

№ 2 (59) / 2017

Основан в 1970г.

ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СОДЕРЖАНИЕ

Строительная механика

- Левин В.М., Рогожин Н.Ю.* Модель дискретной трещины в механике деформируемой железобетонной пластины (модель дискретной трещины) 3
- Левин В.М., Шабельник С.В.* Описание поведения плосконапряженного бетона соотношениями теории течения 10

Механика деформируемого твердого тела

- Улитин Г. М., Царенко С. Н.* Изгибные колебания упругого стержня с переменной жесткостью сжатого продольной силой 19
- Чехов В.Н., Загора С.В.* Концентрация напряжений в трансверсально-изотропной сферической оболочке с жестким круговым включением, нагруженным нормальной силой 27
- Сторожев С.В., Номбре С.Б., Прийменко С.А.* Алгоритмы применения аппарата нечетких вычислений для учета факторов неопределенности в задачах волновой механики электроупругих сред 40
- Болнокин В.Е., Глухов И.А., Сторожев В.И.* Методика анализа процессов распространения локализованных упругих волн в двухслойном анизотропном пакете между анизотропными полупространствами 47
- Пачева М.Н., Сторожев В.И.* Модифицированная методика алгебраизации краевых условий в задаче о распространении упругой волны сдвига по волноводу из состыкованных под углом полуслоев 65

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

УДК 624.042:624.044:624.046

©2017. В.М. Левин, Н.Ю. Рогожин

МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНОЙ ТРЕЩИНЫ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ ПЛАСТИНЫ

Предложена математическая модель деформирования железобетонного элемента в виде объединения моделей деформирования арматуры, бетона и контакта между ними. Ее анализ позволил установить зависимость реакции арматурной связи в трещине от взаимного смещения ее берегов.

Ключевые слова: бетон, арматурный стержень, жёсткость арматурной связи, ширина раскрытия трещин, математическая модель.

1. Введение. Железобетон представляет собой композиционный строительный материал, который включает бетон и армирующие его стальные стержни (арматуру). Диаграмма деформирования бетона несимметрична: его прочность на сжатие в 10...20 раз превышает прочность на растяжение. Это, в основном, и обуславливает необходимость армирования бетона.

При анализе напряженно - деформированного состояния железобетонных конструкций большую роль играет выбор определяющих соотношений и, в частности, способ учета влияния трещин. При формировании полей напряжений и деформаций могут возникать различные ситуации, которые пока не удается описать едиными определяющими соотношениями, одинаково отвечающими потребностям анализа напряженно - деформированного состояния тела, требующие применения различных определяющих соотношений. Здесь возможны различные ситуации и широкое распространение получила модель дисперсных трещин. При расчёте по данной модели рассматривается воображаемое, сплошное тело, энергетически эквивалентное (в макромасштабе) железобетону. Данная модель детально разработана и хорошо верифицирована. Её исследованием занимались: В.И.Мурашев [1], А.А. Гвоздев, Дмитриев С.А., Ю.П. Гуца [2], Н.И. Карпенко [3], J.A. Figueiras, D.R.G. Qwen [4], O. Buyukozturk [5], Z.P. Bazant, P. Gambarova [6] и др.

Модель дискретных трещин изучена значительно слабее, ею занимались: D. Ngo [7], F. Vecchio, M.P. Collins [8], и др. В этой модели рассматривается сплошное тело, разделённое трещиной; эта трещина пересекается распределёнными по ее длине произвольно ориентированными арматурными стержнями. В отличие от классической механики деформируемого твердого тела, где энергия,

высвобождаемая при разрыве внутренних связей в теле в процессе образования трещины, расходуется на деформирование тела в окрестностях концов трещины, в армированном теле она расходуется на деформирование арматуры и локальное разрушение бетона в очень тонком слое в зоне его контакта с арматурой (которое условно отражается в модели как проскальзывание арматуры относительно бетона).

Модель дисперсных трещин хорошо изучена, однако во многих случаях, например, когда процесс образования трещин только начался, а также когда, кроме трещины, имеются другие источники концентраций напряжений - локальная нагрузка, отверстия, дефекты и т.д., её применение является невозможным. Следовательно, в таких случаях следует применять модель дискретных трещин.

2. Цель исследования и постановка задачи. Целью исследования является установление влияние выбора диаметра арматуры на жёсткость дискретных арматурных связей в первой трещине железобетонной пластины при различных уровнях нагружения. Данная модель основывается на подходе, изложенном в [9].

Для численного исследования принят железобетонный элемент в виде растянутого стержня с одиночным армированием в центре, который мысленно вырезан из железобетонной пластины. Объект моделирования представлен на рис. 1.

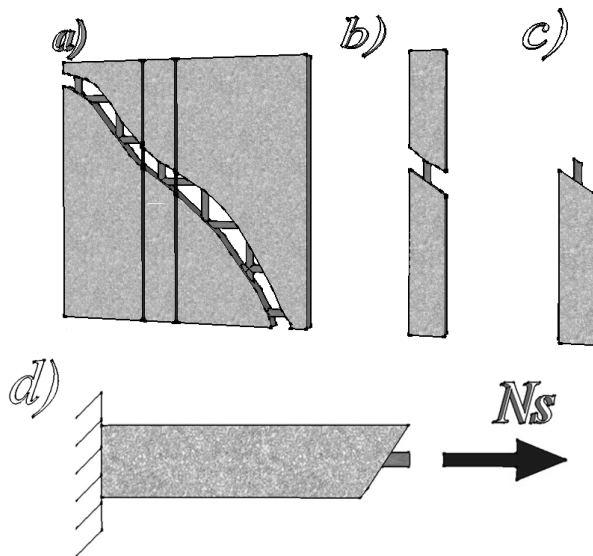


Рис. 1. Исходный объект моделирования: а) Железобетонная пластина с трещиной; б) Вырезаемая полоса; в) исходный объект моделирования; д) исходный объект моделирования с граничными условиями и прикладываемой нагрузкой

Исходными положениями для разработки модели послужили условия равновесия арматурной и бетонной части стержня, физический закон для арматуры и бетона, и закон сцепления. Арматура – упругая; диаграмма напряжений – деформаций для растянутого бетона по предложению EuroCode 2 [10]; сцепление

бетона и арматуры описывается нормальным законом сцепления М.М. Холмянского [11].

В результате преобразования исходных гипотез получена математическая модель деформирования рассматриваемого стержня в виде нелинейной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dU_s}{dx} &= \varepsilon_s(N_s); & \frac{dU_b}{dx} &= \varepsilon_b(N_b); \\ \frac{dN_s}{dx} &= T(g); & \frac{dN_b}{dx} &= -T(g); \\ U_s(0) &= 0; & U_b(0) &= 0; & N_b(l) &= 0; & N_s(l) &= \sigma_s \cdot A_s. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и далее $U_s(x)$ – смещение арматуры; $U_b(x)$ – смещение бетона; $N_s(x)$ – усилия в арматуре; $N_b(x)$ – усилия в бетоне; $T = B \cdot (\ln(1 + \alpha \cdot g) / (1 + \alpha \cdot g)) \cdot \pi \cdot d_s$ – усилие сцепления на единицу длины стержня при нормальном законе сцепления; B и α – параметры закона сцепления; $g = U_s(x) - U_b(x)$ – взаимное смещение арматуры и бетона после образования трещины; d_s – диаметр арматуры; $\varepsilon_s(N_s)$, $\varepsilon_b(N_b)$ – физические соотношения для арматуры и бетона.

3. Результаты численного анализа. В результате анализа модели получены распределения перемещений арматуры и бетона, а также усилий в их нормальных сечениях по длине стержня.

Один из параметров определяющих соотношений в модели дискретных трещин - жесткость арматурной связи берегов трещины, изменяющаяся в процессе деформирования. Она может быть определена либо как секущая жесткость, равная отношению усилия в арматуре к ширине раскрытия трещины, либо как касательная жесткость, равная производной от указанного усилия по ширине раскрытия трещины (фактически при обработке результатов физических и численных экспериментов принимался конечноразностный аналог производной).

По результатам численного анализа установлена зависимость секущей жесткости от уровня загрузки и от уровня деформирования. Результаты анализа показаны на рисунках 2, 3. Исходные данные для анализа: бетон класса C12/15, арматура класса A400 диаметрами $d_s = 12\text{мм}$, $d_s = 14\text{мм}$, $d_s = 16\text{мм}$.

Жесткость представляет собой удвоенное отношение усилия на конце арматурного стержня к перемещению данного конца

$$C = 2 \cdot \frac{N_s(l)}{U_s(l)}. \quad (2)$$

Результаты анализа сопоставлены с данными других авторов, занимавшихся близкой задачей расчета ширины раскрытия трещин [10, 12, 13, 14]. Полученная зависимость жесткости арматурной связи от диаметра арматуры показана на рис. 3.

Также, для верификации результатов анализа была получена зависимость ширины раскрытия трещины от напряжений в арматуре в сечении с трещиной и сопоставлена (рис. 4) с результатами расчетов по нормам [10, 14, 15, 16].

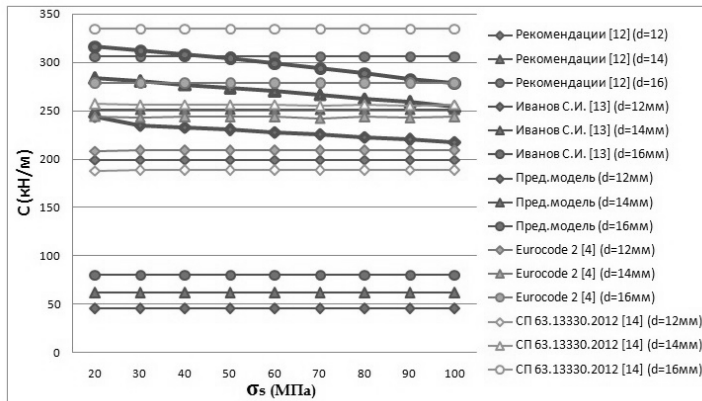


Рис. 2. Зависимость жёсткости арматурной связи в трещине от напряжения в арматуре, для диаметров: 12мм, 14мм, 16мм

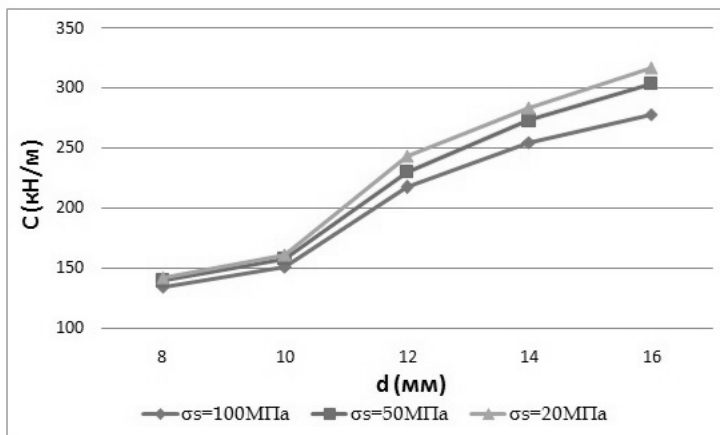


Рис. 3. Зависимость жёсткости арматурной связи в трещине от размера диаметра арматуры для уровней напряжения: 100МПа, 50МПа, 20МПа

Исходные данные для анализа: бетон класса $C12/15$, арматура класса $A400$ диаметром, $d_s = 12$ мм. Ширина раскрытия трещин принималась равной удвоенной разности между перемещением арматуры на конце стержня и перемещением бетона на конце стержня

$$a_{crc} = 2 \cdot (U_s(l) - U_b(l)) = 2 \cdot g(l). \quad (3)$$

Помимо этого, проводился сравнительный анализ касательной жёсткости арматурной связи в трещине от перемещения арматурного конца. Касательная жёсткость определяется как отношение приращения перемещения арматуры к приращению усилия возникающего в арматуре

Модель дискретной трещины

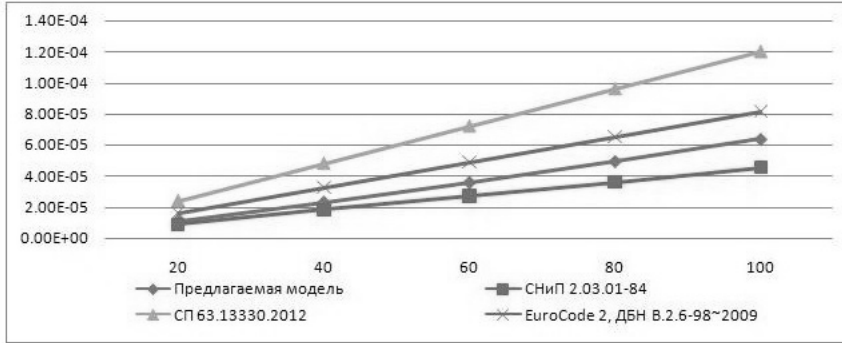


Рис. 4. График зависимости ширины раскрытия трещин от напряжений в арматуре в сечении посередине трещины

$$C' = \frac{\Delta U_s}{\Delta N_s}. \quad (4)$$

Результаты расчёта представлены на рис. 5. Исходные данные для анализа: бетон класса C12/15, арматура класса A400 диаметрами $d_s = 10\text{мм}$, $d_s = 12\text{мм}$, $d_s = 14\text{мм}$, $d_s = 16\text{мм}$.

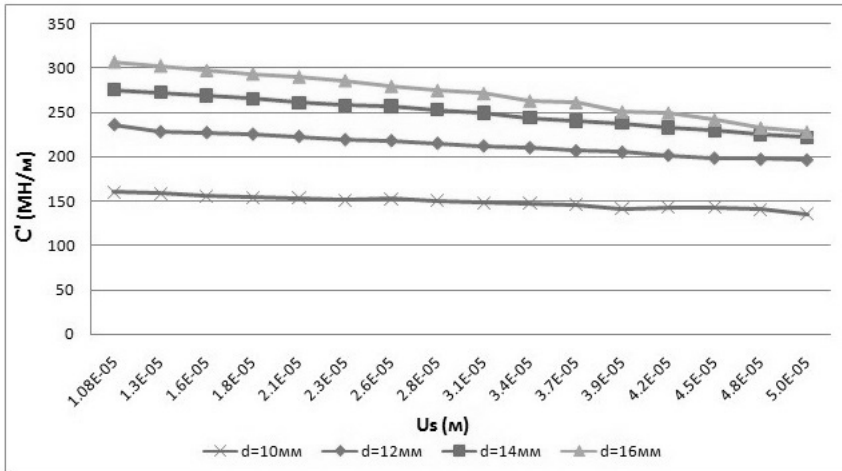


Рис. 5. Зависимость касательной жёсткости арматурной связи в трещине от перемещения сечения арматуры в трещине, для диаметров: 10мм, 12мм, 14мм, 16мм

4. Выводы. 1. Анализ принятой модели позволил оценить связь жёсткости дискретной арматурной связи в трещине с диаметром арматуры. В принятых условиях при увеличении диаметра арматуры с 12 до 16 мм жесткость увеличилась: из расчёта по предложенной модели на 32-30%, из расчёта по [10] в среднем приблизительно на 34%, из расчёта по [12] в среднем приблизительно на 53%, из расчёта по [13] в среднем приблизительно на 77%, из расчёта по [14] в среднем

приблизительно на 78%.

2. Этот же анализ позволяет оценить и падение жесткости указанной связи при увеличении напряжений в арматуре в трещине: при изменении напряжений с 20 до 100 Мпа жесткость падает в среднем приблизительно на 12%. Зависимость жесткости от уровня нагружения не выявляется при расчёте по данным [12,13].

3. Линейный характер зависимости ширины раскрытия трещин от напряжений в арматуре в сечении с трещиной соответствует данным упомянутых норм для рассмотренного диапазона напряжений. Количественные различия в результатах обусловлены, очевидно, принципиальным несовпадением исходных систем гипотез, недостаточностью эмпирического материала для уточнения параметров закона сцепления и различным подходом к созданию запасов трещиностойкости (в настоящей работе изучалась исследовательская задача без создания каких-либо запасов).

4. Касательная жёсткость арматурной связи для рассматриваемой модели увеличивается при увеличении диаметра арматурного стержня (с 10мм до 12мм на 23%, с 12мм до 14мм на 15%, с 14мм до 16мм на 11%) и уменьшается при увеличении перемещения сечения арматуры в трещине на 15%-20%.

1. *Мурашев В.И.* Трещиноустойчивость, жёсткость и прочность железобетона / В.И. Мурашев – М.: Машстройиздат, 1950. – 268 с.
2. *Новое в проектировании бетонных и железобетонных конструкций* / А.А. Гвоздев, С.А. Дмитриев, Ю.П. Гуца и др. – М.: Стройиздат, 1978. – 263 с.
3. *Карпенко Н.И.* Общие модели механики железобетона / Н.И. Карпенко. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
4. *Figueiras J.A., Owen D.R.J.* Nonlinear analysis of reinforced concrete shell structures // Proc. Int. conf. "Computer aided analysis and design of concrete structures"(eds. F. Damjanic et al., Split, 1984). – Swansea: Pineridge Press. – 1984. – P. 509–532.
5. *Вуькозтурк О.* Nonlinear analysis of reinforced concrete structures // Computers and Structures. –1977. – Vol. 7, No. 1. – P. 149–156.
6. *Bazant Z.P.* Rough cracks in reinforced concrete / Z.P. Bazant, P. Gambarova // Journal of the Structural Division, ASCE. – 1980. – Vol. 106, No. ST4. – P. 819–842.
7. *Ngo D.* A network-topological approach to the finite element analysis of progressive crack growth in concrete members: Ph.D. Dissertation / Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California. – Berkeley, 1975. – 283 p.
8. *Vecchio F.* The response of reinforced concrete to in-plane shear and normal stresses / F. Vecchio, M.P. Collins – Publication No 82-03, University of Toronto, Department of Civil Engineering, 1982. – 332 p.
9. *Левин В.М.* Напряжённо-деформированное состояние железобетонной стены после возникновения первой трещины / В.М. Левин // Современные проблемы строительства: ежегодный научно-технический сборник. – Донецк, 2001. – С. 246–250.
10. *Walraven J.C.* Eurocode 2: Design of concrete structures EN1992-1-1 / J.C. Walraven // Symposium Eurocodes: backgrounds and applications, Brussels 18-20 February 2008. – 225 p.
11. *Холмянский М.М.* Контакт арматуры с бетоном / М.М. Холмянский. – М.:Стройиздат, 1981. – 184 с.
12. *Рекомендации по проектированию стальных закладных деталей для железобетонных конструкций* /НИИЖБ. – М.: Стройиздат, 1984. – 87 с.
13. *Иванов С.И.* Учёт трещин при расчёте конструкций монолитных зданий методом конечных элементов // Бетон и железобетон. – 2000. – № 3 – С. 20–23.

14. СП 63.13330.2012 *Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003*. – М.: Минрегион России, 2012. – 161 с.
15. СНиП 2.03.01-84*. *Бетонные и железобетонные конструкции*. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1985. – 79 с.
16. ДБН В.2.6-98:2009. *Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення*. – К.: Мінрегіонбуд України, 2011. – 73 с.

V.M. Levin, M.U. Rohozhyn

Discrete crack model in the mechanic of the deformable reinforced concrete plate.

A mathematical model of deformation of reinforced concrete element as the union of deformation models of reinforcement, concrete and contact between them. Analysis of this model revealed the dependence of reinforcing tie in the crack of the relative displacement of its banks.

Keywords: *concrete, reinforcement, rigidity of a steel tie, width of crack opening, mathematical model.*

ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры”, Макеевка
viktor.m.levin@gmail.com

Получено 06.06.17

УДК 624.042:624.044:624.046

©2017. В.М Левин, С.В. Шабельник

ОПИСАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПЛОСКОНАПРЯЖЕННОГО БЕТОНА СООТНОШЕНИЯМИ ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЯ

Приведены соотношения модифицированной модели деформирования бетона, основанной на теории течения. Рассмотрены три предельные поверхности различной формы и выполнена оценка влияния этой формы на деформационные соотношения. В статье предложен вариант модификации функции изотропного упрочнения. Расчетные данные сопоставлены с результатами экспериментов при простом нагружении в условиях сжатия и сжатия с растяжением. Приведены погрешности аппроксимации опытных данных предложенными соотношениями.

Ключевые слова: бетон, теория течения, деформации, погрешность, предельная поверхность.

1. Введение. Для создания экономичных железобетонных конструкций необходимо напряжения в бетоне доводить до достаточно высокого уровня, когда он работает как упругопластическое тело. Расчет таких конструкций необходимо проводить с применением моделей и методов теории пластичности. При обычно встречающихся произвольных режимах нагружения материала применяется ее достаточно универсальный аппарат - теория пластического течения. Однако, если возможность его применения для таких материалов, как металлы, подтверждается многочисленными экспериментами и имеются соответствующие числовые характеристики, то для бетона такие экспериментальные данные практически не опубликованы; имеющиеся предложения зачастую либо содержат различные аппроксимации одних и тех же немногочисленных экспериментальных результатов, либо представлены в виде, не позволяющем применить их для построения теории и, тем более - методики расчета конструкции. Кроме того, имеющиеся данные не позволяют получить оценки точности требуемых числовых характеристик (по отношению к имеющимся экспериментальным данным). В настоящей работе предпринята попытка восполнить этот пробел.

Нелинейность деформирования бетона, начиная с достаточно низкого уровня нагружения обуславливает постоянное совершенствование моделей такого деформирования. В рамках деформационной теории пластичности бетона предложены достаточно адекватные модели; прежде всего, следует отметить расчетные модели, предложенные в работах Н.И. Карпенко [1], В.М. Круглова и А.И. Козачевского [2], В.И. Корсуна [3]; для сложного нагружения рассмотрены только отдельные частные случаи. Построения моделей деформирования бетона на основе теории течения (без прямого сопоставления экспериментальных и теоретических кривых деформирования), и некоторые их применения для расчета конструкций содержатся в работах S.S. Hsieh [4], J. Lubliner [5], P. Grassl [6], В.П. Агапова [7], С.Ф. Клованича [8,9], а также [10-12] и др.

В работе [7] предложен вариант теории течения, ориентированный на описа-

ние поведения бетона в условиях плоского напряженного состояния. Указанная модель представляет собой развитие классической теории Прандтля-Рейсса и построена на предположении изотропии материала, а также наличия функциональной зависимости интенсивности напряжений от меры накопленной пластической деформации.

Связь между векторами приращений деформаций и напряжений в упруго-пластической стадии деформирования может быть записана в виде:

$$d\bar{\varepsilon} = C_{ep}^{-1} \cdot d\bar{\sigma} \quad (1)$$

где C_{ep} - упругопластическая матрица материала,

$$C_{ep} = C - C \cdot \bar{a} \cdot \frac{\bar{a}^T \cdot C}{H' + \bar{a}^T \cdot C \cdot \bar{a}}, \quad (2)$$

C – матрица упругих констант; $H' = d\sigma_i/d\varepsilon_{ip}$ (определяется из опыта на одноосное сжатие); $d\bar{\varepsilon} = (d\varepsilon_x, d\varepsilon_x, d\gamma_{xy})^T$; $d\bar{\sigma} = (d\sigma_x, d\sigma_x, d\tau_{xy})^T$; \bar{a} – вектор течения:

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \right)^T. \quad (3)$$

Согласно [7] условие текучести в общем виде может быть записано как:

$$f(\sigma) - Y(\chi) = F(\sigma, \chi) = 0, \quad (4)$$

где $f(\sigma)$ – некоторая функция от компонентов напряжений; χ – параметр упрочнения; $Y(\chi)$ – уровень текучести.

2. Постановка задачи. Построение поверхности течения по экспериментальным данным неизбежно связано с погрешностями и неопределенностями экспериментов. Следует отметить, что при дифференцировании левой части предельных условий погрешности могут значительно возрасти, роль уточнения этих условий возрастает. Следовательно, при построении модели деформирования материала важной задачей является достижение минимальных погрешностей аппроксимации связанных с рациональным выбором функции предельной поверхности. В настоящей работе предпринята попытка модификации модели, предложенной В.П. Агаповым [7]. Данная статья посвящена оценке влияния варьирования предельного условия на погрешность моделирования процесса деформирования плосконапряженного бетона. Также одной из поставленных задач исследования является попытка усовершенствовать методику оценки меры накопленной пластической деформации в составе функции упрочнения материала, с целью улучшения качества аппроксимации. Основными критериями выбора оптимальной функции текучести приняты не только снижение погрешности аппроксимации в отдельных квадрантах напряженного состояния, но и ее универсальность. Для анализа выбраны предельные поверхности D.R.J. Owen [10], S.S. Hsieh, E.G. Ting, W.F. Chen [4] и K.J. Willam [13].

В работе [7] поверхность течения соответствует критерию текучести, предложенному в [10]:

$$f(\sigma) = f(I_1, J_2) = (\beta(3J_2) + \alpha I_1)^{1/2} = \sigma_T, \quad (5)$$

где I_1 – первый инвариант тензора напряжений; J_2 – второй инвариант девиатора напряжений; σ_T – напряжение текучести; α, β – параметры материала (определяются из опытов при двухосном напряженном состоянии).

Функция предельной поверхности S.S. Hsieh [4]:

$$f(\sigma, \tau) = AJ_2/\tau(\varepsilon_{ip}) + B\sqrt{J_2} + C\sigma_1 + DI_1 - \tau(\varepsilon_{ip}) = 0, \quad (6)$$

где A, B, C, D – коэффициенты характеризующие материал и обеспечивающие инцидентность контрольных точек указанной поверхности.

Функция предельной поверхности К.Ж. Willam [13]:

$$f(\sigma_m, \tau_m, \theta) = \sqrt{5}\tau_m - r = 0, \quad (7)$$

где τ_m – функция от второго инварианта девиатора напряжений

$$\tau_m = \sqrt{(2/5)J_2}, \quad (8)$$

r – интерполяционная функция между предельными значениями зависимостей (τ_t, τ_c) , образующих меридиональные кривые.

$$r = \frac{2\tau_c(\tau_c^2 - \tau_t^2)\cos\theta + \tau_c(2\tau_t - \tau_c)\sqrt{4(\tau_c^2 - \tau_t^2)\cos^2\theta + 5\tau_t^2 - 4\tau_t\tau_c}}{4(\tau_c^2 - \tau_t^2)\cos^2\theta + (\tau_c - 2\tau_t)^2}, \quad (9)$$

τ_t, τ_c – соответственно функции меридиональных кривых растяжения и сжатия

$$\begin{aligned} \tau_t &= \sqrt{5}\tau \left[a_0 + a_1 \left(\frac{\sigma_0}{\tau} \right) + a_2 \left(\frac{\sigma_0}{\tau} \right)^2 \right], \\ \tau_c &= \sqrt{5}\tau \left[b_0 + b_1 \left(\frac{\sigma_0}{\tau} \right) + b_2 \left(\frac{\sigma_0}{\tau} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Коэффициенты $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$, входящие в (10), обеспечивают попадание контрольных точек на предельную поверхность. Эти точки соответствуют случаям: одноосное сжатие R_c , двухосное равномерное растяжение R_{2p} , трехосное равномерное растяжение R_{3p} , двухосное равномерное сжатие R_{2c} , одноосное растяжение R_p .

Соответствия рассмотренных предельных поверхностей опытными данным прочности бетона в условиях плоского напряженного состояния приведены на рис. 1.

Критерий (5) хорошо согласуется с опытными данными по прочности бетона в условиях одно- и двухосного сжатия, приведенными в [11]. Однако форма

данной поверхности не соответствует имеющимся опытным данным по прочности бетона в условиях растяжения и сжатия с растяжением, что накладывает соответствующие ограничения на область применения модели, основанной на данном условии.

Функции предельной поверхности (6,7) хорошо согласуются с опытными данными для всех квадрантов напряженного состояния (рис. 1) и являются универсальными.

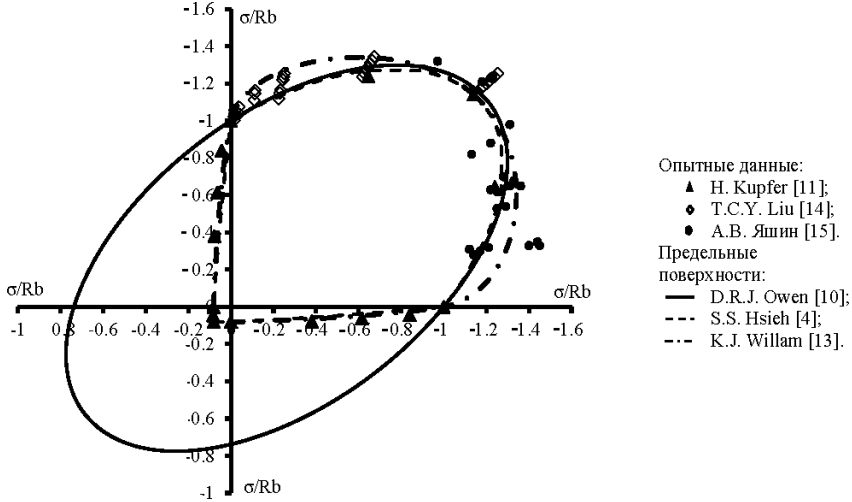


Рис. 1. Сопоставление предельных поверхностей с опытными данными.

3. Модификация модели В.П. Агапова [7]. Для построения модели на основании функции (7), предложенной К.Ж. Willam в работе [11], используем поверхность нагружения, которая в общем виде может быть записана как

$$F(\sigma_m, \tau_m, \theta, \chi) = f(\sigma_m, \tau_m, \theta) - h(\chi) = 0, \quad (11)$$

где $h(\chi)$ – функция упрочнения.

Нормаль к поверхности (11) для случая объемного напряженного состояния, задана градиентом функции, задающей эту поверхность в пространстве напряжений $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_z}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xz}} \right)^T. \quad (12)$$

Переходя к пространству главных напряжений, вектор течения запишем в виде

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_1}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_2}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_3}, 0, 0, 0 \right)^T. \quad (13)$$

Для определения компонент вектора течения будем рассматривать поверхность нагружения в пространстве параметров $\tau_m, \tau_c, \tau_t, \theta$ с матрицей Якоби пре-

образования координат J

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = J \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_m}, \frac{\partial F}{\partial \tau_c}, \frac{\partial F}{\partial \tau_t}, \frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^T, \quad (14)$$

где J – матрица Якоби указанного преобразования.

Таким образом, подставляя выражения для частных производных в (14), получаем компоненты вектора течения

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0)^T. \quad (15)$$

В качестве функции упрочнения для построения поверхности нагружения, отвечающей текущей мере пластической деформации, будем использовать зависимость

$$H' = d\tau_i/d\varepsilon_{ip}. \quad (16)$$

С целью улучшения аппроксимации опытных данных в варианте модели, основанном на предельной поверхности К.Ж. Уиллама [11], проверена возможность использования H' , полученной отдельно из каждого рассматриваемого опыта, а не из опыта на одноосное напряженное состояние.

4. Результаты верификации моделей, построенных на основании предложенных в [4, 10, 13] предельных поверхностей. Соответствие теоретических кривых деформирования бетона опытным данным Н. Купфера [11] в условиях плоского напряженного состояния показано на рис. 2. Качественная оценка аппроксимации свидетельствует, что применение функций предельной поверхности (6,7) приводит к достаточно хорошему соответствию теоретических и опытных данных. Однако, критерий текучести S.S. Hsieh [4] имеет точки перегиба в зоне перехода от одноосного сжатия в область сжатия с растяжением (рис. 1), что требует введения дополнительных условий для определения градиента к этой поверхности в указанных точках. Функция предельной поверхности К.Ж. Уиллама [13] не имеет таких недостатков. Поэтому использование последней является более рациональным с точки зрения простоты модели.

Лучшее соответствие расчетных данных результатам экспериментов было достигнуто при использовании касательного модуля H' для каждой экспериментальной траектории, а не из опыта на одноосное сжатие, как предлагалось в других источниках.

5. Развитие функции изотропного упрочнения. Использование касательного модуля H' непосредственно из рассматриваемого опыта является неудобным с точки зрения использования модели в прикладных расчетах. Поэтому была аппроксимирована зависимость H' от интенсивности полной пластической деформации ε_{ip} и параметра ξ , характеризующего вид напряженного состояния [2]

$$\xi = \sigma_0/\tau_0, \quad (17)$$

где σ_0, τ_0 – октаэдрические нормальное и касательное напряжения.

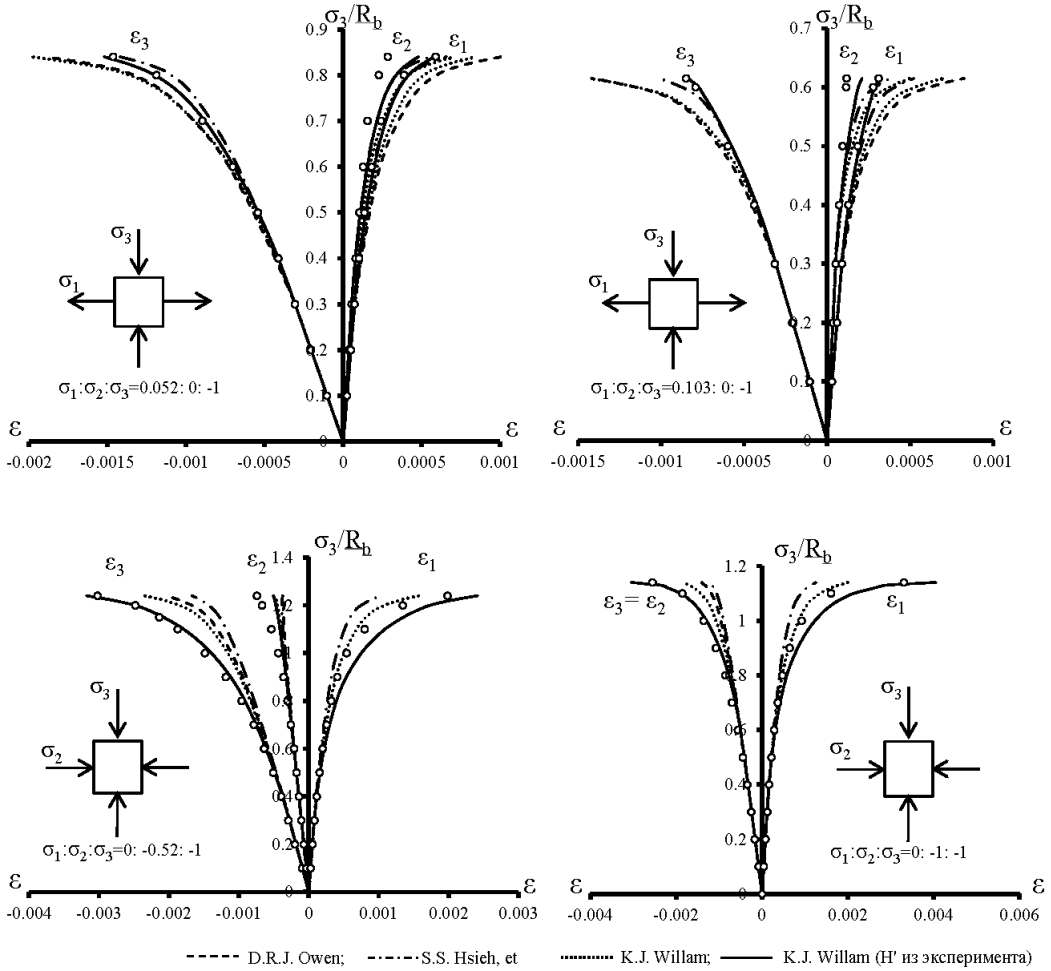


Рис. 2. Сопоставление теоретических кривых $\sigma - \varepsilon$, полученных с использованием рассмотренных предельных поверхностей, предложенных в [4, 10, 13], с опытными данными Н. Kupfer[11]

Для построения указанной функции с использованием выражения (16), были определены значения H' для опытных данных Н. Kupfer [11] из экспериментов при простом нагружении в области одно- и двухосного сжатия и сжатия с растяжением, а также из опытов М.Е. Tasuji [16] в области растяжения. Графики зависимости полученных H' от интенсивности пластических деформаций ε_{ip} аппроксимированы выражением

$$H' = \frac{1}{A \cdot \varepsilon_{ip}^3 + B \cdot \varepsilon_{ip}^2 + C \cdot \varepsilon_{ip} + D}, \quad (18)$$

где A, B, C, D – коэффициенты, значения которых в зависимости от параметра ξ для рассмотренных опытов [11,16] даны в табл. 1. При значениях параметра ξ , находящихся в промежутке между значениями, приведенными в табл. 1, величину коэффициентов A, B, C, D необходимо определять интерполяцией (воз-

можно, нелинейной). Сопоставление опытных данных и теоретических кривых, полученных с использованием поверхности нагружения (11) и зависимости (18), приведено на рис. 3.

Таблица 1
Зависимость коэффициентов функции упрочнения
от вида напряженного состояния

$(\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3)$	ξ	Значения коэффициентов			
		A	B	C	D
0.204: 0: -1	-0,504	79079149,1	-76989,52	25,11394	$-2,723 \cdot 10^{-4}$
0.103: 0: -0	-0,601	1943765,7	-2060,23	0,824238	$-1,061 \cdot 10^{-4}$
0.052: 0: -1	-0,653	593088,8	-731,20	0,366505	$-5,461 \cdot 10^{-5}$
0: 0: -1	-0,707	289291,3	-396,93	0,225161	$-3,003 \cdot 10^{-5}$
0: -0.52: -1	-1,241	72738,7	-94,47	0,128692	$-2,226 \cdot 10^{-5}$
0: -1: -1	-1,414	114783,7	-195,20	0,176678	$-3,087 \cdot 10^{-5}$
1: 0: 0	0,707	11174720994	-282474,8	3,798251	$-4,415 \cdot 10^{-9}$
1: 0.5: 0	1,225	5508093837,2	-227914,6	4,207909	$-2,538 \cdot 10^{-6}$
1: 1: 0	1,414	2454639392,6	-61890,7	3,22998	$-2,245 \cdot 10^{-7}$

6. Результаты верификации модифицированного варианта модели В.П. Агапова [7]. На рис. 3 приведено сопоставление расчетных кривых, полученных на основе варианта теории течения, построенного на предельной поверхности К.Ж. Уиллама [13] и зависимости (18), с опытными данными [11] в области одно- и двухосного сжатия и сжатия с растяжением соответственно.

Среднеквадратические относительные погрешности аппроксимации моделью опытных данных приведены в табл. 2. При анализе данных этой таблицы сле-

Таблица 2
Соответствие теоретических кривых деформирования
опытным данным [11]

Траектория $(\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3)$	Среднеквадратичная относительная погрешность аппроксимации, %, для главных деформаций		
	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3
0.204: 0: -1	5.9	19.3	7.6
0.103: 0: -0	2.4	25.5	3
0.052: 0: -1	5.7	22.6	1.3
0: 0: -1	10.9	10.9	1.4
0: -0.52: -1	26.4	11.8	4.5
0: -1: -1	17.2	7.1	7.1

дует иметь ввиду известное обстоятельство: достаточно точное измерение де-

формации в направлении нулевого главного напряжения плоских образцов из бетона (перпендикулярно их срединной плоскости) затруднительно, в связи с чем возможны большие погрешности измерения этих деформаций. Этим могут объясняться большие расхождения между экспериментальными данными (измеренными грубо) и данными аппроксимации (последние две строки колонки для ε_1 и первые три строки колонки для ε_2).

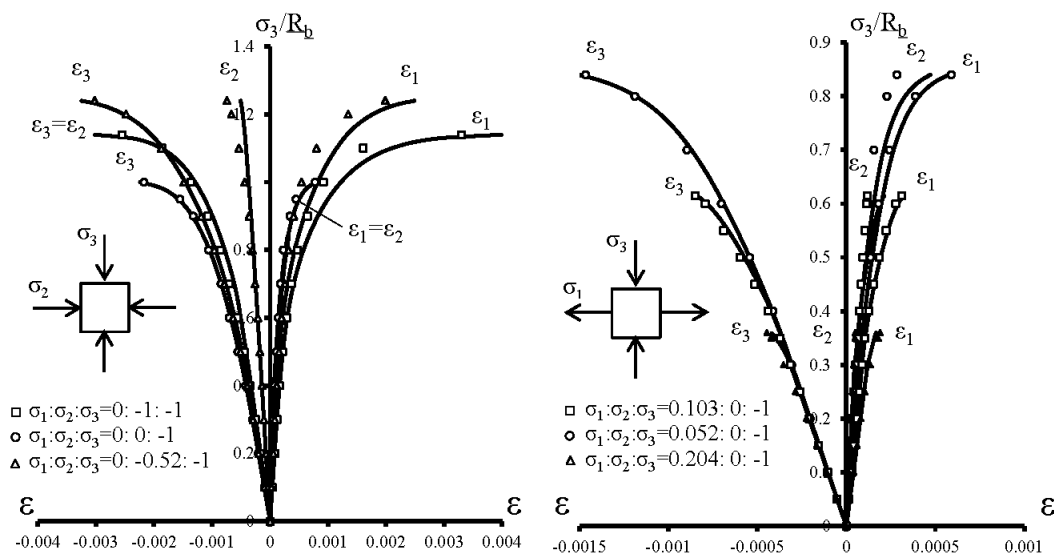


Рис. 3. Сопоставление теоретических кривых $\sigma - \varepsilon$, полученных с использованием зависимости (18), с опытными данными Н. Kupfer [11]

7. Выводы. Применение более адекватных предельных поверхностей для построения поверхности нагружения существенно снижает погрешность расчетных зависимостей деформирования материала и расширяет область применения рассматриваемой модели. Использование выражений, предложенных К.Ж. Willam [13], не требует введения дополнительных условий при определении градиента к предельной поверхности и дает достаточно хорошую точность аппроксимации опытных данных. Применение предложенной функции изотропного упрочнения (18) в рассматриваемой модели позволяет с достаточной точностью описать деформирование бетона. Максимальное среднеквадратическое отклонение по главным направлениям, удобным для измерения, не превышает 11,8%. Однако, обсуждаемая модель деформирования бетона требует дальнейшего развития. В частности, область ее применения ограничена прочностью бетонов, испытанных в работах [11] и [16]. Дальнейшее развитие теории связано с необходимостью проведения экспериментов на бетонах различной прочности. При установлении зависимостей задаваемого соотношением (17) параметра ξ от величин касательного модуля при различных видах напряженного состояния и различных углах излома траекторий нагружения для бетона предложенный подход может быть использован при описании сложного нагружения бетона.

1. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона / Н.И. Карпенко. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
2. Круглов В.М. Основные физические соотношения для бетона в плоском напряженном состоянии / В.М. Круглов., А.И. Козачевский // Сопротивление материалов и теория сооружений.– К.: Будівельник, 1989. – Вып. 55. – С. 71–77.
3. Корсун В.И. Напряженно-деформированное состояние железобетонных конструкций в условиях температурных воздействий / В.И. Корсун. – Макеевка: ДонГАСА, 2004. – 153 с.
4. Hsieh S.S. A plastic-fracture model for concrete / S.S. Hsieh, E.C. Ting, W.F. Chen // Solid Structures. – 1982. – Vol. 18, No 3. – P. 181–197.
5. A plastic-damage model for concrete / J. Lubliner, J. Oliver, S. Oller, E. Onate // Solid Structures. – 1989. – Vol. 25, No 3. – P. 299–326.
6. Grassl P. Concrete in compression: a plasticity theory with a novel hardening law / P. Grassl, K. Lundern, K. Gyltoft // Solid Structures. – 2002. – Vol. 39. – P. 5205–5223.
7. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций / В.П. Агапов. – М: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2004. – 248 с.
8. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в механике железобетона / С.Ф. Клованич., И.Н. Мироненко. – Одесса: [б. и.], 2007. – 111 с.
9. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики / С.Ф. Клованич. – Запорожье: Издательство журнала "Світ геотехніки 2009. – 400 с.
10. Owen D.R.J Finite element analysis of reinforced and prestressed concrete structures including thermal loading / D.R.J Owen, J.A. Figueiras, F. Damjanic // Computer methods in applied mechanics and engineering. – 1983. – Vol. 41. – P. 323–366.
11. Kupfer H. Das Verhalten des betons unter zweiachsiger beanspruchung / H. Kupfer // Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universitat. – Dresden, 1968. – heft 6. – S. 1515–1523.
12. Железобетонные стены сейсмостойких зданий. Исследования и основы проектирования / под ред. Г.Н. Ашкинадзе, М.Е. Соколова. – М.: Стройиздат, 1988. – 504 с.
13. Willam K.J Constitutive model for the triaxial behavior of concrete / K.J Willam, E.P. Warnke // Int.Assoc.Bridge.Struct.Eng.Proc. – 1974. – Vol. 19. – P. 1–31.
14. Liu T. C. Y. Stress-strain response of concrete in uniaxial and biaxial compression / T.C.Y. Liu, A.H. Nilson, F.O. Slate // ACI Journal. – 1972. – No 5.– P. 291–295.
15. Яшин А.В. Критерии прочности и деформирования бетона при простом нагружении для различных видов напряженного состояния / А.В. Яшин // Расчет и конструирование железобетонных конструкций / под ред. А.А. Гвоздева. – М.: НИИЖБ, 1977. – С. 48–57.
16. Tasuji M. E. Stress-strain response and fracture of concrete in biaxial loading / M.E. Tasuji, F.O. Slate, A.H. Nilson // ACI Journal. – 1978. – No 7. – P. 306–312.

V.M. Levin, S.V. Shabelnik

Description of plane-stressed concrete behavior by the relations of the flow theory.

The relations of the modified deformation model for concrete based on the flow theory are presented. Three ultimate surfaces of various shapes have been considered and the effect estimation of the shape to the straining relations have been made. In the article a variant of isotropic hardening function modification is proposed. The calculated data are compared with the results of experiments for simple loading in terms of compression and tension with compression. The approximation errors of the experimental data by suggested relations are given.

Keywords: concrete, flow theory, loading, strains, error, ultimate surface.

ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства и архитектуры”, Макеевка
victor.m.levin@gmail.com

Получено 06.06.17

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

©2017. Г.М. Улитин, С.Н. Царенко

ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ СЖАТОГО ПРОДОЛЬНОЙ СИЛОЙ

Рассматривается задача изгибных колебаний сжатого упругого стержня с квадратичным законом изменения жесткости от продольной координаты. Для этого случая составлено дифференциальное уравнение продольно-поперечного изгиба. Решение уравнения получено в виде степенных рядов, вид которых позволяет рассматривать любые граничные условия. В качестве примера, определен спектр собственных частот поперечных колебаний консольного стержня. Исследовано влияние продольной нагрузки на значения первых собственных частот. Выполнено сравнение результатов расчета по предлагаемой модели с известными решениями в литературе.

Ключевые слова: изгибные колебания, сжатый стержень, стержень переменной жесткости, спектр собственных частот.

1. Введение. Для исследования напряженно-деформированного состояния различного рода технических объектов при динамических воздействиях применяется модель упругого стержня [1]. В частности, с использованием такой модели исследованы динамические процессы в элементах бурового оборудования [2, 3], а в работе [4] упругим стержнем моделируются здания в исследованиях колебаний при сейсмических воздействиях. При рассмотрении стержней с однородной структурой, как правило, используют известные аналитические решения [5-7]. Для исследования стержней сложной конфигурации применяют в основном упрощенные методы: численные [4, 8, 9] и энергетические [10, 11].

Поиск аналитического решения задачи колебаний стержня с переменной структурой при наличии продольной нагрузки позволит провести исследования динамических характеристик целого ряда технических объектов с любым видом граничных условий. Такую математическую модель также можно использовать для верификации моделей построенных в программных комплексах объектного и имитационного моделирования.

2. Постановка задачи и основные соотношения. Рассмотрим упругий стержень, у которого распределенная масса и изгибная жесткость определяются следующими зависимостями

$$m = \gamma F, \quad EJ = EJ_2 z^2; \quad z = (1 - k) \frac{x}{l} + k, \quad k = \frac{h_1}{h_2}. \quad (1)$$

Здесь γ – плотность, E – модуль упругости, F – площадь поперечного сечения, J_2 – момент инерции основания стержня, h_1 и h_2 – радиусы инерции верхнего и нижнего сечений, l – длина стержня, N – продольная сила (рис. 1). Стержень с такими параметрами можно использовать для моделирования конструкций буровых вышек, копров, решетчатых башен и пр. Из условий равновесия элемента

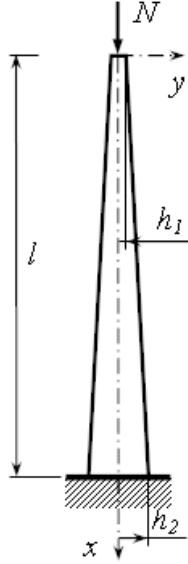


Рис. 1. Расчетная схема стержня с переменной жесткостью.

такого стержня следует система уравнений

$$\begin{aligned} EJ_2 z^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= M(x), \quad \frac{\partial M}{\partial x} = Q_y(x) - N \frac{\partial y}{\partial x}, \\ \frac{\partial Q_y}{\partial x} &= p(x, t) - \gamma F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $y(x, t)$ – уравнение изогнутой оси стержня, EJ_2 – жесткость стержня в основании, $M(x)$ – изгибающий момент, $Q_y(x)$ – проекция перерезывающей силы на поперечную ось, $p(x, t)$ – интенсивность поперечной нагрузки.

Из системы уравнений (1) приходим к уравнению относительно прогибов $y(x, t)$

$$\begin{aligned} z^2 \frac{d^4 y}{dz^4} + 4z \frac{d^3 y}{dz^3} + (2 + \tilde{N}) \frac{d^2 y}{dz^2} &= \\ &= \frac{\rho l^4}{(1-k)^4 EJ_2} - \frac{\gamma F l^4}{(1-k)^4 EJ_2} \ddot{y}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\tilde{N} = Nl^2 / \left((1-k)^2 EJ_2 \right)$ – безразмерная продольная нагрузка.

Определим общее решение однородного уравнения (3) (случай свободных колебаний)

$$z^2 y'''' + 4z y''' + (2 + \tilde{N}) y'' = - \frac{\gamma F l^4}{(1-k)^4 EJ_2} \ddot{y}. \quad (4)$$

Разделяя переменные, получаем уравнение для собственных функций

$$z^2 Z_n'''' + 4z Z_n'''' + (2 + \tilde{N}) Z_n'' - \lambda_n^4 Z_n = 0, \quad (5)$$

где $\lambda_n^2 = 4\omega_n l^2 \sqrt{\gamma F / (E J_2)} / ((1 - k)^2)$, ω_n – собственные частоты колебаний.

Для уравнения (5) общее решение будем искать в виде функции $U(\xi)$, где $\xi = \lambda_n \sqrt{z}$. Тогда оно примет вид

$$\xi^4 U'''' + 2\xi^3 U'''' - \eta^2 \xi^2 U'' + \eta^2 \xi U' - \xi^4 U = 0, \quad (6)$$

где $\eta = \sqrt{1 - 4\tilde{N}}$.

Решение уравнения (6) будем искать в виде ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \xi^{\alpha+m}. \quad (7)$$

Подставляя ряд (7) в уравнение (6) получим

$$\begin{aligned} & L \sum_{m=0}^{\infty} c_m \xi^{\alpha+m} = \\ & = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (\alpha + m) (\alpha + m - 2) \left((\alpha + m - 1)^2 - \eta^2 \right) \xi^{\alpha+m} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m \xi^{\alpha+m+4}, \end{aligned}$$

где $L = \xi^4 \frac{d^4}{d\xi^4} + 2\xi^3 \frac{d^3}{d\xi^3} - \eta^2 \xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + \eta^2 \xi \frac{d}{d\xi} - \xi^4$ – дифференциальный оператор.

Выражение справа будет равно первому члену ряда, а именно величине

$$c_0 \alpha (\alpha - 2) \left((\alpha - 1)^2 - \eta^2 \right) \xi^{\alpha}.$$

Коэффициенты c_m подберем таким образом, чтобы в обоих рядах справа коэффициенты при соответствующих степенях ξ были равны. В результате такого выбора получим систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 (\alpha + 1) (\alpha - 1) (\alpha^2 - \eta^2) = 0, \\ c_2 (\alpha + 2) \alpha \left((\alpha + 1)^2 - \eta^2 \right) = 0, \\ c_3 (\alpha + 3) (\alpha + 1) \left((\alpha + 2)^2 - \eta^2 \right) = 0, \\ c_4 (\alpha + 4) (\alpha + 2) \left((\alpha + 3)^2 - \eta^2 \right) - c_0 = 0, \\ \dots \dots \dots \\ c_m (\alpha + m) (\alpha + m - 2) \left((\alpha + m - 1)^2 - \eta^2 \right) - c_{m-4} = 0. \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (8)$$

С учетом решения системы (8), получим

$$L \sum_{m=0}^{\infty} c_m \xi^{\alpha+m} = c_0 \alpha (\alpha - 2) \left((\alpha - 1)^2 - \eta^2 \right) \xi^{\alpha}.$$

Отсюда видно, что ряд (7) может стать решением уравнения (6) только при значениях $\alpha = 0; 2; 1 \pm \eta$. Таким образом, из системы (8) следует, что для всех α выполняется свойство $c_m = 0$ для $m \neq 4j$, а c_{4m} выражается через c_0

$$c_{4m} = \frac{c_0}{\prod_{j=1}^{2m} (2j + \alpha) \prod_{j=1}^m \left((4j + \alpha - 1)^2 - \eta^2 \right)}.$$

Тогда система уравнений будет удовлетворена, если $\alpha = 0; 2; 1 \pm \eta$, и из (8) видно, что решением является функция

$$U_\alpha(\xi) = c_0 \xi^\alpha \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi^{4m}}{\prod_{j=1}^{2m} (2j + \alpha) \prod_{j=1}^m \left((4j + \alpha - 1)^2 - \eta^2 \right)} \right). \quad (9)$$

Таким образом, подставляя в зависимость (9) ранее определенные значения α , получим четыре функции, которые являются линейно независимыми решениями уравнения (6). Решение (9) можно переписать в виде

$$U_\alpha(\xi) = \xi^\alpha \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\xi/2)^{4m} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\alpha-1-\eta}{4} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\alpha-1+\eta}{4} + 1\right)}{2^{2m} \Gamma\left(2m + \frac{\alpha}{2} + 1\right) \Gamma\left(m + \frac{\alpha-\eta}{4} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(m + \frac{\alpha+\eta}{4} + \frac{3}{4}\right)}, \quad (10)$$

где $\Gamma(z)$ - гамма функция.

Тогда общее решение уравнения (5) для собственных функций можно представить в виде

$$Z_n(z) = C_1 U_0(\lambda_n \sqrt{z}) + C_2 U_{1-\eta}(\lambda_n \sqrt{z}) + C_3 U_{1+\eta}(\lambda_n \sqrt{z}) + C_4 U_2(\lambda_n \sqrt{z}), \quad (11)$$

где

$$U_\alpha(\xi) = \xi^\alpha \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\xi/2)^{4m}}{2^{2m} \Gamma\left(2m + \frac{\alpha}{2} + 1\right) \Gamma\left(m + \frac{\alpha-\eta}{4} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(m + \frac{\alpha+\eta}{4} + \frac{3}{4}\right)}.$$

Функции (11) позволяют рассматривать любой вид граничных условий.

3. Модальный анализ консольного стержня. Рассмотрим задачу колебаний консольного стержня (рис. 1), для этого решим граничную задачу (4) с условиями:

$$y(l, t) = 0; \quad y'(l, t) = 0; \quad M(0, t) = 0; \quad (12)$$

$$Q(0, t) + N y'(0, t) = 0. \quad (13)$$

Исходя из удовлетворения условий (12) введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}
 A_n = & U_2(\lambda_n) U'_{1-\eta}(\lambda_n) U''_{1+\eta}(\lambda_n \sqrt{k}) - \\
 & - U_2(\lambda_n) U'_{1+\eta}(\lambda_n) U''_{1-\eta}(\lambda_n \sqrt{k}) - \\
 & - U_{1-\eta}(\lambda_n) U'_2(\lambda_n) U''_{1+\eta}(\lambda_n \sqrt{k}) + \\
 & + U_{1-\eta}(\lambda_n) U'_{1+\eta}(\lambda_n) U''_2(\lambda_n \sqrt{k}) + \\
 & + U_{1+\eta}(\lambda_n) U'_2(\lambda_n) U''_{1-\eta}(\lambda_n \sqrt{k}) - \\
 & - U_{1+\eta}(\lambda_n) U'_{1-\eta}(\lambda_n) U''_2(\lambda_n \sqrt{k}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_n = & U_0(\lambda_n) U'_{1-\eta}(\lambda_n) U''_{1+\eta}(\lambda_n \sqrt{k}) - \\
 & - U_0(\lambda_n) U'_{1+\eta}(\lambda_n) U''_{1-\eta}(\lambda_n \sqrt{k}) - \\
 & - U_{1-\eta}(\lambda_n) U'_0(\lambda_n) U''_{1+\eta}(\lambda_n \sqrt{k}) + \\
 & + U_{1-\eta}(\lambda_n) U'_{1+\eta}(\lambda_n) U''_0(\lambda_n \sqrt{k}) + \\
 & + U_{1+\eta}(\lambda_n) U'_0(\lambda_n) U''_{1-\eta}(\lambda_n \sqrt{k}) - \\
 & - U_{1+\eta}(\lambda_n) U'_{1-\eta}(\lambda_n) U''_0(\lambda_n \sqrt{k}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_n = & U_0(\lambda_n) U'_2(\lambda_n) U''_{1+\eta}(\lambda_n \sqrt{k}) - \\
 & - U_0(\lambda_n) U'_{1+\eta}(\lambda_n) U''_2(\lambda_n \sqrt{k}) - \\
 & - U_2(\lambda_n) U'_0(\lambda_n) U''_{1+\eta}(\lambda_n \sqrt{k}) + \\
 & + U_2(\lambda_n) U'_{1+\eta}(\lambda_n) U''_0(\lambda_n \sqrt{k}) + \\
 & + U_{1+\eta}(\lambda_n) U'_0(\lambda_n) U''_2(\lambda_n \sqrt{k}) - \\
 & - U_{1+\eta}(\lambda_n) U'_2(\lambda_n) U''_0(\lambda_n \sqrt{k}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_n = & U_0(\lambda_n) U'_2(\lambda_n) U''_{1-\eta}(\lambda_n \sqrt{k}) - \\
 & - U_0(\lambda_n) U'_{1-\eta}(\lambda_n) U''_2(\lambda_n \sqrt{k}) - \\
 & - U_2(\lambda_n) U'_0(\lambda_n) U''_{1-\eta}(\lambda_n \sqrt{k}) + \\
 & + U_2(\lambda_n) U'_{1-\eta}(\lambda_n) U''_0(\lambda_n \sqrt{k}) + \\
 & + U_{1-\eta}(\lambda_n) U'_0(\lambda_n) U''_2(\lambda_n \sqrt{k}) - \\
 & - U_{1-\eta}(\lambda_n) U'_2(\lambda_n) U''_0(\lambda_n \sqrt{k}).
 \end{aligned}$$

Здесь и далее штрихом обозначены производные по z . С учетом принятых обозначений выражение собственных функций (11) для консольного стержня получим в виде

$$\begin{aligned}
 Z_n(z) = & A_n U_0(\lambda_n \sqrt{z}) - B_n U_{1-\eta}(\lambda_n \sqrt{z}) + \\
 & + C_n U_{1+\eta}(\lambda_n \sqrt{z}) - D_n U_2(\lambda_n \sqrt{z}).
 \end{aligned} \tag{14}$$

Определив производные от собственных функций (14), из условия (13) получаем уравнение для нахождения собственных значений

$$\left(z^2 Z_n''(\lambda_n \sqrt{z}) \right)' \Big|_{z=k} + \frac{1}{4} (1 - \eta^2) Z_n'(\lambda_n \sqrt{k}) = 0. \quad (15)$$

Оценим влияние продольной нагрузки \tilde{N} на значения первых собственных чисел уравнения (15) (собственных частот)

$$\omega_n = \frac{\tilde{\lambda}_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_2}{\gamma F}}, \quad \tilde{\lambda}_n = \frac{\lambda_n}{2} (1 - k).$$

Аналогичным образом определяются частоты стержней постоянной жесткости [1]. Рассмотрим стержень с величиной относительного поперечного размера $k = 0.1$. Величину продольной нагрузки \tilde{N} будем варьировать в пределах $0 < \tilde{N} < \tilde{N}_{kp}$, где \tilde{N}_{kp} – критическая сила, которая для консольного стержня с $k = 0.1$ составит $\tilde{N}_{kp} = 1.06$ [12]. Следует отметить, что собственные функции определяются для всех значений \tilde{N} в указанных пределах, кроме $\tilde{N} = 0.25$, так как в этом случае полученные решения уравнения (6) будут линейно зависимыми ($\eta = 0$, $U_{1-\eta}(\xi) = U_{1+\eta}(\xi)$). Данный случай следует рассмотреть отдельно.

На графиках рис. 2 представлены численные исследования зависимостей $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ от величины безразмерной продольной силы \tilde{N} из уравнения (15). Штрихпунктирные линии соответствуют значениям $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ для стержня без продольной нагрузки. Такая модель рассмотрена в работе [13]. Продольная сила ока-

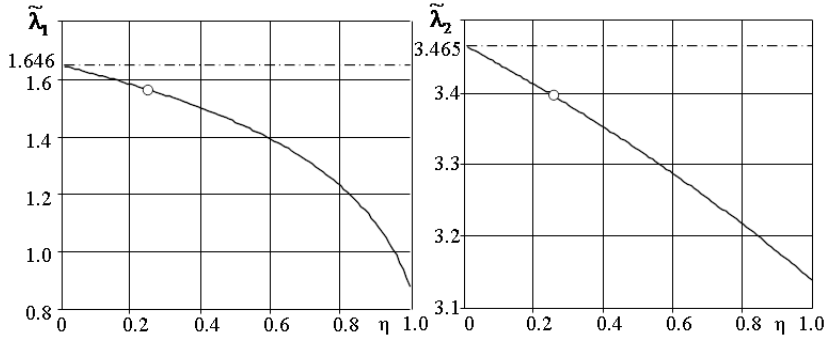


Рис. 2. Зависимости первых двух собственных чисел частотного уравнения от параметра продольной нагрузки

зывает значительное влияние на величину первой собственной частоты, а при достижении критического значения первая частота стремиться к нулю. Аналогичный результат получен и для стержней постоянного сечения [14]. Если принять $k \approx 0$ и $\tilde{N} \approx 0$, то получим $\tilde{\lambda}_1 = 1.6$; $\tilde{\lambda}_2 = 3.16$; $\tilde{\lambda}_3 = 4.73$. Это практически совпадает с результатами для остrokонечного стержня, рассмотренного в работе [15] ($\tilde{\lambda}_1 = 1.6$; $\tilde{\lambda}_2 = 3.16$; $\tilde{\lambda}_3 = 4.71$).

4. Определение собственных частот буровой вышки. В качестве практического примера определим первые собственные частоты буровой башенной вышки ВБ-53-320, основные конструктивные параметры которой возьмем из статьи [11]. Вышка представляет пространственную ферменную стержневую конструкцию в виде квадратной усеченной пирамиды и имеет следующие характеристики: высота вышки 53.3 м, ширина нижнего основания 10 м, верхнего 2 м ($k = 0.2$), масса вышки $M=40$ т ($m=750$ кг/м), площадь поперечного сечения стоек $F=351.4$ см² ($EJ_2 = 1,757 \cdot 10^{11}$ Нм²), грузоподъемность вышки 320 т ($\tilde{N} = 0.081$). С учетом принятых параметров получим первые три собственные частоты

$$\omega_1 = 14.98 \text{ рад/с}, \quad \omega_2 = 72.45 \text{ рад/с}, \quad \omega_3 = 185.1 \text{ рад/с}.$$

При отсутствии продольной нагрузки ($\tilde{N} = 0$) собственные частоты будут [11]

$$\omega_1 = 15.27 \text{ рад/с}, \quad \omega_2 = 72.94 \text{ рад/с}, \quad \omega_3 = 185.6 \text{ рад/с}.$$

5. Выводы. Таким образом, динамические характеристики объектов, найденные с использованием предложенной математической модели колебаний сжатого стержня с квадратичным законом изменения жесткости от продольной координаты, хорошо согласуются с известными результатами, полученными с использованием аналитических и энергетических методов. Тем не менее, стоит отметить, что ряд (11) имеет плохую сходимость для больших аргументов ξ , что, в свою очередь, ограничивает практическое применение рассмотренной модели и требует дальнейших исследований.

1. Chopra A.K. Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering / A.K. Chopra. – Fourth edition. – Prentice Hall, 2014. – 992 p.
2. Гуляев В.И. Самовозбуждение колебаний долота бурильной колонны / В.И. Гуляев, П.З. Луговой, Е.И. Борщ // Прикладная механика. – 2013. – Т. 49, № 3. – С. 114–124.
3. Улитин Г.М. Продольные колебания упругого стержня, моделирующего буровую установку / Г.М. Улитин // Прикладная механика. – 2000. – Т. 36, № 10. – С. 125–128.
4. Барбашев Н.П. Оценка влияния продольной сжимающей силы на изгибные колебания здания при сейсмических воздействиях / Н.П. Барбашев // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Политематическая. – 2012. – Вып. 3(23). – С. 1–5.
5. Чадаев Ю.А. Определение спектра поперечных колебаний стержней, нагруженных продольной нагрузкой / Ю.А. Чадаев // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2014. – Вып. 1. – Ч.1. – С. 225–231.
6. Акуленко Л.Д. Спектр поперечных колебаний участка движущегося стержня при воздействии продольной нагрузки / Л.Д. Акуленко, Д.В. Георгиевский, С.В. Нестеров // Известия РАН. МТТ. – 2015. – № 2. – С. 139–144.
7. Динамическое поведение балок моделей Бернулли-Эйлера, Рэлея и Тимошенко, лежащих на упругом основании (сравнительный анализ) / В.И. Ерофеев, В.В. Кажаяев, Е.Е. Лисенкова [и др.] // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 5(3). – С. 274–278.
8. Алокова М.Х. Вынужденные изгибные колебания вертикальной стойки переменного сечения / М.Х. Алокова, Д.М. Иванова // Известия Кабардино-Балкарского государственного университета. – 2015. – Т. V, № 3. – С. 74–78.
9. Гордон В.А. Собственные частоты и формы изгибных колебаний балки с трещиной / В.А. Гордон, Э.А. Кравцова // Вестник МГСУ. – 2014. – № 3. – С. 50–58.

10. Каган-Розенцвейг Л.М. Вычисление частот собственных колебаний сжатых стержней переменной сечения. Упрощенное уравнение изгиба (I) / Л.М. Каган-Розенцвейг // Вестник гражданских инженеров. – 2015. – № 6(53). – С. 84–87.
11. Улитин Г.М. Поперечные колебания металлических башенных конструкций с учетом переменной жесткости и продольных нагрузок / Г.М. Улитин, С.Н. Царенко // Вібрації в техніці та технологіях. – 2012. – № 2(66). – С. 90–94.
12. Улитин Г.М. Устойчивость упругого весомого стержня переменной изгибной жесткости, моделирующего конструкции башенного типа / Г.М. Улитин, С.Н. Царенко // Строительная механика и расчет сооружений. – 2015. – № 2(263). – С. 36–40.
13. Улитин Г.М. Изгибные колебания стержня с переменной жесткостью и распределенной массой / Г.М. Улитин, С.Н. Царенко // ПММ. – 2015. – Т. 79, № 6. – С. 817–823.
14. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит. 1967. – 983 с.
15. Динник А.Н. Избранные труды / А.Н. Динник – Киев: Изд-во АН УССР, 1955. – Т. 2. – 220 с.

G.M. Ulitin, S.N. Tzarenko

Flexural vibrations of an elastic rod of variable stiffness of compressed longitudinal force.

The problem of flexural vibrations of the compressed elastic rod with a quadratic change in stiffness of the longitudinal coordinate is considered. The differential equation is composed of the longitudinal-transverse bending for this case. The solution of the equation was obtained in the form of power series, which allows us to consider any border conditions. For example, the spectrum of eigenfrequencies of transverse vibrations of a cantilever rod is defined. The influence of the longitudinal force on the values of the first eigenfrequencies was investigated. Comparison of calculation results for the proposed model with known solutions in the literature is carried out.

Keywords: *flexural vibrations, rod of variable stiffness, spectrum of eigenfrequencies.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный технический университет”,
Донецк
tzarenko@gmail.com

Получено 13.04.17

УДК 539.3

©2017. В.Н. Чехов, С.В. Загора

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С ЖЕСТКИМ КРУГОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ, НАГРУЖЕННОЙ НОРМАЛЬНОЙ СИЛОЙ

В рамках уточненной теории типа С. П. Тимошенко, которая учитывает деформации поперечного сдвига, получено аналитическое решение задачи о напряженном состоянии пологой трансверсально - изотропной сферической оболочки с круговым абсолютно жестким включением, нагруженной нормальной силой. В результате численных исследований обнаружено значительное увеличение напряжений в оболочке при увеличении параметра поперечного сдвига материала оболочки и уменьшении радиуса жесткой шайбы. Проведено сопоставление результатов, полученных по уточненной и технической теориям.

Ключевые слова: напряжения, трансверсально-изотропная, сферическая, оболочка, жесткое включение, нормальная сила, теория типа Тимошенко.

1. Введение. Широкое применение тонкостенных оболочечных элементов конструкций в различных отраслях промышленности и техники (авиа и ракетостроение, судостроение и т. д.) обусловило актуальность исследований напряженного состояния оболочек с концентраторами напряжений в виде отверстий [1-5], включений [2, 5, 6], сосредоточенных [7] и локальных воздействий [2, 3 (гл. 24)]. Они, как и прежде, остаются теоретически и практически востребованными.

Для оболочек, нагруженных усилием и моментом через жесткую шайбу, аналитические решения и численные результаты, то есть практически решённые задачи, получены лишь для изотропных (в рамках классической теории Кирхгофа-Лява) сферической [3 (гл. 24), 8] и цилиндрической [2] оболочек.

В последнее время, в связи с широким применением в технике композитных материалов стали актуальными задачи для трансверсально-изотропных оболочек. Классическая теория, построенная на предположениях Кирхгофа-Лява, для таких оболочек является неприемлемой, поскольку не учитывает поперечные сдвиги. Наиболее приемлемой с точки зрения инженерных приложений справедливо считать сдвиговую модель, сформулированную С.П. Тимошенко. На базе этой теории Гузем А.Н., Чернышенко И.С. и Шнеренко К.И. [1] был предложен метод решения задач для трансверсально-изотропных оболочек с отверстиями и включениями. Затем, на базе этой - же сдвиговой модели, Пелех Б.Л. [4] предложил несколько упрощённый вариант уравнений «технической теории трансверсально-изотропных оболочек». И тем и другим методом был решён ряд задач для трансверсально-изотропных оболочек с отверстиями, включениями и подкрепляющими кольцами [2, 4, 5]. Но все эти задачи предполагали нагружение оболочки равномерным внутренним давлением, растяжением или

кручением. В данной статье рассмотрена задача для полой трансверсально-изотропной сферической оболочки с круговым абсолютно жестким включением, нагруженным нормальной силой P .

2. Постановка задачи. Для решения задачи применялась система однородных дифференциальных уравнений теории типа С. П. Тимошенко, которая учитывает деформации поперечного сдвига [2]

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 U - \nabla^2 w &= 0, \\ \nabla^2 \nabla^2 w + \nabla^2 U - 2\delta \nabla^2 \nabla^2 U &= 0, \\ (1 - \nu) \delta \nabla^2 \chi - \chi &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь U, w, χ – искомые функции усилий, прогиба и поперечного сдвига; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ – оператор Лапласа в полярной системе координат, где $\rho = \frac{r}{\sqrt{cR}}$ – относительный безразмерный радиус-вектор с началом в центре кругового включения, $r \cdot e^{i\theta} = x + iy$; $\delta = \frac{Ehc}{2KR}$ – относительный безразмерный параметр податливости поперечным сдвигам, где $K = \mu G_1 h$, E – модуль Юнга, G_1 – модуль поперечного сдвига, $\mu = 5/6$ – коэффициент сдвига, $c = h/\sqrt{12(1-\nu^2)}$, ν – коэффициент Пуассона, R – радиус срединной поверхности оболочки, h – толщина оболочки, i – мнимая единица.

Решение однородной системы дифференциальных уравнений (1) будем определять с помощью функций U и w , которые при $\rho \rightarrow \infty$ убывают по абсолютной величине и не зависят от угла θ [2]

$$\begin{aligned} \text{в интервале } 0 \leq \delta < 1 : U &= i(A + iB) K_0(\sigma\rho); \quad w = \sigma^2 U; \\ \text{при } \delta > 1 : U &= AK_0(\alpha\rho) + BK_0(\beta\rho), \quad w = \alpha^2 AK_0(\alpha\rho) + \beta^2 BK_0(\beta\rho); \\ \chi &= 0 \text{ на всех интервалах.} \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь A и B – действительные неизвестные постоянные; $K_n(\sigma\rho)$ – функции Макдональда; $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{1+\delta} + i\sqrt{1-\delta})$; $\alpha = \sqrt{\delta + \sqrt{\delta^2 - 1}}$, $\beta = \frac{1}{\alpha}$ при $\delta > 1$.

На границе Γ абсолютно жесткого включения ставились деформационные краевые условия

$$\varepsilon_{\tau\tau} |_{\Gamma} = 0, \quad \kappa_{\tau\tau} |_{\Gamma} = 0. \quad (3)$$

Выражения для этих деформационных краевых величин имеют вид

$$\begin{aligned} Eh \varepsilon_{\tau\tau} &= T_{\theta} - \nu T_r, \\ \frac{Eh^2}{2} \kappa_{\tau\tau} &= \frac{6}{h} (G_{\theta} - \nu G_r) - \frac{\delta \sqrt{3-3\nu^2}}{\rho} \sqrt{\frac{R}{c}} Q_r. \end{aligned} \quad (4)$$

Выражения для усилий и моментов, которые отвечают однородным решени-

ям (2), имеют вид [2, 6]

$$\begin{aligned}
 T_r &= \frac{Eh}{R} \frac{1}{\rho} Re \frac{\partial U}{\partial \rho} + T_r^0, \\
 T_\theta &= \frac{Eh}{R} Re \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + T_\theta^0, \\
 S_{r\theta} &= 0, \\
 G_r &= -\frac{Eh}{R} c Re \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \rho} \right) + G_r^0, \\
 G_\theta &= -\frac{Eh}{R} c Re \left(\nu \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \rho} \right) + G_\theta^0, \\
 Q_r &= -\frac{Eh}{R} \sqrt{\frac{c}{R}} Re \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \nabla^2 g \right) + Q_r^0, \\
 Q_\theta &= 0, \quad H_{r\theta} = 0,
 \end{aligned} \tag{5}$$

где $g = w + 2\delta \nabla^2 w - 4\delta^2 \nabla^2 U$.

Основное напряженное состояние оболочки описывается частным решением для сплошной оболочки, нагруженной нормальной сосредоточенной силой, полученным с помощью двумерного интегрального преобразования Фурье в работе [7] в виде

$$\begin{aligned}
 T_r^0 &= -\frac{P}{2\pi c} \left[\sum_{q=1}^2 \frac{b_q}{\rho \sqrt{d_q}} K_1(\rho \sqrt{d_q}) - \frac{1}{\rho^2} \right], \\
 H_{r\theta}^0 &= 0, \quad S_{r\theta}^0 = 0, \quad Q_\theta^0 = 0, \\
 T_\theta^0 &= \frac{P}{2\pi c} \left\{ \sum_{q=1}^2 b_q \left[K_0(\rho \sqrt{d_q}) + \frac{1}{\rho \sqrt{d_q}} K_1(\rho \sqrt{d_q}) \right] - \frac{1}{\rho^2} \right\}, \\
 M_r^0 &= \frac{P}{2\pi (d_2 - d_1)} \sum_{q=1}^2 (-1)^q d_q \left[K_0(\rho \sqrt{d_q}) + \frac{1-\nu}{\rho \sqrt{d_q}} K_1(\rho \sqrt{d_q}) \right], \\
 M_\theta^0 &= \frac{P}{2\pi (d_2 - d_1)} \sum_{q=1}^2 (-1)^q d_q \left[\nu K_0(\rho \sqrt{d_q}) - \frac{1-\nu}{\rho \sqrt{d_q}} K_1(\rho \sqrt{d_q}) \right], \\
 Q_r^0 &= -\frac{P}{2\pi \sqrt{cR} (d_2 - d_1)} \sum_{q=1}^2 (-1)^q d_q^3 K_1(\rho \sqrt{d_q}),
 \end{aligned} \tag{6}$$

где $d_q = \delta - (-1)^q i \sqrt{1 - \delta^2}$, $b_q = (-1)^q \frac{1-2\delta d_q}{d_1 - d_2}$ ($q = \overline{1, 2}$).

Подставляя усилия и моменты (5) с учетом (2), (6) в граничные условия (3), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно действительных неизвестных A и B . Подставляя полученные в результате решения системы значения A и B в формулы (2), находим функции U и w , а далее по формулам (5) определим усилия и моменты.

Приведем полученные аналитические выражения для усилий, моментов, деформационных краевых условий и постоянных A , B .

1) В интервале $0 \leq \delta < 1$:

$$\begin{aligned} T_r &= -\frac{1}{\rho} \frac{Eh}{R} \operatorname{Im}(a\sigma K_1), \\ T_\theta &= \frac{Eh}{R} \operatorname{Im} \left[a\sigma \left(\frac{1}{\rho} K_1 + \sigma K_0 \right) \right], \\ G_r &= c \frac{Eh}{R} \operatorname{Im} \left[a \left(\frac{1-\nu}{\sigma\rho} K_1 + K_0 \right) \right], \\ G_\theta &= c \frac{Eh}{R} \operatorname{Im} \left[a \left(-\frac{1-\nu}{\sigma\rho} K_1 + \nu K_0 \right) \right], \\ Q_r &= -\frac{Eh}{R} \sqrt{\frac{c}{R}} \operatorname{Im}(a\sigma K_1), \end{aligned}$$

где $a = A + iB$, $K_0 = K_0(\sigma\rho)$, $K_1 = K_1(\sigma\rho)$.

Деформационные краевые условия (3) на границе Γ абсолютно жесткого включения, т.е. при $\rho = \rho_0$, примут вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} \frac{Eh}{R} \operatorname{Im}[aLEt(\rho_0)] + \varepsilon_{\tau\tau}^0 &= 0, \\ \frac{1}{\rho_0} \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{Eh}{R} \operatorname{Im}[aLKt(\rho_0)] + \kappa_{\tau\tau}^0 &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $LKt(\rho_0) = (\sigma\delta - \bar{\sigma}) K_1$; $LEt(\rho_0) = \sigma[\sigma\rho_0 K_0 + (1+\nu)K_1]$. В результате решения системы (7) получены следующие аналитические выражения для постоянных A и B :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\rho_0 R}{d_1 Eh} \left[-\varepsilon_{\tau\tau}^0 \operatorname{Re}LKt + \kappa_{\tau\tau}^0 \operatorname{Re}LEt / \sqrt{3(1-\nu^2)} \right], \\ B &= \frac{\rho_0 R}{d_1 Eh} \left[\varepsilon_{\tau\tau}^0 \operatorname{Im}LKt - \kappa_{\tau\tau}^0 \operatorname{Im}LEt / \sqrt{3(1-\nu^2)} \right], \end{aligned}$$

где $d_1 = -\operatorname{Im}(LKt(\rho_0) \cdot \overline{LEt(\rho_0)})$.

Здесь и далее обозначено:

$$\varepsilon_{\tau\tau}^0 = (T_\theta^0 - \nu T_r^0), \quad \kappa_{\tau\tau}^0 = \frac{6}{h} (G_\theta^0 - \nu G_r^0) - \frac{\delta\sqrt{3-3\nu^2}}{\rho_0} \sqrt{\frac{R}{c}} Q_r^0, \quad \rho_0 = r_o/\sqrt{cR},$$

где r_0 – радиус жесткой шайбы.

2) В интервале $\delta > 1$:

$$\begin{aligned} T_r &= -\frac{1}{\rho} \frac{Eh}{R} [\alpha K_1(\alpha\rho) A + \beta K_1(\beta\rho) B], \\ Q_r &= -\frac{Eh}{R} \sqrt{\frac{c}{R}} [\alpha K_1(\alpha\rho) A + \beta K_1(\beta\rho) B], \\ T_\theta &= \frac{Eh}{R} \left\{ \left[\alpha^2 K_0(\alpha\rho) + \frac{\alpha}{\rho} K_1(\alpha\rho) \right] A + \left[\beta^2 K_0(\beta\rho) + \frac{\beta}{\rho} K_1(\beta\rho) \right] B \right\}, \\ G_r &= \frac{Eh}{R} c [LGr(\alpha) A + LGr(\beta) B], \\ G_\theta &= \frac{Eh}{R} c [LG\theta(\alpha) A + LG\theta(\beta) B]. \end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} LGr(x) &= \left[K_0(x\rho) + \frac{(1-\nu)}{x\rho} K_1(x\rho) \right], \\ LG\theta(x) &= \left[\nu K_0(x\rho) - \frac{(1-\nu)}{x\rho} K_1(x\rho) \right]. \end{aligned}$$

Деформационные краевые условия (3) на границе Γ абсолютно жесткого включения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{Eh}{R} [LE(\alpha) A + LE(\beta) B] + \varepsilon_{\tau\tau}^0 &= 0, \\ \frac{1}{\rho_0} \sqrt{3(1-\nu^2)} [LK(\alpha) A + LK(\beta) B] \frac{Eh}{R} + \kappa_{\tau\tau}^0 &= 0. \end{aligned}$$

В этом случае получены следующие аналитические выражения для постоянных A и B :

$$\begin{aligned} A &= \frac{R}{d_2 Eh} \left[LK(\beta) \varepsilon_{\tau\tau}^0 - LE(\beta) \kappa_{\tau\tau}^0 \rho_0 / \sqrt{3(1-\nu^2)} \right], \\ B &= -\frac{R}{d_2 Eh} \left[LK(\alpha) \varepsilon_{\tau\tau}^0 - LE(\alpha) \kappa_{\tau\tau}^0 \rho_0 / \sqrt{3(1-\nu^2)} \right]. \end{aligned}$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} d_2 &= LK(\alpha) LE(\beta) - LK(\beta) LE(\alpha), \\ LE(x) &= \frac{x}{\rho_0} (1+\nu) K_1(x\rho_0) + x^2 K_0(x\rho_0), \\ LK(x) &= (x^3 - x\delta) K_1(x\rho_0). \end{aligned}$$

3. Численные исследования. Численные исследования проведены для трансверсально-изотропной сферической оболочки с коэффициентом Пуассона

$\nu = 0.3$ при различных значениях параметра податливости поперечным сдвигам δ и радиуса жесткой шайбы ρ_0 .

Были вычислены коэффициенты концентрации мембранных и изгибистых напряжений, а по ним и относительных эквивалентных напряжений по энергетической теории прочности [2,6]

$$k_{\theta}^T = \frac{T_{\theta}}{d}, \quad k_r^T = \frac{T_r}{d}, \quad k_{\theta}^B = \frac{6G_{\theta}}{hd}, \quad k_r^B = \frac{6G_r}{hd}, \quad (8)$$

$$k_{\theta} = k_{\theta}^T \pm k_{\theta}^B, \quad k_r = k_r^T \pm k_r^B, \quad k_{eq} = \sqrt{k_r^2 + k_{\theta}^2 - k_r k_{\theta}}, \quad (9)$$

где $d = P/10\pi c$.

Относительным эквивалентным напряжением k_{eq}^{Ext} на внешней поверхности оболочки в формулах (9) отвечает знак «+», а напряжением k_{eq}^{Int} на внутренней поверхности – знак «-».

На приведенных ниже рисунках по вертикальной оси графиков отложены значения относительных напряжений: тангенциальных k_r^T – пунктирной, k_{θ}^T – штрих-пунктирной; изгибных k_r^B – штриховой, k_{θ}^B – штрих-двух-пунктирной линиями; эквивалентных на внешней поверхности оболочки k_{eq}^{Ext} – сплошной линией.

На рис. 1, 2 и в табл. 1, 2 приведены значения напряжений на контуре включения в зависимости от параметра сдвига шайбы δ и радиуса жесткой шайбы ρ_0 .

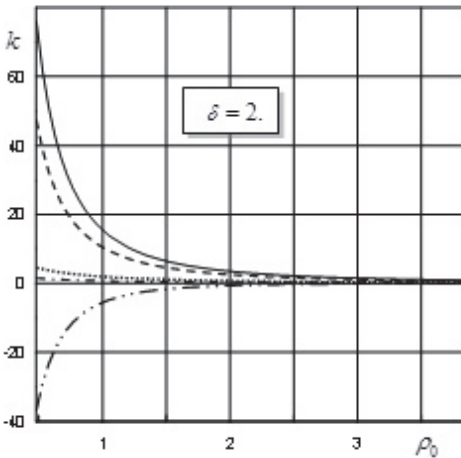


Рис. 1.

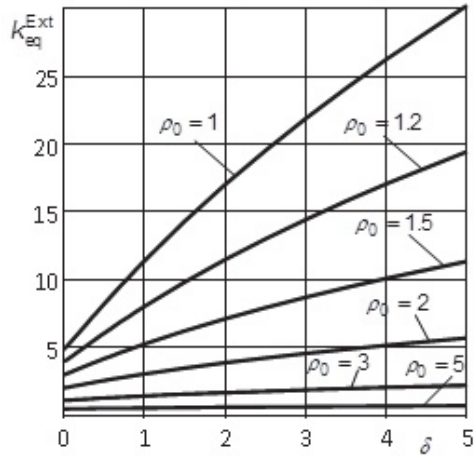


Рис. 2.

Из табл. 1, 2 и рис. 1 видно, что увеличение параметра δ ведет к увеличению напряжений k_r^T , k_{θ}^T , k_r^B , k_{eq}^{Ext} , k_{eq}^{Int} . При этом рост эквивалентных напряжений происходит в основном за счет изгибных напряжений. Наибольшие эквивалентные напряжения находятся на внешней поверхности оболочки.

Таблица 1

$\rho_0 = 2.$						
δ	k_r^T	k_θ^T	k_r^B	k_θ^B	k_{eq}^{Ext}	k_{eq}^{Int}
0.0	0.553	0.166	1.700	0.509	2.002	1.019
0.5	0.638	0.191	2.058	0.112	2.558	1.462
0.8	0.675	0.202	2.237	-0.090	2.857	1.727
1.0	0.695	0.209	2.346	-0.213	3.043	1.897
2.0	0.770	0.231	2.810	-0.741	3.861	2.664
3.0	0.819	0.246	3.190	-1.180	4.548	3.321
4.0	0.855	0.256	3.520	-1.560	5.150	3.902
5.0	0.882	0.265	3.816	-1.890	5.691	4.429

Таблица 2

$\rho_0 = 4.$						
δ	k_r^T	k_θ^T	k_r^B	k_θ^B	k_{eq}^{Ext}	k_{eq}^{Int}
0.0	0.202	0.061	0.556	0.167	0.674	0.314
0.5	0.219	0.066	0.608	0.105	0.756	0.371
0.8	0.225	0.068	0.632	0.075	0.796	0.403
1.0	0.229	0.069	0.647	0.056	0.821	0.424
2.0	0.242	0.073	0.706	-0.020	0.924	0.517
3.0	0.250	0.075	0.753	-0.082	1.007	0.597
4.0	0.256	0.077	0.793	-0.134	1.079	0.668
5.0	0.261	0.078	0.828	-0.180	1.143	0.732

Из табл. 1 видно, что при $\rho_0 = 2$ и $\delta = 0.5$ напряжения k_{eq}^{Ext} увеличиваются на 28% по сравнению с $\delta = 0$ (что соответствует классическому решению по гипотезе Кирхгофа-Лява). Более существенное изменение наибольших напряжений происходит при дальнейшем увеличении параметра δ : для $\rho_0 = 2$ при $\delta = 5$ они увеличиваются на 184% по сравнению с $\delta = 0$.

С увеличением радиуса шайбы напряжения и влияние пониженной поперечной сдвиговой жесткости на напряженное состояние уменьшаются, как это видно из табл. 2 и рис. 1, 2. Так из табл. 2 видно, что по сравнению с приведенным выше примером в случае $\rho_0 = 4$ при значении параметра $\delta = 0.5$ увеличение составляет уже только 12%, а для $\delta = 5$ – 70% по сравнению с $\delta = 0$.

В табл. 3 и на рис. 3 показано поведение напряжений при удалении от шайбы по меридиану сферической оболочки. Из табл. 3 для радиуса шайбы $\rho_0 = 1$ и $\delta = 2$ видно, что при $\rho = 5 \div 6$ концентрация напряжений составляет 3% \div 2% от их значений на границе шайбы. То есть на расстоянии $(4 \div 5)\rho_0$ от границы шайбы напряжениями можно практически пренебречь. Это наглядно подтверждается и графиком на рис. 3 для радиуса $\rho_0 = 2$ при $\delta = 2$. Видно, что при удалении от границы шайбы напряжения затухают; при $\rho = 10 \div 12$, то есть на расстоянии $(4 \div 5)\rho_0$ от границы шайбы напряжения значительно снизились и ими можно

практически пренебречь.

В табл. 4 и на рис. 2 и приведены значения наибольших относительных

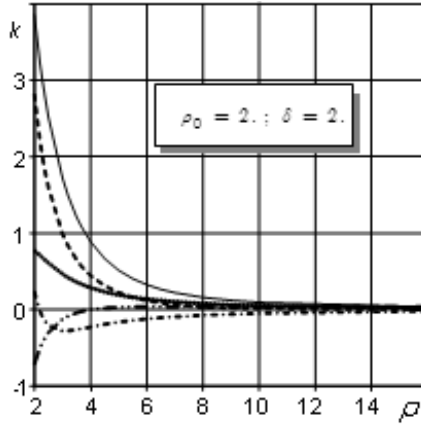


Рис. 3.

Таблица 3

$\rho_0 = 1; \delta = 2.$						
ρ	k_r^T	k_θ^T	k_r^B	k_θ^B	k_{eq}^{Ext}	k_{eq}^{Int}
1.	2.083	0.625	11.418	-6.220	17.000	14.063
2.	0.919	-0.489	2.672	-0.838	4.408	1.951
3.	0.471	-0.348	1.035	-0.179	1.827	0.501
4.	0.283	-0.229	0.479	-0.038	0.924	0.194
5.	0.188	-0.161	0.240	-0.003	0.529	0.139
6.	0.133	-0.119	0.125	0.004	0.331	0.127
7.	0.100	-0.091	0.067	0.004	0.223	0.116
8.	0.077	-0.072	0.037	0.003	0.160	0.102

Таблица 4

ρ_0	k_{eq}^{Ext}				
	$\delta=0.$	$\delta=1.$	$\delta=2.$	$\delta=3.$	$\delta=4.$
0.5	9.292	44.128	75.973	104.860	131.577
1.	4.845	11.380	17.000	21.875	26.236
2.	2.002	3.043	3.861	4.548	5.150
3.	1.081	1.416	1.662	1.865	2.041
4.	0.674	0.821	0.924	1.007	1.079
5.	0.459	0.536	0.588	0.630	0.665
6.	0.333	0.378	0.408	0.431	0.451

эквивалентных напряжений k_{eq}^{Ext} на границе жесткой шайбы в зависимости от радиуса шайбы и параметра податливости. Из табл. 4 видно, что при $\rho_0 = 6$ и изменении δ от 0 до 3 напряжения k_{eq}^{Ext} увеличились в 1.3 раза, а при $\rho_0 = 0.5$ и тех же изменениях δ напряжения увеличились уже в 11.3 раза. Таким образом, влияние деформации поперечного сдвига особенно существенно при малых площадках жестких шайб.

4. Достоверность полученных результатов. Вычисления проводились на РС в среде пакета Maple-13. Точность вычислений можно регулировать, задавая значение системной переменной *Digits*.

Проверялась точность выполнения дифференциальных уравнений (1) с вычисленными после выполнения граничных условий и решения системы коэффициентами *A* и *B*. Абсолютная погрешность не превышала 10^{-10} при *Digits* = 15.

Проверялась точность удовлетворения заданных граничных условий в точках контура Г. При задании *Digits* = 15 для случаев, представленных в табл. 5, при численной реализации абсолютная погрешность выполнения граничных условий не превышала 10^{-12} ; при этом максимальное значение напряжений не превышало 9.

Проведено сравнение с результатами работы [8], полученных в рамках классической теории Кирхгофа-Лява. При ширине перемычки между включениями $s = 7.5$, то есть, когда их взаимовлияние практически отсутствует, получено совпадение результатов из таблиц 1, 2 при $\delta = 0$.

Для сравнения с результатами других авторов проведены вычисления прогиба w согласно [7] в сферической оболочке при действии нормальной сосредоточенной силы, и расчеты w по рассматриваемой здесь методике при весьма малом относительном радиусе жесткого включения $\rho_0 = 0.02$. Получено совпадение результатов при $\delta = 0$. При увеличении параметра δ результаты численно отличаются, но качественно график распределения w аналогичен [7].

5. Решение задачи по технической теории. Рассмотрим ту же задачу, но для ее решения применим техническую теорию, которая учитывает деформации поперечного сдвига, предложенную Б.Л. Пелехом [4, 5]. В этом случае система однородных дифференциальных уравнений имеет вид (во втором уравнении системы (1) опущено слагаемое с параметром податливости поперечным сдвигам)

$$\nabla^2 \nabla^2 U - \nabla^2 w = 0, \quad \nabla^2 \nabla^2 w + \nabla^2 U = 0, \quad (1 - \nu) \delta \nabla^2 \chi - \chi = 0. \quad (10)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (10) определим с помощью цилиндрической, полигармонической и аналитической частей

$$U = U_c + i \frac{R}{2} U_a, \quad (11)$$

$$w = w_c + \frac{R}{2} w_p. \quad (12)$$

Аналитическая часть U_a согласно [2] имеет вид

$$U_a(r, \theta) = (\alpha_1 + \bar{\alpha}_2) [(1 + 2 \ln r) r \cos \theta - 2r \sin \theta] + (\beta_1 + \bar{\beta}_2) (1 + \ln r) + (\gamma_1 + \bar{\gamma}_2) \frac{1}{r} \cos \theta. \quad (13)$$

При этом согласно [2] необходимо выполнить условия однозначности комплексных смещений

$$\alpha_1 = -\alpha_2, \quad \beta_1 = -\beta_2, \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 4icR(1+\nu)\bar{\alpha}_1, \quad \gamma_1 + \gamma_2 = -4icR(1+\nu)\bar{\alpha}_1. \quad (14)$$

Главный вектор и главный момент внешних усилий, прилагаемых к жесткой шайбе, определяются согласно [2]

$$\begin{aligned} F_X &= 2\pi EhcR \operatorname{Im}(\alpha_1 - \alpha_2), & F_Y &= 2\pi EhcR \operatorname{Re}(\alpha_1 - \alpha_2), \\ F_Z &= \pi Ehc \operatorname{Im}(\beta_1 - \beta_2), & B_Z &= -\pi EhcR \operatorname{Re}(\beta_1 - \beta_2), \\ B_X &= \pi Ehc \operatorname{Re}[(\gamma_1 - \gamma_2) + 2icR(1-\nu)(\alpha_1 + \alpha_2)], \\ B_Y &= \pi Ehc \operatorname{Im}[(\gamma_1 - \gamma_2) - 2icR(1-\nu)(\alpha_1 + \alpha_2)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Комплексные неизвестные постоянные $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ ($j = \overline{1, 2}$) определяются из системы уравнений (14)–(15) при заданных значениях соответствующих компонент главного вектора и главного момента внешних усилий.

В данном случае задано $F_Z = -P$, а остальные компоненты - равны нулю.

Из системы уравнений (14)–(15) получим $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \beta_1 = -\frac{iP}{2\pi Ehc}, \beta_2 = \frac{iP}{2\pi Ehc}, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$. Аналитическая часть (13) упростится и примет вид

$$U_a(r) = 2\beta_1 (1 + \ln r) = -\frac{iP(1 + \ln r)}{\pi Ehc}. \quad (16)$$

Из (16) очевидно, что для этого случая нагружения цилиндрическая часть также будет содержать только нулевую гармонику, а полигармоническая часть отсутствует $w_p = 0$. Цилиндрические части решения, которые убывают по абсолютной величине при удалении от Γ и не зависят от угла θ , запишем в виде

$$U_c = iaK_0(\sigma\rho), \quad w_c = -aK_0(\sigma\rho). \quad (17)$$

Здесь $\sigma = \sqrt{i}$; $a = A + iB$.

На границе Γ ставились краевые условия (3), а выражения для деформационных краевых величин имеют вид (4).

Выражения для усилий и моментов имеют вид (5), но

$$T_r^0 = 0, \quad T_\theta^0 = 0, \quad G_r^0 = 0, \quad G_\theta^0 = 0, \quad Q_r^0 = 0. \quad (18)$$

То есть частные решения определяются аналитической частью U_a из соотношений (5) при условиях (18).

Система уравнений строится аналогично основному случаю, описанному выше. При этом, поскольку комплексные неизвестны постоянные $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ ($j = \overline{1, 2}$)

предварительно найдены, то аналитической частью (16) также определяются правые части системы.

Согласно (7)–(9) были найдены безразмерные коэффициенты концентрации напряжений и проведены численные исследования.

6. Сопоставление результатов, полученных по технической и уточненной теориям. В табл. 5 и табл. 6 приведены значения коэффициентов концентрации напряжений, полученных по технической теории [4, 5] - в верхней строке, а по уточненной теории типа С.П. Тимошенко - в нижней строке.

Из табл. 5 и табл. 6 видно, что значение наибольших относительных эквивалентных напряжений на внешней поверхности оболочки k_{eq}^{Ext} , полученные по технической теории, превышают их значения, полученные по уточненной теории.

Таблица 5

$\rho_0 = 2.$						
δ	k_r^T	k_θ^T	k_r^B	k_θ^B	k_{eq}^{Ext}	k_{eq}^{Int}
0.0	0.553	0.166	1.700	0.509	2.002	1.019
	0.553	0.166	1.700	0.509	2.002	1.019
0.1	0.591	0.177	1.785	0.424	2.140	1.091
	0.573	0.172	1.780	0.421	2.119	1.103
0.2	0.630	0.189	1.823	0.324	2.241	1.132
	0.592	0.177	1.855	0.339	2.233	1.191
0.3	0.674	0.202	1.868	0.212	2.363	1.189
	0.608	0.183	1.926	0.260	2.345	1.281
0.35	0.700	0.210	1.921	0.155	2.459	1.250
	0.616	0.185	1.960	0.222	2.399	1.326
0.4	0.729	0.219	2.017	0.099	2.602	1.352
	0.624	0.187	1.994	0.184	2.453	1.371
0.5	0.807	0.242	2.468	0.009	3.158	1.789
	0.638	0.191	2.058	0.112	2.558	1.462
0.6	0.938	0.281	3.722	0.012	4.521	2.929
	0.651	0.195	2.120	0.042	2.660	1.551
0.7	1.217	0.365	7.482	0.339	8.369	6.278
	0.663	0.199	2.180	-0.025	2.760	1.640

В табл. 5 для $\rho_0 = 2$ при $\delta = 0.35$ превышение составляет 2.5%, а при $\delta = 0.4$ –6%. При последующем увеличении параметра податливости это превышение растет: например, при $\delta = 0.6$ оно составляет уже 70%, а при $\delta = 0.7$ даже 203%.

Для меньших значений радиуса включения диапазон параметра податливости, при котором отличие не превышает 6%, уменьшается. Так для $\rho_0 = 0.4$ из табл. 6 видно, что отличие в 5.4% достигается при $\delta = 0.2$, а при $\delta = 0.5$ оно составляет уже 73%.

Таким образом, чтобы не превышать погрешность в 5–6%, техническую тео-

Таблица 6

$\rho_0 = 4.$						
δ	k_r^T	k_θ^T	k_r^B	k_θ^B	k_{eq}^{Ext}	k_{eq}^{Int}
0.0	2.113	0.634	10.217	3.065	10.959	7.203
	2.113	0.634	10.217	3.060	10.959	7.203
0.1	2.519	0.756	14.105	-0.613	16.553	12.327
	2.379	0.714	13.865	-0.609	16.193	12.202
0.15	2.733	0.820	16.030	-2.592	19.709	15.290
	2.506	0.752	15.665	-2.425	19.062	15.002
0.2	2.965	0.889	18.061	-4.741	23.193	18.564
	2.629	0.789	17.450	-4.210	21.998	17.862
0.3	3.518	1.055	22.990	-9.867	31.841	26.666
	2.865	0.860	20.976	-7.790	27.950	23.643
0.4	4.308	1.292	30.702	-16.975	44.952	38.891
	3.089	0.927	24.449	-11.300	33.919	29.425
0.5	5.658	1.697	45.882	-28.521	68.980	61.209
	3.303	0.991	27.871	-14.700	39.859	35.169

рию [4] следует применять для небольших значений параметра податливости δ .

7. Выводы. Получено аналитическое решение задачи о напряженном состоянии полой трансверсально-изотропной сферической оболочки с круговым абсолютно жестким включением, нагруженным нормальной силой.

Приведенные в работе численные исследования показали, что при увеличении параметра поперечного сдвига материала оболочки напряжения в ней растут и могут увеличиться в несколько раз. Уменьшить напряжение можно путем увеличения радиуса жесткой шайбы.

Результаты работы вместе с разработанной в среде Maple программой расчета могут быть использованы в инженерной практике с целью определить величину концентрации напряжений и подобрать оптимальный радиус шайбы для уменьшения опасных напряжений.

Техническая теория [4] применима для небольших значений параметра податливости δ . Например, чтобы не превышать погрешность в 5–6%, при $\rho_0 = 2$ следует брать $\delta < 0.4$, а при $\rho_0 = 0.4$ – соответственно $\delta \leq 0.2$.

1. Гузь А.Н. Сферические днища, ослабленные отверстиями / А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, К.И. Шнеренко – Киев: Наук. думка, 1970. – 323 с.
2. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, Вал.Н. Чехов [и др.] . – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Т. 1.)
3. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник: В 3 т. / под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 1. – 831 с.
4. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жёсткостью / Б.Л. Пелех – К.: Наук. думка, 1973. – 248 с.

5. Пелех Б.Л. Распределение напряжений возле отверстий в податливых на сдвиг анизотропных оболочках / Б.Л. Пелех, А.А. Сяський. – К.: Наук. думка, 1975. – 198 с.
6. Chekhov V.N. Stress concentration in a transversely isotropic spherical shell with two circular rigid inclusions / V.N. Chekhov, S.V. Zakora // Int. Appl. Mech. – 2011. – Vol. 47, No. 4. – P. 441–448.
7. Khizhnyak V.K. Stress-deformed state of transversally isotropic shells under concentrated loads / V.K. Khizhnyak, V.P. Shevchenko // Soviet Appl. Mech. – 1972. – Vol. 8, № 11 – P. 1188–1193.
8. Shevchenko V.P. Stresses in a Spherical Shell Loaded Through Rigid Inclusions / V.P. Shevchenko, S.V. Zakora // Int. Appl. Mech. – 2015. – Vol. 51, No. 2 – P. 159–166.

V.N. Chekhov , S.V Zakora

Stress concentration in a transversely isotropic spherical shell with a hard circular inclusion loaded by the normal force.

In the framework of the refined theory of the S. P. Timoshenko type, which takes into account the deformations of the transverse shear, an analytical solution of the problem for the stress state of a shallow transversely isotropic spherical shell with a circular absolutely rigid inclusion is obtained. The shell has been loaded by the normal force through the inclusion. As a result of numerical studies, a significant increase in the stresses was observed with an increase of the shear parameter and a decrease in the radius of the rigid inclusion. Comparison of the results obtained by refined and technical theories is carried out.

Keywords: *stresses, transversely isotropic, spherical, shell, rigid inclusion, normal force, Timoshenko type theory.*

Таврическая Академия Крымского федерального университета
им. В. И. Вернадского, Симферополь
ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
chekhov40@mail.ru
zakora41@yandex.ua

Получено 30.09.17

УДК 539.3:534.1

©2017. С.В. Сторожев, С.Б. Номбре, С.А. Прийменко

АЛГОРИТМЫ ПРИМЕНЕНИЯ АППАРАТА НЕЧЕТКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ УЧЕТА ФАКТОРОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В ЗАДАЧАХ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ СРЕД

Представлена методика использования альфа-уровневой формы эвристического принципа обобщения для получения нечетко-множественных оценок фазовых скоростей объемных и поверхностных связанных электроакустических волн в анизотропных электроупругих средах с неконтрастно заданными экспериментальными физическими характеристиками, а также изложены примеры ее применения.

Ключевые слова: пьезоактивные анизотропные деформируемые среды, объемные и поверхностные электроупругие волны, неконтрастные экспериментальные характеристики физико-механических свойств, алгоритмы применения альфа-уровневой формы эвристического принципа обобщения, нечетко-множественные оценки фазовых скоростей.

1. Введение. Совершенствование моделей и алгоритмов расчетного анализа процессов распространения электроупругих волн является сохраняющим актуальность научным заданием, связанным, в частности, с практикой конструирования и диагностики компонентов акустоэлектронных устройств [1–3, 6]. При этом одним из направлений повышения адекватности используемых моделей является эффективный учет факторов неопределенности, неконтрастности в описании их экспериментально определяемых экзогенных параметров, обеспечение в максимальной степени корректного учета эффектов влияния разброса в их значениях на эндогенные параметры моделирования.

В работах [4, 9–18] в качестве подхода к учету факторов неопределенности в ряде моделей волновой механики деформируемых сред, альтернативного применению методов стохастического анализа [7], рассматривается использование аппарата теории нечетких множеств. Специфика такого способа описания эффектов влияния неконтрастности экзогенных параметров рассматриваемых моделей, помимо прочего, выражается в снижении уровня требований к вероятностному статистическому характеру неопределенной экспериментальной исходной информации и в возможностях непосредственного оперирования с нечеткими параметрами моделей без перехода к их усредненным интегральным характеристикам [5].

В представляемой работе подход, связанный с разработкой алгоритмов применения аппарата нечетких вычислений для учета факторов неопределенности в задачах волновой механики, распространяется на некоторые проблемы теории электроупругих волн в пьезоактивных средах.

2. Получение нечетко-множественных оценок для фазовых скоростей сдвиговых поверхностных и объемных волн. Первой анализируемой

проблемой является получение нечетко-множественных оценок для фазовых скоростей объемных вертикально поляризованных электроакустических волн сдвигового типа в плоскости изотропии Ox_1x_2 пьезоэлектрической среды класса $6mm$ гексагональной системы с линейной поляризацией вдоль вертикальной оси изотропии Ox_3 при наличии разброса экспериментальных значений ее физико-механических параметров. В качестве направления распространения рассматриваемой волны без ограничения общности может быть выбрано координатное направление Ox_1 , а ее фазовая скорость v_f , согласно [1], описывается соотношением

$$v_f = (c_{44}/\rho)^{1/2}(1 + \zeta)^{1/2}, \quad \zeta = 4\pi e_{15}\varepsilon_{11}^{-1}c_{44}^{-1}, \quad (1)$$

в котором c_{44} – компонента матрицы упругих постоянных среды; e_{15} – компонента матрицы пьезоэлектрических модулей; ε_{11} – компонента матрицы диэлектрической проницаемости среды; ρ – плотность пьезоэлектрика.

В рамках реализуемого анализа влияния разброса в значениях физико-механических параметров среды на величину фазовой скорости v_f с применением нечетко-множественного подхода полагается, что неконтрастные характеристики среды c_{44} , e_{15} , ε_{11} , ρ описываются нормальными трапецеидальными нечеткими интервалами \tilde{c}_{44} , \tilde{e}_{15} , $\tilde{\varepsilon}_{11}$, $\tilde{\rho}$ с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{c}_{44}}$, $\mu_{\tilde{e}_{15}}$, $\mu_{\tilde{\varepsilon}_{11}}$, $\mu_{\tilde{\rho}}$, характеризуемыми кортежами реперных точек

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{44} &= (c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, c_{44}^{(3)}, c_{44}^{(4)}), & \tilde{e}_{15} &= (e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, e_{15}^{(3)}, e_{15}^{(4)}), \\ \tilde{\varepsilon}_{11} &= (\varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(3)}, \varepsilon_{11}^{(4)}), & \tilde{\rho} &= (\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \rho^{(3)}, \rho^{(4)}). \end{aligned} \quad (2)$$

Нечеткая оценка для значений скоростей рассматриваемых объемных электроакустических волн v_f формируется на основе использования функционального отображения (1) с расширением области его определения на нечеткие подмножества универсального числового множества путем применения эвристического принципа обобщения в α -уровневой форме [8]. При использовании данного подхода в рассматриваемом диапазоне изменения неопределенных, имеющих разбросы экспериментальных значений физико-механических параметров пьезоактивной среды, вводятся разложения нечетко-интервальных величин \tilde{c}_{44} , \tilde{e}_{15} , $\tilde{\varepsilon}_{11}$, $\tilde{\rho}$ по множествам α -срезов

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{44} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{c}_{44\alpha}, \bar{c}_{44\alpha}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1 - \alpha)c_{44}^{(1)} + \alpha c_{44}^{(2)}, \alpha c_{44}^{(3)} + (1 - \alpha)c_{44}^{(4)}), \\ \tilde{e}_{15} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{e}_{15\alpha}, \bar{e}_{15\alpha}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1 - \alpha)e_{15}^{(1)} + \alpha e_{15}^{(2)}, \alpha e_{15}^{(3)} + (1 - \alpha)e_{15}^{(4)}), \\ \tilde{\varepsilon}_{11} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\varepsilon}_{11\alpha}, \bar{\varepsilon}_{11\alpha}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1 - \alpha)\varepsilon_{11}^{(1)} + \alpha \varepsilon_{11}^{(2)}, \alpha \varepsilon_{11}^{(3)} + (1 - \alpha)\varepsilon_{11}^{(4)}), \\ \tilde{\rho} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1 - \alpha)\rho^{(1)} + \alpha \rho^{(2)}, \alpha \rho^{(3)} + (1 - \alpha)\rho^{(4)}). \end{aligned} \quad (3)$$

Искомая нечеткая оценка \tilde{v}_f также формируется в виде суперпозиции множеств α -уровня

$$\tilde{v}_f = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{v}_{f\alpha}, \bar{v}_{f\alpha}). \quad (4)$$

С учетом вытекающих из оценок

$$\begin{aligned} \partial v_f / \partial \rho &= -(1/(2\rho)) \cdot v_f \leq 0, \\ \partial v_f / \partial e_{15} &= (1/2) \cdot e_{15}^{-1} (\zeta / (1 + \zeta)) v_f \geq 0, \\ \partial v_f / \partial e_{15} &= -(1/2) \cdot \bar{e}_{15}^{-1} (\zeta / (1 + \zeta)) v_f \leq 0, \\ \partial v_f / \partial c_{44} &= (1/2) \cdot c_{44}^{-1} (1 / (1 + \zeta)) v_f \geq 0, \end{aligned} \quad (5)$$

свойств знакоопределенности частных производных от представления v_f по входящим в него переменным во всей области определения, в рассматриваемом случае может быть использована модифицированная форма α -уровневого принципа обобщения [8], согласно которой

$$\begin{aligned} \underline{v}_{f\alpha} &= (c_{44\alpha} / \bar{\rho}_\alpha)^{1/2} (1 + 4\pi \cdot \underline{e}_{15\alpha} \cdot \bar{\varepsilon}_{11\alpha}^{-1} \cdot \underline{c}_{44\alpha})^{1/2}, \\ \bar{v}_{f\alpha} &= (\bar{c}_{44\alpha} / \underline{\rho}_\alpha)^{1/2} (1 + 4\pi \cdot \bar{e}_{15\alpha} \cdot \underline{\varepsilon}_{11\alpha}^{-1} \cdot \bar{c}_{44\alpha})^{1/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Второй анализируемой характеристикой является фазовая скорость поверхностной сдвиговой электроакустической волны Гуляева-Блюстейна в полупространстве пьезоэлектрика класса 6mm гексагональной системы, поверхность которого $x_3 = 0$ граничит без акустического контакта с не обладающим пьезоэлектрическими свойствами диэлектриком, имеющем показатель проницаемости ε_0 . Описывающее скорость рассматриваемой волны вдоль направления Ox_1 соотношение, в котором фигурируют ранее введенные характеристики пьезоактивной среды, имеют вид [1]:

$$v_f = (c_{44} / \rho)^{1/2} (1 + \zeta)^{1/2} (1 - (\varepsilon_0 / (\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}))^2 (\zeta / (1 + \zeta))^2)^{1/2}. \quad (7)$$

В процессе применения к данному соотношению α -уровневой формы принципа обобщения при дополнительном предположении об описании неопределенной характеристики ε_0 нечетким трапецеидальным интервалом $\tilde{\varepsilon}_0$ с кортежем реперных точек $\tilde{\varepsilon}_0 = (\varepsilon_0^{(1)}, \varepsilon_0^{(2)}, \varepsilon_0^{(3)}, \varepsilon_0^{(4)})$ могут быть использованы оценки вида

$$\begin{aligned} \partial v_f / \partial \rho &= -(1/(2\rho)) \cdot v_f \leq 0, \\ \partial v_f / \partial \varepsilon_0 &= v_f (1 - (\varepsilon_0 / (\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}))^2 (\zeta / (1 + \zeta))^2)^{-1} \cdot \\ &\cdot (\zeta^2 / (1 + \zeta)^2) (-\varepsilon_0^2 \varepsilon_{11} + \varepsilon_0 \varepsilon_{11}^2) / (\varepsilon_0 + \varepsilon_{11})^4 \leq 0, \\ \partial v_f / \partial c_{44} &= v_f (c_{44} (1 + \zeta))^{-1} ((1/2) + \\ &+ (1 - (\varepsilon_0 / (\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}))^2 (\zeta / (1 + \zeta))^2)^{-1} (\varepsilon_0 / (\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}))^2 \zeta (1 + \zeta)^2 \geq 0, \\ \partial v_f / \partial e_{15} &= v_f (2e_{15})^{-1} (\zeta / (1 + \zeta)). \end{aligned} \quad (8)$$

$$\cdot(1 + 2(1 - (\varepsilon_0/(\varepsilon_0 + \varepsilon_{11})))^2(\zeta/(1 + \zeta))^2)^{-1}(1 + \zeta)^{-1} \geq 0.$$

С их учетом для характеристик $\underline{v}_{f\alpha}$, $\bar{v}_{f\alpha}$ записываются представления

$$\begin{aligned} \underline{v}_{f\alpha} &= \inf_{\varepsilon_{11\alpha} \in [\underline{\varepsilon}_{11\alpha}, \bar{\varepsilon}_{11\alpha}]} (\underline{c}_{44\alpha}/\bar{\rho}_\alpha)^{1/2}(1 + \underline{\zeta}_\alpha)^{1/2} \cdot \\ &\cdot (1 - (\bar{\varepsilon}_{0\alpha}/(\bar{\varepsilon}_{0\alpha} + \varepsilon_{11\alpha}))^2(\underline{\zeta}_\alpha/(1 + \underline{\zeta}_\alpha))^2)^{1/2}, \\ \bar{v}_{f\alpha} &= \sup_{\varepsilon_{11\alpha} \in [\underline{\varepsilon}_{15\alpha}, \bar{\varepsilon}_{15\alpha}]} (\bar{c}_{44\alpha}/\underline{\rho}_\alpha)^{1/2}(1 + \bar{\zeta}_\alpha)^{1/2} \cdot \\ &\cdot (1 - (\underline{\varepsilon}_{0\alpha}/(\underline{\varepsilon}_{0\alpha} + \varepsilon_{11\alpha}))^2(\bar{\zeta}_\alpha/(1 + \bar{\zeta}_\alpha))^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\underline{\zeta}_\alpha = 4\pi \underline{e}_{15} \varepsilon_{11\alpha}^{-1} \underline{c}_{44\alpha}^{-1}, \quad \bar{\zeta}_\alpha = 4\pi \bar{e}_{15} \varepsilon_{11\alpha}^{-1} \bar{c}_{44\alpha}^{-1}. \quad (10)$$

Эти представления используются в вычислительном алгоритме с заданием схемы варьирования значений в $\varepsilon_{11\alpha}$ пределах $\underline{\varepsilon}_{11\alpha} \leq \varepsilon_{11\alpha} \leq \bar{\varepsilon}_{11\alpha}$. При численной реализации описанных алгоритмов количество рассматриваемых α -уровней выбирается из соображений обеспечения необходимой точности вычислений в описании функций принадлежности для нечетко-множественных оценок фазовых скоростей.

В качестве примеров численной реализации описанной методики анализируются процессы распространения рассматриваемых объемных и поверхностных волн в пьезокерамических телах из титаната бария в рамках гипотезы о разбросе $\pm 2\%$ для в максимальной степени достоверных значений физико-механических характеристик и о разбросе $\pm 5\%$ для предельно допускаемых отклонений в указанных значениях. Соответственно данному предположению для реперных точек нечетких трапецидальных интервалов \tilde{c}_{44} , \tilde{e}_{15} , $\tilde{\varepsilon}_{11}$, $\tilde{\varepsilon}_0$, $\tilde{\rho}$ задаются значения

$$\begin{aligned} c_{44}^{(1)} &= 4.180 \cdot c_*, & c_{44}^{(2)} &= 4.312 \cdot c_*, & c_{44}^{(3)} &= 4.448 \cdot c_*, & c_{44}^{(4)} &= 4.620 \cdot c_*; \\ e_{15}^{(1)} &= 10.830 \cdot e_*, & e_{15}^{(2)} &= 11.172 \cdot e_*, & e_{15}^{(3)} &= 11.628 \cdot e_*, & e_{15}^{(4)} &= 11.970 \cdot e_*; \\ \varepsilon_{11}^{(1)} &= 798.0 \cdot \varepsilon_*, & \varepsilon_{11}^{(2)} &= 823.2 \cdot \varepsilon_*, & \varepsilon_{11}^{(3)} &= 856.8 \cdot \varepsilon_*, & \varepsilon_{11}^{(4)} &= 882.0 \cdot \varepsilon_*; \\ \varepsilon_0^{(1)} &= 1.0 \cdot \varepsilon_*, & \varepsilon_0^{(2)} &= 1.0 \cdot \varepsilon_*, & \varepsilon_0^{(3)} &= 1.02 \cdot \varepsilon_*, & \varepsilon_0^{(4)} &= 1.05 \cdot \varepsilon_*; \\ \rho^{(1)} &= 5.719 \cdot \rho_*, & \rho^{(2)} &= 5.899 \cdot \rho_*, & \rho^{(3)} &= 6.140 \cdot \rho_*, & \rho^{(4)} &= 6.321 \cdot \rho_*; \\ c_* &= 10^{10} \text{ Па}, & e_* &= 1.0 \text{ кл/м}^2, & \varepsilon_* &= 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ ф/м}, & \rho_* &= 10^3 \text{ кг/м}^3. \end{aligned}$$

Функции принадлежности $\mu_{\tilde{c}_{44}}$, $\mu_{\tilde{e}_{15}}$, $\mu_{\tilde{\varepsilon}_{11}}$, $\mu_{\tilde{\rho}}$ для нечетко-множественных физико-механических характеристик соответственно представлены на рис. 1– 4.

Полученные на основе реализации описанного алгоритма нечетко-множественные оценки для значений скоростей объемных сдвиговых акустоэлектрических волн и поверхностных акустоэлектрических волн Гуляева-Блюстейна в рассматриваемом случае соответственно отражены на рис. 5 и рис. 6. Они представ-

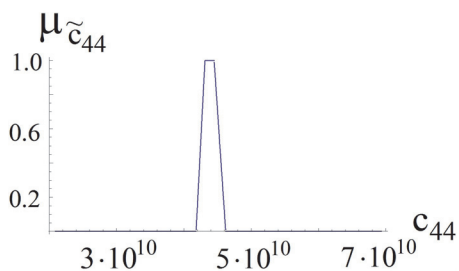


Рис. 1. Функция принадлежности $\mu_{\tilde{c}_{44}}$

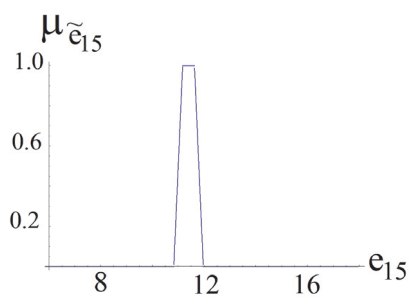


Рис. 2. Функция принадлежности $\mu_{\tilde{e}_{15}}$

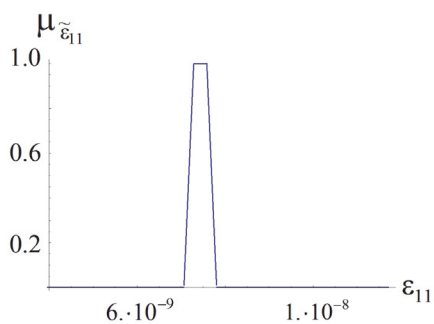


Рис. 3. Функция принадлежности $\mu_{\tilde{\epsilon}_{11}}$

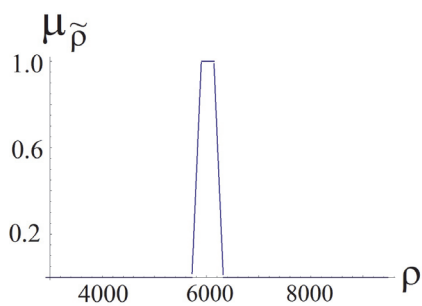


Рис. 4. Функция принадлежности $\mu_{\tilde{\rho}}$

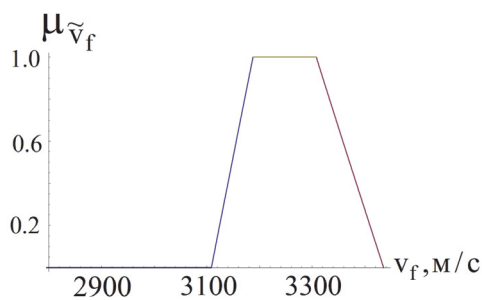


Рис. 5. Функция принадлежности $\mu_{\tilde{v}_f}$ для нечетко-множественной оценки скорости объемных акустоэлектрических волн $\mu_{\tilde{c}_{44}}$

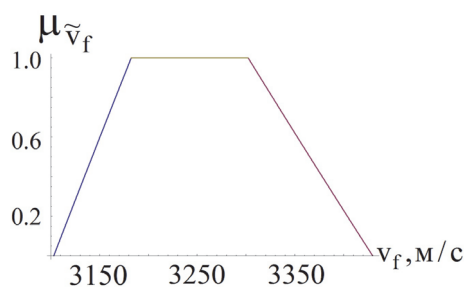


Рис. 6. Функция принадлежности $\mu_{\tilde{v}_f}$ для нечетко-множественной оценки скорости поверхностных акустоэлектрических волн Гуляева-Блюстейна

лены функциями принадлежности, описывающими степень возможности принятия различных значений величиной v_f при задаваемом характере разброса в экспериментальных значениях физико-механических параметров среды.

3. Заключение. Таким образом, на базе применения аппарата теории нечетких множеств с использованием эвристического принципа обобщения предложена методика получения нечетких оценок для скоростей объемных и поверхностных акустоэлектрических волн в пьезоактивных средах, применимая в практике конструирования и диагностики компонентов акустоэлектронных устройств.

1. Балакирев М.К. Волны в пьезокристаллах / М.К. Балакирев, И.А. Гишинский. – М.: Наука, 1982. – 239 с.
2. Бардзокас Д.И. Распространение волн в электромагнитоупругих средах / Д.И. Бардзокас, Б.А. Кудрявцев, Н.А. Сенник. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 336 с.
3. Бугаев А.С. Устройства на поверхностных акустических волнах / А.С. Бугаев, В.Ф. Дмитриев, С.В. Кулаков. – Санкт-Петербург: ГУАП, 2009. – 187 с.
4. Волчков В.В. Нечеткие оценки для скоростей поверхностных волн релеевского типа в упругом полупространстве / В.В. Волчков, С.В. Сторожев // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 83–90.
5. Дилигенский Н.В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Н.В. Дилигенский, Л.Г. Дымова, П.В. Севастьянов. – М.: Издательство Машиностроение – 1, 2004. – 397 с.
6. Дьелесан Э. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов / Э. Дьелесан, Д. Руайе. – М.: Наука, 1982. – 424 с.
7. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел / В.А. Ломакин. – М.: Наука, 1970. – 139 с.
8. Ротштейн А.П. Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов / А.П. Ротштейн, С.Д. Штовба, А.Н. Козачко. – Винница: УНІВЕРСУМ, 2007. – 215 с.
9. Сторожев С.В. Нечеткие оценки некоторых характеристик процессов распространения, отражения и преломления волн деформаций / С.В. Сторожев // Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты – 2015: Материалы IV Международной научно-практической интернет-конференции (25 мая 2015г.). – Донецк: ДонНУЭТ, 2015. – С. 60–62.
10. Storozhev S.V. Uncertainty in the models of the theory of volume elastic waves through the use of the theory of fuzzy sets // Modeling and information technologies: selected papers of the international scientific school "Paradigma"(Summer-2015, Varna, Bulgaria) / Compiling editor dr. sc., prof. O. Ja. Kravets. – Yelm, WA, USA: Science Book Publ. House, 2015. – P. 45–52.
11. Сторожев В.И. Нечетко-множественные оценки в моделях теории объемных волн деформаций / В.И. Сторожев, С.В. Сторожев // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 103–111.
12. Сторожев С.В. Нечеткие оценки для характеристик нелинейных вторых гармоник объемных волн сдвига в трансверсально-изотропной упругой среде / С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки. – 2015. – № 2. – С. 38–43.
13. Сторожев С.В. Нечеткие оценки для фазовых скоростей нормальных упругих волн в ортотропном слое с проскальзывающими закреплениями граней / С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // Донецкие чтения 2016. Образование, наука и вызовы современности: Материалы I Международной научной конференции (Донецк, 16–18 мая 2016 г.). – Т 1. Физико-математические, технические науки, экология. – Ростов-на-Дону: Изд.-во ЮФУ, 2016. – С. 43–46.
14. Сторожев С.В. Модель нечеткого оценивания значений фазовых скоростей нормальных упругих волн в мембранированных ортотропных пластинах / С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // История и методология науки: Международная научно-методическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А.И. Бородина (Донецк, 31 марта 2016 г.). – Донецк: Изд.-во ДонНУ, 2016. – С. 81–83.
15. Сторожев С.В. Нечеткие оценки скоростей локализованных упругих волн в полубесконечных средах / С.В. Сторожев // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов XI Всероссийской школы-семинара (пос. Дивноморское, 23–27 мая 2016 г.). – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2016. – С. 125.
16. Сторожев С.В. Нечеткие оценки для характеристик нормальных волн деформаций в

поперечно-анизотропном упругом слое / С.В. Сторожев // Современные проблемы механики сплошной среды: тезисы докладов XVIII Международной конференции (Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 г.) – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального ун-та, 2016. – С. 148.

17. *Сторожев С.В.* Нечеткие оценки для характеристик нормальных волн деформаций в поперечно-анизотропном упругом слое / С.В. Сторожев // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XVIII Международной конференции (Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 г.): в 2 т. – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального ун-та, 2016. – Т. 2. – С. 200–204.
18. *Storozhev S. V.* Fuzzy evaluations for kinematic characteristics of nonlinear second harmonics of shear waves in transversely isotropic medium / *Storozhev S.V.* // Nonlinear dynamics – 2016. Proceedings of 5-th International conference (September 27–30, 2016) / National technical university «Kharkov polytechnic institute» at al. – Kharkov, 2016. – P. 509–514.

S.V. Storozhev, S.B. Nombre, S.A. Priyenko

Algorithms of fuzzy calculations for description of uncertainty factors in the problems of wave mechanics of electroelastic media.

A technique for using the alpha-level form of the heuristic generalization principle to obtain fuzzy-multiple estimates of the phase velocities of volume and surface coupled electroacoustical waves in several types of anisotropic electroelastic media with non-contrasted experimental physical characteristics is presented and a number of examples of its application are described.

Keywords: *anisotropic deformable media with complicated physical and mechanical properties, bulk and surface electroelastic waves, non-contrast experimental characteristics of properties, fuzzy-set estimates of phase velocities, algorithms for using the alpha-level form of the heuristic generalization principle.*

ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры», Макеевка
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», Донецк
CergeyS@i.ua

Получено 30.10.17

УДК 539.3:534.1

©2017. В.Е. Болнокин, И.А. Глухов, В.И. Сторожев

МЕТОДИКА АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ УПРУГИХ ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОМ АНИЗОТРОПНОМ ПАКЕТЕ МЕЖДУ АНИЗОТРОПНЫМИ ПОЛУПРОСТРАНСТВАМИ

Рассматривается построение численно-аналитического решения пространственной задачи о распространении трехпарциальных локализованных упругих волн вдоль произвольно ориентированного направления в плоскости пакета из двух отличающихся по физико-механическим свойствам ортотропных деформируемых слоев произвольной толщины, расположенного между разнотипными ортотропными полупространствами. Рассмотрен случай идеального механического контакта плоских граней всех четырех составляющих волновода при условиях коллинеарности их упруго-эквивалентных направлений. Получено основное дисперсионное соотношение, проанализированы некоторые особенности топологических свойств траекторий действительных ветвей дисперсионных спектров при варьировании свойств компонентов волновода и описаны потенциально возможные механизмы предельного распределения скоростей исследуемых волн в высокочастотном коротковолновом диапазоне.

Ключевые слова: *двухслойный ортотропный пакет, вмещающие ортотропные полупространства, идеальный механический контакт, трансцендентное дисперсионное уравнение, трехпарциальные локализованные волны, топологические особенности спектра, схема асимптотического анализа.*

1. Введение и постановка задачи. Задачи волновой механики деформируемых сред составной многослойной структуры являются предметом интенсивных разноплановых исследований на протяжении нескольких последних десятилетий [1–4], однако несмотря на это в характеризующей проблематике имеется целый ряд актуальных малоисследованных вопросов. Так, описание свойств локализованных упругих волн в деформируемом слое или пакете слоев, заключенном между вмещающими деформируемыми полупространствами, по целому ряду аспектов до сегодняшнего дня остается весьма малоисследованной проблемой, имеющей при этом широкий круг актуальных современных приложений по совершенствованию методологической базы геоакустических технологий, методов ультразвукового зондирования пластов полезных ископаемых [5, 6].

Указанные исследования также представляют интерес для прикладной механики композиционных материалов и акустоэлектроники [2, 3, 7].

Можно отметить, что задачи о распространении в объектах рассматриваемой структуры локализованных сдвиговых волн SH типа в случаях различных предположений о свойствах слоя и полупространств составляют наиболее доступный для анализа класс подобных задач [8–15]. Характеризуя результаты исследований по описанию дисперсионных спектров, кинематических и энергетических свойств локализованных упругих волн P-SV типа, либо локализованных трехпарциальных волн, распространяющихся вдоль слоя или пакета слоев, контак-

тирующего по внешним граням с вмещающими деформируемыми полупространствами, можно, прежде всего, указать работы [16–19], в которых получены и в определенной мере исследованы дисперсионные соотношения для изотропного слоя, окруженного однотипными по физико-механическим свойствам изотропными идеально упругими полупространствами. Изучены случаи распространения локализованных SH и P-SV волн с симметричными и антисимметричными толщинными формами колебательных движений в рассматриваемой составной волноводной структуре в случаях, когда вмещающие полупространства являются изотропными. В работах подобные исследования обобщены на вариант задачи, в которых слой и эквивалентные по физико-механическим характеристикам вмещающие полупространства являются трансверсально-изотропными [19–24]. При этом рассмотрены случаи идеального либо неидеального контакта слоя с полупространствами. Можно также отметить, что в работе [25] волновод рассматриваемой структуры рассматривается как предельный вариант трехслойной пластины с идеальным контактом составляющих и неограниченно возрастающими толщинами внешних вмещающих слоев. В работе [26] рассмотрена задача о распространении упругих волн в окрестности тонкого анизотропного слоя. Осуществлен вывод интегральных уравнений для перемещений сплошной среды в окрестности слоя и предложен метод для их решений. Результаты численного анализа представлены в виде графиков амплитуд антисимметричной моды P-SV-поляризации, распространяющейся вдоль слоя. В работах [27–29] представлены исследования дисперсионных свойств трехпарциальных локализованных упругих волн, которые распространяются вдоль ортотропного слоя, заключенного между эквивалентными по свойствам ортотропными полупространствами. В публикации [30] представлены качественные аналитические результаты теоретических исследований по построению дисперсионного соотношения для волновода в виде заключенного между полупространствами и идеально контактирующего с ними слоя в случае, когда материалы всех составляющих принадлежат произвольному классу анизотропии.

В контексте представленной краткой характеристики результатов исследований по рассматриваемой проблеме, данная работа посвящена открытой задаче построения и качественного исследования дисперсионного соотношения, описывающего спектры трехпарциальных локализованных упругих волн в произвольно ориентированного направления в плоскости двухслойного ортотропного пакета, который расположен между разнотипными вмещающими ортотропными полупространствами. Рассматриваются пакеты из отличающихся по физико-механическим свойствам ортотропных деформируемых слоев произвольной толщины, расположенного между разнотипными ортотропными полупространствами, и случай идеального механического контакта плоских граней всех составляющих волновода при условиях коллинеарности их упруго-эквивалентных направлений. Задача заключается в получении основного дисперсионного соотношения и описании некоторых особенностей топологических свойств траекторий действительных ветвей дисперсионных спектров при варьировании свойств ком-

понентов волновода и ориентации направления распространения. Анализ под-
лежат также потенциально допустимые варианты предельного асимптотическо-
го поведения и распределения скоростей исследуемых волн в высокочастотном
коротковолновом диапазоне.

2. Получение основного дисперсионного соотношения. Рассматрива-
ется занимающий область

$$V_{\Sigma} = V^{(+)} \cup V \cup V^{(-)} \quad (1)$$

волновод в виде заключенного между деформируемыми полупространствами
 $V^{(-)}$ и $V^{(+)}$ упругого двухслойного тела V , компоненты которого имеют в отне-
сенных к нормирующему параметру R_* безразмерных прямоугольных коорди-
натах $Ox_1x_2x_3$ описания

$$V^{(-)} = \{(x_1, x_2) \in R^2; x_3 \leq -h_1\}, \quad V^{(+)} = \{(x_1, x_2) \in R^2; x_3 \geq h_2\}, \quad (2)$$

$$V = V_1 \bigcup V_2 = \{(x_1, x_2) \in R^2; -h_1 < x_3 < 0\} \bigcup \{(x_1, x_2) \in R^2, 0 < x_3 < h_2\},$$

и составлены из прямолинейно-ортотропных материалов с коллинеарными, ори-
ентированными вдоль координатных осей одноименными упруго-эквивалентны-
ми направлениями. Полагается, что физико-механические свойства вмещающих
полупространств $V^{(+)}$, $V^{(-)}$ не идентичны и отличаются от физико-механичес-
ких свойств составляющих пакет слоев V_p ($p = \overline{1, 2}$). Каждый из компонентов
волновода соответственно характеризуется девятью независимыми отнесенны-
ми к нормирующему параметру c_* модулями упругости $c_{ij}^{(p)}$, $c_{ij}^{(+)}$, $c_{ij}^{(-)}$ ($ij = 11,$
 $22, 33, 12, 13, 23, 44, 55, 66$), а также плотностями $\rho^{(p)}$, $\rho^{(+)}$, $\rho^{(-)}$.

Для волновода с описанной структурой подлежат анализу процессы распро-
странения в его плоскости локализованных гармонических упругих волн с кру-
говой частотой ω вдоль произвольно ориентированного направления в первом
квадранте координатной плоскости Ox_1x_2 , составляющего угол φ ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$)
с осью Ox_1 ($n_1 = \cos \varphi$, $n_2 = \sin \varphi$). Распространение исследуемых локализо-
ванных волн описывается спектральной краевой задачей, включающей системы
уравнений волнового деформирования для всех компонентов волновода и крае-
вые условия их идеального механического контакта.

На первом этапе реализации процедуры получения аналитической формы
основного дисперсионного соотношения осуществляется аналитическое интегри-
рование систем дифференциальных уравнений волнового деформирования для
составляющих ортотропного двухслойного пакета, записываемых в форме

$$L_{ij}^{(p)}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t)u_j^{(p)}(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \quad (3)$$

где

$$L_{11}^{(p)}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) = c_{11}^{(p)}\partial_1^2 + c_{66}^{(p)}\partial_2^2 + c_{55}^{(p)}\partial_3^2 - \rho^{(p)}\partial_t^2,$$

$$L_{22}^{(p)}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) = c_{66}^{(p)}\partial_1^2 + c_{22}^{(p)}\partial_2^2 + c_{44}^{(p)}\partial_3^2 - \rho^{(p)}\partial_t^2,$$

$$\begin{aligned}
 L_{33}^{(p)}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) &= c_{55}^{(p)} \partial_1^2 + c_{44}^{(p)} \partial_2^2 + c_{33}^{(p)} \partial_3^2 - \rho^{(p)} \partial_t^2, \\
 L_{12}^{(p)}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) &= L_{21}^{(p)}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) = (c_{12}^{(p)} + c_{66}^{(p)}) \partial_1 \partial_2, \\
 L_{13}^{(p)}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) &= L_{31}^{(p)}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) = (c_{13}^{(p)} + c_{55}^{(p)}) \partial_1 \partial_2, \\
 L_{23}^{(p)}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) &= L_{32}^{(p)}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) = (c_{23}^{(p)} + c_{44}^{(p)}) \partial_1 \partial_2, \\
 \partial_j &= \partial / \partial x_j, \quad \partial_t = \partial / \partial t.
 \end{aligned}$$

При подстановке в (3) исходных представлений для комплексных функций упругих перемещений в исследуемых волнах с волновыми числами k , имеющих вид

$$\begin{aligned}
 u_j^{(p)}(x_1, x_2, x_3, t) &= (A_{j+}^{(p)} \cos(\lambda^{(p)} x_3) + A_{j-}^{(p)} \sin(\lambda^{(p)} x_3)) E(\omega, k, n_1, n_2) \\
 (j &= \overline{1, 2}; p = \overline{1, 2}). \\
 u_3^{(p)}(x_1, x_2, x_3, t) &= (A_{3+}^{(p)} \sin(\lambda^{(p)} x_3) + A_{3-}^{(p)} \cos(\lambda^{(p)} x_3)) E(\omega, k, n_1, n_2), \\
 E(\omega, k, n_1, n_2) &= \exp(-i(\omega t - k(n_1 x_1 + n_2 x_2))),
 \end{aligned} \tag{4}$$

соотношения (3) трансформируются в системы линейных алгебраических уравнений

$$G_{ijp}^{(\pm)}(\lambda) A_{j\pm}^{(p)} = 0 \quad (i, j = \overline{1, 3}), \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
 G_{11}(\lambda) &= \Omega^2 - k^2(c_{11}n_1^2 + c_{66}n_2^2) + c_{55}\lambda^2, \\
 G_{22}(\lambda) &= \Omega^2 - k^2(c_{66}n_1^2 + c_{22}n_2^2) + c_{44}\lambda^2, \\
 G_{33}(\lambda) &= \Omega^2 - k^2(c_{55}n_1^2 + c_{44}n_2^2) + c_{33}\lambda^2, \\
 G_{12}(\lambda) &= G_{21}(\lambda) = -k^2(c_{12} + c_{66})n_1n_2, \\
 G_{13}(\lambda) &= G_{31}(\lambda) = ik(c_{13} + c_{55})n_1\lambda, \\
 G_{23}(\lambda) &= G_{32}(\lambda) = ik(c_{23} + c_{44})n_2\lambda.
 \end{aligned} \tag{6}$$

С введением обозначений $\lambda_{q\pm}^{(p)}$ ($Re\lambda_{q\pm}^{(p)} > 0$, $q = \overline{1, 3}$) для корней бикубических характеристических полиномов уравнений (4)

$$d_{1\pm}^{(p)} \cdot (\lambda_{\pm}^{(p)})^6 + d_{2\pm}^{(p)} \cdot (\lambda_{\pm}^{(p)})^4 + d_{3\pm}^{(p)} \cdot (\lambda_{\pm}^{(p)})^2 + d_{4\pm}^{(p)} = 0$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned}
 d_{1\pm}^{(p)} &= c_{33}^{(p)} c_{44}^{(p)} c_{55}^{(p)}, \\
 d_{2\pm}^{(p)} &= [c_{44}^{(p)} (c_{13}^{(p)} + c_{55}^{(p)}) n_1^2 + c_{55}^{(p)} (c_{23}^{(p)} + c_{44}^{(p)}) n_2^2 - \\
 &\quad - c_{33}^{(p)} c_{55}^{(p)} (c_{66}^{(p)} n_1^2 + c_{22}^{(p)} n_2^2) - c_{44}^{(p)} c_{55}^{(p)} (c_{55}^{(p)} n_1^2 + c_{44}^{(p)} n_2^2) - \\
 &\quad - c_{33}^{(p)} c_{44}^{(p)} (c_{11}^{(p)} n_1^2 + c_{66}^{(p)} n_2^2)] k^2 + [c_{33}^{(p)} c_{44}^{(p)} + c_{33}^{(p)} c_{55}^{(p)} + c_{44}^{(p)} c_{55}^{(p)}] \Omega^2, \\
 d_{3\pm}^{(p)} &= [2(c_{23}^{(p)} + c_{44}^{(p)}) (c_{13}^{(p)} + c_{55}^{(p)}) (c_{12}^{(p)} + c_{66}^{(p)}) n_1^2 n_2^2 - \\
 &\quad - c_{33}^{(p)} (c_{12}^{(p)} + c_{66}^{(p)})^2 n_1^2 n_2^2 - (c_{13}^{(p)} + c_{55}^{(p)})^2 (c_{66}^{(p)} n_1^2 + c_{22}^{(p)} n_2^2) n_1^2 - \\
 &\quad - (c_{23}^{(p)} + c_{44}^{(p)})^2 (c_{11}^{(p)} n_1^2 + c_{66}^{(p)} n_2^2) n_2^2 + \\
 &\quad + c_{33}^{(p)} (c_{66}^{(p)} n_1^2 + c_{22}^{(p)} n_2^2) (c_{11}^{(p)} n_1^2 + c_{66}^{(p)} n_2^2) + \\
 &\quad + c_{44}^{(p)} (c_{55}^{(p)} n_1^2 + c_{44}^{(p)} n_2^2) (c_{11}^{(p)} n_1^2 + c_{66}^{(p)} n_2^2) + \\
 &\quad + c_{55}^{(p)} (c_{66}^{(p)} n_1^2 + c_{22}^{(p)} n_2^2) (c_{55}^{(p)} n_1^2 + c_{44}^{(p)} n_2^2)] k^4 + \\
 &\quad + [(c_{13}^{(p)} + c_{55}^{(p)})^2 n_1^2 + (c_{23}^{(p)} + c_{44}^{(p)})^2 n_2^2 - c_{33}^{(p)} (c_{66}^{(p)} n_1^2 + c_{22}^{(p)} n_2^2) - \\
 &\quad - c_{55}^{(p)} (c_{66}^{(p)} n_1^2 + c_{22}^{(p)} n_2^2) - c_{44}^{(p)} (c_{55}^{(p)} n_1^2 + c_{44}^{(p)} n_2^2) - \\
 &\quad - c_{55}^{(p)} (c_{55}^{(p)} n_1^2 + c_{44}^{(p)} n_2^2) - c_{33}^{(p)} (c_{11}^{(p)} n_1^2 + c_{66}^{(p)} n_2^2) - \\
 &\quad - c_{44}^{(p)} (c_{11}^{(p)} n_1^2 + c_{66}^{(p)} n_2^2)] k^2 \Omega^2 + [c_{33}^{(p)} + c_{44}^{(p)} + c_{55}^{(p)}] \Omega^4, \\
 d_{4\pm}^{(p)} &= [(c_{12}^{(p)} + c_{66}^{(p)})^2 (c_{55}^{(p)} n_1^2 + c_{44}^{(p)} n_2^2) n_1^2 n_2^2 - \\
 &\quad - (c_{66}^{(p)} n_1^2 + c_{22}^{(p)} n_2^2) (c_{55}^{(p)} n_1^2 + c_{44}^{(p)} n_2^2) (c_{11}^{(p)} n_1^2 + c_{66}^{(p)} n_2^2)] k^6 + \\
 &\quad + [(c_{66}^{(p)} n_1^2 + c_{22}^{(p)} n_2^2) (c_{55}^{(p)} n_1^2 + c_{44}^{(p)} n_2^2) + \\
 &\quad + (c_{66}^{(p)} n_1^2 + c_{22}^{(p)} n_2^2) (c_{11}^{(p)} n_1^2 + c_{66}^{(p)} n_2^2) + \\
 &\quad + (c_{55}^{(p)} n_1^2 + c_{44}^{(p)} n_2^2) (c_{11}^{(p)} n_1^2 + c_{66}^{(p)} n_2^2) - \\
 &\quad - (c_{12}^{(p)} + c_{66}^{(p)})^2 n_1^2 n_2^2] k^4 \Omega^2 + \Omega^6 - \\
 &\quad - [(c_{66}^{(p)} n_1^2 + c_{22}^{(p)} n_2^2) + (c_{55}^{(p)} n_1^2 + c_{44}^{(p)} n_2^2) + (c_{11}^{(p)} n_1^2 + c_{66}^{(p)} n_2^2)] k^2 \Omega^4,
 \end{aligned}$$

определяемых с применением формул Кардано

$$\lambda_{q\pm}^{(p)} = \pm (\eta_q^{(p)} - a^{(p)} / 3)^{1/2} \quad (q = \overline{1, 3}), \quad \eta_1^{(p)} = A^{(p)} + B^{(p)},$$

$$\begin{aligned}
 \eta_2^{(p)} &= -(A^{(p)} + B^{(p)})/2 + \sqrt{3} i((A^{(p)} - B^{(p)})/2), \\
 \eta_3^{(p)} &= -(A^{(p)} + B^{(p)})/2 - \sqrt{3} i((A^{(p)} - B^{(p)})/2), \\
 A^{(p)} &= (Q_p^{1/2} - R_p/2)^{1/3}, \quad B^{(p)} = (-Q_p^{1/2} - R_p/2)^{1/3}, \\
 Q_p &= (T_p^*/3)^3 + (R_p/2)^2, \quad T_p^* = -a_p^2/3 + b_p, \\
 R_p &= 2(a_p/3)^3 - a_p b_p/3 + c_p, \\
 a_p &= d_{2\pm}^{(P)}/d_{1\pm}^{(P)}, \quad b_p = d_{3\pm}^{(P)}/d_{1\pm}^{(P)}, \quad c_p = d_{4\pm}^{(P)}/d_{1\pm}^{(P)},
 \end{aligned}$$

соответствующие им нетривиальные решения $A_{qj\pm}^{(p)}$ конструируются в виде представлений со структурой $A_{qj\pm}^{(p)} = \beta_{jq\pm}^{(p)} D_{q\pm}^{(p)}$, содержащих произвольные постоянные коэффициенты $D_{q\pm}^{(p)}$

$$\begin{aligned}
 A_{11\pm}^{(p)} &= (G_{12\pm}^{(p)}(\lambda_{1\pm}^{(p)})G_{23\pm}^{(p)}(\lambda_{1\pm}^{(p)}) - G_{22\pm}^{(p)}(\lambda_{1\pm}^{(p)})G_{13\pm}^{(p)}(\lambda_{1\pm}^{(p)}))D_{1\pm}^{(p)} = \beta_{11\pm}^{(p)} D_{1\pm}^{(p)}, \\
 A_{12\pm}^{(p)} &= (G_{13\pm}^{(p)}(\lambda_{1\pm}^{(p)})G_{21\pm}^{(p)}(\lambda_{1\pm}^{(p)}) - G_{11\pm}^{(p)}(\lambda_{1\pm}^{(p)})G_{23\pm}^{(p)}(\lambda_{1\pm}^{(p)}))D_{1\pm}^{(p)} = \beta_{21\pm}^{(p)} D_{1\pm}^{(p)}, \\
 A_{13\pm}^{(p)} &= (G_{11\pm}^{(p)}(\lambda_{1\pm}^{(p)})G_{22\pm}^{(p)}(\lambda_{1\pm}^{(p)}) - G_{12\pm}^{(p)}(\lambda_{1\pm}^{(p)})G_{21\pm}^{(p)}(\lambda_{1\pm}^{(p)}))D_{1\pm}^{(p)} = \beta_{31\pm}^{(p)} D_{1\pm}^{(p)}, \\
 A_{21\pm}^{(p)} &= (G_{12\pm}^{(p)}(\lambda_{2\pm}^{(p)})G_{23\pm}^{(p)}(\lambda_{2\pm}^{(p)}) - G_{22\pm}^{(p)}(\lambda_{2\pm}^{(p)})G_{13\pm}^{(p)}(\lambda_{2\pm}^{(p)}))D_{2\pm}^{(p)} = \beta_{12\pm}^{(p)} D_{2\pm}^{(p)}, \\
 A_{22\pm}^{(p)} &= (G_{13\pm}^{(p)}(\lambda_{2\pm}^{(p)})G_{21\pm}^{(p)}(\lambda_{2\pm}^{(p)}) - G_{11\pm}^{(p)}(\lambda_{2\pm}^{(p)})G_{23\pm}^{(p)}(\lambda_{2\pm}^{(p)}))D_{2\pm}^{(p)} = \beta_{22\pm}^{(p)} D_{2\pm}^{(p)}, \\
 A_{23\pm}^{(p)} &= (G_{11\pm}^{(p)}(\lambda_{2\pm}^{(p)})G_{22\pm}^{(p)}(\lambda_{2\pm}^{(p)}) - G_{12\pm}^{(p)}(\lambda_{2\pm}^{(p)})G_{21\pm}^{(p)}(\lambda_{2\pm}^{(p)}))D_{2\pm}^{(p)} = \beta_{32\pm}^{(p)} D_{2\pm}^{(p)}, \\
 A_{31\pm}^{(p)} &= (n_2(G_{22\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)})G_{33\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)}) - G_{23\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)})G_{32\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)})) + \\
 &\quad + (n_1(G_{13\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)})G_{32\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)}) - G_{12\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)})G_{33\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)}))) = \\
 &\quad = \beta_{13\pm}^{(p)} D_{3\pm}^{(p)}, \\
 A_{32\pm}^{(p)} &= (n_2(G_{31\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)})G_{33\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)}) - G_{21\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)})G_{33\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)})) + \\
 &\quad + (n_1(G_{11\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)})G_{33\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)}) - G_{31\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)})G_{13\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)}))) = \\
 &\quad = \beta_{23\pm}^{(p)} D_{3\pm}^{(p)}, \\
 A_{33\pm}^{(p)} &= (n_2(G_{21\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)})G_{32\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)}) - G_{31\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)})G_{22\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)})) + \\
 &\quad + (n_1(G_{31\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)})G_{12\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)}) - G_{11\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)})G_{32\pm}^{(p)}(\lambda_{3\pm}^{(p)}))) = \\
 &\quad = \beta_{33\pm}^{(p)} D_{3\pm}^{(p)}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Введенные представления для коэффициентов $A_{3j\pm}^{(p)}$ обладают следующими свойствами

$$\begin{aligned} (A_{31\pm}^{(p)})_{n_1=0} \neq 0, \quad (A_{31\pm}^{(p)})_{n_2=0} = 0; \quad (A_{32\pm}^{(p)})_{n_1=0} = 0, \quad (A_{32\pm}^{(p)})_{n_2=0} \neq 0; \\ (A_{33\pm}^{(p)})_{n_1=0} = 0, \quad (A_{33\pm}^{(p)})_{n_2=0} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

устанавливаемыми с учетом соотношений

$$\begin{aligned} (G_{12\pm}^{(p)}(\lambda))_{n_1=0} = (G_{21\pm}^{(p)}(\lambda))_{n_1=0} = (G_{12\pm}^{(p)}(\lambda))_{n_2=0} = (G_{21\pm}^{(p)}(\lambda))_{n_2=0} = 0, \\ (G_{13\pm}^{(p)}(\lambda))_{n_1=0} = (G_{31\pm}^{(p)}(\lambda))_{n_1=0} = 0, (G_{23\pm}^{(p)}(\lambda))_{n_2=0} = (G_{32\pm}^{(p)}(\lambda))_{n_2=0} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

При условии, что величины $\lambda_{3\pm}^{(p)}$ принадлежат тем ветвям корней характеристических уравнений систем (3), которые в предельных случаях $n_1 = 0$ и $n_2 = 0$ описывают нормальные волны SH-типа вдоль соответствующего координатного направления Ox_j в плоскости слоев, могут быть записаны представления вида

$$\begin{aligned} u_j^{(p)}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{q=1}^3 (D_{q+}^{(p)} \beta_{jq+}^{(p)} \cos(\lambda_{q+}^{(p)} x_3) + D_{q-}^{(p)} \beta_{jq-}^{(p)} \sin(\lambda_{q-}^{(p)} x_3)) \cdot \\ \cdot E(\omega, k, n_1, n_2) \quad (j = \overline{1, 2}), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u_3^{(p)}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{q=1}^3 (D_{q+}^{(p)} \beta_{3q+}^{(p)} \sin(\lambda_{q+}^{(p)} x_3) + D_{q-}^{(p)} \beta_{3q-}^{(p)} \cos(\lambda_{q-}^{(p)} x_3)) \cdot \\ \cdot E(\omega, k, n_1, n_2), \end{aligned}$$

которые обладают свойством предельного соответствия в описании структуры волновых полей для всего диапазона угловых параметров направлений распространения $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ и могут быть эффективно использованы в дальнейшем теоретическом алгоритме получения верифицируемых дисперсионных соотношения для исследуемых трехпарциальных локализованных волн при задании соответствующих контактных краевых условий на противоположных гранях слоев.

По аналогичной схеме формируются и представления комплексных функций волновых упругих перемещений в областях, занимаемых вмещающими полупространствами. Для полупространства $V^{(+)}$ на основе задания исходных представлений

$$u_j^{(+)}(x_1, x_2, x_3, t) = B_{j+} \exp(-\alpha_+ x_3) E(\omega, k, n_1, n_2) (j = \overline{1, 3}) \quad (11)$$

при условии $Re \alpha_+ > 0$, система уравнений движения (3) трансформируется в линейные алгебраические уравнения вида

$$G_{ij}^+(\alpha_+) B_{j+} = 0 \quad (12)$$

с выражениями $G_{ij}^+(\alpha_+)$, имеющими форму

$$\begin{aligned}
 G_{11}^+(\alpha_+) &= \Omega^2 - k^2(c_{11}n_1^2 + c_{66}n_2^2) + c_{55}\alpha_+^2, \\
 G_{22}^+(\alpha_+) &= \Omega^2 - k^2(c_{66}n_1^2 + c_{22}n_2^2) + c_{44}\alpha_+^2, \\
 G_{33}^+(\alpha_+) &= \Omega^2 - k^2(c_{55}n_1^2 + c_{44}n_2^2) + c_{33}\alpha_+^2, \\
 G_{12}^+(\alpha_+) &= G_{21}^+(\alpha_+) = -k^2(c_{12} + c_{66})n_1n_2, \\
 G_{13}^+(\alpha_+) &= G_{31}^+(\alpha_+) = -ik(c_{13} + c_{55})n_1\alpha_+, \\
 G_{23}^+(\alpha_+) &= G_{32}^+(\alpha_+) = -ik(c_{23} + c_{44})n_2\alpha_+.
 \end{aligned} \tag{13}$$

С введением обозначений α_{q+} ($Re\alpha_{q+} > 0$, $q = \overline{1, 3}$) для корней соответствующего рассматриваемому случаю варианта бикубического характеристического полинома системы дифференциальных уравнений (3), для соответствующих этим корням нетривиальных решений $B_{j+}^{(q)}$ системы (12) конструируются представления $B_{j+}^{(q)} = \eta_{jq+}C_{q+}$ с произвольными постоянными коэффициентами C_{q+}

$$\begin{aligned}
 B_{1+}^{(1)} &= (G_{12}^+(\alpha_{1+})G_{23}^+(\alpha_{1+}) - G_{22}^+(\alpha_{1+})G_{13}^+(\alpha_{1+}))C_{1+}, \\
 B_{2+}^{(1)} &= (G_{13}^+(\alpha_{1+})G_{21}^+(\alpha_{1+}) - G_{11}^+(\alpha_{1+})G_{23}^+(\alpha_{1+}))C_{1+}, \\
 B_{3+}^{(1)} &= (G_{11}^+(\alpha_{1+})G_{22}^+(\alpha_{1+}) - G_{12}^+(\alpha_{1+})G_{21}^+(\alpha_{1+}))C_{1+}, \\
 B_{1+}^{(2)} &= (G_{12}^+(\alpha_{2+})G_{23}^+(\alpha_{2+}) - G_{22}^+(\alpha_{2+})G_{13}^+(\alpha_{2+}))C_{2+}, \\
 B_{2+}^{(2)} &= (G_{13}^+(\alpha_{2+})G_{21}^+(\alpha_{2+}) - G_{11}^+(\alpha_{2+})G_{23}^+(\alpha_{2+}))C_{2+}, \\
 B_{3+}^{(2)} &= (G_{11}^+(\alpha_{2+})G_{22}^+(\alpha_{2+}) - G_{12}^+(\alpha_{2+})G_{21}^+(\alpha_{2+}))C_{2+}, \\
 B_{1+}^{(3)} &= (n_2(G_{22}^+(\alpha_{3+})G_{33}^+(\alpha_{3+}) - G_{23}^+(\alpha_{3+})G_{32}^+(\alpha_{3+})) + \\
 &\quad + n_1(G_{13}^+(\alpha_{3+})G_{32}^+(\alpha_{3+}) - G_{12}^+(\alpha_{3+})G_{33}^+(\alpha_{3+})))C_{3+}, \\
 B_{2+}^{(3)} &= (n_2(G_{31}^+(\alpha_{3+})G_{33}^+(\alpha_{3+}) - G_{21}^+(\alpha_{3+})G_{33}^+(\alpha_{3+})) + \\
 &\quad + n_1(G_{11}^+(\alpha_{3+})G_{33}^+(\alpha_{3+}) - G_{31}^+(\alpha_{3+})G_{13}^+(\alpha_{3+})))C_{3+}, \\
 B_{3+}^{(3)} &= (n_2(G_{21}^+(\alpha_{3+})G_{32}^+(\alpha_{3+}) - G_{31}^+(\alpha_{3+})G_{22}^+(\alpha_{3+})) + \\
 &\quad + n_1(G_{31}^+(\alpha_{3+})G_{12}^+(\alpha_{3+}) - G_{11}^+(\alpha_{3+})G_{32}^+(\alpha_{3+})))C_{3+},
 \end{aligned} \tag{14}$$

и на этой основе записываются выражения вида

$$u_j^{(+)}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{q=1}^3 C_{q+} \eta_{jq+} \exp(-\alpha_{q+} x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - k(n_1 x_1 + n_2 x_2))) \quad (j = \overline{1, 3}), \quad (15)$$

для компонентов вектора волновых перемещений в полупространстве $V^{(+)}$. При этом полагается, что величины α_{3+} принадлежат ветви корней характеристического полинома системы волновых уравнений для материала полупространства $V^{(+)}$, описывающей в предельных случаях $n_1 = 0$ и $n_2 = 0$ нормальные волны SH-типа вдоль соответствующего координатного направления Ox_j в $V^{(+)}$.

Для полупространства $V^{(-)}$ на основе задания исходных представлений

$$u_j^{(-)}(x_1, x_2, x_3, t) = B_{j-} \exp(\alpha_- x_3) \cdot E(\omega, k, n_1, n_2) \quad (j = \overline{1, 3})$$

при условии , система уравнений движения (3) трансформируется в линейные алгебраические уравнения вида

$$G_{ij}^-(\alpha_-) B_{j-} = 0 \quad (16)$$

с выражениями $G_{ij}^-(\alpha_-)$, имеющими форму

$$\begin{aligned} G_{11}^-(\alpha_-) &= \Omega^2 - k^2(c_{11}n_1^2 + c_{66}n_2^2) + c_{55}\alpha_-^2, \\ G_{22}^-(\alpha_-) &= \Omega^2 - k^2(c_{66}n_1^2 + c_{22}n_2^2) + c_{44}\alpha_-^2, \\ G_{33}^-(\alpha_-) &= \Omega^2 - k^2(c_{55}n_1^2 + c_{44}n_2^2) + c_{33}\alpha_-^2, \\ G_{12}^-(\alpha_-) &= G_{21}^-(\alpha_-) = -k^2(c_{12} + c_{66})n_1n_2, \\ G_{13}^-(\alpha_-) &= G_{31}^-(\alpha_-) = -ik(c_{13} + c_{55})n_1\alpha_-, \\ G_{23}^-(\alpha_-) &= G_{32}^-(\alpha_-) = -ik(c_{23} + c_{44})n_2\alpha_-. \end{aligned}$$

С введением обозначений α_{q-} ($Re\alpha_{q-} > 0$, $q = \overline{1, 3}$) для корней соответствующего рассматриваемому случаю варианта бикубического характеристического полинома системы дифференциальных уравнений (3), для соответствующих этим корням нетривиальных решений $B_{j-}^{(q)}$ системы (16) конструируются представления $B_{j-}^{(q)} = \eta_{jq-} C_{q-}$ с произвольными постоянными коэффициентами C_{q-}

$$\begin{aligned} B_{1-}^{(1)} &= (G_{12}^-(\alpha_{1-})G_{23}^-(\alpha_{1-}) - G_{22}^-(\alpha_{1-})G_{13}^-(\alpha_{1-}))C_{1-}, \\ B_{2-}^{(1)} &= (G_{13}^-(\alpha_{1-})G_{21}^-(\alpha_{1-}) - G_{11}^-(\alpha_{1-})G_{23}^-(\alpha_{1-}))C_{1-}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 B_{3-}^{(1)} &= (G_{11}^-(\alpha_{1-})G_{22}^-(\alpha_{1-}) - G_{12}^-(\alpha_{1-})G_{21}^-(\alpha_{1-}))C_{1-}, \\
 B_{1-}^{(2)} &= (G_{12}^-(\alpha_{2-})G_{23}^-(\alpha_{2-}) - G_{22}^-(\alpha_{2-})G_{13}^-(\alpha_{2-}))C_{2-}, \\
 B_{2-}^{(2)} &= (G_{13}^-(\alpha_{2-})G_{21}^-(\alpha_{2-}) - G_{11}^-(\alpha_{2-})G_{23}^-(\alpha_{2-}))C_{2-}, \\
 B_{3-}^{(2)} &= (G_{11}^-(\alpha_{2-})G_{22}^-(\alpha_{2-}) - G_{12}^-(\alpha_{2-})G_{21}^-(\alpha_{2-}))C_{2-}, \\
 B_{1-}^{(3)} &= (n_2(G_{22}^-(\alpha_{3-})G_{33}^-(\alpha_{3-}) - G_{23}^-(\alpha_{3-})G_{32}^-(\alpha_{3-})) + \\
 &\quad + n_1(G_{13}^-(\alpha_{3-})G_{32}^-(\alpha_{3-}) - G_{12}^-(\alpha_{3-})G_{33}^-(\alpha_{3-})))C_{3-}, \\
 B_{2-}^{(3)} &= (n_2(G_{31}^-(\alpha_{3-})G_{33}^-(\alpha_{3-}) - G_{21}^-(\alpha_{3-})G_{33}^-(\alpha_{3-})) + \\
 &\quad + n_1(G_{11}^-(\alpha_{3-})G_{33}^-(\alpha_{3-}) - G_{31}^-(\alpha_{3-})G_{13}^-(\alpha_{3-})))C_{3-}, \\
 B_{3-}^{(3)} &= (n_2(G_{21}^-(\alpha_{3-})G_{32}^-(\alpha_{3-}) - G_{31}^-(\alpha_{3-})G_{22}^-(\alpha_{3-})) + \\
 &\quad + n_1(G_{31}^-(\alpha_{3-})G_{12}^-(\alpha_{3-}) - G_{11}^-(\alpha_{3-})G_{32}^-(\alpha_{3-})))C_{3-},
 \end{aligned}$$

и на этой основе записываются выражения вида

$$\begin{aligned}
 &u_j^{(-)}(x_1, x_2, x_3, t) = \\
 &= \sum_{q=1}^3 C_{q-} \eta_{jq-} \exp(\alpha_{q-} x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - k(n_1 x_1 + n_2 x_2))) \quad (j = \overline{1, 3}), \quad (18)
 \end{aligned}$$

для компонентов вектора волновых перемещений в полупространстве $V^{(-)}$. При этом также полагается, что величины α_{3-} принадлежат ветви корней характеристического полинома системы волновых уравнений для материала полупространства $V^{(-)}$, описывающей в предельных случаях $n_1 = 0$ и $n_2 = 0$ нормальные волны SH-типа вдоль соответствующего координатного направления Ox_j в $V^{(-)}$.

Контактные краевые условия в рассматриваемой граничной задаче формулируются на всех поверхностях сопряжения в рассматриваемой структуре

$$u_j^{(-)}(x_1, x_2, -h_1, t) = u_j^{(1)}(x_1, x_2, -h_1, t) \quad (j = \overline{1, 3}), \quad (19)$$

$$\sigma_{3j}^{(-)}(x_1, x_2, -h_1, t) = \sigma_{3j}^{(1)}(x_1, x_2, -h_1, t) \quad (j = \overline{1, 3});$$

$$u_j^{(1)}(x_1, x_2, 0, t) = u_j^{(2)}(x_1, x_2, 0, t) \quad (j = \overline{1, 3}), \quad (20)$$

$$\sigma_{3j}^{(1)}(x_1, x_2, 0, t) = \sigma_{3j}^{(2)}(x_1, x_2, 0, t) \quad (j = \overline{1, 3});$$

$$u_j^{(2)}(x_1, x_2, h_2, t) = u_j^{(+)}(x_1, x_2, h_2, t) \quad (j = \overline{1, 3}), \quad (21)$$

$$\sigma_{3j}^{(2)}(x_1, x_2, h_2, t) = \sigma_{3j}^{(+)}(x_1, x_2, h_2, t) \quad (j = \overline{1, 3}).$$

С учетом представлений для входящих в контактные условия механических напряжений

$$\begin{aligned}
 & \sigma_{33}^{(p)}(x_1, x_2, x_3, t) = \\
 & = \sum_{q=1}^3 [C_{q+}^{(p)} (ik(c_{13}^{(p)} n_1 \beta_{1q+}^{(p)} + c_{23}^{(p)} n_2 \beta_{2q+}^{(p)}) + \lambda_{q+}^{(p)} c_{33}^{(p)} \beta_{3q+}^{(p)}) \cos(\lambda_{q+}^{(p)} x_3) + \\
 & + C_{q-}^{(p)} (ik(c_{13}^{(p)} n_1 \beta_{1q-}^{(p)} + c_{23}^{(p)} n_2 \beta_{2q-}^{(p)}) - \lambda_{q-}^{(p)} c_{33}^{(p)} \beta_{3q-}^{(p)}) \sin(\lambda_{q-}^{(p)} x_3)] E(\omega, k, n_1, n_2), \\
 & \sigma_{32}^{(p)}(x_1, x_2, x_3, t) = \\
 & = \sum_{q=1}^3 [C_{q+}^{(p)} (ikc_{44}^{(p)} (n_2 \beta_{3q+}^{(p)} - \lambda_{q+}^{(p)} \beta_{2q+}^{(p)}) \sin(\lambda_{q+}^{(p)} x_3) + \\
 & + C_{q-}^{(p)} (ikc_{44}^{(p)} (n_2 \beta_{3q-}^{(p)} + \lambda_{q-}^{(p)} \beta_{2q-}^{(p)}) \cos(\lambda_{q-}^{(p)} x_3)] E(\omega, k, n_1, n_2), \\
 & \sigma_{31}^{(p)}(x_1, x_2, x_3, t) = \\
 & = \sum_{q=1}^3 [C_{q+}^{(p)} (ikc_{55}^{(p)} (n_1 \beta_{3q+}^{(p)} - \lambda_{q+}^{(p)} \beta_{1q+}^{(p)}) \sin(\lambda_{q+}^{(p)} x_3) + \\
 & + C_{q-}^{(p)} (ikc_{55}^{(p)} (n_1 \beta_{3q-}^{(p)} + \lambda_{q-}^{(p)} \beta_{1q-}^{(p)}) \cos(\lambda_{q-}^{(p)} x_3)] E(\omega, k, n_1, n_2), \\
 & \sigma_{33}^{(+)}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{q=1}^3 C_{q+} (ik(c_{13}^{(+)} n_1 \eta_{1q+} + c_{23}^{(+)} n_2 \eta_{2q+}) - \\
 & - \alpha_{q+} c_{33}^{(+)} \eta_{3q+}) \cdot \exp(-\alpha_{q+} x_3) E(\omega, k, n_1, n_2), \\
 & \sigma_{32}^{(+)}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{q=1}^3 C_{q+} (ikc_{44}^{(+)} (n_2 \eta_{3q+} - \alpha_{q+} \eta_{2q+})) \cdot \\
 & \cdot \exp(-\alpha_{q+} x_3) E(\omega, k, n_1, n_2), \\
 & \sigma_{31}^{(+)}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{q=1}^3 C_{q+} (ikc_{55}^{(+)} (n_1 \eta_{3q+} - \alpha_{q+} \eta_{1q+})) \cdot \\
 & \cdot \exp(-\alpha_{q+} x_3) E(\omega, k, n_1, n_2), \\
 & \sigma_{33}^{(-)}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{q=1}^3 C_{q-} (ik(c_{13}^{(-)} n_1 \eta_{1q-} + c_{23}^{(-)} n_2 \eta_{2q-}) + \\
 & + \alpha_{q-} c_{33}^{(-)} \eta_{3q-}) \exp(\alpha_{q-} x_3) E(\omega, k, n_1, n_2), \\
 & \sigma_{32}^{(-)}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{q=1}^3 C_{q-} (ikc_{44}^{(-)} (n_2 \eta_{3q-} + \alpha_{q-} \eta_{2q-})) \cdot
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \exp(\alpha_{q-} x_3) E(\omega, k, n_1, n_2), \\ \sigma_{31}^{(-)}(x_1, x_2, x_3, t) &= \sum_{q=1}^3 C_{q-} (ikc_{55}^{(-)} (n_1 \eta_{3q-} + \alpha_{q-} \eta_{1q-})) \cdot \\ & \cdot \exp(\alpha_{q-} x_3) E(\omega, k, n_1, n_2), \end{aligned}$$

из совокупности условий сопряжения (19) – (21) следует система соотношений, образующих однородную систему линейных алгебраических уравнений восемнадцатого порядка относительно неопределенных постоянных коэффициентов в представлениях полей волновых движений в компонентах рассматриваемой составной волноводной структуры

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^3 C_{q-} \Delta_{l,q} + \sum_{q=1}^3 C_{q+}^{(1)} \Delta_{l,q+3} + \sum_{q=1}^3 C_{q-}^{(1)} \Delta_{l,q+6} &= 0, \\ \sum_{q=1}^3 C_{q+}^{(1)} \Delta_{l+6,q+3} + \sum_{q=1}^3 C_{q-}^{(1)} \Delta_{l+6,q+6} + \\ + \sum_{q=1}^3 C_{q+}^{(2)} \Delta_{l+6,q+9} + \sum_{q=1}^3 C_{q-}^{(2)} \Delta_{l+6,q+12} &= 0, \\ \sum_{q=1}^3 C_{q+}^{(2)} \Delta_{l+12,q+9} + \sum_{q=1}^3 C_{q-}^{(2)} \Delta_{l+12,q+12} + \sum_{q=1}^3 C_{q+} \Delta_{l+12,q+15} &= 0 \\ (l = \overline{1,6}). \end{aligned} \tag{23}$$

Из представленных соотношений в качестве конечного результата следует дисперсионное уравнение для рассматриваемых локализованных волн, записываемое в форме равенства нулю определителя матрицы системы алгебраических уравнений

$$F(\omega, k) = \det \|\Delta_{qm}\| \quad (q, m = \overline{1,18}) \tag{24}$$

с отличными от нуля элементами, задаваемыми выражениями:

$$\begin{aligned} \Delta_{jq} &= -\eta_{jq-} \exp(-\alpha_{q-} h_1) \quad (j = \overline{1,3}; q = \overline{1,3}), \\ \Delta_{j,q+3} &= \beta_{jq+}^{(1)} \cos(-\lambda_{q+}^{(1)} h_1) \quad (j = \overline{1,2}; q = \overline{1,3}), \\ \Delta_{3,q+3} &= \beta_{3q+}^{(1)} \sin(-\lambda_{q+}^{(1)} h_1) \quad (q = \overline{1,3}), \\ \Delta_{j,q+6} &= \beta_{jq-}^{(1)} \sin(-\lambda_{q-}^{(1)} h_1) \quad (j = \overline{1,2}; q = \overline{1,3}), \\ \Delta_{3,q+6} &= \beta_{3q-}^{(1)} \cos(-\lambda_{q-}^{(1)} h_1) \quad (q = \overline{1,3}), \\ \Delta_{j+6,q+3} &= \beta_{jq+}^{(1)} \quad (j = \overline{1,2}; q = \overline{1,3}), \\ \Delta_{9,q+6} &= \beta_{3q-}^{(1)} \quad (q = \overline{1,3}), \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{j+6,q+9} &= -\beta_{jq+}^{(2)} \quad (j = \overline{1,2}; q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{9,q+12} &= -\beta_{3q-}^{(2)} \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{j+12,q+9} &= \beta_{jq+}^{(2)} \cos(\lambda_{q+}^{(2)} h_2) \quad (j = \overline{1,2}; q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{15,q+9} &= \beta_{3q+}^{(2)} \sin(\lambda_{q+}^{(2)} h_2) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{j+12,q+12} &= \beta_{jq-}^{(2)} \sin(\lambda_{q-}^{(2)} h_2) \quad (j = \overline{1,2}; q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{15,q+12} &= \beta_{3q-}^{(2)} \cos(\lambda_{q-}^{(2)} h_2) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{j+12,q+15} &= -\eta_{jq+} \exp(-\alpha_{q+} h_2) \quad (j = \overline{1,3}; q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{4q} &= -(ikc_{55}^{(-)} (n_1 \eta_{3q-} + \alpha_{q-} \eta_{1q-}) \exp(-\alpha_{q-} h_1) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{5q} &= -(ikc_{44}^{(-)} (n_2 \eta_{3q-} + \alpha_{q-} \eta_{2q-}) \exp(-\alpha_{q-} h_1) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{6q} &= -(ik(c_{13}^{(-)} n_1 \eta_{1q-} + c_{23}^{(-)} n_2 \eta_{2q-}) + \\
 &\quad + \alpha_{q-} c_{33}^{(-)} \eta_{3q-}) \exp(-\alpha_{q-} h_1) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{16,q+15} &= -(ikc_{55}^{(+)} (n_1 \eta_{3q+} + \alpha_{q+} \eta_{1q+}) \exp(-\alpha_{q+} h_2) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{17,q+15} &= -(ikc_{44}^{(+)} (n_2 \eta_{3q+} + \alpha_{q+} \eta_{2q+}) \exp(-\alpha_{q+} h_2) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{18,q+15} &= -(ik(c_{13}^{(+)} n_1 \eta_{1q+} + c_{23}^{(+)} n_2 \eta_{2q+}) + \\
 &\quad + \alpha_{q+} c_{33}^{(+)} \eta_{3q+}) \exp(-\alpha_{q+} h_2) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{4,q+3} &= (ikc_{55}^{(1)} (n_1 \beta_{3q+}^{(1)} - \lambda_{q+}^{(1)} \beta_{1q+}^{(1)}) \sin(-\lambda_{q+}^{(1)} h_1) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{5,q+3} &= (ikc_{44}^{(1)} (n_2 \beta_{3q+}^{(1)} - \lambda_{q+}^{(1)} \beta_{2q+}^{(1)}) \sin(-\lambda_{q+}^{(1)} h_1) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{6,q+3} &= (ik(c_{13}^{(1)} n_1 \beta_{1q+}^{(1)} + c_{23}^{(1)} n_2 \beta_{2q+}^{(1)}) + \\
 &\quad + \lambda_{q+}^{(1)} c_{33}^{(1)} \beta_{3q+}^{(1)}) \cos(-\lambda_{q+}^{(1)} h_1) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{4,q+6} &= (ikc_{55}^{(1)} (n_1 \beta_{3q-}^{(1)} + \lambda_{q-}^{(1)} \beta_{1q-}^{(1)}) \cos(-\lambda_{q+}^{(1)} h_1) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{5,q+6} &= (ikc_{44}^{(1)} (n_2 \beta_{3q-}^{(1)} + \lambda_{q-}^{(1)} \beta_{2q-}^{(1)}) \cos(-\lambda_{q+}^{(1)} h_1) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{6,q+6} &= (ik(c_{13}^{(1)} n_1 \beta_{1q-}^{(1)} + c_{23}^{(1)} n_2 \beta_{2q-}^{(1)}) - \\
 &\quad - \lambda_{q-}^{(1)} c_{33}^{(1)} \beta_{3q-}^{(1)}) \sin(-\lambda_{q-}^{(1)} h_1) \quad (q = \overline{1,3}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{12,q+3} &= (ik(c_{13}^{(1)} n_1 \beta_{1q+}^{(1)} + c_{23}^{(1)} n_2 \beta_{2q+}^{(1)} + \lambda_{q+}^{(1)} c_{33}^{(1)} \beta_{3q+}^{(1)}) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{10,q+6} &= (ikc_{55}^{(1)} (n_1 \beta_{3q-}^{(1)} + \lambda_{q-}^{(1)} \beta_{1q-}^{(1)}) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{11,q+6} &= (ikc_{44}^{(1)} (n_2 \beta_{3q-}^{(1)} + \lambda_{q-}^{(1)} \beta_{2q-}^{(1)}) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{12,q+9} &= -(ik(c_{13}^{(2)} n_1 \beta_{1q+}^{(2)} + c_{23}^{(2)} n_2 \beta_{2q+}^{(2)} + \lambda_{q+}^{(2)} c_{33}^{(2)} \beta_{3q+}^{(2)}) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{10,q+12} &= -(ikc_{55}^{(2)} (n_1 \beta_{3q-}^{(2)} + \lambda_{q-}^{(2)} \beta_{1q-}^{(2)}) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{11,q+12} &= -(ikc_{44}^{(2)} (n_2 \beta_{3q-}^{(2)} + \lambda_{q-}^{(2)} \beta_{2q-}^{(2)}) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{16,q+9} &= -(ikc_{55}^{(2)} (n_1 \beta_{3q+}^{(2)} - \lambda_{q+}^{(2)} \beta_{1q+}^{(2)}) \sin(\lambda_{q+}^{(2)} h_2) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{17,q+9} &= -(ikc_{44}^{(2)} (n_2 \beta_{3q+}^{(2)} - \lambda_{q+}^{(2)} \beta_{2q+}^{(2)}) \sin(\lambda_{q+}^{(1)} h_2) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{18,q+9} &= -(ik(c_{13}^{(2)} n_1 \beta_{1q+}^{(2)} + c_{23}^{(2)} n_2 \beta_{2q+}^{(2)}) + \\
 &\quad + \lambda_{q+}^{(2)} c_{33}^{(2)} \beta_{3q+}^{(2)}) \cos(\lambda_{q+}^{(1)} h_2) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{16,q+12} &= (ikc_{55}^{(2)} (n_1 \beta_{3q-}^{(2)} + \lambda_{q-}^{(2)} \beta_{1q-}^{(2)}) \cos(\lambda_{q+}^{(2)} h_2) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{17,q+12} &= (ikc_{44}^{(2)} (n_2 \beta_{3q-}^{(2)} + \lambda_{q-}^{(2)} \beta_{2q-}^{(2)}) \cos(\lambda_{q+}^{(2)} h_2) \quad (q = \overline{1,3}), \\
 \Delta_{18,q+12} &= (ik(c_{13}^{(2)} n_1 \beta_{1q-}^{(2)} + c_{23}^{(2)} n_2 \beta_{2q-}^{(2)}) - \\
 &\quad - \lambda_{q-}^{(2)} c_{33}^{(2)} \beta_{3q-}^{(2)}) \sin(\lambda_{q-}^{(2)} h_2) \quad (q = \overline{1,3}).
 \end{aligned}$$

3. Особенности топологических свойств траекторий действительных ветвей дисперсионных спектров. Особую роль в процессе анализа вопроса о существовании и топологических свойствах мод локализованных бегущих волн исследуемого типа при различных сочетаниях физико-механических и геометрических свойств слоев и окружающих полупространств играет исследование параметрических зависимостей в распределениях корней характеристических полиномиальных уравнений для систем дифференциальных уравнений стационарного динамического деформирования каждого из четырех компонентов волновода.

В области существования локализованных бегущих волн исследуемого типа на множестве $\{\omega \in [0, \infty), k \in [0, \infty)\}$ значения корней α_q характеристического полинома для волновых уравнений в материале полупространства должны быть действительными. Соответственно множества изменений (ω, k) для каждого компонента волновода, характеризующегося своей совокупностью физико-механических постоянных, в общем случае могут быть подразделены на четы-

ре секторных подобласти, в которых значения λ_q, α_q сохраняют определенный постоянный тип. Границами этих подобластей, индексируемых в порядке появления против часовой стрелки при варьировании параметра $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ для материала каждого компонента волновода, являются оси $Ok, O\Omega$ и лежащие между ними прямые

$$\Omega = \vartheta_j(n_1, n_2)k \quad (j = \overline{1, 3}), \quad (26)$$

где $\vartheta_j(n_1, n_2)$ ($j = \overline{1, 3}$) – упорядоченные по возрастанию положительно определенные действительные корни бикубического уравнения, множество которых имеет вид

$$\begin{aligned} \vartheta_{1,2}(n_1, n_2) &= (1/2)(c_{11}n_1^2 + c_{22}n_2^2 + c_{66}) \pm ((1/4)(c_{11}n_1^2 + c_{22}n_2^2 + c_{66})^2 - \\ &\quad - c_{11}c_{66}n_1^4 - c_{22}c_{66}n_2^4 - (c_{12}^2 + 2c_{12}c_{66} - c_{11}c_{22})n_1^2n_2^2)^{1/2}, \\ \vartheta_3(n_1, n_2) &= (c_{55}n_1^2 + c_{44}n_2^2)^{1/2}, \quad \Omega = (\rho\omega^2 R_*^2/c_*)^{1/2}, \end{aligned}$$

где R_*, c_* – соответственно нормирующие параметры для величин с линейными размерностями расстояний и размерностями механических напряжений. Областью существования исследуемых локализованных волн является пересечение указанных секторных подобластей для материалов всех четырех компонентов рассматриваемого волновода, в котором корни всех характеристических уравнений являются действительными. Соответственно данная область также имеет секторную форму и в ее пределах размещаются все моды бегущих локализованных волн для исследуемого волновода.

Для анализа реализующихся возможных механизмов высокочастотной коротковолновой локализации исследуемых волн вдоль характеризуемых углом $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ направлений в координатной плоскости Ox_1x_2 строятся двенадцать зависимостей от угловой координаты ϕ для скоростей трехпарциальных объемных волн $v_m^{(+)}(\phi), v_m^{(+)}(\phi), v_m^{(1)}(\phi), v_m^{(2)}(\phi)$ ($m = \overline{1, 3}$) в материалах всех четырех компонентов волновода; зависимостей от угловой координаты ϕ для скоростей обобщенных волн Стоунли $v_S^{(m)}(\phi)$ вдоль всех трех имеющихся контактных плоскостей раздела компонентов волновода, а также значений характеристик $v_D^{(+)}(\phi), v_D^{(-)}(\phi), v_D^{(1)}(\phi), v_D^{(2)}(\phi)$ с размерностями фазовой скорости, при которых характеристические полиномы уравнений волновой динамики для материалов соответствующих компонентов волновода имеют кратные корни. Роль значений характеристик $v_D^{(p)}(\phi)$ в описании закономерностей высокочастотной коротковолновой локализации нормальных волн для анизотропных волноводов исследована в работах [31–32]. Далее, для каждого из значений угловой переменной ϕ определяется минимальное значение из элементов множества $\{v_m^{(+)}(\phi), v_m^{(+)}(\phi), v_m^{(p)}(\phi), v_S^{(m)}, v_D^{(+)}(\phi), v_D^{(-)}(\phi), v_D^{(p)}(\phi)\}$, и найденное таким образом значение отвечает реализующемуся варианту предельной асимптотической локализации исследуемых волн для данного направления распространения в высокочастотном коротковолновом диапазоне.

4. Выводы. Таким образом, в данной работе описана методика анализа процессов распространения локализованных упругих волн в двухслойном ортотропном пакете, окруженном ортотропными полупространствами; в форме равенства нулю функционального определителя восемнадцатого порядка получено основное дисперсионное соотношение и приведены аналитические соотношения для расчета элементов дисперсионного определителя; охарактеризована роль анализа топологии областей постоянства типа корней характеристических полиномов систем уравнений движения для компонентов волновода при определении закономерностей в распределениях действительных ветвей анализируемых спектров и описана принципиальная схема анализа эффектов высокочастотной локализации волн деформаций вдоль произвольно ориентированных направлений в плоскости двухслойного ортотропного пакета, окруженного разнотипными ортотропными полупространствами. Полученные результаты являются обобщением представленных ранее в работе [17] применительно к однородному плоскопараллельному ортотропному слою, заключенному между однотипными по свойствам ортотропными полупространствами.

1. *Бабешко В.А.* Динамика неоднородных линейно упругих сред / В.А. Бабешко, Е.В. Глушков, Ж.Ф. Зинченко. – М.: Наука, 1989. – 344 с.
2. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах / Л.М. Бреховских. – М.: Наука, 1973. – 342 с.
3. *Бреховских Л.М.* Акустика слоистых сред / Л.М. Бреховских, О.А. Годин. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
4. *Гетман И.П.* Математическая теория нерегулярных твердых волноводов / И.П. Гетман, Ю.А. Устинов. – Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1993. – 144 с.
5. *Левшин А.Л.* Поверхностные и каналовые сейсмические волны / А.Л. Левшин. – М.: Наука, 1973. – 176 с.
6. *Yilmaz Oz* Engineering seismology with applications to geotechnical engineering (Investigations in geophysics series No. 17) / Oz Yilmaz. – CityplaceTulsa, StateOklahoma, country-region U.S.A.: Society of Exploration Geophysicists, 2015. – 964 p.
7. *Космодамианский А.С.* Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред / А.С. Космодамианский, В.И. Сторожев. – К.: Наук. думка, 1985.– 176 с.
8. *Заславский Ю.М.* Поперечные волны, возбуждаемые переменным силовым источником в слое и окружающем полупространстве. / Ю.М. Заславский, В.Ю. Заславский. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2009. – № 5. – С. 70–80.
9. *Кайбичев И.А.* Поперечные волны в неоднородном слое между двумя средами. / И.А. Кайбичев, В.Г. Шавров. // Акустический журнал. – 1999. – Т. 45, № 1. – С. 81–85.
10. *Ahmed S.M.* Propagation of Love waves in an orthotropic granular layer under initial stress overlying a semi-infinite granular medium / S.M. Ahmed, S.M. Abd-Dahab // Journal of vibration and control – 2010. – V. 16(12). – P. 1845–1858.
11. *Bhattacharya J.* The possibility of the propagation of Love waves in an intermediate heterogeneous layer lying between two semi-infinite isotropic homogeneous elastic layers / J. Bhattacharya // Pure and applied geophysics. – 1969. – V. 72(1). – P. 61–71.
12. *Kakar R.* Love waves in an intermediate heterogeneous layer lying in between homogeneous and inhomogeneous isotropic elastic half-spaces / R. Kakar, M. Gupta // EJGE 19. – 2014. – Bund X. – P. 7165–7185.
13. *Kakar R.* Dispersion of Love wave in an isotropic layer sandwiched between orthotropic and prestressed inhomogeneous half-spaces / R. Kakar // Lat. Am. J. Solids Struct. – 2015. – Vol.12, No.10. – P. 1934–1949.
14. *Kakar R.* Love-type surface wave in an isotropic layer bounded between orthotropic and

- heterogeneous half-spaces under initial stresses / R. Kakar, S. Kakar // International journal of geomechanics. – 2017. – Vol. 17, Iss. 3. – P. 417–431.
15. *Kumar S.* Propagation of SH-wave in a corrugated viscous sandy layer sandwiched between two elastic half-spaces / S. Kumar // Journal Waves in Random and Complex Media – 2017. – Vol. 27, Iss. 2 – P. 213–240.
 16. *Григорян В.Г.* Локализованные акустические волны в слоистых структурах. / В.Г. Григорян, Л. Вендлер // Физика твердого тела. – 1991. – Т. 33, № 7. – С. 2120–2128.
 17. *Wendler L.* Acoustic interface waves in sandwich structures / L. Wendler, V.G. Grigoryan // Surface science. – 1988. – Vol. 206. – P. 203–224.
 18. *Ковтун А.А.* Дисперсионные уравнения для пористого слоя био между упругими полупространствами / А.А. Ковтун // Вопросы геофизики. Ученые записки СПбГУ. – 2012 – № 445 – С. 17–34
 19. *Глухов И.А.* Симметричные упругие волны в трансверсально-изотропном слое между однотипными трансверсально-изотропными полупространствами / И.А. Глухов, В.И. Сторожев // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – № 8(54). – С. 114–122.
 20. *Глухов И.А.* Локализованные волны в анизотропном упругом слое между разнотипными анизотропными полупространствами / И.А. Глухов, В.И. Сторожев // Труды XVII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 14-17 октября 2014 г.). – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2014. – С. 132–137.
 21. *Глухов И.А.* Анализ дисперсии локализованных волн деформаций в поперечно-анизотропном слое между поперечно-анизотропными полупространствами / И.А. Глухов, В.И. Сторожев // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов IX Всероссийской школы-семинара (пос. Дивноморское, 26-30 мая 2014 г.). – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2014. – С. 43.
 22. *Глухов И.А.* Локализованные волны в анизотропном упругом слое между разнотипными анизотропными полупространствами / И.А. Глухов, В.И. Сторожев // Современные проблемы механики сплошной среды: Тезисы докладов XVII Международной конференции (Ростов-на-Дону, 14-17 октября 2014 г.). – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2014. – С. 36.
 23. *Сторожев В.И.* Локализованные P-SV волны в трансропном слое между трансропными полупространствами при условиях скользящего контакта / В.И. Сторожев, И.А. Глухов // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – № 9(55). – С. 71–81
 24. *Сторожев В.И.* Локализованные антисимметричные волны в структуре «трансверсально-изотропный слой между трансверсально-изотропными полупространствами» / В.И. Сторожев, И.А. Глухов // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. С. 122–131.
 25. *Datta S.K.* On ultrasonic guided waves in a thin anisotropic layer lying between two isotropic layers / S.K. Datta // J. Acoust Soc. Am. – 2000. – V. 108. – P. 2005–2011.
 26. *Бужан В.В.* Наспространение упругих волн в окрестности тонкого анизотропного слоя / В.В. Бужан, А.С. Саморукова // Вестник ИМСИТ. – 2012. – № 3–4. – С. 47–53.
 27. *Глухов И.А.* Симметричные трехпарциальные локализованные волны в ортотропном слое между ортотропными полупространствами / И.А. Глухов // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов X Всероссийской школы-семинара (пос. Дивноморское, 25–30 мая 2015 г.). – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета. – 2015. – С. 112.
 28. *Глухов И.А.* Дисперсионные свойства локализованных упругих волн во вращенном между ортотропными полупространствами ортотропном слое / И.А. Глухов, В.И. Сторожев // Труды Института прикладной математики и механики. – 2015. – Т. 29. – С. 41–50.
 29. *Молотков Л.А.* Исследование нормальных волн в пористом слое, окруженном упругой средой / Л.А. Молотков, А.А. Мухин // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2009. – Т. 369. – С. 127–142.
 30. *Ting T.C.T.* Steady waves in an anisotropic elastic layer attached to a half-space or between two half-spaces. A generalization of Love waves and Stoneley waves / T.C.T. Ting // Mathematics

and mechanics of solids. – 2009. – Vol. 14, No. 1-2. – P. 52–71.

31. *Космодамианский А.С.* Спектр симметричных нормальных волн в ортотропном слое / А.С. Космодамианский, В.И. Сторожев, В.А. Шпак // Теорет. и прикл. механика. – 1988. – Вып. 19. – С. 116–121.
32. *Абрамова О.П.* Дисперсия нормальных волн в ортотропном слое с закрепленными границами / Абрамова О.П., Сторожев В.И., Шпак В.А. // Акустический журнал. – 1996. – Т. 42, № 1. – С. 5–9.

V.E. Bolnokin, I.A. Glukhov, V.I. Storozhev

Methodology of analysis of processes of localized elastic waves propagation in a two-layer anisotropic structure between anisotropic half-spaces.

The construction of a numerical-analytic solution of the spatial problem of the propagation of three-partial localized elastic waves along an arbitrarily oriented direction in the plane of a packet of two orthotropic deformable layers of arbitrary thickness differing in physicomaterial properties, located between orthotropic half-spaces is considered. The case of an ideal mechanical contact between the plane faces of all four components of a waveguide under the conditions of collinearity of their elastically equivalent directions is investigated. The main dispersion relation is obtained, some features of the topological properties of the trajectories of the real branches of the dispersion spectra are analyzed for varying the properties of the waveguide components, and the potentially possible mechanisms of the velocity distribution of the investigated waves in the high-frequency short-wave range are described.

Keywords: *two-layer orthotropic structure, surrounding orthotropic half-spaces, ideal mechanical contact, transcendental dispersion equation, three-partial localized waves, topological features of the spectrum, asymptotic analysis scheme.*

ФГУП “Научно-исследовательский и экспериментальный институт автомобильной электроники и электрооборудования”,
Москва
ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
stvi@i.ua

Получено 26.10.17

УДК УДК 539.3:534.1

©2017. М.Н. Пачева, В.И. Сторожев, А.С. Телевной

МОДИФИЦИРОВАННАЯ МЕТОДИКА АЛГЕБРАИЗАЦИИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ УПРУГОЙ ВОЛНЫ СДВИГА ПО ВОЛНОВОДУ ИЗ СОСТЫКОВАННЫХ ПОД УГЛОМ ПОЛУСЛОЕВ

Рассматриваются модифицированные процедуры получения систем линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений волновых полей по базисным системам нормальных волн для задачи о движении сдвиговой гармонической волны по кусочно-однородному волноводу из состыкованных под углом ортотропных полуслоев. Для алгебраизации функциональных граничных условий контакта стыкуемых торцевых поверхностей предложено использовать методику обобщенной граничной ортогонализации систем функций, описывающих множества бегущих и краевых стоячих нормальных волн в компонентах волновода, а также включать в число контактных условий нелинейное соотношение баланса средних за период потоков мощности на поверхности сопряжения компонентов.

Ключевые слова: ортотропный упругий волновод, состыкованные под углом полуслои, нормальные волны сдвига, ряды по базисным волнам, функциональные условия контакта, модифицированные методы алгебраизации.

1. Введение. Одним из подходов к теоретическому численно-аналитическому исследованию задач о распространении нормальных упругих волн сдвига по кусочно-однородным волноводам [1-7], в том числе, волноводам из состыкованных под углом анизотропных полуслоев, является использование представлений волновых полей для компонентов составных волноводов в виде рядов по соответствующим базисным множествам бегущих и краевых стоячих волн с последующим определением коэффициентов этих рядов из алгебраизированных функциональных краевых условий контакта полуслоев. Повышение эффективности данного подхода на стадии численной реализации связано с применением различных альтернативных методик алгебраизации краевых условий в задачах данного типа [8-13], к числу которых относятся метод ортогональных рядов, несколько версий метода наименьших квадратов, метод коллокаций, энергетический метод. Однако опыт использования перечисленных методик алгебраизации свидетельствует о необходимости дальнейших исследований по выработке оптимизированных схем поиска коэффициентов разложений по базисным множествам нормальных волн, обеспечивающих высокую точность удовлетворения краевым условиям в максимально широком частотном диапазоне. В той связи, целям данной работы является синтез новых альтернативных методик алгебраизации, ориентированных на повышение уровня достоверности численных исследований в задачах волновой механики составных тел с функциональными краевыми условиями контакта компонентов, в частности методики, основывающейся на концепции обобщенной граничной ортогонализации базисных систем

элементарных частных решений волновых уравнений, а также на внесении в число контактных условий нелинейных соотношений баланса энергетических характеристик для полей нормальных волн на границах сопрягаемых составляющих волноводов.

2. Постановка задачи. В рамках синтеза упомянутых модифицированных методик рассматривается составное ортотропное тело из полуслоя V_1 толщины $2h_1$ с ортогональным к граням плоским торцом Γ_1 и полуслоя V_2 толщины $2h_2$, $h_2 = h_1 \cdot \sin \alpha$ с плоской торцевой границей Γ_2 , наклоненной на угол α по отношению к его нижней плоской грани. Торцевые поверхности Γ_1 и Γ_2 при стыковочном наложении образуют плоскость Γ идеального механического контакта полуслоев V_1 и V_2 . В телах V_1 и V_2 вводятся локальные координатные системы $Ox_1^{(j)}x_2^{(j)}x_3^{(j)}$ ($j = \overline{1, 2}$), имеющие общий центр O , расположенный в центре Γ . При этом во введенных координатных системах составные части волновода занимают области

$$cV_1 = \{-\infty < x_1^{(1)} \leq 0, x_3^{(1)} \in [-h_1, h_1], x_2^{(1)} \in (-\infty, \infty)\},$$

$$V_2 = \{x_3^{(2)}/\operatorname{tg}\alpha \leq x_1^{(2)} < \infty, x_3^{(2)} \in [-h_2, h_2], x_2^{(2)} \in (-\infty, \infty)\},$$

причем на контактной поверхности Γ выполняется условие $x_3^{(1)} = x_3^{(2)}/\sin \alpha$. Плоские граничные поверхности $x_3^{(1)} = \pm h_1$, $x_3^{(2)} = \pm h_2$ составных частей рассматриваемого волновода считаются свободными от напряжений.

Полагается, что из бесконечно удаленной зоны $x_3^{(1)} \rightarrow -\infty$ полуслоя V_1 вдоль положительного координатного направления $Ox_1^{(1)}$ к поверхности Γ движется стационарная нормальная поляризованная вдоль $Ox_2^{(1)}$ сдвиговая волна, принадлежащая некоторой моде дисперсионного спектра нормальных SH волн в слое со свойственными V_1 характеристиками. При взаимодействии падающей волны с наклонной контактной поверхностью Γ генерируется поле отраженных в V_1 и преломленных в V_2 SH волн. Определению подлежат комплексные амплитудные функции сдвиговых колебательных перемещений $u_2^{(j)}(x_1^{(j)}, x_3^{(j)}, t)$ в отраженных и преломленных волнах для составных частей волновода V_1, V_2 , удовлетворяющие уравнениям стационарных сдвиговых упругих колебаний антиплоской деформации для материалов полуслоев V_j с упругими постоянными $c_{44}^{(j)}, c_{66}^{(j)}$ и плотностями $\rho^{(j)}$. Эти уравнения в случае отнесения всех переменных к размерностью расстояний к нормирующему параметру h_* , а характеристик с размерностью механических напряжений – к нормирующему параметру c_* , принимают вид

$$c(c_{44}^{(j)}\partial_1^2 + c_{66}^{(j)}\partial_3^2 - \rho^{(j)}h_*^2c_*^{-1}\partial_t^2)u_2^{(j)} = 0, \quad (1)$$

$$\partial_j = \partial/\partial x_j \quad (j = 1; 3), \quad \partial_t = \partial/\partial t.$$

После аффинного преобразования координат $Ox_1^{(j)}x_3^{(j)}$ в координаты $O\tilde{x}_1^{(j)}\tilde{x}_3^{(j)}$ с использованием соотношений

$$\tilde{x}_1^{(j)} = x_1^{(j)}, \quad \tilde{x}_3^{(j)} = \mu_j x_3^{(j)}, \quad \mu_j = (c_{44}^{(j)}/c_{66}^{(j)})^{1/2}, \quad (2)$$

уравнения (1) трансформируются в классические волновые уравнения вида

$$(\partial_1^2 + \partial_3^2 - \rho^{(j)} h_*^2 c_*^{-1} (c_{44}^{(j)})^{-1} \partial_t^2) u_2^{(j)} = 0. \quad (3)$$

Поля колебательных волновых перемещений $u_2^{(j)}(x_1^{(j)}, x_3^{(j)}, t)$ подчинены краевым условиям на контактной поверхности Γ

$$(u_2^{(1)})_\Gamma = (u_2^{(2)})_\Gamma, \quad (\sigma_{n2}^{(1)})_\Gamma = (\sigma_{n2}^{(2)})_\Gamma. \quad (4)$$

В рамках использующегося для решения подобных задач подхода [8-13], для каждого из выделенных фрагментов V_j вводится соответствующее удовлетворяющее уравнению (3) представление функции сдвиговых колебательных перемещений $u_2^{(j)}(x_1^{(j)}, x_3^{(j)}, t)$ в виде ряда по базисной системе нормальных волн, включающей составляющие с различным типом симметрии по толщиной координате. В качестве падающей волны рассматривается распространяющаяся в V_1 нормальная сдвиговая гармоническая волна круговой частоты ω с комплексной функцией колебательных перемещений $\tilde{u}_2^{(1,s)}(x_1, x_3, t) = \varphi_s^{(1)}(x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - k_s^{(1)} x_1))$ из моды с номером s объединенного спектра симметричных и антисимметричных нормальных волн антиплоской деформации в свободном ортотропном слое. В данном представлении и при записи ряда последующих соотношений рассматриваемой задачи индексация координатных переменных и параметров, связанная с номером j составляющей V_j волновода и переходом к нормированным величинам координат на основе соотношения (2), без ограничения общности опускается.

Поля волновых упругих перемещений, генерируемые в составных элементах V_j волновода, в рамках рассматриваемой методики представляются редуцированными разложениями по базисным множествам бегущих и стоячих сдвиговых волн с неопределенными постоянными весовыми коэффициентами $A_q^{(j)}$, а амплитудные характеристики этих полей в подобластях продольных сечений G_j составляющих V_j соответственно имеют вид:

$$u_2^{(1)}(x_1, x_3) = \varphi_s^{(1)}(x_3) \cdot \exp(-ik_s^{(1)} x_1) + \sum_{p=1}^{N_1} A_p^{(1)} \varphi_p(x_3) \cdot \exp(ik_p^{(1)} x_1), \quad (5)$$

$$(x_1, x_3) \in G_1;$$

$$u_2^{(2)}(x_1, x_3) = \sum_{n=1}^{N_3} A_n^{(2)} \psi_n^{(2)}(x_3) \cdot \exp(-ik_n^{(2)} x_1) \quad (x_1, x_3) \in G_2, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} c\varphi_s^{(1)}(x_3) &= u_0(\exp(-i\nu_{1s} h_1) \cdot \exp(i\nu_{1s} x_3) + \exp(i\nu_{1s} h_1) \cdot \exp(-i\nu_{1s} x_3)), \\ \varphi_p(x_3) &= \exp(-i\nu_{1p} h_1) \cdot \exp(i\nu_{1p} x_3) + \exp(i\nu_{1p} h_1) \cdot \exp(-i\nu_{1p} x_3), \\ \psi_n^{(2)}(x_3) &= \exp(-i\nu_{2n} h_2) \cdot \exp(i\nu_{2n} x_3) + \exp(i\nu_{2n} h_2) \cdot \exp(-i\nu_{2n} x_3), \\ \nu_{1p} &= (p-1)\pi/(2h_1), \quad \nu_{2n} = (n-1)\pi/(2h_2), \end{aligned} \quad (7)$$

$$ck_p^{(1)} = (\Omega_1^2 + \nu_{1p}^2)^{1/2}, \quad k_p^{(2)} = (\Omega_2^2 + \nu_{2p}^2)^{1/2}, \quad \Omega_q^2 = \rho_q \omega^2 h_*^2 / (c_* c_{44}^{(j)}).$$

Введенные представления $u_2^{(1)}(x_1, x_3)$, $u_2^{(2)}(x_1, x_3)$ удовлетворяют уравнениям волнового деформирования для составляющих рассматриваемого тела, а также краевым условиям на свободных полубесконечных боковых поверхностях. Контактные функциональные граничные условия для амплитудных характеристик рассматриваемых полей на поверхности Γ имеют вид:

$$(u_2^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}))_{\Gamma} = (u_2^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}))_{\Gamma}, \quad (8)$$

$$(c_{66}^{(1)} \partial_1 u_2^{(1)}(x_1, x_3))_{\Gamma} = (c_{66}^{(2)} \partial_1 u_2^{(2)}(x_1, x_3))_{\Gamma}, \quad (9)$$

$$\Gamma : \{x_1^{(1)} = 0, x_3^{(1)} \in [-h_1, h_1]\} = \{x_1^{(2)} = x_3^{(2)} / \operatorname{tg} \alpha, x_3^{(2)} \in [-h_2, h_2]\}.$$

Данные соотношения образуют систему функциональных уравнений относительно $A_p^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, подлежащую алгебраизации на следующем этапе исследования.

3. Модифицированная методика алгебраизации. Предлагаются два модифицированных варианта алгоритма алгебраизации. Концепция первого из них базируется на использовании алгоритма обобщенной граничной ортогонализации множества функций, в ряды по которым разложены компоненты напряженно-деформированного состояния полуслоя V_2 . Данный алгоритм основывается на процедуре ортогонализации систем функций по Шмидту [14]. При этом учитывается, что, представление

$$\begin{aligned} u_{2,\text{отр}}^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) &= \sum_{p=1}^{N_1} A_p^{(1)} F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) = \\ &= \sum_{p=1}^{N_1} A_p^{(1)} \varphi_p(x_3^{(1)}) \cdot \exp(ik_p^{(1)} x_1^{(1)}) \quad (x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) \in G_1 \end{aligned} \quad (10)$$

в виде разложения по системе функций

$$\{F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})\}_{p=1}^{\infty} = \{(\varphi_p(x_3^{(1)}) \cdot \exp(ik_p^{(1)} x_1^{(1)}))\}_{p=1}^{\infty} \quad (11)$$

при введении скалярного произведения

$$\gamma_{pq} = \int_{-h_1}^{h_1} (F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) \cdot \overline{F_q^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})})_{\Gamma} dx_3^{(1)}, \quad (12)$$

с учетом

$$\{F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})_{\Gamma}\}_{p=1}^{\infty} = \{(\varphi_p(x_3^{(1)}) \cdot \exp(ik_p^{(1)} x_1^{(1)}))_{\Gamma}\}_{p=1}^{\infty} = \{\varphi_p(x_3^{(1)})\}_{p=1}^{\infty}, \quad (13)$$

виду свойства

$$\begin{aligned} \gamma_{pq} &= \int_{-h_1}^{h_1} (\exp(-i\nu_{1p}h_1) \cdot \exp(i\nu_{1p}x_3^{(1)}) + \exp(i\nu_{1p}h_1) \cdot \exp(-i\nu_{1p}x_3^{(1)})) \cdot \\ &\cdot (\exp(i\nu_{1p}h_1) \cdot \exp(-i\nu_{1p}x_3^{(1)}) + \exp(-i\nu_{1p}h_1) \cdot \exp(i\nu_{1p}x_3^{(1)})) dx_3^{(1)} = \\ &= \begin{cases} 0, & p \neq q; \\ \neq 0, & p = q; \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

является ортогональным разложением на Γ . Соответственно, при записи представления волнового поля во второй компоненте волновода V_2 предлагается перейти от разложения

$$\begin{aligned} u_2^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) &= \sum_{p=1}^{N_2} A_p^{(2)} \psi_p^{(2)}(x_3^{(2)}) \cdot \exp(-ik_p^{(2)}x_1^{(2)}) = \\ &= \sum_{p=1}^{N_2} A_p^{(2)} F_p^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) \quad (x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) \in G_2 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\psi_n^{(2)}(x_3) = \exp(-i\nu_{2n}h_2) \cdot \exp(i\nu_{2n}x_3) + \exp(i\nu_{2n}h_2) \cdot \exp(-i\nu_{2n}x_3)$$

по функциональному базису $\{F_p^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)})\}_{p=1}^{\infty}$ к разложению по гранично-ортогонализованному функциональному базису $\{G_p^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)})\}_{p=1}^{\infty}$

$$u_2^{(2)}(x_1, x_3) = \sum_{p=1}^{N_2} A_p^{(2)} G_p^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)})(x_1, x_3) \in G_2 \quad (16)$$

со скалярным произведением

$$c_{pq} = \int_{-h_1}^{h_1} ((c_{66}^{(2)})^2 (\partial G_p^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) / \partial x_1^{(2)})_{\Gamma} \cdot \overline{(\partial G_q^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) / \partial x_1^{(2)})_{\Gamma}} dx_3^{(2)}, \quad (17)$$

вводимым с учетом представления

$$\begin{aligned} \{(F_p^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}))_{\Gamma}\}_{p=1}^{\infty} &= \{(\psi_p^{(2)}(x_3^{(2)}) \cdot \exp(-ik_p^{(2)}x_1^{(2)}))_{\Gamma}\}_{p=1}^{\infty} = \\ &= \{\psi_p^{(2)}(x_3^{(2)}) \exp((-ik_p^{(2)}/tg\alpha) \cdot x_3^{(2)})\}_{p=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Применяемый алгоритм граничной ортогонализации описывается соотношениями

$$G_1^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) = s_{11}^{-1} F_1^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}), \quad (18)$$

$$G_p^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) = (F_p^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) - \sum_{k=1}^{p-1} s_{pk} G_k^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)})) \cdot s_{pp}^{-1} \quad (p \geq 2), \quad (19)$$

в которых

$$s_{pk} = (c_{pk} - \sum_{k=1}^{p-1} \overline{s_{kj}} s_{pj}) \cdot s_{kk}^{-1} \quad (k < p), \quad (20)$$

$$s_{pp} = (c_{pp} - \sum_{k=1}^{p-1} |s_{pk}|^2)^{1/2}. \quad (21)$$

После реализации данной процедуры и подстановки получаемых таким образом представлений $u_2^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})$ и $u_2^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)})$ в граничные условия (8), (9), обе части соотношения (8) поочередно умножаются на функции $\overline{(F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}))_\Gamma}$, обе части соотношения (9) поочередно умножаются на функции $(\partial_1 G_q^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}))_\Gamma$, и полученные соотношения интегрируются по $x_3^{(1)}$ на интервале $x_3^{(1)} \in [-h_1, h_1]$. В результате применения данного приема алгебраизации функциональные граничные условия (8), (9) сводятся к парной системе линейных алгебраических уравнений порядка $N_1 + N_2$ относительно коэффициентов $A_p^{(1)}, A_q^{(2)}$

$$\begin{aligned} A_p^{(1)} + \sum_{q=1}^{N_2} \lambda_{pq}^{(2)} A_q^{(2)} &= \delta_p^{(1)} \quad (p = \overline{1, N_1}), \\ A_q^{(2)} + \sum_{p=1}^{N_1} \lambda_{qp}^{(2)} A_p^{(1)} &= \delta_q^{(2)} \quad (q = \overline{1, N_2}), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{qp}^{(1)} &= \left(\int_{-h_1}^{h_1} \left(G_q^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) \overline{(F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}))_\Gamma} dx_3^{(1)} \right) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. \left(\int_{-h_1}^{h_1} \left(F_p^{(1)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) \overline{(F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}))_\Gamma} dx_3^{(1)} \right)^{-1} \right), \\ \lambda_{qp}^{(2)} &= \left(\int_{-h_1}^{h_1} \left(c_{66}^{(1)} \partial_1 F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) \overline{(\partial_1 G_q^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}))_\Gamma} dx_3^{(1)} \right) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. \left(\int_{-h_1}^{h_1} \left(c_{66}^{(2)} \partial G_q^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) \overline{(G_q^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}))_\Gamma} dx_3^{(1)} \right)^{-1} \right), \\ \delta_p^{(1)} &= \left(\int_{-h_1}^{h_1} \left(\tilde{F}_s^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) \overline{(F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}))_\Gamma} dx_3^{(1)} \right) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. \left(\int_{-h_1}^{h_1} \left(F_p^{(1)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) \overline{(F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}))_\Gamma} dx_3^{(1)} \right)^{-1} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\delta_q^{(2)} = \left(\int_{-h_1}^{h_1} \left(c_{66}^{(1)} \partial_1 \tilde{F}_s^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) \overline{\partial_1 G_q^{(2)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})} \right)_{\Gamma} dx_3^{(1)} \right) \cdot \left(\int_{-h_1}^{h_1} \left(c_{66}^{(2)} \partial_1 G_q^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) \overline{G_q^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)})} \right)_{\Gamma} dx_3^{(1)} \right)^{-1},$$

$$\tilde{F}_s^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) = \phi_s^{(1)}(x_3^{(1)}) \exp(-ik_s^{(1)} x_1^{(1)}).$$

Система полученной структуры обладает комплексом преимуществ по показателям точности численного решения и удобству применения методики качественного анализа свойств квазирегулярности.

В качестве еще одного модифицированного приема алгебраизации функциональных граничных условий (8), (9) предлагается итерационный алгоритм, в рамках которого система линейных алгебраических уравнений (22) рассматривается совместно с нелинейным квадратичным по коэффициентам $A_p^{(1)}$, $A_q^{(2)}$ условием баланса средних за период суммарных потоков мощности для волновых полей в стыкуемых фрагментах на контактной площадке Γ

$$\int_{-h_1}^{h_1} (c_{66}^{(1)} \partial_1 u_2^{(1)} \cdot \bar{u}_2^{(1)} - c_{66}^{(2)} \partial_1 u_2^{(2)} \cdot \bar{u}_2^{(2)})_{\Gamma} dx_3^{(1)} = 0. \quad (24)$$

На первом шаге алгоритма коэффициент $A_{N_1}^{(1)}$ полагается равным нулю, а оставшееся множество коэффициентов определяется из системы линейных уравнений вида (22), имеющей порядок $N_1 + N_2 - 1$ и получаемой из (22) отбрасыванием уравнения с номером N_1 . Далее с учетом полученных значений коэффициентов $A_p^{(1)}$ ($p = \overline{1, N_1 - 1}$), $A_q^{(2)}$ ($q = \overline{1, N_2}$) соотношение энергетического баланса (24) трансформируется в нелинейное алгебраическое уравнение относительно величины $A_{N_1}^{(1)} = A_R + iA_I$, имеющее вид

$$A_{N_1}^{(1)} \overline{A_{N_1}^{(1)}} + M^{(1)} A_{N_1}^{(1)} + M^{(2)} \overline{A_{N_1}^{(1)}} = Q \quad (25)$$

с коэффициентами

$$M^{(1)} = M_R^{(1)} + iM_I^{(1)} = \int_{-h_1}^{h_1} \left(c_{66}^{(1)} F_{N_1}^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) \left(\overline{F_s^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})} + \sum_{p=1}^{N_1-1} \overline{A_p^{(1)} F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})} \right) \right)_{\Gamma} dx_3^{(1)},$$

$$M^{(2)} = M_R^{(2)} + iM_I^{(2)} = (ik_{N_1}^{(1)})^{-1} \cdot \int_{-h_1}^{h_1} \left(\overline{F_{N_1}^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})} \left(\partial_1 F_s^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) + \sum_{p=1}^{N_1-1} A_p^{(1)} \partial_1 F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) \right) \right)_{\Gamma} dx_3^{(1)},$$

$$\begin{aligned}
 Q = Q_R + iQ_I = & \left[\int_{-h_1}^{h_1} \left(c_{66}^{(1)} \left(\partial_1 F_s^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) + \sum_{p=1}^{N_1-1} A_p^{(1)} \partial_1 F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) \right) \right. \right. \\
 & \cdot \left. \left. \left(\frac{1}{F_s^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})} + \sum_{p=1}^{N_1-1} \frac{1}{A_p^{(1)} F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})} \right) \right) dx_3^{(1)} - \right. \\
 & \left. - \int_{-h_1}^{h_1} \left(c_{66}^{(2)} \left(\sum_{p=1}^{N_2} A_p^{(2)} \partial_1 G_p^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) \right) \cdot \left(\sum_{p=1}^{N_2} \frac{1}{A_p^{(2)} G_p^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)})} \right) \right) dx_3^{(1)} \right]_{\Gamma} \\
 & \cdot [i c_{66}^{(1)} k_{N_1}^{(1)}]^{-1}.
 \end{aligned}$$

Равенства реальных и мнимых частей в комплекснозначном соотношении (25) могут быть записаны в виде

$$A_R^2 + A_I^2 + A_R(M_R^{(1)} + M_R^{(2)}) + A_I(M_I^{(2)} - M_I^{(1)}) - Q_R = 0, \quad (26)$$

$$A_R(M_I^{(1)} + M_I^{(2)}) + A_I(M_R^{(1)} - M_R^{(2)}) - Q_I = 0, \quad (27)$$

откуда используя следствие из (27) в виде

$$A_I = (Q_I - A_R(M_I^{(1)} + M_I^{(2)})) / (M_R^{(1)} - M_R^{(2)}) = \alpha - \beta A_R, \quad (28)$$

можно получить квадратное уравнение относительно A_R

$$\begin{aligned}
 (1 - \beta^2) A_R^2 + (M_R^{(1)} + M_R^{(2)} - \beta(M_I^{(2)} - M_I^{(1)}) - 2\alpha\beta) A_R + \\
 + (\alpha(M_I^{(2)} - M_I^{(1)}) + \alpha^2 - Q_I) = 0,
 \end{aligned} \quad (29)$$

и таким образом определить возможные значения $A_{N_1}^{(1)}$. Эти значения на следующем шаге циклического алгоритма используются при последующем определении множества коэффициентов из системы линейных уравнений порядка $N_1 + N_2 - 1$, за которым вновь следует процедура определения значений $A_{N_1}^{(1)}$. Вариант выбора корня квадратного уравнения (29) связан с использованием информации о тенденциях поведения значений в последовательности коэффициентов $A_p^{(1)}$ ($p = \overline{1, N_1}$) и с отслеживанием фактора сходимости итерационного алгоритма.

4. Выводы. В результате проведенных исследований разработаны две модифицированные процедуры алгебраизации функциональных граничных условий контакта стыкуемых торцевых поверхностей в задаче о движении сдвиговой гармонической волны по кусочно-однородному волноводу из состыкованных под углом ортотропных полуслоев. Для получения систем линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений волновых полей по базисным системам нормальных волн предложено использовать методику обобщенной граничной ортогонализации систем функций, описывающих множества

бегущих и краевых стоячих нормальных волн в компонентах волновода, а также включать в число контактных условий нелинейное соотношение баланса средних за период потоков мощности на поверхности сопряжения компонентов волновода, трансформирующееся в нелинейное алгебраическое уравнение и добавляемое к совокупности линейных алгебраических уравнений системы. Для получения решений систем с данной комбинированной структурой предложен итерационный алгоритм.

1. Миттра Р. Аналитические методы теории волноводов / Р. Миттра, С. Ли. – М.: Мир, 1974. – 327 с.
2. Гринченко В.Т. Отражение волн Лемба от границы раздела в составном волноводе / В.Т. Гринченко, Н.С. Городецкая // Прикл. механика. – 1985. – Т. 21. № 5. – С. 121–125.
3. Гетман И.П. Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух полуплоскостей / И.П. Гетман, О.Н. Лисицкий // Прикл. математика и механика. – 1988. – Т. 52. № 6. – С. 1044–1048.
4. Гетман И.П. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов / И.П. Гетман, Ю.А. Устинов. – Ростов-на-Дону: РГУ, 1999. – 142 с.
5. Гончарова Г.Ю. Распространение звука в волноводе с изломом / Г.Ю. Гончарова, В.Т. Мачыпура // Акуст. вест. – 1998. – Т. 1, № 2. – С. 57–64.
6. Городецкая Н.С. Дифракция волн Рэлея-Лемба на вертикальной границе в составном упругом волноводе / Н.С. Городецкая // Акуст. вест. – 2000. – Т. 3, № 1. – С. 23–35.
7. Гринченко В.Т. Метод суперпозиції стосовно граничних задач для неоднорідних хвильоводів / В.Т. Гринченко, Н.С. Городецкая // Мат.-методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – 49, № 1. – С.20–30.
8. Сторожев В.И. Эффекты отражения и преломления нормальных волн сдвига в анизотропном упругом волноводе из состыкованных под углом полуслоев / В.И. Сторожев, Е.Ю. Павлюшина // Вісник Донецького університету. Сер. А. Природничі науки. – 2008, № 2. – С. 69–74.
9. Пачева М.Н. Моделирование волновых процессов в изотропном слое с прямолинейным участком излома / М.Н. Пачева // Сучасні тенденції розвитку математики та її прикладні аспекти–2013: матер. II Міжнар. наук.-практ. інтернет-конф. (21 травня 2013 р.). – Донецьк: ДонНУЕТ, 2013. – С. 97–99.
10. Пачева М.Н. Сдвиговые волны в анизотропном упругом слое с участком зигзагообразного излома / М.Н. Пачева // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: тр. VII Междунар. науч. конф. (п. Мелекино, 11–14 июня 2013 г.). – Донецк: ДонНУ, 2013. – Т. 2. – С. 99–103.
11. Пачева М.Н. Прохождение сдвиговой волны по ортотропному волноводу из состыкованных под углом полуслоев / М.Н. Пачева // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов X Всероссийской школы-семинара (пос. Дивноморское, 25–30 мая 2015 г.). – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015. – С. 86.
12. Пачева М.Н. Моделирование волновых процессов в изотропном волноводе из состыкованных под углом полуслоев / М.Н. Пачева // Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты–2015: матер. IV Междунар. научн.-практ. интернет-конф. (25 мая 2015 р.). – Донецк: ДонНУЭТ, 2015. – С. 51–54.
13. Сторожев В.И. Модифицированная схема алгебраизации функциональных граничных условий задачи о поперечных упругих волнах в Г-образном волноводе / В.И. Сторожев, М.Н. Пачева // Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты–2017: матер. VI Междунар. научн.-практ. интернет-конф. (26 мая 2017 г.). – Донецк: ГО ВПО «ДонНУЭТ», 2017. – С. 45–48.

14. *Космодамианский А.С.* Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред / А.С. Космодамианский, В.И. Сторожев. – К.: Наук. думка, 1985. – 176 с.

M.N. Pacheva, V.I. Storozhev, A.S. Televnoy

Modified methodology of algebraization of boundary conditions in problem of the propagation of shear elastic wave along a waveguide from two half-layer contacted with angle.

Modified procedures for obtaining systems of linear algebraic equations with respect to the coefficients of the expansion of wave fields in basis normal-wave systems for the problem of the motion of a shear harmonic wave along a waveguide from two half-layer contacted with angle are considered. To algebraize the functional boundary conditions of the contact of the end surfaces, it is suggested to use the generalized boundary orthogonalization method for systems of functions describing the sets of running and edge standing normal waves in the components of the waveguide, and also include the nonlinear ratio of the balance of power flows in the its components.

Keywords: *orthotropic elastic waveguide, half-layer contacted with angle, normal shear waves, series in basis waves, functional contact conditions, modified methods of algebraization.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
stvi@i.ua

Получено 19.09.17