned} \quad (21)$$

В общем случае (не учитывающем случаи вырождения из (15)) имеем

$$v_3(t) = v_3^{(2)} - \left( v_3^{(2)} - v_3^{(3)} \right) \operatorname{sn}^2(k_*, \varepsilon_0(t - t_0)), \quad (22)$$

где

$$\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{s_3 (v_3^{(2)} - v_3^{(3)})}{A_1}}, \quad k_*^2 = \frac{\nu_3^{(2)} - \nu_3^{(1)}}{\nu_3^{(2)} - \nu_3^{(3)}} < 1, \quad (23)$$

а  $v_3^{(i)}$  связаны со свойством функции  $F(v_3)$  из (15), которое характеризуется равенством

$$F(v_3) = \frac{2s_3}{A_1} \left( v_3^{(2)} - v_3 \right) \left( v_3 - v_3^{(1)} \right) \left( v_3 - v_3^{(3)} \right). \quad (24)$$

В силу (24) функция  $v_3(t)$  изменяется на отрезке

$$v_3^{(1)} \leq v_3 \leq v_3^{(2)}. \quad (25)$$

Отметим, что  $v_3^{(3)} < -1$ .

Основные свойства годографов (16), (18) таковы: подвижный годограф (18) – плоская кривая, неподвижный годограф принадлежит сфере Дарбу [4]

$$\omega_\rho^2 + (\omega_\zeta - l)^2 = R^2, \quad (26)$$

где  $l = \frac{s_3}{\mu_2}$ ,  $R^2 = \frac{\mu_1}{A_1} - \frac{2}{\mu_1}lk + \omega_0^2 + l^2$ .

В силу (22), (24) в равенствах (25), (26) сферический случай  $A_1 = A_3$  исключаем. На основании равенства  $\mu_2 = (A_1 - A_3)\omega_0$  и формулы для  $\omega_\zeta$  из (20) при  $A_1 = A_3$  устанавливаем, что неподвижный годограф – плоская кривая (этот вариант будет изучен ниже).

Обозначим через  $\theta, \phi, \psi$  – углы Эйлера. Тогда на основании результатов статьи [19] находим:

$$\phi(v_3) = \arctg \frac{v_1(v_3)}{v_2(v_3)}, \quad \theta(v_3) = \arccos v_3, \quad (27)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{(k - A_3\omega_0 v_3(t))}{A_1(1 - v_3^2(t))}, \quad (28)$$

$$\tg(\alpha - \psi) = \frac{\omega_0^2(A_1 - A_3)v_3^2 + kv_3 - A_1\omega_0}{\sqrt{F(v_3)}}, \quad (29)$$

где функция  $v_3(t)$  указана в формуле (22).

**3. Модифицированный метод Пуансо в решении Лагранжа.** Поскольку подвижный и неподвижный годографы вектора угловой скорости изучены в достаточно полном объеме, то остановимся на применении модифицированного метода Пуансо [17].

**3.1. Сферокоические сечения.** Рассмотрим вначале аналог подхода Э. Раусса [8]. Положим, что вектор  $\bar{b}(t) = b(t)\bar{\omega}(t)$  выбран так, чтобы выполнялось условие

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = R_0^2, \quad (30)$$

где  $R_0$  – постоянная,  $b_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) – компоненты вектора  $\bar{b}$ . В силу  $b_i = b(t)\omega_i$  и равенств (12), из (30) найдем

$$b(t)(\rho^2(t) + \omega_0^2) = R_0^2, \quad (31)$$

то есть с учетом (10), (12) функция  $b(t)$  такова

$$b(t) = \frac{R_0\sqrt{A_1}}{\sqrt{2s_3v_3(t) + 2E + (A_1 - A_3)\omega_0^2}}. \quad (32)$$

Подвижный годограф вектора  $\bar{b}(t)$  на основании равенств (12) представим в виде

$$\bar{b}_n(t) = \frac{R_0}{\sqrt{\rho^2(t) + \omega_0^2}} (\rho(t) \cos u(t) \bar{l}_1 + \rho(t) \sin u(t) \bar{l}_2 + \omega_0 \bar{l}_3). \quad (33)$$

Так как  $v_3(t)$  изменяется на отрезке (25), а подвижный годограф вектора угловой скорости из (13) расположен в кольце, то из (33) следует, что сферическая кривая (33) расположена на сфере между двумя параллелями. Неподвижный годограф вектора  $\bar{b}(t)$  можно записать, используя соотношения (18), (19), (31)

$$\bar{b}_n(t) = \frac{R_0}{\sqrt{\rho^2(t) + \omega_0^2}} (\omega_\rho(t) \cos \alpha(t) \bar{\varepsilon}_1 + \omega_\rho(t) \sin \alpha(t) \bar{\varepsilon}_2 + \omega_\zeta(t) \bar{\varepsilon}_3). \quad (34)$$

Движение гироскопа Лагранжа можно получить качением без скольжения кривой (33) по кривой (34). Данное представление движения тела целесообразно применять в том случае, когда необходимо определить свойства движения сферы, связанной с гироскопом, либо свойства некоторых ее характерных прямых (например, главных осей инерции). Следует иметь ввиду применение и других методов, таких как, например, метод сферической тригонометрии, который использовал Э. Раусс [8] в исследовании решений Эйлера.

**3.2. Эллипсоидоконические сечения.** Предположим, что конец вектора  $\bar{b}(t) = b(t)\bar{\omega}(t)$  в подвижном пространстве лежит на эллипсоиде инерции тела, то есть выполняется равенство

$$A_1(b_1^2 + b_2^2) + A_3b_3^2 = \sigma_0^2, \quad (35)$$

где  $\sigma_0$  – постоянная. Тогда, в силу равенств  $b_i = b(t)\omega_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) и формул (12), имеем

$$b(t) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2(E + s_3v_3(t))}}. \quad (36)$$

В силу (12), (18), (19), (36) запишем равенства

$$\bar{b}_n(t) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2(E + s_3v_3(t))}} (\rho(t) \cos u(t) \bar{l}_1 + \rho(t) \sin u(t) \bar{l}_2 + \omega_0 \bar{l}_3), \quad (37)$$

$$\bar{b}_n(t) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2(E + s_3v_3(t))}} (\omega_\rho(t) \cos \alpha(t) \bar{\varepsilon}_1 + \omega_\rho(t) \sin \alpha(t) \bar{\varepsilon}_2 + \omega_\zeta(t) \bar{\varepsilon}_3). \quad (38)$$

Исследование свойств кривых (37), (38) должно быть основано на формулах (12), (13), (15), (20), (21). Движение гироскопа Лагранжа может быть осуществлено с помощью качения без скольжения аксоида с направляющей линией (37) по аксоиду с направляющей линией (38) с угловой скоростью  $\bar{\omega}(t) = \frac{\bar{b}(t)}{b(t)}$ .

Очевидно, что неподвижный годограф  $\bar{b}(t)$  не будет лежать на сфере Дарбу. Данное представление в некотором смысле носит дополнительный интерес в исследовании свойств движения тела, но, тем не менее, имеет определенный аналог кинематического истолкования Пуансо решения Эйлера, так как оно дает информацию о движении эллипсоида инерции гироскопа.

#### 4. Изоконические движения гироскопа Лагранжа.

**4.1. Случай  $\lambda=0$ .** Изоконическими движениями называются движения, при которых подвижный и неподвижный годографы угловой скорости симметричны друг другу относительно касательной плоскости, проходящей через неподвижную точку [20]. В данной монографии отмечено, что первый результат в теории изоконических движений получил Р. Фабри при исследовании решения В.А. Стеклова. Свойство изоконичности в решении В.А. Стеклова изучали и Г.В. Мозалевская и Е.И. Харламова; они использовали уравнения П.В. Харламова [13].

Запишем инвариантное соотношение, которое характеризует изоконические движения тела [20]

$$\bar{\omega} \cdot (\bar{v} - \bar{c}) = 0, \quad (39)$$

где вектор  $\bar{c}$  неизменно связан с телом, а  $\bar{\omega}$  и  $\bar{v}$  – переменные, которые введены ранее. Изучим изоконические движения в решении Лагранжа (см. формулы (12)-(15)). Запишем первый интеграл (9) при  $\lambda=0$  и соотношение (39) в скалярной форме (полагаем  $\bar{c} = (0, 0, 1)$ )

$$A_1 (\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2) + A_3 \omega_0 v_3 = k, \quad \omega_1 v_1 + \omega_2 v_2 = \omega_0 (1 - v_3). \quad (40)$$

Очевидными условиями зависимости соотношений (40) являются равенства

$$A_1 = A_3, \quad k = A_1 \omega_0, \quad (41)$$

то есть эллипсоид инерции – сфера (в этом случае используется термин сферический гироскоп Лагранжа [10]). Рассмотрим формулы (12)-(15) при выполнении равенств (41)

$$\omega_3 = \omega_0, \quad \omega_1 = \rho \cos u, \quad \omega_2 = \rho \sin u, \quad \rho^2 = \frac{2s_3 v_3 + 2E - A_1 \omega_0^2}{A_1}, \quad (42)$$

$$\dot{u} = \frac{s_3 \omega_0 (1 - v_3)}{2s_3 v_3 + 2E - A_1 \omega_0^2}, \quad \dot{v}_3 = -\sqrt{(1 - v_3)(a_2 v_3^2 + a_1 v_3 + a_0)}, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\sqrt{1 - v_3}}{\rho} \left( \omega_0 \sqrt{1 - v_3} \cos u - \sin u \cdot \sqrt{a_2 v_3^2 + a_1 v_3 + a_0} \right), \\ v_2 &= \frac{\sqrt{1 - v_3}}{\rho} \left( \omega_0 \sqrt{1 - v_3} \sin u + \cos u \cdot \sqrt{a_2 v_3^2 + a_1 v_3 + a_0} \right). \end{aligned} \quad (44)$$

где  $a_2 = \frac{2s_3}{A_1}$ ,  $a_1 = \frac{2(s_3 + E)}{A_1}$ ,  $a_0 = \frac{2(E - A_1 \omega_0^2)}{A_1}$ .

Запишем уравнения (15) для переменной  $v_3$

$$\dot{v}_3 = \sqrt{\frac{2s_3}{A_1} (1 - v_3) \left( v_3 - v_3^{(1)} \right) \left( v_3 - v_3^{(3)} \right)}, \quad (45)$$

где

$$v_3^{(1)} = \frac{1}{2a_2} \left( -a_1 + \sqrt{D} \right), v_3^{(3)} = \frac{1}{2a_2} \left( -a_1 - \sqrt{D} \right), D = a_1^2 - 4a_0a_2. \quad (46)$$

Тогда из уравнения (45) следует

$$v_3(t) = 1 - \left( 1 - v_3^{(3)} \right) \operatorname{sn}^2(k_*, \varepsilon_0(t - t_0)). \quad (47)$$

Здесь параметр  $\varepsilon_0$  имеет значение из (23), а параметр  $k_*$  удовлетворяет условию

$$k_*^2 = \frac{1 - v_3^{(1)}}{1 - v_3^{(3)}}. \text{ Переменная } v_3(t) \text{ изменяется на отрезке}$$

$$v_3^{(1)} \leq v_3 \leq 1. \quad (48)$$

Условием существования решения (47) является неравенство  $2(s_3 v_3 + E) - A_1 \omega_0^2 > 0$ . Представление решения Лагранжа в виде (42)-(44), (47) обусловлено тем, что в случае изоконических движений можно указать явные значения  $v_3^{(1)}$ ,  $v_3^{(3)}$  посредством соотношений (46).

Из условия  $\omega_3 = \omega_0$  и формулы для  $\rho(v_3)$  из системы (42) следует, что подвижный годограф в решении Лагранжа для случая изоконического движения находится в плоскости  $z = \omega_0$  и в силу (48) расположен в кольце с радиусами  $\rho(v_3^{(1)})$ ,  $\rho(1)$ . При этом, так как  $\dot{u} > 0$ , полярный угол  $u$  возрастает с течением времени, и в силу соотношений (42), (43) подвижный годограф вектора угловой скорости касается окружности  $\rho(v_3^{(1)})$ , но к окружности  $\rho(1)$  подходит под прямым углом.

Для нахождения углов  $\phi(v_3)$ ,  $\theta(v_3)$  необходимо обратиться к формулам (27), (44). Угол прецессии определим из (28) с учетом условий (41)

$$\psi(t) = \omega_0 \int \frac{dt}{1 + v_3(t)}. \quad (49)$$

В силу свойства изоконичности гироскопа Лагранжа формулы (20), (21) приведем к виду

$$\omega_\zeta = \omega_0, \quad \omega_\rho^2(v_3) = \rho^2(v_3), \quad \frac{d\alpha}{dt} = -\dot{u},$$

из которых следует также свойство, что и полученные ранее для подвижного годографа вектора угловой скорости. Определенный интерес имеет только подробное представление формулы (49) и формулы (29). После очевидных вычислений, основанных на применении зависимости (47) для  $v_3(t)$ , из (28), (29) находим

$$\psi(t) = \omega_0 \int_{t_0}^t \frac{dt}{2 - \left(1 - v_3^{(3)}\right) \operatorname{sn}^2(k_*, \varepsilon_0(t - t_0))}, \quad (50)$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \psi(t) - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sn}(k_*, \varepsilon_0(t - t_0))}{2\varepsilon_0 \operatorname{cn}(k_*, \varepsilon_0(t - t_0)) \operatorname{dn}(k_*, \varepsilon_0(t - t_0))}, \quad (51)$$

где  $\operatorname{sn}(k_*, \varepsilon_0(t - t_0))$ ,  $\operatorname{cn}(k_*, \varepsilon_0(t - t_0))$ ,  $\operatorname{dn}(k_*, \varepsilon_0(t - t_0))$  – эллиптические функции Якоби с модулем, равным  $k_*$ . Формулы (50), (51) играют важную роль в комплексном подходе [19] истолкования движения твердого тела, имеющего неподвижную точку.

**4.2. Случай  $\lambda \neq 0$ .** Рассмотрение этого случая является важным, так как при изучении изоконических движений гиростата, с учетом первого интеграла моментов, из (9) и условия изоконичности (второе соотношение из системы (40)) получим

$$k = A_1 \omega_0, \quad \lambda = (A_1 - A_3) \omega_0. \quad (52)$$

Из второго равенства системы (52) следует, что в общем случае  $A_1 \neq A_3$ , то есть распределение масс гиростата не обладает свойством сферичности, так как это установили при  $\lambda = 0$ . Тем не менее при выполнении данного равенства, уравнения (7) принимают вид

$$A_1 \dot{\omega}_1 = -s_3 v_2, \quad A_1 \dot{\omega}_2 = s_3 v_1, \quad \omega_3 = \omega_0,$$

а уравнения Пуассона не изменяются. Данные системы имеют место и в случае изоконических движений сферического гироскопа. Отсюда следует, что свойства изоконических движений сферического гироскопа и гиростата со значением гиростатического момента из (52) совпадают. Но необходимо иметь ввиду, что при  $\lambda \neq 0$  условие  $A_3 = A_1$  может не выполняться.

**5. Об асимптотически-равномерных движениях гироскопа Лагранжа.** В статье [21] рассмотрен класс движений гироскопа Лагранжа, который характеризуется следующими условиями на параметры решения (12)-(15):

$$\begin{aligned} k &= -A_3 \omega_0, \quad A_1 \omega_0^2 = 2(E - s_3), \\ \omega_0^2 &< \frac{4s_3 A_1}{A_3^2}, \quad s_3 < E < \frac{s_3(2A_1 + A_3)}{A_3}. \end{aligned} \quad (53)$$

Запишем решение (12), (13) при наличии ограничений (53)

$$\rho^2(v_3) = \frac{2s_3(1 + v_3)}{A_1}, \quad u(t) = -\frac{\omega_0(2A_1 - A_3)}{2A_1}t + u_0, \quad (54)$$

$$\dot{v}_3 = \sqrt{\frac{2s_3}{A_1}}(1 + v_3) \sqrt{\varepsilon_0 - v_3}, \quad \varepsilon_0 = \frac{s_3(A_1 + A_3) - A_3 E}{s_3 A_1}. \quad (55)$$

Первое уравнение из (55) интегрируется в элементарных функциях времени

$$v_3(t) = -1 + \frac{\mu_0^2}{\text{ch}^2 \sigma_1 t}, \quad \sigma_1 = -\sqrt{\frac{s_3(1 + \varkappa_0)}{2A_1}}, \quad \mu_0^2 = 1 + \varkappa_0. \quad (56)$$

Внесем значение  $v_3(t)$  из (56) в первое соотношение из системы (54)

$$\rho(t) = \sqrt{\frac{2s_3}{A_1}} \frac{\mu_0}{\text{ch} \sigma_1 t}. \quad (57)$$

Из соотношений (54), (55) следует, что переменная  $v_3(t)$  изменяется на отрезке:  $-1 < v_3(t) < \varkappa_0$ . Так как  $\omega_3 = \omega_0$ ,  $\omega_1 = \rho \cos u$ ,  $\omega_2 = \rho \sin u$ , то, в силу (57), можно сделать вывод, что при выборе в качестве начального значения  $v_3$  величины  $\varkappa_0$  подвижный годограф является плоской кривой ( $z = \omega_0$ ), а при  $t \rightarrow \infty$  стремится к точке  $(0, 0, \omega_0)$ . То есть подвижный годограф вектора угловой скорости является спиралевидной кривой, предельной точкой которого служит точка  $(0, 0, \omega_0)$ .

Для применения комплексного подхода [19] в истолковании движения гироскопа Лагранжа запишем функции (27), (28)

$$\phi = \text{arctg} \frac{v_1}{v_2}, \quad \theta = \arccos v_3, \quad (58)$$

$$\psi(t) = -b_0 t + \text{arctg} \frac{b_1^2 + \text{th} \sigma_0 t}{b_1(1 - \text{th} \sigma_0 t)}, \quad (59)$$

где

$$\begin{aligned} v_1 &= -\sqrt{\frac{1 + v_3}{2s_3 A_1}} \left( A_3 \omega_0 \cos u - \sin u \cdot \sqrt{2s_3 A_1 (\varkappa_0 - v_3)} \right), \\ v_2 &= -\sqrt{\frac{1 + v_3}{2s_3 A_1}} \left( A_3 \omega_0 \sin u + \cos u \cdot \sqrt{2s_3 A_1 (\varkappa_0 - v_3)} \right), \\ v_3 &= -1 + \frac{\mu_0^2}{\text{ch}^2 \sigma_1 t}, \quad u = -\frac{\omega_0 (2A_1 - A_3)}{2A_1} t, \\ b_0 &= \frac{2s_3 \omega_0 A_3}{A_3^2 \omega_0^2 + 2s_3 A_1 \mu_0^2}, \quad b_1 = \frac{\omega_0 A_3}{\mu_0 \sqrt{2s_3 A_1}}. \end{aligned} \quad (60)$$

Таким образом, если представлять движение гироскопа Лагранжа с помощью углов Эйлера, то необходимо использовать соотношения (58)-(60).

Определим уравнения неподвижного годографа вектора угловой скорости. При этом для нахождения  $\alpha(t)$  будем использовать формулу (29) и равенство (59). Тогда получим следующие уравнения

$$\omega_\zeta(t) = g_0 \left( \frac{\mu_0^2}{\text{ch}^2 \sigma_1 t} - \frac{A_1}{A_1 - A_3} \right), \quad (61)$$



$$\omega_\rho(t) = |\mu_0 g_0| \sqrt{\frac{2s_3}{A_1} \frac{1}{\operatorname{ch}\sigma_1 t}} \sqrt{(d_0 + 1) \operatorname{ch}^2 \sigma_1 t - \mu_0^2}, \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \alpha(t) = & -b_0 t + \operatorname{arctg} \frac{b_1^2 + \operatorname{th}\sigma_1 t}{b_1 (1 - \operatorname{th}\sigma_1 t)} + \\ & + \operatorname{arctg} \frac{b_1}{A_3 \operatorname{th}\sigma_1 t} [c_0^* - \mu_0^2 (A_1 - A_3) \operatorname{th}^2 \sigma_1 t], \end{aligned} \quad (63)$$

где  $c_0^* = \mu_0^2 (A_1 - A_3) + A_3 - 2A_1$ ,  $g_0 = \frac{\omega_0(A_1 - A_3)}{A_1}$ ,  $d_0 = \frac{2s_3 A_1 + \omega_0^2 (A_1^2 - A_3^2)}{\omega_0^2 (A_1 - A_3)^2}$ .

Из соотношений (61)-(63) можно сделать заключение о том, что при  $t \rightarrow \infty$   $\omega_\zeta(t) \rightarrow -\omega_0$ ,  $\omega_\rho(t) \rightarrow 0$ ,  $\alpha(t) \rightarrow \infty$  (полагаем  $s_3 > 0$ ,  $\omega_0 > 0$ ). То есть, неподвижный годограф вектора угловой скорости имеет вид “спирали”, но в отличие от подвижного годографа он не является плоской кривой, а находится на сфере Дарбу.

Остановимся на исследовании эллипсоидоконических сечений в случае, когда движение гироскопа Лагранжа является асимптотически-равномерным (см. формулы (56), (57)). Пусть конец вектора  $\bar{b}(t) = b(t)\bar{\omega}(t)$  принадлежит эллипсоиду инерции (35). Обозначим через  $b_1, b_2, b_3$  компоненты вектора  $\bar{b}(t)$  в подвижной системе координат, а через  $b_\xi, b_\eta, b_\zeta$  – в неподвижной системе координат. Тогда в силу формул (37), (38) имеем

$$\begin{aligned} b_1(t) &= \frac{\sigma_0 \rho(t) \cos u(t)}{\sqrt{2(E + s_3 v_3(t))}}, & b_2(t) &= \frac{\sigma_0 \rho(t) \sin u(t)}{\sqrt{2(E + s_3 v_3(t))}}, \\ b_3(t) &= \frac{\sigma_0 \rho_0}{\sqrt{2(E + s_3 v_3(t))}}, \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} b_\xi(t) &= \frac{\sigma_0 \rho(t) \cos \alpha(t)}{\sqrt{2(E + s_3 v_3(t))}}, & b_\eta(t) &= \frac{\sigma_0 \omega_\rho(t) \sin \alpha(t)}{\sqrt{2(E + s_3 v_3(t))}}, \\ b_\zeta(t) &= \frac{\sigma_0 \omega_\zeta(t)}{\sqrt{2(E + s_3 v_3(t))}}, \end{aligned} \quad (65)$$

где функции  $\rho(t)$ ,  $u(t)$ ,  $v_3(t)$  указаны в формулах (54), (56), (57), а функции  $\omega_\rho(t)$ ,  $\omega_\zeta(t)$ ,  $\alpha(t)$  – в (61)-(63). На основании соотношений (64), (65) можно сделать заключение о том, что подвижный годограф вектора  $\bar{b}(t)$  лежит на эллипсоиде инерции, а неподвижный годограф этого вектора лежит на алгебраической поверхности  $F(b_\rho, b_\zeta, \beta) = 0$ , которая имеет вид

$$(b_\rho^2 + b_\zeta^2)^2 (m_1 + m_2 \sin^2 \beta) + (b_\rho^2 + b_\zeta^2) (m_3 + m_4 \sin^2 \beta) + m_5 = 0,$$

где функция  $b_\rho(t)$  определена равенствами  $b_\xi(t) = b_\eta(t)\cos\alpha(t)$ ,  $b_\eta(t) = b_\rho(t) \cdot \sin\alpha(t)$ ;  $\beta(t) = \arctg \frac{b_\rho}{b_\xi}$ ;  $m_i$  ( $i = \overline{1,5}$ ) – постоянные параметры. Таким образом, применение модифицированного метода в данном случае нецелесообразно. Но, как отмечено в п. 3.2, данный подход дает возможность исследовать движение эллипсоида инерции тела в неподвижном пространстве для случая асимптотически-равномерных движений гироскопа Лагранжа.

**6. О движении динамически симметричного гиростата.** Рассмотрим уравнения (4), (5) на инвариантном соотношении

$$\lambda(t) + (A_3 - A_1)\omega_3(t) = 0. \quad (66)$$

Используя векторную форму записи, из уравнений (4), (5) при условии (66) получим

$$A_1 \dot{\vec{\omega}} = \vec{s} \times \vec{v}, \quad \dot{\vec{v}} = \vec{v} \times \vec{\omega}. \quad (67)$$

Уравнения (67) имеют первые интегралы

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = 1, \quad \vec{\omega} \cdot \vec{v} = k_0, \quad A_1 \vec{\omega}^2 - 2(\vec{s} \cdot \vec{v}) = 2E, \quad (68)$$

где  $k_0 = \frac{k}{A_1}$ . В первом уравнении системы (67) полагаем, что вектор  $\vec{s}$  не коллинеарен вектору  $\vec{i}_3$  подвижной системы координат (то есть  $\vec{s} \neq s\vec{i}_3$ ). При данном предположении и условии  $A_2 = A_1$  тело-носитель по распределению масс не является гироскопом Лагранжа. В частном случае (например, при  $s_3 = 0$ ) тело-носитель обладает распределением масс, которое можно охарактеризовать либо обобщенными условиями С.В. Ковалевской ( $A_1 = A_2 = 2A_3$ ), либо обобщенными условиями Д.Н. Горячева-С.А. Чаплыгина ( $A_1 = A_2 = 4A_3$ ).

Рассмотрим класс прецессионных движений гиростата для уравнений (67). Пусть  $\vec{a}$  – единичный вектор, неизменно связанный с телом-носителем ( $\dot{\vec{a}} = 0$ ). Тогда для прецессий тела выполняются инвариантные соотношения [20]

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = a_0, \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi}_* \vec{a} + \dot{\psi}_* \vec{v}, \quad (69)$$

где  $\dot{\varphi}_*(t)$ ,  $\dot{\psi}_*(t)$  – углы Эйлера,  $a_0 = \cos\theta_0$ ,  $\theta_0 = \angle(\vec{a}, \vec{v})$ .

Подставим значение угловой скорости из (69) во второе соотношение системы (68) и в уравнение Пуассона из (67). Тогда получим

$$\dot{\psi}_* = k_0 - a_0 \dot{\varphi}_*, \quad \dot{\vec{\phi}} = \dot{\varphi}_* (\vec{v} \times \vec{a}). \quad (70)$$

В силу первого равенства (70) вектор угловой скорости из (69) примет вид

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}_* \vec{a} + (k_0 - a_0 \dot{\varphi}_*) \vec{v}. \quad (71)$$

Запишем третий интеграл из (68) с учетом значения  $\vec{\omega}$  из (71)

$$A_1 \left( a_0'^2 \dot{\varphi}_*^2 + k_0^2 \right) = 2(E + (\vec{s} \cdot \vec{v})), \quad (72)$$

где  $a_0' = \sin\theta_0$ . Подставим значение  $\vec{\omega}$  из (69) в динамическое уравнение из (67) и рассмотрим равенство, которое следует после операции скалярного умножения левой и правой частей полученного уравнения на вектор  $\vec{v} \times \vec{a}$

$$A_1 a_0'^2 \dot{\phi}_* (k_0 - a_0 \dot{\phi}_*) - (\bar{a} \cdot \bar{s}) = a_0 (\bar{s} \cdot \bar{v}). \quad (73)$$

Если в (73)  $a_0 = 0$  ( $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ), то из (70) следует  $\dot{\psi}_* = k_0$ , а из уравнения (71) получим для  $\dot{\phi}_*$  постоянное значение. То есть прецессия тела-носителя является регулярной прецессией. При этом, в силу полученных результатов, из равенства (72) можно сделать заключение о том, что вектор  $\bar{a}$  коллинеарен вектору  $\bar{s}$ .

Пусть в (73)  $a_0 \neq 0$ . Исключая из уравнений (72), (73) переменную  $\bar{s} \cdot \bar{v}$ , приходим опять к выводу о том, что прецессия тела-носителя является регулярной прецессией и вектор  $\bar{a}$  коллинеарен вектору  $\bar{s}$ .

Для получения окончательного результата обозначим  $n_0 = \dot{\phi}_*$ ,  $m_0 = k_0 - a_0 \dot{\phi}_*$ . Тогда из (71) найдем

$$\bar{\omega} = n_0 \bar{a} + m_0 \bar{v}. \quad (74)$$

Подставим  $\bar{\omega}$  из (74) в первое уравнение системы (67) и интегралы из (68). Тогда получим условия

$$\dot{\bar{v}} = n_0 (\bar{v} \times \bar{a}), \quad (75)$$

$$s_3 = -A_1 n_0 m_0, \quad k_0 = n_0 a_0 + m_0, \quad (76)$$

$$2E = A_1 (n_0^2 + m_0^2) + 2a_0 (n_0 m_0 A_1 - s_3).$$

Для интегрирования уравнения (75) положим

$$a_1 = \sin \mu_0 \cos \sigma_0, \quad a_2 = \sin \mu_0 \sin \sigma_0, \quad a_3 = \cos \mu_0, \quad (77)$$

где  $\mu_0 \in (0, \pi)$ ,  $\sigma_0 \in [0, 2\pi]$  – постоянные параметры. Соотношения (77) имеют особенности при  $\mu_0 = 0, \pi$ . Поэтому в этом случае можно считать, что  $\bar{a} = (0, 0, 1)$ . Запишем общее решение уравнения (75) используя инвариантное соотношение  $\bar{a} \cdot \bar{v} = a_0$  и равенство  $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$ . Тогда решение уравнения (75) таково

$$\begin{aligned} v_1 &= a_0 \sin \mu_0 \cos \sigma_0 - a_0' (\sin \sigma_0 \cos n_0 t - \cos \sigma_0 \cos \mu_0 \sin n_0 t), \\ v_2 &= a_0 \sin \mu_0 \sin \sigma_0 + a_0' (\cos \sigma_0 \cos n_0 t + \sin \sigma_0 \cos \mu_0 \sin n_0 t), \end{aligned} \quad (78)$$

$$v_3 = a_0 \cos \mu_0 - a_0' \sin \mu_0 \sin n_0 t.$$

Здесь  $a_0' = \sin \theta_0$ , а начальное значение  $t$  положено равным нулю. Компоненты вектора  $\bar{\omega}$  из (74) имеют вид

$$\omega_i = n_0 a_0 + m_0 v_i \quad (i = \overline{1, 3}). \quad (79)$$

Таким образом, условиями существования решения (78), (79) уравнений (67), (68) являются равенства (76). Функцию  $\lambda(t)$  определим из равенства (66) на основании (78), (79)

$$\lambda(t) = (A_1 - A_3) \left[ (n_0 + a_0 m_0) \cos \mu_0 - m_0 a_0' \sin \mu_0 \sin n_0 t \right]. \quad (80)$$

**Заклучение.** В статье рассмотрен комплексный подход в исследовании движения гироскопа Лагранжа. Изучено движение динамически симметричного гиристата при условии существования у уравнений движения одного инвариантного соотношения на основные переменные задачи в случае прецессий гиристата относительно вертикали.

1. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика / Ж. Лагранж. – В 2-х т. – М.; Л.: ГИТТЛ. – 1950. – Т. 2. – 440 с.
2. *Jacobi C.G.J.* Second memoire sur la rotation d'un corps non soumis a des forces acceleratrices / C.G.J. Jacobi // Gesammelte Werke. Berlin: G. Reimer, 1882. – Vol. 2. – S. 427–467.
3. *Poinsot L.* Theorie nouvelle de la rotation des corps / L. Poinsot // J. Math. Pures et Appl. – 1851. – Vol. 16. – P. 289–336.
4. *Darboux G.* Sur le mouvement d'un corps pesant de revolution fixe par un point de son axe / G. Darboux // J. Math. Pures et Appl. – 1885. – Vol. 1. – P. 403–430.
5. *Darboux G.* Sur la theorie de Poinsot et sur des mouvements correspondants a la meme polhodie / G. Darboux // C. r. Acad. sci. – 1885. – Vol. 101. – P. 1555–1561.
6. *Hess W.* Uber des Jacobische Theorem von der Ersetzbarkeit einer Lagrangeschen Rotation durch zwei Poinsotische Rotation / W. Hess // Z. Math. Phys. – 1888. – Vol. 33. – P. 292–305.
7. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение / К. Магнус. – М: Мир, 1974. – 526 с.
8. *Паус Э.Джс.* Динамика системы твердых тел / Э.Дж. Паус. – М.: Наука, 1983. – Т. 1. – 464 с.; Т. 2. – 544 с.
9. *Klein F.* Uber die Theorie des Kreisels / F. Klein, A. Sommerfeld. – New York: Johnson reprint corp. – 1965. – 966 s.
10. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика / Г.К. Суслов. – М.: Гостехиздат, 1946. – 655 с.
11. *Горр Г.В.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. / Г.В. Горр, Л.В. Кудряшова, Л.А. Степанова. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
12. *Борисов А.В.* Динамика твердого тела / А.В. Борисов, И.С. Мамаев. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.
13. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку / П.В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1964. – Т. 28, вып. 3. – С. 502–507.
14. *Елфимов В.С.* Исследование подвижного годографа гироскопа Лагранжа / В.С. Елфимов // Механика твердого тела. – 1978. – Вып. 10. – С. 10–24.
15. *Елфимов В.С.* О геометрическом исследовании движения гироскопа Лагранжа / В.С. Елфимов // Механика твердого тела. – 1979. – Вып. 11. – С. 22–32.
16. *Гашененко И.Н.* Классические задачи динамики твердого тела / И.Н. Гашененко, Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – Киев: Наук. думка, 2012. – 401 с.
17. *Горр Г.В.* Об одном подходе в применении теоремы Пуансо кинематического истолкования движения тела с неподвижной точкой / Г.В. Горр // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 26–36.
18. *Горр Г.В.* Об одном аналоге истолкования Пуансо решения Эйлера в задаче о движении твердого тела в потенциальном поле сил / Г.В. Горр // Прикл. математика и механика. – 2020. – Т. 84, № 1. – С. 13–25.
19. *Горр Г.В.* Комплексный подход в истолковании движения твердого тела, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горр // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2021. – №6. – С. 58–79.
20. *Горр Г.В.* Динамика гиристата, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горр, А.В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
21. *Ковалев А.М.* Асимптотически равномерные движения гироскопа Лагранжа / А.М. Ковалев // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 7. – С. 45–47.

**G.V. Gorr, A.V. Mazniev**

**On the motion of the Lagrange gyroscope and the dynamically symmetric gyrostat.**

The article investigates the motion of the Lagrange gyroscope, based on the use of an integrated approach in the interpretation of the motion of a rigid body with a fixed point. Along with a brief presentation of the results obtained earlier, new properties of the motion of the Lagrange gyroscope are established. For a dynamically symmetric gyrostat with a variable gyrostatic moment, precessional motions relative to the vertical are studied.

**Keywords:** *Lagrange gyroscope, integrated approach, interpretation of motion, isoconic motion, variable gyrostatic moment.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк

Получено 01.12.2021

Donetsk National University, Donetsk

*aleksandr\_maznev@rambler.ru*

## МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

---

УДК 539.3

©2021. С.А. Калоеров, А.Б. Мироненко, М.А. Полянский

### ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

Дано решение задачи электромагнитоупругости для пьезопластины с криволинейными отверстиями, использующее комплексные потенциалы, аппроксимацию контуров отверстий дугами эллипсов и берегами прямолинейных разрезов, конформные отображения, представления голоморфных функций рядами Лорана и по полиномам Фабера и удовлетворение граничным условиям на контурах обобщенным методом наименьших квадратов. Описаны результаты численных исследований для пластины с треугольным или квадратным отверстием. Изучено влияние на значения и распределение основных характеристик электромагнитоупругого состояния пьезосвойств материала пластины, геометрических характеристик отверстий. Показано, при каких острых углах заключающие их стороны многоугольников можно интерпретировать берегами трещин.

**Ключевые слова:** пьезопластина, криволинейные отверстия, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов.

**Введение.** Пластины из пьезоматериалов находят широкое применение в качестве элементов различных конструкций [1–6]. Зачастую эти элементы имеют технологические или эксплуатационные отверстия или трещины, вблизи которых при действии различных механических сил и электромагнитных полей могут возникать высокие концентрации напряжений, что может приводить к разрушению этих элементов и что нужно учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Поэтому необходимы достаточно надежные методы определения электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) многосвязных пьезопластин. Как показывают исследования, такими оказываются методы, использующие обобщенные комплексные потенциалы плоской задачи электромагнитоупругости [7]. При этом в случае канонических односвязных областей (конечной эллиптической пластины или бесконечной пластины с эллиптическим отверстием) удастся получить точные аналитические решения ряда задач с использованием метода рядов, а для многосвязных областей задачи решаются приближенными методами, причем наиболее сложными являются решения задач для пластины с криволинейными отверстиями. И здесь достаточно надежные результаты можно получать, аппроксимируя криволинейные контуры совокупностями дуг эллипсов и берегов прямолинейных разрезов и применяя для удовлетворения граничным условиям либо дискретный метод наименьших квадратов

[7], либо обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК) [8]. Результаты же, получаемые при решении аналогичных задач даже классической теории упругости (без учета пьезосвойств материалов) другими методами [9, 10], как показано в работе [11], значительно отличаются от истинных значений.

В данной статье с использованием обобщенных комплексных потенциалов и ОМНК решена задача электромагнитоупругости для пластины с криволинейными отверстиями. Описаны результаты численных исследований для пластинки с треугольным или квадратным отверстием.

**1. Постановка и метод решения задачи.** Рассмотрим занимающую многосвязную область  $S$  электромагнитоупругую пластинку с отверстиями произвольной конфигурации. Для упрощения записей некоторых из приводимых ниже соотношений будем считать, что на контурах отверстий главные векторы механических воздействий и суммарные потоки электрической и магнитной индукций равны нулю на каждом из них, во внутренних точках пластинки отсутствуют сосредоточенные воздействия. При решении задачи криволинейные контуры пластинки будем аппроксимировать дугами эллипсов и берегами прямолинейных разрезов, которые будем рассматривать также эллипсами, одна из полуосей которых равна нулю. При таком подходе исходная задача сводится к решению задачи электромагнитоупругости для пластинки с конечным числом эллиптических отверстий. В связи с этим рассмотрим отнесенную к прямоугольной декартовой системе координат электромагнитоупругую пластинку, занимающую многосвязную область  $S$  (рис. 1), ограниченную внешним контуром  $L_0$  и контурами эллиптических отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) с полуосями  $a_l, b_l$ , причем в локальных системах координат  $O_l x_l y_l$  с началами в центрах эллипсов  $L_l$  и направлениями осей вдоль осей эллипсов их параметрические уравнения будут такими:

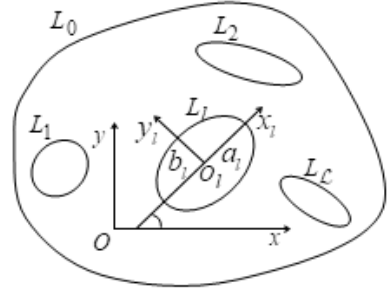


Рис. 1.

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (1)$$

а в основной системе координат  $Oxy$  имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\theta$  — угловая переменная параметрического задания эллипса, изменяющаяся от 0 до  $2\pi$ ;  $x_{0l}, y_{0l}$  — координаты начала локальной системы координат  $O_l x_l y_l$  в основной системе координат  $Oxy$ ;  $\varphi_l$  — угол между направлениями осей  $Ox$  и  $O_l x_l$ , отсчитываемый от  $Ox$  против часовой стрелки. В случае удаленного от отверстий контура  $L_0$  рассматривается бесконечная многосвязная область. В

последнем случае будем считать, что на бесконечности заданы напряжения  $\sigma_x^\infty$ ,  $\sigma_y^\infty$ ,  $\tau_{xy}^\infty$ ; компоненты векторов напряженностей электромагнитного поля  $E_x^\infty$ ,  $E_y^\infty$ ,  $H_x^\infty$ ,  $H_y^\infty$  (или индукций  $D_x^\infty$ ,  $D_y^\infty$ ,  $B_x^\infty$ ,  $B_y^\infty$ ); угол поворота всей пластинки как целой  $\omega_3^\infty = 0$ .

Если для определения ЭМУС пластинки использовать комплексные потенциалы электромагнитоупругости, то решение рассматриваемой задачи сводится к нахождению из граничных условий на контурах области функций  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) обобщенных комплексных переменных [7]

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (3)$$

где  $\mu_k$  – корни характеристического уравнения 8-го порядка

$$\begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix} = 0; \quad (4)$$

$l_{ij}(\mu)$  – полиномы вида

$$\begin{aligned} l_{4s}(\mu) &= s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22}, \\ l_{3g}(\mu) &= g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu - g_{22}, \\ l_{3p}(\mu) &= p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu - p_{22}, \\ l_{2\beta}(\mu) &= -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22}, \\ l_{2\nu}(\mu) &= -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22}, \\ l_{2\chi}(\mu) &= -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22}; \end{aligned} \quad (5)$$

$s_{ij}$  – коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей;  $g_{ij}$  и  $p_{ij}$  – пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформаций и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях;  $\beta_{ij}$ ,  $\nu_{ij}$ ,  $\chi_{ij}$  – коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивостей, измеренные при постоянных напряжениях. При этом граничные условия (механические и электромагнитные) для определения комплексных потенциалов имеют вид

$$2Re \sum_{k=1}^4 g_{ik} \Phi_k(t_k) = f_i(t) \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (6)$$

где в случае механических граничных условий (при  $i=1, 2$ )

$$\begin{aligned} (g_{1k}, g_{2k}) &= (1, -\mu_k), \\ (f_1(t), f_2(t)) &= \mp \int_0^s (Y_n, X_n) ds + (c_1, c_2), \end{aligned} \quad (7)$$

если на границе заданы усилия, и



$$\begin{aligned} (g_{1k}, g_{2k}) &= (p_k, q_k), \\ (f_1(t), f_2(t)) &= (u^* + \omega_3 y - u_0, u^* - \omega_3 x - v_0), \end{aligned} \quad (8)$$

когда на границе заданы перемещения  $u^*, v^*$ ; в случае электромагнитных граничных условий (при  $i=3, 4$ )

$$\begin{aligned} (g_{3k}, g_{4k}) &= (-\nu_k, -\rho_k), \\ (f_3(t), f_4(t)) &= \mp \int_0^s (D_n, B_n) ds + (c_3, c_4), \end{aligned} \quad (9)$$

если на границе заданы индукции поля,

$$\begin{aligned} (g_{3k}, g_{4k}) &= (r_k, h_k), \\ (f_3(t), f_4(t)) &= (\varphi^*(t) - \varphi_0 + c_3, \psi^*(t) - \psi_0 + c_4), \end{aligned} \quad (10)$$

когда на границе заданы потенциалы поля  $\varphi^*(t), \psi^*(t)$ ;

$$\begin{aligned} p_k &= s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} + (g_{11}\mu_k - g_{21})\nu_k + (p_{11}\mu_k - p_{21})\rho_k, \\ q_k &= s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} + \left(g_{12} - \frac{g_{22}}{\mu_k}\right)\nu_k + \left(p_{12} - \frac{p_{22}}{\mu_k}\right)\rho_k, \\ r_k &= g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})\nu_k - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\rho_k, \\ h_k &= p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\nu_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k; \\ \nu_k &= \frac{\Delta_{1k}}{\Delta_{0k}}, \quad \rho_k = \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{0k}}, \quad \Delta_{0k} = \begin{vmatrix} l_{2\beta}(\mu_k) & l_{2\nu}(\mu_k) \\ l_{2\nu}(\mu_k) & l_{2\chi}(\mu_k) \end{vmatrix}, \\ \Delta_{1k} &= \begin{vmatrix} -l_{3g}(\mu_k) & l_{2\nu}(\mu_k) \\ -l_{3p}(\mu_k) & l_{2\chi}(\mu_k) \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2k} = \begin{vmatrix} l_{2\beta}(\mu_k) & -l_{3g}(\mu_k) \\ l_{2\nu}(\mu_k) & -l_{3p}(\mu_k) \end{vmatrix}; \end{aligned} \quad (11)$$

$c_i$  – постоянные, произвольные на одном из контуров;  $u_0, v_0$  – жесткие перемещения;  $\varphi_0, \psi_0$  – постоянные потенциалы;  $\omega_3$  – угол поворота пластинки как целой. Верхние знаки перед интегралами выбираются для внешнего контура области  $L_0$ , нижние знаки – для контуров отверстий.

Комплексные потенциалы  $\Phi_k(z_k)$  определены в многосвязных областях  $S_k$ , ограниченных контурами  $L_{kl}$ , соответствующими контурам  $L_l$  области  $S$  при аффинных преобразованиях (3), и в рассматриваемом случае отсутствия сосредоточенных воздействий и равенства на каждом контуре нулю главных векторов внешних механических и индукционных воздействий и задании на бесконечности векторов напряженностей электромагнитного поля имеют вид [7]

$$\Phi_k(z_k) = g\Gamma_k z_k + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \Phi_{kl}(z_k), \quad (12)$$

где  $g = 0$  в случае конечной области  $S$ ;  $g = 1$ , если область  $S$  бесконечна;  $\Gamma_k$  – постоянные, которые находятся из решения системы уравнений

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, r_k, \mu_k r_k, h_k, \mu_k h_k) \Gamma_k = \\ = (\sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, 2\omega_3^\infty, -E_x^\infty, -E_y^\infty, -H_x^\infty, -H_y^\infty); \end{aligned} \quad (13)$$

$\Phi_{k0}(z_k)$  – функции, голоморфные внутри контуров  $L_{k0}$  областей  $S_k$ ;  $\Phi_{kl}(z_k)$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) – функции, голоморфные вне контуров  $L_{kl}$  областей  $S_k$ . Для нахождения этих функций используем конформные отображения.

Отобразим конформно внешность единичной окружности  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности контура  $L_{kl}$  по формулам [12]

$$z_k = z_{0kl} + R_{kl} \left( \zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (14)$$

в которых

$$\begin{aligned} z_{0kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда функции  $\Phi_{k0}(z_k)$ , голоморфные внутри контуров  $L_{k0}$ , могут быть представлены рядами по полиномам Фабера или после преобразований – степенными рядами, а функции  $\Phi_{kl}(z_k)$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ), голоморфные вне контуров  $L_{kl}$  и исчезающие на бесконечности, в областях переменных  $\zeta_{kl}$  будут голоморфными вне окружностей  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  и могут быть представлены рядами Лорана по отрицательным степеням  $\zeta_{kl}$ , т. е.

$$\Phi_{k0}(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k0n} z_k^n, \quad \Phi_{kl}(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}.$$

Окончательно для комплексных потенциалов (12) имеем

$$\Phi_k(z_k) = g\Gamma_k z_k + (1-g)a_{k00} + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kln} a_{kln}, \quad (16)$$

где

$$\varphi_{k0n} = z_k^n, \quad \varphi_{kln} = \frac{1}{\zeta_{kl}^n} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}});$$

$a_{kln}$  – произвольные постоянные, которые будем определять из граничных условий на контурах отверстий.

Заметим, что конформные отображения (14) можно построить и по координатам концов осей эллипсов  $L_l (x_{A_l}, y_{A_l}), (x_{B_l}, y_{B_l}), (x_{C_l}, y_{C_l}), (x_{D_l}, y_{D_l})$ . В этом случае в формулах (15) нужно принять

$$\begin{aligned} a_l &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_{A_l} - x_{C_l})^2 + (y_{A_l} - y_{C_l})^2}, \\ b_l &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_{B_l} - x_{D_l})^2 + (y_{B_l} - y_{D_l})^2}, \\ x_{0l} &= \frac{x_{A_l} + x_{C_l}}{2}, \quad y_{0l} = \frac{y_{A_l} + y_{C_l}}{2}, \quad \varphi_l = \arctg \left( \frac{y_{A_l} - y_{C_l}}{x_{A_l} - x_{C_l}} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Если контур отверстия имеет участки с угловыми точками, то при решении задач возникает необходимость аппроксимации сторон угла в окрестности его вершины  $A_l (x_{A_l}, y_{A_l})$  дугой окружности  $L'_l$ , вписанной в этот угол, с центром на биссектрисе угла (рис. 2). Если обозначить углы между положительным направлением оси  $Ox$  и сторонами угла  $A_l$  через  $\varphi_l$  и  $\varphi_{l+1}$ , то угол  $A_l$  будет равен  $\varphi_{l+1} - \varphi_l$ . Поэтому угол наклона указанной биссектрисы к оси  $Ox$   $\varphi'_l = (\varphi_l + \varphi_{l+1})/2$ . Выбрав на сторонах угла отрезки  $A_l B_l$  и  $A_l C_l$  одинаковой длины  $\delta_l$  от вершины, для радиуса вписанной окружности и координат ее центра будем иметь

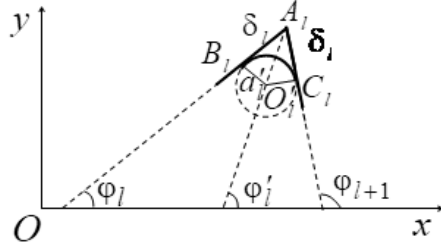


Рис. 2. Аппроксимация сторон угла многоугольника вблизи вершины дугой вписанной окружности

$$\begin{aligned} a'_l &= \delta_l \operatorname{tg} ((\varphi_{l+1} - \varphi_l) / 2), \quad |O'_l A_l| = \sqrt{\delta_l^2 + a_l'^2}, \\ x'_{0l} &= x_{A_l} - |O'_l A_l| \sin ((\varphi_l + \varphi_{l+1}) / 2), \\ y'_{0l} &= y_{A_l} - |O'_l A_l| \cos ((\varphi_l + \varphi_{l+1}) / 2). \end{aligned}$$

Зная координаты  $x'_{0l}, y'_{0l}$  центра  $O'_l$  вписанной окружности  $L'_l$ , ее радиус  $a'_l$  и угол  $\varphi'_l$  между осью  $Ox$  и биссектрисой угла  $A_l$ , и принимая, что  $b'_l = a'_l$ , по формулам (14) найдем функцию, отображающую внешность единичного круга на внешность окружности  $L'_l$ , вписанной в угол  $A_l$ .

Для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$  используем граничные условия на контурах пластинки. В случае многосвязной области этим условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме, получаемой из условий (16) их дифференцированием по дуге контура. Последние условия не содержатся имеющих в обычных граничных условиях аддитивных постоянных и имеют вид

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ikp} \delta_{kps} \Phi'_k(t_k) = \frac{df_{ip}(t)}{ds}, \quad (18)$$

в котором

$$\begin{aligned}\Phi'_k(z_k) &= g\Gamma_k + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k); \\ \delta_{kps} &= \frac{dt_k}{ds} = \frac{x' + \mu_k y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \\ \varphi'_{k0n}(z_k) &= n z_k^{n-1}, \quad \varphi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \\ &\quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}); \end{aligned} \tag{19}$$

$x', y'$  – производные по переменной  $\theta$  параметрического уравнения эллипсов (1).

Граничным условиям (18) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [8, 13, 14]. Для этого выберем на каждом из контуров  $L_p$  ( $p = \overline{0, \mathcal{L}}$ ) систему точек  $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$ , в которых удовлетворим заданным граничным условиям. Подставив функции (19) в граничные условия (18), получим переопределенную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} 2Re \sum_{k=1}^4 \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp} \delta_{kps} \varphi'_{kln}(t_{kpm}) a_{kln} &= -2Re \sum_{k=1}^4 g_{ikp} \delta_{kps} \Gamma_k + \\ &+ \frac{df_{ip}(t_{pm})}{ds} (i = \overline{1, 4}, \quad p = \overline{g, \mathcal{L}}, \quad m = \overline{1, M_p}). \end{aligned} \tag{20}$$

После нахождения псевдорешения системы (20) методом сингулярного разложения [15, 16] постоянные  $a_{kln}$ , а, следовательно, и комплексные потенциалы (16), будут известны и можно найти основные характеристики ЭМУС (напряжения, индукции, напряженности, перемещения и потенциалы электромагнитного поля) по формулам [7]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2Re \sum_{k=1}^4 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k); \tag{21}$$

$$(D_x, D_y, E_x, E_y) = 2Re \sum_{k=1}^4 (\nu_k \mu_k, -\nu_k, r_k, \mu_k r_k) \Phi'_k(z_k); \tag{22}$$

$$(B_x, B_y, H_x, H_y) = 2Re \sum_{k=1}^4 (\rho_k \mu_k, -\rho_k, h_k, \mu_k h_k) \Phi'_k(z_k); \tag{23}$$

$$\begin{aligned} (u, v, \varphi, \psi) &= 2Re \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k, h_k) \Phi_k(z_k) + \\ &+ (-\omega_3 y + u_0, \omega_3 x + v_0, \varphi_0, \psi_0). \end{aligned} \tag{24}$$

При этом, если некоторый эллипс  $L_l$  переходит в прямолинейный разрез (трещину или жесткое линейное включение), то в его концах производные комплексных потенциалов (19), а следовательно, и напряжения, индукции и напряженности будут иметь сингулярность, и можно определить и коэффициенты интенсивности напряжений, индукций и напряженностей (КИНИН), используя известные формулы [17].

В случае бесконечной пластинки с одним эллиптическим отверстием или трещиной  $L_1$  можно найти и точное решение задачи. В этом случае выражения для комплексных потенциалов (16) принимают вид

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k1n}}{\zeta_{k1}^n}, \quad (25)$$

в котором  $\Gamma_k$  – постоянные, определяемые из системы уравнений (13);  $\zeta_{k1}$  – переменные, определяемые из конформных отображений (14) при  $l = 1$ . Учитывая, что на контуре отверстия  $\zeta_{k1} = e^{i\theta} = \sigma$  и удовлетворяя граничным условиям на контуре отверстия методом рядов, находим, что  $a_{k1n} = 0$  при  $n \geq 2$ , а постоянные  $a_{k11}$  определяются из системы 4 линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 (1, -\mu_k, -\nu_k, -\rho_k) a_{k11} = - \sum_{k=1}^4 [(1, -\mu_k, -\nu_k, -\rho_k) R_{k1} m_{k1} \Gamma_k + \\ + (1, -\bar{\mu}_k, -\bar{\nu}_k, -\bar{\rho}_k) \bar{R}_{k1} \bar{\Gamma}_k], \end{aligned} \quad (26)$$

т. е. комплексные потенциалы и их производные имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_k) &= \Gamma_k z_k + \frac{a_{k11}}{\zeta_{k1}}, \\ \Phi'_k(z_k) &= \Gamma_k - \frac{a_{k11}}{R_{k1} (\zeta_{k1}^2 - m_{k1})}. \end{aligned} \quad (27)$$

Если эллипс переходит в прямолинейный разрез-трещину при  $b_1 = 0$ , то

$$2R_{k1} = a_1 (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l), \quad m_{k1} = 1,$$

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k - \frac{a_{k11}}{R_1 (\zeta_{k1}^2 - 1)},$$

откуда следует, что в концах разреза, где  $\zeta_{k1} = \pm 1$ , функции  $\Phi'_k(z_k)$ , а следовательно, и все основные характеристики ЭМУС имеют особенность, и для концов трещины можно вычислить КИНИН. В частности, для коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) получаем

$$k_1^{\pm} = \mp 2Re \sum_{k=1}^2 \frac{a_{k11}}{2R_1}, \quad k_2^{\pm} = 0, \quad (28)$$

где знаки  $+$  и  $-$  относятся к правому и левому концам трещины.

Как частные случаи из приведенного выше решения следуют решения задач электроупругости, магнитоупругости и теории упругости анизотропного тела. Эти решения следуют из приведенного, если в нем соответствующие постоянные в основных уравнениях полагать равными нулю. Эти решения можно получать и решением общей задачи электромагнитоупругости для модельного материала с постоянными  $g'_{ij}$ ,  $\beta'_{ij}$ ,  $p'_{ij}$ ,  $\chi'_{ij}$ ,  $\nu'_{ij}$ , связанными с постоянными истинного материала соотношениями

$$g'_{ij} = \lambda_g g_{ij}, \quad \beta'_{ij} = \beta_{ij} / \lambda_g, \quad p'_{ij} = \lambda_p p_{ij},$$

$$\chi'_{ij} = \chi_{ij} / \lambda_p, \quad \nu'_{ij} = \lambda_{gp} \nu_{ij},$$

где  $\lambda_g$ ,  $\lambda_p$ ,  $\lambda_{gp}$  – параметры, характеризующие отклонение электромагнитных постоянных модельного материала от истинных постоянных. Тогда случай  $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} = 1$  соответствует задаче электромагнитоупругости (ЭМУ);  $\lambda_g = 1$ ,  $\lambda_p = \lambda_{gp} = 0$  – задаче электроупругости (ЭУ);  $\lambda_p = 1$ ,  $\lambda_g = \lambda_{gp} = 0$  – задаче магнитоупругости (МУ);  $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} = 0$  – задаче теории упругости (ТУ). Таким подходом можно пользоваться и при проведении численных расчетов по программе, реализующей общее решение задачи электромагнитоупругости. Но в программе реализации общего решения любой из указанных параметров не может принимать нулевое значение. В то же время, как показывают расчеты, значения основных характеристик для указанных задач практически не отличаются от получаемых по общей программе, если вместо нулевой величины параметра придавать ему значение не более  $10^{-3}$ . Из этого следует, что нужно принять:

- для задачи ЭМУ  $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} = 1$ ;
- для задачи ЭУ  $\lambda_g = 1$ ,  $\lambda_p = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ ;
- для задачи МУ  $\lambda_p = 1$ ,  $\lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ ;
- для задачи ТУ  $\lambda_p = \lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ .

Также заметим, что по общей программе можно получать результаты и для случая изотропной пластинки. В последнем случае один из коэффициентов деформации  $s_{ij}$  нужно брать несколько отличным от реального, например  $s_{11}$  и  $s_{22}$  брать отличающимися друг от друга в третьей значащей цифре. В этом случае корни характеристического уравнения (4) будут близки к мнимой единице  $i$ , но несколько (в третьей значащей цифре) отличаться друг от друга (слабая анизотропия) и общая программа позволит получать значения основных характеристик, практически совпадающие с данными, получаемыми при решении задачи теории упругости изотропного тела с использованием комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили [18].

И, наконец, по общей программе можно получать результаты и для решения задачи электромагнитостатики, когда пластинка абсолютно мягкая. В этом случае нужно рассматривать модельный упругий материал с постоянными  $s'_{ij} = \lambda_s s_{ij}$  и для задачи электромагнитостатики брать  $\lambda_s \leq 10^{-3}$ .

**2. Решение некоторых частных задач.** Приведенный подход был использован для решения задач об ЭМУС пластин с отверстиями различной конфигурации при действии различных механических сил и электромагнитных полей. Исследования проводились для пластин из следующих материалов: композит на основе титаната бария-феррита (II) кобальта  $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$  (материал М1) [19]; композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия  $CdSe$ , а пьезомагнитные и магнитные –  $BaTiO_3$  [20] (М2); композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют  $PZT - 4$ , а пьезомагнитные и магнитные –  $CoFe_2O_4$  [20] (М3). Постоянные для этих материалов приведены в таблице 1.

Таблица 1. Постоянные материалов

Величина	Материалы		
	М1	М2	М3
$s_{11}/s_0 = s_{33}/s_0$	7,165	22,260	10,745
$s_{22}/s_0$	6,797	14,984	7,398
$s_{44}/s_0 = s_{66}/s_0$	19,912	47,481	7,637
$s_{55}/s_0$	19,802	69,204	32,680
$s_{12}/s_0 = s_{23}/s_0$	-2,337	-6,437	-2,542
$s_{13}/s_0$	-2,736	-11,942	-5,595
$g_{16}/g_0 = g_{34}/g_0$	2,028	109,22	2,054
$g_{21}/g_0 = g_{23}/g_0$	-0,496	-4,333	-1,159
$g_{22}/g_0$	1,157	8,016	2,458
$p_{16}/p_0 = p_{34}/p_0$	1,850	268,318	98,843
$p_{11}/p_0 = p_{23}/p_0$	0,576	17,778	12,102
$p_{22}/p_0$	1,186	31,206	22,268
$\beta_{11}/\beta_0 = \beta_{33}/\beta_0$	0,156	19,612	0,106
$\beta_{22}/\beta_0$	0,137	10,612	0,090
$\nu_{11}/\nu_0 = \nu_{33}/\nu_0$	-0,190	213,404	-14,931
$\nu_{22}/\nu_0$	-0,185	-5,534	-3,740
$\chi_{11}/\chi_0 = \chi_{33}/\chi_0$	0,336	0,590	0,805
$\chi_{22}/\chi_0$	0,119	0,575	0,704

В которой

$$\begin{aligned}
 s_0 &= 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad g_0 = 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \text{ м}^2, \\
 p_0 &= 10^{-5} \text{ МТл}^{-1}, \quad \beta_0 = 10^3 \text{ МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}, \\
 \nu_0 &= 10^{-1} \text{ МКл} \cdot \text{м} \cdot \text{МА}^{-1}, \quad \chi_0 = 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{МТл}^{-2}.
 \end{aligned}$$

При проведении исследований количество членов в рядах (19) для каждого отверстия  $L_p$  и «коллокационных точек»  $M_p$  на каждом из контуров  $L_p$ , для которых составлялись уравнения (20), увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (пока значения напряжений и индукций на площадках, касательных к контурам, не были менее  $10^{-3}$ ). В описываемых ниже случаях для такого удовлетворения граничным условиям необходимо было в указанных рядах оставлять от 20 до 50 членов, и на каждом из контуров брать от 100 до 300 «коллокационных точек». Ниже описаны некоторые из полученных результатов пластинки с треугольным или квадратным отверстием.

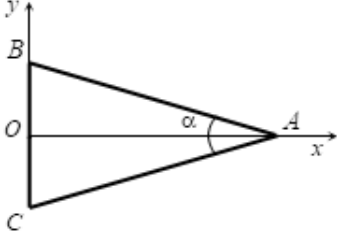


Рис. 3.

длины боковых сторон треугольника равны  $2a_1$  ( $AB = AC = 2a_1$ ). Тогда длина основания  $BC = 4a_1 \sin(\alpha/2)$ , а его высота  $h = OA = 2a_1 \cos(\alpha/2)$ . Так, что в прямоугольной системе координат  $Oxy$  с началом в центре основания и осью  $Ox$  вдоль высоты треугольника  $OA$  вершины треугольника находятся в точках  $A(h, 0)$ ,  $B(0, h \operatorname{tg}(\alpha/2))$ ,  $C(0, -h \operatorname{tg}(\alpha/2))$ . При этом стороны треугольника  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  представлялись внешними берегами эллиптических разрезов  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  со следующими полуосями, координатами центров локальных систем координат и углами между осью  $Ox$  основной системы координат и осями  $O_l x_l$  локальных систем координат:

$$L_1: \quad a_1, b_1 = 10^{-4} a_1, \quad x_{01} = h/2, \quad y_{01} = a_1/2, \quad \varphi_1 = -\alpha/2;$$

$$L_2: \quad a_2, b_2 = 10^{-4} a_2, \quad x_{02} = y_{02} = 0, \quad \varphi_2 = \pi/2;$$

$$L_3: \quad a_1, b_1 = 10^{-4} a_1, \quad x_{03} = h/2, \quad y_{03} = -a_1/2, \quad \varphi_1 = \pi + \alpha/2.$$

Для внешнего берега каждого разреза считалось, что параметр  $\theta$  параметрического задания эллипса (1) изменяется от 0 до  $\pi$ .

Для растяжения пластинки с треугольным отверстием усилиями  $\sigma_y^\infty = p$  (при  $\sigma_x^\infty = \tau_{xy}^\infty = E_x^\infty = E_y^\infty = H_x^\infty = H_y^\infty = \omega_3^\infty = 0$ ) в таблице 2 с точностью до множителя  $p$  приведены значения напряжений  $\sigma_y$  в некоторых точках отрезка на продолжении высоты треугольника  $OA$  в зависимости от значения угла  $\alpha$  при вершине треугольника с абсциссой  $x_A$ . Данные для  $\alpha = 0$  относятся к пластинке с прямолинейной трещиной длины  $2a_1$  вдоль оси  $Ox$ . Значения напряжений приведены для задач ЭМУ (с учетом всех электромагнитоупругих свойств пластинки) и ТУ (когда учитывались только механические свойства без электромагнитных, т. е. не учитывался пьезоэффект). Для некоторых значений угла  $\alpha$  в пластинке из М1 на рисунке 4 изображены графики распределения вдоль стороны  $AB$  нормальных напряжений  $\sigma_s$  на площадках, перпендикулярных этой стороне.

Из данных таблицы 2 и рисунка 4 видно, что при уменьшении угла  $\alpha$  при вершине  $A$  треугольника значения напряжений вблизи этой вершины растут, претерпевая незначительные изменения вблизи других частей контура отверстия, включая боковые стороны треугольника, кроме небольшой зоны вблизи вершины угла треугольника. При малых углах  $\alpha$  ( $\alpha < \pi/18$ ) значения напряжений вблизи вершины треугольника получаются такими же, как в пластинке с одной прямолинейной трещиной. Но при этом даже для весьма малых углов  $\alpha$  значения напряжений вблизи конца  $B$  стороны  $AB$  значительно отличаются



Таблица 2. Значения напряжений  $\sigma_y/\rho$  в точках отрезка на продолжении высоты треугольника  $OA$  в зависимости от угла  $\alpha$

Материал	$\alpha$ , рад.	$(x - x_A)/a_1$									
		0,0001	0,001	0,01	0,1	0,2	1	2	0,0001	0,01	0,1
		ЭМУ							ТУ		
M1	$175\pi/180$	1,19	1,15	1,10	1,05	1,04	1,01	1,00	1,18	1,11	1,05
	$5\pi/6$	2,38	2,06	1,87	1,71	1,51	1,11	1,02	2,03	1,14	1,65
	$2\pi/3$	16,42	12,88	5,41	2,25	1,74	1,10	1,03	16,02	5,40	2,24
	$\pi/2$	24,57	18,96	6,94	2,46	1,83	1,13	1,04	24,29	6,93	2,43
	$\pi/3$	28,03	21,57	7,36	2,47	1,85	1,16	1,06	27,17	7,21	2,44
	$\pi/6$	31,63	22,46	7,14	2,34	1,75	1,13	1,05	28,03	7,26	2,46
	$\pi/18$	32,41	22,96	7,31	2,45	1,84	1,16	1,06	31,12	7,29	2,47
	$\pi/36$	42,75	26,40	7,31	2,42	1,82	1,16	1,06	42,50	7,31	2,51
	$\pi/180$	64,59	34,05	7,50	2,42	1,81	1,15	1,06	63,10	7,34	2,56
0	64,80	34,20	7,37	2,31	1,79	1,15	1,06	63,90	7,35	2,55	
M2	$175\pi/180$	1,25	1,20	1,13	1,06	1,04	1,00	1,00	1,19	1,11	1,05
	$5\pi/6$	5,12	4,19	2,99	1,91	1,54	1,03	1,01	4,78	2,55	1,77
	$2\pi/3$	21,78	16,74	6,05	2,03	1,51	1,05	1,02	17,77	5,63	2,24
	$\pi/2$	25,72	19,57	6,36	1,94	1,45	1,06	1,03	25,18	6,28	2,42
	$\pi/3$	27,30	19,34	5,97	1,80	1,36	1,06	1,03	26,36	7,35	2,46
	$\pi/6$	34,46	23,22	7,06	2,37	1,79	1,15	1,05	29,28	7,39	2,45
	$\pi/18$	40,99	26,29	7,59	2,52	1,88	1,17	1,07	38,24	7,54	2,81
	$\pi/36$	54,89	30,99	7,62	2,48	1,86	1,16	1,06	47,38	7,55	2,82
	$\pi/180$	81,06	39,87	7,69	2,42	1,82	1,15	1,06	81,51	7,56	2,80
0	81,91	39,97	7,12	2,40	1,81	1,15	1,06	81,71	7,12	2,35	
M3	$175\pi/180$	1,12	1,10	1,09	1,05	1,03	1,01	1,00	1,15	1,09	1,05
	$\pi/2$	21,83	17,98	6,95	2,44	1,83	1,13	1,04	26,18	7,26	2,49
	$\pi/18$	30,16	22,08	7,24	2,44	1,83	1,16	1,06	37,05	7,30	2,43
	$\pi/180$	70,30	22,22	7,12	2,41	1,81	1,15	1,06	70,11	22,08	7,21
	0	70,72	22,38	7,12	2,40	1,81	1,15	1,06	70,52	22,28	7,12

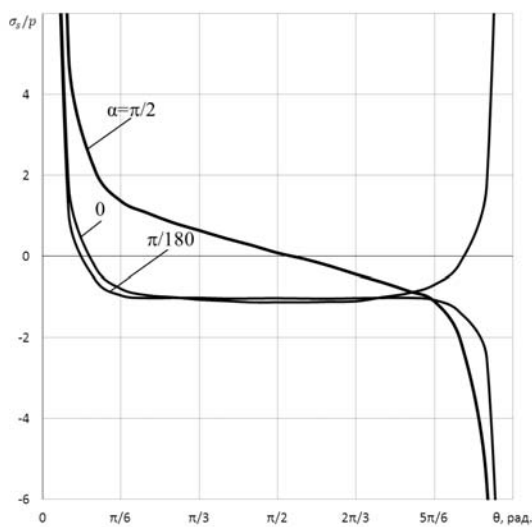


Рис. 4.

от их значений для случая трещины. Это связано с тем, что при стремлении основания  $BC$  треугольника к нулю все равно не получается фигура, соответствующая трещине, и углы при основании стремятся не к нулю, а к  $\pi/2$ . Это подтверждает и тот факт, что трещину нельзя представлять прямоугольником даже при весьма малой ширине последнего. Как показывают исследования, при действии на пластинку магнитного поля около отверстия за счет пьезоэффекта возникают значительные напряжения.

В случае пластинки с квадратным отверстием последнее представлялось квадратом  $ABCD$  (рис. 5) с центром в начале координат и сторонами длины  $2a_1$  каждая:  $AB = BC = CD = DA = 2a_1$ . В этом случае вершины квадрата находятся в точках  $A(a_1, a_1)$ ,  $B(-a_1, a_1)$ ,  $C(-a_1, -a_1)$ ,  $D(a_1, -a_1)$ . Стороны квадрата  $DA$ ,  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  рассматривались внешними берегами эллиптических разрезов  $L_1, L_2, L_3, L_4$  со следующими полуосями, координатами центров локальных систем координат и углами между осью  $Ox$  основной системы координат и осями  $O_1x_1$  локальных систем координат:

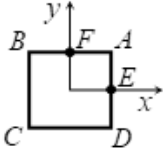


Рис. 5. Пластика с квадратным отверстием

$$L_1 : \quad a_1, b_1 = 10^{-4}a_1, \quad x_{01} = a_1, \quad y_{01} = 0, \quad \varphi_1 = -\pi/2;$$

$$L_2 : \quad a_2 = a_1, \quad b_2 = 10^{-4}a_2, \quad x_{02} = 0, \quad y_{02} = a_1, \quad \varphi_2 = 0;$$

$$L_3 : \quad a_3 = a_1, \quad b_3 = 10^{-4}a_3, \quad x_{03} = -a_1, \quad y_{03} = 0, \quad \varphi_3 = \pi/2;$$

$$L_4 : \quad a_4 = a_1, \quad b_4 = 10^{-4}a_4, \quad x_{04} = 0, \quad y_{04} = -a_1, \quad \varphi_4 = \pi.$$

Для внешнего берега каждого разреза считалось, что угловая переменная  $\theta$  в параметрическом задании эллипса изменяется от 0 до  $\pi$ .

Для случая растяжения пластинки из слабо анизотропного материала М1 с квадратным отверстием усилиями  $p$  вдоль оси  $Ox$  (при  $\sigma_x^\infty = p$ ,  $\sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = E_x^\infty = E_y^\infty = H_x^\infty = H_y^\infty = w_3^\infty = 0$ ) на рис. 6 изображены графики распределения нормальных напряжений  $\sigma_s$  вблизи сторон квадрата ( $\sigma_y$  вблизи  $DA$  и  $\sigma_x$  вблизи  $AB$ ), причем сплошные линии относятся к задаче ЭМУ, штриховые к задаче ТУ. Видно, что при приближении к вершинам квадрата значения напряжений  $\sigma_s$  стремятся к бесконечности; при подходе к середине горизонтальной стороны они стремятся к 2; при подходе к середине вертикальной стороны к  $-1$ ; при подходе к вершине вдоль вертикальной стороны напряжения растут быстрее, чем при подходе по горизонтальной стороне. Для заданного нагружения пластинки и ориентации квадратного отверстия влияние электромагнитных свойств на значения напряжений невелико.

На рисунке 7 для всестороннего растяжения пластинки из материала М1 с квадратным отверстием усилиями  $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = p$  изображены графики распределения напряжений  $\sigma_s$  вблизи сторон квадрата. Видно, что, как и в случае одностороннего растяжения, при приближении к вершинам квадрата значения

напряжений  $\sigma_s$  стремятся к бесконечности, причем рост напряжений при подходе к вершинам почти одинаковый (в силу слабой анизотропии материала).

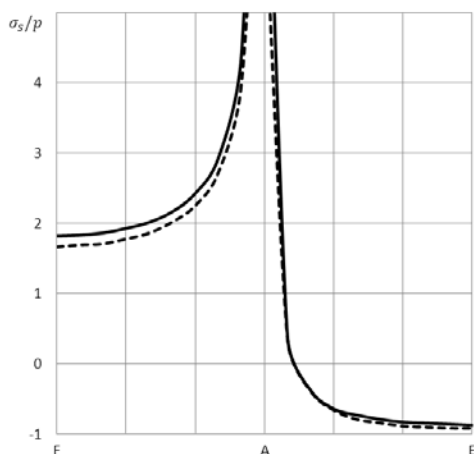


Рис. 6.

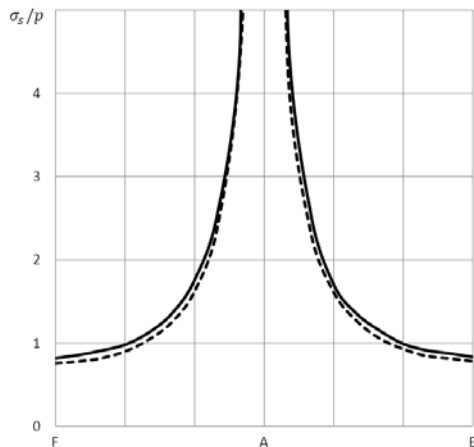


Рис. 7.

**Выводы.** Таким образом, с использованием комплексных потенциалов в статье решена задача электромагнитоупругости для многосвязной пьезопластинки с произвольными количеством и взаиморасположением отверстий. Описаны результаты численных исследований для пластинки из различных материалов с треугольным или квадратным отверстием. Изучено влияние геометрических характеристик отверстий и свойств материалов на значения возникающих в них напряжений.

1. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326
2. Магнитоэлектрические материалы / М.И. Бичурин, В.М. Петров, Д.А. Филиппов др. – М.: Изд-во «Академия Естествознания», 2006. – 296 с.
3. Кирилук В.С. О расклинивании пьезокерамических материалов / В.С. Кирилук, О.И. Левчук // Прикладная механика. – 2010. – Т. 46, № 5. – С. 46–57.
4. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практическое применение / У. Кэди. – М.: Иностран. лит., 1949. – 717 с.
5. Пятаков А.П. Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение / А.П. Пятаков // Бюллетень МАГО. – 2006. – Т. 5, № 2. – С. 1–3.
6. Srinivas S. The effective magnetoelectric coefficients of polycrystalline multiferroic composites / S. Srinivas, Y.L. Jiang // Acta Mater. – 2005. – Vol. 53. – P. 4135–4142.
7. Калоев С.А. Двумерная задача электромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоев, А.В. Петренко // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 2. – С. 208–221.
8. Калоев С.А. Термовязкоупругое многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоев, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – № 3 (48). – С. 103–116.
9. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.

10. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями / А.С. Космодамианский. – К., Донецк: Вища шк., 1976. – 200 с.
11. Калоеров С.А. Эффективный метод определения напряженного состояния пластинки с криволинейными отверстиями / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Прикладная механика. – 2017. – Т. 53, № 1. – С. 108–120.
12. Калоеров С.А. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 45–56.
13. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
14. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
15. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, № 4. – P. 1322–1342.
16. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, № 4. – P. 1343–1362.
17. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.
18. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
19. Yamamoto Y. Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures / Y. Yamamoto, K. Miya. – Amsterdam: Elsevier Science-North Holland, 1987. – 450 p.
20. Hou P.-F. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material / P.-F. Hou, G.-H. Teng, H.-R. Chen // Mech. Mat. – 2009. – Vol. 41. – P. 329–338.

**S.A. Kaloerov, A.B. Mironenko, M.A. Polyanskiy**

#### **Electromagneticelastic state of the plate with curved holes.**

A solution is given to the problem of electromagnetoelasticity for a piezoelectric plate with curvilinear holes, using complex potentials, approximation of the contours of holes by arcs of ellipses and edges of straight cuts, conformal mappings, representations of holomorphic functions by Laurent series and by Faber polynomials and satisfying the boundary conditions by the boundary method least squares. The results of numerical studies for a plate with a triangular or square hole are described. The influence on the values and distribution of the main characteristics of the electromagnetoelastic state of the piezoelectric properties of the plate material and the geometric characteristics of the holes is studied. It is shown at what acute angles the sides of the polygons that are enclosing them can be interpreted as the edges of the cracks.

**Keywords:** *piezoplate, curved holes, complex potentials, generalized least squares method.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк

Получено 17.11.2021

Donetsk National University, Donetsk

*kaloerov@mail.ru*

*max\_polyuny@mail.ru*

УДК 539.3:534.1

©2021. В.Е. Болнокин, А.В. Глущенко, Л.В. Дубяго, В.И. Сторожев

## ИЗГИБНЫЕ ВОЛНЫ В ОКРУЖНОМ НАПРАВЛЕНИИ КОЛЬЦЕВОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КРАЯМИ

Исследуется проблема получения и анализа дисперсионного уравнения для бегущих гармонических упругих волн изгибного деформирования, распространяющихся вдоль окружного углового направления в тонкой трансверсально-изотропной концентрической кольцевой пластине при условиях жесткого закрепления внутренней и внешней боковых цилиндрических контурных поверхностей. Динамическое деформирование пластины описывается уточненной теорией С.А. Амбарцумяна. В получаемом в аналитической форме дисперсионном соотношении, представляющем собой равенство нулю функционального определителя шестого порядка, искомый действительный либо мнимый параметр волнового числа содержится в индексных выражениях разнотипных цилиндрических функций, и исследуемое уравнение решается численным методом. Представлены результаты расчета низших действительных и мнимых ветвей анализируемого дисперсионного спектра и формы изгибных перемещений для отдельных волн из рассчитанных мод бегущих волн применительно к кольцевой пластине из бериллия.

**Ключевые слова:** тонкие трансверсально-изотропные пластины, концентрическая кольцевая форма, закрепленные боковые поверхности, уточненная модель С.А. Амбарцумяна, изгибные упругие волны, окружное направление распространения, трансцендентное дисперсионное уравнение, численное исследование, пластина из бериллия, ветви волнового спектра, формы бегущих волн.

**Введение и цели исследования.** Теоретические исследования закономерностей распространения волн деформаций вдоль криволинейных траекторий в упругих телах и элементах конструкций сохраняют свою актуальность как класс важных в теоретическом и прикладном аспектах и при этом достаточно малоисследованных задач механики деформируемого твердого тела [1–4]. Их результаты имеют достаточно обширный круг практических применений в предпроектном моделировании компонентов и устройств ультразвуковой дефектоскопии и акустоэлектроники, машин и строительных сооружений [5, 6].

К числу задач данного типа, как отмечено в работах [7, 8], относятся исследования спектров и свойств продольно-сдвиговых и изгибных волн вдоль окружного (углового) направления в конструкциях в виде однородных и составных кусочно-однородных тонких пластин концентрической кольцевой формы. В исследованиях задач данного типа подлежат последовательному учету различные факторы постановки проблемы, такие как виды задаваемых граничных условий на краях и границах контакта составных элементов кусочно-однородных пластин, их физико-механические свойства, в частности поперечная либо радиальная непрерывная неоднородность и анизотропия физико-механических свойств конструкционных материалов, факторы контакта пластин с упругими основаниями, а также типы моделей деформирования тонкостенных конструкций, ис-

пользуемые для исследования.

В контексте проблемы получения данных о свойствах изгибных волн вдоль окружного направления в тонких однородных пластинах концентрической кольцевой формы при учете свойств анизотропии на основе уточненных моделей волнового изгибного деформирования тонких пластин, целью данной работы является получение и анализ дисперсионного уравнения, описывающего спектр бегущих и краевых стоячих волн чистого изгиба вдоль углового окружного направления в тонкой трансверсально-изотропной концентрической кольцевой пластине с жестко закрепленными внутренним и внешним краями на основе применения одного из вариантов уточненной теории динамического изгиба тонких анизотропных пластин, разработанного А.С. Амбарцумяном [9].

**1. Постановка задачи и основные соотношения рассматриваемой модели.** Соотношения предложенной С.А. Амбарцумяном [9] уточненной модели поперечных гармонических колебаний трансверсально-изотропных тонких пластин с перпендикулярной плоским граням осью изотропии, включая записываемые во введенной в срединной плоскости пластины полярной системе координат  $Or\theta$  разрешающие уравнения и представления для характеристик динамического изгибного напряженно-деформированного состояния, имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta\Delta w + (\gamma h/gD)(1 - k\Delta)(\partial^2 w/\partial t^2) &= 0, \\ \Delta\Phi - \delta^2\Phi &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} M_r = -D[\partial^2 w/\partial r^2 + \nu(r^{-1}(\partial w/\partial r) + r^{-2}(\partial^2/\partial\theta^2))] + \\ + (2D/\delta^2)(r^{-1}(\partial/\partial r) + r^{-2}(\partial^2/\partial\theta^2))\Delta w + (2/\delta^2)(\partial/\partial r)(r^{-1}(\partial\Phi/\partial\theta)) - \\ - k(\gamma h/g)[(2/\delta^2)(r^{-1}(\partial^3 w/\partial r\partial t^2) + r^{-2}(\partial^4 w/\partial\theta^2\partial t^2)) - (\partial^2 w/\partial t^2)]; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} M_\theta = -D[\nu(\partial^2 w/\partial r^2) + r^{-1}(\partial w/\partial r) + r^{-2}(\partial^2/\partial\theta^2)] + \\ + (2D/\delta^2)(\partial^2/\partial r^2)\Delta w - (2/\delta^2)(\partial/\partial r)(r^{-1}(\partial\Phi/\partial\theta)) - \\ - k(\gamma h/g)[(2/k^2)(\partial^4 w/\partial\theta^2\partial t^2) - (\partial^2 w/\partial t^2)]; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} H = -D(1 - \nu)[(\partial/\partial r)(r^{-1}(\partial w/\partial\theta)) - \\ - (2D/\delta^2)(\partial/\partial r)(r^{-1}(\partial/\partial\theta))\Delta w + \Phi - (2/\delta^2)(\partial^2\Phi/\partial r^2)(r^{-1}(\partial\Phi/\partial\theta)) + \\ + k(\gamma h/g)[(2k/\delta^2)(\partial/\partial r)(r^{-1}(\partial^3 w/\partial\theta\partial t^2))]; \end{aligned} \quad (4)$$

$$N_r = -D(\partial/\partial r)\Delta w + r^{-1}(\partial\Phi/\partial\theta) + k(\gamma h/g)(\partial^3 w/\partial r\partial t^2); \quad (5)$$

$$N_\theta = -Dr^{-1}(\partial/\partial\theta)\Delta w - \partial\Phi/\partial r + k(\gamma h/g)r^{-1}(\partial^3 w/\partial\theta\partial t^2), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}\Delta &= r^{-1}[(\partial/\partial r)(r(\partial/\partial r)) + (\partial/\partial \theta)(r^{-1}(\partial/\partial \theta))], \\ D &= Eh^3/(12(1 - \nu^2)), \\ k &= (2(G/G_1) - \nu_1(E/E_1))h^2/(10(1 - \nu^2)), \\ \delta^2 &= -(10G_1/(h^2G)).\end{aligned}\tag{7}$$

В соотношениях (1) – (7) введены обозначения:  $h$  – параметр толщины пластины;  $\gamma$  – удельный вес материала пластины;  $g$  – параметр ускорения свободного падения;  $E$ ,  $G$  – модуль Юнга и модуль сдвига в плоскостях изотропии материала пластины;  $E_1$ ,  $G_1$  – модуль Юнга и модуль сдвига в плоскостях, перпендикулярных плоскостям изотропии материала пластины;  $\nu$  – коэффициент Пуассона, характеризующий укорочение по направлениям в плоскостях изотропии материала пластины при растяжении в этих плоскостях;  $\nu_1$  – коэффициент Пуассона, характеризующий укорочение по направлениям в плоскостях изотропии материала пластины при растяжении в плоскостях, перпендикулярных плоскостям изотропии. На внутреннем и внешнем граничных контурах (боковых цилиндрических граничных поверхностях) рассматриваемой пластины, занимающей во введенных цилиндрических координатах область  $V = \{R_1 \leq r \leq R_2, 0 < \theta \leq 2\pi, -h/2 \leq z \leq h/2\}$ , задаются краевые условия жесткого закрепления, заключающиеся для рассматриваемой модели в равенстве нулю поперечных перемещений на граничных цилиндрических поверхностях, а также в равенстве нулю тангенциальных перемещений в точках окружностей  $r = R_i$ ,  $z = \pm z_0$  на боковых цилиндрических поверхностях пластины. Данные условия, согласно [9], имеют вид

$$\begin{aligned}(w(r, \theta, t))_{r=R_j} &= 0, \\ (-(\partial/\partial r)w(r, \theta, t) + (2G_1)^{-1}((h^2/4) - (z_0^2/3))\tau(r, \theta, t))_{r=R_j} &= 0, \\ (-r^{-1}(\partial/\partial \theta)w(r, \theta, t) + (2G_1)^{-1}((h^2/4) - (z_0^2/3))\phi(r, \theta, t))_{r=R_j} &= 0,\end{aligned}\tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}\tau(r, \theta, t) &= (12/h^3)[-D(\partial/\partial r)\Delta w + r^{-1}(\partial\Phi/\partial\theta) + k(\gamma h/g)(\partial^3 w/\partial r \partial t^2)], \\ \phi(r, \theta, t) &= (12/h^3)[-Dr^{-1}(\partial/\partial \theta)\Delta w - (\partial\Phi/\partial r) + k(\gamma h/g)r^{-1}(\partial^3 w/\partial \theta \partial t^2)].\end{aligned}\tag{9}$$

**2. Получение основного дисперсионного уравнения.** На первом шаге алгоритма получения дисперсионного уравнения для упругих волн исследуемого типа с циклической частотой  $\omega$  и волновым числом  $\eta$  вводятся представления

$$\begin{aligned}w(r, \theta, t) &= \chi(r) \cdot \exp(-i(\omega t - \eta\theta)), \\ \Phi(r, \theta, t) &= \varphi(r) \cdot \exp(-i(\omega t - \eta\theta)),\end{aligned}\tag{10}$$

при подстановке которых в (1) соответствующие уравнения могут быть преобразованы к виду

$$\begin{aligned}\Delta\chi_1(r) - \lambda_1^2\chi_1(r) &= 0, \quad \Delta\chi_2(r) - \lambda_2^2\chi_2(r) = 0, \\ \Delta\varphi(r) - \delta^2\varphi(r) &= 0,\end{aligned}\tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}w &= w_1 + w_2, \quad w_j(r, \theta, t) = \chi_j(r) \cdot \exp(-i(\omega t - \eta\theta)), \\ \lambda_j &= \lambda_j(\omega) = [(k\Omega^2/2) - (-1)^j((k^2\Omega^4/4) + \Omega^2)^{1/2}]^{1/2} \quad (j = \overline{1, 2}), \\ \Omega^2 &= \gamma h \omega^2 / (gD).\end{aligned}\tag{12}$$

Решения уравнений (10) представляются в виде [10]

$$\begin{aligned}\chi_j(r) &= A_j J_\eta(\lambda_j r) + B_j Y_\eta(\lambda_j r), \\ \varphi(r) &= A_3 J_\eta(\delta r) + B_3 Y_\eta(\delta r),\end{aligned}\tag{13}$$

где  $A_j, B_j$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) – произвольные постоянные коэффициенты.

Соответственно, из краевых условий (8), с учетом полученных представлений для  $w(r, \theta, t)$ ,  $\Phi(r, \theta, t)$ , следуют соотношения, представляющие собой систему однородных алгебраических уравнений относительно постоянных коэффициентов  $A_j, B_j$  ( $j = \overline{1, 3}$ )

$$\begin{aligned}A_1 J_\eta(\lambda_1 R_1) + B_1 Y_\eta(\lambda_1 R_1) + A_2 J_\eta(\lambda_2 R_1) + B_2 Y_\eta(\lambda_2 R_1) &= 0, \\ A_1 J_\eta(\lambda_1 R_2) + B_1 Y_\eta(\lambda_1 R_2) + A_2 J_\eta(\lambda_2 R_2) + B_2 Y_\eta(\lambda_2 R_2) &= 0, \\ [A_1(\lambda_1/2)(J_{\eta-1}(\lambda_1 R_1) - J_{\eta+1}(\lambda_1 R_1)) + \\ + B_1(\lambda_1/2)(Y_{\eta-1}(\lambda_1 R_1) - Y_{\eta+1}(\lambda_1 R_1))] \cdot (\alpha_1 - 1) + \\ + [A_2(\lambda_2/2)(J_{\eta-1}(\lambda_2 R_1) - J_{\eta+1}(\lambda_2 R_1)) + \\ + B_2(\lambda_2/2)(J_{\eta-1}(\lambda_2 R_1) - J_{\eta+1}(\lambda_2 R_1))] \cdot (\alpha_2 - 1) + \\ + (i\eta R_1^{-1})[A_3 J_\eta(\delta R_1) + B_3 Y_\eta(\delta R_1)] &= 0, \\ [A_1(\lambda_1/2)(J_{\eta-1}(\lambda_1 R_2) - J_{\eta+1}(\lambda_1 R_2)) + \\ + B_1(\lambda_1/2)(Y_{\eta-1}(\lambda_1 R_2) - Y_{\eta+1}(\lambda_1 R_2))] \cdot (\alpha_1 - 1) + \\ + [A_2(\lambda_2/2)(J_{\eta-1}(\lambda_2 R_2) - J_{\eta+1}(\lambda_2 R_2)) + \\ + B_2(\lambda_2/2)(J_{\eta-1}(\lambda_2 R_2) - J_{\eta+1}(\lambda_2 R_2))] \cdot (\alpha_2 - 1) + \\ + (i\eta R_2^{-1})[A_3 J_\eta(\delta R_2) + B_3 Y_\eta(\delta R_2)] &= 0, \\ (i\eta R_1^{-1})[A_1 J_\eta(\lambda_1 R_1) + B_1 Y_\eta(\lambda_1 R_1)] \cdot (\alpha_1 + 1) + \\ + [A_2 J_\eta(\lambda_2 R_1) + B_2 Y_\eta(\lambda_2 R_1)] \cdot (\alpha_2 + 1) + \\ + [A_3(\delta/2)(J_{\eta-1}(\delta R_1) - J_{\eta+1}(\delta R_1)) + \\ + B_3(\delta/2)(Y_{\eta-1}(\delta R_1) - Y_{\eta+1}(\delta R_1))] &= 0,\end{aligned}\tag{14}$$



$$\begin{aligned}
 & (i\eta R_2^{-1})([A_1 J_\eta(\lambda_1 R_2) + B_1 Y_\eta(\lambda_1 R_2)] \cdot (\alpha_1 + 1) + \\
 & + [A_2 J_\eta(\lambda_2 R_2) + B_2 Y_\eta(\lambda_2 R_2)] \cdot (\alpha_2 + 1)) + \\
 & + [A_3(\delta/2)(J_{\eta-1}(\delta R_2) - J_{\eta+1}(\delta R_2)) + \\
 & + B_3(\delta/2)(Y_{\eta-1}(\delta R_2) - Y_{\eta+1}(\delta R_2))] = 0,
 \end{aligned}$$

где

$$\alpha_j = (6(G_1 h^3)^{-1}((h^2/4) - (z_0^2/3))[k\omega^2 \gamma h/g + D\lambda_j^2] \quad (j = \overline{1, 2}). \quad (15)$$

Равенство нулю функционального определителя алгебраической системы (14) и является искомым дисперсионным уравнением, которое может быть записано в форме

$$F(\omega, \eta) = 0. \quad (16)$$

При задаваемых значениях физико-механических и геометрических параметров пластины и фиксируемых значениях частотного параметра  $\omega$  из уравнения (16) с применением численных методов определяются значения параметра волнового числа  $\eta$ , как величины, входящей в представление  $F(\omega, \eta)$  в качестве алгебраических множителей и фигурирующей в выражениях для индексных показателей специальных цилиндрических функций.

Заданием реализуемых исследований является также описание форм изгибных волновых перемещений в анализируемых волнах. Расчеты нормированных форм реализуются с использованием представления  $w(r, \theta, t)$  в форме (10), (12), (13) для найденных значений волнового числа. При этом с точностью до постоянного множителя для пар  $(\omega, \eta)$ , удовлетворяющих уравнению (16) находится нетривиальное решение алгебраической системы (14), в котором  $A_j, B_j$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) соответственно представляются алгебраическими дополнениями к элементам первой строки функциональной матрицы системы (14).

**3. Результаты вычислительных экспериментов.** Пример реализации представленной методики получения и исследования дисперсионных соотношений, описывающих спектры рассматриваемых изгибных волн, дается для тонкой кольцевой закрепленной по краям пластины из бериллия, физико-механические постоянные которой имеют значения [11, 12]

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= 22.94_*, \quad c_{12} = 2.76_*, \quad c_{13} = 1.10_*, \quad c_{33} = 34.22_*, \quad c_{44} = 16.62_*, \\
 c_* &= 10^{10} [\text{Па}]; \quad \gamma/g = 3.02 \cdot 10^3 [\text{кг/м}^3];
 \end{aligned}$$

геометрические параметры имеют величины

$$R_1 = 0.1 \cdot l_*, \quad R_2 = 0.4 \cdot l_*, \quad h = 0.01 \cdot l_*, \quad z_0 = h/2, \quad l_* = 1 [\text{м}]$$

Пересчет технических параметров упругости реализуется на основе последовательного использования соотношений [9, 12]

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= (1/2)(c_{33}/c + (c_{11} - c_{12})^{-1}), \quad s_{12} = (1/2)(c_{33}/c - (c_{11} - c_{12})^{-1}), \\
 s_{13} &= -c_{13}/c, \quad s_{33} = (c_{11} + c_{12})/c,
 \end{aligned}$$

$$s_{44} = 1/c_{44}, \quad c = (c_{11} + c_{12})c_{33} - 2c_{13}^2;$$

$$E = 1/s_{11}, \quad E_1 = 1/s_{33}, \quad \nu = -s_{12}E, \quad \nu_1 = -s_{13}E_1, \quad G_1 = 1/s_{44}.$$

Результаты расчетов двух низших ветвей действительных и мнимых ветвей дисперсионного спектра окружных изгибных волн для рассматриваемой пластины реализованы в диапазоне циклических частот

$$\omega \in [0.0, 8.0] \cdot \omega_*, \quad \omega_* = 10^{7/2} [\text{рад/с}]$$

и значений волнового числа

$$\eta \in [0.0, 10.0] \cdot \eta_*, \quad \eta_* = 1 \cdot [\text{рад/м}]$$

На рисунке 1 представлен фрагмент диаграммы дисперсионных кривых с отрезками действительных ветвей спектра, отвечающих бегущим волнам анализируемого типа, а также отрезками мнимых ветвей спектра, описывающих краевые стоячие волны для случая жесткого закрепления внутреннего и внешнего контуров пластины. Рисунок характеризует случай ненулевого значения частоты запираания низшей моды бегущих волн и дает представление о топологии действительных и мнимых ветвей для данного фрагмента спектра.

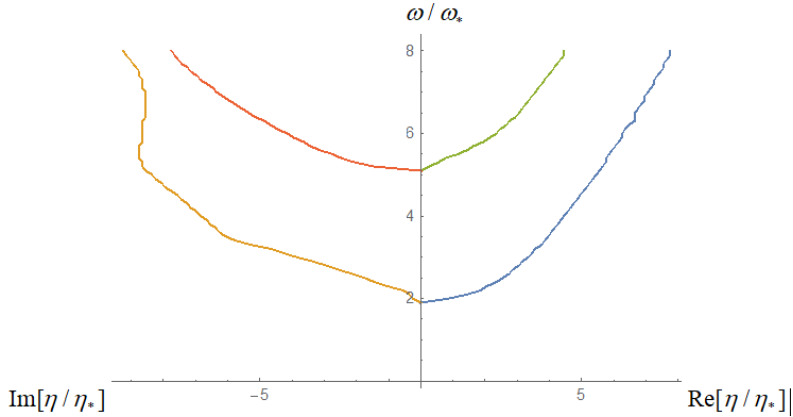


Рис. 1. Диаграмма дисперсионных кривых для изгибных волн в окружном направлении кольцевой пластины с закреплением внутреннего и внешнего граничных контуров

Результаты расчета форм колебательных перемещений в волнах рассчитанных мод представлены на рисунках 2 и 3. Так, на первом из них представлена радиальная форма  $w(r)/\max_{r \in [R_1, R_2]} |w(r)|$  бегущей волны из первой моды дисперсионного спектра с циклической частотой  $\omega = 9.48 \cdot 10^3 [\text{рад/с}]$  и нормированным волновым числом  $\eta/\eta_* = 3.35$ , а на рисунке 3 – радиальная форма бегущей волны из второй моды дисперсионного спектра с циклической частотой

$\omega = 22.12 \cdot 10^3$  [рад/с] и нормированным волновым числом  $\eta/\eta_* = 3.55$ . В целом же, анализ результатов расчетов подтверждает сделанное ранее применительно к изотропным пластинам [8] заключение о существенных изменениях в формах радиальных распределений по мере уменьшения относительной длины рассматриваемых волн, появлении узла для форм перемещений в высокочастотных волнах второй моды.

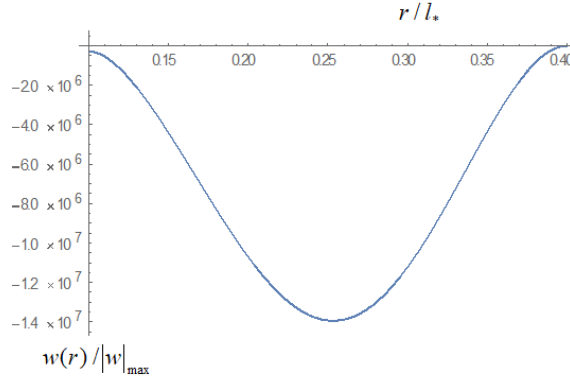


Рис. 2. Форма волновых изгибных перемещений в бегущей волне первой моды для кольцевой пластины с жестким закреплением внутреннего и закреплением внешнего граничных контуров при  $\eta = 1.55$ ,  $\omega = 0.51$ .

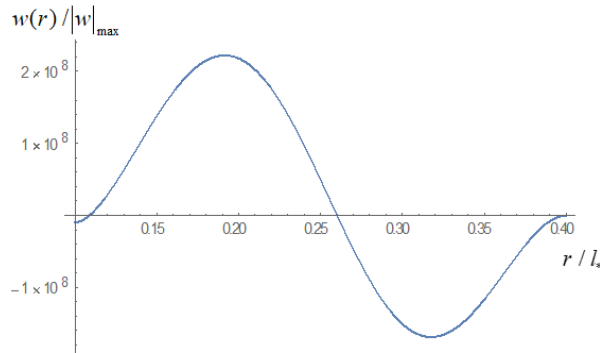


Рис. 3. Форма волновых изгибных перемещений в низшей бегущей волне второй моды для кольцевой пластины с жестким закреплением внутреннего и закреплением внешнего граничных контуров при  $\eta = 1.55$ ,  $\omega = 0.51$ .

**Выводы.** В результате представленных в работе исследований на основе использования уточненной теории изгибного динамического деформирования тонких анизотропных пластин реализовано получение аналитической формы трансцендентного дисперсионного уравнения, описывающего спектр бегущих и краевых стоячих волн чистого изгиба вдоль углового окружного координатного

направления в тонкой трансверсально-изотропной кольцевой пластине с жестко закрепленными краями. Полученное уравнение имеют форму равенства нулю функционального определителя шестого порядка из элементов в виде комбинаций разнотипных цилиндрических функций с индексными параметрами, выражаемыми через искомые волновые числа. Реализованы отдельные числовые исследования полученного дисперсионного уравнения для тонкой пластины из бериллия. Рассчитаны две низшие действительные и мнимые ветви дисперсионного спектра спектров, а также формы колебательных перемещений в бегущих волнах с задаваемыми сочетаниями частотного параметра и параметра волнового числа. Охарактеризованы некоторые свойства форм исследуемых волн.

1. Бреховских Л.М. О поверхностных волнах в твердом теле, удерживаемых кривизной границы / Л.М. Бреховских // Акуст. журн. – 1960. – Т. 13, № 4. – С. 541–554.
2. Голубева Е.В. О винтовых поверхностных волнах на упругом цилиндре / Е.В. Голубева // Акуст. журн. – 1986. – Т. 22, № 3. – С. 385–386.
3. Rostafinski W. Analysys of propagation of waves of acoustic frequensis in curved ducts / W. Rostafinski // J. Acoust. Soc. Amer. – 1975. – V. 56. – P. 11–15.
4. Vboulis G. Curcumferental waves around cylindrical inhomogeneties in plane viscoelastic solid systems / G. Vboulis, S.A. Paipetis, P.S. Theocaris // J. Sound Vibrat. – 1974. – V. 35, № 4. – P. 521–533.
5. Дьелесан Э. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов / Э. Дьелесан, Д. Руайе. – М.: Наука, 1982. – 424 с.
6. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
7. Тютюкин В.В. Волноводные свойства плоской кольцевой пластины. I. Изгибные волны. / В.В. Тютюкин // Акуст. журн. – 2003. – Т. 49, № 6 – С. 843–851.
8. Дубяго Л.В. Дисперсионный спектр упругих волн изгиба вдоль окружного направления в тонкой изотропной кольцевой пластине с жестко закрепленными либо шарнирно опертыми краями / Л.В. Дубяго, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2019. – №4 (69). – С. 48–56.
9. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин (прочность, устойчивость и колебания) / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1967. – 268 с.
10. Кузнецов Д.С. Специальные функции / Д.С. Кузнецов. – М.: Высшая школа, 1965. – 272 с.
11. Ding Haojiang Elasticity of transversely isotropic materials / Ding Haojiang, W. Chen, L. Zhang; Ed. G. Gladwell. – Dordrecht: Springer, 2006. – 435 p.
12. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеднородных сред / Т.Д. Шермергор. – М.: Наука, 1977. – 399 с.

**V.E. Bolnokin, A.V. Glushchenko, L.V. Dubyago, V.I. Storozhev**

**Flexural waves in the circumferential direction of an annular transversely isotropic plate with fixed edges.**

The problem of obtaining and analyzing the dispersion equation for traveling harmonic elastic waves of bending deformation propagating along the circumferential angular direction in a thin transversely isotropic concentric annular plate under conditions of rigid fixation of the inner and outer lateral cylindrical contour surfaces is investigated. The dynamic deformation of the plate is described by the refined theory of S.A. Ambartsumyan. In the dispersion relation obtained in analytical form, which is the equality to zero of the sixth-order functional determinant, the desired

real or imaginary parameter of the wave number is contained in the index expressions of various cylindrical functions, and the equation under study is solved by a numerical method. The results of calculating the lowest real and imaginary branches of the analyzed dispersion spectrum and the shape of bending displacements for individual waves from the calculated traveling wave modes as applied to an annular beryllium plate are presented.

**Keywords:** *thin transversely isotropic plates, concentric annular shape, fixed side surfaces, refined model of placecountry-region S.A. Ambartsumyan, flexural elastic waves, circumferential direction of propagation, transcendental dispersion equation, numerical study, beryllium plate, branches of the wave spectrum, forms of displacement in traveling waves.*

ФГБУН “Ин-т машиноведения им. А.А. Благонравова РАН”,  
Москва  
ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк

*Получено 22.11.2021*

*Mechanical Engineering Research Institute of the Russian  
Academy of Sciences, Moscow  
Donetsk National University, Donetsk*

*stvi@donnu.ru*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

---

УДК 51-7:004.052

©2021. Л.А. Лазебная

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В АНИЗОТРОПНОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЕ: ПРИМЕНЕНИЕ К УГОЛЬНЫМ ПЛАСТАМ

Рассматривается процесс движения жидкости в угольном пласте, представляющем собой трещиновато-пористую среду. Математическая модель формируется с учётом выраженной анизотропии среды, что обуславливает явление неравномерного распространения жидкого агента. Для исследования параметров течения предлагается алгоритм численного решения поставленной краевой задачи.

**Ключевые слова:** анизотропная среда, угольные пласты, модель движения жидкости, напорная фильтрация, анализ параметров распространения, численный анализ модели.

**Введение и постановка задачи.** В комплексе средств предотвращения негативных проявлений в свойствах угольных пластов при подземной угледобыче обязательным мероприятием является предварительное нагнетание жидкости в разрабатываемую зону. Трудями многих исследователей созданы основы теории и технологий процесса гидравлической обработки угольных пластов, однако многие проблемы в этой области требуют дальнейшего решения. В частности, углубленного исследования требует явление, связанное с наличием в угольном пласте трещин и пустот, содержащих находящийся под давлением газ, что обуславливает эффекты неравномерного распространения фильтрующейся жидкости. Как показано в работах ряда авторов [1–3], эффективным методом исследования динамики распространения жидкости в анизотропном угольном пласте для установления закономерностей движения и взаимодействия потоков при нагнетании жидкости является математическое моделирование эффектов гидравлического воздействия. Поэтому вопросы дальнейшего развития методов математического моделирования применительно к процессам движения нагнетаемой жидкости в угольных пластах с учётом анизотропии их фильтрационных свойств являются актуальными в фундаментальном и прикладном аспектах заданиями теории математического моделирования.

В данном контексте, целью настоящей работы является разработка математической модели фильтрации жидкости в угольном пласте с учетом выраженной

анизотропии среды и обоснование алгоритма численного решения поставленной задачи.

**1. Описание и метод анализа усовершенствованной модели.** К настоящему времени сформированы системы уравнений, позволяющие эффективно решать задачи подобного рода, однако нерешённые вопросы пока остаются. В соответствии с физической сущностью и спецификой процесса движения жидкости в угольном массиве, формулируемые уравнения фильтрации в прикладной расчетной модели должны удовлетворять следующим условиям:

- обеспечивать неявное вычисление координат фронта движущегося потока жидкости;
- обеспечивать возможность исследования жесткого, упругого и нелинейно-упругого режимов фильтрации;
- допускать эффективное численное решение.

В случае  $n$ -мерной постановки, уравнение упругой фильтрации жидкости в анизотропном пласте может быть записано в виде:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \operatorname{div} [\lambda(P) \operatorname{grad} P]; \quad (1)$$

$$\lambda(P) = \begin{cases} \xi P, & x_i \geq l_i - \Delta x_i, \\ \chi, & x_i < l_i - \Delta x_i; \end{cases} \quad (2)$$

где  $i$  – номер и  $\Delta x_i$  – некоторое малое приращение координаты;  $\chi$  – коэффициент пьезопроводности, определяемый согласно [1, 2].

При необходимости исследовать нелинейно-упругий режим фильтрации, коэффициент  $\chi$  в выражении (2) заменяется, согласно [2, 4], на произведение  $\chi(1 + \alpha P)$ .

Уравнение (1) решается численно с использованием метода конечных разностей. Применение разностных схем к решению краевых задач для нелинейных уравнений параболического типа при  $n \geq 2$  подробно описано в работах [1, 4]. При использовании этого метода для решения уравнений (1)-(2) величина  $\Delta x_i$  принимается равной шагу сеточной области.

Присоединяя к уравнению (1) начальные и граничные условия, соответствующие различным технологическим схемам и режимам воздействия, можно получить математическую модель гидравлического воздействия на угольный пласт в режиме фильтрации. При этом, полагая  $P = P - P_0$ , начальное условие рассматриваемой задачи можно записать в виде

$$P(x, y, z, 0) = 0. \quad (3)$$

Уравнение (1) с соответствующими конкретной области краевыми условиями представляет собой математическую модель напорной фильтрации жидкости в угольном пласте. Для решения краевой задачи на основе уравнения (1) может быть применен конечно-разностный метод, основы которого для нелинейных параболических уравнений с разрывными коэффициентами разработаны акад.

А.А.Самарским [3, 5], со схемой продольно-поперечных направлений (схемой Дугласа) [1, 3]. При этом рассматриваемое уравнение представляется в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k(p) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k(p) \frac{\partial p}{\partial y} \right]. \quad (4)$$

Область определения функции  $p(x, y, t)$  покрывается сеткой:

$$x_i = i \cdot \Delta x, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n;$$

$$y_j = j \cdot \Delta y, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m;$$

$$t_k = k \cdot \Delta t, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Каждый шаг по времени реализуется в два приема:

1.

$$\begin{aligned} & \frac{p_{i,j}^{k+0,5} - p_{i,j}^k}{0,5 \cdot \Delta t} = \\ & = \frac{1}{\Delta x^2} \left( k_{i+0,5,j}^{k+0,5} p_{i+1,j}^{k+0,5} - \left( k_{i+0,5,j}^{k+0,5} + k_{i-0,5,j}^{k+0,5} \right) p_{i,j}^{k+0,5} + k_{i-0,5,j}^{k+0,5} p_{i-1,j}^{k+0,5} \right) + \\ & + \frac{1}{\Delta y^2} \left( k_{i,j+0,5}^k p_{i,j+1}^k - \left( k_{i,j+0,5}^k + k_{i,j-0,5}^k \right) p_{i,j}^k + k_{i,j-0,5}^k p_{i,j-1}^k \right). \end{aligned} \quad (5)$$

2.

$$\begin{aligned} & \frac{p_{i,j}^{k+0,5} - p_{i,j}^k}{0,5 \cdot \Delta t} = \\ & = \frac{1}{\Delta x^2} \left( k_{i+0,5,j}^{k+0,5} p_{i+1,j}^{k+0,5} - \left( k_{i+0,5,j}^{k+0,5} + k_{i-0,5,j}^{k+0,5} \right) p_{i,j}^{k+0,5} + k_{i-0,5,j}^{k+0,5} p_{i-1,j}^{k+0,5} \right) + \\ & + \frac{1}{\Delta y^2} \left( k_{i,j+0,5}^{k+1} p_{i,j+1}^{k+1} - \left( k_{i,j+0,5}^{k+1} + k_{i,j-0,5}^{k+1} \right) p_{i,j}^{k+1} + k_{i,j-0,5}^{k+1} p_{i,j-1}^{k+1} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Исследование схем удобно производить с масштабированными (нормированными) переменными.

Проницаемость пласта отличается не только вдоль различных осей. Структура пласта весьма сложна, и картины фильтрации, полученные ранее, дают идеализированное представление о характере процесса. При описанной форме области воздействия, распространение влаги должно происходить равномерно, чего на самом деле не наблюдается. Следовательно, параметры модели необходимо подобрать так, чтобы получать более реальную картину процесса. Один из путей подбора таких параметров – задание анизотропии пласта по всей области фильтрации независимо от направления осей; при этом, естественно, необходимо учесть, что коэффициент проницаемости вдоль оси  $Oz$  в любом случае в



несколько раз меньше проницаемости по простиранию (вдоль оси  $Ox$ ). Поскольку пласт состоит из блоков с разной проницаемостью, пересечен трещинами различного происхождения, то в нем можно выделить некоторые области с различной величиной коэффициента фильтрации, и соответствующим образом задать набор коэффициентов проницаемости. Ввиду того, что выделить на практике такие области, не проникнув в пласт, невозможно, в первом приближении можно задать набор коэффициентов проницаемости хаотично, используя таблицу случайных чисел. Благодаря этому приему становится возможным исследовать процесс фильтрации в условиях, более близких к реальным по сравнению со случаем, когда проницаемость усредняется по трем (двум) направлениям.

Величинами, оказывающими влияние на характеристики фильтрационного потока, согласно уравнению (1) являются: давление жидкости и его градиент, коэффициент проницаемости и пористость пласта, вязкость жидкости, расстояние и время движения. Равномерность распределения жидкости по пласту предполагает равенство скоростей движения ее фронта в каждой точке в один и тот же момент времени.

Очевидно, что для достижения этого равенства в условиях анизотропного пласта при неизменном режиме работы скважин необходимо добиться уменьшения объемной скорости в направлении высокой проницаемости и соответственно ее увеличения в слабопроницаемых областях. Другими словами, при каскадной обработке количество жидкости, движущееся в направлении высокой проницаемости, должно быть существенно ниже, а в направлении низкой проницаемости – выше, чем при нагнетании через одиночную скважину. Установление этого факта будет свидетельствовать о принципиальной возможности повышения равномерности обработки при применении каскадного способа. Количественные оценки указанных изменений дадут возможность предварительно судить о степени повышения эффективности воздействия.

**2. Результаты численных исследований.** При исследовании возможности преодоления фильтрационной анизотропии, пористость пласта, вязкость жидкости и ее давление на скважинах предполагались постоянными; варьировались площадь, коэффициент проницаемости и расположение слабопроницаемых областей.

На рисунках 1 и 2 показаны линии равного давления жидкости (в долях давления на скважинах) для плоскопараллельного и радиального потоков при нагнетании через одиночную скважину и каскад в момент, соответствующий началу взаимодействия потоков при каскадной обработке. Пунктиром на рисунке отмечены границы слабопроницаемой области.

Результаты расчетов показывают, что давление жидкости в плоскопараллельном потоке вблизи границ слабопроницаемой области при групповом нагнетании в 2-3 раза выше и приближается по величине к давлению на скважинах; это соответствует предполагаемой физической картине движения и взаимодействия потоков при групповой обработке. Для радиального потока разница давлений не так существенна (рис. 2).

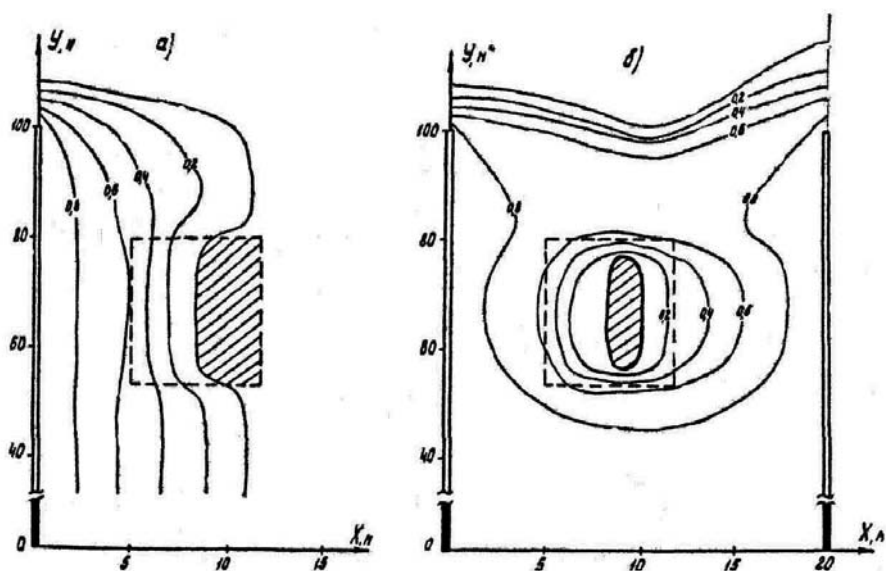


Рис. 1. Распределение относительного давления жидкости в плоскопараллельном потоке в окрестности слабопроницаемой области а) одиночная скважина; б) группа скважин.

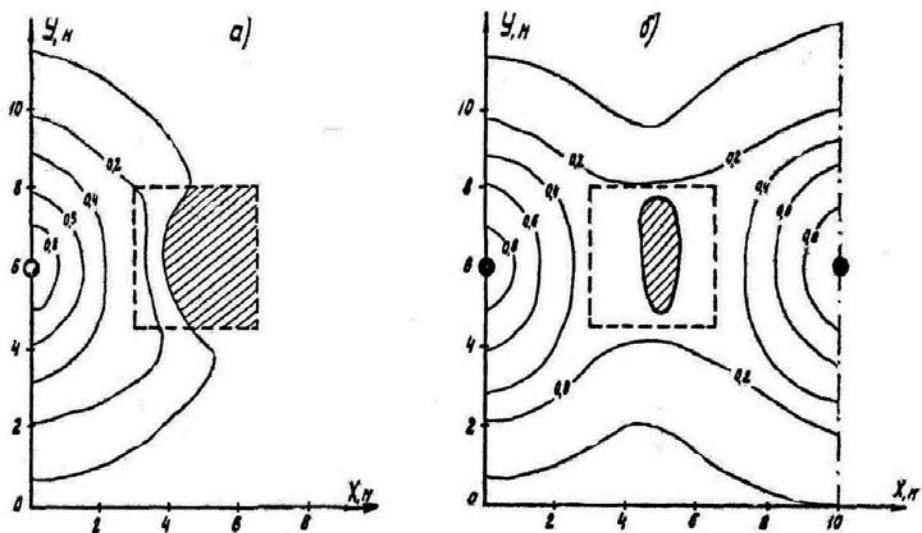


Рис. 2. Распределение относительного давления жидкости в радиальном потоке в окрестности слабопроницаемой области а) одиночная скважина; б) группа скважин.

Это объясняется тем, что при плоскопараллельном движении жидкости, во-первых, больше площадь взаимодействия потоков, во-вторых, потоки движутся навстречу друг другу, а не под углом, что обуславливает их более эффективное взаимодействие.

Расчет скоростей движения фронта фильтрующей жидкости в различных точках показал изменение направлений их векторов в сторону слабопроницаемой области и увеличение модулей этих векторов, что способствует более быстрому насыщению участков с низкой проницаемостью.

Равномерность обработки достаточно полно определяется наличием необработанных участков и степенью разброса значений прироста влажности в проектной зоне воздействия. В связи с этим, для оценки качества обработки выбраны коэффициент относительной величины необработанных участков

$$\nu = \frac{S_H}{S_P} \cdot 100, \% \quad (7)$$

где  $S_H$  - площадь необработанных участков,  $S$  - площадь проектной зоны воздействия, а также коэффициент вариации относительного прироста влажности, определяемого по давлению жидкости в каждой точке, описываемый выражением,

$$V_R = \frac{\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\Delta W_i - \Delta \bar{W})^2}}{\Delta \bar{W}} \cdot 100, \% \quad (8)$$

в котором  $\Delta W_i$  и  $\Delta \bar{W}$  - значения прироста влажности соответственно в  $i$ -й точке и среднее по обрабатываемой зоне;

$$\Delta W_i = \Delta W_{\text{расч}i} / \Delta W_{\text{max}}, \quad (9)$$

где  $\Delta W_{\text{расч}i}$  - прирост влажности в  $i$ -и точке,  $\Delta W_{\text{max}}$  - максимальный прирост влажности.

Для оценки эффективности каскадного воздействия используются величины, определяющие относительное уменьшение необработанной площади

$$\Theta_S = \frac{S_{H.O} - S_{H.K}}{S_{H.O}} \cdot 100, \% \quad (10)$$

где  $S_{H.O}$  и  $S_{H.K}$  - площади необработанных участков при нагнетании соответственно через одиночную скважину и группу, а также уменьшение коэффициента вариации прироста влажности

$$\Theta_v = \frac{V_R^0}{V_R^k}, \quad (11)$$

где  $V_R^0$ ,  $V_R^k$  - коэффициенты вариаций соответственно для одиночной скважины и каскада.

Для обоснования физического механизма возможности преодоления фильтрационной анизотропии при нагнетании через пару соседних скважин проведено моделирование с определением векторов скорости нагнетания жидкости. На рисунке 3 показаны контуры потока жидкости в окрестности слабопроницаемой области и векторы скоростей в различных точках. Скорость фильтрации по направлению высокой проницаемости в окрестности слабопроницаемой области практически равна нулю (рис. 3б).

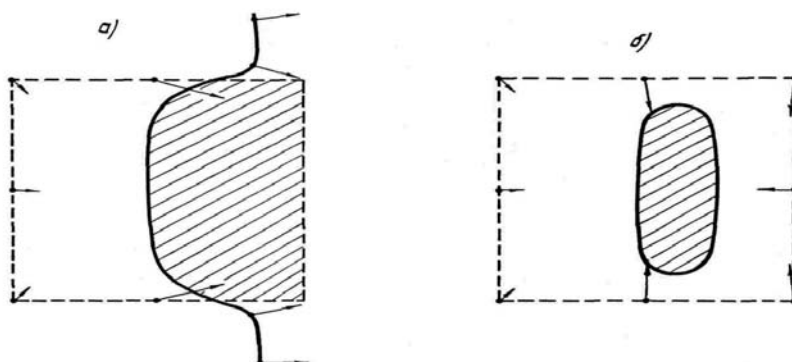


Рис. 3. Векторы скоростей потока жидкости в окрестности слабопроницаемой области а) одиночная скважина; б) пара скважин.

Наблюдаемые изменения позволяют сделать вывод о том, что возникающее при взаимодействии потоков жидкости от соседних скважин гидравлическое противодействие способствует принудительному насыщению областей с низкой проницаемостью за счет хорошо проницаемых участков, лежащих вне зоны обработки. Следствием этого является повышение равномерности распределения жидкости по пласту при нагнетании через группу скважин. Следовательно, можно считать установленным, что взаимодействие потоков жидкости, движущихся от соседних одновременно работающих скважин, приводит к преодолению фильтрационной анизотропии угольного массива. Повышение равномерности обработки при таком нагнетании происходит только за счет уменьшения количества жидкости, уходящей за пределы проектной зоны.

**Выводы.** Показано, что взаимодействие потоков от двух одновременно работающих скважин приводит к значительному повышению давления жидкости на границах слабопроницаемых областей, достигающему значений, близких к давлению нагнетания, а также к изменению направлений векторов скорости фильтрации в сторону низкой проницаемости и увеличению их относительных значений в 2 раза. Следствием этого является уменьшение времени насыщения слабопроницаемых областей в 1.5–2 раза по сравнению с нагнетанием через одиночную скважину. Полученные результаты позволяют сделать вывод о принципиальной возможности преодоления фильтрационной анизотропии и повышении равномерности обработки массива при групповом нагнетании.

1. Павлыш В.Н. Развитие теории и совершенствование технологии процессов воздействия на угольные пласты: монография / В.Н. Павлыш. – Донецк: РВА ДонНТУ, 2005. – 347 с.
2. Павлыш В.Н. Математические модели и алгоритмы управления процессами динамического воздействия на анизотропные подземные массивы / В.Н. Павлыш, Л.А. Лазебная. // Проблемы искусственного интеллекта. – 2019. – № 2(13). – С. 13–21.
3. Павлыш В.Н. Алгоритмы функционирования и технические элементы подсистемы автоматизированного управления процессом нагнетания жидкости в угольный пласт / В.Н. Павлыш, И.В. Тарабаева, Л.А. Лазебная. // Проблемы искусственного интеллекта. – 2017. – № 3(6). – С. 32–39.
4. Теоретические основы процессов комплексного гидропневматического воздействия на угольные пласты: монография / В.Н. Павлыш, С.С. Гребёнкин, В.И. Бондаренко и др.; под общ. ред. Павлыша В.Н. – Донецк: “ВИК”, 2006. – 273 с.
5. Павлыш В.Н. Основы теории и параметры технологии процессов гидропневматического воздействия на угольные пласты: монография / В.Н. Павлыш, Ю.М. Штерн. – Донецк: “ВИК”, 2007. – 400 с.

**L.A. Lazebnaya**

**Mathematical modeling of hydrodynamic processes in anisotropic continuous medium: application to coal seams.**

The process of fluid motion in a coal seam which is a fractured-porous medium is considered. The mathematical model is formed taking into account the pronounced anisotropy of the medium, which causes the phenomenon of uneven distribution of the liquid agent. To study the flow parameters, an algorithm for the numerical solution of the boundary value problem is proposed.

**Keywords:** *anisotropic medium, coal seams, fluid flow model, pressure filtration, analysis of propagation parameters, numerical analysis of the model.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный технический университет”,  
Донецк

Получено 26.11.2021

Donetsk National Technical University, Donetsk

*l\_lazebnaya@mail.ru*

УДК 51-7:004.92

©2021. Е.В. Перинская

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ПРОЦЕССА В МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЕ

Рассматривается детерминированная математическая модель процесса перемешивания многокомпонентного материала в ограниченном рабочем пространстве аппарата, содержащего узлы конвективного типа. Основу модели составляет краевая задача для уравнений математической физики. Компьютерная реализация модели осуществляется с применением метода конечных разностей.

**Ключевые слова:** *двухфазные многокомпонентные среды, математическая модель перемешивания, однолопастные аппараты конвективного типа, метод конечных разностей, параметры концентрации твердой фазы.*

**Введение и цели исследования.** На ряде промышленных предприятий в составе технологического оборудования эксплуатируются машины и аппараты, содержащие узлы конвективного типа, в том числе устройства, осуществляющие перемешивание многокомпонентных материалов, состоящих из жидкой и твердой фазы (технологические линии химических производств, предприятия строительных материалов, технологические процессы обогащения полезных ископаемых и т. п.). При этом уровень качества конечного продукта во многом зависит от повышения эффективности работы конвективных узлов. Кардинальным направлением решения этой проблемы на стадии проектирования является применение методов математического моделирования с использованием компьютерных технологий. Поэтому задачи математического моделирования конвективных процессов, определяющих качество конструкторских и технологических расчетов для обширного ряда научно-технических отраслей, относятся к актуальным проблемам современных научных исследований.

Современные детерминированные математические модели в рассматриваемой области ввиду сложности интерпретируемых процессов описываются краевыми задачами для нелинейных уравнений в частных производных, решение которых в доминирующем числе случаев возможно только численными методами. В этой связи, целью данной работы является анализ и обоснование алгоритмов численного решения краевых задач, лежащих в основе математических моделей процессов конвективного перемешивания неоднородных материалов.

**1. Детерминированная модель конвективного перемешивания многокомпонентных смесей.** Для технологических процессов принудительной обработки материалов могут быть построены различные по полноте и сложности описания математические модели. Как правило, сложное технологическое оборудование, реализующее процессы конвективного перемешивания многокомпонентных смесей, включает ряд узлов, предназначенных для воздействия на исходные материалы, а конечной целью процесса является гомогенная масса,

равномерно распределённая в рабочем объёме. При проектировании используемых к настоящему времени аппаратов такого типа применяются традиционные методы, включающие вывод эмпирических зависимостей для расчёта параметров с последующими многочисленными лабораторными экспериментами и опытно-промышленными испытаниями. К сожалению, подобные методы уже исчерпали свои возможности, и применяемые аппараты не позволяют стабильно получать гомогенные смеси с хорошо воспроизводимыми свойствами без их реконструкции, т.к. в рабочем объёме машины не достигается необходимая степень однородности компонентов в осадке, происходит залегание твердой фазы на днище, наблюдается налипание осадков на стенках. Реконструкция аппарата требует соответствующего обоснования, что вызывает необходимость теоретических и экспериментальных исследований [1, 2]. Наиболее эффективным методом решения рассматриваемых задач является метод математического моделирования, позволяющий получить достаточно широкий набор данных о реконструируемом объекте без проведения долговременных и дорогостоящих натурных исследований [3-5].

Для математического моделирования сложных технологических процессов наиболее универсальным и удобным в инженерном отношении является метод построения математических моделей, базирующийся на физических законах (учете факторов тепломассопереноса, гидродинамики, конвекции и т.д.), что позволяет более адекватно описывать характер и параметры процесса.

Применительно к технологическому оборудованию, реализующему процессы конвективного воздействия на многокомпонентные смеси, первоочередной интерес представляет базовая модель аппарата, содержащего один монолопастный конвективный элемент. Для формулировки ее определяющих уравнений строится формализованная геометрическая модель.

Область существования решения представляет собой внутреннее пространство  $G$  рассматриваемого аппарата (рис. 1), и в этой области требуется определить концентрацию твердой фазы, учитывая при этом вихревые течения раствора, продольную и поперечную диффузию, форму внутреннего пространства и угловую скорость вращения лопасти.

Основные физические уравнения, используемые для построения модели, представляют собой частный случай системы Навье–Стокса [5]:

$$\rho \left( u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{dP}{dx} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность текущего вещества,  $\text{кг} \cdot \text{с}^2 / \text{м}^4$ ;  $\mu$  – коэффициент вязкости,  $\text{кг} \cdot \text{с} / \text{м}^2$ ;  $P$  – давление,  $\text{кг} / (\text{м} \cdot \text{с}^2)$ ;  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  – компоненты вектора скорости;  $\vec{w} = \vec{i}u + \vec{j}v$ .

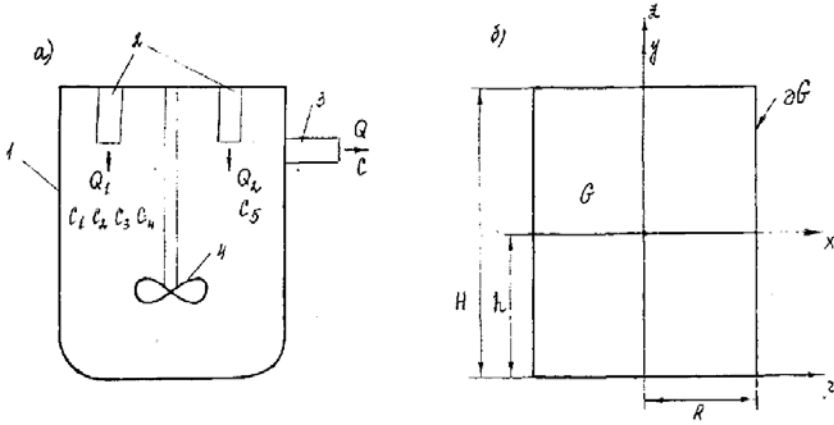


Рис. 1. Схема построения математической модели аппарата: а) 1 – корпус, 2 – входные трубопроводы, 3 – верхний перелив (выходной трубопровод), 4 – мешалка; б) к выбору координат и построению математических моделей.

Вводятся параметры характерного размера (например, длины камеры)  $l$  [м] и характерной скорости  $V$  [м/с], после чего осуществляется переход к безразмерным величинам

$$x' = \frac{x}{l}, y' = \frac{y}{l}, u' = \frac{u}{V}, v' = \frac{v}{V}.$$

В этом случае система (1) – (2) принимает вид

$$\rho \left( \frac{V^2}{l} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{V^2}{l} v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) = -\frac{1}{l} \frac{dP}{dx'} + \frac{V}{l^2} \mu \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2},$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0.$$

Далее уравнение (1) преобразуется к виду

$$u' \cdot \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \cdot \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{1}{\rho V^2} \cdot \frac{dP}{dx'} + \frac{\mu}{\rho V l} \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2},$$

где  $\rho V l / \mu$  – безразмерный параметр в виде числа Рейнольдса,  $\rho = \text{const}$ ,  $V = \text{const}$ . С учетом соотношения

$$\frac{1}{\rho V^2} \cdot \frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx} \cdot \left( \frac{P}{\rho V^2} \right),$$

в котором величина  $P/(\rho \cdot V^2)$  является безразмерным давлением  $P' = P/(\rho \cdot V^2)$ , система (1)–(2) может быть записана в форме

$$u' \cdot \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \cdot \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{dP'}{dx'} + \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}, \quad (3)$$



$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0. \quad (4)$$

Дальнейшее преобразование системы (3)–(4) направлено на исключение числа Рейнольдса с введением переменных

$$v'' = v' \sqrt{Re}, \quad y'' = y' \sqrt{Re},$$

в результате чего ее можно привести к виду

$$\begin{cases} u' \cdot \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{v''}{\sqrt{Re}} \cdot \sqrt{Re} \cdot \frac{\partial u'}{\partial y''} = -\frac{dP'}{dx'} + \frac{Re}{Re} \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial y''^2}, \\ \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v''}{\partial y''} = 0, \end{cases}$$

и далее, переобозначая переменные (опустив штрихи), получить ее окончательную форму

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dP}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

В полученной системе все величины являются безразмерными, а физический смысл условия (6) состоит в том, что внутри области определения источники и стоки отсутствуют

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{div} \vec{w} = 0.$$

Массовые силы в виде сил тяжести в системе (5)–(6) также отсутствуют, т.к. при движении однородной жидкости ( $\rho = \text{const}$ ) они исключаются из (5).

Для однолопастного конвективного аппарата математическая модель процесса перемешивания многокомпонентной смеси строится на базе уравнений, отражающих физический процесс конвекции массы, которая происходит за счет перемешивания смеси лопастью с угловой скоростью вращения  $\omega$ . Для записи уравнений, положенных в основу математической модели, строится формализованная геометрическая модель.

Область существования решения представляет собой внутреннее пространство  $G$  рассматриваемого аппарата, и в этой области требуется определить концентрацию твердой фазы, учитывая при этом вихревые течения раствора, продольную и поперечную диффузию, форму внутреннего пространства и угловую скорость вращения лопасти.

Рассматриваемая математическая модель описывается системой уравнений в частных производных с ответствующими краевыми условиями относительно четырех неизвестных функций: концентрации твердой компоненты, концентрации

жидкой фазы, функции тока и профиля поверхности кристаллизации. В конечном счёте, необходимо установить условия и параметры, при которых обеспечивается равномерное распределение твёрдой фазы, следовательно, концентрацию жидкой фазы можно считать постоянной, хотя и неизвестной величиной, определяемой автоматически в процессе моделирования.

Рассматриваемые задачи являются нелинейными и не имеют аналитических решений, что предопределяет применение численных методов.

Кроме того, предпринятые ранее попытки решения подобных задач основывались на том, что поле скоростей частиц раствора в аппарате известно, однако физически такие данные получить невозможно, вследствие чего приходится использовать те или иные способы приближений, что снижает степень адекватности получаемых решений. В данной же работе получена математическая модель, позволяющая рассчитывать поле скоростей частиц перемешиваемой массы в процессе решения краевой задачи, в чем и состоит ее существенное отличие от рассмотренных ранее.

Базовый компьютерный алгоритм разработан применительно к задаче численного моделирования гидродинамических процессов при работе однолопастных машин конвективного типа.

Рассматриваемая краевая задача формулируется для уравнения в безразмерных величинах

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{l \cdot h} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{1}{l \cdot h} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{L}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{H}{h^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + f_1 + f_2 + f_3, \quad (7)$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t < 1,$$

с начальным условием

$$C(x, y, 0) = C_0 \quad (8)$$

и граничными условиями при отсутствии обмена с внешней средой

$$\begin{aligned} C_x(0, y, t) = C_x(1, y, t) &= 0, \\ C_y(x, 0, t) = C_y(x, 1, t) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Функции  $f_j$  в выражении (7) имеют вид:

$$f_1 = \begin{cases} 0, & x \neq x_1, \quad y \neq y_1; \\ \frac{Q_1 \cdot (C_1 + C_2 + C_3 + C_4)}{V_1}, & x = x_1, \quad y = y_1; \end{cases} \quad (10)$$

$$f_2 = \begin{cases} 0, & x \neq x_2, \quad y \neq y_2; \\ \frac{Q_2 \cdot C_5}{V_1}, & x = x_2, \quad y = y_2; \end{cases} \quad (11)$$

$$f_3 = \begin{cases} 0, & x \neq x_3, \quad y \neq y_3; \\ -\frac{Q \cdot C}{V_1}, & x = x_3, \quad y = y_3. \end{cases} \quad (12)$$

Функция тока  $\psi(x, y)$  определяется из задачи

$$\frac{1}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \mu(x, y), \quad (13)$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < y < 1;$$

$$\mu(x, y) = \begin{cases} \frac{W}{V1}, & x = x_0, \quad y = y_0; \\ \frac{W}{V1 \cdot FN \cdot (l^2(x - x_0)^2 + h^2 \cdot (y - y_0)^2)}, & x \neq x_0, \quad y \neq y_0; \end{cases} \quad (14)$$

с краевыми условиями

$$\psi(x, 0) = \psi(x, 1) = \psi(0, y) = \psi(1, y) = 0. \quad (15)$$

Переменные, указанные в уравнениях, имеют следующий смысл:  $x, y$  – безразмерные пространственные координаты;  $t$  – время, с.;  $C$  – концентрация твердой фазы в рабочем объеме цилиндра, содержащего суспензию, г/см<sup>3</sup>;  $l$  – максимальный размер по оси X (радиус цилиндра), см.;  $H$  – максимальный размер по оси Y (высота цилиндра), см.;  $Vl$  – площадь поперечного сечения цилиндра, см.;  $D_L, D_H$  – коэффициенты продольной и поперечной диффузии, безразмерные величины;  $f_1, f_2$  – функции, отражающие точечные источники твердой фазы, если они есть, г/(с·см);  $f_3$  – функция, отражающая отток суспензии, г/(с·см);  $C_0$  – начальное распределение концентрации твердой фазы, г/см<sup>3</sup>;  $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$  – координаты точечных источников;  $(x_3, y_3)$  – координаты точечного оттока;  $Q_1, Q_2$  – интенсивность источников, см<sup>3</sup>/с;  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  – характеристики источников (концентрация), г/см<sup>3</sup>;  $Q$  – интенсивность оттока ( $Q = Q_1 + Q_2$ ) см<sup>3</sup>/с;  $C$  – характеристика оттока, г/см;  $T$  – время исследования процесса, с;  $W$  – угловая скорость вращения лопасти, если в рабочем объеме устанавливается устойчиво конвективное перемешивание (при его отсутствии  $W=0$ ), об/с;  $x_0, y_0$  – координаты источника вращения;  $FN$  – вязкость суспензии, безразмерна.

**2. Численное решение краевых задач с использованием метода конечных разностей.** Для решения нелинейных уравнений математической физики, на которых основаны математические модели процессов работы однолопастного конвективного аппарата, необходимо применять численные методы [6].

Соотношения численной реализации для двумерных моделей имеют вид

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{C_{ij}^{k+0,5} - C_{ij}^k}{0,5H_T} = -\frac{V_x}{l} \cdot \frac{C_{i+1,j}^{k+0,5} - C_{ij}^{k+0,5}}{h \cdot H_x} - \frac{V_y}{h} \cdot \frac{C_{i,j+1}^k - C_{ij}^k}{H_y} +$$

$$+ \frac{D_L}{l^2} \cdot \frac{C_{i+1,j}^{k+0,5} - 2C_{ij}^{k+0,5} + C_{i-1,j}^{k+0,5}}{H_x^2} + \frac{D_H}{h^2} \cdot \frac{C_{i,j+1}^k - 2C_{ij}^k + C_{i,j-1}^k}{H_y^2} + f;$$

$$\begin{aligned}
& \frac{D_L}{l^2 \cdot H_x^2} \cdot C_{i-1,j}^{k+0,5} - \left( \frac{1}{0,5 \cdot T \cdot H_T} - \frac{V_x}{l \cdot H_x} + \frac{2 \cdot D_L}{l^2 \cdot H_x^2} \right) \cdot C_{ij}^{k+0,5} + \\
& + \left( \frac{D_L}{l^2 \cdot H_x^2} - \frac{V_x}{l \cdot H_x} \right) \cdot C_{i+1,j}^{k+0,5} = \left( \frac{V_y}{h \cdot H_y} - \frac{D_H}{h^2 \cdot H_y^2} \right) \cdot C_{i,j+1}^k + \\
& + \left( \frac{2 \cdot D_H}{h^2 \cdot H_y^2} - \frac{1}{0,5 \cdot T \cdot H_T} - \frac{V_y}{h \cdot H_y} \right) \cdot C_{ij}^k - \frac{D_H}{h^2 \cdot H_y^2} \cdot C_{i,j-1}^k - f; \\
& \frac{D_H}{h^2 \cdot H_y^2} \cdot C_{i,j-1}^{k+1} - \left( \frac{1}{0,5 \cdot T \cdot H_T} - \frac{V_y}{h \cdot H_y} + \frac{2 \cdot D_H}{h^2 \cdot H_y^2} \right) \cdot C_{ij}^{k+1} + \\
& + \left( \frac{D_H}{h^2 \cdot H_y^2} - \frac{V_y}{h \cdot H_y} \right) \cdot C_{i,j+1}^{k+1} = \left( \frac{V_x}{l \cdot H_x} - \frac{D_L}{l^2 \cdot H_x^2} \right) \cdot C_{i+1,j}^{k+0,5} + \\
& + \left( \frac{2 \cdot D_L}{l^2 \cdot H_x^2} - \frac{1}{0,5 \cdot T \cdot H_T} - \frac{V_x}{l \cdot H_x} \right) \cdot C_{ij}^{k+0,5} + \frac{D_L}{l^2 \cdot H_x^2} \cdot C_{i-1,j}^{k+0,5} + f.
\end{aligned}$$

Соотношения метода конечных разностей для системы (7)–(15)

$$\begin{aligned}
C_{i+1,j} &= C_{ij} \left( 1 - \frac{T \cdot H_T \cdot Q}{V} - \frac{2D_R \cdot T \cdot H_T}{R^2 \cdot H_R^2} \right) + \\
& + C_{i,j+1} \left( \frac{D_R \cdot T \cdot H_T}{2 \cdot r \cdot R \cdot H_R} + \frac{D_R \cdot T \cdot H_T}{R^2 \cdot H_R^2} - \frac{V_R \cdot T \cdot H_T}{2 \cdot R \cdot H_R} \right) + \\
& + C_{i,j-1} \left( \frac{V_R \cdot T \cdot H_T}{2 \cdot R \cdot H_R} - \frac{D_R \cdot T \cdot H_T}{2 \cdot r \cdot R^2 \cdot H_R} + \frac{D_R \cdot T \cdot H_T}{R^2 \cdot H_R^2} \right) + \\
& + \frac{Q_1(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + Q_2 C_5}{V} \cdot T \cdot H_T;
\end{aligned}$$

$$C_{i0} = C_{iN}; \quad C_{0j} = C_{0M} = C_0;$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{H^2} \cdot \frac{\psi_{j,k+1} - 2\psi_{jk} + \psi_{j,k-1}}{\Delta^2 z_k} + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\psi_{j+1,k} - 2\psi_{jk} + \psi_{j-1,k}}{H_R^2} - \\
& - \frac{1}{R^2 \cdot r_j} \cdot \frac{\psi_{j+1,k} - \psi_{j-1,k}}{2 \cdot H_R} = \mu(r_j, z_k);
\end{aligned}$$

$$\psi_{0k} = \psi_{Nk} = \psi_{j0} = \psi_{iM} = 0,$$

где

$$\psi(r_j, z_k) = \psi_{jk}; \quad j = 0, 1, \dots, N; \quad k = 0, 1, \dots, P.$$

Полученная система уравнений позволяет численно исследовать поставленную краевую задачу.

На рисунке 2 приведены результаты моделирования для трех вариантов размещения источников. Как видно из рисунка, наиболее равномерное распределение достигается, когда оба источника находятся в одной точке.

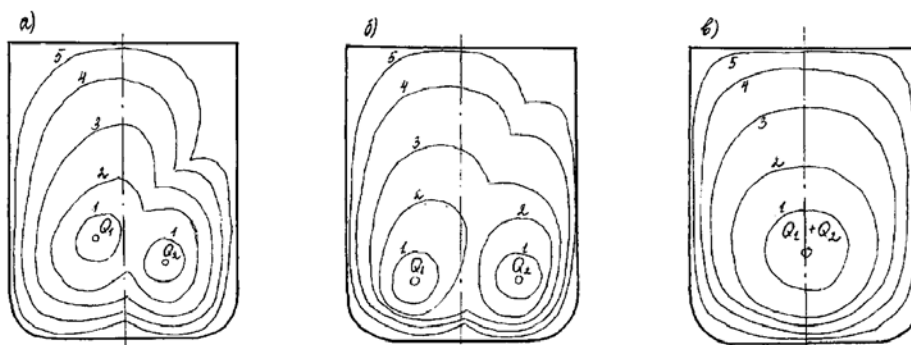


Рис. 2. Результаты моделирования распределения значений концентрации твердой фазы для различных положений источников: а) случайное расположение; б) симметричные координаты; в) расположение в общей точке.

**Выводы.** В результате выполненных исследований решена задача построения детерминированных математических моделей, описывающих процесс функционирования однолопастных аппаратов конвективного типа. На основе метода конечных разностей разработаны алгоритмы и программные приложения для компьютерного исследования и обоснования направлений совершенствования оборудования.

Выполненные численные эксперименты позволили сформировать рекомендации по совершенствованию конструкций аппарата и улучшению основных параметров.

Установлено, что основное влияние на процесс конвективного перемешивания многокомпонентных материалов оказывают геометрические параметры (координаты установки элемента вращения, координаты расположения входных трубопроводов для поступающих компонентов) и технологические параметры (скорость вращения конвективного элемента).

Разработанные программные приложения могут быть применены к исследованию процессов подобного типа при проектировании аппаратов, работающих по принципу перемешивания реагирующих веществ.

1. Павлыш В.Н. Математическое моделирование машин, включающих узлы конвективного типа. / В.Н.Павлыш, Е.В. Перинская // Прогрессивные технологии и системы машиностроения: Междунар сб. науч. тр. Вып.21. – Донецк: ДонГТУ, 2002. – С. 178–184.
2. Павлыш В.Н. Расчет параметров машин, содержащих конвективные узлы, с применением компьютеров / В.Н.Павлыш, Е.В. Перинская // Прогрессивные технологии и системы машиностроения: Междунар сб. науч. тр. Вып. 26. – Донецк: ДонГТУ, 2003. – С.10–14.
3. Павлыш В.Н. Математическое моделирование процесса конвективного перемешивания компонентов ферритового материала для электронной техники / В.Н.Павлыш, Е.В. Перинская // Машиностроение и техносфера XXI века: сб. тр. XXI Междунар. науч.-техн.

- конф. (15-20 сент. 2014г., г. Севастополь.) – Донецк : МСМ, 2014. – С.202–206.
4. *Павлыш В.Н.* Математическое моделирование процессов функционирования специализированных аппаратов конвективного типа / В.Н. Павлыш, Е.В. Перинская // Проблемы искусственного интеллекта. – 2015. – № 0(1). – С. 89–98.
  5. *Павлыш В.Н.* Математическое моделирование процессов обогащения полезных ископаемых: монография / В.Н. Павлыш, Е.И. Назимко, А.Н. Корчевский и др.; под общ.ред. В.Н. Павлыша, Е.И. Назимко; ГВУЗ "ДонНТУ". – Донецк: ВИК, 2014. – 463 с.
  6. *Самарский А.А.* Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана / А.А. Самарский, Б.Д. Моисеенко // Вычислительная математика и математическая физика. – 1965. – Т. 5, №5. – С. 816–827.

**E.V. Perinskaya**

**Mathematical modeling of the convective process in a multicomponent continuous medium.**

The determined mathematical model of poly-component material mixing process in limited deal area of apparatus, contains convective device, is considered. The base of model is ending task for mathematical physics equations. Computer realize of model provides with ending-difference method using.

**Keywords:** *two-phase multicomponent media, mathematical mixing model, single-bladed convective-type apparatuses, finite difference method, parameters of solid phase concentration.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный технический университет”,  
Донецк

Получено 06.12.2021

Donetsk National Technical University, Donetsk

*elenaperinskaya@mail.ru*

## ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

УДК 622.267.5

©2021. В.А. Канин, А.А. Пащенко

### ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ ПОДГОТОВИТЕЛЬНОГО ПЕРИОДА ВЫБРОСОВ УГЛЯ И ГАЗА

В настоящей статье проанализирован большой объем литературных данных и представлены собственные результаты сейсмоакустических исследований продолжительности подготовительного периода выбросов угля и газа, спровоцированных сотрясательным взрыванием. Установлены статистические параметры распределения длительности подготовительного периода выбросов угля и газа.

**Ключевые слова:** выбросы угля и газа, сотрясательное взрывание, провоцирование выбросов угля, длительность подготовительного периода выбросов угля.

**Введение и задачи работы.** При описании выбросов угля и газа, в том числе и провоцируемых сотрясательным взрыванием, уже в первый годы его применения обращалось внимание на то обстоятельство, что одни выбросы происходят непосредственно за взрывом, а другие с некоторым запаздыванием [1]. Однако, эти сведения основывались на данных субъективного характера и не содержат информацию о длительности подготовительного периода выбросов. В свете этих соображений, целью представляемых в настоящей работе исследований является анализ и систематизация данных об эффектах запаздывания выбросов угля и газа, провоцируемых сотрясательным взрыванием, включая определение статистических параметров распределения длительностей подготовительного периода.

**1. Методологические аспекты и анализ результатов профильных исследований.** Экспериментальные исследования выбросов с использованием специальных датчиков и осциллографической записи их показаний были проведены МакНИИ [2, 3] в откаточном штреке пласта  $k_3$  Дерезовка на шахте «Красный Профинтерн» и в забое вспомогательного уклона пласта  $g_2$  Наталия на шахте «Коммунист». Исследования проводились при помощи сейсмографов СЭД-IV, прикреплённых к деревянным экранам, которые устанавливались в штреке пласта  $k_3$  на расстоянии 5 и 10 м от забоя и в уклоне пласта  $g_2$  на расстоянии 21 м от забоя. На пленке осциллографа одновременно фиксировались начало взрывания и моменты прихода к экранам воздушных толчков и

угля при взрывах и провоцируемых ими выбросах угля и газа. Сопоставление этих данных позволило авторам определить скорость движения газугольной смеси и продолжительность подготовительного периода выбросов. Проанализировав осциллограммы одиннадцати выбросов угля и газа на шахте «Красный Профинтерн» и одного выброса на шахте «Коммунист» [2, 3], авторы пришли к выводу, что в пяти случаях длительность пауз между взрыванием шпуровых зарядов и началом развязывания выбросов изменялась от 7 с до 45,7 с, а в остальных – выбросы происходили непосредственно за взрывом, без каких-либо пауз.

Не отрицая возможности мгновенного развязывания выбросов при сотрясательном взрывании, следует отметить, что «мгновенность» является достаточно условным понятием и определяется точностью хронологических измерений. Исходя из методики выполнения исследований [2, 4], основным критерием, по которому выбросы относились к категории происходящих непосредственно за взрыванием, служило отсутствие на осциллограммах пауз между сигналами, поступающими с экрана при попадании на него отбитого взрывом угля, и возмущениями, вызванными выбросом угля и газа. Если принять во внимание, что скорость движения взорванной горной массы составляет 20...60 м/с [4, 5], продолжительность регистрации сейсмографом упругих колебаний, вызванных взрывом – около 0,8 с [2, 3], а скорость распространения воздушной ударной волны при выбросах не менее 300 м/с, то осциллограммы будут непрерывными для всех выбросов, происходящих в интервале времени от 0 до 0,9...1,0 с (при установке экрана в пяти метрах от забоя) и от 0 до 1,0...1,3 с (при установке экрана в десяти метрах от забоя). Этот недостаток применительно к анализируемым работам [2, 3] может быть устранен за счет имеющейся информации о смещениях угольного массива и изменении давления газа вблизи забоя выработки. Совершенно очевидно, что выброс не может произойти раньше, чем в призабойной зоне пласта будет зарегистрировано смещение угольного массива или изменение давления газа. Поэтому длительность подготовительного периода выбросов, которые авторами относились к «мгновенным», может быть уточнена исходя из показаний соответствующих датчиков, расположенных в непосредственной близости от забоя.

Полученные при анализе результатов исследования МакНИИ [2, 3] значения длительности подготовительного периода выбросов с учетом указанных уточнений представлены в таблице 1. В эту таблицу вошли также данные, опубликованные В.И. Зениным по результатам аналогичных исследований на пласте Дерезовка шахты «Красный Профинтерн» [6] и результаты более поздних исследований МакНИИ [7], выполненных и откаточном штреке пласта  $h_7$  Смоляниновский на шахте «Кировская». В последней работе длительность подготовительного периода выбросов определялась по осциллограммам сигналов, которые поступали с сейсмографов СЗД-3, установленных в угольных шпурах, пробуренных в борт выработки на расстоянии 2-3 м от забоя.

Большой объем информации о длительности задержек выбросов при сотря-



Продолжительность подготовительного периода выбросов угля и газа

Таблица 1. Длительность подготовительных периодов выбросов угля и газа по результатам исследований МакНИИ [1-3, 6]

Место регистрации выброса угля и газа	Дата регистрации выброса	Интенсивность выброса	Длительность подготовительного периода выброса, с
1. Шахта «Красный Профинтерн», откаточный штрек, пласт $k_3$ ( $m = 1,5$ м, $\alpha = 63^\circ$ )	29.06.57	—	1.0
2. Там же	26.09.57	50	0.20*
3. -“-	10.10.57	37	10.00*
4. -“-	23.10.57	22	0-1,30
5. -“-	05.11.57	35	23.30*
6. -“-	23.11.57	28	1.00
7. -“-	26.11.57	27	0-0,90
8. -“-	24.01.58	-	0.80
9. -“-	06.02.58	-	0.40
10. -“-	26.02.58	-	2.00
11. -“-	04.06.61	360	45.70
12. -“-	05.12.61	85	0.10**
13. -“-	16.02.62	82	0.70
14. -“-	16.03.62	37	0.16*
15. -“-	15.04.62	1000	8.82
16. Шахта «Коммунист» вспомогательный уклон, пласт $g_2$ ( $m = 1,2$ м, $\alpha = 5^\circ$ )	09.08.60	500	7.00
17. Шахта «Кировская» откаточный штрек, пласт $h_7$ ( $m = 1,2$ м, $\alpha = 10^\circ$ )	01.04.71	52	1.93
18. Там же	07.05.71	35	2,48
* – длительность подготовительного периода выброса уточнялась по показаниям датчиков смещения;			
** – то же по показаниям датчиков давления газа			

сательном взрывании представлен в работе А. Рейнара [8], содержащей результаты сейсмических наблюдений на шахте «Рикар» (Франция), разрабатывающей пологие антрацитовые пласты (1-й и 3-й) мощностью 4 м. При проведении этих исследований регистрация взрываний осуществлялась сейсмометрами, установленными в почве 1-го пласта, залегающего на 30-40 м выше 3-го. Всего в период исследований было зарегистрировано 3552 взрывания, в том числе 48 взрываний, сопровождавшихся выбросами угля и газа, для 42 из них были получены сейсмограммы. Проанализировав эти сейсмограммы, А. Рейнар классифицировал выбросы с разграничением на мгновенные, следующие сразу за взрыванием шпуров; квазимгновенные, следующие через короткие промежутки времени (до 5 с), и замедленные, происходящие через 6-20 с после взрывания.

О количественном соотношении различных типов выбросов можно судить по данным в таблице 2, которые были получены по сейсмограммам, представлен-

ным на рисунках 5 и 6 в указанной выше работе [8].

Таблица 2.  
Характеристика выбросов угля и газа, зарегистрированных на шахте «Рикар»

№	Порядковый номер выброса	Интенсивность выброса, т	Длительность подготовительного периода выброса, с
Выбросы на 1-м пласте: 6, 5			
1	171	247	6,5
2	174	59	1,1
3	175	418	1,9
4	177	78	4,8
5	179	147	6,0
6	183	60	22,0
7	186	44	2,1
6	187	151	20,0
9	193	25	20,0
10	195	126	12,0
11	197	54	2,0
12	202	92	2,4
13	204	71	6,5
14	211	143	0,9
15	215	192	1,6
16	218	192	1,3
17	220	-	12,0
В среднем		131	7,2
18	173	180	1,1
19	176	169	0,0
20	178	33	38,0
21	180	126	0,0
22	184	151	0,0
23	188	67	0,0
24	183	504	5,0
25	194	98	40,0
26	196	73	0,0
27	198	85	0,0
28	193	156	15,0
29	201	143	0,0
30	203	140	0,0
31	205	110	0,0
32	206	43	2,0
33	207	520	0,0
34	208	160	6,0
35	203	85	6,5
36	210	50	1,2
37	212	103	1,7
38	213	75	0,0
39	214	50	1,2
40	216	45	2,6
41	217	106	5,0
42	213	-	3,0
В среднем		137	5,1

При анализе представленных в таблице данных обращает внимание тот факт, что на 1-м пласте полностью отсутствуют выбросы, происходящие сразу за взрыванием шпуров, а квазимгновенные и замедленные выбросы составляют соответственно 53 % и 47 %. В то же время из 25 изученных выбросов, зарегистрированных на 3-м пласте, к типу мгновенных относятся 11 выбросов (44 %), к квазимгновенным – 9 (36 %) и к замедленным 5 (20 %). В связи с этим и средняя длительность подготовительных периодов выбросов, произошедших на 3-м пласте, в 1,4 раза меньше, чем на 1-м. Поскольку на 1-м пласте выбросы при сотрясательном взрывании, по данным А. Рейнара [8], происходила в 0,9 % случаев, а на 3-м – в 2,2 % не исключена возможность, что различия в хронологии развязывания выбросов на этих пластах обусловлены различной степенью их выбросоопасности.

В заключение анализа результатов исследований А. Рейнара отметим, что полученные им нулевые значения длительности подготовительного периода выбросов, также следует понимать условно. В силу инерционности сейсмографов длительность фиксируемых ими упругих колебаний массива при взрыве составляет 0,3-0,5 с (см. рис. 4-6 в [8]). Если выбросы, спровоцированные сотрясательным взрыванием, будут происходить в указанном интервале времени, то колебания, вызванные взрывом и выбросом, будут сливаться на сейсмограмме, в один колебательный процесс.

**2. Характеристика результатов экспериментального анализа.** Учитывая возможную зависимость длительности подготовительного периода выбросов от горно-геологических условий, нами совместно с лабораторией сейсмоакустического прогноза Горловского отделения ДонУГИ были проведены исследования сейсмоакустических сигналов, сопровождающих взрывную отбойку угля и провоцируемые ею выбросы угля и газа на тонких пологих пластах. Исходным материалом для исследования служили фонограммы этих сигналов, записанные на магнитную ленту с помощью аппаратуры ЗУА-4 при выполнении сейсмоакустического прогноза выбросоопасности угольных пластов на шахте «Перевальская» и XVII Партсъезда, а также фонограммы взрываний в подготовительных выработках пласта  $h_8$  Прасковиевский на шахте им. 60-летия Советской Украины. При обработке этого материала использовался комплект измерительной аппаратуры, основной частью которого является быстродействующий самопишущий интегрирующий вольтметр, позволяющий получать графическое изображение мгновенных эффективных значений процесса при различной скорости протяжки ленты. В результате были получены сейсмограммы взрываний, сопровождающихся выбросами угля и газа или внезапными выдавливаниями угля с повышенным газовыделением. Часть этих сейсмограмм в виде фрагментов, включающих импульсы взрыва и начальной стадии развития выброса, показана на рисунке 1.

Как видно из приведенного рисунка сейсмограммы представляют собой графики, у которых на оси ординат отложены величины амплитуд сейсмоакустических импульсов, а на оси абсцисс – текущее время. Поскольку при построе-

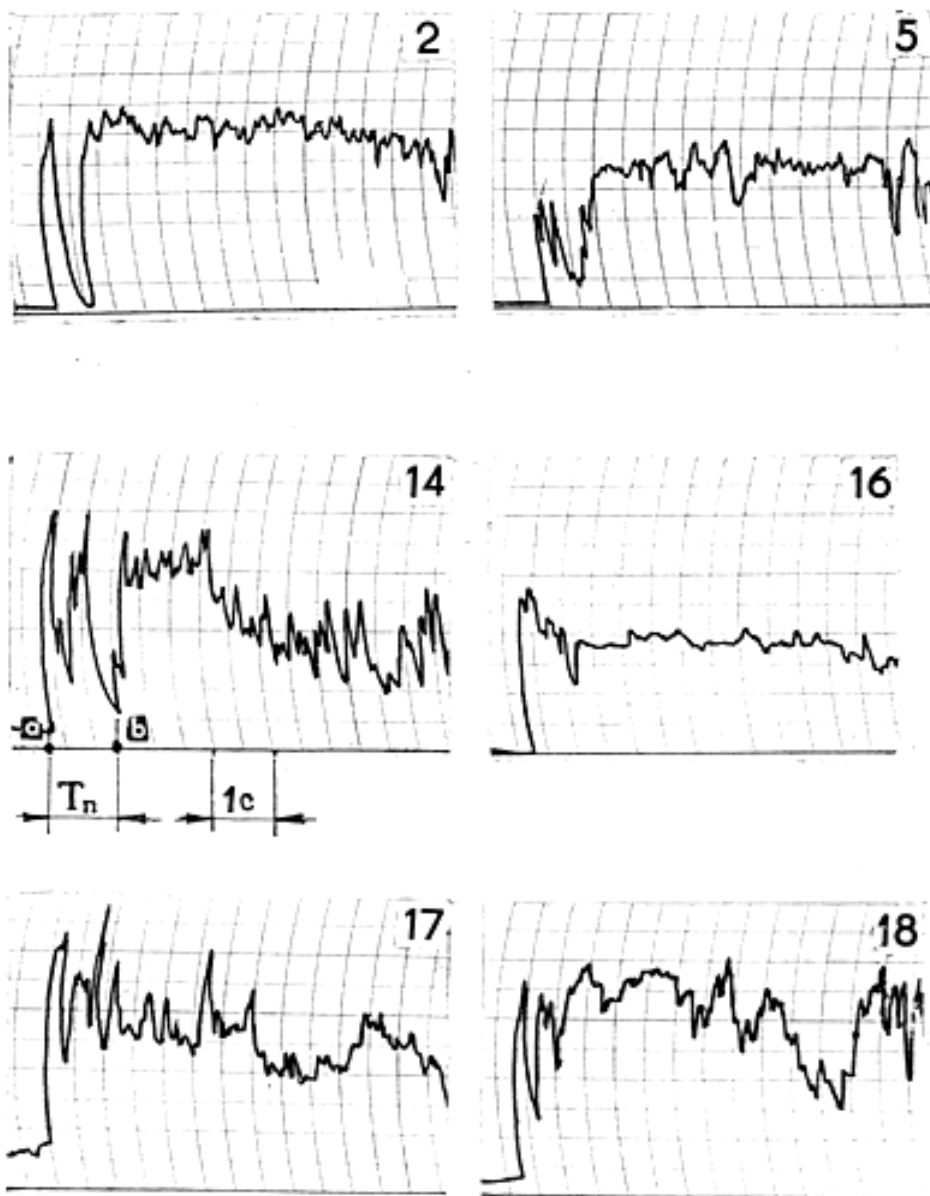


Рис. 1. Фрагменты сейсмограмм процессов, протекающих в массиве при взрывах, сопровождающихся выбросами угля и газа (номера сейсмограмм соответствуют позициям табл. 3.)

нии сейсмограмм скорость протяжки ленты на самописце составляла 10 мм/с, отрезок на оси абсцисс длиной 1 мм соответствует периоду времени в 0,1 с. Длительность подготовительного периода выброса ( $T_n$ ) определялась как длина отрезка, соединяющего точки начала взрывного импульса ( $a$ ) и начала разби-

Продолжительность подготовительного периода выбросов угля и газа

Таблица 3. Характеристика исследованных выбросов угля и газа

Место регистрации выброса угля и газа	Дата регистрации выброса	Интенсивность выброса, т	Длительность подготовительного периода выброса, с
1. Шахта «Перевальская», ПО «Ворошиловградуголь», 2 зап. лава гор. 340 м, пласт $k_3^B$ , ( $m = 0,8$ м, $\alpha = 10^\circ$ )	13.07.78	27	0,17
2. Шахта «Перевальская», 5 зап. лава гор. 340 м, пласт $k_3^B$ , в зоне геол. наруш. ( $m = 0,4 - 0,6$ м, $\alpha = 12^\circ$ )	07.03.82	—	0,70
3. Там же	09.03.82	-	0,55
4. -«-	14.03.82	-	0,70
5. -«-	17.03.82	-	0,55
6. -«-	22.03.82	-	1,10
7. -«-	27.03.82	-	0,75
8. -«-	30.03.82	-	0,30
9. -«-	01.04.82	30	0,60
10. -«-	07.04.82	-	0,80
11. -«-	13.04.82	25	0,40
12. Шахта XVII Партсъезда ПО «Шахтерскантрацит», 14 вост. лава гор. 470 м, пласт $k_2$ ( $m = 0,9$ м, $\alpha = 17^\circ$ )		20	0,92
13. Шахта им. 60-летия Советской Украины ПО «Донецкуголь», вентиляционный ходок зап. укл. гор. 700 м, пласт $h_8$ , ( $m = 0,68 - 0,78$ м, $\alpha = 16 - 17^\circ$ )	10.10.79	—	1,20
14. Там же	11.10.79	-	1,20
15. -«-	12.10.79	-	1,40
16. -«-	17.10.79	20	0,90
17. Шахта им. 60-летия Советской Украины, грузолодской ходок гор. 700 м, пласт $h_8$ , ( $m = 0,7$ м, $\alpha = 16^\circ$ )	01.09.82	300	0,60
18. Там же	16.09.82	210	0,70
19. -«-	20.05.82	-	0,85
В среднем			0,76

ения угля при выбросе (b). Точка (a) взята в качестве исходной на основании тех соображений, что при взрывной отбойке угля в очистных забоях инициирование выброса равновероятно при взрывании любой серии зарядов, а в забоях

подготовительных выработок более вероятно, что выброс будет спровоцирован взрыванием первых серий зарядов, находящихся в угольном пласте. Начало разрушения угля при выбросе (точка *b*) соответствует началу процесса массового трещинообразования в угольном массиве. Результаты определения длительности подготовительного периода исследованных выбросов представлены в таблице 3.

Как видно из представленных в таблице данных, значения длительности подготовительного периода выбросов изменяются в относительно узком диапазоне ( $0,17 \text{ с} \leq T_n \leq 1,40 \text{ с}$ ) по сравнению с результатами, полученными МакНИИ ( $0 \text{ с} \leq T_n \leq 45,7 \text{ с}$ ) и А. Рейнаром ( $0 \text{ с} \leq T_n \leq 40 \text{ с}$ ). Такое различие, по нашему мнению, обусловлено тем, что на шахтах «Красный Профинтерн» и «Рикар» часть выбросов была спровоцирована не взрывным импульсом, а происходившими через некоторое время после взрывания обрушениями угля из незакрепленной части массива. Обрушениям угля на этих шахтах способствовала большая мощность пластов и преобладание в их строении малопрочного тектонически препарированного угля, а на шахте «Красный Профинтерн» – также и большой угол падения пласта.

При детальном рассмотрении всей совокупности значений  $T_n$  установлена следующая особенность их распределения, В диапазоне 0-3 с при величине интервала 0,5 с они образуют непрерывный вариационный ряд, в пределах которого находятся все значения  $T_n$ , полученные на тонких пологих пластах и 65 % значений, полученных в других условиях. В диапазоне 5-10 с наблюдается следующий ряд значений  $T_n$  в объеме 17 % с величиной интервала 1 с и далее, совершенно обособленно располагаются значения  $T_n$  длительностью более 20 с. В эти последние две группы входят только значения  $T_n$ , полученные в условиях, где инициированию выбросов угля могли способствовать обрушения или высыпания. Учитывая это обстоятельство, к дальнейшему анализу были приняты только те случаи, в которых  $T_n \leq 3 \text{ с}$ . При величине интервала  $h = 0,5 \text{ с}$  значения  $0 \leq T_n \leq 3$  можно представить в виде непрерывного вариационного ряда, приведенного в таблице 4.

Таблица 4. Сгруппированные значения длительности подготовительного периода выбросов, спровоцированных сотрясательным взрыванием

Интервалы длительности подготовительного периода выбросов, с, $X_{\alpha} - X_{\beta}$	Значения середины интервала, $x_i$	Частота, $m_i$	Частость, $w_i$
0-0,5	0,25	19	0,328
0,5-1,0	0,75	18	0,310
1,0-1,5	1,25	9	0,155
1,5-2,0	1,75	7	0,121
2,0-2,5	2,25	3	0,052
2,5-3,0	2,75	2	0,034
$\Sigma$	-	58	1,000

**3. Определение статистических параметров распределений длительности подготовительного периода.** На рисунке 2 показана гистограмма (а) распределения значений  $T_n$ , построенная по данным табл. 4, и гистограмма (б) распределения их логарифмов. Сходство распределения значений  $\ln T_n$  с нормальным распределением позволяет предположить, что значения длительности подготовительного периода выбросов распределяются в соответствии с логнормальным законом.

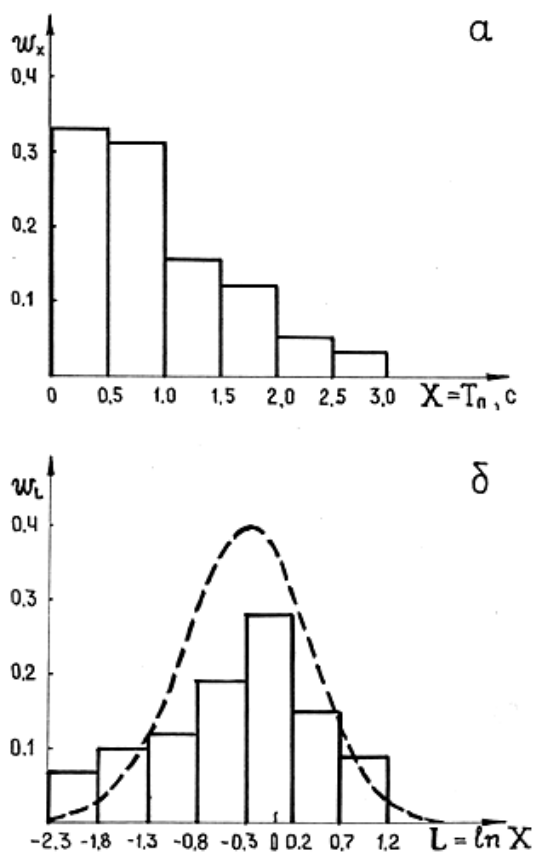


Рис. 2. Гистограммы распределения значений длительности подготовительного периода выбросов угля и газа в нормальных (а) и логарифмических (б) координатах (пунктиром показана теоретическая кривая плотности вероятностей с параметрами  $\mu_L = -0,285$  и  $\delta_L^2 = 0,426$ )

При логнормальном распределении случайной величины  $X = T_n$  математическое ожидание и дисперсия случайной величины  $L = \ln X$  определяются соотношениями [9].

$$\mu_L = \ln \mu_X - \frac{1}{2} \ln[(\delta_X^2 / \mu_X^2) + 1], \quad (1)$$

$$\delta_L^2 = \ln[(\delta_X^2/\mu_X^2) + 1], \quad (2)$$

где  $\mu_X$  и  $\delta_X^2$  – соответственно математическое ожидание и дисперсия случайной величины  $X$ . Для интервального вариационного ряда

$$\mu_X = \sum_{i=1}^n x_i w_i, \quad (3)$$

$$\delta_X^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2 w_i. \quad (4)$$

Подставив в эти формулы данные из таблицы 4, получим  $\mu_x=0,931$  с и  $\delta_x^2 = 0,461$ . Отсюда  $\mu_L = -0,285$  и  $\delta_L^2 = 0,426$ .

Соответствие эмпирического распределения значений  $T_n$  логнормальному распределению оценим по критерию согласия К. Пирсона:

$$x^2 = \sum_{i=1}^r (m_i - Np_i)^2 / Np_i, \quad (5)$$

где  $r$  – число интервалов в вариационном ряде;  $p_i$  – теоретическая частость;  $N$  – объем выборки.

Согласно этому критерию эмпирическое распределение соответствует теоретическому при выполнении условия

$$x^2 \leq x_{k,a}^2, \quad (6)$$

где  $x_{k,a}^2$  – табличное значение распределения с  $K=(r-C-1)$  степенями свободы при уровне значимости  $\alpha$ ;  $C$  – число параметров распределения, рассчитанных по выборке.

Значения теоретических частостей  $p_i$  будем определять как вероятность попадания случайной величины  $L$  в интервал  $[L_a, L_b]$ . Для этого перейдем к нормированной случайной величине  $T = (L - \mu_L)/\delta_L$  и воспользуемся соотношением [9]

$$p = P(t_1 < T < t_2) = 0,5\Phi(t_2) - 0,5\Phi(t_1), \quad (7)$$

где  $\Phi(t)$  – функция Лапласа;  $t$  – нормированное отклонение;  $t_1=(L_a - \mu_L)/\delta_L$ ,  $t_2=(L_b - \mu_L)/\delta_L$ . После определения  $p_i$  для каждого интервала каждого распределения и подстановки этих значений в (5) получим  $x^2=5,085$ .

При уровне значимости  $\alpha=0,05$  и числе степеней свободы  $K=5-2-1=2$  табличное значение  $x_{2,0,05}^2=6,0$ . Так как  $x^2 < 6,0$ , условие (6) выполняется. Следовательно, распределение значений длительности подготовительного периода выбросов, спровоцированных сотрясательным взрыванием, соответствует логнормальному распределению с параметрами  $\mu_L=-0,285$  и  $\delta_L^2=0,426$ .

Зная характер распределения  $T_n$ , можно определить вероятность наступления события  $T_n > T_{kp}$ , где  $T_{kp}$  – некоторое критическое (граничное) значение



длительности подготовительного периода выбросов. Решение такой задачи необходимо для оценки возможности локализации выбросов при известном времени формирования породной перемычки.

В общем случае вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение, меньшее некоторого фиксированного действительного числа  $x$ , определяется интегральной функцией  $F(x)$ , то есть

$$P(X < x) = F(x). \quad (8)$$

В данном случае  $X = T_n$ , а  $x = T_{kp}$ . Учитывая, что распределение случайной величины  $T_n$  соответствует логнормальному закону, введем переменную  $L = \ln T_n$ , имеющую нормальное распределение, и обозначим  $l = \ln T_{kp}$ . Перейдем к нормированной случайной величине  $T = (L - \mu_L)/\delta_L$ . Неравенства  $T_n < T_{kp}$ ;  $L < l$  и  $(L - \mu_L)/\delta_L < (l - \mu_L)/\delta_L$  равносильны, поэтому их вероятности равны между собой

$$P(T_n < T_{kp}) = P(L < l) = P(T < t), \quad (9)$$

где

$$t = l - \mu_L/\delta_L. \quad (10)$$

На основании этого, по аналогии с (8), можно записать

$$P(T_n < T_{kp}) = F(t), \quad (11)$$

а для вероятности наступления противоположного события

$$P(T_n > T_{kp}) = 1 - P(T_n < T_{kp}) = 1 - F(t). \quad (12)$$

Так как при нормальном распределении нормированной случайной величины интегральная функция распределения связана с функцией Лапласа соотношением

$$F(t) = 0,5 + 0,5\Phi(t), \quad (13)$$

то

$$P(T_n > T_{kp}) = 0,5 - 0,5\Phi(t). \quad (14)$$

В случае предотвращения выбросов угля и газа на тонких пологих пластах насыпными породными перемычками выражение (14) позволяет при известных значениях  $\mu_L$ ,  $\delta_L^2$  и времени, необходимого для формирования породной перемычки, определить вероятность ее формирования до начала развязывания выброса угля и газа.

### Выводы.

1. В результате экспериментальных исследований получены сейсмограммы выбросов угля и газа, спровоцированных сотрясательным взрыванием, на основании которых определены значения длительности подготовительного периода выбросов в условиях тонких пологих пластов.

2. Установлены параметры логонормального распределения длительности подготовительного периода выбросов угля и газа ( $\mu_L = -0,285$  и  $\delta_L^2 = 0,426$ ), которые позволяют при известной продолжительности формирования насышной породной перемычки оценить вероятность ее формирования до начала развязывания выброса.

1. Ягунов А.В. О сотрясательном взрывании и запоздалых выбросах / А.В. Ягунов // Безопасность труда в горной промышленности. – 1937. – № 8. – С. 15–18.
2. Бобров И.В. О сотрясательном взрывании и запоздалых выбросах / И.В. Бобров // Безопасность труда в горной промышленности. – 1937. – № 8. – С. 15–18.
3. Кричевский Р.М. Безопасные способы работ на пластах, подверженным внезапным выбросам угля и газа / Р.М. Кричевский. – М.: Госгортехиздат. – 1960. – 58 с.
4. Бобров И.В. Способы безопасного проведения подготовительных выработок на шахтах, опасных по выбросам / И.В. Бобров. – М.: Углетехиздат. – 1961. – 264 с.
5. Друкованный М.Ф. Исследования процессов выбросов породы при буровзрывном способе проведения выработок / М.Ф. Друкованный, В.Д. Борисенко // В кн.: Вопросы теории выбросов угля, породы и газа. – К.: Наукова думка. – 1973. – С. 359–365.
6. Зенин В.И. О характере деформации угольного массива в зонах, опасных по выбросам / В.И. Зенин // Сборник научных трудов № 1 МакНИИ. – 1950. – С. 15–18.
7. Ольховиченко А.Е. Установление продолжительности подготовительной стадии выброса угля и газа / А.Е. Ольховиченко, Ф.И. Верховский // В кн.: Борьба с пылью, газом и выбросами в угольных шахтах. – Макеевка-Донбасс. – 1972. – С. 159–167.
8. Reinhard A. Etude par les procedes geophysiques, des ebranlements de terrains a l'occasion des tirs et des degagements instantanes / A. Reinhard // Revue de L'Industrie minerale. – 1965. – № 618. – P. 226–239.
9. Математическая статистика / Под ред. А.М. Длина. – М.: Высшая школа. – 1975. – 398 с.

**V.A. Kanin, A.A. Pashchenko**

#### **Duration of the preparatory period of coal and gas emissions.**

This article analyzes a large volume of literature data and presents its own results of seismoacoustic studies of the duration of the preparatory period of coal and gas emissions triggered by concussive explosion. Statistical parameters of distribution of duration of the preparatory period of coal and gas emissions are determined.

**Keywords:** *coal and gas emissions, concussive blasting, triggering of coal emissions, duration of the preparatory period of coal emissions.*

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ), Донецк

Получено 29.11.2021

Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying (RANIMI), Donetsk

*ranimi@ranimi.org*