

ISSN 0136-4545

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

---

---

**Журнал  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ  
МЕХАНИКИ**

---

---

**№ 1 (56)**

**2016**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:** В.И. Сторожев

**ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:** С.А. Калоеров

**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:** Пачева М.Н.

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

*Болнокин В.Е.*

*Ватульян А.О.*

*Вовк Л.П.*

*Гольцев А.С.*

*Горр Г.В.*

*Губанов В.В.*

*Ковалев А.М.*

*Коносевиц Б.И.*

*Левин В.М.*

*Недопекин Ф.В.*

*Судаков С.Н.*

*Семко А.Н.*

*Шалдырван В.А.*

Адрес редакции:

83001 Донецк, ул. Университетская, 24  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
Тел. 302 92 71  
E-mail: jtam\_donnu@mail.ru

Технический редактор: Пачева М.Н.

Утверждено к печати ученым советом  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
Свидетельство о регистрации: № 360 от 18.01.2016г.

№ 1 (56) / 2016

*Основан в 1970г.*

# ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

### **Механика деформируемого твердого тела**

*Вуколов Д.С., Пачева М.Н., Сторожев В.И.* Методика исследования дифракции сдвиговых волн на туннельной цилиндрической полости в функционально-градиентном изотропном упругом слое ..... 3

*Моисеенко И.А., Моисеенко В.А.* Нормальные волны в функционально-градиентных ортотропных цилиндрах..... 10

*Вуколов Д.С., Сторожев В.И.* Рассеяние нормальных сдвиговых волн на внутреннем ортотропном туннельном цилиндрическом включении эллиптического сечения в свободном ортотропном слое..... 31

### **Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ**

*Сторожев С.В.* Моделирование факторов неопределенности в процессах взаимодействия электроупругих волн с плоской границей контакта пьезокерамических тел..... 46



## МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3:534.1

©2016. Д.С. Вуколов, М.Н. Пачева, В.И. Сторожев

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФРАКЦИИ  
СДВИГОВЫХ ВОЛН НА ТУННЕЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ  
ПОЛОСТИ В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОМ  
ИЗОТРОПНОМ УПРУГОМ СЛОЕ

На основе приема введения локальных координатных систем зеркальных отражений построено численно-аналитическое решение краевой задачи о дифракционном рассеянии бегущих нормальных волн продольного сдвига в упругом слое при падении на параллельную граничную внутреннюю цилиндрическую туннельную полость кругового сечения со свободной либо закрепленной граничной поверхностью. Слой имеет закрепленные плоские грани и изготовлен из изотропного функционально-градиентного материала с однотипной экспоненциальной неоднородностью по всем физико-механическим характеристикам вдоль толщинной координаты слоя. Решение задачи рассматриваемого типа сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов представлений волновых полей в области сечения слоя форме суперпозиции рядов по разнотипным базисным частным решениям волновых уравнений.

**Ключевые слова:** *изотропный упругий слой, закрепленные плоские грани, функционально-градиентные материалы, экспоненциальная неоднородность, внутренняя цилиндрическая полость, нормальные волны сдвига, дифракционное рассеяние, численно-аналитическое решение, принцип зеркальных изображений, метод суперпозиции, ряды по базисным решениям волновых уравнений.*

**1. Актуальность, цели и постановка задачи исследования.** Результаты современных теоретических исследований по достаточно широкому ряду аспектов проблемы теоретического анализа двумерных дифракционных полей, возникающих при рассеянии стационарных волн механических деформаций на неоднородностях в виде полостей либо включений в упругих средах, охарактеризованы в монографиях [1 – 3], а также в обзорных разделах публикаций [4 – 6]. При этом, к числу представляющих интерес в фундаментальном и прикладном отношениях актуальных современных вариантов данной проблемы относятся задачи описания двумерных дифракционных полей в упругом слое, формирующихся при рассеянии нормальных волн продольного сдвига на системах внутренних туннельных цилиндрических полостей с параллельными плоскими гранями слоя образующими. В частности, в [1, 2] изложен численно-аналитический подход к решению задач дифракции волн сдвига на внутренних туннельных цилиндрических полостях в однородном изотропном упругом слое, базирующийся

на концепции зеркального отражения (методе изображений) и на использовании метода суперпозиции рядов по базисным решениям волнового уравнения в цилиндрических функциях. В работе [7] описан метод получения дисперсионных соотношений для волн сдвига, распространяющихся вдоль однородного изотропного слоя с периодическим рядом внутренних туннельных цилиндрических полостей, перпендикулярных направлению распространения. В публикациях [8 – 10] представлены методы решения задач о дифракционных полях электроупругих и магнитоупругих сдвиговых волн в функционально-градиентных телах с внутренней туннельной цилиндрической полостью. Прикладному использованию результатов исследования дифракции сдвиговых упругих волн на неоднородностях в функционально-градиентных материалах в технологиях ультразвуковой диагностики посвящены работы [11, 12]. В работе [6] для исследования эффектов рассеяния упругих продольно-сдвиговых волн на круговом отверстии в изотропной полосе со свободными от напряжений границами применялся метод интегральных преобразований совместно с приемом интегрирования волновых уравнений в цилиндрических функциях в пространстве изображений. Однако, актуальный класс задач теоретического анализа дифракции сдвиговых волн на туннельных цилиндрических полостях в функционально-градиентном изотропном упругом слое остается неисследованным.

Целью исследования, представляемого в данной работе, является построение теоретической численно-аналитической методики решения задач о дифракционном рассеянии сдвиговых упругих волн, нормально падающих на параллельную граням внутреннюю туннельную цилиндрическую полость с закрепленной или свободной поверхностью в фиксированном по граням слое, изготовленном из функционально-градиентного изотропного материала с однотипной экспоненциальной неоднородностью вдоль толщинной координаты по всем физико-механическим характеристикам. В основу разрабатываемой методики положена концепция представления дифракционных волновых полей разложениями по базисным системам решений волнового уравнения в счетном множестве вспомогательных локальных координатных систем с полюсами, зеркально расположенными относительно границ слоя.

Рассматривается изотропный функционально-градиентный упругий слой толщины  $2h$  (рис. 1), занимающий в прямоугольных декартовых координатах  $Ox_1x_2x_3$  область  $V_L = \{-\infty < x_1, x_3 < \infty, |x_2| \leq h\}$ . Грани слоя  $x_2 = \pm h$  жестко фиксированы, а внутри слоя имеется туннельная круговая цилиндрическая полость с параллельной граням слоя образующей и областью сечения  $V_I = \{x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, -\infty < x_3 < \infty\}$ . Контур полости, по предположению, свободен от напряжений либо жестко закреплен.

Неоднородный материал слоя в рамках рассматриваемой модели характеризуется параметром плотности  $\tilde{\rho}(x_2)$  и модулем сдвига  $\tilde{\mu}(x_2)$ , имеющими представления вида

$$\tilde{\rho}(x_2) = \rho \exp(\lambda x_2), \quad \tilde{\mu}(x_2) = \mu \exp(\lambda x_2). \quad (1)$$

Полагается, что в слое вдоль положительного координатного направления

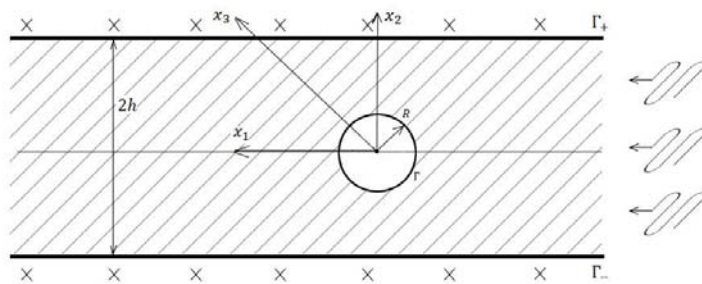


Рис. 1. Сечение слоя с туннельной цилиндрической полостью.

$x_1$  распространяется нормальная поляризованная вдоль  $Ox_3$  волна продольного сдвига с круговой частотой  $\omega$  из произвольной моды соответствующего дисперсионного спектра, характеризующаяся комплексной функцией упругих волновых перемещений  $U^{(\text{пад})}(x_1, x_2, t)$ .

Искомые комплексные амплитудные функции для динамических перемещений  $U^{(\text{отр})}(x_1, x_2, t)$  в рассеиваемых полостью волнах подлежат определению из краевой задачи для уравнения стационарных сдвиговых упругих колебаний материала слоя, которое после отнесения всех характеристик с линейной размерностью к нормирующему параметру  $h$  принимает вид

$$\begin{aligned} \partial_1^2 U^{(1)} + \lambda \partial_2 U^{(1)} + \partial_2^2 U^{(1)} + \Omega_*^2 U^{(1)} &= 0, \\ \Omega_* &= (\rho \omega^2 h^2 / \mu)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$U^{(1)} = U^{(\text{пад})} + U^{(\text{отр})}. \quad (3)$$

В соответствии с оговоренным выше, краевые условия рассматриваемой задачи имеют альтернативные варианты, соответствующие закрепленной цилиндрической граничной поверхности  $\Gamma$  и закрепленным граням слоя

$$(U)_{\Gamma} = 0, \quad (U)_{x_2=\pm 1} = 0, \quad (4)$$

либо свободной от механических напряжений цилиндрической граничной поверхности  $\Gamma$  и закрепленным граням слоя

$$(\sigma_{r3})_{\Gamma} = 0, \quad (U)_{x_2=\pm 1} = 0 \quad (5)$$

где  $(\sigma_{r3})_{\Gamma}$  – отнесенные к нормирующему параметру  $\mu$  амплитудные характеристики динамических касательных напряжений на поверхности  $\Gamma$ .

## 2. Методика построения численно-аналитического решения задачи.

На исходном этапе для функции волновых упругих перемещений  $U_I$  в падающей

нормальной упругой SH-волне из моды с номером  $n$  из дисперсионного спектра рассматриваемого волновода вводится представление

$$U_I = u_0(\exp(-\alpha_n h) \exp(\alpha_n x_2) - \exp(\alpha_n h) \exp(-\alpha_n x_2)) \exp(-i(\omega t - k_n x_1)), \quad (6)$$

в котором  $k_n$  - волновое число нормальной волны из моды с номером  $n$ ,  $k_n = (\alpha_n^2 + \Omega^2)^{1/2}$  ( $Re k_n \geq 0$ ),  $\alpha_n$  - корни трансцендентного дисперсионного уравнения

$$sh(2\alpha_n h) = 0. \quad (7)$$

номер моды нормальных бегущих симметричных SH-волн в закрепленном на плоских гранях слое. Представление (6) априори удовлетворяет второму из краевых условий на закрепленных плоских гранях слоя в парах (4) и (5).

При подстановке  $U^{(1)} = \exp(-(\lambda/2)x_2)U(x_1, x_2)$  уравнение (2) преобразуется к виду двумерного метагармонического уравнения

$$\begin{aligned} \Delta^2 U + \Omega^2 U &= 0, \\ \Delta^2 &= \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \Omega = (\rho\omega^2 h^2/\mu - \lambda^2/4)^{1/2}, \end{aligned} \quad (8)$$

которое в процессе разработки представляемой методики интегрируется в прямоугольных и полярных координатах.

Для записи поля волн, рассеиваемых полостью и удовлетворяющих краевому условию на закрепленных гранях слоя, согласно концепции метода зеркальных изображений вводится счетное множество вспомогательных локальных прямоугольных и полярных координатных систем с полюсами  $O_k$ , имеющими в  $Ox_1x_2$  координаты  $x_{1,k} = 0$ ,  $x_{2,k} = 2kh$ , ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Соответственно записывается представление

$$\begin{aligned} U_3^{(отр)} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n(\Omega r_0) \cos(n\theta_0) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (-1)^k (H_n(\Omega r_k) \cos(n\theta_k) + H_n(\Omega r_{-k}) \cos(n\theta_{-k})), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $H_n^{(1)}(\Omega r)$  - цилиндрические функции Ханкеля первого рода индекса  $n$ ;  $(r_k, \theta_k)$  - локальные полярные координаты с полюсами  $O_k$ .

После применения теорем сложения цилиндрических функций для точек на контуре полости представление (9) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} U_3^{(отр)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n H_n^{(1)}(\Omega R) + \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega R) \times \right. \\ &\left. \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[ H_{p-n}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k) + H_{n+p}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k) \right] \right] \cos(n\theta), \end{aligned} \quad (10)$$



Методика исследования дифракции сдвиговых волн на туннельной цилиндрической полости

и при использовании обозначения  $S_{p,n} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k H_{p-n}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k)$  контурное представление (10) приобретает окончательную форму записи в полярных координатах, связанных с центром полости

$$U_3^{(\text{отр})} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n H_n^{(1)}(\Omega R) + \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega R) (S_{p,n} + S_{p,-n}) \right] \cos(n\theta). \quad (11)$$

Контурное представление на  $\Gamma$  для комплексной амплитудной составляющей функции перемещений в падающей волне записывается с использованием формулы обобщенного разложения Якоби

$$e^{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2} = \sum_{(p)} Q_p e^{ip\theta}, \quad (12)$$

$$Q_p = J_p \left( -i R (\nu_1^2 + \nu_2^2)^{1/2} \right) \left( \frac{(i\nu_1 + \nu_2)}{(\nu_1^2 + \nu_2^2)^{1/2}} \right)^p,$$

и после ряда преобразований принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{U}_3^{(\text{отр})} &= U_{30} \sum_{p=0}^{\infty} \delta_p^0 J_p \left( R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) i^p \times \\ &\times \left( \left( \frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{p/2} + \left( \frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{p/2} \right) \cos(p\theta), \quad (13) \\ \delta_p^0 &= \begin{cases} 1/2, & p = 0; \\ 1, & p \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

При использовании представлений (11) и (13) для записи функциональных уравнений, следующих краевых условий (4) и (5) на поверхности  $\Gamma$ , и их последующей алгебраизации с применением метода ортогональных рядов для неизвестных коэффициентов в указанных представлениях получены бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. В случае полости с закрепленной границей  $\Gamma$  эта система имеет вид

$$\begin{aligned} &A_n H_n^{(1)}(\Omega R) + \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega R) \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[ H_{p-n}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k) + H_{n+p}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k) \right] = \quad (14) \\ &= U_{30} \delta_n^0 J_n \left( R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) i^n \left( \left( \frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{n/2} + \left( \frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{n/2} \right), \end{aligned}$$

а в случае полости со свободной границей  $\Gamma$  соответственно имеет вид

$$\begin{aligned}
 & A_n \left( \frac{n}{R} H_n^{(1)}(\Omega R) - \Omega H_{n+1}^{(1)}(\Omega R) \right) + \\
 & \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) \left( \frac{n}{R} J_n(\Omega R) - \Omega J_{n+1}(\Omega R) \right) \times \\
 & \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[ H_{p-n}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k) + H_{n+p}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k) \right] = \quad (15) \\
 & = U_{30} \delta_n^0 \left( \frac{n}{R} J_n \left( R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) - \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} J_{n+1} \left( R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) \right) \times \\
 & \times i^n \left( \left( \frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{n/2} + \left( \frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{n/2} \right).
 \end{aligned}$$

После определения искоемых коэффициентов из приведенных алгебраических систем может быть реализована фаза численного анализа основных закономерностей, свойственных полям рассеиваемых полостью волн.

**Выводы.** В итоге представленных в работе теоретических исследований с использованием метода изображений получены численно-аналитические решения двумерных краевых задач о дифракционном рассеянии бегущих нормальных волн продольного сдвига на внутренних туннельных круговых цилиндрических полостях в закрепленном по граям изотропном плоскопараллельном деформируемом слое. Рассмотрены случаи нормального падения симметричных по толщине слоя волн из произвольной моды дисперсионного спектра на полости со свободными либо закрепленными поверхностями и параллельными граням образующими. Решения задач сведены к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов представлений волновых полей рядами по базисным частным решениям соответствующих волновых уравнений в цилиндрических функциях в областях сечения слоя и включения.

1. *Гузь А.Н.* Дифракция упругих волн в многосвязных телах / А.Н. Гузь, В.Т. Головчан. – К.: Наукова думка, 1972. – 254 с.
2. *Гузь А.Н.* Дифракция упругих волн / А.Н. Гузь., В.Д. Кубенко, М.А. Черевко. – К.: Наукова думка, 1978. – 308 с.
3. *Pao Y.-H.* Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations / Y.-H. Pao, C.C. Mow. – New York: Crane Russak, 1973 – 308 p.
4. *Itou S.* Diffraction of a stress wave by a cylindrical cavity in an infinite elastic strip / S. Itou // Lett. Appl. Engng. Sci. – 1984. – Vol. 22, No. 4. – P. 475–490.
5. *Ostrik V.I.* The interaction of a magnetoelastic shear wave with longitudinal cavities in a conducting layer / V.I. Ostrik, L.A. Filshtinskii // Journal of Mathematical Sciences. – 1996. – Vol. 79, Iss. 6. – P. 1450–1454.
6. *Острик В.И.* Динамические задачи магнитоупругости для слоя и полуслоя с туннельными полостями и трещинами продольного сдвига / В.И. Острик, Л.А. Фильштинский // Известия Национальной Академии Наук республики Армения. Механика. – 1991. – Т. 44, № 4. – С. 34–45.
7. *Golovchan V.T.* Shear-wave propagation in an elastic layer perforated by a series of cylindrical cavities / V.T. Golovchan, A.N. Guz // Soviet Applied Mechanics. – 1976. – Vol. 12, Iss. 9. –

- P. 888–892.
8. Fang X.-Q. Dynamic stress from a cylindrical inclusion buried in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves / X.-Q. Fang, J.-X. Liu, X.-H. Wang, et al. // Compos. Sci. Technol. – 2009. – Vol. 69 – P. 1115–1123.
  9. Fang X.-Q. Dynamic stress around two holes in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves / X.-Q. Fang, J.-X. Liu, X.-H. Wang, L.-L. Zhang // Phil. Mag. Lett. – 2010. – Vol. 90. – P. 361–380.
  10. Fang X.-Q. Multiple scattering of electro-elastic waves from a buried cavity in a functionally graded piezoelectric material layer / X.-Q. Fang // Int. J. Solids Struct. – 2008. – Vol. 45. – P. 5716–5729.
  11. Fang X.-Q. Dynamic stress from a subsurface cylindrical inclusion in a functionally graded material layer under anti-plane shear waves / X.-Q. Fang, J.-X. Liu, L.-L. Zhang, Y.-P. Kong // Mater. Struct. – 2011. – Vol. 44. – P. 67–75.
  12. Yang Y.-H. Non-destructive detection of a circular cavity in a finite functionally graded material layer using anti-plane shear waves / Y.-H. Yang, L.-Z. Wu, X.-Q. Fang // J. Nondestructive Eval. – 2010. – Vol. 29. – P. 233–240.

**D.S. Vukolov, M.N. Pacheva, V.I. Storozhev**

**Methodics of investigation of shear waves diffraction on a cylindrical tunnel cavity in a functionally-gradient isotropic elastic layer.**

On the basis of the introduction of local coordinate systems of mirror reflections, a numerical-analytical solution to the boundary value problem of diffraction scattering of normal traveling shear waves on parallel to faces of elastic layer inner cylindrical tunnel cavity of circular cross-section with free or fixed surface is constructed. The layer has fixed flat faces and is made of an isotropic functional-gradient material with the same type of exponential inhomogeneity along the thickness coordinate of the layer for all physical and mechanical characteristics. The solution of the problem of the type under consideration is reduced to an infinite system of linear algebraic equations for the coefficients of the representations of wave fields in the region of the layer section in the form of a superposition of series on basic particular solutions of wave equations.

**Keywords:** *isotropic elastic layer, fixed faces, functional-gradient materials, exponential inhomogeneity, inner cylindrical cavity, normal shear waves, diffraction scattering, numerical-analytical solution, the principle of mirror images, superposition method, series on basic solutions of wave equations.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк  
stvi@i.ua

Получено 16.03.2016

УДК 539.3:534.1

©2016. И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко

## НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ФУНКЦИОНАЛЬНО ГРАДИЕНТНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРАХ

Волновое движение описывается на основе полной системы уравнений линейной динамической теории упругости. Модули упругости и плотность материала цилиндра задаются экспоненциально-степенной функцией от радиальной координаты. Базисные решения системы дифференциальных уравнений модели строятся в матричной форме в виде разложений радиальных составляющих решения в равномерно и абсолютно сходящиеся обобщенные степенные ряды по радиальной координате. Представлены также дисперсионные соотношения, описывающие спектры гармоник нормальных волн для случаев жестко закрепленной и свободной граничной поверхности. Изучены эффекты влияния параметров радиальной неоднородности на топологию дисперсионных спектров, распределение фазовых и групповых скоростей распространяющихся нормальных волн.

*Ключевые слова:* функционально-градиентные материалы, цилиндрически ортотропный волновод, нормальные волны, базисные решения, дисперсионные соотношения, фазовая скорость, групповая скорость.

**Введение.** Упругие тела цилиндрической геометрии представляют собой важнейший по фундаментальной и прикладной значимости класс объектов математического моделирования в волновой механике деформируемых сред. В классическом случае однородного изотропного материала уравнения, определяющие модели указанного класса задач, разрешимы через цилиндрические функции, что становится невозможным при переходе к рассмотрению нового поколения функционально-градиентных материалов. Для построения общих аналитических решений системы дифференциальных уравнений указанных моделей в последнем случае оказался плодотворным подход, основанный на задании специального вида функционального закона радиального изменения физико-механических характеристик материала волновода. Таким способом построены в аналитическом виде базисные решения модели и исследованы эффекты влияния фактора радиальной неоднородности материала на топологию дисперсионных спектров, фазовых и групповых скоростей распространяющихся осесимметричных нормальных волн в трансверсально-изотропных цилиндрах [1,2], а также неосесимметричных нормальных волн в цилиндрически ортотропных цилиндрах [3] с экспоненциальным законом радиальной неоднородности материала волновода. В данном исследовании указанная методика распространена на более общий случай экспоненциально-степенного закона радиальной неоднородности цилиндрически ортотропного материала волновода.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается протяженный цилиндрический волновод радиуса  $R_1$ , имеющий в поперечном сечении форму круга, занимающий в нормированной параметром  $R_* = R_1$  безразмерной цилиндрической

системе координат  $Or\theta z$  область  $V$

$$V = \{r \in [0, 1], \theta \in [-\pi, \pi], z \in (-\infty, \infty)\}$$

с граничной поверхностью  $\Gamma$

$$\Gamma = \{r = 1, \theta \in [-\pi, \pi], z \in (-\infty, \infty)\}.$$

Полагается, что цилиндрически ортотропный материал волновода является функционально-неоднородным в радиальных направлениях по всем своим физико-механическим свойствам, а его плотность  $\rho$  и нормированные модули упругости  $c_{jp}$  соответственно описываются представлениями

$$\rho = \tilde{\rho} \exp(f_{\lambda,q}(r)), \quad c_{jp} = \tilde{c}_{jp} \exp(f_{\lambda,q}(r)), \quad f_{\lambda,q}(r) = \lambda r^q. \quad (1)$$

Здесь  $\lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) и  $q$  ( $q \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ) параметры, характеризующие, соответственно, относительный максимальный уровень и форму локализации в теле волновода радиальной неоднородности материала;  $\tilde{\rho}$  и  $\tilde{c}_{jp}$ , соответственно, плотность и нормированные модули упругости однородного материала.

Пространственная линейная математическая модель динамического напряженно-деформированного состояния упругих тел с усложненными физико-механическими свойствами в системах нормированных безразмерных цилиндрических координат  $Or\theta z$  включает систему дифференциальных уравнений движения

$$\begin{aligned} \partial_r \sigma_{rr} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{r\theta} + \partial_z \sigma_{rz} + r^{-1} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) - (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_r &= 0, \\ \partial_r \sigma_{r\theta} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + \partial_z \sigma_{\theta z} + 2r^{-1} \sigma_{r\theta} - (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_\theta &= 0, \\ \partial_r \sigma_{rz} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta z} + \partial_z \sigma_{zz} + r^{-1} \sigma_{rz} - (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_z &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

определяющие соотношения обобщенного линейного закона Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{11} \varepsilon_{rr} + c_{12} \varepsilon_{\theta\theta} + c_{13} \varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{\theta\theta} = c_{12} \varepsilon_{rr} + c_{22} \varepsilon_{\theta\theta} + c_{23} \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{zz} &= c_{13} \varepsilon_{rr} + c_{23} \varepsilon_{\theta\theta} + c_{33} \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{\theta z} &= c_{44} \varepsilon_{\theta z}, \quad \sigma_{rz} = c_{55} \varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{r\theta} = c_{66} \varepsilon_{r\theta}; \end{aligned} \quad (3)$$

уравнения связи между компонентами тензора малых деформаций ( $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta z}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{r\theta}$ ) и отнесенными к нормирующему параметру  $R_*$  компонентами безразмерного вектора динамических упругих волновых перемещений ( $u_r, u_\theta, u_z$ )

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \partial_r u_r, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = r^{-1} u_r + r^{-1} \partial_\theta u_\theta, \quad \varepsilon_{zz} = \partial_z u_z, \\ \varepsilon_{\theta z} &= \partial_z u_\theta + r^{-1} \partial_\theta u_z, \quad \varepsilon_{rz} = \partial_z u_r + \partial_r u_z, \quad \varepsilon_{r\theta} = r^{-1} \partial_\theta u_r + (\partial_r - r^{-1}) u_\theta. \end{aligned} \quad (4)$$

Во введенных представлениях ( $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta}$ ) – отнесенные к нормирующему параметру  $c_*$  безразмерные характеристики напряженно-деформированного состояния на основных площадках цилиндрической системы координат;  $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{22}, c_{23}, c_{33}, c_{44}, c_{55}, c_{66}$  – отнесенные к нормирующему параметру  $c_*$  модули упругости цилиндрически ортотропного материала;  $t$  – время;  $\partial_j = \partial/\partial j$  ( $j = r, \theta, z, t$ ).

Представленная модель включает также однородные граничные условия свободной

$$\sigma_{rs}|_{(r,\theta,z)\in\Gamma} = 0 \quad (s = r, \theta, z) \quad (5)$$

либо жестко закрепленной

$$u_s|_{(r,\theta,z)\in\Gamma} = 0 \quad (s = r, \theta, z) \quad (6)$$

граничной поверхности волновода.

## 2. Сведение к задаче решения системы рекуррентных уравнений.

В рамках модели (1) – (6) для исследуемых нормальных волн вдоль оси  $Oz$  протяженных цилиндров геометрии  $V$  с круговой частотой  $\omega$ , нормированным параметром  $R_*$  продольным волновым числом  $\tilde{k}$  ( $\tilde{k} \in \mathbb{C}$ ) и окружным волновым числом  $\tau$  ( $\tau \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ) в матричной форме вводятся комплексные представления

$$\mathbf{U}(r, \theta, z, t) = \exp(-\delta f_{\lambda,q}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z) \mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r). \quad (7)$$

Здесь  $\delta$  ( $\delta \in \mathbb{R}$ ) – произвольный параметр;  $\mathbf{U}(r, \theta, z, t)$  – вектор-столбец с безразмерными компонентами вектора упругих перемещений

$$\mathbf{U}(r, \theta, z, t) = [u_r(r, \theta, z, t), u_\theta(r, \theta, z, t), u_z(r, \theta, z, t)]^T; \quad (8)$$

$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r)$  – вектор-столбец с элементами

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) = [\tilde{u}_r^{(\tau)}(r), \tilde{u}_\theta^{(\tau)}(r), \tilde{u}_z^{(\tau)}(r)]^T; \quad (9)$$

$\mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta)$  – диагональная матрица размерности  $3 \times 3$ , отличные от нуля элементы которой равны

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta)]_{1,1} &= \cos(\tau\theta + \beta), \quad [\mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta)]_{2,2} = \sin(\tau\theta + \beta), \\ [\mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta)]_{3,3} &= i \cos(\tau\theta + \beta) \quad (\beta \in \{0, \pi/2\}). \end{aligned} \quad (10)$$

Параметр  $\beta$  в соотношениях (10) задает тип симметрии волновых движений относительно плоскости  $\theta = 0$ . При  $\beta = 0$  выделяются волны со свойствами

$$\begin{aligned} u_r(r, -\theta, z, t) &= u_r(r, \theta, z, t), \quad u_\theta(r, -\theta, z, t) = -u_\theta(r, \theta, z, t), \\ u_z(r, -\theta, z, t) &= u_z(r, \theta, z, t), \end{aligned}$$

а при  $\beta = \pi/2$  – со свойствами

$$\begin{aligned} u_r(r, -\theta, z, t) &= -u_r(r, \theta, z, t) \quad u_\theta(r, -\theta, z, t) = u_\theta(r, \theta, z, t), \\ u_z(r, -\theta, z, t) &= -u_z(r, \theta, z, t). \end{aligned}$$

В рассматриваемом волноводе с учетом представлений (7) подлежат независимому исследованию осесимметричные крутильные ( $\tau = 0$ ,  $\beta = \pi/2$ ) и

продольно-сдвиговые ( $\tau = 0$ ,  $\beta = 0$ ) волны, а также неосесимметричные волны ( $\tau \in \mathbb{N}$ ,  $\beta = 0$ ).

В приведенных соотношениях и далее:  $i$  – мнимая единица; выделение жирным шрифтом применяется для обозначения матричных и векторных объектов;  $\mathbf{O}$  и  $\hat{\mathbf{O}}$  – нулевые соответственно квадратная матрица и вектор-столбец;  $\mathbf{I}$  – единичная квадратная матрица; обозначения  $[\mathbf{X}]_{j,p}$  и  $[\mathbf{X}]_j$  при  $j, p \in \mathbb{N}$  используются для индексного доступа к элементам соответственно матричных и векторных объектов, а при  $j$  либо  $p$  заданных индексным диапазоном вида  $n..m$  или  $(n_1, n_2, \dots, n_m)$  – для определения соответственно подматрицы либо подвектора; операция  $[\ ]$  – для определения матричных и векторных объектов (формально  $[\mathbf{X}] \equiv \mathbf{X}$ ); операция транспонирования  $\mathbf{X}^T$ ; операция комплексного сопряжения  $\bar{\mathbf{X}}$ ; операция обращения неособенной квадратной матрицы  $\mathbf{X}^{-1}$ ;  $\|\mathbf{X}\|$  – мультипликативная согласованная евклидова норма [4].

На основании соотношений (3), (4), (7) – (10) в матричной форме получаются комплексные представления

$$\mathbf{S}(r, \theta, z, t) = \exp((1 - \delta)f_{\lambda,q}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z)\mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta)\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r), \quad (11)$$

где  $\mathbf{S}(r, \theta, z, t)$  – вектор-столбец с безразмерными компонентами тензора напряжений

$$\mathbf{S}(r, \theta, z, t) = [\sigma_{rr}(r, \theta, z, t), \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, z, t), \sigma_{zz}(r, \theta, z, t), \sigma_{\theta z}(r, \theta, z, t), \sigma_{rz}(r, \theta, z, t), \sigma_{r\theta}(r, \theta, z, t)]^T \quad (12)$$

$\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r)$  – вектор-столбец с элементами

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r) = [\tilde{\sigma}_{rr}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{zz}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{\theta z}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{rz}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(\tau)}(r)]^T; \quad (13)$$

$\mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta)$  – диагональная матрица размерности  $6 \times 6$ , отличные от нуля элементы которой равны

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta)]_{j,j} &= \cos(\tau\theta + \beta) \quad (j = \overline{1,3}), \quad [\mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta)]_{4,4} = i \sin(\tau\theta + \beta), \\ [\mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta)]_{5,5} &= i \cos(\tau\theta + \beta), \quad [\mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta)]_{6,6} = \sin(\tau\theta + \beta). \end{aligned} \quad (14)$$

Получаются также в матричной форме дифференциальные соотношения связи между векторами  $\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r)$  и  $\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r)$  в виде

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r) = \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r), \quad (15)$$

где  $\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)$  – матричный дифференциальный оператор размерности  $6 \times 3$ , отличные от нуля элементы которого задаются представлениями

$$\left[ \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{1,1} = \tilde{c}_{11}(d_r - \delta\lambda q r^{q-1}) + \tilde{c}_{12}r^{-1},$$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{2,1} &= \tilde{c}_{12}(d_r - \delta\lambda q r^{q-1}) + \tilde{c}_{22}r^{-1}, \\
 [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{3,1} &= \tilde{c}_{13}(d_r - \delta\lambda q r^{q-1}) + \tilde{c}_{23}r^{-1}, \\
 [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{1,2} &= \tilde{c}_{12}\tau r^{-1}, \quad [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{2,2} = \tilde{c}_{22}\tau r^{-1}, \quad [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{3,2} = \tilde{c}_{23}\tau r^{-1}, \\
 [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{1,3} &= -\tilde{c}_{13}\tilde{k}, \quad [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{2,3} = -\tilde{c}_{23}\tilde{k}, \quad [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{3,3} = -\tilde{c}_{33}\tilde{k}, \\
 [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{4,2} &= \tilde{c}_{44}\tilde{k}, \quad [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{4,3} = -\tilde{c}_{44}\tau r^{-1}, \\
 [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{5,1} &= \tilde{c}_{55}\tilde{k}, \quad [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{5,3} = \tilde{c}_{55}(d_r - \delta\lambda q r^{q-1}), \\
 [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{6,1} &= -\tilde{c}_{66}\tau r^{-1}, \quad [\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)]_{6,2} = \tilde{c}_{66}(d_r - \delta\lambda q r^{q-1} - r^{-1}).
 \end{aligned}$$

Здесь  $d_r = d/dr$ .

Из системы дифференциальных уравнений движения (2) с учетом соотношений (7) – (14) получается однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами относительно амплитудных составляющих компонент безразмерного вектора динамических упругих волновых перемещений

$$\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r) \cdot \mathbf{U}^{(\tau)}(r) = \hat{\mathbf{O}} \quad (r \in [0, \infty)), \quad (16)$$

где  $\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)$  – матричный дифференциальный оператор размерности  $3 \times 3$  с элементами

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{1,1} &= \tilde{c}_{11}r^2d_r^2 + \tilde{c}_{11}(1 + (1 - 2\delta)\lambda q r^q)rd_r - \tilde{c}_{22} - \tau^2\tilde{c}_{66} + \\
 &\quad + (\Omega^2 - \tilde{k}^2\tilde{c}_{55})r^2 + \lambda q r^q(-\delta q(1 + (1 - \delta)\lambda r^q)\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}), \\
 [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{1,2} &= \tau((\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})rd_r + \lambda q r^q((1 - \delta)\tilde{c}_{12} - \delta\tilde{c}_{66}) - (\tilde{c}_{22} + \tilde{c}_{66})), \\
 [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{1,3} &= -\tilde{k}r((\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})rd_r + \tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{23} + \lambda q r^q((1 - \delta)\tilde{c}_{13} - \delta\tilde{c}_{55})), \\
 [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{2,1} &= -\tau((\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})rd_r - \lambda q r^q(\delta\tilde{c}_{12} - (1 - \delta)\tilde{c}_{66}) + \tilde{c}_{22} + \tilde{c}_{66}), \\
 [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{2,2} &= \tilde{c}_{66}(r^2d_r^2 + (1 + (1 - 2\delta)\lambda q r^q)rd_r) - \tilde{c}_{66} - \tau^2\tilde{c}_{22} + \\
 &\quad + (\Omega^2 - \tilde{k}^2\tilde{c}_{44})r^2 - \lambda q r^q(1 + \delta q + \delta(1 - \delta)\lambda q r^q)\tilde{c}_{66}, \\
 [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{2,3} &= [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{3,2} = \tilde{k}\tau(\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44})r,
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{M}_2^{(\tau)}(r) \right]_{3,1} &= \tilde{k}r ((\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})rd_r + (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{55}) + \lambda qr^q ((1 - \delta)\tilde{c}_{55} - \delta\tilde{c}_{13})), \\ \left[ \mathbf{M}_2^{(\tau)}(r) \right]_{3,3} &= \tilde{c}_{55} (r^2 d_r^2 + (1 + (1 - 2\delta)\lambda qr^q) rd_r) - \tau^2 \tilde{c}_{44} + \\ &+ \left( \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{33} \right) r^2 - \delta \lambda q^2 r^q (1 + (1 - \delta)\lambda r^q) \tilde{c}_{55}. \end{aligned}$$

Здесь  $\Omega^2 = \tilde{\rho}\omega^2 R_*^2 / c_*$ .

Ставится задача построения базисного набора частных решений матричного уравнения (16). В качестве метода построения указанных решений используется подход, основанный на представлениях компонент искомых векторных решений обобщенными степенными рядами радиальной координаты. С учетом физической модели рассматриваемой задачи для искомых решений вводятся матричные представления рядами с неопределенными векторными коэффициентами следующего вида

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) = \mathbf{A}_1(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+\eta} \mathbf{X}_m^{(\tau,\eta)}, \quad \|\mathbf{X}_0^{(\tau,\eta)}\| \neq 0, \quad (17)$$

с ограничениями на параметр  $\eta$

$$\begin{aligned} \eta \in -1; 0 \text{ или } \operatorname{Re}(\eta) > 0, \text{ если } [\mathbf{X}_0^{(\tau,\eta)}]_3 &= 0, \\ \eta \in 0; 1 \text{ или } \operatorname{Re}(\eta) > 1, \text{ если } [\mathbf{X}_0^{(\tau,\eta)}]_3 &\neq 0, \end{aligned} \quad (18)$$

следующими из критериев ограниченности и непрерывности всех характеристик волновых полей при  $r = 0$ . Полагается, что ряд (17) сходится равномерно и абсолютно на любом конечном отрезке  $r \in [0, r_1]$  ( $0 < r_1 < \infty$ ). В представлении (17)  $\mathbf{A}_1(r)$  – диагональная матрица размерности  $3 \times 3$ , отличные от нуля элементы которой равны

$$[\mathbf{A}_1(r)]_{1,1} = [\mathbf{A}_1(r)]_{2,2} = r, \quad [\mathbf{A}_1(r)]_{3,3} = 1;$$

$\{\mathbf{X}_m^{(\tau,\eta)}\}_{m=0}^{\infty}$  – зависящие от параметров  $\eta$  и  $\tau$  искомые наборы векторных коэффициентов третьего порядка. Представление (17) с учетом соотношения (15) определяет вид разложений для вектора  $\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r)$

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r) = \mathbf{A}_2(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+\eta} \mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau,\eta)}, \quad (19)$$

где  $\mathbf{A}_2(r)$  – диагональная матрица размерности  $6 \times 6$ , отличные от нуля элементы которой равны

$$[\mathbf{A}_2(r)]_{j,j} = 1 \quad (j = 1, 2, 3, 6), \quad [\mathbf{A}_2(r)]_{j,j} = r^{-1} \quad (j = 4, 5);$$

$\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)$  – прямоугольная матрица размерности  $6 \times 3$ , отличные от нуля элементы которой равны

$$[\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{1,1} = (v + 1 - \delta \lambda q r^q) \tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}, \quad [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{1,2} = \tau \tilde{c}_{12},$$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{2,1} &= (v+1 - \delta\lambda q r^q)\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{22}, & [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{2,2} &= \tau\tilde{c}_{22}, \\
 [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{3,1} &= (v+1 - \delta\lambda q r^q)\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{23}, & [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{3,2} &= \tau\tilde{c}_{23}, \\
 [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{1,3} &= -\tilde{k}\tilde{c}_{13}, & [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{2,3} &= -\tilde{k}\tilde{c}_{23}, & [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{3,3} &= -\tilde{k}\tilde{c}_{33}, \\
 [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{4,2} &= \tilde{k}r^2\tilde{c}_{44}, & [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{4,3} &= -\tau\tilde{c}_{44}, \\
 [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{5,1} &= \tilde{k}r^2\tilde{c}_{55}, & [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{5,3} &= (v - \delta\lambda q r^q)\tilde{c}_{55}, \\
 [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{6,1} &= -\tau\tilde{c}_{66}, & [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta)}(r)]_{6,2} &= (v - \delta\lambda q r^q)\tilde{c}_{66}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $v = m + \eta$ .

В результате подстановки разложения (17) в уравнение (16) получается матричное функциональное уравнение

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{\infty} r^m (\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)} \mathbf{X}_m^{(\tau,\eta)} + \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,2)} \mathbf{X}_{m-2}^{(\tau,\eta)} + \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)} \mathbf{X}_{m-q}^{(\tau,\eta)} + \\
 + \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,4)} \mathbf{X}_{m-2-q}^{(\tau,\eta)} + \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,5)} \mathbf{X}_{m-2q}^{(\tau,\eta)}) = \hat{\mathbf{O}} \quad (r \in [0, \infty)),
 \end{aligned} \tag{20}$$

в котором полагается, что  $\mathbf{X}_j^{(\tau,\eta)} = \hat{\mathbf{O}}$  ( $j < 0$ ).

Из условия выполнения уравнения (20) при  $r = 0$  получается уравнение для определения начального векторного коэффициента

$$\mathbf{Q}_0^{(\tau,\eta,1)} \mathbf{X}_0^{(\tau,\eta)} = \hat{\mathbf{O}}. \tag{21}$$

Условие нетривиальной разрешимости уравнения (21)

$$\det \left( \mathbf{Q}_0^{(\tau,\eta,1)} \right) = 0 \tag{22}$$

определяет допустимые значения параметра  $\eta$ . Функциональное уравнение (20) также порождает рекуррентные уравнения для определения последующих векторных коэффициентов  $\mathbf{X}_m^{(\tau,\eta)}$  ( $m = \overline{1, \infty}$ )

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)} \mathbf{X}_m^{(\tau,\eta)} &= -(\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,2)} \mathbf{X}_{m-2}^{(\tau,\eta)} + \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)} \mathbf{X}_{m-q}^{(\tau,\eta)} + \\
 &+ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,4)} \mathbf{X}_{m-2-q}^{(\tau,\eta)} + \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,5)} \mathbf{X}_{m-2q}^{(\tau,\eta)}) \quad (m = 1, 2, \dots).
 \end{aligned} \tag{23}$$

Здесь  $\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,n)}$  ( $n = \overline{1, 5}$ ) – квадратные матрицы размерности  $3 \times 3$ , отличные от нуля элементы которых равны

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)}]_{1,1} &= v(v+2)\tilde{c}_{11} - \tau^2\tilde{c}_{66}, & [\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)}]_{1,2} &= \tau(v\tilde{c}_{11} - (v+2)\tilde{c}_{66}), \\
 [\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)}]_{1,3} &= -v\tilde{k}(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}), & [\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)}]_{2,1} &= \tau(v\tilde{c}_{66} - (v+2)\tilde{c}_{11}),
 \end{aligned}$$

Нормальные волны в функционально градиентных ортотропных цилиндрах

$$\begin{aligned}
[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)}]_{2,2} &= v(v+2)\tilde{c}_{66} - \tau^2\tilde{c}_{11}, & [\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)}]_{2,3} &= \tau\tilde{k}(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}), \\
[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)}]_{3,3} &= (v^2 - \tau^2)\tilde{c}_{44}, & [\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,2)}]_{1,1} &= [\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,2)}]_{2,2} = \Omega^2 - \tilde{k}^2\tilde{c}_{44}, \\
[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,2)}]_{3,1} &= \tilde{k}v(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}), & [\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,2)}]_{3,2} &= \tilde{k}\tau(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}), \\
[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,2)}]_{3,3} &= \Omega^2 - \tilde{k}^2\tilde{c}_{33}, & [\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)}]_{1,2} &= \lambda q\tau((1-\delta)\tilde{c}_{11} - (2-\delta)\tilde{c}_{66}), \\
[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)}]_{1,1} &= \lambda q((q-2v-2)\delta - q + v + 2)\tilde{c}_{11} - 2\tilde{c}_{66}, \\
[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)}]_{1,3} &= \lambda q\tilde{k}(\delta\tilde{c}_{44} - (1-\delta)\tilde{c}_{13}), & [\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)}]_{2,1} &= \lambda q\tau(\delta\tilde{c}_{11} - (1+\delta)\tilde{c}_{66}), \\
[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)}]_{2,2} &= \lambda q((q-2v-2)\delta - q + v)\tilde{c}_{66}, \\
[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)}]_{3,3} &= \lambda q((q-2v)\delta - q + v)\tilde{c}_{44}, & [\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,4)}]_{3,1} &= \lambda q\tilde{k}((1-\delta)\tilde{c}_{44} - \delta\tilde{c}_{13}), \\
[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,5)}]_{1,1} &= -\delta(1-\delta)\lambda^2 q^2\tilde{c}_{11}, & [\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,5)}]_{2,2} &= -\delta(1-\delta)\lambda^2 q^2\tilde{c}_{66}, \\
[\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,5)}]_{3,3} &= -\delta(1-\delta)\lambda^2 q^2\tilde{c}_{44}.
\end{aligned}$$

**3. Базисные решения в случае крутильных волн.** При  $\tau = 0$  и  $\beta = \pi/2$  представления (7) – (14) преобразуются к такому виду

$$u_\theta(r, z, t) = \exp(-\delta f_{\lambda,q}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z)\tilde{u}_\theta^{(TW)}(r),$$

$$\mathbf{S}(r, z, t) = \exp((1-\delta)f_{\lambda,q}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z)\mathbf{T}_2^{(TW)}\tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(r), \quad (24)$$

где  $\mathbf{S}(r, z, t)$  – вектор-столбец с ненулевыми компонентами тензора безразмерных напряжений  $\mathbf{S}(r, z, t) = [\sigma_{\theta z}(r, z, t), \sigma_{r\theta}(r, z, t)]^T$ ;  $\tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(r)$  – вектор-столбец с элементами  $\tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(r) = [\tilde{\sigma}_{\theta z}^{(TW)}(r), \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(TW)}(r)]^T$ ;  $\mathbf{T}_2^{(TW)}$  – диагональная матрица, отличные от нуля элементы которой равны  $[\mathbf{T}_2^{(TW)}]_{1,1} = i$ ,  $[\mathbf{T}_2^{(TW)}]_{2,2} = 1$ .

Из условия разрешимости (22) и уравнения (21), соответственно принявших вид

$$[\mathbf{Q}_0^{(0,\eta,1)}]_{2,2} = \eta(\eta+2)\tilde{c}_{66} = 0, \quad \eta(\eta+2)\tilde{c}_{66}x_0^{(TW)} = 0,$$

с учетом ограничений (18) определяется единственное допустимое значение параметра  $\eta = 0$  и соответствующее ему начальное значение  $x_0^{(TW)} = b$ , где  $b$  – произвольная постоянная. Тогда решение целевой задачи может быть представлено через базисные решения так:

$$\tilde{u}_\theta^{(TW)}(r) = b\tilde{u}_\theta^{(TW,B)}(r), \quad \tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(r) = b\tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(r), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_\theta^{(TW,B)}(r) &= \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+1}x_m^{(TW)}, \\
\tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(r) &= \sum_{m=0}^{\infty} r^m x_m^{(TW)} \begin{bmatrix} \tilde{k}r\tilde{c}_{44} & 0 \\ 0 & (m - \delta\lambda q r^q)\tilde{c}_{66} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \quad (26)$$

Для определения  $x_m^{(TW)}$  из рекуррентных уравнений (23) получаются явные рекуррентные представления

$$\begin{aligned} x_m^{(TW)} &= 0 \quad (m < 0), \quad x_0^{(TW)} = 1, \\ x_m^{(TW)} &= w_m^{(TW,1)} x_{m-2}^{(TW)} + w_m^{(TW,2)} x_{m-q}^{(TW)} + w_m^{(TW,3)} x_{m-2q}^{(TW)} \quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (27)$$

В соотношениях (27)

$$\begin{aligned} w_m^{(TW,1)} &= -\kappa_3^2 / (m(m+2)), \\ w_m^{(TW,2)} &= \lambda q (\delta(2m+2-q) - m+q) / (m(m+2)), \\ w_m^{(TW,3)} &= \delta(1-\delta)\lambda^2 q^2 / (m(m+2)), \end{aligned} \quad (28)$$

где  $\kappa_3^2 = (\Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{44}) / \tilde{c}_{66}$ .

При  $m \rightarrow \infty$  справедливы следующие асимптотические оценки для коэффициентов (28)

$$w_m^{(TW,1)} \approx -m^{-2} \kappa_3^2, \quad w_m^{(TW,2)} \approx m^{-1} (2\delta - 1) \lambda q, \quad w_m^{(TW,3)} \approx m^{-2} \delta (1 - \delta) \lambda^2 q^2,$$

непосредственным следствием которых является абсолютная и равномерная сходимость разложений (26) на любом конечном отрезке  $r \in [0, r_1]$  ( $0 < r_1 < \infty$ ) [5].

**4. Базисные решения в случае продольно-сдвиговых волн.** При  $\tau = 0$  и  $\beta = 0$  представления (7) – (14) приобретают такой вид

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(r, z, t) &= \exp(-\delta f_{\lambda,p}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z) \mathbf{T}_1^{(LSW)} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r), \\ \mathbf{S}(r, z, t) &= \exp((1-\delta)f_{\lambda,p}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z) \mathbf{T}_2^{(LSW)} \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)}(r), \end{aligned} \quad (29)$$

где  $\mathbf{U}(r, z, t)$  и  $\mathbf{S}(r, z, t)$  – вектор-столбцы с ненулевыми компонентами соответственно вектора безразмерных перемещений и тензора безразмерных напряжений

$$\mathbf{U}(r, z, t) = [u_r(r, z, t), u_z(r, z, t)]^T,$$

$$\mathbf{S}(r, z, t) = [\sigma_{rr}(r, z, t), \sigma_{\theta\theta}(r, z, t), \sigma_{zz}(r, z, t), \sigma_{rz}(r, z, t)]^T;$$

$\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r)$  и  $\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)}(r)$  – вектор-столбцы с элементами

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r) = [\tilde{u}_r^{(LSW)}(r), \tilde{u}_z^{(LSW)}(r)]^T,$$

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)}(r) = [\tilde{\sigma}_{rr}^{(LSW)}(r), \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(LSW)}(r), \tilde{\sigma}_{zz}^{(LSW)}(r), \tilde{\sigma}_{rz}^{(LSW)}(r)]^T;$$

$\mathbf{T}_1^{(LSW)}$  и  $\mathbf{T}_2^{(LSW)}$  – диагональные матрицы размерности соответственно  $2 \times 2$  и  $4 \times 4$ , отличные от нуля элементы которых равны

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_1^{(LSW)}]_{1,1} &= 1, \quad [\mathbf{T}_1^{(LSW)}]_{2,2} = i, \\ [\mathbf{T}_2^{(LSW)}]_{j,j} &= 1 \quad (j = \overline{1,3}), \quad [\mathbf{T}_2^{(LSW)}]_{4,4} = i. \end{aligned}$$

Из условия разрешимости (22), принявшего вид

$$\det([\mathbf{Q}_0^{(0,\eta,1)}]_{(1,3),(1,3)}) = \eta^2((\eta + 1)^2 \tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{22}) \tilde{c}_{55} = 0,$$

определяются два потенциально допустимые значения параметра  $\eta$ :  $\eta_1 = \sqrt{\tilde{c}_{22}/\tilde{c}_{11}} - 1$ ,  $\eta_2 = 0$ . Параметру  $\eta_1$  с учетом вытекающих из (18) ограничений на упругие модули однородного материала  $\tilde{c}_{11} \leq \tilde{c}_{22}$  соответствует решение уравнения (21), записанное с точностью до произвольного скалярного множителя в виде

$$\mathbf{X}_0^{(LSW,\eta_1)} = [0, 1]^T. \quad (30)$$

Поскольку при  $\tilde{c}_{11} = \tilde{c}_{22}$  получается, что  $\eta_1 = \eta_2$ , следовательно, отличное от (30) второе решение уравнения (21), соответствующее  $\eta_2$ , в этом случае с точностью до произвольного скалярного множителя может быть построено только при выполнении дополнительных ограничений на упругие модули вида  $\tilde{c}_{13} = \tilde{c}_{23}$ . В результате получается

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0^{(LSW,\eta_2)} &= [0, 1]^T, \quad \text{если } (\tilde{c}_{11} = \tilde{c}_{22}, \tilde{c}_{13} = \tilde{c}_{23}), \\ \mathbf{X}_0^{(LSW,\eta_2)} &= [\tilde{k}(\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{23})/(\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{22}), 1]^T, \quad \text{если } (\tilde{c}_{11} \neq \tilde{c}_{22}). \end{aligned} \quad (31)$$

Вводится обозначение

$$\psi_m^\eta = \det\left([\mathbf{Q}_m^{(0,\eta,1)}]_{(1,3),(1,3)}\right) = (m + \eta)^2 ((m + \eta + 1)^2 \tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{22}) \tilde{c}_{55}.$$

Так как  $\psi_m^{\eta_1} \neq 0$  ( $m \geq 1$ ), следовательно, рекуррентные уравнения (23) при  $\eta = \eta_1$  преобразовываются в последовательность явных рекуррентных представлений для определения с учетом (30) искомых векторных коэффициентов  $\mathbf{X}_m^{(LSW,\eta_1)}$  ( $j = 1$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m^{(LSW,\eta_j)} &= \mathbf{W}_m^{(LSW,\eta_j,1)} \mathbf{X}_{m-2}^{(LSW,\eta_j)} + \mathbf{W}_m^{(LSW,\eta_j,2)} \mathbf{X}_{m-q}^{(LSW,\eta_j)} + \\ &+ \mathbf{W}_m^{(LSW,\eta_j,3)} \mathbf{X}_{m-2-q}^{(LSW,\eta_j)} + \mathbf{W}_m^{(LSW,\eta_j,4)} \mathbf{X}_{m-2q}^{(LSW,\eta_j)} \quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_m^{(LSW,\eta_j,p)} &= -\left([\mathbf{Q}_m^{(0,\eta_j,1)}]_{(1,3),(1,3)}\right)^{-1} [\mathbf{Q}_m^{(0,\eta_j,p+1)}]_{(1,3),(1,3)} \\ &\quad (m = \overline{1, \infty}; \quad p = \overline{1, 4}); \\ \mathbf{X}_m^{(LSW,\eta_j)} &= \mathbf{O} \quad (m < 0). \end{aligned} \quad (33)$$

Поскольку в случае

$$\eta_1 \notin \mathbb{N} \quad (34)$$

$\psi_m^{\eta_2} \neq 0$  ( $m \geq 1$ ), следовательно, при выполнении (34) представления (32), (33) остаются справедливыми и для  $j = 2$ . Необходимо отметить, что непосредственным следствием невыполнения условия (34) является вырожденность на  $m = \eta_1$

шаге порождаемой рекуррентным уравнением (23) матрицы системы линейных уравнений

$$\left[ \mathbf{Q}_m^{(0, \eta_2, 1)} \right]_{(1,3), (1,3)} = \begin{bmatrix} (m - \eta_1)(m + \eta_1 + 2)\tilde{c}_{11} & -\tilde{k}((m + 1)\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{23} + m\tilde{c}_{55}) \\ 0 & m^2\tilde{c}_{55} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, для существования возможного решения  $\mathbf{X}_{\eta_1}^{(LSW, \eta_2)} = [b, 0]^T$  указанного рекуррентного уравнения в этом случае необходимо выполнение требования

$$\mathbf{B}_{\eta_1}^{(2)} \mathbf{X}_{\eta_1-2}^{(LSW, \eta_2)} + \mathbf{B}_{\eta_1}^{(3)} \mathbf{X}_{\eta_1-q}^{(LSW, \eta_2)} + \mathbf{B}_{\eta_1}^{(4)} \mathbf{X}_{\eta_1-2-q}^{(LSW, \eta_2)} + \mathbf{B}_{\eta_1}^{(5)} \mathbf{X}_{\eta_1-2q}^{(LSW, \eta_2)} = \hat{\mathbf{O}}. \quad (35)$$

Здесь  $b$  – произвольная постоянная;  $\mathbf{B}_{\eta_1}^{(p)} = [\mathbf{Q}_{\eta_1}^{(0, \eta_2, p)}]_{(1,3), (1,3)}$  ( $p = \overline{2, 5}$ ). Не трудно проверить, что требование (35) выполняется в случае

$$\eta_1 = 2p - 1 \text{ и } q \notin \{2s - 1\}_{s=1}^p \text{ (} p \in \mathbb{N}\text{)}. \quad (36)$$

Окончательно, решение целевой задачи с учетом соотношений (29) может быть представлено через базисные решения так:

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r) = \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW, B)}(r)\mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)}(r) = \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW, B)}(r)\mathbf{B}, \quad (37)$$

где  $\mathbf{B}$  – вектор-столбец второго порядка с произвольными постоянными элементами;  $\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW, B)}(r)$  и  $\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW, B)}(r)$  – матричные базисные решения следующего вида

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW, B)}(r) &= \mathbf{A}_1^{(LSW)}(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m [r^{\eta_1} \mathbf{X}_m^{(LSW, \eta_1)}, r^{\eta_2} \mathbf{X}_m^{(LSW, \eta_2)}], \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW, B)}(r) &= \mathbf{A}_2^{(LSW)}(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m [r^{\eta_1} \mathbf{H}_m^{(LSW, \eta_1)}(r) \mathbf{X}_m^{(LSW, \eta_1)}, \\ &\quad r^{\eta_2} \mathbf{H}_m^{(LSW, \eta_2)}(r) \mathbf{X}_m^{(LSW, \eta_2)}]. \end{aligned} \quad (38)$$

Отличные от нуля элементы входящих в указанные соотношения прямоугольных матриц  $\mathbf{H}_m^{(LSW, \eta)}(r)$  с учетом замены  $v = m + \eta$  имеют следующий вид

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}_m^{(LSW, \eta)}(r)]_{1,1} &= (v + 1 - \delta\lambda qr^q)\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}, & [\mathbf{H}_m^{(LSW, \eta)}(r)]_{1,2} &= -\tilde{k}\tilde{c}_{13}, \\ [\mathbf{H}_m^{(LSW, \eta)}(r)]_{2,1} &= (v + 1 - \delta\lambda qr^q)\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{22}, & [\mathbf{H}_m^{(LSW, \eta)}(r)]_{2,2} &= -\tilde{k}\tilde{c}_{23}, \\ [\mathbf{H}_m^{(LSW, \eta)}(r)]_{3,1} &= (v + 1 - \delta\lambda qr^q)\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{23}, & [\mathbf{H}_m^{(LSW, \eta)}(r)]_{3,2} &= -\tilde{k}\tilde{c}_{33}, \\ [\mathbf{H}_m^{(LSW, \eta)}(r)]_{4,1} &= \tilde{k}\tilde{c}_{55}r^2, & [\mathbf{H}_m^{(LSW, \eta)}(r)]_{4,2} &= (v - \delta\lambda qr^q)\tilde{c}_{55}. \end{aligned}$$

При  $m \rightarrow \infty$  справедливы следующие асимптотические оценки для норм матричных коэффициентов в (33)

$$\begin{aligned}\|\mathbf{W}_m^{(LSW,\eta_j,1)}\| &\approx m^{-1}|\tilde{k}|(1 + \tilde{c}_{13}/\tilde{c}_{55}), \quad \|\mathbf{W}_m^{(LSW,\eta_j,2)}\| \approx m^{-1}q\sqrt{2}|\lambda(1 - 2\delta)|, \\ \|\mathbf{W}_m^{(LSW,\eta_j,3)}\| &\approx m^{-2}q|\lambda\tilde{k}(\delta(1 + \tilde{c}_{13}/\tilde{c}_{55}) - 1)|, \\ \|\mathbf{W}_m^{(LSW,\eta_j,4)}\| &\approx m^{-2}\lambda^2q^2\sqrt{2}|\delta(1 - \delta)|.\end{aligned}$$

Следовательно, разложения (38) сходятся абсолютно и равномерно на любом конечном отрезке  $r \in [r_1, r_2]$  ( $0 < r_1 < r_2 < \infty$ ) [5].

**5. Базисные решения в неосесимметричном случае.** При  $\tau \in \mathbb{N}$  и  $\beta = 0$  условие разрешимости (22) распадается на два независимые уравнения

$$a(\eta + 1)^4 - b(\eta + 1)^2 + g = 0, \quad (39)$$

$$\eta^2\tilde{c}_{55} - \tau^2\tilde{c}_{44} = 0, \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned}a = \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{66}, \quad b = \tau^2\zeta + \tilde{c}_{66}(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{22}), \quad g = (\tau^2 - 1)^2\tilde{c}_{22}\tilde{c}_{66}, \\ \zeta = \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22} - \tilde{c}_{12}(\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66}).\end{aligned} \quad (41)$$

Из четырех корней биквадратного уравнения (39) и двух корней квадратного уравнения (40) только три

$$\eta_1 = \sqrt{(b - \sqrt{d})/(2a)} - 1, \quad \eta_2 = \sqrt{(b + \sqrt{d})/(2a)} - 1, \quad \eta_3 = \tau\sqrt{\tilde{c}_{44}/\tilde{c}_{55}} \quad (42)$$

потенциально могут удовлетворять ограничениям (18) и, соответственно, породить на основании уравнения (21) для физически непротиворечивого решения исходной задачи начальные значения коэффициентов  $\mathbf{X}_0^{(\tau,\eta_j)}$  ( $j = \overline{1,3}$ ) вида

$$\mathbf{X}_0^{(\tau,\eta_j)} = \begin{bmatrix} \tau(\tilde{c}_{22} - (1 + \eta_j)\tilde{c}_{12} - \eta_j\tilde{c}_{66}) \\ (1 + \eta_j)^2\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{22} - \tau^2\tilde{c}_{66} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (j = \overline{1,2}), \quad \mathbf{X}_0^{(1,\eta_3)} = \begin{bmatrix} [\mathbf{V}]_1 \\ [\mathbf{V}]_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (43)$$

где

$$\mathbf{V} = -([\mathbf{Q}_0^{(\tau,\eta_3,1)}]_{(1..2),(1..2)})^{-1}[\mathbf{Q}_0^{(\tau,\eta_3,1)}]_{(1..2),3}. \quad (44)$$

В представлениях (42)

$$\begin{aligned}d = b^2 - 4ag = h\tau^4 + s\tau^2 + v, \quad h = \zeta^2 - 4\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}\tilde{c}_{66}^2, \\ s = 2\tilde{c}_{66}(\zeta(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{22}) + 4\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}\tilde{c}_{66}), \quad v = \tilde{c}_{66}^2(\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{22})^2.\end{aligned} \quad (45)$$

При  $\tau = 1$  соотношения (42), получающие существенно более простой вид

$$\begin{aligned}\eta_1 = -1, \quad \eta_2 = \sqrt{1 + (\tilde{c}_{22}(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66}) - \tilde{c}_{12}(\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66})) / (\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{66})} - 1, \\ \eta_3 = \sqrt{\tilde{c}_{44}/\tilde{c}_{55}},\end{aligned} \quad (46)$$

обеспечивают возможность построения физически непротиворечивого решения исходной задачи в случае, когда выполняются ограничения

$$\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66} \leq (\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66})\tilde{c}_{22}/\tilde{c}_{12}, \quad \tilde{c}_{55} \leq \tilde{c}_{44}. \quad (47)$$

При  $\tau \geq 2$  рассмотрению подлежат три варианта ограничений. Если выполняется условие

$$\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66} \leq \sqrt{\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}}, \quad (48)$$

то справедливыми оказываются соотношения  $h \geq 0$  и  $\zeta > 0$ , а, значит, и соотношения

$$b > 0, \quad d > 0, \quad b \geq \sqrt{d}. \quad (49)$$

Таким образом, при выполнении (48) во-первых,  $\eta_j$  ( $j = \overline{1, 2}$ ) всегда вещественные и различные, во-вторых, дополнительные ограничения на величины нормированных модулей упругости однородного цилиндрически ортотропного материала  $\tilde{c}_{jp}$ , обеспечивающие возможность построения физически непротиворечивого решения исходной задачи, будут иметь достаточно простой вид

$$(b - \sqrt{d})/(2a) \geq 1, \quad \tau\sqrt{\tilde{c}_{44}/\tilde{c}_{55}} \geq 1. \quad (50)$$

С учетом соотношений (48), (49), ограничения (50) могут быть окончательно представлены так

$$\max \left( \sqrt{\tilde{c}_{55}/\tilde{c}_{44}}, \sqrt{2 + (\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22} - \tilde{c}_{12}(\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66}))/(\tilde{c}_{22}\tilde{c}_{66})} \right) \leq \tau. \quad (51)$$

Из (51), в частности, следует, что при выполнении условия (48) множество критических значений окружного волнового числа  $\tau$ , при которых в рамках рассматриваемой модели физически непротиворечивое решение исходной задачи построить невозможно, всегда конечно и, если не пустое, включает только его низшие значения.

Если не выполняется (48), но выполняется условие

$$\sqrt{\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}} < \tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66} \leq \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}/\tilde{c}_{12}, \quad (52)$$

то справедливыми являются соотношения  $\zeta \geq 0$  и  $b > 0$ , а, значит, и соотношения

$$h < 0, \quad s > 0, \quad v \geq 0. \quad (53)$$

Поскольку дискриминант квадратного относительно  $p = \tau^2$  уравнения

$$hp^2 + sp + v = 0$$

всегда остается положительным

$$s^2 - 4hv = 16\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}\tilde{c}_{66}^2(\zeta + \tilde{c}_{66}(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{22}))^2 > 0,$$



следовательно, в этом случае достаточными условиями, обеспечивающими возможность построения физически непротиворечивого решения исходной задачи, будут совместные с (52) ограничения (51) и

$$\sqrt{(s + \sqrt{s^2 - 4hv})/(-2h)} > \tau. \quad (54)$$

Условие (54), в частности, обеспечивает  $d > 0$ , а, значит, вещественность и несовпадение параметров  $\eta_j$  ( $j = \overline{1, 2}$ ). При одновременном выполнении (52) и ограничения  $d < 0$

$$\sqrt{(s + \sqrt{s^2 - 4hv})/(-2h)} < \tau \quad (55)$$

окажутся справедливыми соотношения

$$\operatorname{Re}(\eta_1) = \operatorname{Re}(\eta_2) > -1, \quad \operatorname{Im}(\eta_1) = -\operatorname{Im}(\eta_2) \neq 0, \quad (56)$$

следовательно, совместные с (52), (55) ограничения, обеспечивающие возможность построения физически непротиворечивого решения исходной задачи, будут выглядеть так

$$\operatorname{Re}\left(\sqrt{(b + \sqrt{d})/(2a)}\right) > 1, \quad \tilde{c}_{55}/\tilde{c}_{44} \leq \tau^2. \quad (57)$$

Наконец, в случае

$$\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66} > \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}/\tilde{c}_{12} \quad (58)$$

вопрос о существовании физически непротиворечивого решения исходной задачи при  $\tau \geq 2$  сводится к прямой проверке, с одной стороны, удовлетворения поставляемых соотношениями (42) значений параметров  $\eta_j$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) ограничениям (18), с другой, выполнения требования  $d \neq 0$

$$\sqrt{(s + \sqrt{s^2 - 4hv})/(-2h)} \neq \tau. \quad (59)$$

Здесь следует отметить, что, во-первых, применительно к представленным в литературе наборам упругих характеристик цилиндрически ортотропных материалов [6 – 10], а также для любых изотропных и трансверсально изотропных материалов справедливым является первое из рассмотренных ограничений на величины нормированных модулей упругости однородного цилиндрически ортотропного материала  $\tilde{c}_{jp}$  (48), во-вторых, существуют материалы [6], для которых рассматриваемая модель обеспечивает физически корректное решение для любых значений параметра  $\tau \in \mathbb{N}$ .

Наконец, после наложения на параметры  $\eta_j$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) вполне обоснованного дополнительного ограничения

$$|\eta_j - \eta_p| \notin \mathbb{N} \quad (j = \overline{1, 3}; p = \overline{1, 3}; j \neq p), \quad (60)$$

из которого непосредственно следует, что  $\det \left( \mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta_j, 1)} \right) \neq 0$  ( $j = \overline{1, 3}$ ;  $m = \overline{1, \infty}$ ), справедливым становится преобразование рекуррентных уравнений (23), из которых определяются искомые векторные коэффициенты  $\mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_j)}$  ( $j = \overline{1, 3}$ ), для всех  $\eta = \eta_j$  ( $j = \overline{1, 3}$ ), в последовательность явных рекуррентных представлений

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_j)} = & \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 1)} \mathbf{X}_{m-2}^{(\tau, \eta_j)} + \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 2)} \mathbf{X}_{m-q}^{(\tau, \eta_j)} + \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 3)} \mathbf{X}_{m-2-q}^{(\tau, \eta_j)} + \\ & + \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 4)} \mathbf{X}_{m-2q}^{(\tau, \eta_j)} \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (j = \overline{1, 3}). \end{aligned} \quad (61)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_j)} = & \hat{\mathbf{O}} \quad (m < 0; \quad j = \overline{1, 3}), \\ \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, p)} = & - \left( \mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta_j, 1)} \right)^{-1} \mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta_j, p+1)} \quad (m > 1; \quad p = \overline{1, 4}; \quad j = \overline{1, 3}). \end{aligned} \quad (62)$$

Окончательно, решение целевой задачи с учетом рассмотренных групп ограничений на величины нормированных модулей упругости однородного цилиндрически ортотропного материала  $\tilde{c}_{jp}$  и круговое волновое число  $\tau$  совместно с (7), (11) определяются через матричные базисные решения

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) = \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau, B)}(r) \mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r) = \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau, B)}(r) \mathbf{B}, \quad (63)$$

где  $\mathbf{B}$  – вектор-столбец третьего порядка с произвольными компонентами;  $\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau, B)}(r)$  и  $\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau, B)}(r)$  – матричные базисные решения следующего вида

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau, B)}(r) = & \mathbf{A}_1(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m [r^{\eta_1} \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_1)}, r^{\eta_2} \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_2)}, r^{\eta_3} \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_3)}], \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau, B)}(r) = & \mathbf{A}_2(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m [r^{\eta_1} \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta_1)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_1)}, \\ & r^{\eta_2} \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta_2)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_2)}, r^{\eta_3} \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta_3)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_3)}]. \end{aligned} \quad (64)$$

Для норм матричных коэффициентов в соотношениях (62) асимптотические оценки при  $m \rightarrow \infty$  имеют вид

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 1)} \right\| & \approx m^{-1} \left| \tilde{k} \right| (1 + \tilde{c}_{13}/\tilde{c}_{55}), \quad \left\| \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 2)} \right\| \approx m^{-1} q \sqrt{3} |\lambda(1 - 2\delta)|, \\ \left\| \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 3)} \right\| & \approx m^{-2} q \left| \lambda \tilde{k} (\delta(1 + \tilde{c}_{13}/\tilde{c}_{55}) - 1) \right|, \\ \left\| \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 4)} \right\| & \approx m^{-2} \lambda^2 q^2 \sqrt{3} |\delta(1 - \delta)| \quad (j = \overline{1, 3}), \end{aligned}$$

следовательно, разложения в представлениях (64) сходятся абсолютно и равномерно на любом конечном отрезке  $r \in [r_0, r_1]$  ( $0 < r_0 < r_1 < \infty$ ) [5].

**6. Получение дисперсионных соотношений.** На основании полученных представлений для решений целевой задачи в рамках модели (1) – (6) определяются дисперсионное уравнение, задающие спектр целевой задачи, а также

уравнение для определения неизвестного векторного коэффициента  $\mathbf{B}$  в случае продольно-сдвиговых и неосесимметричных волн.

Для крутильных волн дисперсионные соотношения с учетом представлений (24), (25) соответственно выбранным граничным условиям (6) получают вид

$$\left[ \tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(1) \right]_2 = 0, \quad b = 1,$$

либо

$$\tilde{u}_\theta^{(TW,B)}(1) = 0, \quad b = 1.$$

В случае продольно-сдвиговых волн дисперсионные соотношения с учетом представлений (29), (37) соответственно выбранным граничным условиям (6) записываются так:

$$\det \left( \left[ \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(1) \right]_{(1,4),(1..2)} \right) = 0, \quad \left[ \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(1) \right]_{(1,4),(1..2)} \mathbf{B} = \hat{\mathbf{O}},$$

либо

$$\det \left( \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(1) \right) = 0, \quad \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(1) \mathbf{B} = \hat{\mathbf{O}}.$$

В случае неосесимметричных волн дисперсионные соотношения с учетом представлений (7), (11), (63) соответственно выбранным граничным условиям (6) получают следующий вид

$$\det \left( \left[ \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)}(1) \right]_{(1,5,6),(1..3)} \right) = 0, \quad \left[ \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)}(1) \right]_{(1,5,6),(1..3)} \mathbf{B} = \hat{\mathbf{O}},$$

либо

$$\det(\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(1)) = 0, \quad \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(1) \mathbf{B} = \hat{\mathbf{O}}.$$

**7. Анализ результатов численного эксперимента.** В качестве однородного материала для представлений (1) был выбран цилиндрически ортотропный материал, набор параметров  $\tilde{c}_{js}$  которого выражается через нормированные технические упругие постоянные, представленные в работе [6] с принятой в ней схемой индексации

$$E_1 = 43/24, \quad E_2 = 179/24, \quad E_3 = 131/24, \quad G_{23} = 28/24,$$

$$G_{13} = 1, \quad G_{12} = 1, \quad \nu_{23} = 0.15, \quad \nu_{12} = 0.08, \quad \nu_{13} = 0.102.$$

Волноводные свойства этого материала обеспечивают физически корректное решение задачи описания дисперсионного спектра в рамках используемой модели для любых значений параметра  $\tau$ .

При численном эксперименте значение параметра  $\delta$  бралось фиксированным  $\delta = 1/2$ . Этот выбор обуславливался результатами проведенного с высокой точностью вычислений анализа скорости сходимости разложений базисных решений (25), (38) и (64).

Выполнен анализ ряда эффектов влияния параметров неоднородности на топологическую структуру и свойства действительных ветвей дисперсионных спектров бегущих нормальных продольно-сдвиговых LSW и изгибных FW ( $\tau = 1t$ ) волн в однородных  $(\lambda, q) = (0, 0)$  и радиально неоднородных  $(\lambda, q) = (\ln(1/2), 6)$ ,  $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 6)$  свободных цилиндрах. Ниже представлены указанные спектры в случае радиально неоднородных  $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 6)$  волноводов для LSW (рис. 1-а) и FW (рис. 1-б) волн.

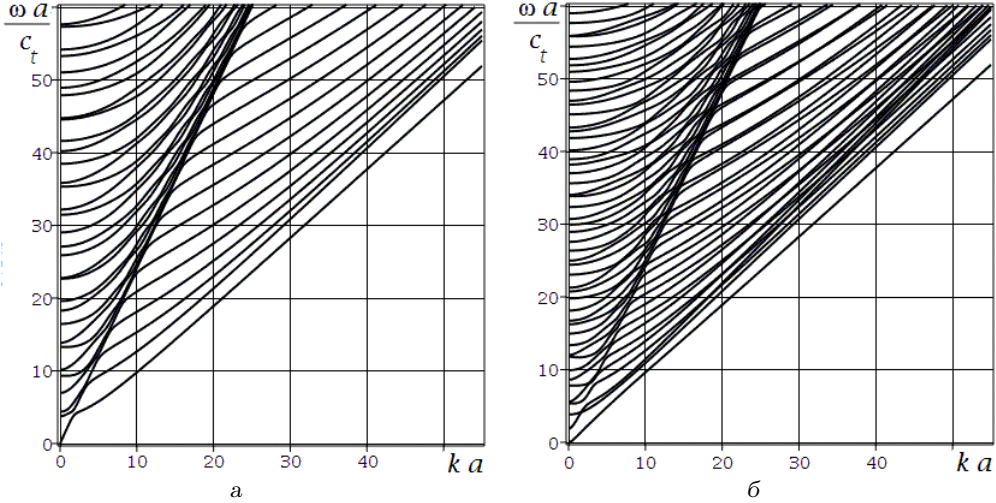


Рис. 1.

Для анализа количественных различий в поведении пяти нижних мод сопоставляемых спектров использовалась функция сравнения

$$\Delta\Omega(ka) = (\omega_{\lambda,q}(ka) - \omega_{0,0}(ka)) a/c_t,$$

$$a = R_*, \quad c_t = \sqrt{c_*/\bar{\rho}}$$

мод с одинаковыми номерами: в случае LSW  $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 6) - (\lambda, q) = (0, 0)$  (рис. 2); в случае FW  $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 6) - (\lambda, q) = (0, 0)$  (рис. 3) и  $(\lambda, q) = (\ln(1/2), 6) - (\lambda, q) = (0, 0)$  (рис. 4).

При общем качественном подобии спектров для одного типа волн в цилиндрах с различными показателями радиальной неоднородности, представленный на рисунках 2-4 графический анализ позволяет сделать ряд заключений. Можно отметить, что значения функции  $\Delta\Omega(ka)$  для всех мод начиная со второй стабилизируются в диапазоне  $ka > 30$ , указывая на устойчивое сближение сопоставляемых ветвей спектра однородного и радиально неоднородного цилиндров после локализованного в длинноволновом диапазоне уменьшения в случае  $\lambda > 0$  и увеличения в случае  $\lambda < 0$  приведенной частоты для указанных мод. При этом поведение первой моды спектра кардинально отличается. После локализованного в узком диапазоне  $ka < 2$  незначительного увеличения в случае

Нормальные волны в функционально градиентных ортотропных цилиндрах

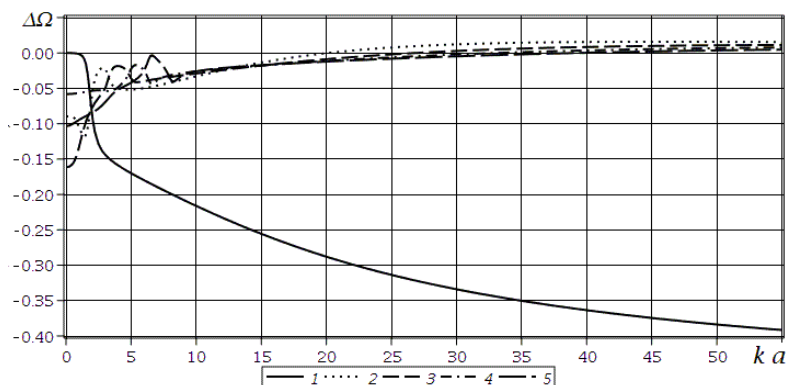


Рис. 2.

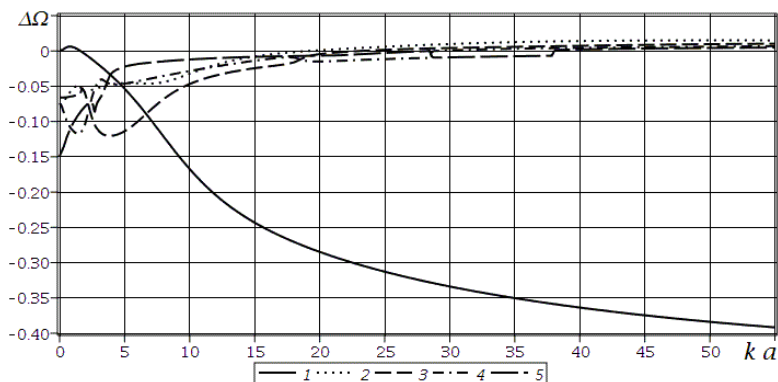


Рис. 3.

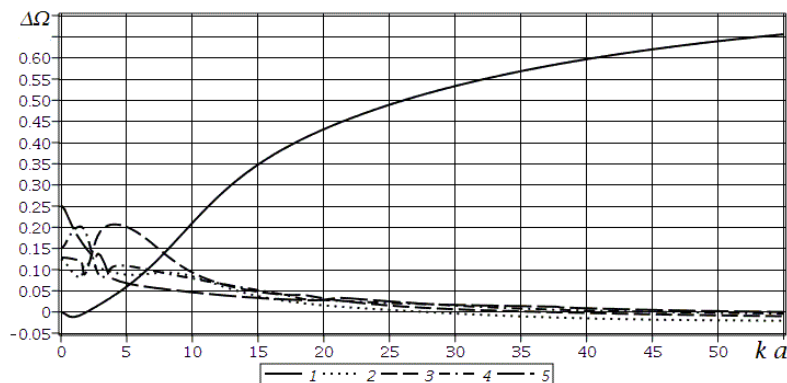


Рис. 4.

$\lambda > 0$  и уменьшения в случае  $\lambda < 0$  приведенной частоты тенденция кардинально меняется на противоположную со стабилизацией в области значительно более коротких волн  $ka > 60$ , фиксирующей устойчивое смещение первой моды в область более низких в случае  $\lambda > 0$  и более высоких в случае  $\lambda < 0$  приведенных частот.

Ниже для случаев LSW и FW в радиально неоднородном  $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 6)$  свободном цилиндре представлены графики нормализованных фазовых  $c_p/c_t$  (рис. 5 и рис. 6) и групповых  $c_g/c_t$  (рис. 7 и рис. 8) скоростей.

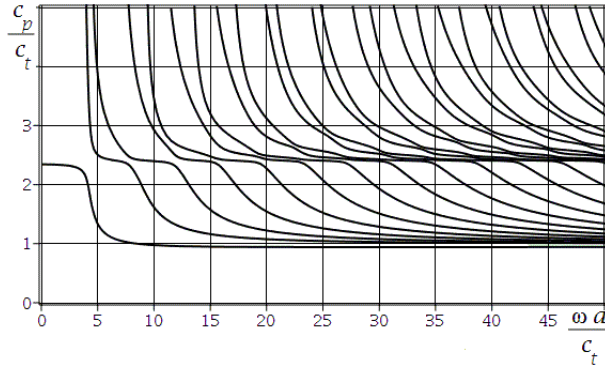


Рис. 5.

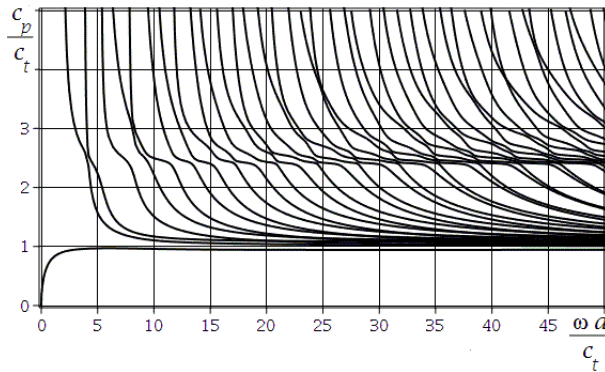


Рис. 6.

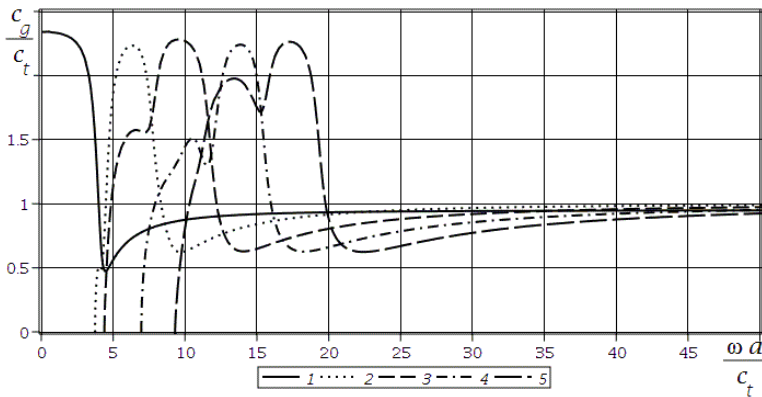


Рис. 7.

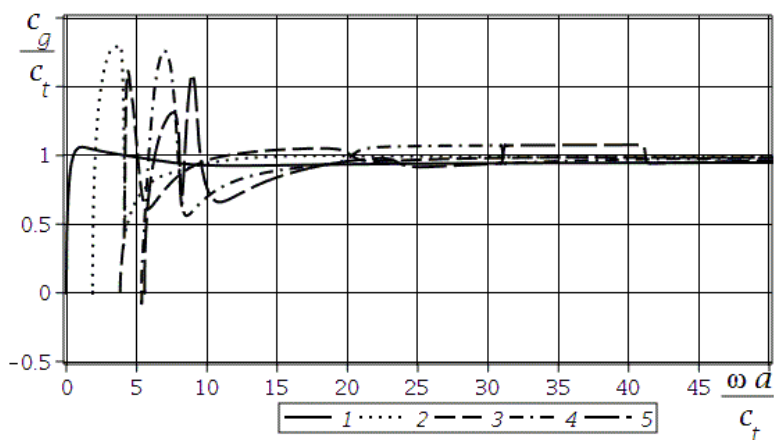


Рис. 8.

**Выводы.** Разработана методика построения базисных множеств частных решений уравнений волнового деформирования цилиндрически ортотропных протяженных цилиндров кругового поперечного сечения с экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью материала для краевых задач о спектрах осесимметричных и неосесимметричных нормальных упругих волн. Разработаны программные приложения для реализации алгоритмов решения рассматриваемого класса задач, с применением которых проведен сравнительный анализ топологического строения дисперсионных спектров, распределений фазовых и групповых скоростей бегущих нормальных продольно сдвиговых и изгибных волн в однородных и радиально неоднородных цилиндрически ортотропных протяженных цилиндрах кругового поперечного сечения для случая свободной граничной поверхности, проанализированы и описаны эффекты влияния на указанные характеристики экспоненциально-степенной радиальной неоднородности материала волновода. Полученные результаты перспективны для использования в прикладных исследованиях, связанных с расчетами характеристик волноводных компонентов акустоэлектронных устройств, анализа моделей ультразвуковой диагностики.

1. Моисеенко И.А. Спектры нормальных упругих волн кручения в экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах / И.А. Моисеенко. // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – Вып. 9 (55). – С. 139–145.
2. Моисеенко И.А. Продольные волны в экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах / И.А. Моисеенко. // Вестник Запорожского национального университета: Сборник научных статей. Физико-математические науки. – Запорожье: Запорожский национальный университет. – 2015. – № 3. – С. 179–189.
3. Моисеенко И.А. Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн в ортотропных цилиндрах с функционально-градиентной радиальной неоднородностью / И.А. Моисеенко, В.И. Сторожев. // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 112–124.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
5. Туляков Д.Н. Асимптотики решений рекуррентных соотношений / Д.Н. Туляков. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Институт

- прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук. – М. – 2011. – 236 с.
6. Шульга Н.А. Распространение неосесимметричных упругих волн в анизотропном полом цилиндре / Н.А. Шульга, А.Я. Григоренко, Т.Л. Ефимова // Прикладная механика. – 1986. – Т. 22. – № 8. – С. 118–121.
  7. Kardomateas G.A. Bifurcation of equilibrium in thick orthotropic cylindrical shells under axial compression / G.A. Kardomateas // Journal of Applied Mechanics. – 1995. – Vol. 62. – N. 1. – P. 43–52.
  8. Sun X.S. Homogenization and Stress Analysis of Multilayered Composite Offshore Production Risers / X.S. Sun, Y. Chen, V.B.C. Tan, R.K. Jaiman, T.E. Tay // Journal of Applied Mechanics. – 2014. – Vol. 81. – P. 1–12.
  9. Tsukrov I. Elastic deformation of composite cylinders with cylindrically orthotropic layers / I. Tsukrov, B. Drach // International Journal of Solids and Structures. – 2010. – V. 47. – P. 25–33.
  10. Tsukrov I. Effective stiffness and thermal expansion coefficients of unidirectional composites with fibers surrounded by cylindrically orthotropic matrix layers / I. Tsukrov, B. Drach, T.S. Gross // International Journal of Engineering Science. – 2012. – V. 58. – P. 129–143.

#### I.A. Moiseyenko, V.A. Moiseyenko

##### Normal waves in functionally graded orthotropic cylinders.

The wave motion is described on the basis of a complete system of linear dynamical equations of elasticity theory. The elastic modules and density of the cylinder material are taken as an exponentially-power functions of the radial coordinate. The basic solutions of the system of differential equations of the model are constructed in matrix form in the form of decompositions of the radial components of the solution into uniformly and absolutely converging generalized power series in radial coordinate. The dispersion relations describing the harmonic spectra of normal waves in the case of free and rigidly fixed of boundary surface, is presented. The effects of the parameters of radial inhomogeneity on the topology of dispersion spectra, the distribution of phase and group velocities of propagating normal waves are studied.

**Keywords:** *FGMs, cylindrical-orthotropic waveguide, normal waves, basic solutions, dispersion relations, phase velocity, group velocity.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк  
ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства  
и архитектуры”, Макеевка  
mian@i.ua

Получено 05.04.2016



УДК 539.3:534.1

©2016. Д.С. Вуколов, В.И. Сторожев

## РАССЕЯНИЕ НОРМАЛЬНЫХ СДВИГОВЫХ ВОЛН НА ВНУТРЕННЕМ ОРТОТРОПНОМ ТУННЕЛЬНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВКЛЮЧЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ В СВОБОДНОМ ОРТОТРОПНОМ СЛОЕ

С использованием сочетания метода изображений, метода перехода к аффинно-преобразованным координатам для интегрирования обобщенных метагармонических уравнений, а также метода ортогональных рядов для алгебраизации функциональных краевых условий граничных задач волновой механики деформируемых сред, реализовано численно-аналитическое исследование модели дифракционного рассеяния бегущих симметричных нормальных волн продольного сдвига на внутреннем туннельном цилиндрическом ортотропном упругом включении эллиптического сечения в свободном по плоским граням деформируемом ортотропном слое. Рассмотрен случай нормального падения симметричной по толщине слоя волны из произвольной моды дисперсионного спектра на включение с лежащей в срединной плоскости продольной осью и с полуосями эллиптического сечения, ориентированными в плоскости и по толщине слоя. Получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов представлений полей рассеиваемых включением и преломленных в упругом включении волн рядами по базисным частным решениям уравнений стационарного динамического деформирования. Представлены результаты численных исследований отдельных ведущих закономерностей в распределениях волновых перемещений в ближнем и дальнем дифракционном поле при варьировании полуосей эллиптического сечения, относительной длины падающей волны из нижней моды дисперсионного спектра, а также соотношения модулей продольного сдвига для ортотропного материала слоя.

**Ключевые слова:** свободный ортотропный упругий слой, внутреннее туннельное цилиндрическое включение, эллиптическое сечение, дифракционное рассеяние, симметричные нормальные волны сдвига, численно-аналитическое исследование, методы изображений и аффинных преобразований, ряды по базисным решениям волновых уравнений, варьирование геометрических и механических параметров, закономерности распределений волновых перемещений.

**Введение.** Проблемы теоретического исследования двумерных дифракционных полей, возникающих вследствие рассеяния стационарных волн механических деформаций на неоднородностях в виде внутренних туннельных полостей и включений в упругих телах, несмотря на реализованные и обобщенные в работах [1 – 7] исследования сохраняют ряд открытых, актуальных в фундаментальном и прикладном отношении аспектов. В частности, это заключение справедливо для задач о дифракционном рассеянии нормальных волн на туннельных полостях и включениях, расположенных в толще упругого слоя. Так, в работе [9] общая описана принципиальная схема применения метода изображений (метода многократных отражений) при получении дисперсионных соотношений для волн сдвига в изотропном слое с периодическим рядом ортогональных направлению распространения и параллельных граням внутренних туннельных ци-

линдрических полостей. Ряд исследований по рассматриваемой проблематике, представленных в работах [10 – 14], осуществлен с применением метода конечных элементов.

В работах [15 – 17] представлены результаты реализации численно-аналитического алгоритма для исследования задач рассматриваемого типа в случае дифракционных полей в закрепленном по граням изотропном слое с уединенной туннельной полостью либо туннельным включением кругового сечения. В работе [18] аналогичные исследования проведены для случая рассеяния нормальных симметричных волн деформаций на туннельной полости эллиптического сечения в закрепленном ортотропном слое с упругими постоянными, характеризующимися специальным соотношением пропорциональности с полуосями сечения.

В настоящей работе рассматривается задача описания полей рассеянных и преломленных волн при падении нормальной симметричной волны из произвольной моды соответствующего спектра на туннельное цилиндрическое ортотропное упругое включение эллиптического сечения с закрепленной границей в свободном по граням ортотропном слое с упругими постоянными, характеризующимися специальным соотношением пропорциональности с полуосями сечения. Применяется подход, основывающийся на аффинном преобразовании координат для трансформации уравнения стационарных колебаний антиплоской деформации ортотропной среды в метагармоническое уравнение, а также на представлении поля рассеиваемых в слое волн в виде суперпозиции рядов по базисным системам решений метагармонических уравнений во вспомогательных аффинно-преобразованных локальных координатных системах с полюсами, зеркально размещаемыми относительно его границ.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается прямолинейно ортотропный упругий слой толщины  $2h$ , отнесенный к прямоугольным координатам  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ . Сечение слоя в плоскости  $O\xi_1\xi_2$  изображено на рисунке 1. Полагается, что грани слоя  $\Gamma_{\pm} : \xi_2 = \pm h$  свободны от механических напряжений, а внутри слоя расположено туннельное цилиндрическое ортотропное упругое включение эллиптического поперечного сечения  $V_2 = \{\xi_1^2/a^2 + \xi_2^2/b^2 \leq 1\}$  с полуосями  $(a, b)$  и контуром, имеющим параметрическое представление  $\Gamma = \{\xi_1 = a \cos \phi, \xi_2 = b \sin \phi, \phi \in [0, 2\pi]\}$ . Во введенных координатах занимаемая слоем область имеет вид

$$V_1 = \{|\xi_1| < h, -\infty < \xi_2 < \infty, -\infty < \xi_3 < \infty, \} / \{V_2 \times [-h, h]\}.$$

Физико-механические свойства слоя в случае динамической антиплоской деформации со смещениями вдоль координатного направления  $O\xi_3$  характеризуются упругими постоянными  $c_{44}, c_{55}$  и параметром плотности  $\rho$ , а для включения соответствующие характеристики в рассматриваемой модели принимаются равными  $c_{44}^{(1)} = \delta c_{44}, c_{55}^{(1)} = \delta c_{55}, \rho^{(1)} = \delta \rho$ . Полуоси  $a, b$  сечения  $V_2$  в рассматриваемом случае определяются через геометрический параметр  $R$  и имеют значения  $a = R, b = (c_{55}/c_{44})^{1/2}R$ . Введенные упругие постоянные отнесены к нормирующему параметру  $c_*$ .

Полагается, что в слое вдоль положительного координатного направления  $O\xi_1$  распространяется нормальная симметричная по координате  $\xi_2$  поляризованная вдоль  $O\xi_3$  волна продольного сдвига с круговой частотой  $\omega$  из произвольной моды дисперсионного спектра с номером  $q$ , характеризующаяся функцией упругих волновых перемещений  $U_3^{(\text{пад})}(\xi_1, \xi_2, t)$ .

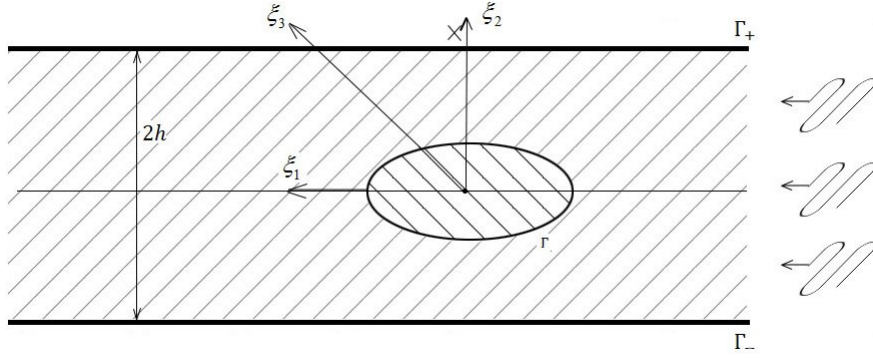


Рис. 1. Сечение свободного слоя с внутренним туннельным цилиндрическим упругим включением эллиптического сечения.

Искомые комплексные функции волновых перемещений  $U_3^{(\text{отр})}(\xi_1, \xi_2, t)$  в отраженных и огибающих включение волнах подлежат определению из краевой задачи для уравнения стационарных сдвиговых упругих колебаний антиплоской деформации для материала слоя, которое в случае отнесения всех характеристик с линейной размерностью к нормирующему параметру  $h$  принимает форму

$$(c_{55}\partial_1^2 + c_{44}\partial_2^2 - (\rho h^2/c_*) \partial_t^2)U_3^{(1)} = 0, \quad (1)$$

где

$$\partial_j = \partial/\partial\xi_j \quad (j = 1, 2), \quad \partial_t = \partial/\partial t, \quad U_3^{(1)} = U_3^{(\text{пад})} + U_3^{(\text{отр})}. \quad (2)$$

Для функции волновых упругих перемещений в падающей нормальной упругой SH-волне вводится исходное представление

$$U_3^{(\text{над})}(\xi_1, \xi_2, t) = U_{30} \cos(\tilde{\alpha}_q \xi_2) \cdot \exp(-i(\omega t - k_q \xi_1)), \quad (3)$$

в котором

$$\tilde{\alpha}_q = (2q - 1)\pi/(2h), \quad k_q = (\Omega_1^2 - \tilde{\alpha}_q^2)^{1/2}, \quad \Omega_1^2 = \rho_1 \omega^2 h^2 / c_*, \quad (4)$$

$q$  ( $q = \overline{1, \infty}$ ) – номер моды падающих нормальных бегущих симметричных SH-волн в свободном по плоским граням слое.

Комплексная функция волновых перемещений в генерируемых во включении преломленных волнах  $U_3^{(2)}(\xi_1, \xi_2, t) = U_3^{(\text{нрел})}(\xi_1, \xi_2, t)$  также подлежит определению из уравнения вида (1), в котором величины  $c_{44}$ ,  $c_{55}$ ,  $\rho$  заменяются на  $c_{44}^{(1)}$ ,  $c_{55}^{(1)}$ ,  $\rho^{(1)}$ .

Краевые условия рассматриваемой задачи на свободных плоских гранях слоя  $\Gamma_{\pm}$  и на границе идеально механического контакта слоя и включения имеют вид

$$(\partial U_3^{(1)}/\partial \xi_2)_{\xi_2=\pm h} = 0, \quad (U_3^{(1)})_{\Gamma} = (U_3^{(2)})_{\Gamma}, \quad (\sigma_{n3}^{(1)})_{\Gamma} = (\sigma_{n3}^{(2)})_{\Gamma} \quad (5)$$

Представление (3) априори удовлетворяет первому из краевых условий (5). Задача заключается в описании полей отраженных и преломленных волн.

**2. Построение численно-аналитического решения задачи.** На исходном этапе построения решения осуществляется аффинное преобразование с переходом от координат  $O\xi_1\xi_2$  к координатам  $Ox_1x_2$ , которое описывается соотношениями

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \mu\xi_2, \quad \mu = (c_{44}/c_{55})^{1/2}, \quad (6)$$

и в плоскости  $Ox_1x_2$  вводится система полярных координат  $Or\theta$ , связанных с  $x_j$  соотношениями

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (7)$$

При этом эллиптический контур сечения полости  $\Gamma$  трансформируется в окружность  $\tilde{\Gamma}$  радиуса  $R$ , а уравнение (1) и краевые условия (5) на свободных гранях слоя  $\tilde{\Gamma}_{\pm} : x_2 = \pm \tilde{h}$ ,  $\tilde{h} = \mu h$  и на трансформированном контуре включения принимают вид

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2 - \rho h^2 c_*^{-1} \partial_t^2) U_3^{(1)} = 0, \quad (8)$$

$$(\partial U_3^{(1)}/\partial x_2)_{x_2=\pm \tilde{h}} = 0, \quad (9)$$

$$(U_3^{(1)})_{\tilde{\Gamma}} = (U_3^{(2)})_{\tilde{\Gamma}}, \quad (\sigma_{r3}^{(1)})_{\tilde{\Gamma}} = (\sigma_{r3}^{(2)})_{\tilde{\Gamma}}. \quad (10)$$

Для записи амплитудной составляющей поля волн, отраженных от включения и удовлетворяющих краевому условию на свободных гранях слоя  $\tilde{\Gamma}_{\pm}$ , согласно концепции метода изображений [1 – 4, 19] вводится счетное множество вспомогательных локальных прямоугольных и полярных координатных систем с полюсами  $O_k$ , имеющими в  $Ox_1x_2$  координаты  $x_{1,k} = 0$ ,  $x_{2,k} = 2k\tilde{h}$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ). С использованием введенных локальных координатных систем записывается удовлетворяющее условию на  $\tilde{\Gamma}_{\pm}$  представление

$$U_3^{(\text{отр})} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\Omega_1 r_0) \cos(n\theta_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (H_n^{(1)}(\Omega_1 r_k) \cos(n\theta_k) + H_n^{(1)}(\Omega_1 r_{-k}) \cos(n\theta_{-k})), \quad \Omega_1^2 = \rho h^2 \omega^2 / c_*, \quad (11)$$

которое представляет собой суперпозицию рядов по базисным частным решениям (1) во введенных локальных координатных системах с неизвестными подлежащими определению коэффициентами. Представление (11) с применением

теорем сложения цилиндрических функций может быть записано в координатной системе  $(r_0, \theta_0)$  при  $r_0 < \tilde{h}$  в виде

$$U_3^{(\text{отр})} = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n H_n^{(1)}(\Omega_1 r_0) + \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega_1 r_0) \sum_{k=1}^{\infty} [H_{p-n}^{(1)}(2\Omega_1 \tilde{h}k) + H_{n+p}^{(1)}(2\Omega_1 \tilde{h}k)]] \cos(n\theta_0). \quad (12)$$

С введением обозначения  $S_{p,n} = \sum_{k=1}^{\infty} H_{p-n}^{(1)}(2\Omega_1 \tilde{h}k)$  представление (12) приобретает следующую форму записи в координатах  $(r_0, \theta_0)$ , связанных с центром полости

$$U_3^{(\text{отр})} = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n H_n^{(1)}(\Omega_1 r_0) + \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega_1 r_0) (S_{p,n} + S_{p,-n})] \cos(n\theta_0). \quad (13)$$

Для амплитудной функции волновых перемещений в преломленных во включении волнах соответственно записывается представление

$$U_3^{(\text{прел})} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_n(\Omega_2 r) \cos(n\theta), \quad (14)$$

в котором  $\Omega_2^2 = \Omega_1^2 / \delta$ ,  $B_n$  – подлежащие определению неизвестные коэффициенты.

Контурное представление на  $\tilde{\Gamma}$  для комплексной амплитудной составляющей функции перемещений в падающей волне

$$\tilde{U}_3^{(\text{пад})} = U_{30} \cos(\tilde{\alpha}_n \xi_2) \cdot \exp(ik_n \xi_1) = U_{30} \cos(\alpha_n x_2) \cdot \exp(ik_n x_1), \quad (15)$$

где  $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n / \mu$ , записывается с использованием формулы обобщенного разложения Якоби [5] на контуре  $\tilde{\Gamma}$

$$(\exp(\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2))_{\tilde{\Gamma}} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} Q_p(\nu_1, \nu_2) e^{ip\varphi}, \quad (16)$$

$$Q_p(\nu_1, \nu_2) = J_p(-iR(\nu_1^2 + \nu_2^2)^{1/2}) ((i\nu_1 + \nu_2) / (\nu_1^2 + \nu_2^2)^{1/2})^p,$$

и может быть преобразовано к виду

$$(U_3^{(\text{пад})})_{\tilde{\Gamma}} = U_{30} \sum_{p=0}^{\infty} \delta_p^0 J_p(R(k_n^2 + \alpha_n^2)^{1/2}) i^p (((k_n + i\alpha_n) / (k_n - i\alpha_n))^{p/2} + ((k_n - i\alpha_n) / (k_n + i\alpha_n))^{p/2}) \cos(p\theta), \quad (17)$$

$$\delta_p^0 = \begin{cases} 1/2, & p = 0; \\ 1, & p \neq 0. \end{cases}$$

В результате, из порождаемого краевыми условиями (10) функционального уравнения с применением для его алгебраизации метода ортогональных рядов может быть получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $A_n$ ,  $B_n$  в представлениях  $U_3^{(\text{отр})}$ ,  $U_3^{(\text{прел})}$ :

$$\begin{aligned} & B_n J_n(\Omega_2 R) - A_n H_n^{(1)}(\Omega_1 R) - \\ & - \delta_n^0 J_n(\Omega_1 R) \cdot \sum_{q=0}^{\infty} A_q (i^{q-n} + i^{-q+n})(S_{q,n} + S_{q,-n}) = \\ & = U_{30} \delta_n^0 J_n(R(k_q^2 + \alpha_q^2)^{1/2}) i^n (((k_q + i\alpha_q)/(k_q - i\alpha_q))^{n/2} + \\ & \quad + ((k_q - i\alpha_q)/(k_q + i\alpha_q))^{n/2}), \\ & B_n \delta((n/R) J_n(\Omega_2 R) - \Omega_2 J_{n+1}(\Omega_2 R)) - A_n ((n/R) H_n^{(1)}(\Omega_1 R) - \\ & \quad - \Omega_1 H_{n+1}^{(1)}(\Omega_1 R)) - \delta_n^0 ((n/R) J_n(\Omega_1 R) - \\ & \quad - \Omega_1 J_{n+1}(\Omega_1 R)) \cdot \sum_{q=0}^{\infty} A_q (i^{q-n} + i^{-q+n})(S_{q,n} + S_{q,-n}) = \\ & = U_{30} \delta_n^0 ((n/R) J_n(R(k_q^2 + \alpha_q^2)^{1/2}) - \\ & \quad - (k_q^2 + \alpha_q^2)^{1/2} J_{n+1}(R(k_q^2 + \alpha_q^2)^{1/2})) i^n (((k_q + i\alpha_q)/(k_q - i\alpha_q))^{n/2} + \\ & \quad + ((k_q - i\alpha_q)/(k_q + i\alpha_q))^{n/2}) \quad (n = \overline{0, \infty}). \end{aligned} \tag{18}$$

В полученной системе уравнений может быть исключена группа коэффициентов  $B_n$ , и в результате уравнения трансформированной системы относительно неизвестных  $A_n$  могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} & A_n (\delta^{-1}((n/R) H_n^{(1)}(\Omega_1 R) - \Omega_1 H_{n+1}^{(1)}(\Omega_1 R)) ((n/R) J_n(\Omega_2 R) - \\ & - \Omega_1 J_{n+1}(\Omega_2 R))^{-1} - H_n^{(1)}(\Omega_1 R) / J_n(\Omega_2 R)) + \delta_n^0 (\delta^{-1}((n/R) J_n(\Omega_1 R) - \\ & - \Omega_1 J_{n+1}(\Omega_1 R)) ((n/R) J_n(\Omega_2 R) - \Omega_1 J_{n+1}(\Omega_2 R))^{-1} - \\ & - J_n(\Omega_1 R) / J_n(\Omega_2 R)) \cdot \sum_{q=0}^{\infty} A_q (i^{q-n} + i^{-q+n})(S_{q,n} + S_{q,-n}) = \\ & = U_{30} \delta_n^0 (J_n(R(k_q^2 + \alpha_q^2)^{1/2}) / J_n(\Omega_2 R) - \delta^{-1}((n/R) J_n(R(k_q^2 + \alpha_q^2)^{1/2}) - \\ & - (k_q^2 + \alpha_q^2)^{1/2} J_{n+1}(R(k_q^2 + \alpha_q^2)^{1/2})) / ((n/R) J_n(\Omega_2 R) - \Omega_1 J_{n+1}(\Omega_2 R))) i^n \cdot \\ & \cdot (((k_q + i\alpha_q)/(k_q - i\alpha_q))^{n/2} + ((k_q - i\alpha_q)/(k_q + i\alpha_q))^{n/2}) \quad (n = \overline{0, \infty}). \end{aligned} \tag{19}$$

После нахождения искомых коэффициентов кинематические характеристики исследуемого волнового поля в произвольной точке  $(\xi_1, \xi_2)$  сечения слоя могут

быть рассчитаны с использованием формул (11), (14), (15). Расчетные соотношения для силовых характеристик в полях падающих и отраженных волн могут быть получены с использованием вспомогательных соотношений

$$\begin{aligned} & \partial_1(H_n^{(1)}(\Omega r) \cdot \cos(n\theta)) = \\ & = (\Omega/2)(H_{n-1}^{(1)}(\Omega r) \cdot \cos((n-1)\theta) - H_{n+1}^{(1)}(\Omega r) \cdot \cos((n+1)\theta)), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \partial_2(H_n^{(1)}(\Omega r) \cdot \cos(n\theta)) = \\ & = -\mu(\Omega/2)(H_{n-1}^{(1)}(\Omega r) \cdot \sin((n-1)\theta) + H_{n+1}^{(1)}(\Omega r) \cdot \sin((n+1)\theta)), \end{aligned} \quad (21)$$

записываются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(\text{пад})}(\xi_1, \xi_2, t) & = c_{55}(\partial_1 U_3^{(\text{пад})}) = \\ & = ik_n c_{55} U_{30} \cos(\tilde{\alpha}_n \xi_2) \exp(-i(\omega t - ik_n \xi_1)), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{23}^{(\text{пад})}(\xi_1, \xi_2, t) & = c_{44}(\partial_2 U_3^{(\text{пад})}) = \\ & = -\tilde{\alpha}_n c_{44} U_{30} \sin(\tilde{\alpha}_n \xi_2) \exp(-i(\omega t - ik_n \xi_1)), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(\text{отр})} & = c_{55}(\partial_1 U_3^{(\text{отр})}) = \\ & = c_{55}(\Omega_1/2) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} A_n (H_{n-1}^{(1)}(\Omega_1 r_0) \cos((n-1)\theta_0) - H_{n+1}^{(1)}(\Omega_1 r_0) \cos((n+1)\theta_0)) + \right. \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (H_{n-1}^{(1)}(\Omega_1 r_k) \cos((n-1)\theta_k) - H_{n+1}^{(1)}(\Omega_1 r_k) \cos((n+1)\theta_k) + \\ & \left. + H_{n-1}^{(1)}(\Omega_1 r_{-k}) \cos((n-1)\theta_{-k}) - H_{n+1}^{(1)}(\Omega_1 r_k) \cos((n+1)\theta_k) \right], \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{23}^{(\text{отр})} & = c_{44}(\partial_2 U_3^{(\text{отр})}) = \\ & = -\mu c_{44}(\Omega_1/2) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} A_n (H_{n-1}^{(1)}(\Omega_1 r_0) \sin((n-1)\theta_0) + H_{n+1}^{(1)}(\Omega_1 r_0) \sin((n+1)\theta_0)) + \right. \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (H_{n-1}^{(1)}(\Omega_1 r_k) \sin((n-1)\theta_k) + H_{n+1}^{(1)}(\Omega_1 r_k) \sin((n+1)\theta_k) + \\ & \left. + H_{n-1}^{(1)}(\Omega_1 r_{-k}) \sin((n-1)\theta_{-k}) + H_{n+1}^{(1)}(\Omega_1 r_k) \sin((n+1)\theta_k) \right], \end{aligned} \quad (25)$$

Ввиду симметрии анализируемых полей относительно оси  $O\xi_1$  расчет их харак-

теристик может проводиться для точек  $(\xi_1, \xi_2)$  с  $\xi_2 \geq 0$ , и при этом

$$\begin{aligned}
 r_0 &= (\xi_1^2 + (\mu\xi_2)^2)^{1/2}, \\
 \theta_0 &= \begin{cases} \operatorname{arctg}(\mu\xi_2/\xi_1), & \xi_1 > 0; \\ \operatorname{arctg}(\mu\xi_2/\xi_1) + \pi, & \xi_1 < 0; \\ \pi/2, & \xi_1 = 0; \end{cases} \\
 r_{\pm k} &= (\xi_1^2 + (\mu(\xi_2 + 2kh))^2)^{1/2}, \\
 \theta_{\pm k} &= \begin{cases} \operatorname{arctg}(\mu(\xi_2 + 2kh)/\xi_1), & \xi_1 > 0, \xi_2 + 2kh \geq 0; \\ \operatorname{arctg}(\mu(\xi_2 + 2kh)/\xi_1) + \pi, & \xi_1 < 0, \xi_2 + 2kh \geq 0; \\ \operatorname{arctg}(\mu(\xi_2 + 2kh)/\xi_1), & \xi_1 > 0, \xi_2 + 2kh \leq 0; \\ \operatorname{arctg}(\mu(\xi_2 + 2kh)/\xi_1) + \pi, & \xi_1 < 0, \xi_2 + 2kh \leq 0; \end{cases} \\
 \theta_{\pm k} &= \begin{cases} \operatorname{arctg}(\mu(\xi_2 + 2kh)/\xi_1), & \xi_1 = 0, \xi_2 + 2kh > 0; \\ \operatorname{arctg}(\mu(\xi_2 + 2kh)/\xi_1), & \xi_1 = 0, \xi_2 + 2kh < 0. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{26}$$

**3. Результаты численных исследований.** С применением разработанной и описанной методики реализован анализ полей волновых перемещений, формирующихся в процессе рассеяния симметричных нормальных волн сдвига с варьируемой относительной длиной  $\lambda = (2\pi/k_0)h^{-1}$  из низшей моды  $q = 0$  дисперсионного спектра на включении, механические свойства, форма и размеры которого описываются кортежем варьируемых параметров  $\{c_{44}, c_{55}, R, \delta\}$  в предположении, что плотности материалов слоя и включения равны. Результаты проведенных расчетов представлены на рисунках 2 – 17 в форме тонированных изображений, на которых нарастающую интенсивности характеризуемых величин отвечает переход от светлых тонов к темным. Иллюстрируются распределения уровней волновых перемещений внутри эллиптических включений с варьируемыми полуосями, а также в подобласти слоя  $\xi_1 \in [-h, h]$ ,  $\xi_2 \in [-4h, 8h]$  вне включения для моментов времени, соответствующих началу периодов волновых колебаний. Варьируемыми расчетными параметрами рассматриваемой модели являются относительная длина падающей волны  $\lambda$ , соотношение параметров  $c_{44}$  и  $c_{55}$ , параметр относительных размеров  $R/h$ , а также показатель  $\delta$  соотношения модулей сдвига для материалов слоя и включения. Представляет также интерес сопоставление особенностей распределений волновых полей в слое со свободными границами и ранее рассмотренным в работе [18] случаем слоя с закрепленными гранями при эквивалентности всех прочих элементов постановки, то есть анализ эффектов снятия закрепления с границ слоя.

В иллюстрируемом на рисунке 2 случае падения относительно короткой волны с  $\lambda = 0.25h$  в слое с соотношением упругих постоянных  $c_{44} = 2c_*$ ,  $c_{55} = c_*$  и включением с геометрическим параметром  $R = 0,5h$  из ортотропного материала с пониженной жесткостью ( $\delta = 0,25$ ) при сопоставлении можно отметить, что в свободном слое, как и в случае закрепления его границ, во включении формируется поле с повышенной интенсивностью в окрестности больших полуосей и выраженной точкой фокуса концентрации; в направлении теневой обла-



сти включение выполняет роль рассеивателя; интенсивность отраженных волн мала и ее уровень в еще большей мере снижается по сравнению со случаем закрепленного на границах слоя.

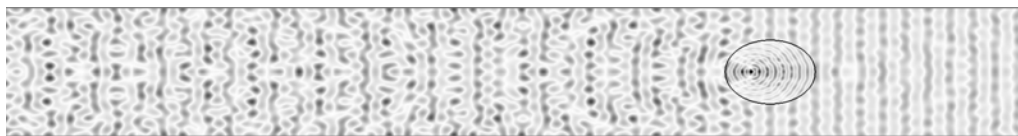


Рис. 2. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 2c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0,5h$ ,  $\lambda = 0,25h$ ,  $\delta = 0,25$ .

При увеличении параметров относительной длины до значений  $\lambda = 0,5h$ ;  $\lambda = 0,7h$ ;  $\lambda = h$  (рис. 3 – 5) в топологических картинах полей рассеянных и преломленных во включении волн в сравнении со случаем закрепленного слоя наблюдаются существенные изменения.

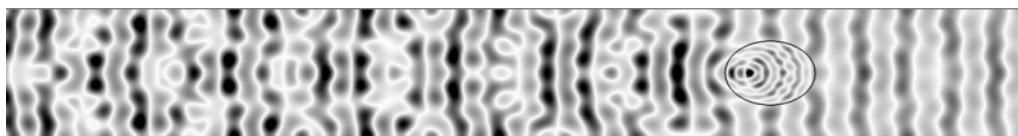


Рис. 3. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 2c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0,5h$ ,  $\lambda = 0,5h$ ,  $\delta = 0,25$ .

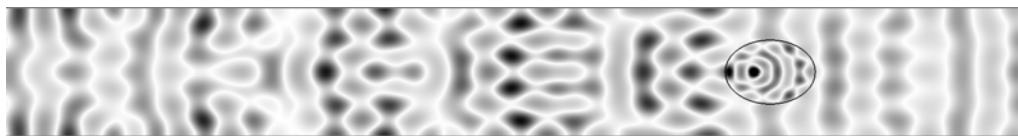


Рис. 4. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 2c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0,5h$ ,  $\lambda = 0,7h$ ,  $\delta = 0,25$ .

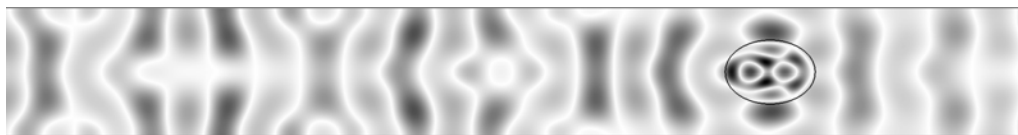


Рис. 5. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 2c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0,5h$ ,  $\lambda = h$ ,  $\delta = 0,25$ .

Так, в зоне включения наблюдается иная картина формирования множественных полюсов повышенной интенсивности волновых колебаний – количество таких полюсов по сравнению со случаем закрепленного слоя уменьшается с изменением картины их расположения. Для свободного слоя наблюдается также снижение интенсивности отражения волн от включений в лицевой области

взаимодействия. Существенные изменения происходят и в топологии поля огибающих включение волн в тыльной области взаимодействия. Более контрастно изменяющимся во всех перечисленных случаях является поле в тыльной зоне жесткого включения. В качестве одного из наблюдаемых эффектов можно выделить смещение областей с повышенной интенсивность накладывающихся огибающих включение волн по направлению к граням свободного слоя.

В случаях задания модулей упругости включения с геометрическим параметром  $R = 0,5h$  в виде  $c_{44} = 0,5c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $\delta = 0,25$  и, соответственно, изменения обусловленной соотношением полуосей геометрии сечения включения, рассчитанные топологические картины полей перемещений при рассеянии нормальных волн относительной длины  $\lambda = 0,25h$ ;  $\lambda = 0,5h$ ;  $\lambda = 0,7h$ ;  $\lambda = h$  представлены на рисунках 6 – 9.

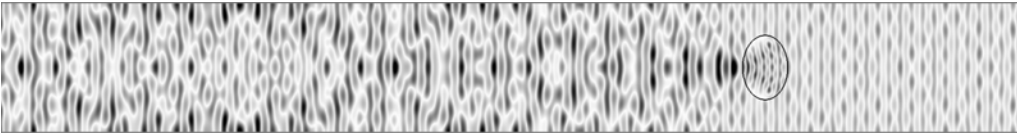


Рис. 6. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 0,5c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0,5h$ ,  $\lambda = 0,25h$ ,  $\delta = 0,25$ .

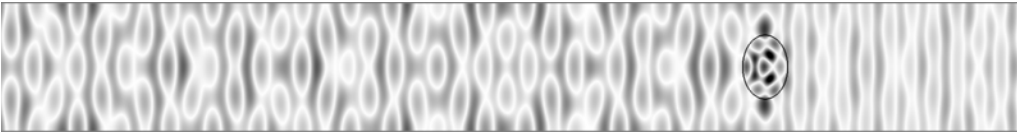


Рис. 7. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 0,5c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0,5h$ ,  $\lambda = 0,5h$ ,  $\delta = 0,25$ .

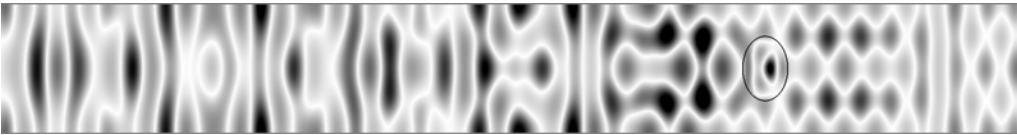


Рис. 8. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 0,5c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0,5h$ ,  $\lambda = 0,7h$ ,  $\delta = 0,25$ .

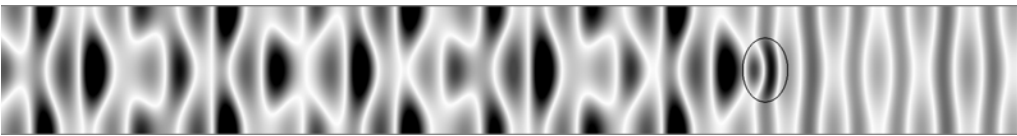


Рис. 9. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 0,5c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0,5h$ ,  $\lambda = h$ ,  $\delta = 0,25$ .

Как и в случае слоя с закрепленными границами [18], включение выполняет

роль концентратора волновых колебаний, его влияние как отражающего элемента на топологию поля в лицевой зоне взаимодействия в еще большей мере снижается для относительно коротких волн с  $\lambda = 0,25h$  и  $\lambda = 0,5h$ . В гораздо большей мере изменения, связанные с краевыми условиями на гранях, проявляются в полях огибающих включение волн в тыльной зоне взаимодействия. В рассеянном поле также выделяются явно выраженные интенсивные огибающие потоки и наблюдается специфический эффект возникновения зон фокусировки волн в теневой области на больших расстояниях от включения.

В случаях исследования эффектов рассеивания нормальных волн на включениях повышенной жесткости, геометрические и механические параметры которых имеют характеристики  $c_{44} = 2c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0,5h$ ,  $\delta = 4$ , анализ результатов расчетов, отраженных на рисунках 10 – 13 соответственно для  $\lambda = 0,25h$ ;  $\lambda = 0,5h$ ;  $\lambda = 0,7h$ ;  $\lambda = h$ , позволяет сделать следующие заключения.

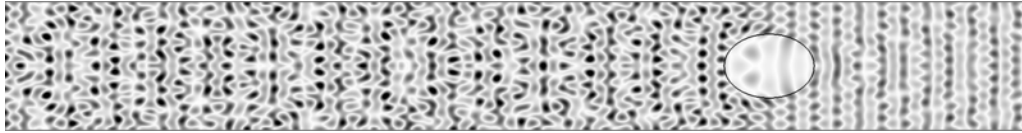


Рис. 10. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 2c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0,5h$ ,  $\lambda = 0,25h$ ,  $\delta = 4$

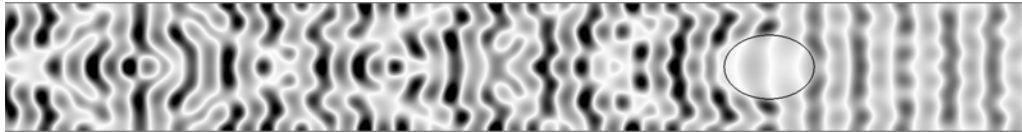


Рис. 11. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 2c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0,5h$ ,  $\lambda = 0,5h$ ,  $\delta = 4$

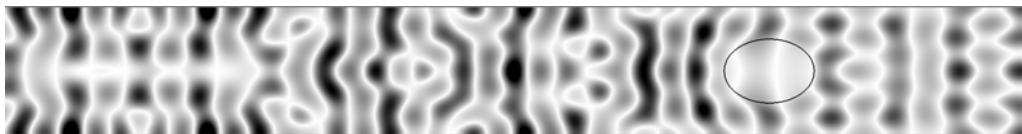


Рис. 12. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 2c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0,5h$ ,  $\lambda = 0,7h$ ,  $\delta = 4$

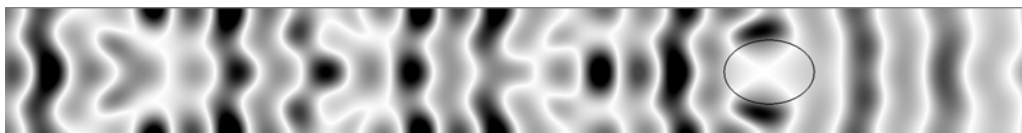


Рис. 13. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 2c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0,5h$ ,  $\lambda = h$ ,  $\delta = 4$ .

По топологическим картинам полей в рассматриваемой зоне сечения слоя и в

сечении включения, можно заключить, что включение с разной степенью выраженности играет роль рассеивателя, а специфика топологии поля рассеянных волн является достаточно выраженной и может рассматриваться как параметр в обратных задачах по идентификации формы и свойств рассеивающего препятствия. Следует также указать на эффекты формирования вихрей в отраженных полях и на формирование каналов отражения у граней слоя во фронтальной зоне взаимодействия волны с препятствием. При этом для относительно коротких волн (рис. 10) тип граничных условий на гранях слоя незначительно влияет на общий характер картины волновых полей в отраженных, огибающих и преломленных в препятствии волнах. При увеличении относительной длины повышается степень регулярности в строении полей рассеянных волн с элементами концентрирующей фокусировки. В целом же, во всех случаях, как и ранее рассмотренных, более контрастно изменяющимся является поле в теневой зоне взаимодействия.

Наконец, на рисунках 14 – 17 приведены картины топологии волновых полей для случаев задания параметров  $R = 0,5h$ ;  $c_{44} = 0,5c_*$ ;  $c_{55} = c_*$ ;  $\delta = 4$ ;  $\lambda = 0,25h$ ;  $\lambda = 0,5h$ ;  $\lambda = 0,7h$ ;  $\lambda = h$ . При данных параметрах задачи наблюдаются наиболее существенные различия в анализируемых топологических картинах как для области сечения включения, так и для всех остальных условно выделяемых зон взаимодействия.

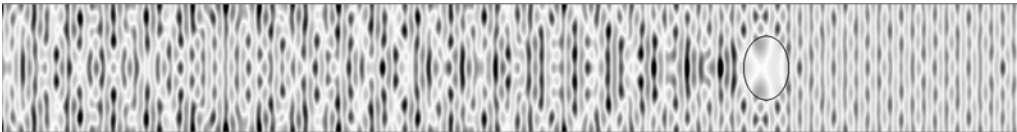


Рис. 14. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 0,5c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0,5h$ ,  $\lambda = 0,25h$ ,  $\delta = 4$

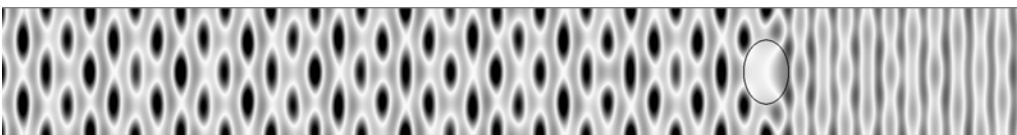


Рис. 15. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 0,5c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0,5h$ ,  $\lambda = 0,5h$ ,  $\delta = 4$

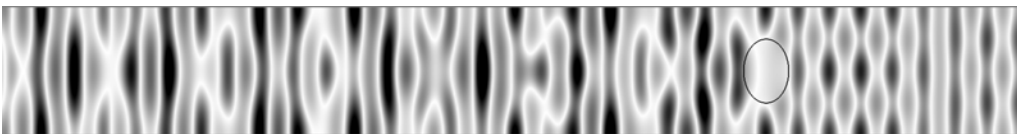


Рис. 16. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 0,5c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0,5h$ ,  $\lambda = 0,7h$ ,  $\delta = 4$

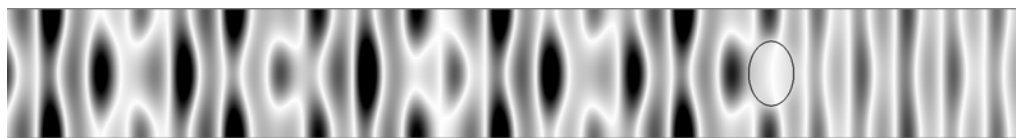


Рис. 17. Картина распределения волновых перемещений для случая  $c_{44} = 0,5c_*$ ,  $c_{55} = c_*$ ,  $R = 0,5h$ ,  $\lambda = h$ ,  $\delta = 4$

**Выводы.** С использованием метода изображений и приема аффинного преобразования координат для получения классического волнового уравнения из обобщенного метагармонического получено теоретическое численно-аналитическое решение двумерной краевой задачи о дифракционном рассеянии бегущих симметричных нормальных волн продольного сдвига на туннельном цилиндрическом ортотропном упругом включении эллиптического сечения в деформируемом свободном по граням плоскопараллельном ортотропном слое с упругими постоянными, характеризующимися специальным соотношением пропорциональности с полуосями сечения. Рассмотрен случай нормального падения волны из произвольной моды дисперсионного спектра на включение с осью, лежащей в срединной плоскости слоя с закрепленными плоскими гранями. Решение задачи сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов представлений волновых полей в областях сечения слоя и включения рядами по базисным частным решениям в цилиндрических функциях для классических волновых уравнений, получаемых из соответствующих уравнений динамической антиплоской деформации ортотропной среды путем аффинных преобразований. Представлены результаты численных исследований для случая падения волн различной относительной длины из низшей моды дисперсионного спектра симметричных сдвиговых нормальных волн в свободном ортотропном слое на включения с варьируемыми размерами и модулями упругости. На основе анализа результатов расчетов основан и описан ряд ведущих закономерностей в топологических распределениях волновых перемещений в ближнем и дальнем дифракционном поле при варьировании соотношения полуосей эллиптического сечения включения, относительной длины падающей волны, а также коэффициента пропорциональности модулей сдвига для ортотропных материалов слоя и включения. В частности, описаны эффекты фокусирующей либо рассеивающей функции включения для преломляющихся в нем волн в зависимости от соотношения сдвиговых жесткостей материалов включения и слоя; эффекты усложнения топологической картины распределения волновых перемещений в протяженной теневой зоне за включением и появление зон выраженной фокусировки в полях перемещений в этой зоне; появление зон выраженной фокусировки в полях преломляющихся во включении волн; эффекты малости искажений, вносимых в поле падающих волн отраженными от включения волнами во фронтальной области взаимодействия. Установлено, что специфика топологии поля рассеянных волн является достаточно выраженной и может рассматриваться как обобщенный параметр в обратных задачах по

идентификации формы и физико-механических свойств рассеивающего препятствия.

1. Pao Y.-H. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations / Y.-H. Pao, C.C. Mow – New York: Crane Russak, 1973. – 308 p.
2. Гузь А.Н. Дифракция упругих волн в многосвязных телах / А.Н. Гузь, В.Т. Головчан – К.: Наукова думка, 1972. – 254 с.
3. Гузь А.Н. Дифракция упругих волн / А.Н. Гузь, В.Д. Кубенко, М.А. Черевко. – К.: Наукова думка, 1978. – 308 с.
4. Ito S. Diffraction of a stress wave by a cylindrical cavity in an infinite elastic strip // Lett. Appl. Engng. Sci. – 1984. – Vol. 22, No. 4. – P. 475–490.
5. Космодамианский А.С. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред / А.С. Космодамианский, В.И. Сторожев. – Киев: Наукова думка, 1985. – 176 с.
6. Kleshchev A.A. Diffraction and propagation of waves in Elastic Mediums and Bodies / A.A. Kleshchev. – S.-Pb.: Vlas, 2002. – 156 p.
7. Kleshchev A.A. Diffraction, Radiation and Propagation of Elastic Waves / A.A. Kleshchev. – S.-Pb.: Proprint, 2006. – 160 p.
8. Harris J.G. Cambridge Monographs on Mechanics: Elastic Waves at High Frequencies: Techniques for Radiation and Diffraction of Elastic and Surface Waves / J.G. Harris – Cambridge: Cambridge University Press, 2010. – 182 p.
9. Golovchan V.T. Shear-wave propagation in an elastic layer perforated by a series of cylindrical cavities / V.T. Golovchan, A.N. Guz // Soviet Applied Mechanics. – 1976. – Vol. 12, Iss. 9. – P. 888–892.
10. Fang X.-Q. Multiple scattering of electro-elastic waves from a buried cavity in a functionally graded piezoelectric material layer // Int. J. Solids Struct. – 2008. – Vol. 45. – P. 5716–5729.
11. Fang X.-Q. Dynamic stress from a cylindrical inclusion buried in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves / X.-Q. Fang, J.-X. Liu, X.-H. Wang, et al. // Compos. Sci. Technol. – 2009. – Vol. 69 – P. 1115–1123.
12. Fang X.-Q. Dynamic stress around two holes in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves / X.-Q. Fang, J.-X. Liu, X.-H. Wang, L.-L. Zhang // Phil. Mag. Lett. – 2010. – Vol. 90. – P. 361–380.
13. Fang X.-Q. Dynamic stress from a subsurface cylindrical inclusion in a functionally graded material layer under anti-plane shear waves / X.-Q. Fang, J.-X. Liu, L.-L. Zhang, Y.-P. Kong // Mater. Struct. – 2011. – Vol. 44. – P. 67–75.
14. Yang Y.-H. Non-destructive detection of a circular cavity in a finite functionally graded material layer using anti-plane shear waves / Y.-H. Yang, L.-Z. Wu, X.-Q. Fang // J. Nondestructive Eval. – 2010. – Vol. 29. – P. 233–240.
15. Вуколов Д.С. Дифракция сдвиговых волн на туннельной цилиндрической полости со свободной либо закрепленной границей в упругом слое / Д.С. Вуколов // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – № 8 (54). – С. 123–132.
16. Вуколов Д.С. Дифракционное рассеяние нормальных волн сдвига на туннельном цилиндрическом включении в упругом слое с закрепленными гранями / Д.С. Вуколов, В.И. Сторожев // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А. Естественные науки. – 2014. – № 1. – С. 14–21.
17. Вуколов Д.С. Анализ эффектов рассеяния нормальных волн сдвига на внутреннем туннельном цилиндрическом упругом включении в свободном слое / Д.С. Вуколов, В.И. Сторожев // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов IX Всероссийской школы-семинара (пос. Дивноморское, 26 – 30 мая 2014 г.). – Ростов-на-Дону: Издательство Южного Федерального университета, 2014. – С. 39.
18. Вуколов Д.С. Дифракционное рассеяние нормальных волн сдвига на внутреннем цилиндрическом ортотропном включении эллиптического сечения в ортотропном упругом слое с закрепленными гранями / Д.С. Вуколов, В.И. Сторожев // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 109–121.

19. Taraldsen G. The complex image method / G. Taraldsen // Wave Motion. – 2005. – Vol. 43. – P. 91–97.

**D.S. Vukolov, V.I. Storozhev**

**Scattering of normal shear waves on an inner orthotropic long cylindrical inclusion of elliptical cross section in a free orthotropic layer.**

Using a combination of the image method, the method of transition to affine-transformed coordinates for the integration of generalized metaharmonic equations, as well as the method of orthogonal series for the algebraization of functional boundary conditions for boundary problems of wave mechanics of deformable media, a numerical-analytical study of the diffraction scattering of traveling symmetric normal shear waves on an inner tunneling cylindrical orthotropic elastic inclusion of an elliptical section in a deformable orthotropic layer free along flat faces are realized.

The case of normal incidence of a wave symmetric over the layer thickness from an arbitrary mode of the dispersion spectrum onto an inclusion with a longitudinal axis lying in the median plane of layer and with elliptical semi-axes oriented in the plane and along the layer thickness is considered. An infinite system of linear algebraic equations is obtained for the coefficients of representations of the waves fields scattered by the inclusion and refracted in an elastic inclusion in form of series on basically particular solutions of the equations of stationary dynamic deformation are obtained. The results of numerical studies of individual leading regularities in the distributions of wave displacements in the near and far diffraction fields with varying semi-axes of the inclusion of elliptical cross section, the relative wavelength of the incident wave from the lowest mode of the dispersion spectrum, and the ratio of the shear modules for the orthotropic layer material are presented.

**Keywords:** *free orthotropic elastic layer, internal tunneling cylindrical inclusion, elliptical section, diffraction scattering, symmetric normal shear waves, numerical-analytical study, methods of images and affine transformations, series in basically solutions of wave equations, variation of geometric and mechanical parameters, topology of fields of wave elastic displacements.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк  
stvi@i.ua

Получено 23.06.2016

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

---

УДК 539.3:534.1:519

©2016. С.В. Сторожев

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАКТОРОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В ПРОЦЕССАХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН С ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕЙ КОНТАКТА ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ТЕЛ

Дано описание нечетко-множественной численно-аналитической методики моделирования эффектов неопределенности при исследовании отражения-преломления плоской сдвиговой электроупругой волны, падающей на границу контакта двух полубесконечных тел из линейно-поляризованной пьезокерамики класса 6mm с различными обладающими разбросами экспериментальных значений физико-механическими характеристиками. Контактная поверхность рассматриваемых тел является поверхностью идеального электромеханического сопряжения. Методика основывается на описании неопределенных параметров пьезокерамических материалов нормальными трапецеидальными нечеткими интервалами и последующем переходе к нечетко-множественным аргументам в полученных в рамках классического детерминистического варианта рассматриваемой модели аналитических соотношениях для исследуемых эндогенных характеристик, реализуемом с применением альфа-уровневой формы эвристического принципа обобщения. Представлены результаты численной реализации разработанной методики применительно к анализу амплитуд кинематических, силовых и энергетических характеристик поля отраженных и преломленных связанных электроупругих волн для рассматриваемого варианта граничных условий на контактной поверхности.

*Ключевые слова:* моделирование эффектов неопределенности, составные пьезокерамические тела, плоские границы контакта, сдвиговые электроупругие волны, отражение и преломление, разброс значений физико-механических постоянных, нечетко-множественная методика, эвристический принцип обобщения.

**Введение и цели исследования.** Существование разбросов в экспериментальных и технологических данных о физико-механических постоянных керамических электроупругих материалов, используемых в конструкциях пьезотехники, является фактором, подлежащим корректному количественному учету в методиках моделирования при реализации соответствующих прикладных предпроектных расчетов [1 – 7]. Методологические приемы и результаты применения методов стохастического анализа, теории вероятностей и математической статистики для решения такого рода проблем представлены, в частности, в работах [8 – 10]. Однако их эффективное применение, помимо прочего, зачастую наталкивается на соображения о том, что имеющиеся в распоряжении данные о коли-



чественных характеристиках подлежащих учету разбросов во многих случаях не имеют корректной статистической природы, так как не являются результатами обработки достаточных по объему однородных частотных выборок. Зачастую подобная подлежащая учету информация формируется преимущественно на основе экспертных заключений и индикативных профессиональных оценок. Возможное в подобных случаях применение для оценки влияния факторов неопределенности методов теории нечетких множеств, особенностью которых являются более мягкие требования к характеру неопределенной информации и возможности непосредственного оперирования с неопределенными параметрами моделей без перехода к их усредненным интегральным характеристикам, описывается в публикациях [11 – 21].

Представляемое в настоящей работе исследование, учитывающее результаты работ [22, 23], имеет своей целью решение проблемы моделирования факторов неопределенности при расчете амплитуд кинематических, силовых и энергетических характеристик отраженных и преломленных электроупругих волн, генерируемых вследствие падения плоской сдвиговой волны данного типа на границу контакта двух полубесконечных тел из линейно-поляризованной пьезокерамики класса 6mm с различными обладающими разбросами экспериментальных значений физико-механическими постоянными. При этом полагается, что контактная поверхность рассматриваемых тел является поверхностью идеального электро-механического сопряжения. В представляемом варианте исследование основывается на применении  $\alpha$  – уровневой модификации эвристического принципа обобщения [11 – 21] как приема расширения областей определения классических функциональных отображений на нечеткие подмножества универсального множества, а также на гипотезе об описании обладающих количественными разбросами неопределенных экспериментальных значений модулей упругости, параметров плотности, пьезоэлектрических и диэлектрических постоянных для контактирующих тел нормальными трапецеидальными нечеткими интервалами [18, 20].

### 1. Постановка и анализ задачи в детерминистической постановке.

Рассматривается составное электроупругое тело, образованное контактирующими полупространствами из линейно поляризованных пьезокерамических материалов класса 6mm и занимающее в координатном пространстве  $Ox_1x_2x_3$  область  $V = V_1 \cup V_2$ ,  $V_1 = \{x_1 \leq 0, -\infty < x_2, x_3 < \infty\}$ ,  $V_2 = \{x_1 > 0, -\infty < x_2, x_3 < \infty\}$ . Пьезокерамические материалы в областях  $V_p$  имеют коллинеарные координатному направлению  $Ox_3$  оси поляризации, характеризуются наборами упругих постоянных  $c_{ij}^{(p)}$ , параметров плотности  $\rho_p$ , пьезоэлектрических постоянных  $e_{ij}^{(p)}$ , модулей диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ij}^{(p)}$ . Матрицы указанных физико-механических характеристик имеют структуру, свойственную пьезоэлектрикам класса 6mm с рассматриваемым направлением линейной поляризации.

Полагается, что из глубины полупространства  $V_1$  вдоль положительного координатного направления  $Ox_1$  на границу контакта полупространств  $\Gamma =$

$= \{x_1 = 0, -\infty < x_2, x_3 < \infty\}$  нормально падает поляризованная в плоскости  $Ox_1x_3$  сдвиговая упругая волна, в результате взаимодействия которой с поверхностью раздела разнородных по свойствам материалов формируются одномерные поля отраженных и преломленных сдвиговых электроупругих волн с аналогичным типом поляризации. При этом рассматривается вариант условий сопряжения полупространств, заключающийся в предположении об идеальном электромеханическом контакте составляющих.

В рамках квазистатической модели связанного электроупругого деформирования пьезоэлектрических материалов для описания свойств формирующихся в рассматриваемом составном теле волновых полей вводятся в рассмотрение комплексные функции волновых упругих смещений  $u_3(x_1, t)$ , комплексные функции волновых механических напряжений  $\sigma_{13}(x_1, t)$ , потенциала квазистатического электрического поля  $\varphi(x_1, t)$  и электрического смещения  $D_1(x_1, t)$  в падающей волне

$$\begin{aligned} u_{31}(x_1, t) &= u^{(1)} \exp(-i(\omega t - k_1 x_1)), \\ \sigma_{13}^{(1)}(x_1, t) &= \sigma^{(1)} \exp(-i(\omega t - k_1 x_1)), \\ \varphi_1(x_1, t) &= \varphi^{(1)} \exp(-i(\omega t - k_1 x_1)), \\ D_1^{(1)}(x_1, t) &= D^{(2)} \exp(-i(\omega t - k_1 x_1)); \end{aligned} \quad (1)$$

в отраженной волне

$$\begin{aligned} u_{32}(x_1, t) &= u^{(2)} \exp(-i(\omega t + k_1 x_1)), \\ \sigma_{13}^{(2)}(x_1, t) &= \sigma^{(2)} \exp(-i(\omega t + k_1 x_1)), \\ \varphi_2(x_1, t) &= \varphi^{(2)} \exp(-i(\omega t + k_1 x_1)), \\ D_1^{(2)}(x_1, t) &= D^{(2)} \exp(-i(\omega t - k_1 x_1)); \end{aligned} \quad (2)$$

и в преломленной волне

$$\begin{aligned} u_{33}(x_1, t) &= u^{(3)} \exp(-i(\omega t - k_2 x_1)), \\ \sigma_{13}^{(3)}(x_1, t) &= \sigma^{(3)} \exp(-i(\omega t - k_2 x_1)), \\ \varphi_3(x_1, t) &= \varphi^{(3)} \exp(-i(\omega t - k_2 x_1)), \\ D_1^{(3)}(x_1, t) &= D^{(3)} \exp(-i(\omega t - k_1 x_1)). \end{aligned} \quad (3)$$

Амплитудный параметр  $u^{(1)}$  исходной падающей волны считается известной заданной величиной.

Характеристики указанных полей связаны определяющими соотношениями вида

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(j)}(x_1, t) &= c_{44}^{(j)} \partial_1 u_{3j}(x_1, t) + e_{15}^{(j)} \partial_1 \varphi_j(x_1, t), \\ D_1^{(j)}(x_1, t) &= e_{15}^{(j)} \partial_1 u_{3j}(x_1, t) - \varepsilon_{11}^{(j)} \partial_1 \varphi_j(x_1, t). \end{aligned} \quad (4)$$

Краевая задача для определения искоемых характеристик полей падающих, отраженных и преломленных волн в рассматриваемом случае включает уравнения динамического электроупругого деформирования для каждой из перечисленных компонент в соответствующих областях  $V_p$

$$\begin{aligned} c_{44}\partial_1^2 u_3(x_1, t) + e_{15}\partial_1^2 \varphi(x_1, t) - \rho\partial_t^2 u_3(x_1, t) &= 0, \\ e_{15}\partial_1^2 u_3(x_1, t) - \varepsilon_{11}\partial_1^2 \varphi(x_1, t) &= 0; \end{aligned} \quad (5)$$

а также граничные условия

$$\begin{aligned} u_{31}(0, t) + u_{32}(0, t) &= u_{33}(0, t), \\ c_{44}^{(1)}\partial_1(u_{31}(0, t) + u_{32}(0, t)) + e_{15}^{(1)}\partial_1(\varphi_1(0, t) + \varphi_2(0, t)) &= \\ = c_{44}^{(2)}\partial_1 u_{33}(0, t) + e_{15}^{(2)}\partial_1 \varphi_3(0, t), & \quad (6) \\ e_{15}^{(1)}\partial_1(u_{31}(0, t) + u_{32}(0, t)) - \varepsilon_{11}^{(1)}\partial_1(\varphi_1(0, t) + \varphi_2(0, t)) &= \\ = e_{15}^{(2)}\partial_1 u_{33}(0, t) - \varepsilon_{11}^{(2)}\partial_1 \varphi_3(0, t). \end{aligned}$$

Из соотношений (5) с учетом выражений (1) – (3) следуют представления волновых чисел  $k_p$  ( $p = 1, 2$ ), а также уравнения связи амплитудных характеристик  $u^{(j)}$  и  $\varphi^{(j)}$ :

$$k_p = \omega(\rho_p/(c_{44}^{(p)}(1 + (e_{15}^{(p)})^2(c_{44}^{(p)}\varepsilon_{11}^{(p)})^{-1})))^{1/2} \quad (p = 1, 2); \quad (7)$$

$$u^{(j)} = (\varepsilon_{11}^{(1)}/e_{15}^{(1)}) \varphi^{(j)} \quad (j = 1, 2), \quad u^{(3)} = (\varepsilon_{11}^{(2)}/e_{15}^{(2)}) \varphi^{(3)}. \quad (8)$$

С учетом (1) – (3), (8) последнее из краевых условий (6) выполняется тождественно, и, в свою очередь, из остающихся соотношений (6) следуют алгебраические уравнения для неопределенных комплексных кинематических амплитудных характеристик  $u^{(j)}$  ( $j = 2, 3$ ) и амплитудных характеристик связанного квазистатического электрического поля  $\varphi^{(j)}$  ( $j = 1, 3$ ) в отраженных и преломленных бездисперсных сдвиговых электроупругих волнах. Следующие из этих уравнений представления имеют вид:

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= [(\varsigma - \tau)/(\varsigma + \tau)]u^{(1)}, \quad u^{(3)} = [(2\varsigma)/(\varsigma + \tau)]u^{(1)}, \\ \varphi^{(1)} &= \vartheta u^{(1)}, \quad \varphi^{(2)} = \vartheta[(\varsigma - \tau)/(\varsigma + \tau)]u^{(1)}, \quad \varphi^{(3)} = v[(2\varsigma)/(\varsigma + \tau)]u^{(1)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \varsigma &= k_1(c_{44}^{(1)} + (e_{15}^{(1)})^2/\varepsilon_{11}^{(1)}), \quad \tau = k_2(c_{44}^{(2)} + (e_{15}^{(2)})^2/\varepsilon_{11}^{(2)}), \\ \vartheta &= e_{15}^{(1)}/\varepsilon_{11}^{(1)}, \quad v = e_{15}^{(2)}/\varepsilon_{11}^{(2)}. \end{aligned}$$

Представления для комплексных амплитудных составляющих в представлениях силовых характеристик  $\sigma_{13}^{(j)}$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) для отраженных и преломленных волн соответственно могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} &= ik_1[c_{44}^{(1)} + e_{15}^{(1)}\vartheta]u^{(1)}, \quad \sigma^{(2)} = ik_1[(\varsigma - \tau)/(\varsigma + \tau)][c_{44}^{(1)} + e_{15}^{(1)}\vartheta]u^{(1)}, \\ \sigma^{(3)} &= ik_2[(2\varsigma)/(\varsigma + \tau)][c_{44}^{(2)} + e_{15}^{(2)}v]u^{(1)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Комплексные амплитудные функции электрического смещения описываются представлениями вида

$$\begin{aligned} D^{(1)} &= ik_1[[e_{15}^{(1)} - \varepsilon_{11}^{(1)}\vartheta]u^{(1)}, \quad D^{(2)} = ik_1[[\frac{(\varsigma - \tau)}{(\varsigma + \tau)}][e_{15}^{(1)} - \varepsilon_{11}^{(1)}\vartheta]]u^{(1)}, \\ D^{(3)} &= ik_2[[\frac{(2\varsigma)}{(\varsigma + \tau)}][e_{15}^{(2)} - \varepsilon_{11}^{(2)}v]]u^{(1)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Наряду с описываемыми соотношениями (9) – (11) характеристиками  $u^{(j)}$ ,  $\varphi^{(j)}$ ,  $\sigma^{(j)}$ ,  $D^{(j)}$ , при исследовании модели рассчитываются также характеристики плотности средних за период потоков мощности  $P^{(j)}$  в рассматриваемых электроупругих волнах

$$\begin{aligned} P^{(1)} &= (u^{(1)})^2(\omega/2)(k_1[[c_{44}^{(1)} + e_{15}^{(1)}\vartheta] - \vartheta k_1[e_{15}^{(1)} - \varepsilon_{11}^{(1)}\vartheta]], \\ P^{(2)} &= (u^{(1)})^2(\omega/2)(k_1[[\frac{(\varsigma - \tau)}{(\varsigma + \tau)}][c_{44}^{(1)} + e_{15}^{(1)}\vartheta]][\frac{(\varsigma - \tau)}{(\varsigma + \tau)}] - \\ &\quad - k_1[[\frac{(\varsigma - \tau)}{(\varsigma + \tau)}][e_{15}^{(1)} - \varepsilon_{11}^{(1)}\vartheta]]\vartheta[\frac{(\varsigma - \tau)}{(\varsigma + \tau)}]), \\ P^{(3)} &= (u^{(1)})^2(\omega/2)(k_2[[\frac{(2\varsigma)}{(\varsigma + \tau)}][c_{44}^{(2)} + e_{15}^{(2)}v]][\frac{(2\varsigma)}{(\varsigma + \tau)}] - \\ &\quad - k_2[[\frac{(2\varsigma)}{(\varsigma + \tau)}][e_{15}^{(2)} - \varepsilon_{11}^{(2)}v]]v[\frac{(2\varsigma)}{(\varsigma + \tau)}]). \end{aligned} \quad (12)$$

Анализ структуры представлений  $u^{(j)}$ ,  $\varphi^{(j)}$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) показывает, что данные характеристики не зависят от частотного параметра  $\omega$ . Соответственно, соотношения (9) – (12) могут быть записаны в обобщенной форме

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= F_2(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}), \\ u^{(3)} &= F_3(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}), \\ \varphi^{(1)} &= \Phi_1(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}), \\ \varphi^{(2)} &= \Phi_2(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}), \\ \varphi^{(3)} &= \Phi_3(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}), \\ \sigma^{(1)} &= G_1(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}, \omega), \\ \sigma^{(2)} &= G_2(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}, \omega), \\ \sigma^{(3)} &= G_3(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}, \omega), \\ D^{(1)} &= Q_1(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}, \omega), \\ D^{(2)} &= Q_2(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}, \omega), \\ D^{(3)} &= Q_3(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}, \omega), \\ P^{(1)} &= R_1(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}, \omega), \\ P^{(2)} &= R_2(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}, \omega), \\ P^{(3)} &= R_3(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}, \omega). \end{aligned} \quad (13)$$

Полученные результаты анализа детерминистической версии рассматриваемой модели используются далее для исследования показателей влияния факторов неопределенности в виде разбросов значений физико-механических постоянных.

**2. Получение нечетко-множественных оценок для амплитудных характеристик исследуемых электроупругих волн.** Получение оценок разброса значений для амплитудных кинематических и силовых характеристик, амплитудных характеристик связанного квазистатического электрического поля отраженных и преломленных волн в общем случае учета рассматриваемых факторов неопределенности базируется на переходе к нечетко-множественным аргументами в представлениях (8) – (10). В рамках предположений о наличии разбросов для величин исходных физико-механических параметров для компонентов рассматриваемого составного тела вносится допущение о возможности эффективного описания неопределенных экзогенных параметров рассматриваемой модели  $c_{44}^{(p)}$ ,  $e_{15}^{(p)}$ ,  $\varepsilon_{11}^{(p)}$ ,  $\rho_p$ ,  $u^{(1)}$  нечеткими нормальными трапециевидальными интервалами  $\tilde{c}_{44}^{(p)}$ ,  $\tilde{e}_{15}^{(p)}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{11}^{(p)}$ ,  $\tilde{\rho}_p$ ,  $\tilde{u}^{(1)}$  [18, 20, 22, 23], задаваемыми кортежами реперных точек

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{44}^{(p)} &= (c_{441}^{(p)}, c_{442}^{(p)}, c_{443}^{(p)}, c_{444}^{(p)}), \quad \tilde{e}_{15}^{(p)} = (e_{151}^{(p)}, e_{152}^{(p)}, e_{153}^{(p)}, e_{154}^{(p)}), \\ \tilde{\varepsilon}_{11}^{(p)} &= (\varepsilon_{111}^{(p)}, \varepsilon_{112}^{(p)}, \varepsilon_{113}^{(p)}, \varepsilon_{114}^{(p)}), \quad \tilde{\rho}_p = (\rho_{p1}, \rho_{p2}, \rho_{p3}, \rho_{p4}), \quad \tilde{u}^{(1)} = (u_1, u_2, u_3, u_4), \end{aligned} \quad (14)$$

и представимыми в форме разложений по множествам  $\alpha$  – уровня

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{44}^{(p)} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{c}_{44\alpha}^{(p)}, \bar{c}_{44\alpha}^{(p)}], \quad \tilde{e}_{15}^{(p)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{e}_{15\alpha}^{(p)}, \bar{e}_{15\alpha}^{(p)}], \quad \tilde{\varepsilon}_{11}^{(p)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}, \bar{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}], \\ \tilde{\rho}_p &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_{p\alpha}, \bar{\rho}_{p\alpha}], \quad \tilde{u}^{(1)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{u}_\alpha, \bar{u}_\alpha], \end{aligned} \quad (15)$$

в которых

$$\begin{aligned} \underline{c}_{44\alpha}^{(p)} &= (1 - \alpha)c_{441}^{(p)} + \alpha c_{442}^{(p)}, \quad \bar{c}_{44\alpha}^{(p)} = \alpha c_{443}^{(p)} + (1 - \alpha)c_{444}^{(p)}; \\ \underline{e}_{15\alpha}^{(p)} &= (1 - \alpha)e_{151}^{(p)} + \alpha e_{152}^{(p)}, \quad \bar{e}_{15\alpha}^{(p)} = \alpha e_{153}^{(p)} + (1 - \alpha)e_{154}^{(p)}; \\ \underline{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)} &= (1 - \alpha)\varepsilon_{111}^{(p)} + \alpha \varepsilon_{112}^{(p)}, \quad \bar{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)} = \alpha \varepsilon_{443}^{(p)} + (1 - \alpha)\varepsilon_{444}^{(p)}; \\ \underline{\rho}_{p\alpha} &= (1 - \alpha)\rho_{p1} + \alpha \rho_{p2}, \quad \bar{\rho}_{p\alpha} = \alpha \rho_{p3} + (1 - \alpha)\rho_{p4}; \\ \underline{u}_\alpha &= (1 - \alpha)u_1 + \alpha u_2, \quad \bar{u}_\alpha = \alpha u_3 + (1 - \alpha)u_4. \end{aligned} \quad (16)$$

С использованием представлений (14) – (16) получение оценок для неопределенных характеристик  $\tilde{u}^{(2)}$ ,  $\tilde{u}^{(3)}$ ,  $\tilde{\varphi}^{(j)}$ ,  $\tilde{\sigma}^{(j)}$ ,  $\tilde{D}^{(j)}$ ,  $\tilde{P}^{(j)}$  ( $j = \overline{1,3}$ ) реализуется путем перехода в функциональных зависимостях (9) – (13) к нечеткоинтервальным аргументам с применением  $\alpha$ -уровневой формы эвристического принципа обобщения [11 – 21]. В результате для подлежащих определению

нечетко-множественных величин записываются представления вида

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}^{(j)} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{u}_\alpha^{(j)}, \bar{u}_\alpha^{(j)}], \\
 \tilde{\varphi}^{(j)} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\varphi}_\alpha^{(j)}, \bar{\varphi}_\alpha^{(j)}], \\
 \tilde{\sigma}^{(j)} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_\alpha^{(j)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(j)}], \\
 \tilde{D}^{(j)} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{D}_\alpha^{(j)}, \bar{D}_\alpha^{(j)}], \\
 \tilde{P}^{(j)} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{P}_\alpha^{(j)}, \bar{P}_\alpha^{(j)}],
 \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}
 \underline{u}_\alpha^{(j)} &= \inf_{\substack{c_{44}^{(p)} \in [\underline{c}_{44\alpha}^{(p)}, \bar{c}_{44\alpha}^{(p)}] \\ e_{15}^{(p)} \in [\underline{e}_{15\alpha}^{(p)}, \bar{e}_{15\alpha}^{(p)}] \\ \varepsilon_{11}^{(p)} \in [\underline{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}, \bar{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}] \\ \rho_p \in [\underline{\rho}_{p\alpha}, \bar{\rho}_{p\alpha}] \\ u^{(1)} \in [\underline{u}_\alpha, \bar{u}_\alpha]}} \left\{ \left| F_j(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}) \right| \right\},
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_\alpha^{(j)} &= \sup_{\substack{c_{44}^{(p)} \in [\underline{c}_{44\alpha}^{(p)}, \bar{c}_{44\alpha}^{(p)}] \\ e_{15}^{(p)} \in [\underline{e}_{15\alpha}^{(p)}, \bar{e}_{15\alpha}^{(p)}] \\ \varepsilon_{11}^{(p)} \in [\underline{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}, \bar{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}] \\ \rho_p \in [\underline{\rho}_{p\alpha}, \bar{\rho}_{p\alpha}] \\ u^{(1)} \in [\underline{u}_\alpha, \bar{u}_\alpha]}} \left\{ \left| F_j(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}) \right| \right\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\varphi}_\alpha^{(j)} &= \inf_{\substack{c_{44}^{(p)} \in [\underline{c}_{44\alpha}^{(p)}, \bar{c}_{44\alpha}^{(p)}] \\ e_{15}^{(p)} \in [\underline{e}_{15\alpha}^{(p)}, \bar{e}_{15\alpha}^{(p)}] \\ \varepsilon_{11}^{(p)} \in [\underline{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}, \bar{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}] \\ \rho_p \in [\underline{\rho}_{p\alpha}, \bar{\rho}_{p\alpha}] \\ u^{(1)} \in [\underline{u}_\alpha, \bar{u}_\alpha]}} \left\{ \left| \Phi_j(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}) \right| \right\},
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\varphi}_\alpha^{(j)} &= \sup_{\substack{c_{44}^{(p)} \in [\underline{c}_{44\alpha}^{(p)}, \bar{c}_{44\alpha}^{(p)}] \\ e_{15}^{(p)} \in [\underline{e}_{15\alpha}^{(p)}, \bar{e}_{15\alpha}^{(p)}] \\ \varepsilon_{11}^{(p)} \in [\underline{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}, \bar{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}] \\ \rho_p \in [\underline{\rho}_{p\alpha}, \bar{\rho}_{p\alpha}] \\ u^{(1)} \in [\underline{u}_\alpha, \bar{u}_\alpha]}} \left\{ \left| \Phi_j(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}) \right| \right\};
 \end{aligned}$$

$$\underline{\sigma}_\alpha^{(j)} = \inf_{\substack{c_{44}^{(p)} \in [\underline{c}_{44\alpha}^{(p)}, \bar{c}_{44\alpha}^{(p)}] \\ e_{15}^{(p)} \in [\underline{e}_{15\alpha}^{(p)}, \bar{e}_{15\alpha}^{(p)}] \\ \varepsilon_{11}^{(p)} \in [\underline{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}, \bar{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}] \\ \rho_p \in [\underline{\rho}_{p\alpha}, \bar{\rho}_{p\alpha}] \\ u^{(1)} \in [\underline{u}_\alpha, \bar{u}_\alpha]}} \left\{ \left| G_j(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}) \right| \right\}, \quad (20)$$

$$\overline{\sigma}_\alpha^{(j)} = \sup_{\substack{c_{44}^{(p)} \in [\underline{c}_{44\alpha}^{(p)}, \bar{c}_{44\alpha}^{(p)}] \\ e_{15}^{(p)} \in [\underline{e}_{15\alpha}^{(p)}, \bar{e}_{15\alpha}^{(p)}] \\ \varepsilon_{11}^{(p)} \in [\underline{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}, \bar{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}] \\ \rho_p \in [\underline{\rho}_{p\alpha}, \bar{\rho}_{p\alpha}] \\ u^{(1)} \in [\underline{u}_\alpha, \bar{u}_\alpha]}} \left\{ \left| G_j(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}) \right| \right\};$$

$$\underline{D}_\alpha^{(j)} = \inf_{\substack{c_{44}^{(p)} \in [\underline{c}_{44\alpha}^{(p)}, \bar{c}_{44\alpha}^{(p)}] \\ e_{15}^{(p)} \in [\underline{e}_{15\alpha}^{(p)}, \bar{e}_{15\alpha}^{(p)}] \\ \varepsilon_{11}^{(p)} \in [\underline{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}, \bar{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}] \\ \rho_p \in [\underline{\rho}_{p\alpha}, \bar{\rho}_{p\alpha}] \\ u^{(1)} \in [\underline{u}_\alpha, \bar{u}_\alpha]}} \left\{ \left| Q_j(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}) \right| \right\}, \quad (21)$$

$$\overline{D}_\alpha^{(j)} = \sup_{\substack{c_{44}^{(p)} \in [\underline{c}_{44\alpha}^{(p)}, \bar{c}_{44\alpha}^{(p)}] \\ e_{15}^{(p)} \in [\underline{e}_{15\alpha}^{(p)}, \bar{e}_{15\alpha}^{(p)}] \\ \varepsilon_{11}^{(p)} \in [\underline{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}, \bar{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}] \\ \rho_p \in [\underline{\rho}_{p\alpha}, \bar{\rho}_{p\alpha}] \\ u^{(1)} \in [\underline{u}_\alpha, \bar{u}_\alpha]}} \left\{ \left| Q_j(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}) \right| \right\};$$

$$\underline{P}_\alpha^{(j)} = \inf_{\substack{c_{44}^{(p)} \in [\underline{c}_{44\alpha}^{(p)}, \bar{c}_{44\alpha}^{(p)}] \\ e_{15}^{(p)} \in [\underline{e}_{15\alpha}^{(p)}, \bar{e}_{15\alpha}^{(p)}] \\ \varepsilon_{11}^{(p)} \in [\underline{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}, \bar{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}] \\ \rho_p \in [\underline{\rho}_{p\alpha}, \bar{\rho}_{p\alpha}] \\ u^{(1)} \in [\underline{u}_\alpha, \bar{u}_\alpha]}} \left\{ R_j(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}) \right\}, \quad (22)$$

$$\overline{P}_\alpha^{(j)} = \sup_{\substack{c_{44}^{(p)} \in [\underline{c}_{44\alpha}^{(p)}, \bar{c}_{44\alpha}^{(p)}] \\ e_{15}^{(p)} \in [\underline{e}_{15\alpha}^{(p)}, \bar{e}_{15\alpha}^{(p)}] \\ \varepsilon_{11}^{(p)} \in [\underline{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}, \bar{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}] \\ \rho_p \in [\underline{\rho}_{p\alpha}, \bar{\rho}_{p\alpha}] \\ u^{(1)} \in [\underline{u}_\alpha, \bar{u}_\alpha]}} \left\{ R_j(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}) \right\};$$

В частных случаях моделирования эффектов влияния разбросов только для некоторого подмножества экзогенных параметров рассматриваемой задачи в соотношениях (18) – (22) соответственно реализуется варьирование лишь для параметров, рассматриваемых как нечеткие, а оставшиеся параметры задаются оговоренными детерминированными значениями.

**3. Результаты численных исследований.** Примеры реализации разрабатываемой методики нечетко-множественного анализа модели учета неопределенности при описании амплитудных кинематических и силовых характеристик, амплитудных характеристик связанного квазистатического электрического поля отраженных и преломленных электроупругих волн относятся к случаю контакта полупространства  $V_1$  из пьезокерамики  $BaTiO_3$  [7] и полупространства  $V_2$  из пьезокерамики  $ЦТС - 19$  [7] с заданием, в общем случае, следующих нечетко-интервальных параметров:

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_{44}^{(1)} &= (4.25c_*, 4.35c_*, 4.40c_*, 4.45c_*), \\
 \tilde{c}_{44}^{(2)} &= (2.14c_*, 2.17c_*, 2.19c_*, 2.21c_*), \quad c_* = 10^{10}[\text{Па}], \\
 \tilde{e}_{15}^{(1)} &= (11.2e_*, 11.4e_*, 11.6e_*, 11.9e_*), \\
 \tilde{e}_{15}^{(2)} &= (8.82e_*, 8.85e_*, 9.16e_*, 9.27e_*), \quad e_* = 1[\text{ККл}/\text{м}^2], \\
 \tilde{\varepsilon}_{11}^{(1)} &= (1110\varepsilon_*, 1200\varepsilon_*, 1270\varepsilon_*, 1290\varepsilon_*), \\
 \tilde{\varepsilon}_{11}^{(2)} &= (685\varepsilon_*, 690\varepsilon_*, 710\varepsilon_*, 720\varepsilon_*), \quad \varepsilon_* = 8.854 \cdot 10^{-12}[\text{Ф}/\text{м}], \\
 \tilde{\rho}_1 &= (6.01\rho_*, 6.02\rho_*, 6.04\rho_*, 6.05\rho_*), \\
 \tilde{\rho}_2 &= (7.45\rho_*, 7.5\rho_*, 7.6\rho_*, 7.7\rho_*), \quad \rho_* = 10^3[\text{кг}/\text{м}^3].
 \end{aligned} \tag{23}$$

Экзогенный параметр  $u^{(1)}$  во всех вариантах представляемых расчетов рассматривается как четкая величин. Некоторые результаты численного анализа представлены описаниями вида функций принадлежности для нечетко-множественных величин  $\tilde{u}^{(2)}$ ,  $\tilde{u}^{(3)}$ ,  $\tilde{\sigma}^{(j)}/\omega$ ,  $\tilde{P}^{(j)}/\omega^2$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) и отражены на рисунках 1 – 16.

Так, на рисунках 1 – 2 соответственно представлены функции принадлежности для нечетко-множественных амплитудных характеристик  $\tilde{u}^{(2)}$ ,  $\tilde{u}^{(3)}$  напряженности отраженных и преломленных волн в случае учета неопределенности упругих постоянных и параметров плотности пьезокерамических полупространств и задания точных значений пьезомодулей и диэлектрических проницаемостей материалов

$$e_{15}^{(1)} = 11.43e_*, \quad e_{15}^{(2)} = 9.16e_*, \quad \varepsilon_{11}^{(1)} = 687.4\varepsilon_*, \quad \varepsilon_{11}^{(2)} = 1270\varepsilon_*. \tag{24}$$

Для этого же случая учета неопределенности на рисунках 3 – 5 приведен профиль функций принадлежности для нечетко-множественных характеристик  $\tilde{\sigma}^{(j)}/\omega$ , а на рисунках 6 – 8 даны результаты расчетов функций принадлежности для нечетко-множественных характеристик  $\tilde{P}^{(j)}/\omega^2$  ( $j = \overline{1, 3}$ ).



Факторы неопределенности при взаимодействии электроупругих волн с границей

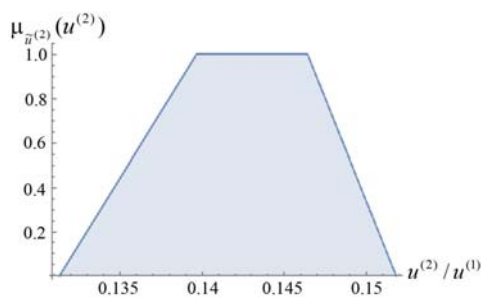


Рис.1. Функция принадлежности  $\tilde{u}^{(2)}$

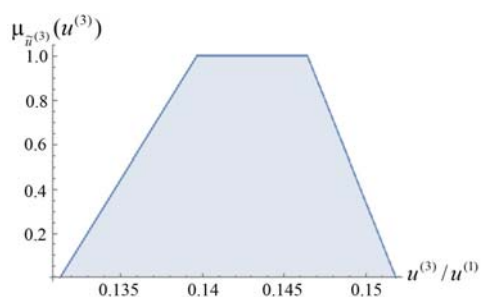


Рис.2. Функция принадлежности  $\tilde{u}^{(3)}$

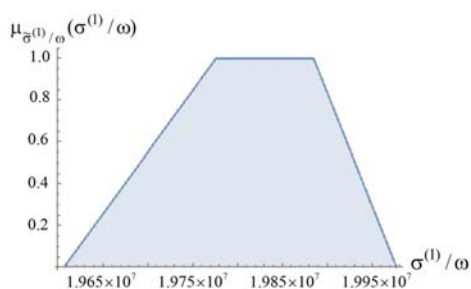


Рис.3. Функция принадлежности  $\tilde{\sigma}^{(1)}/\omega$

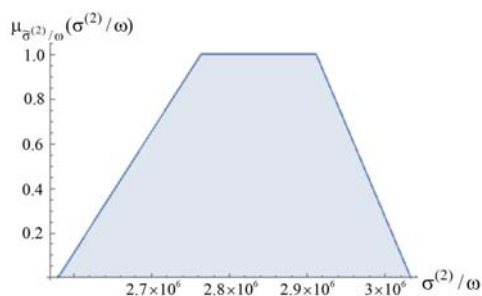


Рис.4. Функция принадлежности  $\tilde{\sigma}^{(2)}/\omega$

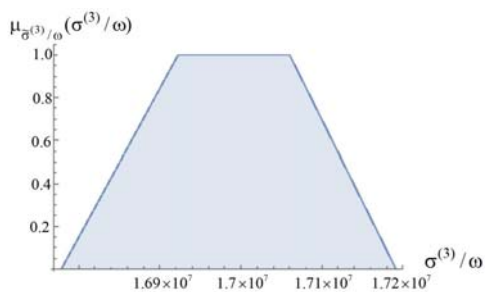


Рис.5. Функция принадлежности  $\tilde{\sigma}^{(3)}/\omega$

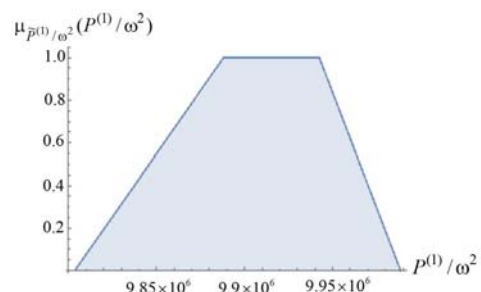


Рис.6. Функция принадлежности  $\tilde{P}^{(1)}/\omega^2$

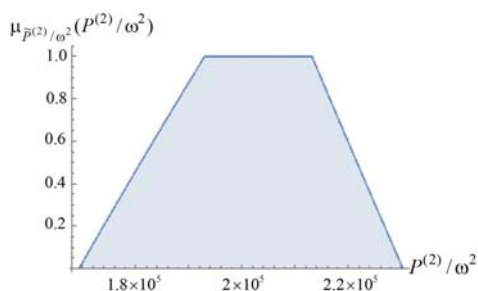


Рис.7. Функция принадлежности  $\tilde{P}^{(2)}/\omega^2$

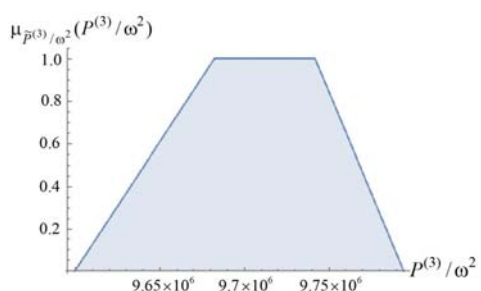


Рис.8. Функция принадлежности  $\tilde{P}^{(3)}/\omega^2$

Результаты определения функции принадлежности для нечетко-множественных амплитудных характеристик  $\tilde{u}^{(2)}$ ,  $\tilde{u}^{(3)}$  напряженности отраженных и преломленных волн в случае учета неопределенности упругих постоянных и пьезомодулей пьезокерамических полупространств и задания точных значений параметров плотности и диэлектрических проницаемостей материалов

$$\rho_1 = 6.02\rho_*, \quad \rho_2 = 7.6\rho_*,$$

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = 687.4\varepsilon_*, \quad \varepsilon_{11}^{(2)} = 1270\varepsilon_*,$$

представлены на рисунках 9 – 10, а результаты определения функции принадлежности для нечетко-множественных характеристик  $\tilde{\sigma}^{(j)}/\omega$ ,  $\tilde{P}^{(j)}/\omega^2$  ( $j = \overline{1,3}$ ) соответственно приводятся на рисунках 11 – 16.

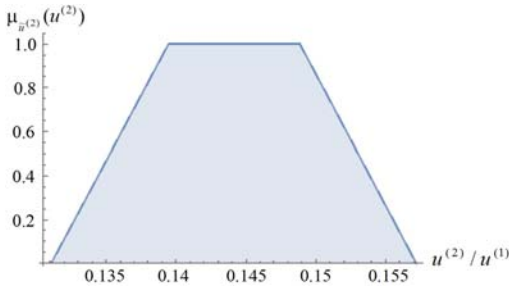


Рис.9. Функция принадлежности  $\tilde{u}^{(2)}$

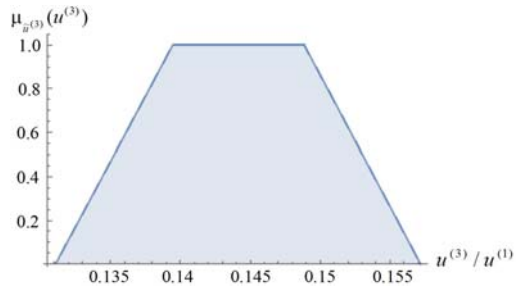


Рис.10. Функция принадлежности  $\tilde{u}^{(3)}$

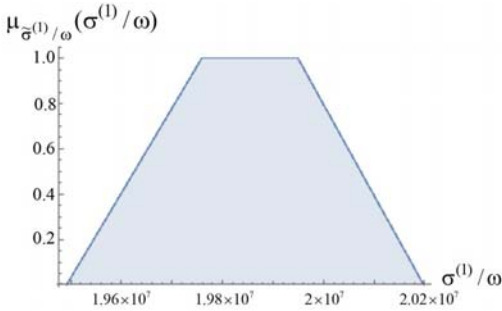


Рис.11. Функция принадлежности  $\tilde{\sigma}^{(1)}/\omega$

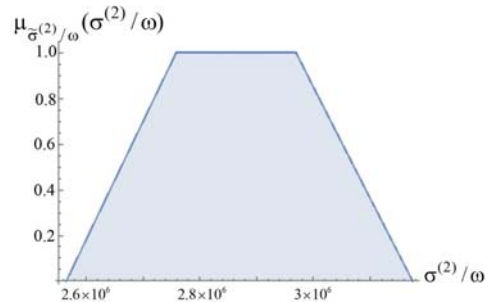


Рис.12. Функция принадлежности  $\tilde{P}^{(2)}/\omega^2$

Результаты расчетов указывают на незначительное различие в оценках разброса эндогенных характеристик рассматриваемой модели при двух рассмотренных вариантах учета неопределенности исходных характеристик. Можно также сделать вывод о том, что максимальные разбросы значений для эндогенных параметров в рассмотренных случаях составляют величины, не превышающие 15% по отношению к средним значениям на интервалах носителей для исследуемых характеристик.

Факторы неопределенности при взаимодействии электроупругих волн с границей

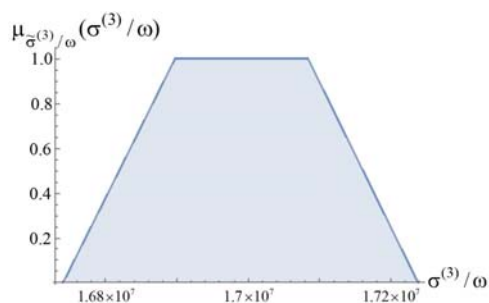


Рис.13. Функция принадлежности  $\tilde{\sigma}^{(3)}/\omega$

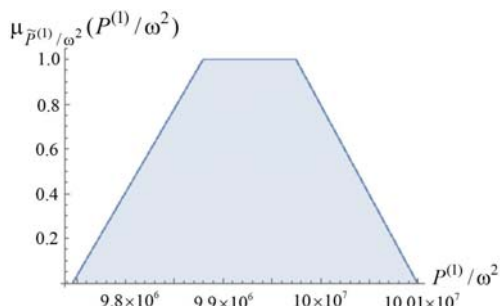


Рис.14. Функция принадлежности  $\tilde{P}^{(1)}/\omega^2$

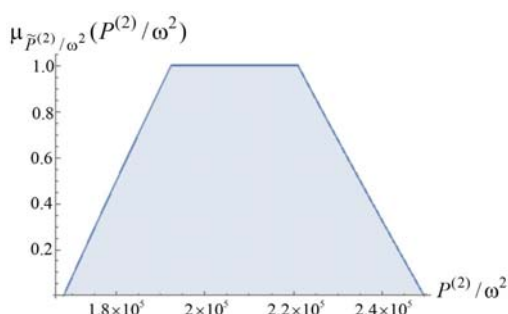


Рис.15. Функция принадлежности  $\tilde{P}^{(2)}/\omega^2$

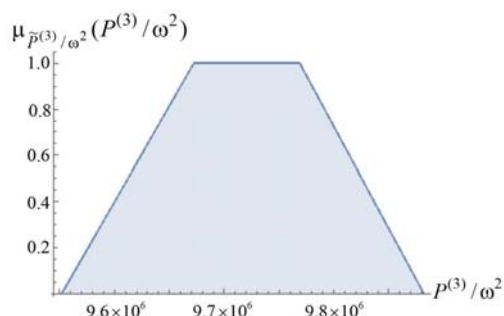


Рис.16. Функция принадлежности  $\tilde{P}^{(3)}/\omega^2$

**Выводы.** Результатом представленных в работе исследований является разработка нечетко-множественной численно-аналитической методики моделирования эффектов неопределенности при исследовании отражения-преломления плоской сдвиговой электроупругой волны, нормально падающей на границу контакта двух полубесконечных тел из линейно-поляризованной пьезокерамики класса 6mm с различными обладающими разбросами экспериментальных значений физико-механическими постоянными в случае, когда контактная поверхность рассматриваемых тел является поверхностью идеального электромеханического сопряжения. Методика основывается на описании неопределенных параметров пьезокерамических материалов нормальными трапецеидальными нечеткими интервалами и реализуемом далее с применением альфа-уровневой формы эвристического принципа обобщения переходе к нечетко-множественным аргументам в полученных на базе классического детерминистического варианта рассматриваемой модели аналитических соотношениях для исследуемых эндогенных характеристик. Представлены результаты численной реализации разработанной методики применительно к анализу амплитуд кинематических, силовых и энергетических характеристик отраженных и преломленных связанных электроупругих волн для рассматриваемого варианта граничных условий на контактной поверхности.

Методика позволяет установить диапазоны наиболее достоверных отклоне-

ний в значениях эндогенных характеристик при заданных разбросах исходных физико-механических параметров, а также определить предельные границы возможных разбросов исследуемых величин на минимальном уровне уверенности.

1. *Gaur A.M.* Shear wave propagation in piezoelectric-piezoelectric composite layered structure / A.M. Gaur, D.S. Rana // *Lat. Am. J. Solids Struct.* – 2014. – Vol. 11, no. 13. – P. 2483–2496. <https://doi.org/10.1590/S1679-78252014001300009>
2. *Gupta V.* The Effects of Piezoelectricity on the Interaction of Waves in Fluid-Loaded Poroelastic Half-Space / V. Gupta, A.K. Vashishth // Hindawi Publishing Corporation. *Smart Materials Research.* – Vol. 2014. – Article ID 281013. – 9 p. <http://dx.doi.org/10.1155/2014/281013>
3. *Бардзокас Д.И.* Возбуждение сдвиговых волн в акустически связанных полупространствах диэлектрика и пьезоэлектрика / Д.И. Бардзокас, Н.А. Сенник // *Изв. Нац. Акад. Наук Армении.* – 2000. – Т. 53, № 1. – С. 28 – 33.
4. *Бардзокас Д.И.* Электроупругость кусочно-однородных тел / Д.И. Бардзокас, М.Л. Фильштинский – Сумы: Университетская книга, 2000. – 308 с.
5. *Дьелесан Э.* Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов / Э. Дьелесан, Д. Руайе – М.: Наука. – 1982. – 424 с.
6. *Кудрявцев В.А.* Математические модели пьезоэлектриков для электронного машиностроения. Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела / В.А. Кудрявцев, В.З. Партон, Н.А. Сенник // *Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела.* – М.: ВИНТИ, 1984. – Т. 17. – С. 3 – 62.
7. *Панич А.А.* Кристаллические и керамические пьезоэлектрики / А.А. Панич, М.А. Маратовский, Д.В. Мотин // *Инженерный вестник Дона.* – 2011. – № 1. URL: <http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n1y2011/325>
8. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М.: Наука, 1970. – 139 с.
9. *Ларин В.Б.* Статистические задачи виброзащиты. – Киев: Наукова думка, 1974. – 128 с.
10. *De Godoy T.C.* Effect of parametric uncertainties on the performance of a piezoelectric energy harvesting device / T.C. De Godoy, M.A. Trindade // *J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng.* – 2012. – Vol. 34, No. spe2. – P. 552–560. <https://doi.org/10.1590/S1678-58782012000600003>.
11. *Дилигенский Н.В.* Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Н.В. Дилигенский, Л.Г. Дымова, П.В. Севастьянов. – М.: Издательство Машиностроение - 1, 2004. – 397 с.
12. *Ротштейн А.П.* Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов / А.П. Ротштейн, С.Д. Штовба, А.Н. Козачко. – Винница: УНІВЕРСУМ, 2007. – 215 с.
13. *Алтунин А.Е.* Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях / А.Е. Алтунин, М.В. Семухин – Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2002. – 352 с.
14. *Kaufmann A.* Introduction to fuzzy arithmetic-theory and applications / A. Kaufmann, M. Gupta – New York: Van Nostrand Reinhold, 1985. – 349 p.
15. *Anastassiou G.A.* Fuzzy Mathematics: Approximation Theory. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. – 444 p.
16. *Kandasamy W.B.V.* Special set linear algebra and special set fuzzy linear algebra / W.B.V. Kandasamy, F. Smarandache, K. Ilanthenral - Slatina, Judetul Olt, Romania: Editura CuArt, 2009. – 469 p.
17. *Sonbol A.H.* TSK Fuzzy Function Approximators: Design and Accuracy Analysis / A.H. Sonbol, M.S. Fadali // *IEEE Trans. Syst. Man and Cybern.* – 2012. – Vol. 42 – P. 702–712.
18. *Ban A.I.* Trapezoidal approximation and Aggregation / A.I. Ban, L.C. Coroianu, P. Grzegorzewski // *Fuzzy Sets Syst.* – 2011. – Vol.177. – P. 45–59.
19. *Bede B.* Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag,

2013. – 276 p.

20. *Grzegorzewski P.* Trapezoidal approximations of fuzzy numbers / P. Grzegorzewski, E. Mr'owka // *Fuzzy Sets Syst.* – 2005. – Vol.153. – P. 115–135.
21. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application. – Berlin, Heidelberg: Springer -Verlag, 2005. – 253 p.
22. *Сторожев В.И.* Нечетко-множественные оценки в моделях теории объемных волн деформаций / В.И. Сторожев, С.В. Сторожев // *Механика твердого тела.* – 2015. – Вып. 45. – С. 103 – 111.
23. *Сторожев С.В.* Нечеткие оценки для характеристик нелинейных вторых гармоник объемных волн сдвига в трансверсально-изотропной упругой среде / С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // *Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки.* – 2015. – № 2. – С. 38 – 43.

### S.V. Storozhev

#### **Modeling of uncertainty factors in the processes of interaction of electric waves with a plane contact boundary of piezoceramic bodies.**

A description of a fuzzy-set numerical-analytical technique for modeling the effects of uncertainty in the study of the reflection-refraction of a plane shear electroelastic wave incident on the contact boundary of two semi-infinite bodies made of linearly polarized piezoelectric ceramics of the 6mm class with different physical and mechanical constants having scatter errors of experimental values is given. The contact surface of the bodies under consideration is the surface of an ideal electromechanical contact. The technique is based on the description of uncertain parameters of piezoceramic materials by normal trapezoidal fuzzy intervals and the subsequent transition to fuzzy-set arguments in the analytical relations obtained within the framework of the classical deterministic version of the model under consideration for the endogenous characteristics under study. Investigation is implemented using the alpha-level form of the heuristic principle of generalization. The results of the numerical implementation of the developed technique are presented as applied to the analysis of the amplitudes of the kinematic, force and energy characteristics, as well as the potential of the quasi-static electric field of reflected and refracted coupled electroelastic waves.

**Keywords:** *modeling of uncertainty effects, composite piezoceramic bodies, flat contact boundaries, shear electroelastic waves, reflection and refraction, scatter errors of physical and mechanical constants, fuzzy-set technique, heuristic principle of generalization..*

ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства  
и архитектуры”, Макеевка  
SergeyS@i.ua

Получено 28.07.2016