

УДК 539.3

Г. С. КИТ, д-р физ.-мат. наук, О. П. СУШКО, канд. физ.-мат. наук

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ТЕЛА ПРИ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИИ В ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ К ЕГО ГРАНИЦЕ ДИСКОВОЙ ОБЛАСТИ

При нагревании тел в окрестности находящихся в них включений существенно возрастают температурные напряжения. Это необходимо учитывать при исследовании термоупругого состояния элементов тел, которые выделяют тепло и представляют собой матрицу с распределенными в ней топливными включениями. Эти включения могут иметь шаровую, цилиндрическую, сфероидную или дискообразную форму [1]. Концентрация напряжений в матрице существенно зависит как от формы включений, так и от расстояния между ними и от них до границы тела [2]. Плоская задача теплопроводности и термоупругости для полуплоскости и диска с круговыми тепловыделяющими включениями решена в работах [3–5] с использованием комплексных потенциалов теплопроводности и потенциалов Колосова-Мусхелишвили. Пространственная задача термоупругости для полубесконечного тела при тепловыделении в перпендикулярной к его границе дисковой области рассмотрена в работе [6]. Ниже такая же задача решается для случая, когда дисковая область параллельна к границе тела.

Постановка и метод решения задачи. Рассмотрим упругое изотропное полупространство с параллельной к его границе дисковой областью Ω радиуса a и толщины $2d \ll a$, из которой осуществляется тепловыделение с постоянным количеством тепла q на единицу объема. Граница полупространства свободна от нагрузки и на ней поддерживается нулевая температура или она теплоизолирована. Выберем в области Ω систему декартовых координат $Ox_1x_2x_3$ так, чтобы область S на ее срединной плоскости лежала в параллельной к границе полупространства плоскости $x_3 = 0$, а начало координат находилось на расстоянии h от этой границы. Вследствие малой толщины дисковой области Ω граничные условия из ее поверхности можно перенести на область S .

Стационарное температурное поле, обусловленное тепловыделением, представим через ньютоновский потенциал простого слоя с плотностью $w(x_1, x_2)$, описывающей мощность тепловых источников в области S . Используя результаты работ [7,8], запишем температуру в виде

$$T_i(x^*) = \frac{1}{4\pi\lambda} \iint_S w(\xi) \left[\frac{1}{R_1(x^*, \xi)} + \frac{(-1)^i}{R_2(x^*, \xi)} \right] d_\xi S, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где

$$R_1(x^*, \xi) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2},$$

$$R_2(x^*, \xi) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - 2h)^2},$$

λ – коэффициент теплопроводности; $w(\xi)$ – интенсивность тепловых источников в области S ; $i=1$ соответствует случаю задания на границе полупространства нулевой температуры, $i=2$ – теплоизоляции этой границы.

Задавая различные выражения для функции $w(\xi)$, из представления (1) находим значения температуры в произвольной точке тела. В частности, распределение температуры в плоскости области S определяется по формуле (1) при $x_3 = 0$:

$$T_i(x) = \frac{1}{4\pi\lambda} \iint_S w(\xi) \left[\frac{1}{R_1(x, \xi)} + \frac{(-1)^i}{R_2(x, \xi)} \right] d_\xi S, \quad x = x^*(x_1, x_2, 0). \quad (2)$$

Если в области тепловыделения известна температура $T_i(x)$, то уравнение (2) служит для определения обуславливающих её источников тепла.

Если тепловыделение происходит далеко от границы полупространства, то температурное поле описывается только первым слагаемым выражения (1), а в плоскости $x_3 = 0$ на основе (2) имеем

$$T_\infty(x) = \frac{1}{4\pi\lambda} \iint_S \frac{w(\xi)}{R_1(x, \xi)} d_\xi S. \quad (3)$$

В случае осесимметричной задачи обусловленные тепловыделением нормальные и касательные напряжения определяются с использованием результатов работы [7] по формулам

$$\sigma_{33}^i(x^*) = -\frac{D}{4\pi\lambda} \iint_S w(\xi) \left[\frac{1}{R_1} - M_i(x^*, \xi) \right] d_\xi S,$$

$$D = \frac{G\alpha_t(1+\nu)}{1-\nu}, \quad (4)$$

где

$$M_i(x^*, \xi) = R_2^{-1} - x_3^2 (R_1^{-3} - R_2^{-3}) + (-1)^i 2h(x_3 - h) R_2^{-3} -$$

$$- 6h(x_3 - h)(x_3 - 2h)^2 R_2^{-5}, \quad R_i = R_i(x^*, \xi),$$

$$\sigma_{rz}(x^*) = \frac{D}{4\pi\lambda} \iint_S w(\xi) R_1(x, \xi) \left[x_3 (R_1^{-3} - R_2^{-3}) + 6h(x_3 - h)(x_3 - 2h) R_2^{-5} \right] d_\xi S ; \quad (5)$$

α_t и ν – коэффициенты линейного температурного расширения и Пуассона, G – модуль сдвига. Функции $M_i(x^*, \xi)$ учитывают влияние границы полупространства на его термоупругое состояние.

Формулу (4) с учетом (3) можно записать и в виде

$$\sigma_{33}^i(x^*) = -DT_\infty(x^*) + \frac{D}{4\pi\lambda} \iint_S w(\xi) M_i(x^*, \xi) d_\xi S . \quad (6)$$

Определение температуры и напряжений при постоянном тепловыделении. Пусть область Ω является тонким диском толщиной $2d$ и радиусом a . Тогда $w(\xi) = 2dq$. Подставляя это значение $w(\xi)$ в уравнение (2), найдем температуру в плоскости области S . Полярное ядро первого интеграла в (2), которое задается выражением (3), в точке $\xi = x$ имеет интегрируемую особенность. В осесимметричном случае, когда плотность $w(\xi)$ не зависит от угловой координаты, его удобно представить в виде [9]

$$I(r) = \iint_S \frac{w(\xi)}{R_1(x, \xi)} d_\xi S = 2\pi \int_0^a \int_0^\infty \rho w(\rho) J_0(s\rho) J_0(sr) d\rho ds ,$$

где $J_k(t)$ – функция Бесселя k -го порядка. Если $w(\rho) = 1$, то имеем

$$I(r) = 2\pi a \int_0^\infty s^{-1} J_0(sr) J_1(sa) ds . \quad (7)$$

Из выражений (3) и (7) внутри и вне области S находим [10]

$$T_\infty(r) = \frac{daq}{\lambda} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{r^2}{a^2}\right) = \frac{2daq}{\pi\lambda} E\left(\frac{r}{a}\right), \quad 0 \leq r \leq a ,$$

$$T_\infty(r) = \frac{da^2q}{2\lambda r} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, \frac{a^2}{r^2}\right), \quad r \geq a , \quad (8)$$

где F – гипергеометрическая функция, E – эллиптический интеграл второго рода. В частности $T_\infty(0) = daq/\lambda$, $T_\infty(a) = 2daq/\pi\lambda$.

Вне области S функции $R_1^{-k}(x^*, \xi)$ ($k = 1, 3$) в выражениях (1), (4) и (5) не имеют особенностей, а функции $R_2^{-k}(x^*, \xi)$ ($k = 1, 3, 5$) регулярны во всем полупространстве. Поэтому интегралы можно вычислять численно. Введем в области S сетку радиально-угловых элементов, зададим в них координаты ξ_1 и ξ_2 , вычислим интегралы, найдем значения $T_i(x^*)$, $\sigma_{33}^i(x^*)$ и $\sigma_{rz}(x^*)$ в соответствующей точке полупространства.

Выражения для температуры и нормальных напряжений на оси Ox_3 ($x_1 = x_2 = 0$) определяются точно в аналитической форме

$$T_i(x_3) = \frac{dq}{\lambda} \left\{ \omega_1 - |x_3| + (-1)^i [\omega_2 - \omega_3] \right\}; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^i(x_3) = & -\frac{Ddq}{\lambda} \left\{ \omega_1 - x_3^2 \omega_1^{-1} + \omega_3 - \omega_2 - \right. \\ & -2h(x_3 - h)\omega_3^2 (\omega_2^{-3} - \omega_3^{-3}) + 2h(x_3 - h)(\omega_2^{-1} - \omega_3^{-1}) + \\ & \left. + (x_3 - \delta_{i1} 2h)^2 (\omega_2^{-1} - \omega_3^{-1}) \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\omega_1 = \sqrt{a^2 + x_3^2}, \quad \omega_2 = \sqrt{a^2 + (x_3 - 2h)^2}, \quad \omega_3 = |x_3 - 2h|.$$

Анализ результатов численных исследований. На рис. 1 и 2 представлены графики распределения температуры $\bar{T}_i = \lambda T_i(x_3) / daq$ и нормальных напряжений $\bar{\sigma}_i = \lambda \sigma_{33}^i(x_3) / Ddaq$, вычисленных по формулам

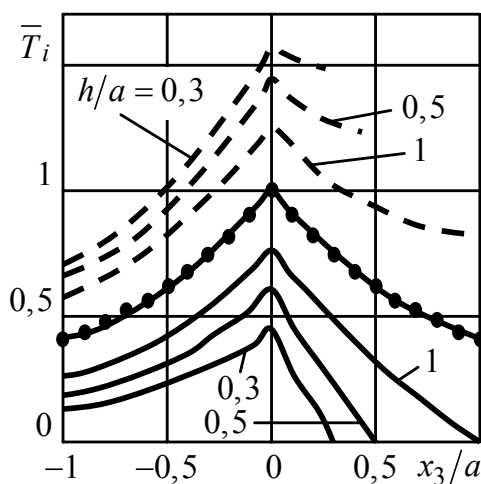


Рис. 1

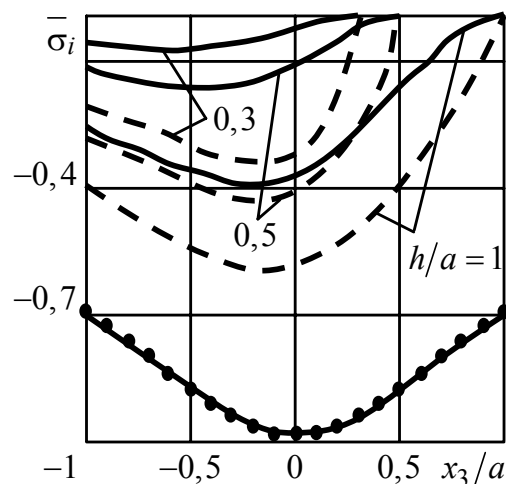


Рис. 2

(9) и (10) в точках оси Ox_3 для различных значений отношения h/a расстояния центра области тепловыделения от границы полупространства. На рис. 3 и 4 построены графики распределений по радиусу температуры $\bar{T}_i(r, 0)$ и напряжений $\bar{\sigma}_i(r, 0)$ в плоскости области тепловыделения ($x_3 = 0$). Сплошные линии соответствуют нулевой температуре границы тела, штриховые – ее теплоизоляции, маркированная линия соответствует бесконечному телу.

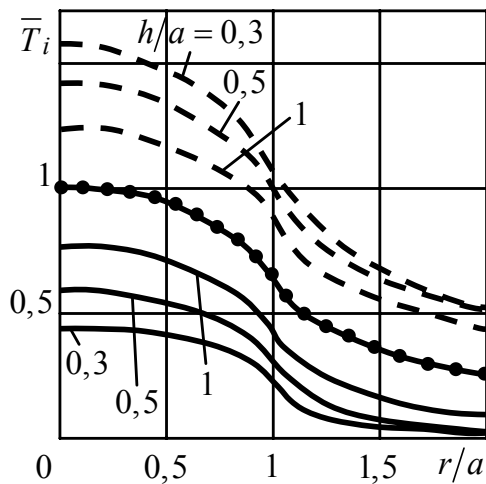


Рис. 3

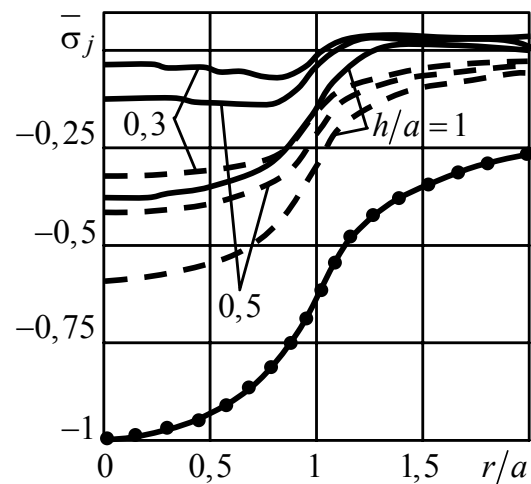


Рис. 4

Из графиков видно, что при теплоизолированной границе тела температура и напряжения по абсолютной величине будут большими, чем при нулевой температуре. При увеличении расстояния h соответствующие кривые приближаются к маркированной линии. Сравнение точных и приближенных значений на оси Ox_3 показывает, что они отличаются только в третьем знаке после запятой.

Для более точного анализа значений напряжений в окрестности центра области S в таблице приведены их максимальные (по модулю) численные значения. В скобках указано расстояние $\delta = (h - x_3)/a$ от границы тела.

h/a	0,3	0,5	1,0
$\bar{\sigma}_1$	-0,076 ($\delta = 0,85$)	-0.171 ($\delta = 0,95$)	-0.397 ($\delta = 1,2$)
$\bar{\sigma}_2$	-0.338 ($\delta = 0,5$)	-0.427 ($\delta = 0,7$)	-0.594 ($\delta = 1,1$)

Для бесконечного тела такие напряжения имеют место в центре области S . При приближении области тепловыделения к границе тела они смещаются вглубь полупространства.

РЕЗЮМЕ. Визначаються температурне поле і напруження у півбезмежному тілі, зумовлені тепловиділенням у паралельній до його межі дисковій області. Вільна

від зовнішніх навантажень межа тіла підтримується за нульової температури або теплоізолювана. Досліджено вплив глибини розташування монетоподібної області на розподіл температури і нормальних напружень при сталому тепловиділенні. Встановлено, що стискальні нормальні напруження набувають максимальної за модулем величини в околі області тепловиділення і збільшуються при її віддаленні від межі тіла.

SUMMARY. Temperature field and stresses in a semi-infinite body, caused by heat emission in a circular domain parallel to the body's boundary, have been determined. The external load free body's boundary is kept at zero temperature or is thermally insulated. The influence of the location depth of penny-shaped domain on the temperature and normal stresses under constant heat emission has been studied. It has been defined that compressive normal stresses reach maximal modulus in the vicinity of heat emission domain and increase when it removes from the body's boundary.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. *Власов Н. М., Федик И. И.* Тепловыделяющие элементы ядерных ракетных двигателей. – М.: ЦНИИАтоминформ. – 2001. – 208 с. 2. *Федик И. И., Колесов В. С., Михайлов В. Н.* Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 280 с. 3. *Зашкиль-няк И. М.* Влияние тепловыделяющих элементов на напряженное состояние диска // Математические методы в термомеханике. – К.: Наук. думка, 1978. – С. 152–160. 4. *Напряженное состояние диска с круговыми тепловыделяющими включениями / Зашкильняк И. М., Кит Г. С., Колесов В. С., Федик И. И.* // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1979. – Вып. 9. – С. 76–81. 5. *Кит Г. С., Зашкильняк И. М.* О термоупругом состоянии тела с тепловыделяющим включением // Физ.–хим. механика материалов. – 1977. – Т.13, № 4. – С. 77–82. 6. *Кит Г. С., Сушко О. П.* Напряжений стан півбезмежного тіла при тепловиділенні в перпендикулярній до його межі дискової області // Прикладні пробл. механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 122–126. 7. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с. 8. *Кит Г. С., Сушко О. П.* Термоупругое состояние полупространства с параллельной к его границе теплоактивной трещиной // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 4. – С. 46–54. 9. *Кит Г. С., Хай М. В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1989. – 283 с. 10. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

*Институт прикладных проблем механики
и математики НАН Украины, г. Львов*

Поступила 09.11.2007

УДК 539.3

Р. М. МАРТЫНЯК, д-р физ.-мат. наук, *К. А. ЧУМАК*

НЕПОЛНЫЙ КОНТАКТ ПОЛУПРОСТРАНСТВ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА, НАПРАВЛЕННОГО К МАТЕРИАЛУ С МЕНЬШЕЙ ТЕРМИЧЕСКОЙ ДИСТОРТИВНОСТЬЮ

Контактное термомеханическое поведение тел с согласованными поверхностями при наличии локальных межповерхностных зазоров качественно зависит от направления теплового потока и соотношения между термическими дистортивностями (ТД) материалов тел. Термическая дистортивность $\delta = \alpha(1+\nu)/\lambda$ (ν , λ , α – коэффициенты Пуассона, теплопроводности и линейного теплового расширения) характеризует свободное термическое искривление линейного элемента, обусловленное перпендикулярным к нему тепловым потоком единичной интенсивности. В работах [1, 2] показано, что в случае теплоизолированного зазора решение задачи о неполном контакте двух полупространств является физически некорректным, если тепловой поток направлен к полупространству с меньшей ТД. Это проявляется в том, что полученные высота зазора и контактное давление отрицательны в окрестности концов зазора. Подобный эффект впервые обнаружен Барбером [3] при рассмотрении задачи о вдавливании в полупространство жесткого холодного шара.

В настоящей статье на основании модели теплопроницаемого зазора построено корректное решение контактной задачи термоупругости в случае теплового потока, направленного к материалу с меньшей термической дистортивностью. Раньше эта модель применялась к исследованию неполного контакта полупространств с одинаковыми ТД [4].

Постановка задачи. Рассмотрим контакт двух упругих изотропных полупространств под действием заданных на бесконечности сжимающих напряжений p и однородного теплового потока q , перпендикулярных к поверхности их разделения. Предполагаем, что тепловой поток направлен к телу с меньшей ТД материала, т. е. выполняется неравенство $(\delta_2 - \delta_1)\tilde{q} < 0$. Граница нижнего полупространства плоская, а граница верхнего полупространства вдоль бесконечной полосы $|x| < b$ имеет геометрическую неоднородность в виде мелкой пологой выемки, форму которой описывает функция $r(x) = r_0 \left(1 - x^2/b^2\right)^{3/2}$, где $r_0 \ll b$. Предполагая, что в телах реализуется двумерное поле температуры и состояние плоской деформации, будем рассматривать взаимодействие двух полуплоскостей D_1 и D_2 , образованных пересечением полупространств плоскостью, пер-

пендикулярной к образующей выемки. Зазор между телами, обусловленный наличием выемки, заполняется теплопроницаемой средой (газом, жидкостью), не сопротивляющейся деформированию (рис. 1). Высота $h(x)$ и

длина $2a$ ($a \leq b$) зазора зависят от приложенной нагрузки и теплового потока. На участках налегания поверхностей тел имеет место идеальный тепловой и безфрикционный механический контакт. Ввиду малой высоты зазора влияние его заполнителя на теплопередачу между телами будем учитывать [5] контактным термосопротивлением

$R(x) = \lambda_3 / h(x)$, где λ_3 – коэффициент теплопроводности заполнителя.

При указанной постановке гранично-контактные условия задачи запишутся в виде

$$T^- = T^+, \quad q_y^- = q_y^+, \quad \sigma_y^- = \sigma_y^+, \quad \tau_{xy}^- = \tau_{xy}^+ = 0 \quad \text{при } |x| \geq a;$$

$$v^+ = v^- - r(x), \quad a \leq |x| < b, \quad v^+ = v^- \quad \text{при } |x| \geq b;$$

$$T^- - T^+ = \frac{h(x)}{\lambda_3} q_y^+, \quad q_y^+ = q_y^-, \quad \sigma_y^+ = \sigma_y^- = \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0 \quad \text{при } |x| < a.$$

Метод решения. С использованием метода функций межконтактных зазоров температуру и напряжения в телах представим через высоту зазора $h(x)$ и перепад температуры $\gamma(x) = T^-(x, 0) - T^+(x, 0)$ между его берегами [1, 2]. Для их определения получим систему нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (СИДУ), которую запишем в следующем безразмерном виде:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}} \frac{\tilde{h}'(\tilde{t})}{\tilde{t} - \tilde{x}} d\tilde{t} + \frac{1}{2} \tilde{q} \left(1 - \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) \tilde{\gamma}(\tilde{x}) = 3\tilde{r}_e \left(\tilde{x}^2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \tilde{p}, \quad |\tilde{x}| < \tilde{a}; \quad (1)$$

$$\tilde{\lambda}_3 \frac{\tilde{\gamma}(\tilde{x})}{\tilde{h}(\tilde{x})} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}} \frac{\tilde{\gamma}'(\tilde{t})}{\tilde{t} - \tilde{x}} d\tilde{t} = 1, \quad |\tilde{x}| < \tilde{a}, \quad (2)$$

где

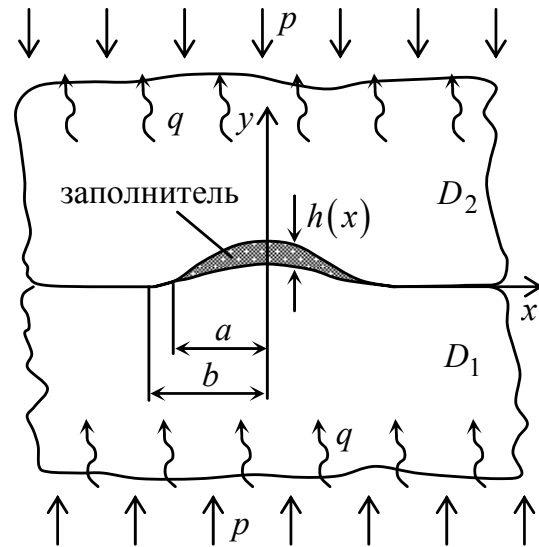


Рис. 1

$$\begin{aligned}\tilde{h} &= \frac{h}{b}, \quad \tilde{a} = \frac{a}{b}, \quad \tilde{r}_e = \frac{r_e}{b}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{b}, \quad , \quad \tilde{\lambda}_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\lambda\gamma}{bq}, \\ \tilde{p} &= Kp, \quad \tilde{q} = b\delta_1q, \quad \lambda = 2\lambda_1\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2), \\ K &= 2(1-\nu_1)/G_1 + 2(1-\nu_2)/G_2, \quad \tilde{t} = t/b.\end{aligned}$$

Искомые функции должны удовлетворять условиям

$$\tilde{\gamma}(\pm\tilde{a}) = 0, \quad \tilde{\gamma}'(\pm\tilde{a}) = 0, \quad \tilde{h}(\pm\tilde{a}) = 0, \quad \tilde{h}'(\pm\tilde{a}) = 0. \quad (3)$$

Первое и третье условия следуют из непрерывности температуры и смещений границ полуплоскостей соответственно. Выполнение второго условия гарантирует непрерывность и ограниченность тепловых потоков на границах полуплоскостей. Последнее условие отображает плавное смыкание берегов зазора и следует из требования ограниченности контактных напряжений в конечных точках зазора $\tilde{x} = \pm\tilde{a}$.

Согласно четвертому условию (3), точки $\tilde{x} = \pm\tilde{a}$ для функции $\tilde{h}(\tilde{x})$ являются точками возврата. Тогда функция $\tilde{\gamma}(\tilde{x})$, как решение уравнения (2), асимптотически эквивалентна функции $\tilde{h}(\tilde{x})$ в окрестности этих точек [6]:

$$\tilde{\gamma}(\tilde{x}) \sim A\tilde{h}(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \rightarrow \pm\tilde{a}, \quad A = \text{const}. \quad (4)$$

Введем непрерывную функцию $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{\gamma}(\tilde{x})/\tilde{h}(\tilde{x})$, $|\tilde{x}| < \tilde{a}$, которая на основании условия (4) ограничена в точках $\tilde{x} \rightarrow \pm\tilde{a}$. Предполагая ее известной, в уравнение (1) подставим $\varphi(\tilde{x})$ вместо $\tilde{\gamma}(\tilde{x})/\tilde{h}(\tilde{x})$, а в уравнение (2) $\tilde{h}(\tilde{x})\varphi(\tilde{x})$ вместо $\tilde{\gamma}(\tilde{x})$. В результате система СИДУ (1), (2) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\tilde{q}\left(1-\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)\varphi(\tilde{x})\tilde{h}(\tilde{x}) + \frac{1}{\pi}\int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}}\frac{\tilde{h}'(\tilde{t})}{\tilde{t}-\tilde{x}}d\tilde{t} = \\ = 3\tilde{r}_e\left(\tilde{x}^2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\tilde{p}, \quad |\tilde{x}| < \tilde{a},\end{aligned} \quad (5)$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}}\frac{\tilde{\gamma}'(\tilde{t})}{\tilde{t}-\tilde{x}}d\tilde{t} = 1 - \tilde{\lambda}_3\varphi(\tilde{x}), \quad |\tilde{x}| < \tilde{a}. \quad (6)$$

Уравнение (6) является сингулярным интегральным уравнением первого рода относительно $\tilde{\gamma}'(\tilde{x})$, которое обращается аналитически. Уравнение (5) является интегро-дифференциальным уравнением типа Прандтля относительно $\tilde{h}(\tilde{x})$. Согласно [7], его решение существует в случае положи-

тельного коэффициента при функции $\tilde{h}(\tilde{x})$ в левой части, т. е. когда $(\delta_2 - \delta_1)\tilde{q} < 0$. Это неравенство выполняется, если тепловой поток направлен от тела с большей ТД к телу с меньшей ТД. Именно этот случай рассматривается в настоящей статье.

Для решения системы СИДУ (5) – (6) используем метод последовательных приближений. Фиксируя длину зазора \tilde{a} из возможного диапазона ее изменения $0 < \tilde{a} < 1$ и значение теплового потока \tilde{q} из некоторого интересующего нас диапазона $0 < \tilde{q} < \tilde{q}_1$, на каждом i -ом шаге итерационного процесса определим четверку функций $\{\tilde{h}_i(\tilde{x}), \tilde{\gamma}_i(\tilde{x}), \varphi_i(\tilde{x}), \tilde{p}_i\}$, исходя из описанного ниже алгоритма.

Функции $\tilde{h}_i(\tilde{x}), \tilde{\gamma}_i(\tilde{x})$ найдем из уравнений

$$-\frac{1}{2}\tilde{q}\left(1-\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)\varphi_{i-1}(\tilde{x})\tilde{h}_i(\tilde{x})+\frac{1}{\pi}\int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}}\frac{\tilde{h}'_i(\tilde{t})}{\tilde{t}-\tilde{x}}d\tilde{t}=$$

$$=3\tilde{r}_e\left(\tilde{x}^2-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\tilde{p}_i, |\tilde{x}|<\tilde{a}; \quad (7)$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\tilde{a}}^{\tilde{a}}\frac{\tilde{\gamma}'_i(\tilde{t})}{\tilde{t}-\tilde{x}}d\tilde{t}=1-\tilde{\lambda}_3\varphi_i(\tilde{x}), |\tilde{x}|<\tilde{a} \quad (8)$$

и условий

$$\tilde{\gamma}_i(\pm\tilde{a})=0, \quad \tilde{\gamma}'_i(\pm\tilde{a})=0, \quad \tilde{h}_i(\pm\tilde{a})=0, \quad \tilde{h}'_i(\pm\tilde{a})=0, \quad (9)$$

где

$$\varphi_{-1}(\tilde{x})\equiv 0, \quad \varphi_i(\tilde{x})=\tilde{\gamma}_i(\tilde{x})/\tilde{h}_i(\tilde{x}), \quad i\geq 1. \quad (10)$$

Непрерывную ограниченную функцию $\varphi_i(\tilde{x})$ представляем в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода с неизвестными коэффициентами $C_n^{(i)}$:

$$\varphi_i(\tilde{x})=\sum_{n=0}^{N_i}C_n^{(i)}T_{2n}(\tilde{x}/\tilde{a}). \quad (11)$$

Подставляя (11) в уравнение (8) и решая его с учетом первых двух условий (3), найдем коэффициент $C_i^{(0)}$ и определим функцию $\tilde{\gamma}_i(\tilde{x})$ через остальные коэффициенты разложения (11):

$$C_0^{(i)}=1/\tilde{\lambda}_3;$$

$$\tilde{\gamma}_i(\tilde{x}) = \tilde{\lambda}_3 \sqrt{\tilde{a}^2 - \tilde{x}^2} \sum_{n=1}^{N_i} C_n^{(i)} \left(\frac{U_{2n-2}(\tilde{x}/\tilde{a})}{2n-1} - \frac{U_{2n}(\tilde{x}/\tilde{a})}{2n+1} \right). \quad (12)$$

Уравнение для определения начального приближения производной от высоты зазора $\tilde{h}_0'(\tilde{x})$ получим из (7) при $i=0$ с учетом (10). Решая его аналитически и удовлетворяя третьему и четвертому условиям (9), находим функцию $\tilde{h}_0(\tilde{x})$, а также начальное приближение \tilde{p}_0 внешней нагрузки, при котором зазор будет иметь заданную длину $2\tilde{a}$:

$$\tilde{h}_0(\tilde{x}) = \tilde{r}_e \left(\tilde{a}^2 - \tilde{x}^2 \right)^{3/2}, \quad |\tilde{x}| \leq \tilde{a}; \quad \tilde{p}_0 = 3\tilde{r}_e \left(1 - \tilde{a}^2 \right). \quad (13)$$

Подставляя теперь определенные соотношениями (11), (12) и (13) функции $\tilde{\varphi}_0(\tilde{x})$, $\tilde{\gamma}_0(\tilde{x})$ и $\tilde{h}_0(\tilde{x})$ в зависимость (10) при $i=0$, получим функциональное уравнение. Удовлетворяя его в точках коллокации $\tilde{x}_j = (j-1)\tilde{a}/N_0$ ($j = \overline{1, N_0}$), приходим к системе N_0 линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $C_j^{(0)}$ ($j = \overline{1, N_0}$). Решив ее численно, по формулам (10), (11), (12) находим нулевое приближение решения задачи $\{\tilde{h}_0(\tilde{x}), \tilde{\gamma}_0(\tilde{x}), \tilde{\varphi}_0(\tilde{x}), \tilde{p}_0\}$.

На каждом следующем i -ом шаге ($i \geq 1$) итерационного процесса выполняем аналогичные операции для определения $\{\tilde{h}_i(\tilde{x}), \tilde{\gamma}_i(\tilde{x}), \varphi_i(\tilde{x}), \tilde{p}_i\}$ с той разницей, что функцию $\tilde{h}_i(\tilde{x})$ находим из интегродифференциального уравнения типа Прандтля (7) численно, используя методы ортогональных многочленов и коллокации.

Численные результаты и их анализ. Расчеты были проведены для случая максимальной высоты выемки $\tilde{r}_e = 0.001$. Проведенный численный эксперимент для коэффициента теплопроводности заполнителя из диапазона $0,001 \leq \tilde{\lambda}_3 \leq 0,5$ показал, что уже после четвертой итерации результаты вычислений стабилизируются и все последующие приближения практически совпадают. Поэтому ограничивались пятым приближением функций $\tilde{h}(\tilde{x})$ и $\tilde{\gamma}(\tilde{x})$. Ниже приведены графики для случая отношения ТД материалов тел $\delta_2/\delta_1 = 0,5$.

На рис. 2 проиллюстрирована зависимость полудлины зазора \tilde{a} от внешней нагрузки \tilde{p} при разных значениях теплового потока ($1 - \tilde{q} = 0$, $2 - \tilde{q} = 0,1$, $3 - \tilde{q} = 1$, $4 - \tilde{q} = 10$), когда коэффициент теплопроводности за-

полнителя $\tilde{\lambda}_3 = 0,01$. Как видно, увеличение потока приводит к уменьшению зазора. Чем меньше внешняя нагрузка \tilde{p} , тем больше проявляется влияние потока. При малых длинах зазора ($0 < \tilde{a} < 0,17$) воздействие термических деформаций практически несущественно. Независимо от величины потока закрытие зазора ($\tilde{a} = 0$) осуществляется при одном и том же внешнем давлении $\tilde{p} = 0,003$.

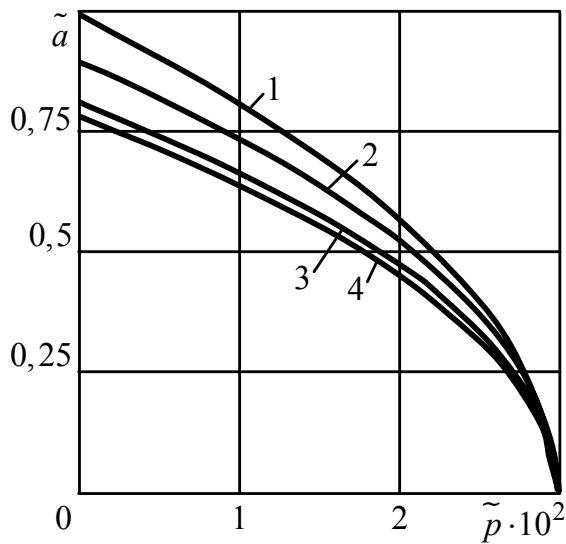


Рис. 2

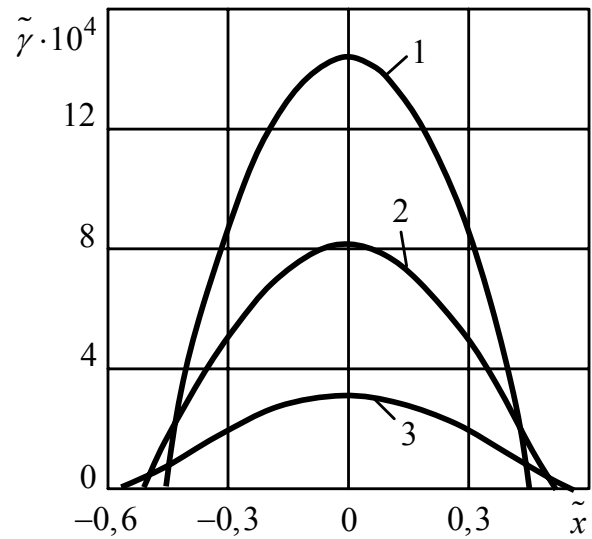


Рис. 3

Увеличение теплопроводности межконтактной среды приводит к увеличению длины зазора и уменьшению максимума скачка температуры между его берегами. На рис. 3 эта закономерность проиллюстрирована для трех разных коэффициентов теплопроводности заполнителя (1 – $\tilde{\lambda}_3 = 0,01$, 2 – $\tilde{\lambda}_3 = 0,1$, 3 – $\tilde{\lambda}_3 = 0,5$) в случае фиксированного внешнего давления $\tilde{p} = 0,002$ и теплового потока $\tilde{q} = 1$.

На рис. 4 изображена трансформация зазора, коэффициент теплопроводности заполнителя которого $\tilde{\lambda}_3 = 0,01$, при изменении потока (кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям \tilde{q} , равным 0,1; 1; 10) и фиксированной нагрузке $\tilde{p} = 0,002$. Из графиков следует, что термические деформации в случае потока в сторону материала с меньшей ТД способствуют закрытию зазора – уменьшению его высоты и длины.

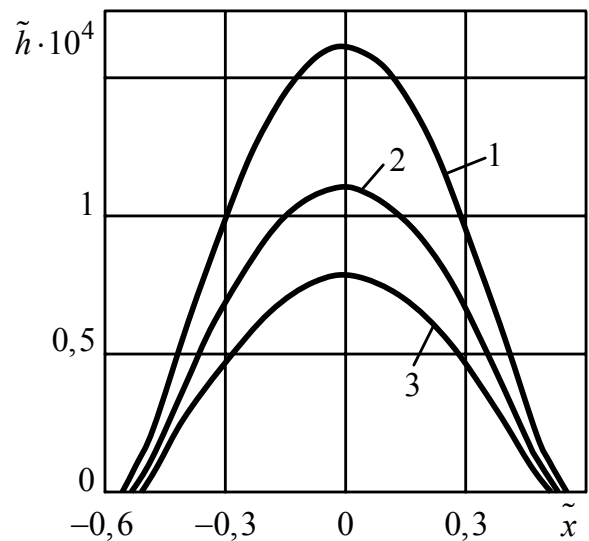


Рис. 4

Отметим, что модель теплопро-

ничаемого зазора, в отличие от модели теплоизолированного зазора [3], приводит к физически корректным результатам. В частности, высота зазора положительна в окрестности его концов (рис. 4).

РЕЗЮМЕ. Розроблено аналітико-числову методику розв'язання нелінійної контактної задачі термопружності про взаємодію півпросторів за наявності між ними теплопроникного зазору, коли тепловий потік напрямлений до матеріала з меншою термічною дистортивністю.

SUMMARY. The analytico-numerical technique for solving the nonlinear contact thermoelastic problem of incomplete half-spaces interaction at a heat flux directed to a less thermal distortivity material is developed.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. *Мартиняк Р. М.* Механотермодифузійна взаємодія тіл з контактено-поверхневими неоднорідностями і дефектами: Дис... докт. фіз.-мат. наук: 01.02.04 – Львів, 2000. – 372 с. 2. *Мартиняк Р. М.* Механотермодифузійна взаємодія тіл з врахуванням заповнювача міжконтактних зазорів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – Т. 36, № 2 – С. 124–126. 3. *Barber J. R.* Indentation of a semi-infinite elastic body by a hot sphere // *Int. J. Eng. Sci.* – 1973. – Vol. 15. – P. 813–819. 4. *Мартиняк Р.М., Чумак К.А.* Термічний контакт пружних півпросторів за наявності теплопроникного заповнювача міжповерхневого просвіту // 8-й міжн. симпозиум укр. інж.-механіків: Тез. конф., Львів, 23-25 травня 2007 р. – Львів, 2007. – С. 68–69. 5. *Подстригач Я. С.* Условія теплового контакту твердих тел // ДАН УССР. Сер. А. – 1963. – № 7. – С. 872–874. 6. *Kim G. S., Кунець Я. І., Ємець В. Ф.* Модель пружно-динамічної взаємодії тонкостінного включення з матрицею в умовах анти-плоского зсуву // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1998. – Т. 41, № 1. – С. 54–61. 7. *Голубев В. В.* Лекції по теорії крила. – М., Л.: Гостехиздат, 1949. – 480 с

*Институт прикладных проблем механики
и математики НАН Украины, г. Львов*

Поступила 10.12.2007

УДК 539.3

В. С. КИРИЛЮК, канд. физ.-мат. наук

О ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ ЖЕСТКОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИСКА В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Широкое использование пьезокерамических материалов в различных отраслях современной техники вызывает необходимость исследования распределения силовых и электрических полей в телах из этих материалов. Этому вопросу посвящено большое количество работ, например, [1–8] и др. Но в связи с наличием серьезных математических трудностей пространственные задачи электроупругости исследованы недостаточно. Аналогичные задачи для изотропных и трансверсально-изотропных тел (частные случаи исследованной проблемы) рассмотрены в [9, 10]. В настоящей работе решена задача о перемещении жесткого тонкого эллиптического диска вдоль оси поляризации пьезокерамического тела при действии приложенной к диску силы. При этом предполагается, что эллиптический диск расположен в плоскости изотропии трансверсально-изотропного электроупругого материала. Это позволило изучить распределение контактного давления под диском, установить взаимосвязь его перемещения со значением приложенной силы.

Постановка задачи. Рассмотрим электроупругое трансверсально-изотропное пространство, содержащее тонкое жесткое эллиптическое включение, занимающее область Ω в плоскости $z = 0$. Под действием силы P включение перемещается на w_0 вдоль оси z . Механические граничные условия в плоскости $z = 0$ принимают вид

$$u_z = w_0, (x, y) \in \Omega, \quad \sigma_{zz} = 0, (x, y) \notin \Omega, \quad u_x = u_y = 0, \quad (1)$$

где $\Omega: x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$.

Условия (1) необходимо дополнить электрическими граничными условиями. Согласно [1, 2] рассмотрим два возможных варианта граничных условий. При отсутствии электродного покрытия под диском дополнительные граничные условия можно записать в виде

$$D_z(x, y) = 0 \text{ при } z = 0, \quad (2)$$

а в случае электродного покрытия имеем

$$\Psi(x, y) = 0 \quad (x, y) \in \Omega, \quad D_z(x, y) = 0 \quad (x, y) \in R^2 \setminus \Omega, \quad (3)$$

где Ψ – электрический потенциал; D_z – нормальная компонента вектора электрических перемещений (индукции).

Основные соотношения. Для трансверсально-изотропного электроупругого тела с осью транстропии, направленной вдоль оси Oz , полная система уравнений состоит из уравнений равновесия, уравнений вынужденной электростатики, уравнений состояния и соотношений Коши [1, 2]

$$\sigma_{ij,j} = 0; \quad (4)$$

$$D_{i,i} = 0; E_i = -\Psi_{,i}; \quad (5)$$

$$\sigma_{xx} = c_{11}^E \varepsilon_x + c_{12}^E \varepsilon_y + c_{13}^E \varepsilon_z - e_{31} E_z,$$

$$\sigma_{yy} = c_{12}^E \varepsilon_x + c_{11}^E \varepsilon_y + c_{13}^E \varepsilon_z - e_{31} E_z,$$

$$\sigma_{zz} = c_{13}^E (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + c_{33}^E \varepsilon_z - e_{33} E_z,$$

$$\sigma_{yz} = 2c_{44}^E \varepsilon_{yz} - e_{15} E_y,$$

$$\sigma_{xz} = 2c_{44}^E \varepsilon_{xz} - e_{15} E_x, \quad \sigma_{xy} = (c_{11}^E - c_{12}^E) \varepsilon_{xy},$$

$$D_y = \varepsilon_{11}^S E_y + 2e_{15} \varepsilon_{yz}, \quad D_z = \varepsilon_{33}^S E_z + e_{31} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + e_{33} \varepsilon_z; \quad (6)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}),$$

где $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$ – независимые модули упругости (измеряемые при постоянном электрическом поле); e_{31}, e_{15}, e_{33} – пьезомодули; $\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$ – диэлектрические проницаемости, измеренные при постоянной деформации.

Метод решения. После подстановки соотношений состояния (6) в уравнения (4), (5) получаем связанную систему уравнений относительно перемещений u_x, u_y, u_z и электрического потенциала Ψ . Для решения этой системы воспользуемся представлением решения, согласно которому компоненты перемещений и электрический потенциал можно записать в виде [2]

$$\begin{aligned} u_x &= \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,x} + \Phi_{4,y}, & u_y &= \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,y} - \Phi_{4,x}, \\ u_z &= \sum_{j=1}^3 k_j \Phi_{j,z}; & \Psi &= \sum_{j=1}^3 l_j \Phi_{j,z}, \end{aligned} \quad (7)$$

где k_j, l_j – некоторые постоянные, которые подлежат определению. После подстановки перемещений и потенциала в уравнения (6) легко увидеть, что эти уравнения удовлетворяются, если функции Φ_j удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + \nu_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j = \overline{1, 4}), \quad (8)$$

где $\nu_4 = \left(2c_{44}^E\right) / \left(c_{11}^E - c_{12}^E\right)$. Остальные значения ν_i ($i = 1, 2, 3$) являются корнями алгебраического уравнения третьего порядка

$$\begin{aligned} & \nu^3 (A_1 B_2 - C_1 D_2) + \nu^2 (A_1 B_3 + A_2 B_2 - C_1 D_3 - C_2 D_2) + \\ & + \nu (A_2 B_3 + A_3 B_2 - C_2 D_3 - C_3 D_2) + A_3 B_3 - C_3 D_3 = 0; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= c_{11}^E e_{15}, \quad A_2 = (c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{31} + e_{15}) - c_{11}^E e_{33} - c_{44}^E e_{15}, \\ A_3 &= c_{44}^E e_{33}, \quad B_2 = -[\varepsilon_{11}^S (c_{13}^E + c_{44}^E) + e_{15}(e_{31} + e_{15})], \\ B_3 &= \varepsilon_{33}^S (c_{13}^E + c_{44}^E) + e_{33}(e_{31} + e_{15}), \quad C_1 = -c_{11}^E \varepsilon_{11}^S, \\ C_2 &= (e_{31} + e_{15})^2 + c_{11}^E \varepsilon_{33}^S + c_{44}^E \varepsilon_{11}^S, \quad C_3 = -c_{44}^E \varepsilon_{33}^S, \\ D_2 &= e_{15}(c_{13}^E + c_{44}^E) - c_{44}^E (e_{31} + e_{15}), \\ D_3 &= c_{33}^E (e_{31} + e_{15}) - e_{33}(c_{13}^E + c_{44}^E). \end{aligned} \quad (10)$$

Постоянные k_j, l_j ($j = 1, 2, 3$) в формулах (7) связаны с корнями уравнения третьего порядка ν_j соотношениями

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{e_{33} k_j - \varepsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = \nu_j \quad (j = \overline{1, 3}), \quad (11)$$

в которых

$$a_j = c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j; \quad d_j = e_{15} (1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j \quad (j = \overline{1, 3}); \quad (12)$$

$$\begin{aligned} k_j &= \frac{[(\nu_j c_{11}^E - c_{44}^E)(e_{15} \nu_j - e_{33}) + \nu_j (c_{44}^E + c_{13}^E)(e_{31} + e_{15})]}{[(c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{15} \nu_j - e_{33}) - (c_{44}^E \nu_j - c_{33}^E)(e_{31} + e_{15})]}, \\ l_j &= \frac{[(\nu_j c_{11}^E - c_{44}^E)(\nu_j c_{44}^E - c_{33}^E) + \nu_j (c_{44}^E + c_{13}^E)^2]}{[(\nu_j c_{44}^E - c_{33}^E)(e_{31} + e_{15}) - (c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{15} \nu_j - e_{33})]} \quad (j = \overline{1, 3}). \end{aligned} \quad (13)$$

После введения обозначений $z_j = \nu_j^{-1/2} z$ легко увидеть, что функции Φ_j являются гармоническими в системах координат (x, y, z_j) при $j = \overline{1, 4}$.

Построение решения задачи. Воспользуемся представлением (7), по-

ложив $\Phi_4 = 0$; $\Phi_j(x, y, z_j) = \alpha_j^* f(x, y, z) (j = \overline{1, 3})$, где α_j^* – неизвестные постоянные; $f(x, y, z)$ – гармоническая функция вида

$$f(x, y, z) = \int_{\xi}^{\infty} [z - z(s)] \frac{ds}{\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)} s}, \quad (14)$$

где

$$z(s) = \sqrt{s} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s}}, \quad \partial f / \partial z = \int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)} s},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)} s} = \frac{2K(e_0)}{a}, \quad e_0 = 1 - b^2 / a^2.$$

Из граничных условий (1), (2) получаем

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j^* = 0; \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* [e_{15}(1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j] = 0,$$

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j^* \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} \frac{2K(e_0)}{a} = w_0. \quad (15)$$

Для случая электродного покрытия под диском вместо второго из уравнений системы (13) надо использовать уравнение

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j^* l_j / \sqrt{v_j} = 0.$$

Введем новые неизвестные $\alpha_j = \alpha_j^* 2K(e_0) / (a w_0)$. Тогда из уравнений (15) для нахождения $\alpha_j (j = \overline{1, 3})$ приходим к системе

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j = 0; \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_j [e_{15}(1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j] = 0; \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} = 1. \quad (16)$$

В результате дальнейших вычислений получаем выражения напряжений под эллиптическим диском в виде

$$\sigma_{zz}(x, y, 0^{\pm}) = \pm \sum_{j=1}^3 \alpha_j [c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j] \times$$

$$\times \left\{ -\frac{w_0}{b K(e_0)} \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right]^{-1/2} \right\}. \quad (17)$$

Связь между перемещением под эллиптическим диском и приложенной к нему силой вдавливания имеет вид

$$P = \iint_{\Omega} [(\sigma_{zz})_{z=0^-} - (\sigma_{zz})_{z=0^+}] dx dy = \sum_{j=1}^3 \alpha_j [c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j] 2\pi a \left[\frac{w_0}{K(e_0)} \right]. \quad (18)$$

Анализ результатов численных исследований. Численные исследования были проведены для пьезокерамических материалов PZT-4; PХЕ-5; ЦТС-19 [1]. Полученные результаты приведены в таблице. В ней даны перемещения под жестким диском для электроупругого и упругого (с теми же упругими свойствами, что и пьезоэлектрический) материалов. Первая и вторая строки, помеченные 1 и 2, соответствуют случаям неэлектродированной и электродированной поверхностей под жестким диском.

Осадка	Материал		
	PZT-4	PХЕ-5	ЦТС-19
$w_0^{Piezo1} / w_0^{Elast}$	0,59920	0,64035	0,66397
$w_0^{Piezo2} / w_0^{Elast}$	0,83206	0,852170	0,85873

Из данных таблицы следует, что связанность силового и электрического полей существенно влияет на значения перемещений плоского эллиптического диска в пьезоэлектрическом пространстве по сравнению с упругим материалом. Связанность полей для неэлектродированной поверхности под диском в материалах PZT-4, PХЕ-5, ЦТС-19 уменьшает перемещения диска примерно на 40%; 36%; 34% соответственно. В то же время, для тех же материалов и электродированной поверхности уменьшение перемещений составляет примерно 17%, 15% и 14% по сравнению с перемещениями в упругом материале.

Таким образом, связанность силовых и электрических полей в пьезоэлектрическом пространстве при действии силы значительно влияет на перемещения диска.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу про переміщення жорсткого еліптичного диску у п'єзоелектричному просторі вздовж осі поляризації матеріалу під дією прикладеної сили. Точний розв'язок задачі отримано з допомогою загального представлення розв'язків тривимірних рівнянь електропружності для трансверсально-ізотропних тіл. У замкнутому вигляді отримано вирази напружень під жорстким диском, а також зв'язок між величиною прикладеної сили і значенням переміщення диску. Проведеної

числові дослідження переміщень еліптичного диску для різних п'єзокерамічних матеріалів і дано оцінку впливу зв'язаності силового та електричного полів на їх значення.

SUMMARY. It was considered the problem on displacement of a hard elliptical disk in a piezoelectric space along the polarization axe of a material under action of applied force. Exact solution of the problem was obtained by means of general presentation of solutions of three-dimensional equations of electroelasticity for transversally-isotropic bodies. Stress expressions under hard disk and relation between the applied force value and disk displacement magnitude were obtained in closed form. The solution of the problem was obtained by means of a general solutions representation of three-dimensional equations of electroelasticity for transversally-isotropic bodies. Numerical researches of elliptical disk displacements for different piezoceramic materials were carried out, and influence evaluation of a connectedness of force and electrical fields on its magnitudes was done.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость.– К.: Наук. думка, 1989. 279 с.– (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 6 т. Т. 1). 2. Podil'chuk Yu.N. Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelastostatic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems // Int. Appl. Mech. – 2003. – Vol. 39, № 2. – P. 132–170. 3. Kaloev S.A. Determining the intensity factors for stresses, electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media // Int. Appl. Mech. – 2007. – Vol. 43, № 6. – P. 631–637. 4. Kirilyuk V.S. Stress state of a piezoelectric body with a plane crack under antisymmetric loads // Int. Appl. Mech. – 2006. – Vol. 42, № 2. – P. 152–161. 5. Kirilyuk V.S., Levchuk O.I. Electrostatic state of a piezoceramic body with a paraboloidal cavity // Int. Appl. Mech. – 2006. – Vol. 42, № 9. – P. 1011–1020. 6. Dai L., Guo W., Wang X. Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids // Int. J. Sol. Struct. – 2006. – Vol. 43, № 6. – P. 1818–1831. 7. Chen W.Q., Lim C.W. 3D point force solution for a permeable penny-shaped crack embedded in an infinite transversely isotropic piezoelectric medium // Int. J. Fract. – 2005. – Vol. 131, № 3. – P. 231–246. 8. Chiang C. R., Weng G.J. The nature of stress and electric-displacement concentrations around a strongly oblate cavity in a transversely isotropic piezoelectric material // Int. J. Fract. – 2005. – Vol. 134, № 3–4. – P. 319–337. 9. Kassir M.K., Sih G.C., Some three-dimensional inclusion problems in elasticity // Int. J. Sol. Struct. – 1968. – Vol. 4, Is. 2. – P. 225–241. 10. Rahman M., Some problems of a rigid elliptical disk-inclusion bonded inside a transversely isotropic space // J. Appl. Mech. – 1999. – Vol. 66. – P. 612–620.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 25.11.2007

УДК 539.3

А. А. БОБЫЛЕВ, канд. физ.-мат. наук, Е. Л. СУТУРИН

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА УСТАНОВЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ СТАТИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ

Метод установления применяется при решении широкого круга стационарных задач математической физики [1]. Суть метода состоит в том, что вместо исходной стационарной задачи рассматривается эволюционная задача с тем же пространственным оператором и произвольно выбранными начальными условиями. Стационарный (не зависящий от времени) предел, к которому стремиться решение эволюционной задачи и будет решением исходной стационарной задачи. Метод установления используется также для нахождения Т-периодических решений динамических задач. В работах [2–5] он применялся для исследования вынужденных колебаний вязкоупругих тел с односторонними связями. Этот метод позволяет сводить решение задачи о вынужденных колебаниях к решению задачи Коши, начальные условия для которой могут быть выбраны произвольно. Вследствие диссипации энергии влияние начальных условий на вынужденные колебания вязкоупругой системы постепенно уменьшается и с течением времени система переходит к установившемуся движению.

Разработанные в [2–5] вычислительные алгоритмы могут быть использованы и для решения статических контактных задач, если после некоторого переходного периода внешние воздействия на рассматриваемую систему вязкоупругих тел не изменяются во времени. В данной работе исследуется эффективность метода установления при решении статических контактных задач с односторонними связями.

Постановка задачи. Пусть однородное изотропное упругое тело занимает конечную область $\Omega \in R^3$, ограниченную замкнутой поверхностью Γ с внешней нормалью \vec{n} . Под $u_i(x)$, $\varepsilon_{ij}(x)$, $\sigma_{ij}(x)$ будем понимать компоненты вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений в точке $x \in \Omega$. Будем считать, что деформации малы, начальные напряжения отсутствуют и компоненты тензоров напряжений и деформаций связаны уравнениями закона Гука

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (1)$$

где c_{ijkl} – компоненты тензора длительных модулей упругости. На тело Ω действуют объемные силы интенсивностью $\vec{F}(x)$, поверхность Γ состоит из трех непересекающихся частей $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q \cup \Gamma_p$. На части Γ_u заданы

перемещения $\vec{g}(x, t)$, а на части поверхности Γ_q – усилия $\vec{q}(x, t)$. Совокупность предельно возможных зон контакта тела Ω с жестким штампом обозначим Γ_p . Форма и положение штампа описывается функцией $\Phi(x)$, значение которой в точке $x \in \Gamma_p$ равно расстоянию от этой точки до поверхности штампа, измеренному вдоль направления внешней нормали $\vec{n}(x)$ к поверхности тела Ω . Расстояние $\Phi(x)$ отсчитывается по отношению к недеформированному состоянию тела. Фактическая площадка контакта упругого тела Ω и штампа считается заранее неизвестной.

Контактное взаимодействие тела Ω и штампа описывается линеаризованными условиями одностороннего контакта [6]

$$\begin{aligned} u_n(x) \leq \Phi(x), \quad \sigma_n(x) \leq 0, \quad \sigma_t(x) = 0, \\ \sigma_n(x)[u_n(x) - \Phi(x)] = 0, \quad x \in \Gamma_p, \end{aligned} \quad (2)$$

где $u_n = u_i n_i$, $\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j$, $\sigma_{ti} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i$.

Таким образом, нужно определить поля перемещений, деформаций и напряжений, удовлетворяющие в области Ω уравнениям равновесия, соотношениям Коши, соотношениям закона Гука (1) и граничным условиям.

Метод решения. В соответствии с основной идеей метода установления вместо сформулированной выше статической контактной задачи о взаимодействии упругого тела с жестким штампом рассматривается динамическая контактная задача о взаимодействии вязкоупругого тела с жестким штампом. Начальные условия динамической задачи, а также законы изменения внешних воздействий до их конечных значений, соответствующих значениям статической задачи, могут быть выбраны произвольно. Учет вязкоупругих свойств тела обусловлен необходимостью демпфирования колебаний, вызванных изменением внешних воздействий в переходном периоде. Рассмотрены два варианта физических соотношений для вязкоупругих тел [7]: модель Фойхта

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} + b_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}, \quad (3)$$

и модель Кельвина

$$\sigma_{ij} + \gamma \dot{\sigma}_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \gamma d_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}, \quad (4)$$

где b_{ijkl} – компоненты тензора вязкоупругих постоянных; d_{ijkl} – компоненты тензора мгновенных модулей упругости; γ – время релаксации.

Рассмотрена также условно-вязкая модель диссипации энергии в линейно-деформируемом теле, по которой искусственно вводятся силы внутреннего сопротивления \vec{F}_c , пропорциональные скорости точек тела $\dot{\vec{u}}$

$$\vec{F}_c = \eta \dot{\vec{u}}. \quad (5)$$

где η – коэффициент вязкого сопротивления.

Для решения динамических контактных задач с односторонними связями был использован вариационный подход. Полудискретизация полученных вариационных неравенств по пространственным координатам производилась методом конечных элементов. Использовались треугольные и четырехугольные конечные элементы первого и второго порядков. Численное интегрирование по времени производилось методом расщепления, в соответствии с которым решение задачи на каждом временном шаге разбивается на два этапа: на первом из них с использованием явных двух- или трехслойных разностных схем вычисляются промежуточные значения искомых параметров, не учитывая контактного взаимодействия тела со штампом, а на втором этапе учитываются односторонние связи путем проектирования промежуточного решения на допустимое множество, которому должно принадлежать решение задачи.

Анализ результатов численных исследований. Вычислительные алгоритмы реализованы в виде модулей пакета прикладных программ для решения контактных задач с односторонними связями. С использованием разработанного программного обеспечения вычислительным экспериментом исследована эффективность метода установления для решения статических контактных задач с односторонними связями. Оценка точности численных результатов, полученных методом установления, проводилась путем сравнения с результатами численного решения статических контактных задач методом конечных элементов с использованием вычислительного алгоритма, разработанного в [8] на основе вариационных формулировок статических контактных задач.

При проведении вычислительных экспериментов в качестве модельной рассматривалась статическая плоская задача для упругого тела, занимающего область

$$\Omega = \left\{ x = (x_1, x_2) \in R^2 : 0 \leq x_1 \leq a, -b \leq x_2 \leq 0 \right\}$$

и контактирующего с жестким штампом по грани $x_2 = 0$. Функция $\Phi(x)$, описывающая форму и положение штампа, выбиралась в виде

$$\Phi(x) = A + B(x_1 / a)^2,$$

где A – осадка штампа; B – коэффициент, определяющий кривизну штампа. На грани $x_2 = -b$ тела Ω задавались граничные условия $u_2(x) = 0$. Остальная часть поверхности тела принималась свободной от внешних нагрузок. Горизонтальные смещения тела исключались введением дополнительного условия $u_1(x) = 0$ на перемещения точек в сечении $x_1 = 0$. Значения физических и геометрических параметров при проведении расчетов принимались такими: длительный модуль Юнга $E = 10^5$ МПа, длительный коэффициент Пуассона $\mu = 0,33$, $a = b = 1$ м.

Рассмотрено два варианта нагружения вязкоупругого тела. В первом случае штамп мгновенно принимал конечное положение $\Phi(x)$, соответствующее статической задаче, во втором – осадка штампа $A^*(t)$ изменялась по закону

$$A^*(t) = A((H(t) - H(t-T))t/T - H(t-T)),$$

где T – время переходного процесса; $H(\cdot)$ – функция Хевисайда. Компоненты тензора вязкоупругих постоянных и компоненты тензора мгновенных модулей упругости принимались пропорциональными компонентам тензора длительных модулей упругости:

$$b_{ijkl} = \eta_1 c_{ijkl}, \quad d_{ijkl} = \eta_2 c_{ijkl}.$$

Основной вопрос, возникающий при использовании рассматриваемого варианта метода установления, состоит в выборе параметров вязкоупругих тел таким образом, чтобы минимизировать влияние реологических свойств на конечное напряженно-деформированное состояние, обеспечив при этом достаточно высокую скорость сходимости шагового алгоритма метода.

Анализ результатов многочисленных вычислительных экспериментов позволяет сделать следующие выводы.

При решении статических контактных задач методом установления с использованием модели вязкоупругого тела Фойхта параметр η_1 следует выбирать в диапазоне $10^{-4} \div 2 \cdot 10^{-2}$. В этом случае относительное расхождение перемещений, вычисленных методом установления и с помощью вычислительного алгоритма решения статических контактных задач [8], при использовании конечно-элементной сетки из 10000 треугольных элементов первого порядка не превышает 10^{-5} . В качестве примера на рис. 1 приведено распределение относительного расхождения перемещений в сечении $x_2 = -b/2$. Кривые 1–4 соответствуют значению параметра η_1 , равных 0,02; 0,005; 0,001; 0,0001.

При использовании модели вязкоупругого тела Кельвина время релаксации γ следует выбирать в диапазоне $10^{-2} \div 10^{-1}$, а параметр η_2 – в диапазоне $0,85 \div 0,95$. На рис. 2 приведено распределение относительного расхождения пере-

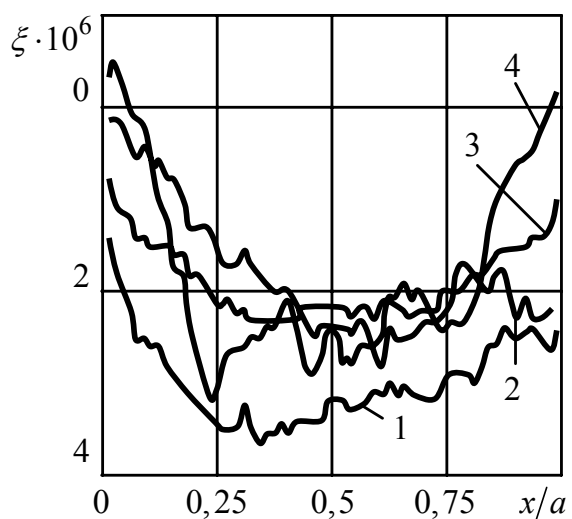


Рис. 1

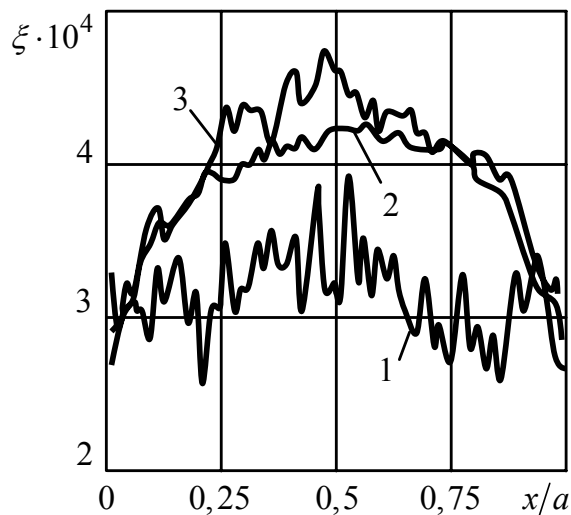


Рис. 2

мещений в сечении $x_2 = -b/2$ для значения переметра $\gamma = 10^{-2}$. Кривые 1–3 соответствуют значениям параметра η_2 , равным 0,95; 0,90; 0,85. Относительное расхождение перемещений, вычисленных методом установления и с помощью вычислительного алгоритма решения статических контактных задач [8], в этом случае при использовании указанной выше конечно-элементной сетки не превышает 10^{-3} .

При решении статических контактных задач методом установления с использованием условно-вязкой модели диссипации энергии значения коэффициента вязкого сопротивления η следует выбирать также, как и при расчете вынужденных колебаний [4].

Таким образом, на основе вычислительных экспериментов установлено, что разработанный вариант метода установления может быть использован для решения статических контактных задач с односторонними связями. Численные результаты, полученные этим методом практически совпадают с результатами решения с использованием вычислительного алгоритма, разработанного на основе вариационных формулировок статических контактных задач [8], но в отличие от последних для получения необходимых значений требуется гораздо больше затрат машинного времени.

РЕЗЮМЕ. Досліджено обчислювальну ефективність методу встановлення до розв'язання статичних контактних задач з односторонніми в'язями на основі алгоритмів чисельного розв'язання динамічних контактних задач для в'язкопружних тіл.

SUMMARY. Computational efficiency of the stabilization method for solving the static contact problems with unilateral constraints was investigated. The stabilization method uses the algorithms for solving the dynamic contact problems for viscoelastic bodies.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. – М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 848 с. 2. *Сутурин Е. Л.* Вынужденные колебания вязкоупругого тела Фойхта, односторонне контактирующего с жестким штампом // Диф. рівняння та їх застосування. – Днепропетровск: Вид-во ДНУ, 2003. – С. 114–120. 3. *Бобылев А. А., Сутурин Е. Л.* Применение метода счета на установление к расчету вынужденных колебаний вязкоупругого тела Кельвина при одностороннем контакте с жестким штампом // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – Дніпропетровськ: Вид-во ДНУ, 2003. – Вип. 5. – С. 13–22. 4. *Бобылев А. А., Сутурин Е. Л.* Применение метода счета на установление для исследования вынужденных колебаний тела при одностороннем контакте с жестким штампом // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2002. – Вип. 1. – С. 122–126. 5. *Bobylov A., Suturin E.* Application of the stabilization method for

analysis of forced vibrations of viscoelastic solids under unilateral constrains // Proceedings 8th Conf. on dynamical systems: theory and applications, Lodz (Poland), December 12–15, 2005. – Lodz, 2005. – Vol. 1. – P. 269–276. 6. *Механика* контактных взаимодействий. – М.: Физматлит, 2001. – 672 с. 7. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. – М.: Стройиздат, 1968. – 418 с. 8. *Бобылев А. А.* Об одном варианте численного решения контактных задач теории упругости // Решение прикладных задач математической физики и дискретной математики. – Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1987. – С. 23–29.

Днепропетровский национальный университет

Поступила 08.11.2007

УДК 539.3

А. Р. ГАЧКЕВИЧ, д-р физ.-мат. наук, *Р. А. ИВАСЬКО*, канд. физ.-мат. наук,
М. Т. СОЛОДЯК, канд. физ.-мат. наук, *С. ШИМУРА*, д-р физ.-мат. наук

МЕТОДИКА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ФЕРРИТОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ УСТРОЙСТВ ПРИ ОБЕСПЕЧЕНИИ ИХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СВОЙСТВ

В инженерной практике широко используются электротехнические и электронные устройства с ферритовыми элементами различного функционального применения, которые эксплуатируются во внешних электромагнитных полях (ЭМП), в том числе и квазиустановившихся (амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей которых мало изменяются за период электромагнитных колебаний). Воздействие ЭМП на ферритовое тело вызывает протекание в нем ряда взаимосвязанных процессов различной физической природы (тепловых, механических и электромагнитных), существенно влияющих на прочностные и функциональные параметры соответствующих ферритовых элементов. Это обусловлено и тем, что ферриты (с учетом способа их изготовления и механических свойств) относятся к керамическим материалам, и в изделиях даже небольшие напряжения могут вызывать существенные изменения их электромагнитных функциональных параметров. Поэтому важным является изучение физико-механических процессов в деформированных твердых ферритовых телах при воздействии ЭМП с целью прогнозирования функциональных свойств ферритовых элементов устройств различного технического применения с учетом механических явлений.

В литературе широко известны исследования механического поведения как ферромагнитных, так и диэлектрических тел при комплексных нагрузках (механических, электромагнитных, тепловых), резонансных колебаниях и диссипативном разогреве пьезоэлектрических и пьезомагнитных керамических тел (с применением при описании ЭМП формализмов приближений вынужденной электро- или магнитостатики). Имеющиеся в литературе исследования взаимодействия ЭМП с ферритовой средой (проявляющей одновременную способность к намагничиванию и поляризации) касаются в основном оптимизации (с использованием результатов экспериментальных исследований) режимов эксплуатации ферритовых изделий при воздействии ЭМП и прогнозировании выходных характеристик отдельных электротехнических и электронных устройств. Они направлены на минимизацию в материале гистерезисных потерь. Известны исследования, связанные с изготовлением композитов индукционным способом с использованием клеевых смесей с ферритовыми наполнителями [1]. Однако они касаются только изучения процесса нагрева ферритовых материалов с помощью ЭМП. Взаимосвязь механических, тепловых и электромагнитных процессов в теле

из ферритового материала при воздействии ЭМП, а также его влияние на параметры этих процессов при различных амплитудно-частотных характеристиках внешних ЭМП в литературе изучено недостаточно. Не учтены способности ферритовой среды для некоторых участков частотного спектра одновременно как к намагничиванию, так и поляризации.

Данная работа посвящена разработке методики количественного описания и исследования обусловленного воздействием квазиустановившегося ЭМП напряженного состояния ферритовых тел с учетом связи процессов электропроводности, теплопроводности и деформации, а также особенностей электромагнитных свойств материала в зависимости от частоты ЭМП для рационального проектирования и разработки электромагнитных устройств с ферритовыми элементами, режимов их эксплуатации для обеспечения функциональных свойств как этих элементов, так и устройств в целом.

Постановка и схема решения задачи. Рассмотрим внешнее электромагнитное воздействие (при характерных параметрах $H_m < 10^4$ А/м, $\omega_m < 10^{10}$ с⁻¹, где H_m – максимальное значение напряженности магнитного поля в ферритовом теле, ω_m – максимальная несущая круговая частота ЭМП), при котором можно принять, что перемещения, деформации и их скорости в исследуемых хрупких телах являются настолько малыми, что справедливы допущения линейной теории упругости, а влиянием движения на характеристики ЭМП можно пренебречь. Класс исследуемых ферритов ограничим материалами, для которых несущественны электромеханические и термоэлектрические эффекты. Будем считать, что функциональные свойства изделий из ферритовых материалов сохраняются при максимальных температурах ниже их температуры Кюри и напряжениях меньше допустимых, которые для таких материалов являются соответственно порядка $T_C = 110^\circ\text{C}$, $\sigma_s = 19$ МПа при растяжении и $\sigma_c = 235$ МПа при сжатии. При электромагнитном воздействии, когда сохраняются функциональные свойства изделий, электромагнитные, теплофизические и физико-механические характеристики материала можно считать независимыми от температуры (в частности, усредненными за промежуток нагрева). Будем считать, что среда является изотропной, векторы намагничивания и поляризации параллельны соответственно векторам напряженностей магнитного и электрического полей.

При описанных выше условиях будем принимать, что материальные уравнения, определяющие связь векторов напряженностей \vec{H}_{**} , \vec{E}_{**} и смещений \vec{B}_{**} , \vec{D}_{**} магнитного и электрического полей в ферритовых телах имеют вид

$$\vec{B}_{**} = B_{**}(H_{**}) \vec{e}_H \equiv \mu(H_{**}) \vec{H}_{**}, \quad \vec{D}_{**} = D_{**}(E_{**}) \vec{e}_E \equiv \varepsilon(E_{**}) \vec{E}_{**}, \quad (1)$$

где $\mu(H_{**})$, $\varepsilon(E_{**})$ – абсолютные магнитная и диэлектрическая прони-

цаемости; $\vec{e}_H = \vec{H}_{**}/H_{**}$, $\vec{e}_E = \vec{E}_{**}/E_{**}$ – орты в направлениях векторов \vec{H}_{**} и \vec{E}_{**} ; H_{**} и B_{**} – проекции векторов \vec{H}_{**} и \vec{B}_{**} на положительное направление вектора \vec{H}_{**} , а E_{**} и D_{**} – проекции векторов \vec{E}_{**} и \vec{D}_{**} на положительное направление вектора \vec{E}_{**} . При циклических перемагничивании и переполяризации зависимости (1) описывают динамические петли гистерезиса, для которых характерно насыщение. Формы петель для конкретных материалов зависят от частоты и амплитуды внешнего поля и описываются сложными зависимостями [2].

При сформулированных условиях, когда экспериментально определяются характеристики ферритовых материалов и получаются материальные уравнения электродинамики (1) на основании известной общей теории взаимодействия ЭМП и материального континуума, влияние квазиустановившегося ЭМП на процессы теплопроводности и деформирования в ферритовом теле будем учитывать через обусловленные этим полем джоулевые и гистерезисные (связанные с перемагничиванием и переполяризацией) тепловыделения и пондеромоторные силы. В таком приближении при характеристиках материала, независимых от температуры, исходные соотношения для количественного описания параметров тепловых, механических и электромагнитных процессов в ферритовых телах, обусловленных воздействием квазиустановившегося ЭМП, будем формулировать в два этапа. На первом этапе на основании уравнений Максвелла (в приближении неподвижных электропроводных сред, способных к намагничиванию и поляризации) сформулируем задачу для определения параметров ЭМП и выражений тепловыделений и пондеромоторных сил (при их статистическом описании) как функций электромагнитных параметров. На втором этапе, базируясь на соотношениях динамической задачи термоупругости в напряжениях, найдем зависимости, описывающие тепловые и механические параметры при заданных начальных и граничных условиях на температуру и компоненты тензора напряжений, в которых источниками тепла и объемными силами являются тепловыделения и пондеромоторные силы, найденные на первом этапе. При этом нужно учитывать, что задачу первого этапа для ферритовых материалов (которые проявляют способность к одновременному намагничиванию и поляризации в определенных диапазонах частотного спектра рассматриваемых ЭМП) невозможно сформулировать относительно соответствующих напряженностей электрического или магнитного полей (что обуславливает существенные математические трудности при определении параметров ЭМП по сравнению с неферромагнитными электропроводными материалами).

Методика решения задачи. Рассмотрим важный для инженерных применений класс нестрикционных поликристаллических изотропных ферритовых материалов при воздействии слабых квазиустановившихся ЭМП высокой несущей частоты ($H_m \leq 10^2$ А/м, $\omega > 10^5$ с⁻¹). Для этого случая предлагается приближенная методика исследования физико-механических по-

лей, обусловленных таким электромагнитным воздействием. Она базируется на известных из литературы определенных экспериментально характеристиках конкретных ферритовых материалов (комплексных магнитных и диэлектрических проницаемостях и соответствующих тангенсах углов потерь) с учетом их зависимости от частоты. Это дает возможность ввести формализм приближенных комплексных представлений для параметров ЭМП с дальнейшим сведением исходной задачи электродинамики для определения этих параметров к задаче на комплексные амплитуды напряженностей магнитного или электрического полей (в приближении основных гармоник этих напряженностей).

Из вышеизложенного следует, что зависимости между индукциями и напряженностями (1) при гармонических напряженностях магнитного и электрического полей являются эллиптическими. В этом случае в электротехническом подходе используют известные экспериментально измеренные комплексные проницаемости (рассматривается первая гармоника)

$$\mu_* = \mu' - i\mu'', \quad \varepsilon_* = \varepsilon' - i\varepsilon'' \quad (2)$$

и соответствующие тангенсы углов потерь

$$\operatorname{tg} \delta_m = \mu'' / \mu', \quad \operatorname{tg} \delta_d = \varepsilon'' / \varepsilon'. \quad (3)$$

При этом комплексные проницаемости (тангенсы потерь) существенно зависят от частоты [3].

В научно-технической литературе имеются данные о значениях магнитных и диэлектрических проницаемостей и соответствующих тангенсов углов потерь для различных типов ферритовых материалов, а также их зависимости от частоты. Эллиптичность формы петель гистерезиса в слабых ЭМП высокой частоты дает возможность для таких полей, используя метод комплексных амплитуд (при описании параметров ЭМП в приближении первой гармоники), линеаризировать исходную задачу электродинамики путем введения приближенных комплексных представлений векторов напряженностей электрического и магнитного полей [3] и свести ее к задаче электродинамики относительно соответствующих напряженностей электрического и магнитного полей (при учете способности ферритового материала к одновременно как намагничиванию, так и поляризации).

Для квазиустановившегося ЭМП, амплитуды напряженностей которого описываются медленно изменяющимися функциями времени (вследствие малого изменения амплитуд поля на периоде электромагнитных колебаний), реальные динамические петли гистерезиса для каждого конкретного периода колебаний заменим эквивалентными эллипсами, которые описываются комплексными проницаемостями (2) и соответствующими тангенсами углов гистерезисных потерь (3) (известными экспериментальными характеристиками).

Исходя из закона сохранения энергии ЭМП и статистической модели электромеханического взаимодействия поля и намагничивающейся и поляризующейся среды (при комплексных представлениях векторов напряженностей электрического и магнитного полей), получаем выражения для

удельной мощности тепловыделений и пондеромоторной силы в виде двух составляющих – медленно изменяющейся во времени (совпадающей с объемной плотностью соответствующей величины, усредненной по периоду колебаний ЭМП) и квазипериодической (суммарная мощность которой за период равна нулю).

При найденных тепловыделениях и пондеромоторных силах температуру и напряжения в теле будем определять из системы уравнений динамической термоупругости (сформулированных относительно температуры T и тензора напряжений $\hat{\sigma}$) при краевых условиях, соответствующих заданным условиям нагрева и закрепления тела. Исходя из структуры выражений для тепловыделений и пондеромоторных сил, температуру и тензор напряжений найдем в виде суммы медленно изменяющихся во времени и квазиустановившихся составляющих. При этом первые составляющие определяем в квазистатической постановке, пренебрегая влиянием связанности температурного поля и поля деформации, а вторые – в квазиустановившемся приближении (пренебрегая влиянием начальной стадии процесса).

Анализ результатов числовых исследований. Для выявления закономерностей механического поведения ферритовых тел при воздействии внешних квазиустановившихся ЭМП на основании предложенной методики и с использованием аналитических и числовых методов решения составных задач математической модели определены параметры термонапряженного

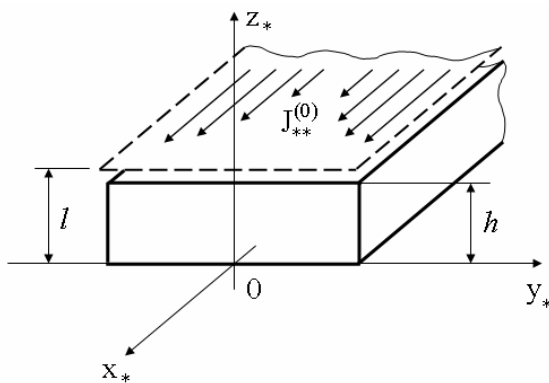


Рис. 1

состояния ферритового упругого слоя (рис. 1). ЭМП создается заданной во внешней среде системой квазиустановившихся электрических токов, равномерно распределенных по тонкому токопроводящему слою (который моделируется плоскостью, параллельной к основанию слоя). Числовые исследования проведены для скрепленного с жестким диэлектрическим полупространством при $z_* = 0$ (перемещения $u_z = 0$) ферритового

слоя (из материала 1000НН [4]). Верхнее основание $z_* = h$ слоя свободно от механических нагрузок. На нем имеет место конвективный теплообмен с внешней средой (температура которой постоянна и равна начальной температуре слоя), а нижнее основание – теплоизолировано. Расчеты проводились при $l = 1 \text{ мм}$ и плотности электрического тока $j_0 = 4 \text{ А/м}$ (типичной для режимов эксплуатации изделий из таких материалов, при которых $H_0 \leq 20 \text{ А/м}$).

На рис. 2 показаны распределения по толщине слоя квазистатических составляющих температуры и максимальных значений компонент напряже-

ний в слое (толщины $h = 0,03 \text{ м}$) в установившемся температурном режиме ($t \geq 9 \text{ ч}$) при частоте ЭМП $\omega = 8,52 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ ($j_0 = 4 \text{ А/м}$).

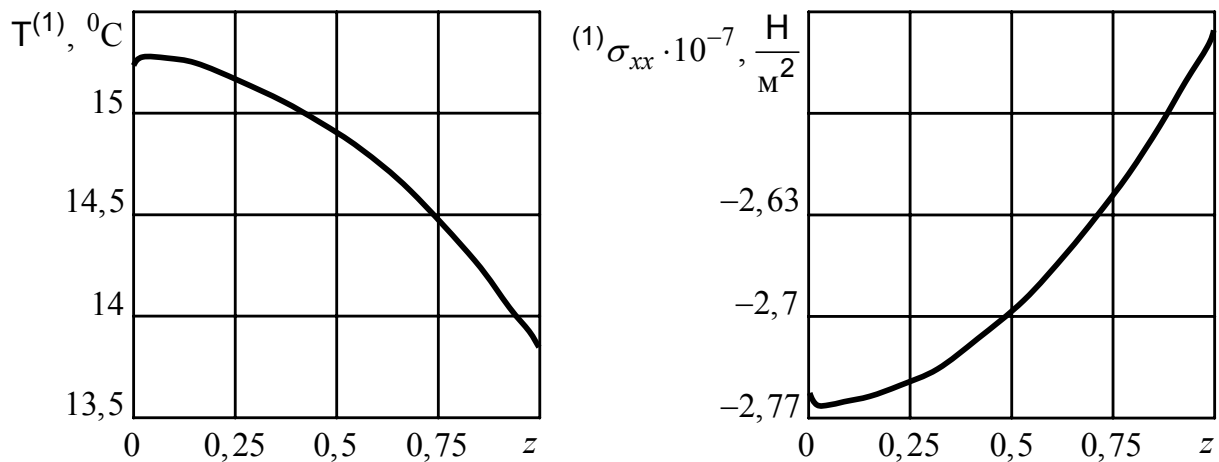


Рис. 2

Выявлено, что квазипериодические во времени составляющие температуры и напряжений при упомянутых выше типичных условиях эксплуатации пренебрежимо малы по сравнению с квазистатическими, значения которых не превышают допустимых. Установлено также, что для ферритовых тел (как и для электропроводных неферромагнитных неполяризующихся, ферромагнитных неполяризующихся и неферромагнитных тел низкой электропроводности (ТНЭ)) существуют такие (резонансные) частоты внешнего ЭМП, при которых существенно возрастают уровни температуры и напряжений, обусловленных квазипериодическими во времени составляющими тепловыделений и ponderomotorных сил (когда их частота 2ω приближается к одной из собственных частот термоупругих колебаний слоя). Найденные при резонансных частотах значения квазипериодических составляющих напряжений могут превышать границы прочности материала и вызвать разрушение изделия.

Предложенная методика прогнозирования термомеханического поведения ферритовых элементов электромагнитных устройств позволяет найти решения новых задач электромагнитотермомеханики ферритовых тел конкретной геометрической конфигурации при воздействии заданных типов квазиустановившихся ЭМП. Полученные с ее помощью результаты могут быть использованы в инженерной практике для оценки зависимости уровней напряжений в изделиях от характеристик эксплуатационных нагрузок с целью прогнозирования параметров электротехнических и электронных устройств с ферритовыми элементами при их проектировании.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано методику прогнозування термомеханічної поведінки, виготовлених з нестрикційних полікристалічних ізотропних феритових матеріалів, елементів електромагнітних пристроїв за дії помірних зовнішніх квазіусталених ЕМП високої несучої частоти. Вона ґрунтується на відомих з літератури (визначених експериментально) характеристиках конкретних феритових матеріалів – комплексних ді-

електричних та магнітних проникностях і відповідних тангенсах кутів втрат – при врахуванні їх залежностей від частоти, а також на формалізмі комплексних амплітуд. З використанням такого підходу досліджено термомеханічну поведінку феритового шару за дії ЕМП, створеного заданою у зовнішньому середовищі системою квазіусталених електричних струмів, рівномірно розподілених по тонкому струмовідному шарі (що моделюється площиною, паралельною до основи шару).

SUMMARY. An approach to capture thermomechanical behavior of ferrite elements of electromagnetic devices subjected to moderate quasi-steady electromagnetic loading is developed. The approach is grounded on the complex amplitude formalism and known experimentally measured frequency dependent characteristics of ferrites, namely, complex dielectric and magnetic permeabilities and correspondent tangent loss angles. Using defined approach, the solution to thermomechanical problem for ferrite layer subjected to external electromagnetic field is obtained. The field is generated by a set of quasi-steady electric currents uniformly distributed over thin conductive layer, the latter being modeled by a plane parallel to layer.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ: 1. *Zhang X.K., Li Y.F., Xiao J.Q. and Wetzel E.D.* Theoretical and experimental analysis of magnetic inductive heating in ferrite materials // *J. Appl. Phys.* – 2003. – Vol. 93(10). – P. 7124–7126. 2. *Gaczkiewicz A., Kasperski Z.* Modele i metody matematyczne w zagadnieniach brzegowych termomechaniki ciał przewodzących. – Opole: OWPO, 1999. – 368 s. 3. *Tsutaoka T.* Frequency dispersion of complex permeability in Mn-Zn and Ni-Zn spinel ferrites and their composite materials // *J. Appl. Phys.* – 2003. – Vol. 93, No. 5. – P. 2789–2796. 4. *Hachkevych O.R., Ivas'ko R.O.* Thermoelastic state of a ferritic layer in a quasistationary electromagnetic field // *Mat. Sci.* – 2005. – Vol. 41, No. 3. – P. 376–387.

*Институт прикладных проблем математики
и механики НАН Украины, г. Львов
Политехника Опольская, Польша*

Поступила 2.12.2007

УДК 539.3

А. Р. ГАЧКЕВИЧ, д-р физ.-мат. наук, *Н. Г. ГАЧКЕВИЧ*, канд. физ.-мат. наук,
Е. М. ИРЗА, канд. физ.-мат. наук, *Б. М. ТРИЦ*, канд. физ.-мат. наук

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ РЕЖИМОВ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОГО НАГРЕВА КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

В процессе термообработки кусочно-однородных тел вращения в них возникают значительные уровни напряжений, которые могут превышать допустимые и приводить к их разрушению. В работе предлагается методика математического моделирования режимов термообработки при оптимизации уровня возникающих напряжений. При описании термомеханического поведения тел используется трехмерная модель термочувствительного кусочно-однородного (в направлении оси вращения) тела. В отличие от имеющихся моделей [1–3], базирующихся на теории оболочек, данная модель позволяет более адекватно описать поведение тела при термообработке.

Постановка задачи. Рассмотрим отнесенное к ортогональной криволинейной системе координат $Ox^1x^2x^3$ кусочно-однородное в направлении оси вращения тело вращения, занимающее область Ω евклидова пространства R^3 и ограниченное непрерывной по Липшицу поверхностью Γ . Тело находится в условиях технологического нестационарного осесимметрического нагрева, который осуществляется внешней средой с температурой $t_c(\tau)$ через часть поверхности Γ_t и тепловым потоком $q(M, \tau)$ через часть поверхности Γ_q , $M \in \Gamma_q$, $\Gamma_t \cup \Gamma_q = \Gamma$, а также распределенными источниками мощности $Q(M, \tau)$, $M \in \Omega$. На части Γ_u поверхности Γ заданы перемещения $\bar{u} = (u_1^0, u_2^0, u_3^0)$, а на части Γ_σ силовое нагружение, которое характеризуется вектором усилий $\bar{p} = (p^1, p^2, p^3)$, $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma$.

Сформулируем задачу в квазистатической постановке в перемещениях. Температурное поле будем описывать уравнением теплопроводности [4]:

$$\rho c \partial t / \partial \tau = \nabla(\lambda \nabla t) + Q \quad (1)$$

при следующих начальном и граничном условиях:

$$t(M, 0) = t_0; \quad \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial n} + \alpha(t - t_c) \right]_{\Gamma_t} = 0, \quad \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial n} + q \right]_{\Gamma_q} = 0. \quad (2)$$

Здесь $\lambda(M, t)$ – коэффициент теплопроводности; $\rho(M, t)$ – плотность потока тепла; $c(M, t)$ – удельная теплоемкость тела; τ – время; α – коэффициент теплоотдачи; n – внешняя нормаль к поверхности.

Связь между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций примем в виде [4]:

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_t\}), \quad (3)$$

в котором $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$, $\{\varepsilon_t\}$ – тензоры напряжений, упругих и термоупругих деформаций; $[D]$ – матрица упругих характеристик, зависящих от температуры и координаты в направлении оси вращения.

Для области Ω должны выполняться уравнения равновесия и граничные условия:

$$\nabla_j \sigma^{ij} + F^i = 0; \quad (4)$$

$$(n_j \sigma^{ij} - p^i) = 0 \text{ на } \Gamma_\sigma, \quad u_i = u_i^0 \text{ на } \Gamma_u \quad (i = \overline{1, 3}). \quad (5)$$

Будем считать, что деформации малы и поэтому они связаны с перемещениями соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i). \quad (6)$$

Зависимости (1) – (6) составляют полную систему соотношений для определения температурного поля, компонент вектора перемещений, компонент тензоров деформаций и напряжений при заданных температуре внешней среды t_c , тепловом потоке q , внешнем силовом нагружении \bar{p} и мощности внутренних источников тепла Q (полная система исходных соотношений прямой задачи при технологическом нагреве).

Рассмотрим задачу оптимизации продолжительности режимов температурного нагружения при заданных ограничениях на температуру тела и возникающие в нем эквивалентные напряжения, т.е. при ограничениях

$$t_1 \leq t(M, \tau) \leq t_2, \quad \max_{\tau, \Omega} |\sigma_{\text{экв}}| \leq \sigma_d(z, t), \quad (7)$$

где $\sigma_d(z, t)$ – допустимый уровень интенсивности напряжений:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}.$$

В качестве функционала оптимизации примем время термообработки:

$$J = \tau^*. \quad (8)$$

Функцией управления $h(\tau)$ может быть температура внешней среды $t_c(\tau)$ (в частности, температура поверхности) либо плотность теплового потока $q(\tau)$. Мощность источников тепла Q будем считать заданной.

На функцию управления и скорость ее изменения могут быть также наложены ограничения вида [2]

$$t_{c1} \leq t_c(\tau) \leq t_{c2}, \quad (9)$$

$$v_1 \leq dt_c(\tau)/d\tau \leq v_2. \quad (10)$$

В данной постановке оптимизация по быстродействию режимов термообработки состоит в минимизации функционала (8) при связях (1)–(6) и ограничениях (7), (9), (10).

Методика решения. Важным в схеме оптимизации является построение решения прямой задачи, которая включает в себя приведенные выше задачи теплопроводности и термоупругости. Поскольку геометрическая конфигурация области, которую занимает тело, может быть сложной, а система рассматриваемых дифференциальных уравнений нелинейной, при решении прямой задачи используем метод взвешенных невязок в сочетании с методом конечных элементов [5]. При этом систему дифференциальных уравнений (1)–(6) пространственно-временной дискретизацией сводим к системе нелинейных алгебраических уравнений вида

$$[K_T]\{T\} = \{F_T\}, \quad [K_{U,T}]\{U\} = \{F_{U,T}\}, \quad (11)$$

в котором $[K_T]$, $[K_{U,T}]$ – соответствующие матрицы жесткости; $\{F_T\}$, $\{F_{U,T}\}$ – векторы нагружения [5]. Для решения нелинейных систем алгебраических уравнений (11) используем метод простой итерации [5].

Решение сформулированной задачи построим на основе принципа поэтапной параметрической оптимизации [6]. В рамках предложенного подхода минимизация функционала (8) сводится к задаче нелинейного программирования по нахождению минимума соответствующей функции $J = J(h_1, \dots, h_n)$, аргументами которой являются значения h_i функции управления h в дискретные моменты времени τ_s . Решение строится при помощи метода прямого поиска на множестве кусочно-линейных функций.

Оптимизация режимов нагрева полого цилиндра. При помощи предложенной методики найдены и исследованы температурные поля и напряжения при однородном нагреве внешней средой за минимальное время свободного от силового нагружения полого цилиндра радиуса $R = 0,25 \text{ м}$ и толщиной $2h = 0,014 \text{ м}$, который состоит из трех неоднородных частей, изготовленных из стекол с физическими характеристиками приведенными на рис. 1–4.

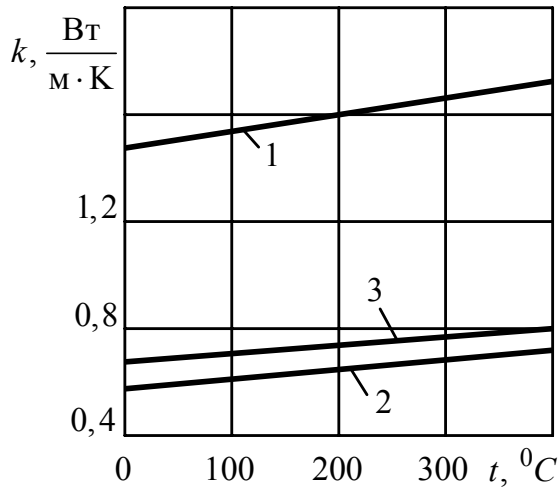


Рис. 1

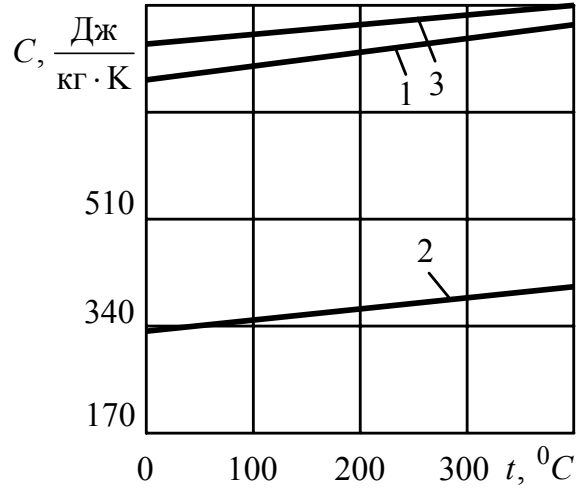


Рис. 2

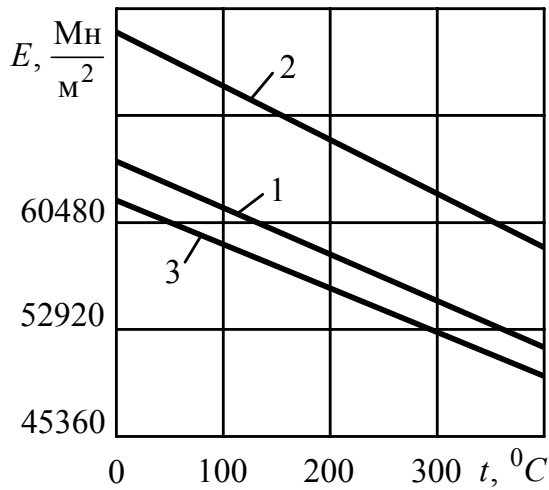


Рис. 3

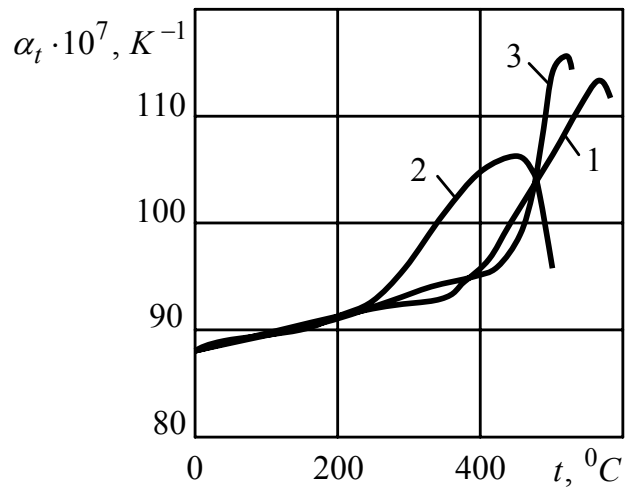


Рис. 4

Плотность и коэффициент Пуассона частей равны соответственно:
 $\rho_1 = 2560 \text{ кг/м}^3$, $\rho_2 = 4080 \text{ кг/м}^3$, $\rho_3 = 2800 \text{ кг/м}^3$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,215$.

Внутренняя поверхность полого цилиндра теплоизолирована, на внешней задана температура $t_c(\tau)$, которая является функцией управления.

Поиск температуры $t_c(\tau)$ осуществлялся на множестве кусочно-линейных функций. На рис. 5 (кривая 1) приведено оптимальное изменение функции управления $t_c(\tau)$. Изменения во времени максимальных интен-

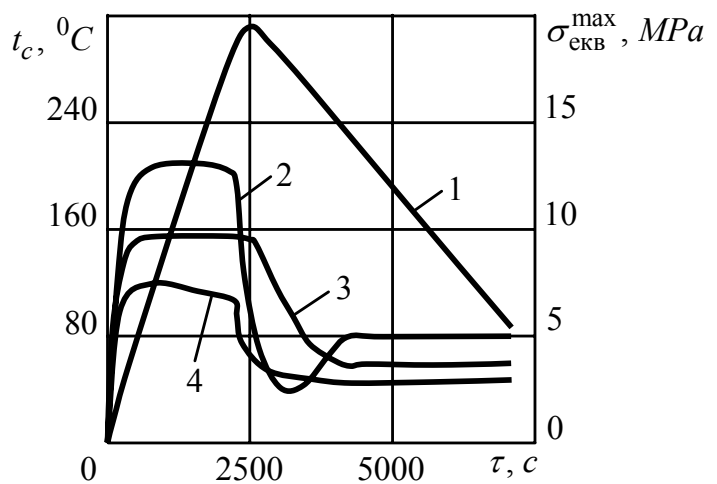


Рис. 5

сивностей напряжений в неоднородных частях полого цилиндра, которые соответствуют оптимальному нагреву, представлено на том же рисунке кривыми 2–4.

Предложенная математическая модель оптимизации по быстродействию режимов термообработки кусочно-однородных тел вращения по сравнению с существующими в литературе моделями [1–3] дает возможность оптимизировать процесс технологического нагрева кусочно-однородных тел вращения произвольной формы с физическими характеристиками зависящими от температуры при разного типа ограничениях тепловой и механической природы.

РЕЗЮМЕ. В роботі пропонується методика оптимізації за швидкістю процесу термообробки кусково-однорідних тіл обертання при обмеженнях на напружений стан тіла. Для опису термомеханічної поведінки розглядуваних тіл використана модель термочутливого пружного тіла в трьохвимірній постановці при залежних характеристиках матеріалу від просторової координати. Запропонована математична модель оптимізації може бути використана для дослідження параметрів процесу нагрівання при різного типу обмеженнях теплової і механічної природи.

SUMMARY. In the work the technique of speed-optimization of process of heat treatment of piecewise-homogeneous bodies of rotation is offered at restraints on the stress state of body. For the decryption of thermomechanical behavior of the piecewise-homogeneous bodies of rotation the model of a thermosensitive elastic body 3D is used at dependence of characteristics of a material on the spatial coordinate. The offered numerical mathematical model of optimization can be used to study the parameters of process of heating at different type is of restraints of the thermal and mechanical nature.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ: 1. Григолюк Э. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. – К.: Наук. думка, 1979. – 364 с. 2. Методика оптимізації режимів нагріву конвективним способом і електромагнітним випромінюванням кусково-орднорідних оболонок обертання / Гачкевич О. Р., Гачкевич М. Г., Гуменчук О. Б., Касперський З.И. // *Машинознавство*. – 2000. – №4–5. – С. 3–10. 3. Вишак В. М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. – К.: Наук. думка, 1988. – 312 с. 4. *Визначення* напружено-деформованого стану скляної сферичної оболонки при локальному нагріві / Гачкевич О. Р., Будз С. Ф., Ірза Є. М., Пеер-Касперська А. // *Вісн. Донец. ун-ту. Серія А*. – 2002. – № 2. – С.76–78. 5. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. Finite Element Method: Vol 1. The Basis. – London: Butterworth Heinemann, 2000. – 689 p. 6. Химмельбау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 532 с.

*Институт прикладных проблем механики
и математики НАН Украины, г.Львов,
Политехника Опольская (Польша),
Львовский национальный университет*

Поступила 12.11.2007

УДК 539.376

В. П. ГОЛУБ, д-р техн. наук, *Я. В. ПАВЛЮК*,
П. В. ФЕРНАТИ, канд. техн. наук

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Широкое применение композитных материалов с полимерной и металлической основой в качестве конструкционных материалов послужило причиной интенсивного теоретического и экспериментального исследования вязкоупругого поведения твердых тел. Экспериментально установлено, что у широкого класса композитных материалов и их компонентов при длительном действии сжимающих и растягивающих нагрузок проявляются свойства линейного вязкоупругого деформирования. Достоверное решение задач линейной вязкоупругости основано на использовании эффективных аналитических выражений для ядер ползучести и релаксации. Наиболее перспективным, допускающим большую гибкость при описании вязкоупругих свойств реальных материалов, представляется ядро в виде дробно-экспоненциальной функции Работнова [1]. Дробно-экспоненциальное ядро табулировано и использовано для описания ползучести терморезистивных полимеров, полиэтилена, стеклопластиков, а также металлов при высоких температурах и горных пород. В настоящей работе дробно-экспоненциальное ядро используется для решения задач нахождения деформаций ползучести конструкционных материалов при переменных режимах нагружения. В качестве объектов исследования выбраны два композитных материала и дуралюмин, который может быть использован как компонент композита.

1. Постановка задачи. Рассмотрим вязкоупругое тело, находящееся под действием переменных во времени нагрузений. Закон изменения напряжений $\sigma(\tau)$ зададим в виде суммы бесконечного множества напряжений σ_k от элементарных нагружений постоянными нагрузками в различные моменты времени τ . Для $\sigma(\tau)$ соответственно получим

$$\sigma(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k h(\tau_k), \quad (1.1)$$

где $h(\tau)$ – единичная функция Хевисайда, так что при $\tau < 0$ величина $\sigma(\tau) = 0$, при $0 \leq \tau \leq \tau_k$ – $\sigma(\tau) = \sigma_k = \text{const}$, а при $\tau \geq \tau_k$ величина $\sigma(\tau) = \sigma_{k+1}$ может быть больше σ_k или равна 0.

Зависимость между деформацией и напряжением в линейной наследственной теории вязкоупругости задается интегральным уравнением Вольтера второго рода в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left(\sigma(t) + \lambda \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{\alpha+(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]} \sigma(\tau) d\tau \right), \quad (1.2)$$

где $K(t-\tau)$ – ядро наследственности, выбираемое в форме экспоненциальной функции дробного порядка [1]; $\varepsilon(t)$, $\varepsilon(\tau)$ – полная деформация, включающая упругую компоненту ε^e и деформацию ползучести $\varepsilon^c(t)$ в моменты времени t и τ ; $\sigma(t)$, $\sigma(\tau)$ – действующее напряжение в моменты времени t и τ ; E – модуль упругости; λ – реологический параметр ($\lambda > 0$); t – время наблюдения; τ – время, предшествующее моменту наблюдения; α , β – параметры ядра, подлежащие определению из экспериментов на ползучесть ($-1 < \alpha < 0$; $\beta \geq 0$); $\Gamma[\cdot]$ – гамма-функция.

В рамках уравнения (2) исследуется ползучесть стеклопластика ТС 8/3–250, полиэфирного полимербетона и дуралюмина Д–16Т. Экспериментальные данные в форме первичных кривых ползучести для стеклопластика ТС 8/3–250 заимствованы из [2], для полиэфирного полимербетона из [3], для дуралюмина из [4]. Кривые ползучести стеклопластика построены при σ_k , равных 102, 205, 273 и 342 МПа, полимербетона – когда σ_k равно 10, 20, 30, 40 и 50 МПа, дуралюмина – при σ_k , равных 39,2; 78,4; 117,6; 137,3; 156,9; 196,1 МПа.

Задача заключается в определении области линейности вязкоупругих свойств, определении параметров дробно-экспоненциальных ядер ползучести и расчете деформаций ползучести стеклопластика, полимербетона и дуралюмина при постоянных напряжениях, при однократной и двукратной ступенчатой догрузке, при полной разгрузке и при циклическом нагружении.

2. Ползучесть при постоянных напряжениях. Исследование процесса ползучести материалов проводится, как правило, при нескольких постоянных уровнях напряжений. Произвольный закон изменения напряжений (1) сводится в этом случае к условию

$$\sigma(\tau) = \sigma_k h(\tau_k), \quad (2.1)$$

причем в момент нагружения $\tau = t$.

Экспериментальные данные на ползучесть, полученные при нескольких уровнях постоянных напряжений, используются для определения области линейности вязкоупругих свойств и определения параметров дробно-экспоненциальных ядер ползучести.

Область линейности вязкоупругих свойств материалов устанавливается экспериментально с использованием функции ползучести. Необходимым условием линейности вязкоупругих свойств материала является инвариантность функции ползучести $J(t)$:

$$J_k(t) = \frac{\varepsilon(t, \sigma_1)}{\sigma_1} = \frac{\varepsilon(t, \sigma_2)}{\sigma_2} = \dots = \frac{\varepsilon(t, \sigma_n)}{\sigma_n} \quad (2.2)$$

по отношению к уровню напряжений σ_k , что является, по существу условием существования единой кривой податливости.

Будем считать, что материал является линейным вязкоупругим с погрешностью δ , если интервал

$$\bar{J}(t_j) - \delta \bar{J}(t_j) < J(t_j) < \bar{J}(t_j) + \delta \bar{J}(t_j) \quad (2.3)$$

накрывает истинное значение функции ползучести $J(t_j)$ с некоторой вероятностью P . С такой же вероятностью P величина $J(t_j)$ охватывается доверительным интервалом [5]

$$\bar{J}(t_j) - \frac{t_{\alpha,k} S_J(t_j)}{\sqrt{n}} < J(t_j) < \bar{J}(t_j) + \frac{t_{\alpha,k} S_J(t_j)}{\sqrt{n}}, \quad (2.4)$$

где $t_{\alpha,k}$ – расчетное значение квантиля статистики; $S_J(t_j)$ – выборочное среднее квадратичное отклонение податливости $\bar{J}(t_j)$.

Из совместного решения неравенств (2.3) и (2.4) получаем соотношение для определения $t_{\alpha,k}$. В дальнейшем считается, что материал обладает линейными вязкоупругими свойствами, если выполняется условие

$$t_{\alpha,k} = \frac{\delta \bar{J}(t_j) \sqrt{n}}{S_J(t_j)} \geq t_{\alpha,k}^*, \quad (2.5)$$

где $t_{\alpha,k}^*$ – табличное значение квантиля статистики [6] соответствующее вероятности P . Если условие (2.5) не выполняется, то интервал (2.4) не накрывает истинное значение функции ползучести $J(t_j)$ с заданной вероятностью P и соответственно материал не обладает линейными вязкоупругими свойствами.

В дальнейшем считается, что линейность вязкоупругих свойств материалов соблюдается, если при заданной погрешности $\delta = 0,05$ вероятность попадания $J(t_j)$ в интервалы (2.3) и (2.4) будет не ниже 90%.

На рис. 1 изображены кривые ползучести (а, в, д) и податливости (б, г, е) для стеклопластика (а, б) при растяжении напряжениями σ_k , равными 102 (○), 205 (◐), 273 (◑) и 342 (●) МПа; полимербетона (в, г) при сжатии напряжениями σ_k , равными 10 (○), 20 (◐), 30 (◑), 40 (◒) и 50 (●) МПа и дуралюмина (д, е) при растяжениях напряжениями 39,2 (○); 78,4 (◐); 117,6 (◑); 137,3 (◒); 156,9 (◓); 196,1 (●) МПа. Пунктирными линиями на рис. 1. б, г, е

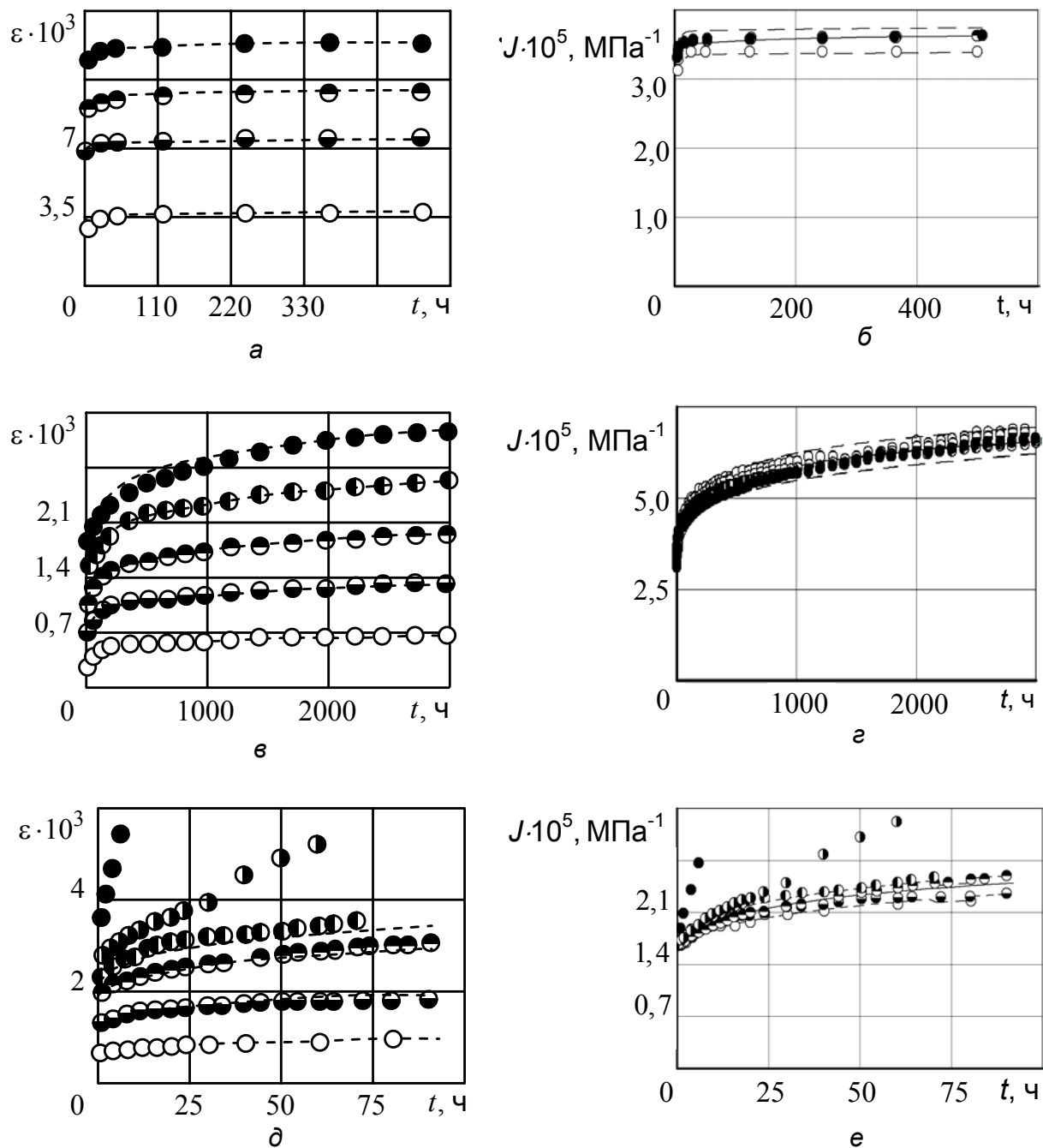


Рис. 1

показаны границы интервала (2.3).

Расчеты показали, что для стеклотекстолита и полимербетона условие линейности (2.5) выполняется для всех рассматриваемых уровней напряжений и временных интервалов. Условие линейности (2.5) для дуралюмина выполняется при уровнях напряжений не превышающих 137,3 МПа. При напряжении 137,3 МПа область линейности сохраняется до 65 часов. Исходя из этого принято, что область линейного вязкоупругого поведения стеклотекстолита и полимербетона не ограничена рассматриваемыми уровнями напряжений и временными интервалами, а у дуралюмина эта область

ограничена уровнем напряжений $\sigma_k = 137,3$ МПа и временным интервалом $t = 65$ часов.

Параметры дробно-экспоненциального ядра α и β , а также реологический параметр λ определяются по экспериментальным значениям функций ползучести $J_k(t)$, приведенным на рис. 1, а.

Функция ползучести (2.2) в линейной области не зависит от уровня напряжений σ_k и с учетом уравнения (1.2) записывается в виде

$$J(t) = \frac{1}{E} \left\{ 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma [1 + (1+n)(1+\alpha)]} \right\}. \quad (2.6)$$

Здесь $J(t) = J_k(t)$, $h(t) = 1$, $\tau = 0$, а $t - \tau = t$.

Значения параметров α , β и λ находятся из условия наилучшего согласования функции ползучести (2.6) с экспериментальными данными, приведенными на рис. 1, б, г, е. В качестве критерия наилучшего согласования используется условие минимизации квадратичного отклонения расчетных значений функции $J(t)$ от экспериментальных $J_{\text{exp}}(t_i)$. Задача сводится к нахождению минимума функционала

$$F(\alpha, \beta, \lambda) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^N \left\{ J_{\text{exp}}(t_i) - \frac{1}{E} \left[1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma [1 + (1+n)(1+\alpha)]} \right] \right\}^2, \quad (2.7)$$

где принято, что $J_{\text{exp}}(t_i) = J_k(t_i)$, причем i задает число участков разбиения экспериментальной кривой ползучести и соответствующей ей кривой податливости.

Минимизация функционала (2.7) осуществляется с использованием итерационного метода Левенберга-Маркардта [7]. Значения параметров α , β и λ , найденных для исследованных материалов согласно (2.7), представлены в таблице

Параметры ядра	Вязкоупругие материалы		
	полимербетон	стеклопластик ТС8/3-250	дюралюмин Д-16Т
α	-0,600204	-0,585179	-0,464401
β , час ^{-(1+α)}	0,047131	0,075398	0,083177
λ , час ^{-(1+α)}	0,086785	0,009635	0,097329

Зависимость между деформацией и напряжением при стационарном нагружении записывается в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_k}{E} h(t) \left[1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right], \quad (2.8)$$

полученном из (1.2) с учетом (2.1) при условии, что $\tau = 0$, а $t - \tau = t$.

Значения деформаций ползучести, рассчитанных по уравнению (2.8) с использованием значений параметров α , β и λ , приведенных в разделе 2, сопоставлены на рис. 1. а, в, д с экспериментальными данными. Результаты расчетов показаны штриховыми линиями, экспериментальные данные нанесены точками.

3. Ползучесть при нестационарном нагружении. В качестве переменных режимов нагружения рассмотрены однократная и двукратная ступенчатая догрузка, полная разгрузка и многократное повторение цикла нагрузка-разгрузка.

Условие нагружения (1.1) для режима однократной ступенчатой догрузки записывается в виде

$$\sigma(t) = \sigma_1 h(t) + \Delta\sigma_1 h(t - t_1), \quad (3.1)$$

где $\Delta\sigma_1 = \sigma_2 - \sigma_1$ – прирост напряжения в момент времени $\tau = t_1$. Для расчета деформации ползучести $\varepsilon(t)$ в этом режиме нагружения из (1.2) с учетом (3.1) получаем уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \frac{\sigma_1 h(t)}{E} \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right) + \\ & + \frac{\Delta\sigma_1 h(t - t_1)}{E} \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t - t_1)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для случая двукратной ступенчатой догрузки условие нагружения (1.1) записывается в виде

$$\sigma(t) = \sigma_1 h(t) + \Delta\sigma_1 h(t - t_1) + \Delta\sigma_2 (t - t_2), \quad (3.3)$$

где $\Delta\sigma_2 = \sigma_3 - \sigma_2$ – прирост напряжения в момент времени $\tau = t_2$. Для расчета деформации ползучести $\varepsilon(t)$ в режиме двукратной ступенчатой догрузки из (1.2) с учетом (3.3) получаем уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \frac{\sigma_1 h(t)}{E} \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right) + \\ & + \frac{\Delta\sigma_1 h(t - t_1)}{E} \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t - t_1)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\Delta\sigma_2 h(t-t_2)}{E} \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-t_2)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right) \quad (3.4)$$

Результаты расчетов деформаций ползучести полимербетона и дуралюмина, выполненных по уравнениям (3.2) и (3.4) соответственно, сопоставлены на рис. 2, где приведены расчетные (линии) и экспериментальные (точки) кривые ползучести при однократной ступенчатой догрузке полимербетона (а) и двукратной ступенчатой догрузке дуралюмина (б). Режим нагружения полимербетона включал начальное напряжение $\sigma_1 = 20$ МПа, а догрузка выполнена в момент времени $t_1 = 1500$ часов до напряжения $\sigma_2 = 40$ МПа. Режим нагружения дуралюмина включал начальное на-

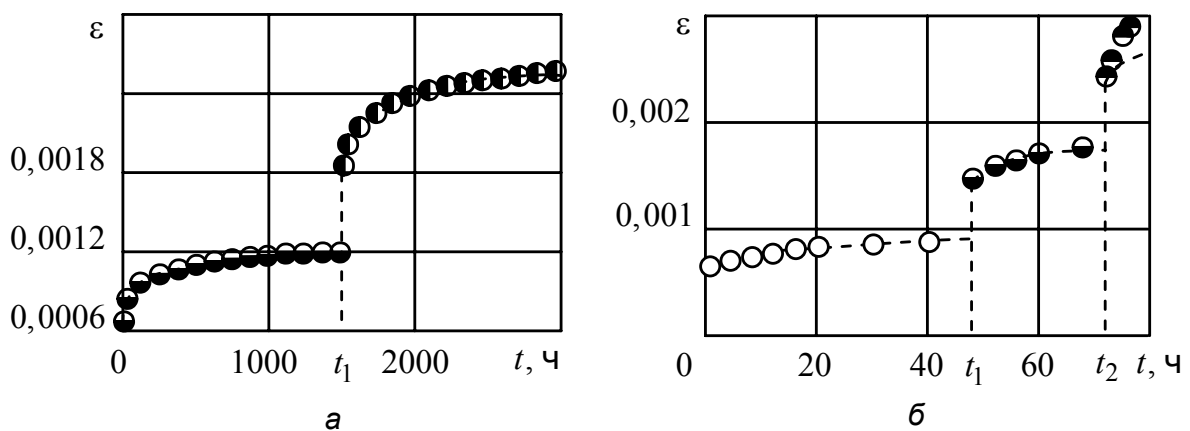


Рис. 2

пряжение $\sigma_1 = 39,2$ МПа, догрузку в момент времени $t_1 = 48$ часов до напряжения $\sigma_2 = 78,4$ МПа и вторичную догрузку в момент времени $t_2 = 72$ часа до напряжения $\sigma_3 = 117,6$ МПа. Здесь и далее расчеты выполнены с использованием значений параметров α , β и λ , найденных по результатам обработки функций ползучести при постоянных напряжениях (рис.1) и приведенных в таблице.

В режиме полной разгрузки реализуется процесс обратной ползучести, связанный с уменьшением с течением времени накопленной к моменту разгрузки деформации ползучести. Условие нагружения (1.1) при реализации режима полной разгрузки записывается в виде

$$\sigma(t) = \sigma_1 h(t) - \sigma_1 h(t-t_1), \quad (3.5)$$

где σ_1 – напряжение, приложенное в момент времени $\tau = 0$; t_1 – момент начала разгрузки.

Для расчета деформации ползучести $\varepsilon(t)$ в режиме полной разгрузки из (1.2) с учетом (3.5) получаем уравнение

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_1}{E} h(t) \left\{ 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right\} - \frac{\sigma_1}{E} h(t-t_1) \left\{ 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-t_1)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right\}, \quad (3.6)$$

где все обозначения совпадают с принятыми выше.

Результаты расчетов деформаций ползучести, выполненных по уравнению (3.6), сопоставлены на рис. 3 с экспериментальными данными, где даны расчетные (линии) и экспериментальные (точки) кривые ползучести при полной разгрузке полимербетона (а), стеклопластика ТС 8/3-250 (б). Режим нагружения для полимербетона включал приложение начального напряжения $\sigma_1 = 20$ МПа и полную разгрузку в момент времени $t_1 = 500$ часов (●) и начального напряжения $\sigma_1 = 40$ МПа и полную разгрузку в момент времени $t_1 = 750$ часов (⦿). Режим нагружения для стеклопластика включал приложение начального напряжения $\sigma_1 = 342$ МПа и полную разгрузку в момент времени $t_1 = 500$ часов.

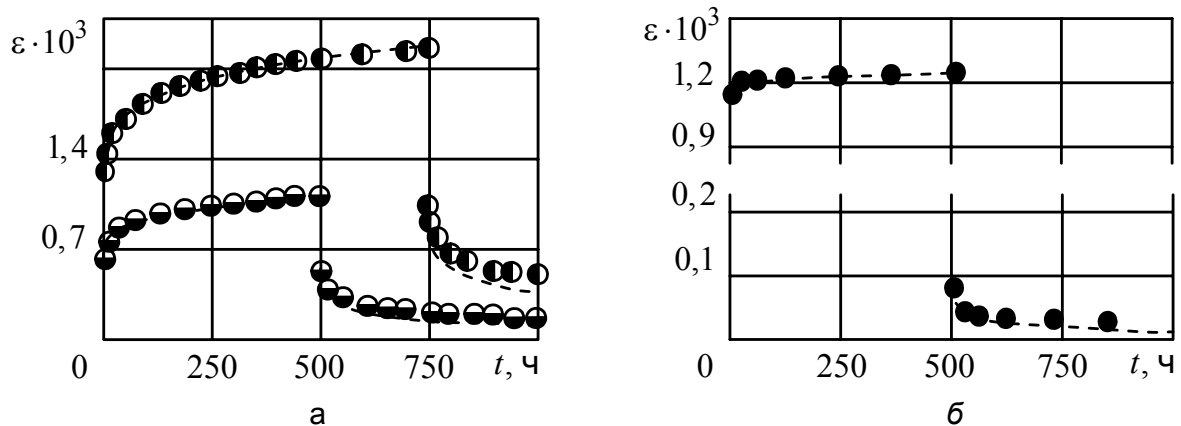


Рис. 3

Процесс циклической ползучести реализуется при многократном чередовании нагрузок и разгрузок. Условие нагружения (1.1) при реализации режима циклического нагружения записывается в виде

$$\sigma(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \sigma_0 h[t - 2(\nu-1)t_0] - \sigma_0 h[t - (2\nu-1)t_0] \right\}, \quad (3.7)$$

где σ_0 – величина приложенного напряжения в цикле; t_0 – длительность полупериода нагружения; ν – число циклов нагружения. В (3.7) принято, что σ_0 и t_0 не зависят от ν .

Для расчета деформации циклической ползучести $\varepsilon(t)$ из (1.2) с учетом (3.7) получаем уравнение

$$\varepsilon(t) = \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sigma_0 h(t - 2t_0(v-1))}{E} \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t - 2t_0(v-1))^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right) - \frac{\sigma_0 h(t - (2v-1)t_0)}{E} \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t - t_0(2v-1))^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right) \right\}. \quad (3.8)$$

Результаты расчетов деформаций циклической ползучести, выполненных по уравнению (3.8), сопоставлены на рис. 4 с экспериментальными данными. Величина напряжения в цикле $\sigma_0 = 30$ МПа, длительность полуцикла нагружения $t_0 = 0,5$ часа, число циклов нагружения $v = 5$.

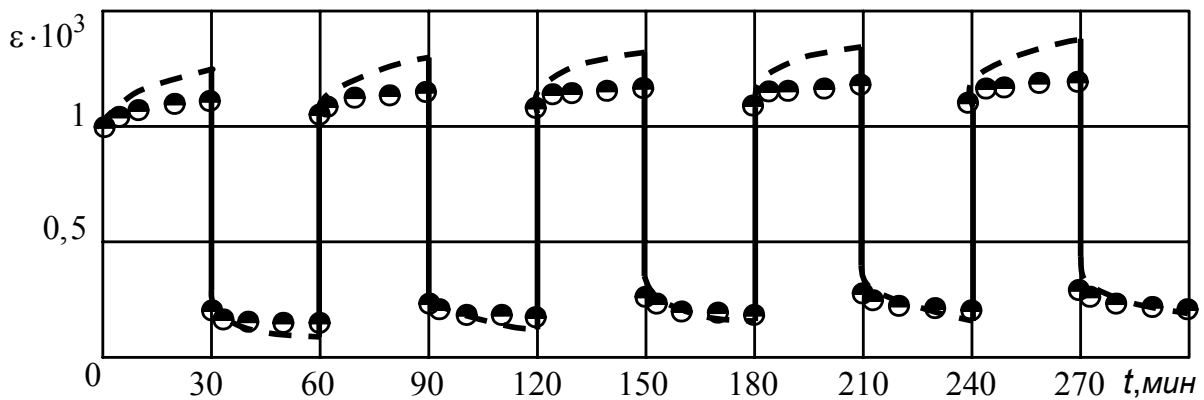


Рис. 4

Таким образом, экспериментальная апробация результатов расчета деформаций ползучести исследованных материалов при переменном нагружении растяжением и сжатием подтверждает целесообразность использования дробно-экспоненциального ядра. Максимальная погрешность составила 30% и получена в режиме полной разгрузки полимербетона. В режиме циклического нагружения полимербетона максимальная погрешность не превысила 10%. В режиме однократной и двукратной ступенчатой догрузки полимербетона и дуралюмина погрешность не превышала 5%. Важным при этом является то обстоятельство, что расчеты при всех режимах переменного нагружения выполнены с использованием значений параметров дробно-экспоненциального ядра, найденных по экспериментальным данным в условиях статического нагружения. В этом случае исключается использование в качестве дополнительного базового эксперимента опытов на обратную ползучесть при полной разгрузке.

РЕЗЮМЕ. Розглядається задача визначення деформацій повзучості композитних матеріалів і їх компонентів в режимі довантаження, повного розвантаження і циклічного навантаження. Розв'язок будується на основі лі-

нійної спадкової теорії повзучості Больцмана-Вольтера. Ядро спадковості вибране у формі дробово-експоненційної функції Работнова. Параметри ядра знайдені виходячи із єдиної експериментальної функції повзучості. Отримано задовільне узгодження результатів розрахунків із експериментальними даними.

SUMMARY. The problem of the calculation of creep strain of composite materials and their components under additional loading, full unloading and cyclic loading is considered. The solution is constructed on the basis of Boltzmann-Volterra creep theory of hereditary type. The hereditary kernel is chosen in a form of Rabotnov's exponential-fractional function. The parameters of kernel are determined from unified creep experimental function. The calculation results are in a good agreement with those obtained from an experiment.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с. 2. Работнов Ю.Н., Паперник А.Х., Степанычев Е.И. Нелинейная ползучесть стеклопластика ТС8/3-250 // Механика полимеров. – 1971. – № 3. – С. 391–397. 3. Механические свойства полиэфирного полимербетона / Максимов Р.Д., Иргенс Л.А., Янсонс Ю.О., Плуме Э.З. // Механика композит. материалов. – 1999. – Т. 35, № 2. – С. 147–162. 4. Наместников В.С., Хвостунков А.А. Ползучесть дуралюмина при постоянных и переменных нагрузках // Прикладная мат. и техн. физика. – 1960. – № 4. – С. 90–95. 5. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Фернати П.В. К расчету деформаций линейной ползучести вязкоупругих армирующих волокон при растяжении // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 5. – С. 95–106. 6. Степнов М.Н. Статистические методы обработки результатов механических испытаний. – М.: Машиностроение, 1985. – 232 с. 7. More J.J., Garbow B.S., and Hillstrom K.E. Users Guide to Minipack // Argonne National Laboratory Publication ANL-80-74, 1980. – P. 238.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 24.11.2007

УДК 539.3

С. А. КАЛОЕРОВ, д-р физ.-мат. наук, А. В. ПЕТРЕНКО

ДВУМЕРНАЯ И ПЛОСКАЯ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛА С ОТВЕРСТИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ

К настоящему времени достаточно полно разработаны методы исследования напряженно-деформированного состояния тел в случае двумерной и плоской задач электро- и магнитоупругости [1–3], даны решения частных задач. В данной статье эти методы распространены на задачи электромагнитоупругости для анизотропных тел с отверстиями и трещинами из пьезоматериалов, для пластинки с отверстиями и трещинами приведены результаты численных исследований.

Постановка задачи. Рассмотрим тело из пьезоматериала с \mathcal{L} продольными эллиптическими полостями. Выберем прямоугольную систему координат $Oxyz$ и направим ось z по оси цилиндра. Тело находится в условиях двумерного электромагнитоупругого состояния (ЭМУС), которое зависит только от координат x, y и не меняется вдоль направления оси Oz . Объемные силы, электрические заряды и начальная намагниченность отсутствуют. К цилиндрическим поверхностям приложены распределенные силовые, электрические и магнитные воздействия, не меняющиеся вдоль оси Oz . В поперечном сечении тела плоскостью Oxy будем иметь много-

связную область S , ограниченную внешним контуром L_0 и контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$), которые могут располагаться произвольно относительно друг друга, в том числе касаться, пересекаться, переходить в прямолинейные разрезы, образовывать контуры отверстий сложной конфигурации (рис. 1). В качестве частного случая, когда внешняя поверхность целиком уходит в бесконечность, следовательно, контур L_0 отсутствует, будем рассматривать

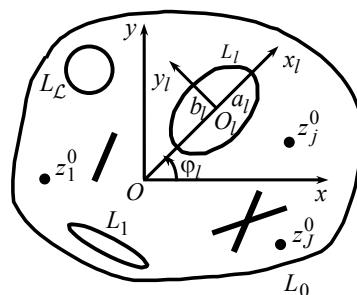


Рис. 1

бесконечное тело с продольными полостями и предполагать известными на бесконечности напряжения $(\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{yz}^\infty, \tau_{xz}^\infty, \tau_{xy}^\infty)$, компоненты векторов индукции или напряженности электрического $(D_x^\infty, D_y^\infty$ или $E_x^\infty, E_y^\infty)$ и магнитного $(B_x^\infty, B_y^\infty$ или $H_x^\infty, H_y^\infty)$ полей. Жесткий поворот тела как целого будем

принимать равным нулю ($\omega_3^\infty = 0$). Плоские трещины будем рассматривать как эллиптические полости, у которых одна из полуосей мала (в предельном случае равна нулю).

Решение задачи об определении ЭМУС тела сводится к нахождению комплексных потенциалов $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 5}$) из граничных условий

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 g_{ki}^0 \delta_k \Phi_k'(t_k) = f_{il}(t) \quad (i = \overline{1, 5}, l = \overline{0, \mathcal{L}}),$$

где [3]

$$\delta_k = \frac{dx}{ds} + \mu_k \frac{dy}{ds},$$

$$(g_{k1}^0, g_{k2}^0, g_{k3}^0, g_{k4}^0, g_{k5}^0) = (\lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{4k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}),$$

$$(f_{1l}, f_{2l}, f_{3l}, f_{4l}, f_{5l}) = \mp (Y_{nl}, X_{nl}, Z_{nl}, D_{nl}, B_{nl}),$$

$\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$ ($\beta_k > 0$) – корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} l_{4a}(\mu) & l_{3a}(\mu) & l_{3b}(\mu) & l_{3d}(\mu) \\ l_{3a}(\mu) & l_{2a}(\mu) & l_{2b}(\mu) & l_{2d}(\mu) \\ l_{3b}(\mu) & l_{2b}(\mu) & l_{2c}(\mu) & l_{2e}(\mu) \\ l_{3d}(\mu) & l_{2d}(\mu) & l_{2e}(\mu) & l_{2f}(\mu) \end{vmatrix} = 0; \quad (1)$$

$\lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{4k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}$ – постоянные, зависящие от μ_k ; $l_{4a}(\mu)$, $l_{3a}(\mu)$, $l_{2a}(\mu)$, $l_{3b}(\mu)$, $l_{2b}(\mu)$, $l_{3d}(\mu)$, $l_{2d}(\mu)$, $l_{2c}(\mu)$, $l_{2e}(\mu)$, $l_{2f}(\mu)$ – величины, зависящие от μ_k и электромагнитомеханических постоянных материала; $Y_{nl}, X_{nl}, Z_{nl}, D_{nl}, B_{nl}$ – приложенные к поверхности тела внешние усилия и нормальные составляющие векторов индукции электромагнитного поля. При этом верхние знаки относятся к внешнему контуру L_0 , нижние – к контурам отверстий L_l .

Решение задачи. Выберем локальные системы координат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах L_l и направлениями осей вдоль a_l, b_l . Параметрические уравнения эллипсов в локальной системе координат записываются так:

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi), \quad (2)$$

а в системе Oxy будут иметь вид

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \quad (3)$$

где x_{0l}, y_{0l} – координаты центра L_l в системе Oxy ; φ_l – угол между ося-

ми Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от Ox против часовой стрелки.

Комплексных потенциалов $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 5}$), определены в областях S_k , получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями $z_k = x + \mu_k y$. В этих областях контурам L_l соответствуют эллипсы L_{kl} . Тогда комплексные потенциалы можно представить в виде [3]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + A_k(z_k) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \Phi_{kl}(z_k). \quad (4)$$

Здесь

$$A_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{kl} \ln(z_k - z_{kl});$$

Γ_k – постоянные, равные нулю в случае конечной области S , а в случае бесконечной области определяемые из системы

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{5k}, \lambda_{6k}, \lambda_{7k}, \lambda_{8k}, \lambda_{9k}, \lambda_{10k}, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k = \\ = (\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{yz}^\infty, \tau_{xz}^\infty, \tau_{xy}^\infty, D_x^\infty, D_y^\infty, B_x^\infty, B_y^\infty, 2\omega_3^\infty), \end{aligned}$$

если на бесконечности заданы механические усилия и индукция, или из системы

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{5k}, \lambda_{6k}, -r_k^0, -\mu_k r_k^0, -h_k^0, -\mu_k h_k^0, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k = \\ = (\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{yz}^\infty, \tau_{xz}^\infty, \tau_{xy}^\infty, E_x^\infty, E_y^\infty, H_x^\infty, H_y^\infty, 2\omega_3^\infty), \end{aligned}$$

когда вместо индукции задана напряженность поля; A_{kl} – коэффициенты, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}, p_k, q_k, r_k^0, s_k^0, h_k^0) i A_{kl} = \\ = \left(\frac{X_l}{2\pi}, \frac{Y_l}{2\pi}, \frac{Z_l}{2\pi}, \frac{Q_{\partial l}}{2\pi}, \frac{Q_{Ml}}{2\pi}, 0, 0, 0, 0, 0 \right); \end{aligned}$$

$p_k, q_k, r_k^0, s_k^0, h_k^0$ – параметры, зависящие от физико-механических свойств материала; $X_l, Y_l, Z_l, Q_{\partial l}$ и Q_{Ml} – компоненты главного вектора внешних усилий и суммарные наэлектризованность и намагниченность на контуре L_l ; $\Phi_{k0}(z_k), \Phi_{kl}(z_k)$ – функции, голоморфные внутри внешних

контуров L_{k0} и вне эллипсов L_{kl} ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) соответственно.

Функции $\Phi_{k0}(z_k)$, голоморфные внутри L_{k0} , можно разложить в ряды по полиномам Фабера для этого контура [4]

$$\Phi_{k0}(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k0n} P_{kn}(z_k), \quad (5)$$

где

$$P_{kn}(z_k) = \left(z_k/R_{k0}\right)^n + \alpha_{n-1} \left(z_k/R_{k0}\right)^{n-1} + \dots + \alpha_0; \quad (6)$$

R_{k0} – постоянные, возникающие при построении полиномов Фабера в конформных отображениях. В качестве них можно взять радиусы контуров L_{k0} . Учитывая (5), функции (4) представим в виде

$$\Phi_{k0}(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k0n} \left(z_k/R_{k0}\right)^n. \quad (7)$$

Исходя из (2), (3), отобразим внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности соответствующих эллипсов L_{kl} ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) по формулам

$$z_{kl} = x + \mu_k y = z_{0kl} + R_{kl} \left(\sigma + m_{kl}/\sigma\right),$$

где

$$z_{0kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}.$$

Тогда функции $\Phi_{kl}(z_k)$, голоморфные вне эллипсов L_{kl} , в конформно отображенных областях будут голоморфными вне кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ и их можно представить рядами Лорана

$$\Phi_{kl}(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}, \quad (8)$$

Подставляя (7), (8) в (4), получаем общие выражения комплексных потенциалов. Для их производных окончательно будем иметь

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + A'_k(z_k) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \Phi'_{kln}(z_k).$$

Здесь

$$A'_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \frac{A_{kl}}{z_k - z_{kl}}; \quad \Phi'_{kln}(z_k) = \begin{cases} nz_k^{n-1}/R_{k0}^n, & l=0; \\ -n/\left[\zeta_{kl}^{n-1}R_{kl}(\zeta_{kl}^2 - m_{kl})\right], & l \geq 1; \end{cases}$$

a_{kln} – неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий на контурах области S . Для нахождения постоянных a_{kln} будем применять метод наименьших квадратов. Составляя функционал

$$I = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^5 \left[\sum_{k=1}^5 \left[g_{ki}^0 \delta_k \Phi'_k(t_{km}) + \bar{g}_{ki}^0 \bar{\delta}_k \overline{\Phi'_k(t_{km})} \right] - f_{im} \right]^2$$

и удовлетворяя условиям его минимума, окончательно для определения a_{kln} получаем систему

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \sum_{s=1}^5 \sum_{r=0}^{\mathcal{L}} \sum_{p=1}^{\infty} \{ r_{mklns} a_{srp} \Phi'_{srp} + s_{mklns} \bar{a}_{srp} \bar{\Phi}'_{srp} \} = \\ & = \sum_{m=1}^M \left\{ \Phi'_{kln} \delta_k \left[g_{k1}^0 f_{1m} + g_{k2}^0 f_{3m} + g_{k3}^0 f_{3m} + g_{k4}^0 f_{4m} + g_{k5}^0 f_{5m} \right] - \right. \\ & \left. - \sum_{s=1}^5 \left(r_{mklns} A'_k(z_k) + s_{mklns} \bar{A}'(z_k) \right) \right\} \quad (k = \overline{1, 5}; l = \overline{0, \mathcal{L}}; n = 1, 2, \dots), \quad (9) \end{aligned}$$

в которой

$$\begin{aligned} r_{mklns} &= \Phi'_{kln}(z_{km}) \delta_k \delta_s \left(g_{k1}^0 g_{s1}^0 + g_{k2}^0 g_{s2}^0 + g_{k3}^0 g_{s3}^0 + g_{k4}^0 g_{s4}^0 + g_{k5}^0 g_{s5}^0 \right), \\ s_{mklns} &= \Phi'_{kln}(z_{km}) \delta_k \bar{\delta}_s \left(g_{k1}^0 \bar{g}_{s1}^0 + g_{k2}^0 \bar{g}_{s2}^0 + g_{k3}^0 \bar{g}_{s3}^0 + g_{k4}^0 \bar{g}_{s4}^0 + g_{k5}^0 \bar{g}_{s5}^0 \right). \end{aligned}$$

После решения системы (9) станут известными функции $\Phi'(z_k)$ и можно найти основные характеристики ЭМУС тела [3]

$$\begin{aligned} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{5k}, \lambda_{6k}) \Phi'_k(z_k); \\ (u, v, w, \varphi, \psi) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k, q_k, s_k^0, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k) + \\ &+ (-\omega_3 y + u_0, \omega_3 x + v_0, w_0, \varphi_0, \psi_0); \\ (D_x, D_y) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{7k}, \lambda_{8k}) \Phi'_k(z_k); \end{aligned}$$

$$(E_x, E_y) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (r_k^0, \mu_k r_k^0) \Phi_k'(z_k);$$

$$(B_x, B_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{9k}, \lambda_{10k}) \Phi_k'(z_k);$$

$$(H_x, H_y) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi_k'(z_k).$$

и коэффициенты интенсивности нормального отрыва k_1 , поперечного сдвига k_2 , продольного сдвига k_3 , индукции электрического k_D и магнитного k_B полей и напряженности электрического k_E и магнитного k_H полей, в случае трещины

$$k_1 = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 \left[\lambda_{1k} \sin^2 \varphi_l + \lambda_{2k} \cos^2 \varphi_l - 2\lambda_{6k} \sin \varphi_l \cos \varphi_l \right] M_k,$$

$$k_2 = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 \left[(\lambda_{2k} - \lambda_{1k}) \cos \varphi_l \sin \varphi_l + \lambda_{6k} (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l) \right] M_k,$$

$$k_3 = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 \left[\lambda_{4k} \cos \varphi_l - \lambda_{5k} \sin \varphi_l \right] M_k,$$

$$k_D = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 \left[\lambda_{8k} \cos \varphi_l - \lambda_{7k} \sin \varphi_l \right] M_k,$$

$$k_E = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 \left[\mu_k r_k^0 \cos \varphi_l - r_k^0 \sin \varphi_l \right] M_k,$$

$$k_B = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 \left[\lambda_{10k} \cos \varphi_l - \lambda_{9k} \sin \varphi_l \right] M_k,$$

$$k_H = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 \left[\mu_k h_k^0 \cos \varphi_l - h_k^0 \sin \varphi_l \right] M_k.$$

При этом

$$M_k = \pm \frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \left[A_{kl} - \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln} \right]$$

Если имеет место обобщенное плоское ЭМУС пластинки, то приведен-

ные выше формулы упрощаются. В этом случае во всех формулах нужно суммирование по k проводить от 1 до 4 и положить равными нулю все постоянные и функции, связанные со значением индекса k , равным 5.

Описание и анализ результатов численных исследований. Проведены численные исследования изменения значений основных характеристик (напряжений, индукций и напряженностей) ЭМУС для бесконечной пластинки с эллиптическими (круговыми) отверстиями или трещинами (рис. 2) при действии на бесконечности растягивающих усилий $\sigma_y^\infty = p$ (при

$$\sigma_x^\infty = \tau_{xy}^\infty = \omega_3^\infty = D_x^\infty = D_y^\infty = B_x^\infty = B_y^\infty = 0) \text{ или электриче-}$$

ского поля с напряженностью $E_y^\infty = \varepsilon$ (при $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = \omega_3^\infty = D_x^\infty = B_x^\infty = B_y^\infty = 0$) или магнитного поля с напряженностью $H_y^\infty = \mu$

(при $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = \omega_3^\infty = D_x^\infty = D_y^\infty = B_x^\infty = 0$). Расчеты проведены для соединения материалов $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ [5], когда

$$\begin{aligned} c_{11}^{EH} &= 2,26\alpha, & c_{22}^{EH} &= 2,16\alpha, & c_{33}^{EH} &= 2,26\alpha, & c_{44}^{EH} &= 0,44\alpha, \\ c_{55}^{EH} &= 0,55\alpha, & c_{66}^{EH} &= 0,44\alpha, & c_{12}^{EH} &= 1,24\alpha, & c_{13}^{EH} &= 1,25\alpha, \\ c_{23}^{EH} &= 1,25\alpha, & e_{16}^{\varepsilon,E} &= 5,8\beta, & e_{12}^{\varepsilon,E} &= -2,2\beta, & e_{22}^{\varepsilon,E} &= 9,3\beta, \\ e_{32}^{\varepsilon,E} &= -2,2\beta, & e_{34}^{\varepsilon,E} &= 5,8\beta, & f_{16}^{\varepsilon,H} &= 275\gamma, & f_{12}^{\varepsilon,H} &= 290,2\gamma, \\ f_{22}^{\varepsilon,H} &= 350\gamma, & f_{32}^{\varepsilon,H} &= 290,2\gamma, & f_{34}^{\varepsilon,H} &= 275\gamma; & \varepsilon_{11}^\varepsilon &= 5,64\delta, \\ \varepsilon_{22}^\varepsilon &= 6,35\delta, & \varepsilon_{33}^\varepsilon &= 5,64\delta, & \mu_{11}^\varepsilon &= 2,97\lambda, & \mu_{22}^\varepsilon &= 0,835\lambda, \\ \mu_{33}^\varepsilon &= 2,97\lambda, & \beta_{11}^\varepsilon &= 5.367\xi, & \beta_{22}^\varepsilon &= 2737.5\xi, & \beta_{33}^\varepsilon &= 5.367\xi. \end{aligned}$$

$$\alpha = 10^3 \text{ МПа}, \quad \beta = 1 \text{ МКл/м}^2, \quad \gamma = 1 \text{ МВб/м}^2,$$

$$\delta = 10^{-3} \text{ МКл/(МН м}^2), \quad \lambda = 10^{-4} \text{ МГ/м}, \quad \xi = 10^{-12} \text{ МН с/(ВМКл)}.$$

Ниже описаны некоторые из полученных результатов. Все значения приведены с точностью до интенсивности приложенной нагрузки (p , ε или μ).

В табл. 1 для пластинки с двумя одинаковыми круговыми отверстиями радиуса a (рис. 2, а) даны значения величин вблизи контура левого отверстия в зависимости от отношения c/a , где c – расстояние между отвер-

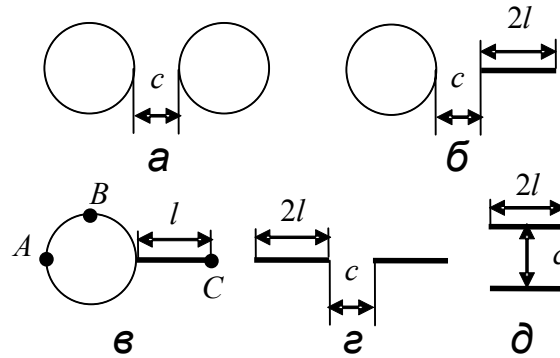


Рис. 2

стями. При этом θ – центральный угол для контура левого отверстия, отсчитываемый от положительного направления оси Ox (совпадающего с линией центров) против часовой стрелки.

Таблица 1

Нагрузка	Величина	θ	c/a				
			∞	2	1	0,5	0,1
$\sigma_y^\infty = p$	σ_s	0	3,008	3,029	3,286	4,062	8,704
		$\pi/2$	-1,055	-0,926	-0,931	-0,963	-1,043
		π	3,008	3,076	3,161	3,271	3,523
	$D_s \cdot 10^4$	0	0,758	0,562	0,476	0,576	1,628
		$\pi/2$	0,000	0,047	0,109	0,196	0,396
		π	-0,758	-0,738	-0,759	-0,794	-0,894
	$B_s \cdot 10^2$	0	0,122	0,075	0,067	0,102	0,306
		$\pi/2$	0,000	0,044	0,075	0,112	0,198
		π	-0,122	-0,118	-0,122	-0,129	-0,146
	$U \cdot 10^4$	0	0,313	0,315	0,370	0,566	2,606
		π	0,313	0,327	0,345	0,370	0,429
$E_y^\infty = \varepsilon$	σ_s	0	0,531	0,667	0,718	0,717	1,305
		$\pi/2$	0,519	0,464	0,482	0,507	0,551
		π	0,531	0,564	0,576	0,591	0,643
	$D_s \cdot 10^1$	0	0,151	0,169	0,195	0,243	0,490
		$\pi/2$	0,000	-0,004	-0,009	-0,016	-0,033
		π	-0,151	-0,158	-0,162	-0,167	-0,177
	$B_s \cdot 10^2$	0	0,157	0,176	0,182	0,202	0,468
		$\pi/2$	0,000	0,021	0,046	0,068	0,096
		π	-0,157	-0,164	-0,170	-0,177	-0,196
	$U \cdot 10^1$	0	0,157	0,196	0,260	0,405	1,641
		π	0,157	0,171	0,180	0,191	0,214
$H_y^\infty = \mu$	$\sigma_s \cdot 10^{-2}$	0	0,545	0,820	0,870	0,849	1,654
		$\pi/2$	1,081	0,988	1,039	1,094	1,178
		π	0,545	0,593	0,601	0,615	0,669
	$D_s \cdot 10^2$	0	-0,050	0,221	0,238	0,091	-0,150
		$\pi/2$	0,000	-0,185	-0,352	-0,526	-0,809
		π	0,050	0,023	0,039	0,056	0,077
	$B_s \cdot 10^{-2}$	0	1,289	1,514	1,792	2,238	4,241
		$\pi/2$	0,000	-0,201	-0,404	-0,636	-1,067
		π	-1,289	-1,349	-1,381	-1,411	-1,461
	$U \cdot 10^{-2}$	0	0,987	1,362	1,909	2,978	10,691
		π	0,987	1,081	1,133	1,183	1,269

Из табл. 1 видно, что при сближении отверстий друг с другом значения

основных характеристик ЭМУС и плотности внутренней энергии в зоне между отверстиями возрастают. Если расстояние между отверстиями больше двух диаметров одного из них, то влиянием одного отверстия на ЭМУС около другого можно пренебречь. В случае действия электрического и магнитного полей возникают не только большие значения индукции, но и значительные напряжения σ_s и плотности внутренней энергии. Они особенно велики при действии магнитного поля.

Для пластинки с круговым отверстием радиуса a и трещиной длины $2a$ (рис. 2, б) в табл. 2 и 3 приведены соответственно значения напряжений и индукции поля и КИНН в зависимости от отношения c/a , где c – расстояние между отверстием и трещиной. Значение $c=0$ соответствует случаю краевой трещины, длины диаметра отверстия.

Таблица 2

Нагрузка	Величина	θ	c/a					
			10	2	1	0,5	0,1	0,0
$\sigma_y^\infty = p$	σ_s	0	3,015	3,075	3,138	3,219	3,399	-
		$\pi/2$	-1,048	-1,031	-1,063	-1,122	-1,229	-1,355
		π	3,015	3,078	3,144	3,230	3,436	3,854
	$D_s \cdot 10^4$	0	0,757	0,696	0,547	0,163	-3,069	-
		$\pi/2$	0,000	0,025	0,061	0,109	0,207	0,435
		π	-0,759	-0,776	-0,804	-0,847	-0,965	-1,177
	$B_s \cdot 10^2$	0	0,122	0,105	0,067	-0,019	-0,705	-
		$\pi/2$	0,000	0,016	0,027	0,036	0,064	0,170
		π	-0,122	-0,126	-0,131	-0,139	-0,158	-0,188
$E_y^\infty = \varepsilon$	σ_s	0	0,535	0,610	0,748	1,040	3,055	-
		$\pi/2$	0,516	0,517	0,543	0,571	0,595	0,631
		π	0,534	0,548	0,557	0,566	0,595	0,700
	$D_s \cdot 10^1$	0	0,152	0,161	0,178	0,214	0,492	-
		$\pi/2$	0,000	-0,002	-0,005	-0,009	-0,017	-0,036
		π	-0,152	-0,155	-0,157	-0,160	-0,164	-0,176
	$B_s \cdot 10^2$	0	0,158	0,173	0,198	0,250	0,620	-
		$\pi/2$	0,000	0,008	0,017	0,023	0,024	0,028
		π	-0,157	-0,162	-0,166	-0,171	-0,182	-0,212
$H_y^\infty = \mu$	$\sigma_s \cdot 10^{-2}$	0	0,552	0,693	0,961	1,535	5,461	-
		$\pi/2$	1,075	1,093	1,142	1,178	1,198	1,530
		π	0,548	0,561	0,565	0,572	0,598	0,911
	$D_s \cdot 10^2$	0	-0,045	0,070	0,303	0,805	3,051	-
		$\pi/2$	-0,003	-0,067	-0,120	-0,157	-0,174	-1,022
		π	0,049	0,056	0,071	0,088	0,182	0,334
	$B_s \cdot 10^{-2}$	0	1,294	1,390	1,577	1,998	5,146	-
		$\pi/2$	-0,004	-0,081	-0,161	-0,240	-0,363	-1,889
		π	-1,292	-1,311	-1,322	-1,332	-1,348	-1,639

Таблица 3

Нагрузка	КИНИН	c/a					
		10	2,0	1,0	0,5	0,1	0,0
$\sigma_y^\infty = p$	k_1^-	1,004	1,059	1,159	1,355	2,172	-
	k_1^+	1,003	1,032	1,066	1,113	1,230	1,459
	$k_E^- \cdot 10^2$	-0,649	-0,713	-0,779	-0,857	-1,285	-
	$k_E^+ \cdot 10^2$	-0,648	-0,686	-0,717	-0,748	-0,878	-1,011
	$k_H^- \cdot 10^4$	-0,182	-0,198	-0,209	-0,226	-0,325	-
$E_y^\infty = \varepsilon$	$k_H^+ \cdot 10^4$	-0,182	-0,192	-0,198	-0,204	-0,207	-0,272
	$k_1^- \cdot 10^2$	-0,005	-0,596	-2,144	-4,518	-7,655	-
	$k_1^+ \cdot 10^2$	-0,004	-0,248	-0,718	-1,377	-1,517	-1,849
	k_E^-	1,005	1,085	1,188	1,347	1,946	-
	k_E^+	1,004	1,050	1,091	1,140	1,246	1,530
$H_y^\infty = \mu$	$k_H^- \cdot 10^4$	-1,330	-1,441	-1,580	-1,789	-2,568	-
	$k_H^+ \cdot 10^4$	-1,329	-1,392	-1,450	-1,516	-1,659	-2,040
	k_1^-	-0,013	-1,198	-3,514	-6,178	-13,293	-
	k_1^+	-0,009	-0,525	-1,330	-2,215	-3,001	-3,031
	k_E^-	-2,108	-2,298	-2,529	-2,860	-4,413	-
	k_E^+	-2,105	-2,216	-2,314	-2,424	-2,741	-3,300
	k_H^-	1,012	1,112	1,214	1,349	1,870	-
	k_H^+	1,010	1,071	1,120	1,172	1,279	1,590

Из табл. 2, 3 видно, что при сближении трещины с отверстием закономерности изменения ЭМУС такие же, как и при сближении двух отверстий.

В табл. 4 для пластинки с отверстием радиуса a и краевой трещиной

Таблица 4

Точка	Величина	l/a			
		0,1	0,5	1,0	2,0
A	σ_y	3,023	3,189	3,426	3,855
B	σ_x	-1,056	-1,102	-1,200	-1,355
C	k_1^+	0,873	1,220	1,308	1,460
	$k_E^+ \cdot 10^2$	-0,237	-0,611	-0,833	-1,013
	$k_H^+ \cdot 10^4$	-0,061	-0,143	-0,212	-0,274

длины l (рис. 2, в) при ее растяжении усилиями $\sigma_y^\infty = p$ даны значения напряжений и КИНИН в зависимости от отношения l/a . Видно, что увеличение длины краевой трещины приводит к росту значений основных характеристик ЭМУС и КИНИН. Если длина трещины менее 0,1 радиуса отверстия, то влияние трещины на ЭМУС около отверстия вдали от точки ее выхода на контур незначительно.

В табл. 5 для пластинки с двумя трещинами вдоль одной прямой (рис. 2, г) в зависимости от отношения c/l расстояния между трещинами c к полудлине одной из них l приведены значения КИНИН для вершин левой трещины. Как видно из приведенных данных, с уменьшением расстояния меж-

Таблица 5

Нагрузка	КИНИН	c/l					
		2,0	1,0	0,5	0,1	0,01	0,0
$\sigma_y^\infty = p$	k_1^-	1,028	1,052	1,081	1,151	1,224	1,414
	k_1^+	1,048	1,113	1,229	1,795	3,839	-
	$k_E^- \cdot 10^2$	-0,660	-0,675	-0,694	-0,739	-0,786	-0,908
	$k_E^+ \cdot 10^2$	-0,673	-0,714	-0,789	-1,152	-2,465	-
	$k_H^- \cdot 10^4$	-0,185	-0,189	-0,194	-0,207	-0,220	-0,254
	$k_H^+ \cdot 10^4$	-0,188	-0,200	-0,221	-0,322	-0,690	-
$E_y^\infty = \varepsilon$	k_E^-	1,025	1,049	1,078	1,148	1,220	1,411
	k_E^+	1,045	1,110	1,226	1,790	3,829	-
	$k_D^- \cdot 10^2$	0,750	0,768	0,789	0,840	0,893	1,032
	$k_D^+ \cdot 10^2$	0,765	0,812	0,897	1,310	2,802	-
	$k_H^- \cdot 10^4$	-1,357	-1,388	-1,427	-1,519	-1,615	-1,867
	$k_H^+ \cdot 10^4$	-1,383	-1,469	-1,622	-2,369	-5,067	-
$H_y^\infty = \mu$	k_E^-	-2,149	-2,198	-2,260	-2,406	-2,559	-2,956
	k_E^+	-2,190	-2,325	-2,569	-3,752	-8,030	-
	k_H^-	1,029	1,052	1,082	1,152	1,225	1,415
	k_H^+	1,049	1,113	1,230	1,796	3,844	-
	k_B^-	86,475	88,471	90,943	96,828	102,975	118,969
	k_B^+	88,158	93,585	103,383	151,003	323,198	-

ду трещинами КИНИН по модулю возрастают. При $c/l < 0,001$ обе трещины могут рассматриваться как одна трещина полудлины $2l$.

В табл. 6 для пластинки с двумя параллельными трещинами (рис. 2, д) приведены значения КИНИН для концов одной из трещин в зависимости от отношения c/l расстояния между трещинами к их полудлине. Как следует

Таблица 6

Нагрузка	КИНИН	c/l				
		10,0	1,0	0,5	0,1	0,01
$\sigma_y^\infty = p$	k_1^\pm	0,985	0,774	0,732	0,689	0,677
	k_2^\pm	0,001	0,116	0,155	0,199	0,213
	$k_E^\pm \cdot 10^2$	-0,642	-0,582	-0,543	-0,508	-0,466
	$k_H^\pm \cdot 10^4$	-0,178	-0,157	-0,149	-0,137	-0,130
$E_y^\infty = \varepsilon$	$k_1^\pm \cdot 10^1$	-0,074	-0,190	-0,044	0,108	0,150
	$k_2^\pm \cdot 10^2$	0,072	-1,639	-3,937	-6,113	-6,636
	k_E^\pm	0,992	0,846	0,792	0,731	0,703
	$k_H^\pm \cdot 10^4$	-1,313	-1,135	-1,058	-0,969	-0,929
$H_y^\infty = \mu$	k_1^\pm	-0,642	-3,313	-0,801	2,116	2,888
	k_2^\pm	-0,063	1,056	5,759	10,794	11,856
	k_E^\pm	-2,085	-1,847	-1,706	-1,533	-1,745
	k_H^\pm	0,999	0,919	0,850	0,752	0,714

из описанных результатов, при сближении параллельных трещин значения КИНИН уменьшаются, за исключением коэффициента k_2 для растяжения, который при сближении растет.

РЕЗЮМЕ. С использованием методов комплексных потенциалов, конформных отображений и наименьших квадратов получены решения двумерной и плоской задач электромагнитоупругости для анизотропных тел из пьезоматериалов с отверстиями и трещинами. Для пластинки с различным количеством отверстий и трещин и их взаимным расположением проведены исследования ЭМУС и изменения КИНИН в зависимости от геометрических и физико-механических свойств материалов. Рассматривались случаи действия силовых, электрических и магнитных полей.

РЕЗЮМЕ. З використанням методів комплексних потенціалів, конформних відображень та методу найменших квадратів отримані розв'язки двовимірної та плоскої задач електромагнітопружності для анізотропних тіл з п'єзоматеріалів з отворами та тріщинами. Для пластинки з різною кількістю отворів та тріщин з їх взаємним розташуванням проведені дослідження ЕМУС та змінення КІНІН в залежності від геомет-

ричних та фізико-механічних властивостей матеріалів. Розглядались випадки дії силових, електричних та магнітних полей.

SUMMARY. Solutions of two-dimensional and plane electro-magneto-elastic problems for anisotropic bodies are derived using the complex potential, the conformal mapping and least-squares methods. Investigations of electro-magneto-elastic state and intensity of stress, inductions and tensions coefficients (CISIT) variations for plates with different number of cavities and cracks are carried out due to the various geometric and physiomechanical properties of materials. Influences of force, electric and magnetic fields are examined.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ: 1. *Kaloerov S. A., Baeva A. I., Glushchenko Yu. A.* Two-dimensional electroelastic problem for a multiply connected piezoelectric body // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – Vol. 39, № 1. – P. 77–84. 2. *Калоеров С. А., Бороненко О. И.* Двумерная задача магнитоупругости для многосвязного пьезомагнитного тела // *Прикладная механика.* – 2005. – Т. 41, № 10. – С. 64–74. 3. *Калоеров С.А, Баева А.И., Бороненко О.И.* Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных сред. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 270 с. 4. *Калоеров С. А., Горянская Е. С.* Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // *Концентрация напряжений.* – К.: А.С.К., 1998. – С.10–26. (Механика композитов: В 12 т. Т. 7). 5. *Zhao M. H., Wang H., Yang F., Liu T.* A magneto-electroelastic medium with an elliptical cavity under combined mechanical–electric–magnetic loading // *Theoret. and Appl. Fract. Mech.* – 2006. – Vol. 45. – P. 227–237.

Донецкий национальный университет

Поступила 11.11.2007

УДК 539.375

А. А. КАМИНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук; М. В. ДУДИК, канд. физ.-мат. наук;
Л. А. КИПНИС, д-р физ.-мат. наук

НАЧАЛЬНАЯ ЗОНА ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ В КОНЦЕ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ С ГЛАДКИМ КОНТАКТОМ БЕРЕГОВ

Решения задач о равновесии упругих тел с трещиной, расположенной на границе раздела сред, обнаруживают вблизи вершины последней сингулярные осцилляции напряжений и ограниченные по амплитуде осцилляции смещений, с вытекающим отсюда следствием о возможном перекрытии противоположных берегов. Физическая некорректность данного вывода привела к предложению М.Комниноу [1] модели межфазной трещины с малой зоной контакта берегов вблизи ее вершины. Введение контактной зоны устраняет физически некорректное осциллирующее поведение напряжений и смещений, оставляя в вершине трещины корневую сингулярность напряжений, приводящую к образованию и развитию боковой зоны предразрушения. В работе [2] исследована боковая зона предразрушения в конце трещины в упругом кусочно-однородном теле на этапе развития, когда ее размер намного меньше длины трещины, но достаточно велик, чтобы областью контакта берегов можно было пренебречь. В данной работе выполнен расчет зоны предразрушения на начальной стадии развития, когда ее длина намного меньше размера контактной зоны.

1. Постановка задачи. В условиях плоской деформации рассматривается задача о расчете начальной зоны предразрушения вблизи конца трещины в кусочно-однородном изотропном теле, расположенной на границе раздела двух различных однородных упругих сред. Зона предразрушения моделируется исходящей из конца трещины под углом α к границе раздела сред прямой линией разрыва нормального смещения, на которой нормальное напряжение равно заданной постоянной материала σ -сопротивлению отрыва, представляющего собой среднее по длине нормальное напряжение в зоне предразрушения. В соответствии с моделью Комниноу, предполагается гладкий контакт берегов вблизи конца трещины. Как показано в [3] (см. также [4]), размер контактной зоны по порядку величины близок к длине трещины в случае сложного нагружения тела, уменьшаясь при увеличении растягивающих нагрузок. Если к телу приложены только растягивающие нагрузки, длина контактной зоны оказывается экстремально малой, поэтому данный случай из нашего рассмотрения исключается.

На начальном этапе развития зоны предразрушения ее длина l значительно меньше не только длины трещины и всех других размеров тела, но и длины контактной зоны. Для исследования зоны предразрушения достаточно знать напряженно-деформированное состояние лишь вблизи линии разрыва. Это позволяет в качестве решения соответствующей статической

задачи теории упругости использовать решение задачи для кусочно-однородной изотропной упругой плоскости, составленной из двух полуплоскостей и содержащей на их границе полубесконечный разрез с гладким контактом берегов, из конца которого исходит линия разрыва, расположенная в более хрупком материале с упругими постоянными E_1, ν_1 .

На бесконечности главные члены разложений напряжений в асимптотические ряды представляют собой удовлетворяющее условию затухания напряжений доминирующее решение аналогичной задачи без линии разрыва, которое содержит произвольную постоянную k_{II} – коэффициент интенсивности напряжений, характеризующую интенсивность внешнего поля. Постоянная k_{II} считается заданной по условию задачи.

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \theta = 0, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0, \\ \theta = \alpha, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_r \rangle = 0 \\ \theta = \pm\pi, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\theta = \alpha, \quad r < l, \quad \sigma_\theta = \sigma, \quad \theta = \alpha, \quad r > l, \quad \langle u_\theta \rangle = 0, \quad (1.2)$$

$$\theta = \alpha, \quad r \rightarrow \infty, \quad \sigma_\theta = \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi r}} F(\alpha) + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad (1.3)$$

где

$$F(\alpha) = -\frac{1}{4(1+e\chi_2)} \left\{ 3(1+e\chi_2) \sin \frac{\alpha}{2} + [2(e+\chi_1)+1+e\chi_2] \sin \frac{3\alpha}{2} \right\};$$

$$e = \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1} e_0; \quad e_0 = \frac{E_1}{E_2}; \quad \chi_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)};$$

$\langle f \rangle$ – скачок величины f ; E_1, E_2 и ν_1, ν_2 – модули Юнга и коэффициенты Пуассона контактирующих сред.

Для образования зоны предразрушения необходимо, чтобы напряжение σ_θ было растягивающим; при $k_{II} < 0$ это приводит к условию $F(\theta) < 0$. Данное условие выполняется в интервале углов $0 < \theta < \alpha_1$, где

$$\alpha_1 = 2 \arcsin \sqrt{\frac{3(e+\chi_1+1+e\chi_2)}{2[(2e+\chi_1)+(1+e\chi_2)]}}.$$

Вблизи конца линии разрыва в силу общих положений о поведении напряжений в окрестностях угловых точек упругих тел [5, 6] реализуется асимптотика, представляющая собой удовлетворяющее условию непрерывности смещений доминирующее решение однородной задачи теории упругости для плоскости, содержащей полубесконечную прямую линию разрыва. В частности, справедливы асимптотики:

$$\theta = \alpha, \quad r \rightarrow l+0, \quad \sigma_\theta \sim \frac{K}{\sqrt{2\pi(r-l)}},$$

$$\theta = \alpha, \quad r \rightarrow l-0, \quad \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \sim -\frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1} \frac{K}{\sqrt{2\pi(l-r)}}. \quad (1.4)$$

Коэффициент интенсивности напряжений K в конце линии разрыва подлежит определению.

Решение сформулированной краевой задачи теории упругости представим в виде суммы решений следующих двух задач. Первая отличается от нее тем, что в (1.2) вместо первого условия примем

$$\theta = \alpha, \quad r < l, \quad \sigma_\theta = \sigma - \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi r}} F(\alpha), \quad (1.5)$$

а на бесконечности напряжения затухают как $o(1/r)$. Вторая задача – аналогичная задача без линии разрыва, решение которой известно, поэтому достаточно найти решение первой задачи.

2. Решение уравнения Винера-Хопфа и расчет зоны предразрушения. Для построения решения задачи используется метод Винера-Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина [7, 8]. Применяя преобразование Меллина к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука, условиям (1.1) и учитывая второе условие (1.2) и условие (1.5), приходим к функциональному уравнению Винера-Хопфа первой задачи:

$$\Phi^+(p) + \frac{\sigma}{p+1} + \frac{\sigma_1}{p+1/2} = \operatorname{ctg}(p\pi) G(p) \Phi^-(p),$$

где

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \sigma_\theta(\rho l, \alpha) \rho^p d\rho,$$

$$\Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \Big|_{r=\rho l, \theta=\alpha} \rho^p d\rho,$$

$$\sigma_1 = -\frac{F(\alpha)k_{II}}{\sqrt{2\pi l}}, \quad G(p) = \frac{D_1(p)}{D_0(p)},$$

$$D_0(p) = 2(e + \chi_1)(1 + e\chi_2) [(e + \chi_1) + (1 + e\chi_2)] \cos^2 p\pi,$$

$$D_1(p) = (1 + \chi_1) \left[(e + \chi_1)^2 \Delta_1(p) + (e + \chi_1)(1 + e\chi_2) \Delta_2(p) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (1 + e\chi_2)^2 \Delta_3(p) \Big] + e(1 + \chi_2)(e + \chi_1)(1 + e\chi_2) \Delta_4(p), \\
\Delta_1(p) &= \cos^2 \alpha - \sin^2 p(\pi - \alpha), \\
\Delta_2(p) &= p \sin 2\alpha \sin 2p\alpha + \cos 2\alpha \cos 2p\alpha + \cos 2p\pi, \\
\Delta_3(p) &= \Delta_1(p) + 4p^2 \sin^2 \alpha \cos^2 p\alpha - p \sin 2\alpha \sin 2p\alpha - \\
& - 4 \sin p\alpha \cos p\pi \sin p(\pi - \alpha), \\
\Delta_4(p) &= 2 \cos p\pi \Big[2p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi - 2\alpha) + \\
& + p \sin 2\alpha \sin p(\pi - 2\alpha) - 2 \sin p\alpha \sin p(\pi - \alpha) \Big].
\end{aligned}$$

$-\delta_1 < \operatorname{Re} p < \delta_2$, δ_1 и δ_2 – достаточно малые положительные числа.

Точное решение уравнения Винера-Хопфа можно получить так же, как в случае задачи, рассмотренной в [9]. Это решение имеет вид:

$$\begin{aligned}
\Phi^+(p) &= -K^+(p)G^+(p) \left\{ \frac{\sigma}{p+1} \left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)} - \frac{1}{K^+(-1)G^+(-1)} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{\sigma_1}{p+1/2} \left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)} - \frac{1}{K^+(-1/2)G^+(-1/2)} \right] \right\} \quad (\operatorname{Re} p < 0); \\
\Phi^-(p) &= \frac{pG^-(p)}{K^-(p)} \left[\frac{\sigma}{(p+1)K^+(-1)G^+(-1)} + \right. \\
& \left. + \frac{\sigma_1}{(p+1/2)K^+(-1/2)G^+(-1/2)} \right] \quad (\operatorname{Re} p > 0); \\
\exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] &= \begin{cases} G^+(p), \operatorname{Re} p < 0 \\ G^-(p), \operatorname{Re} p > 0 \end{cases}, \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1/2 \mp p)} \quad (2.1)
\end{aligned}$$

($\Gamma(z)$ – гамма-функция).

Использование теоремы абелевого типа [7] и асимптотик (1.4) вместе с (2.1) позволяет найти асимптотику трансформанты $\Phi^-(p)$:

$$\Phi^-(p) \sim -\frac{K}{\sqrt{2pl}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \left[\frac{\sigma}{K^+(-1)G^+(-1)} + \frac{\sigma_1}{K^+(-1/2)G^+(-1/2)} \right] \quad (p \rightarrow \infty),$$

откуда определяется коэффициент интенсивности напряжений в конце ли-

нии разрыва:

$$K = -\sqrt{2l} \left[\frac{\sigma}{K^+(-1)G^+(-1)} + \frac{\sigma_1}{K^+(-1/2)G^+(-1/2)} \right].$$

Приравнивая его к нулю, приходим к выражению для длины зоны предразрушения:

$$l = Rl_0, \quad l_0 = \left(\frac{k_{II}}{\sigma} \right)^2, \quad R = \frac{8}{\pi^3} \left[\frac{F(\alpha)G_1}{G_2} \right]^2, \\ G_1 = \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln G(it)}{t^2 + 1} dt \right], \quad G_2 = \exp \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln G(it)}{4t^2 + 1} dt \right]. \quad (2.2)$$

Согласно (2.2), длина зоны предразрушения зависит от внешней нагрузки только посредством коэффициента интенсивности напряжений k_{II} в конце разреза. Длина зоны предразрушения обратно пропорциональна квадрату сопротивления отрыва материала, в котором происходит ее развитие. Направление развития начальной зоны предразрушения будем определять из условия максимума ее длины. Согласно (2.2), оно не зависит от величины нагрузки и способа нагружения.

Результаты расчетов угла наклона α зоны предразрушения к границе раздела сред и соответствующей ему длины в единицах l_0 , выполненных по формулам (2.2) для коэффициентов Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0,33$, представлены в таблице. Здесь же для сравнения приведены значения угла α_2 , определяемого из условия максимума растягивающего напряжения σ_θ ; со-

гласно (1.3), он равен $\alpha_2 = 2 \arccos \sqrt{\frac{3(e + \chi_1) + (1 + e\chi_2)}{2[2(e + \chi_1) + (1 + e\chi_2)]}}$.

e_0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
α°	81,2	82,1	82,8	83,4	84,0	84,4	84,8	85,2	85,4
l/l_0	0,1001	0,0942	0,0899	0,0866	0,0839	0,0818	0,0801	0,0786	0,0773
α_2°	67,9	68,4	68,8	69,1	69,4	69,7	69,9	70,2	70,4

Анализ результатов позволяет сделать вывод, что под влиянием контакта берегов трещины происходит большее отклонение направления начальной зоны предразрушения, чем это следует из условия максимума растягивающего напряжения. Данный вывод согласуется с экспериментальными

ми результатами [10], которые показывают почти перпендикулярное распространение трещины на начальном этапе поворота от границы раздела сред.

РЕЗЮМЕ. В умовах плоскої деформації методом Вінера-Хопфа здійснено розрахунок початкової зони передруйнування біля кінця міжфазної тріщини в кусково-однорідному ізотропному пружному тілі, береги якої контактують без тертя. Зона передруйнування моделюється прямою лінією розриву нормального зміщення, що виходить з кінця тріщини під кутом до межі розділу середовищ. Досліджені залежності довжини зони передруйнування і кута нахилу від пружних параметрів тіла.

SUMMARY. The calculation of the initial prefracture zone near the end of the interfacial crack with smooth contact between the crack lips in piece-homogeneous isotropic elastic body under plane strain by the Wiener-Hopf method is presented. The prefracture zone is modeled by the direct line of normal displacement rupture emerging from the end of the crack. The dependences of the length of the prefracture zone and of the angle of the slope on the elastic parameters of the body are investigated.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. *Comninou M.* The interface crack // *J. Appl. Mech.* – 1977. – Vol. 44, № 4. – P. 631–636. 2. *Каминский А.А., Дудик М.В., Фенькив В.М.* Расчет направления зоны предразрушения в конце трещины на границе раздела различных упругих сред // *Теорет. и прикладная механика.* – 2006. – Вып. 42. – С. 29–34. 3. *Comninou M., Schmueser D.* The interface crack in combined tension – compression and shear field // *Trans. ASME. Journ. Appl. Mech.* – 1979. – Vol.46. – P. 345–348. 4. *Острик В.И., Улитко А.Ф.* Метод Винера – Хопфа в контактных задачах теории упругости. – К.: Наук. думка, 2006. – 328 с. 5. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с. 6. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с. 7. *Нобл Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с. 8. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402 с. 9. *Дудик М.В.* О пластической зоне в конце трещины, выходящей на границу раздела сред // *Теорет. и прикладная механика.* – 2005. – Вып. 41. – С.44–52. 10. *Shin D.K., Lee J.J.* Fracture parameters of interfacial crack of biomaterial under the impact loading // *Int. J. Sol. Struct.* – 2001. – Vol.31. – P.5303–5322.

*Институт механики НАН Украины, г.Киев
Уманский государственный педагогический
университет*

Поступила 1.11.2007

УДК 539.375

А. А. КАМИНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, Л. А. КИПНИС, д-р физ.-мат. наук,
Г. А. ХАЗИН, канд. физ.-мат. наук, Т. В. ПОЛИЩУК

О РАСЧЕТЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ В УГЛОВОЙ ТОЧКЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ТЕЛА

В литературе по механике разрушения опубликовано большое число работ, посвященных плоским задачам о расчетах зон предразрушения вблизи концов трещин и других угловых точек – концентраторов напряжений в однородных телах, а также вблизи концов трещин в кусочно-однородных телах при условии, что данные зоны моделируются линиями разрыва смещения [1–9]. Значительно меньше работ этого направления относится к угловым точкам кусочно-однородных тел. В данной работе в условиях плоской симметричной задачи в рамках модели с линиями разрыва касательного смещения осуществляется расчет зоны предразрушения в вершине клиновидного выреза в кусочно-однородном изотропном упруго-пластическом теле, выходящего на негладкую границу раздела двух различных сред, и в угловой точке такой границы.

1. Постановка задачи о вырезе. Пусть кусочно-однородное изотропное упругопластическое тело, находящееся в условиях плоской деформации, составлено из различных однородных частей, соединенных между собой тонким связующим слоем, материал которого более пластичный, чем материалы этих частей. Предположим, что одна из составных частей тела содержит клиновидный вырез, вершина которого совпадает с угловой точкой O границы раздела двух сред. Рассматриваемая область и изучаемая ниже задача считаются симметричными относительно биссектрисы угла между линиями границы раздела сред.

Уже при сколь угодно малых внешних нагрузках вблизи угловой точки O , представляющей собой остроконечный концентратор напряжений, появляется и развивается пластическая зона предразрушения. Будем изучать лишь начальную стадию ее развития, считая внешние нагрузки достаточно малыми. Тогда размер зоны предразрушения будет значительно меньше размеров тела. В силу свойства материала связующего слоя зона предразрушения будет развиваться вдоль границы раздела сред в виде пары узких полосок, исходящих из угловой точки.

Необходимо определить длину пластической зоны предразрушения и исследовать напряженное состояние вблизи угловой точки.

Поскольку в зоне предразрушения преимущественные деформации развиваются по механизму сдвига, полоску-зону будем моделировать линией разрыва касательного смещения, на которой касательное напряжение равно заданной постоянной связывающего материала τ . С учетом малости зоны предразрушения приходим к соответствующей статической симмет-

ричной задаче теории упругости (задача I) для кусочно-однородной плоскости содержащей клиновидный вырез и прямолинейные разрезы (рис. 1).

На бесконечности реализуется асимптотика, представляющая собой известное решение аналогичной задачи без разрезов (задача K), порождаемое наименьшим на интервале $(-1; 0)$ корнем ее характеристического уравнения. Произвольная постоянная C , входящая в это решение, считается заданной. Она характеризует интенсивность внешнего поля и должна определяться из решения внешней задачи.

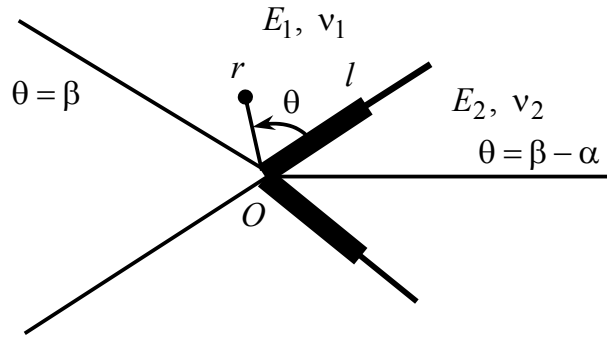


Рис. 1

Граничные условия задачи имеют следующий вид:

$$\theta = \beta, \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0; \quad \theta = \beta - \alpha, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0; \quad (1.1)$$

$$\theta = 0, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = 0; \quad (1.2)$$

$$\theta = 0, \quad r < l, \quad \tau_{r\theta} = \tau_1; \quad \theta = 0, \quad r > l, \quad \langle u_r \rangle = 0; \quad (1.3)$$

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \tau_{r\theta} = Cgr^\lambda + o(1/r). \quad (1.4)$$

Здесь $\pi/2 < \alpha < \pi$; $0 < \beta < \alpha$; $\beta - \alpha \leq \theta \leq \beta$; $\langle a \rangle$ – скачок a ; λ – наименьший на интервале $(-1; 0)$ корень уравнения

$$D(-x-1) = 0, \quad D(z) = b_0(z) + b_1(z)e + b_2(z)e^2;$$

$$b_0(z) = [\sin 2z(\alpha - \beta) + z \sin 2(\alpha - \beta)] \left[(1 + \varkappa_1)^2 - 4(\varkappa_1 \sin^2 z\beta - z^2 \sin^2 \beta) \right],$$

$$b_1(z) = (1 + \varkappa_1)(1 + \varkappa_2)(\sin 2z\alpha + z \sin 2\alpha) + 4[\varkappa_2 \sin 2z(\alpha - \beta) - z \sin 2(\alpha - \beta)] (\sin^2 z\beta - z^2 \sin^2 \beta) - [\sin 2z(\alpha - \beta) + z \sin 2(\alpha - \beta)] [(1 + \varkappa_1)(1 + \varkappa_2) - 4(\varkappa_1 \sin^2 z\beta + z^2 \sin^2 \beta)],$$

$$b_2(z) = -4[\varkappa_2 \sin 2z(\alpha - \beta) - z \sin 2(\alpha - \beta)] (\sin^2 z\beta - z^2 \sin^2 \beta),$$

$$e = \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1} e_0, \quad e_0 = \frac{E_1}{E_2}, \quad \varkappa_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}; \quad (1.5)$$

E_1, E_2 – модули Юнга; ν_1, ν_2 – коэффициенты Пуассона; $g(\alpha, \beta, e_0, \nu_1, \nu_2)$ – известная функция, выражение для которой громоздко и здесь не приводится; $\tau_1 = \tau$, если $Cg > 0$; $\tau_1 = -\tau$, если $Cg < 0$.

Уравнение (1.5) представляет собой характеристическое уравнение задачи К.

Зависимость $\lambda(\beta)$ при $\alpha = 3\pi/4$, $e_0 = 0,5$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ представлена на рис. 2.

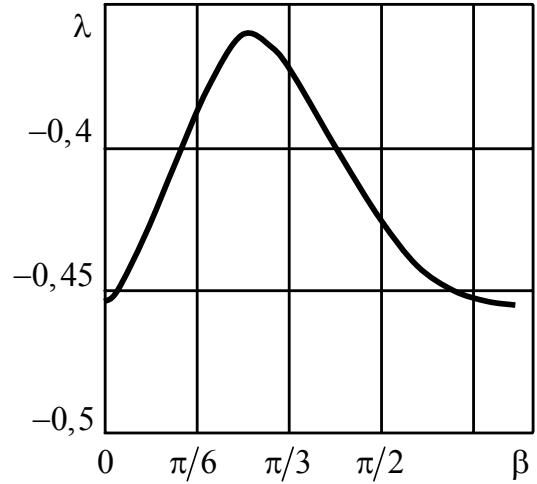


Рис. 2

2. Построение решения и определение длины зоны предразрушения. Для построения решения задачи теории упругости с граничными условиями (1.1)–(1.4) (рис. 1) был использован метод Винера-Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина [10, 11]. Рассматриваемая задача сведена к следующему функциональному уравнению Винера-Хопфа:

$$\Phi^+(p) + \frac{\tau_1}{p+1} + \frac{\tau_2}{p+\lambda+1} = -A(\operatorname{tg} p\pi)G(p)\Phi^-(p),$$

$$A = \frac{(1+\varkappa_1)[1+\varkappa_1+(1+\varkappa_2)e]}{2[\varkappa_1+(1+\varkappa_1\varkappa_2)e+\varkappa_2e^2]}, \quad G(p) = \frac{G_1(p)}{G_2(p)},$$

$$G_1(p) = 2[\varkappa_1+(1+\varkappa_1\varkappa_2)e+\varkappa_2e^2][a_0(p)+a_1(p)e]\cos p\pi,$$

$$G_2(p) = [1+\varkappa_1+(1+\varkappa_2)e][b_0(p)+b_1(p)e+b_2(p)e^2]\sin p\pi,$$

$$a_0(p) = (1+\varkappa_1)[\sin 2p(\alpha-\beta)+p\sin 2(\alpha-\beta)](\sin 2p\beta+p\sin 2\beta),$$

$$a_1(p) = 2(1+\varkappa_2)[\cos 2p(\alpha-\beta)-\cos 2(\alpha-\beta)](\sin^2 p\beta-p^2\sin^2 \beta),$$

$$\tau_2 = -Cgl^\lambda, \quad \Phi^+(p) = \int_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho l, 0)\rho^p d\rho,$$

$$\Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\theta=0}^{r=\rho l} \rho^p d\rho. \quad (2.1)$$

Здесь $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$ ($\varepsilon_{1,2}$ – достаточно малые положительные числа).

Подобные уравнения решены, например, в [2, 8].

На основе решения уравнения (2.1) из условия ограниченности напряжений вблизи конца пластической линии разрыва определяется длина $2l$ зоны предразрушения. Имеет место формула вида

$$l = L(\alpha, \beta, e_0, \nu_1, \nu_2) \left(\frac{|C|}{\tau_1} \right)^{-1/\lambda}, \quad (2.2)$$

где L – известная функция.

Формула (2.2) устанавливает закон развития начальной зоны предразрушения вблизи рассматриваемого остроконечного концентратора напряжений.

С помощью решения уравнения (2.1) и формулы обращения Меллина определяются напряжения.

3. Анализ поведения напряжений в области деструкции материала.

Применяя к интегралам от функций комплексной переменной, через которые выражаются напряжения, теорему о вычетах, находим главные члены разложений напряжений в асимптотические ряды при $r \rightarrow 0$. В частности, справедлива формула вида

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} = & r^{\lambda_1} f_1(\theta, \alpha, \beta, e_0, \nu_1, \nu_2) C_1 + f_2(\theta, \alpha, \beta, e_0, \nu_1, \nu_2) \tau_1 + \\ & + f(r, \theta, \alpha, \beta, e_0, \nu_1, \nu_2, l, \tau_1, C) \quad (r \rightarrow 0), \\ C_1 = & \varphi_1(\alpha, \beta, e_0, \nu_1, \nu_2) \tau_1 l^{-\lambda_1} + \varphi_2(\alpha, \beta, e_0, \nu_1, \nu_2) C l^{\lambda-\lambda_1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $\beta \in (0; \alpha - \pi/2) \cup (\pi/2; \alpha)$; $0 < \theta < \beta$; $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$ – известные функции; f – функция, стремящаяся к нулю при $r \rightarrow 0$; λ_1 – единственный на интервале $(-1; 0)$ корень уравнения

$$\begin{aligned} & (1 + \varkappa_1) [\sin 2(x+1)(\alpha - \beta) + (x+1) \sin 2(\alpha - \beta)] \times \\ & \times [\sin 2(x+1)\beta + (x+1) \sin 2\beta] + \\ & + 2(1 + \varkappa_2) [\cos 2(x+1)(\alpha - \beta) - \cos 2(\alpha - \beta)] \times \\ & \times [\sin^2(x+1)\beta - (x+1)^2 \sin^2 \beta] e = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

При $\alpha - \pi/2 < \beta < \pi/2$ уравнение (3.2) на интервале $(-1; 0)$ корней не имеет и справедлива первая формула (3.1), в которой отсутствует первое слагае-

мое. Зависимость λ_1 от угла β при фиксированных α , e_0 , ν_1 , ν_2 изображена на рис. 3.

При $\beta \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow \alpha$ функция $\lambda_1(\beta)$ стремится к единственному на интервале $(-1; 0)$ корню λ_0 характеристического уравнения

$$\sin 2(\lambda + 1)\alpha + (\lambda + 1)\sin 2\alpha = 0$$

симметричной задачи теории упругости для однородного клина со свободными от напряжений гранями. Значения корней λ и λ_1 для $\alpha_0 = 3\pi/4$, $e_0 = 0,5$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ при некоторых значениях β приведены в таблице.

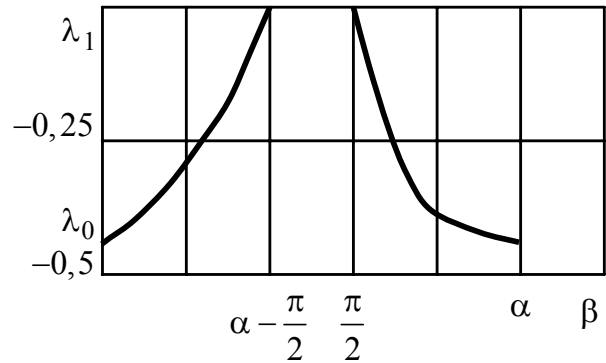


Рис. 3

Анализ полученных результатов позволят сделать следующие выводы. В определенных промежутках изменения параметров угловая точка O является особой точкой исследуемой краевой задачи. Она представляет со-

β	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{18}$
$-\lambda \times 10^3$	436	412	385	365	360	370	388
$-\lambda_1 \times 10^3$	413	347	248	99	-	-	-

β	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{18}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{18}$	$\frac{3\pi}{4}$
$-\lambda \times 10^3$	407	424	437	445	450	453	456
$-\lambda_1 \times 10^3$	-	-	171	284	367	429	456

бой концентратор напряжений. При приближении точки области к точке O напряжения стремятся к бесконечности. Стремление напряжений к бесконечности при $r \rightarrow 0$ соответствует тому, что часть зоны предразрушения, находящаяся вблизи угловой точки, является областью деструкции материала, уровень напряжений в которой чрезвычайно высок. Особенность напряжений в точке O степенная. Показатель степени сингулярности напряжений $\lambda_1 \in (-1; 0)$ зависит от; углов α , β , отношения модулей Юнга $e_0 = E_1 / E_2$ и коэффициентов Пуассона ν_1, ν_2 . С ростом угла β от 0 до $\alpha - \pi/2$ концентрация напряжений в области деструкции материала осла-

бевае, а с ростом его от $\pi/2$ до α – усиливается. При $\alpha - \pi/2 < \beta < \pi/2$ угловая точка O не является концентратором напряжений.

Если $0 < \beta < \alpha - \pi/2$, то с увеличением e_0 концентрация напряжений в области деструкции материала усиливается. Если $\pi/2 < \beta < \alpha$, то с увеличением e_0 концентрация напряжений в области деструкции материала ослабевает. С увеличением угла α концентрация напряжений в области деструкции материала усиливается.

4. О пластической зоне предразрушения в угловой точке границы раздела сред. В случае отсутствия выреза, для расчета пластической зоны предразрушения в угловой точке границы раздела сред служит плоская статическая симметричная задача теории упругости для кусочно-однородной изотропной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, содержащей линии разрыва касательного смещения конечной длины, исходящие из угловой точки и расположенные на границе (задача II). Эта задача сводится к следующему функциональному уравнению Винера – Хопфа:

$$\Phi^+(p) + \frac{\tau_1}{p+1} + \frac{\tau_2^0}{p+\lambda_2+1} = A(\operatorname{ctg} p\pi)H(p)\Phi^-(p),$$

$$H(p) = \frac{H_1(p)}{H_2(p)},$$

$$H_1(p) = [\alpha_1 + (1 + \alpha_1\alpha_2)e + \alpha_2e^2][C_0(p) + C_1(p)e] \sin p\pi,$$

$$H_2(p) = [1 + \alpha_1 + (1 + \alpha_2)e][d_0(p) + d_1(p)e + d_2(p)e^2] \cos p\pi,$$

$$C_0(p) = (1 + \alpha_1)[\cos 2p(\pi - \gamma) - \cos 2\gamma](\sin 2p\gamma + p \sin 2\gamma),$$

$$C_1(p) = (1 + \alpha_2)(\cos 2p\gamma - \cos 2\gamma)(\sin 2p(\pi - \gamma) - p \sin 2\gamma),$$

$$d_0(p) = (\sin 2p\gamma + p \sin 2\gamma)[\alpha_1 \sin 2p(\pi - \gamma) + p \sin 2\gamma],$$

$$d_1(p) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \sin^2 p\pi - (\sin 2p\gamma + p \sin 2\gamma) \times$$

$$\times [\alpha_1 \sin 2p(\pi - \gamma) + p \sin 2\gamma] - [\sin 2p(\pi - \gamma) - p \sin 2\gamma] \times$$

$$\times (\alpha_2 \sin 2p\gamma - p \sin 2\gamma),$$

$$d_2(p) = [\sin 2p(\pi - \gamma) - p \sin 2\gamma](\alpha_2 \sin 2p\gamma - p \sin 2\gamma),$$

$$\tau_2^0 = -Chl^{\lambda_2}. \quad (4.1)$$

Здесь $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$; 2γ – угол раствора клина с постоянными E_2, ν_2 ; $\tau_1 = \tau$, если $Ch > 0$; $\tau_1 = -\tau$, если $Ch < 0$; $h(\gamma, e_0, \nu_1, \nu_2)$ – известная

функция; λ_2 – единственный на интервале $(-1; 0)$ корень уравнения

$$\Delta(-x-1) = 0, \quad \Delta(z) = d_0(z) + d_1(z)e + d_2(z)e^2. \quad (4.2)$$

Уравнение (4.2) представляет собой характеристическое уравнение задачи, аналогичной задаче II, без линий разрыва.

На основе решения уравнения (4.1), выражаемого через интегралы типа Коши и Γ -функции, определяется длина пластической зоны предразрушения.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто симетричну задачу про розрахунок пластичної зони передруйнування у кутовій точці кусково-однорідного ізотропного тіла. Зона передруйнування моделюється лініями розриву дотичного переміщення. Відповідна задача теорії пружності розв'язана методом Вінера-Хопфа.

SUMMARY. The symmetrical problem on calculation of the plastic prefracture zone at the corner point of the piece-homogeneous isotropic body is considered. The prefracture zone is modeled by lines of rupture of tangential displacement. The solution of the corresponding problem of the theory of elasticity is constructed by the Wiener-Hopf method.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. *Панасюк В.В., Саврук М.П.* Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – Т. 28, № 1. – С. 49–68. 2. *Каминский А.А., Кипнис Л.А., Хазин Г.А.* Расчет пластической зоны в угловой точке в рамках модели «трезубец» // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38, № 5. – С. 110–116. 3. *Comninou M.* The interface crack // J. Appl. Mech. – 1977. – Vol. 44, № 4. – P. 631–636. 4. *Comninou M., Schmueser D.* The interface crack in a combined tension-compression and shear field // J. Appl. Mech. – 1979. – Vol. 46, № 2. – P. 345–348. 5. *Gautesen A.K., Dundurs I.* The interface crack in a tension field // J. Appl. Mech. – 1987. – Vol. 54, № 1. – P. 93–98. 6. *Herrmann K.P., Loboda V.V.* On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic biomaterial // Arch. Appl. Mech. – 1999. – Vol. 69. – P. 317–335. 7. *Leblond I.B., Frelad I.* Crack kinking from an interface crack with initial contact between the crack lips // Europ. J. Mech. Solids. – 2001. – Vol. 20. – P. 931–951. 8. *Kaminsky A.A., Kipnis L.A., Dudik M. V.* Initial development of the prefracture zone near the tip of a crack reaching the interface between dissimilar media // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 40, № 2. – P. 176–182. 9. *Kaminsky A.A., Dudik M. V., Kipnis L.A.* On the direction development of a thin fracture process zone at the tip of an interfacial crack between dissimilar media // Int. Appl. Mech. – 2006. – Vol. 42, № 2. – P. 136–144. 10. *Нобл Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: 1962. – 279 с. 11. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402 с. *Институт механики НАН Украины, г. Киев*
Уманский государственный педагогический университет

Поступила 3.11.2007

УДК 539.37

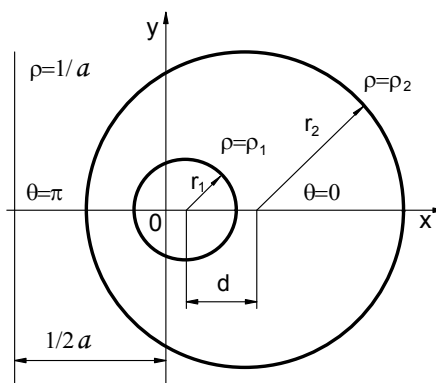
Е. А. СТОРОЖУК, д-р физ.- мат. наук, *И. С. ЧЕРНЫШЕНКО*, д-р техн. наук,
И. Б. РУДЕНКО

НЕУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ГИБКОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ВИДЕ ЭКСЦЕНТРИЧНОГО КОЛЬЦА

Основные результаты исследования напряженно-деформированного состояния около криволинейных отверстий в сферических оболочках получены при осесимметричном их деформировании. Результаты решения линейных, физически и геометрически нелинейных задач для изотропных и ортотропных (композитных) сферических оболочек, ослабленных центральным круговым отверстием, представлены в обобщающих монографиях и статьях [1–4]. Исследованию неосесимметричного деформирования сферических оболочек, ослабленных криволинейными отверстиями, с учетом реальных свойств конструкционных материалов (физической нелинейности) и больших (конечных) прогибов (геометрической нелинейности) посвящено незначительное количество работ. Так, результаты решения двумерных задач для сферической оболочки с эллиптическим отверстием в физически нелинейной постановке приведены в работах [4, 5] и при совместном учете двух нелинейных факторов – в работе [6], а для оболочки с эксцентричным круговым отверстием в физически нелинейной постановке – в работах [4, 7] и в геометрически нелинейной постановке – в работе [8]. Авторами работы [9] изучено распределение напряжений в сферической оболочке с двумя круговыми отверстиями при совместном учете пластических деформаций и конечных прогибов.

Представляет интерес решение двумерных задач для сферической оболочки в виде эксцентричного кольца при совместном учете физической и геометрической нелинейностей. В данной работе изучено влияние нелинейных факторов и геометрических параметров на распределение напряжений в сферической оболочке с эксцентрично расположенным круговым отверстием при действии внутреннего давления заданной интенсивности.

Постановка задачи. Рассмотрим тонкую сферическую оболочку радиуса R и толщины h , которая в плане занимает область в виде эксцентричного кругового кольца и нагружена поверхностными и краевыми усилиями заданной интенсивности. Обозначим радиусы внутреннего и внешнего контуров оболочки соответственно r_1 и r_2 , расстояние между их центрами – через d (рисунок). Примем, что материал оболочки изотропный, однородный и находится



до нагружения в естественном ненагруженном и недеформированном состоянии. При значительных уровнях действующих нагрузок в оболочке возникают пластические деформации ее материала и имеют место большие (конечные) прогибы.

Для изучения процесса нелинейного деформирования срединную поверхность оболочки отнесем к ортогональной криволинейной системе координат (ρ, θ) , связанной с декартовыми прямоугольными координатами (x, y) зависимостями:

$$x = \rho \frac{\cos \theta - a\rho}{1 - 2a\rho \cos \theta + a^2 \rho^2}, \quad y = \frac{\rho \sin \theta}{1 - 2a\rho \cos \theta + a^2 \rho^2}. \quad (1)$$

Кривые $\rho = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ представляют собой два ортогональных семейства окружностей, линии центров которых лежат на осях соответственно x и y . Внутренний и внешний контуры оболочки совпадают с координатными линиями соответственно $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_2$. Параметр a и координаты контуров оболочки определяем по формулам:

$$a = d / \sqrt{(r_2^2 - r_1^2)^2 - 2d^2(r_1^2 + r_2^2) + d^4};$$

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{1 + 4r_1^2 a^2} - 1}{2r_1 a^2}; \quad \rho_2 = \frac{\sqrt{1 + 4r_2^2 a^2} - 1}{2r_2 a^2}. \quad (2)$$

Методика численного решения нелинейных задач. Система разрешающих уравнений, описывающих нелинейное деформирование упруго-пластических сферических оболочек с эксцентричным отверстием при конечных прогибах, получена из принципа возможных перемещений с использованием процедуры пошагового нагружения в сочетании с модифицированным методом Ньютона-Канторовича, методом дополнительных напряжений и методом конечных элементов (МКЭ).

Связь между компонентами тензора деформаций и вектора перемещений примем на основе геометрически нелинейной теории оболочек в квадратичном приближении. Выражения для компонент мембранной деформации $(\varepsilon_{ij}, i, j = \rho, \theta)$ запишем в векторной форме, а для компонент изгибной деформации $(\mu_{ij}, i, j = \rho, \theta)$ – в обычной (скалярной) форме:

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{\partial \vec{U}}{A_\rho \partial \rho} \cdot \vec{e}_\rho + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{U}}{A_\rho \partial \rho} \cdot \vec{n} \right)^2 \quad (\rho \rightarrow \theta),$$

$$\varepsilon_{\rho\theta} = \frac{\partial \vec{U}}{A_\rho \partial \rho} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{\partial \vec{U}}{A_\theta \partial \theta} \cdot \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial \vec{U}}{A_\rho \partial \rho} \cdot \vec{n} \right) \left(\frac{\partial \vec{U}}{A_\theta \partial \theta} \cdot \vec{n} \right),$$

$$\begin{aligned}\mu_{\rho\rho} &= -\frac{\partial\varphi_\rho}{A_\rho\partial\rho} - \frac{1}{A_\rho A_\theta} \frac{\partial A_\rho}{\partial\theta} \varphi_\theta \quad (\rho \leftrightarrow \theta), \\ \mu_{\rho\theta} &= -\frac{A_\rho}{A_\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\varphi_\rho}{A_\rho} \right) - \frac{A_\theta}{A_\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\frac{\varphi_\theta}{A_\theta} \right), \\ \varphi_\rho &= \frac{\partial w}{A_\rho \partial \rho} - \frac{u}{R} \quad (u, \rho \rightarrow v, \theta),\end{aligned}\quad (3)$$

где A_ρ, A_θ – параметры Ламе; $\vec{U} = u\vec{e}_\rho + v\vec{e}_\theta + w\vec{n} = u_1\vec{i}_1 + u_2\vec{i}_2 + u_3\vec{i}_3$ – вектор перемещений; $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{n}$ – орты криволинейной ортогональной системы координат (ρ, θ, γ) ; $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ – орты глобальной декартовой системы координат (X, Y, Z) .

Для исследования упруго-пластического деформирования рассматриваемых оболочек используем соотношения теории течения с изотропным упрочнением, в которой принято условие текучести Мизеса, а приращения пластических деформаций эквидистантной поверхности определяется согласно ассоциированному закону текучести [9]:

$$de_{\rho\rho}^P = \frac{3de_i^P}{2\sigma_i} S_{\rho\rho} \quad (\rho \rightarrow \theta), \quad de_{\rho\theta}^P = \frac{3de_i^P}{\sigma_i} S_{\rho\theta}, \quad (4)$$

где $S_{\rho\rho}, S_{\theta\theta}, S_{\rho\theta}$ – компоненты девиатора напряжений; σ_i, de_i^P – интенсивности напряжений и приращений пластических деформаций.

Линейная задача решается с помощью предложенной авторами модификации МКЭ для расчета тонких оболочек сложной геометрии. Особенность разработанного варианта МКЭ состоит в том, что углы поворота $\varphi_\rho, \varphi_\theta$ в выражениях для компонент изгибной деформации определяются не из формул (3), как это принято в традиционном МКЭ для тонких оболочек, а аппроксимируются полиномами с выполнением геометрических гипотез Кирхгофа-Лява только в узлах конечного элемента.

В результате линеаризации и дискретизации задача сводится к системе алгебраических уравнений, которая в матричной форме для n -го шага нагружения имеет вид

$$\left([K_0] + [K_\varphi] + [K_\sigma] \right) \{ \Delta q \} = \{ \Delta P \} - \{ \Delta \Omega \} + \{ \Delta \Psi \}, \quad (5)$$

где $[K_0]$ – матрица жесткости линейно-упругой оболочки; $[K_\varphi], [K_\sigma]$ – матрицы влияния начальных углов поворота и напряжений; $\{ \Delta q \}$ – вектор приращений узловых степеней свободы; $\{ \Delta P \}$ – вектор нагружений; $\{ \Delta \Omega \}$

– вектор нелинейностей; $\{\Delta\Psi\}$ – вектор невязок уравнений равновесия в конце $(n-1)$ -го шага нагружения.

Анализ числовых результатов. В качестве примера было исследовано напряженно-деформированное состояние сферической оболочки в виде эксцентричного кольца, изготовленной из сплава АМг-6 и находящейся под действием внутреннего давления интенсивности $q = 4 \cdot 10^5$ Па. Исследования проводились при следующих геометрических и физико-механических характеристиках оболочки: $R/h = 400$; $r_1/h = 30$; $r_2/r_1 = 6$; $E = 70$ ГПа; $\nu = 0,3 \dots 0,5$; $\sigma_n = 140$ МПа; $\varepsilon_n = 0,002$. Отношение d/r_1 принимало значения 0; 3; 4; 4,5. При проведении расчетов было принято, что отверстие закрыто крышкой специальной конструкции, которая передает на внутренний контур лишь действие перерезывающих усилий $Q_k = qr_1/2$; внешний контур – жестко закреплен. Учитывая геометрическую и силовую симметрию, исследования проводились в области $(\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2; 0 \leq \theta \leq \pi)$ на равномерной сетке 16x16 конечных элементов.

В табл. 1 представлены значения напряжений $(\sigma_\theta = \sigma_\theta^0 \cdot 10^5 \text{ Па})$, деформаций (ε_θ) и относительных прогибов (w/h) в двух точках контура отверстия $(\rho = \rho_1; \theta = 0)$ и $(\rho = \rho_1; \theta = \pi)$ на разных поверхностях оболочки $(\zeta = \pm 0, 5)$ как для задач в линейно-упругой постановке (ЛЗ), так и при совместном учете нелинейностей (ФГН). Данные приведены для различных значений расстояния между центрами внешнего и внутреннего контуров. Результаты вычислений напряжений $(\sigma_\theta^0; \sigma_\rho^0)$ и деформаций (ε_ρ) в точке $(\rho = \rho_2; \theta = \pi)$ внешнего контура на разных поверхностях оболочки представлены в табл.2.

Из приведенных данных следует, что максимальные окружные напряжения (σ_θ) , деформации (ε_θ) и прогибы (w) одновременно имеют место на контуре отверстия в точке $(\rho = \rho_1; \theta = \pi)$ для ЛЗ при $d/r_1 = 3; 4$ и в точке $(\rho = \rho_1; \theta = 0)$ для ФГН задачи при $d/r_1 = 4$. Наиболее опасным в этих точках является сечение на внешней поверхности оболочки. Сближение контуров оболочки приводит к перераспределению напряжений: свободный контур разгружается, а на жестко закрепленном концентрация напряжений возрастает. Совместный учет пластических деформаций материала и конечных прогибов приводит к выравниванию напряжений как по толщине оболочки, так и по контуру отверстия, а также к уменьшению максимальных напряжений по сравнению с результатами линейно-упругого решения на

Таблица 1

d/r	θ	ζ	σ_{θ}^0		$e_{\theta} \cdot 10^2$		w/h	
			ЛЗ	ФГН	ЛЗ	ФГН	ЛЗ	ФГН
4,5	0	0,5	5265	1853	0,7610	1,2020	1,561	1,825
		-0,5	3430	1769	0,4985	0,8264		
	π	0,5	3446	1658	0,4979	0,7607	1,071	1,273
		-0,5	2551	1501	0,3693	0,4758		
4,0	0	0,5	5114	1882	0,7392	1,1600	1,592	1,831
		-0,5	3116	1826	0,4526	0,7965		
	π	0,5	5421	1806	0,7827	1,1090	1,776	1,818
		-0,5	2958	1690	0,4297	0,7185		
3,0	0	0,5	5010	1958	0,7233	1,1220	1,579	1,828
		-0,5	3049	1929	0,4407	0,7693		
	π	0,5	5235	1858	0,7549	1,1750	1,710	1,943
		-0,5	3136	1805	0,4521	0,7928		
0,0	0	0,5	5141	1891	0,7367	1,1630	1,674	1,941
		-0,5	2961	1806	0,4241	0,7719		

Таблица 2

d/r	ζ	σ_{θ}^0		σ_{ρ}^0		$e_{\rho} \cdot 10^2$	
		ЛЗ	ФГН	ЛЗ	ФГН	ЛЗ	ФГН
4,5	0,5	-1320	-1097	-4399	-2225	-0,5718	-1,3310
	-0,5	1642	1135	5475	2295	0,7117	1,6540
4,0	0,5	-295	-590	-983	-1679	-0,1278	-0,2756
	-0,5	703	859	2344	1964	0,3048	0,5261
3,0	0,5	-116	-189	-387	-631	-0,0504	-0,0820
	-0,5	484	540	1612	1633	0,2095	0,2435
0,0	0,5	-190	-186	-633	-622	-0,0822	-0,0809
	-0,5	543	532	1811	1626	0,2354	0,2390

63%, 64%, 67%, 58% и к увеличению максимальных прогибов на 14%, 12%, 2%, 14%, а деформаций – на 37%, 36%, 33%, 54% соответственно для длины перемычки $d/r_1 = 0; 3; 4; 4,5$.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто пружнопластичний стан сферичних оболонок, послаблених ексцентричним круговим отвором, при врахуванні скінченних прогинів. Дано постановку задач та методику їх чисельного розв'язання. Досліджено розподіл напружень (деформацій, переміщень) вздовж контуру отвору та в зоні їх концентрації при врахуванні двох нелінійних факторів.

SUMMARY. The elasto-plastic state of spherical shells weakened by eccentric circular hole with allowance for finite deflections is considered. Formulation of the problems and the method of their numerical solutions are given. The distributions of stress (strain, displacements) along hole contour and into the zone of their concentration with allowance for two nonlinear factors were studied.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. *Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями* / Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов В.Н. и др. – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с. (Методы расчета оболочек: В 5 т. Т.1). 2. *Концентрация напряжений* / Под ред. Гузь А.Н., Космодамианский А.С., Шевченко В.П. – К.: А.С.К., 1998. – 387 с. (Механика композитов: В 12 т. Т.7). 3. *Guz A. N., Chernyshenko I. S., Shnerenko K. I. / Stress Concentration near Opening in Shells Made of Composites // Int. Appl. Mech. – 2001. – Vol. 37, N 2. – P. 139–181.* 4. *Macsimyyuk V. A., Chernyshenko I. S. Mixed Functional in the Theory of Nonlinear Elastic Shells // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 40, N 11. – P. 1226–1262.* 5. *Сторожук Е. А., Чернышенко И. С., Ясковец В. Л. Упругопластическое состояние сферических оболочек в зоне эллиптического отверстия // Прикладная механика. – 1989. – Т. 25, № 7.– С. 44–50.* 6. *Сторожук Е. А., Чернышенко И. С. Физически и геометрически нелинейное деформирование сферических оболочек с эллиптическим отверстием // Прикладная механика. – 2005.– Т. 41, № 6.– С. 95–104.* 7. *Ясковец В. Л., Сторожук Е. А., Чернышенко И. С. Упругопластическое равновесие сферической оболочки в виде эксцентричного кольца // Прикладная механика. –1990. – Т. 26, № 1. – С. 65–72.* 8. *Чернышенко И. С., Сторожук Е. А., Руденко И. Б. Напряженно-деформированное состояние гибкой сферической оболочки с эксцентричным круговым отверстием // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 10. – С.92–98.* 9. *Guz A. N., Storozhuk E. A., Chernyshenko I. S. Physically and Geometrically Nonlinear Static Problems for Thin-Walled Multiply Connected Shells // Int. Appl. Mech. – 2003. – Vol. 39, N 6. – P. 679–687.*

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Национальный университет ГНС Украины, г. Ирпень

Поступила 22.11.2007

УДК 539.3

В. С. ГУДРАМОВИЧ, д-р техн. наук, *П. А. ДЗЮБА*,
Е. Ф. ПРОКОПАЛО, канд. техн. наук

УСТОЙЧИВОСТЬ ОСЛАБЛЕННЫХ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ ГЛАДКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА

Тонкостенные цилиндрические оболочки находят чрезвычайно широкое применение в ракетной, авиационной, химической, судостроительной и других областях техники. Именно это обстоятельство обуславливает повышенный интерес к исследованию поведения оболочек при действии на них различных внешних нагрузок, поскольку обеспечение устойчивости и несущей способности тонкостенных деформируемых систем является важнейшей инженерной задачей. Теории устойчивости оболочек посвящено значительное количество публикаций, среди которых работы [1–4]. В этих и других исследованиях нашли достаточно удовлетворительные решения многие важные практические задачи.

Исходя из различных конструктивных и технологических требований на поверхности оболочки могут выполняться круговые отверстия. Наличие отверстия резко усложняет задачу определения критических нагрузок. Как известно [5], при решении проблемы устойчивости тонкостенных упругих оболочек с вырезами необходимо преодолеть специфические, вызванные только наличием отверстия, трудности. Сложность проблемы обуславливается тем, что еще задолго до достижения критического значения нагрузки возможно значительное перераспределение напряжений, вызванное взаимодействием двух полей – основного напряженного состояния, распределяющегося по всей поверхности оболочки, и зоны возмущения около отверстия. А это, в свою очередь, усугубляется невозможностью при решении задачи устойчивости разделить напряженное состояние на сумму двух – основного и дополнительного, вызванного наличием отверстия, как это принято при исследовании концентрации напряжений в оболочках с вырезами. Одним из факторов, существенно усложняющих анализ поведения оболочек с отверстиями, является то обстоятельство, что в процессе нагружения, вначале в районе отверстий происходит, как правило, локальная потеря устойчивости, причиной которой является концентрация напряжений в окрестности отверстий. При локальной потере устойчивости несущая способность оболочки, в большинстве случаев, не исчерпывается. Появление больших прогибов в области, примыкающей к отверстию, создает дополнительные трудности при исследовании явления общей потери устойчивости.

Указанные выше сложности, возникающие при теоретическом исследовании устойчивости оболочек с отверстиями, являются причиной того, что в настоящее время отсутствуют соответствующие решения, приемлемые для

практических расчетов. Казалось бы, в создавшейся ситуации центр тяжести исследований должен был бы переместиться в область экспериментальных исследований. Но этого не произошло, что можно, пожалуй, объяснить соответствующими техническими трудностями. Авторам известна только одна работа [6], в которой приводятся экспериментальные результаты по устойчивости цилиндрических оболочек с отверстиями при нагружении поперечной силой. В данной работе описаны результаты экспериментальных исследований устойчивости цилиндрической оболочки с отверстиями при изгибе поперечной силой.

Эксперименты проводились для оболочек из чертежной бумаги марки "В", ГОСТ 597-73. При выраженной ортотропии механических свойств эта бумага отличается весьма высокой стабильностью и однородностью показателей упругости, прочности и геометрии листа. Ее относительные упругие характеристики (отношение предела текучести к модулю упругости) выше, чем у большинства материалов, в том числе и высоколегированных нержавеющей сталей, что расширяет возможности проведения эксперимента в упругой стадии деформирования. Наиболее же важным свойством бумажного листа является его высокая технологичность при обработке, которая обусловила достаточно простые технологии изготовления высококачественных образцов и подготовки их к испытаниям, а также эффективные методики нагружения и измерения. Основные механические характеристики материала: модули упругости $E_x = 6,9 \cdot 10^9$ Па, $E_y = 3,45 \cdot 10^9$ Па, коэффициенты Пуассона $\nu_x = 0,3$; $\nu_y = 0,15$. Здесь индексы x , y соответствуют главным направлениям ортотропии бумажного листа. Толщина листа составляла $h = 2,3 \cdot 10^{-3}$ м. Эта величина для используемой партии бумаги была практически неизменной.

Прямоугольные заготовки, представляющие собой развертку оболочки, вырезались из стандартного листа бумаги таким образом, чтобы главное направление ортотропии (ось x) совпадало с образующей, а ось y с направляющей оболочки. На заготовках при помощи специальных высечек пробивались круговые отверстия. Такая технология обеспечивала в районе отверстий отсутствие визуально заметных остаточных деформаций. Изготовление оболочки осуществлялось путем склеивания заготовки на металлическом цилиндре. Ширина клееного шва составляла $5 \cdot 10^{-3}$ м. Внутренний радиус всех оболочек был принят равным $R = 37,5 \cdot 10^{-3}$ м, рабочая длина $L_p = 0,15$ м. Полная длина оболочек составляла 0,19 м. К криволинейным кромкам оболочки приклеивались металлические торцевые приспособления. Ширина приклея составляла 0,02 м. Такое закрепление краев обеспечивало граничные условия, близкие к жесткому защемлению.

На рис. 1 приведена схема нагружения. Оболочка (1) нижним торцом (2) неподвижно крепилась к горизонтальной плите (3). Нагружение осуществлялось через скобу (4), прикрепленную к верхнему торцу (5) при помощи стандартных гирь второго класса точности (6) через гибкий тросик (7) и блок (8). Всего испытано три серии оболочек общим количеством 370 штук.

Плоскость действия поперечной силы во всех испытаниях проходила через середину клевого шва. Направление силы выбиралось таким образом, чтобы в области шва действовали растягивающие напряжения. Оболочки первой серии были сплошными. На оболочках второй серии при постоянном диаметре отверстия ($d = 2,5 \cdot 10^{-2}$ м) изменялось его положение как относительно плоскости действия поперечной силы (β – угол по дуге окружности между максимально сжатой образующей и центром отверстия), так и по длине оболочки ($\lambda = H/l$ – здесь H – расстояние от нижнего торца оболочки до центра отверстия, рис. 1). На моделях третьей серии центр отверстия располагался в среднем поперечном сечении, при этом варьировался диаметр отверстия и его расположение вдоль угловой координаты. В каждой серии испытывались по три номинально идентичных оболочки для каждого значения изменяющихся параметров β , λ и d . Максимальные разбросы критических нагрузок не превышали 10%.

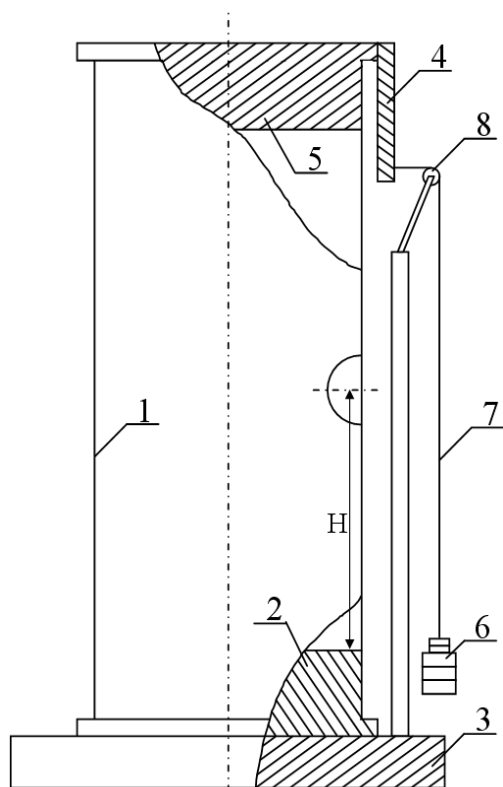


Рис.1

При действии поперечной силы на консольно закрепленную цилиндрическую оболочку в ней возникают как нормальные, так и касательные напряжения. Соотношение между максимальными значениями указанных напряжений зависит от геометрии оболочки и определяет величину критической силы и форму потери устойчивости. Геометрия испытываемых оболочек была выбрана таким образом, чтобы и нормальные, и касательные напряжения одновременно были близки к критическим.

Поскольку теоретическое решение задачи устойчивости при поперечном изгибе цилиндрических оболочек с отверстиями отсутствует, авторы сочли необходимым сопоставить с имеющимися теоретическими решениями [7–8] результаты испытаний оболочек без отверстий. Соответствующая формула для определения критической силы имеет вид

$$Q_{кр} = \frac{0,74\pi}{(1 - \nu_x \nu_y)^{5/8}} (E_x)^{5/8} \cdot (E_y)^{3/8} \cdot h^2 \sqrt[4]{\frac{R \cdot h}{L^2}}. \quad (1)$$

Для испытываемых оболочек значение расчетных критических напряжений по формуле (1) составило $Q_{кр} = 92,2 \text{ Н}$. Экспериментальное значение критической силы, полученное как среднее по результатам испытаний 10-ти оболочек, составило $Q_{кр} = 91,1 \text{ Н}$. Оно меньше расчетного на 1,2%, что

свидетельствует о достаточно высоком качестве моделей. Потеря устойчивости сплошных оболочек происходила с образованием ромбовидных вмятин в области максимальных сжимающих напряжений и наклонных волн, характерных для кручения в зонах наибольших касательных напряжений.

На рис. 2 приведены значения $\bar{Q}_{кр} = f(\beta)$ отношения критической нагрузки испытуемой оболочки, полученной по результатам испытаний трех номинально идентичных моделей, к среднему значению критической силы по результатам испытаний для десяти сплошных оболочек, в зависимости от дискретно изменяющегося в эксперименте угла β между наиболее сжатой образующей в плоскости изгиба и расположения центра отверстия для различных уровней λ его расположения по длине оболочки. При этом обозначено: "□" – результаты испытаний для $\lambda = 0,1$; "▲" – $\lambda = 0,5$; "●" – $\lambda = 0,75$; "○" – $\lambda = 0,9$.

Обращает на себя внимание, что при расположении отверстия зоне максимальных сжимающих напряжений $\beta = 0$; $\lambda = 0,1$, т. е. вблизи защемления, наблюдается снижение критической нагрузки по сравнению со сплош-

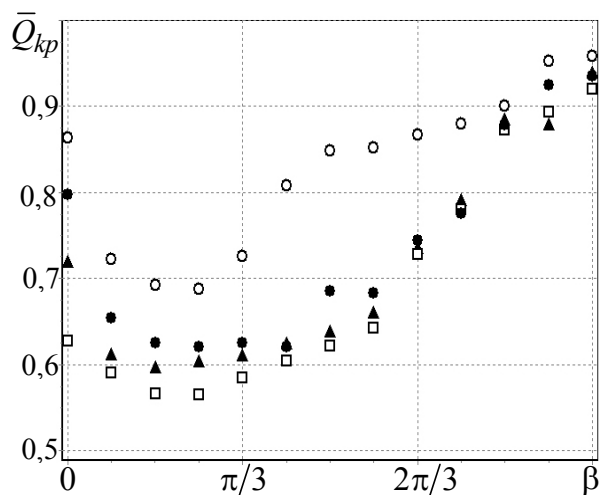


Рис. 2

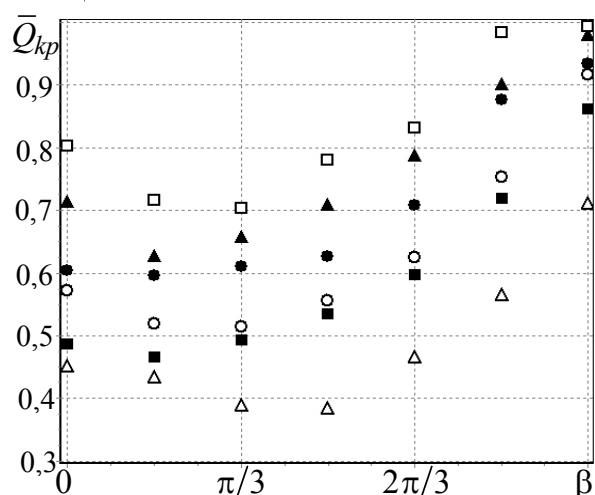


Рис. 3

ной оболочкой более чем на 37%. Если отверстие находится на той же образующей, но в области минимального сжимающего момента $\beta = 0$; $\lambda = 0,9$, т. е. вблизи свободного торца, то снижение критических усилий составляет около 13%. Изменение положения отверстия по дуговой координате, относительно максимально сжатой образующей вначале приводит к снижению критической силы. Её минимум достигается при удалении от максимально сжатой зоны на угол порядка $\beta = \pi/6 - \pi/3$, что можно объяснить «взаимодействием» ещё достаточно больших нормальных и уже значительных касательных напряжений. При дальнейшем удалении отверстия от максимально сжатой образующей наблюдался рост критической нагрузки. Наибольшее значение она принимает при расположении отверстия в максимально

растянутой области. Здесь снижение поперечной силы составляет всего около 5% для $\lambda = 0,9$ и порядка 8% для $\lambda = 0,1$. Зависимости относительной критической поперечной силы от параметра β для оболочек с отверстием различного диаметра представлены на рис. 3. Они свидетельствуют о естественной закономерности снижения критической нагрузки с увеличением диаметра отверстия. Изменение положения отверстия по дуговой координате приводит к закономерностям, аналогичным тем, которые наблюдались на оболочках второй серии. Волнообразование на оболочке с отверстием, расположенном в зоне максимальных сжимающих напряжений (рис. 4), типично для формы потери устойчивости оболочки с отверстием при осевом сжатии. Если отверстие расположено в зоне максимальных растягивающих напряжений ($\beta = \pi$; $\lambda = 0,1$), оно «инициирует» потерю устойчивости от касательных напряжений, в области действия которых возникают наклонные продолговатые волны, аналогичных тем, которые имеют место при кручении (рис. 5). На рис. 6 ($\beta = \pi/4$; $\lambda = 0,5$) приведены формы

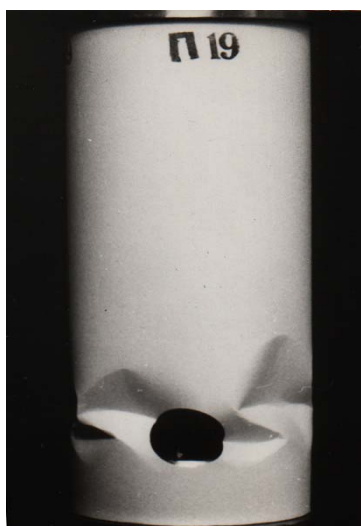


Рис. 4

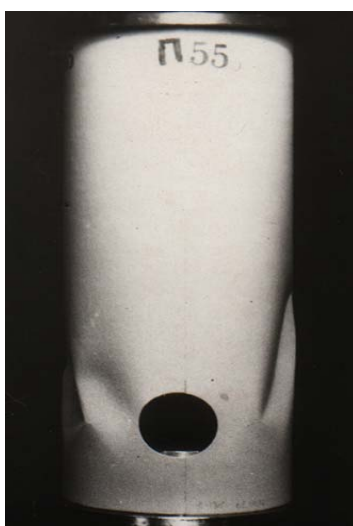


Рис. 5

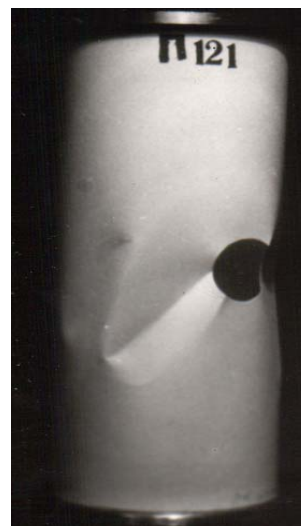


Рис. 6

потери устойчивости для оболочек с отверстием, расположенным симметрично относительно среднего поперечного сечения.

РЕЗЮМЕ. Викладені результати комплексних експериментальних досліджень впливу діаметра і місця розташування кругових отворів на стійкість циліндричних оболонок при поперечному згині. Одержані дані можуть бути використані для прогнозування несучої здатності неоднорідних оболонкових конструкцій з отворами.

SUMMARY. The results of complex experimental researches of influence such factors as diameter and locations of circular holes upon stability of cylindrical shell loaded by transversal bend are given. Findings can be used for prognosis of carrier power for heterogeneous shell constructions with openings.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. – М. Гостехиздат, 1955. – 567 с. 2. *Койтер В.* Устойчивость и закритическое поведение упругих систем. *Механика.* – М.: Иностран. лит-ра, 1960 – № 5. – С.99–110. 3. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с. 4. *Григолюк Э.И. Кабанов В.В.* Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1987. – 360 с. 5. *Теория оболочек, ослабленных отверстиями / Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов В.Н. и др.* – К.: Наук. думка, 1980. – 692 с. 6. *Тильш А.Л.* Устойчивость консольных цилиндрических оболочек, ослабленных вырезами, при изгибе поперечной силой // *Теория пластин и оболочек.* – Казань: Изд-во КГУ, 1973. – Вып.3. – С. 13–18. 7. *Даревский В.М.* Устойчивость консольной цилиндрической оболочки при изгибе поперечной силой с кручением и внутренним давлением // *Прочность цилиндрических оболочек.* – М.: Оборонгиз, 1959. – С.72–94. 8. *Даревский В.М., Кукуджанов С.Н.* Устойчивость цилиндрической ортотропной оболочки при кручении и нормальном давлении // *Прочность цилиндрических оболочек.* – М.: Оборонгиз, 1959. – С. 95–109.

Днепропетровский национальный университет

Поступила 15.11.2007

УДК 539.3

И. Ю. ХОМА, д-р физ.-мат. наук, Ю. И. ХОМА, канд. физ.-мат. наук

**ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ОКОЛО КРУГОВОГО ОТВЕРСТИЯ
В ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-
ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ**

Методом разложения искомым функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра координаты толщины в [1] получены уравнения термоупругости нетонких анизотропных оболочек с начальными напряжениями. В данной работе приводятся уравнения равновесия трансверсально-изотропной сферической оболочки с начальными напряжениями и на их основе рассматривается задача о термонапряженном состоянии пологой сферической оболочки, ослабленной круговым отверстием.

Постановка задачи и метод решения. Отнесем оболочку, занимающую область $\Omega = S \times [-h, h]$ трехмерного пространства, к криволинейной системе координат x^i ($i = 1, 2, 3$), нормально связанной со срединной поверхностью S . Следуя [2], представим компоненты вектора перемещений $u_j(x^1, x^2, x^3)$ и тензора напряжений $\sigma^{ij}(x^1, x^2, x^3)$, тепловых потоков $q^i(x^1, x^2, x^3)$ и приращение температуры $\theta(x^1, x^2, x^3)$ в виде конечного ряда Фурье по полиномам Лежандра $P_k(\zeta)$ координаты толщины:

$$\left\{ u_j(x^1, x^2, x^3), \theta(x^1, x^2, x^3) \right\} = \sum_{k=0}^N \left\{ u_j^{(k)}(x), \theta^{(k)}(x) \right\} P_k(\zeta),$$

$$\left\{ \sigma^{ij}(x^1, x^2, x^3), q^i(x^1, x^2, x^3) \right\} = \sum_{k=0}^N \left\{ h^{-1} \sigma_{(k)}^{ij}(x), h^{-1} q_{(k)}^i(x) \right\} P_k(\zeta), \quad (1)$$

где $x = (x^1, x^2)$ – точка на срединной поверхности S ; $\zeta = h^{-1}x^3$; $N = 2n$ ($n = 0, 1, 2 \dots, < \infty$).

Относительно коэффициентов разложений как функций двух независимых переменных имеем следующую систему уравнений [1]:

$$\nabla_{\alpha} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} - b_{\alpha}^{\beta} \sigma_{(k)}^{\alpha 3} - h^{-1} \underline{\sigma}_{(k)}^{3\beta} = 0; \quad \nabla_{\alpha} \sigma_{(k)}^{\alpha 3} + b_{\alpha\beta} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} - h^{-1} \underline{\sigma}_{(k)}^{33} = 0,$$

$$\nabla_{\alpha} q_{(k)}^{\alpha} - h^{-1} \underline{q}_{(k)}^3 + \left(k + \frac{1}{2} \right) \left[Q_3^+ - (-1)^k Q_3^- \right] = 0 \quad \left(k = \overline{0, N} \right), \quad (2)$$

где ∇_α – символ ковариантной производной; $b_{\alpha\beta}$ – коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S ; Q_3^+ , Q_3^- – значения притоков тепла на лицевых граничных поверхностях $x^3 = h$, $x^3 = -h$; $\underline{\sigma}_{(k)}^{3j} = (2k+1)\left(\sigma_{(k-1)}^{3j} + \sigma_{(k-3)}^{3j} + \dots\right)$, причем $\sigma_{(-k)}^{3j} = 0$, если $k > 0$.

Уравнения состояния для анизотропного тела записываются в виде

$$\sigma_{(k)}^{ij} = h\left(c^{ijlm} + p_{(0)}^{il}a^{jm}\right) - \beta^{ij}\theta^{(k)} \quad (k = \overline{0, N}), \quad (3)$$

а соотношения между моментами тепловых потоков $q_{(k)}^i$ и приращений температуры $\theta^{(k)}$ будут такими:

$$q_{(k)}^i = -h\left(\lambda^{i\alpha}\partial_\alpha\theta^{(k)} + \lambda^{i3}h^{-1}\underline{\theta}^{(k)}\right) \quad (k = \overline{0, N}), \quad (4)$$

где $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$, $\underline{\theta}^{(k)} = (2k+1)\left(\theta^{(k+1)} + \theta^{(k+3)} + \dots\right)$, $\theta^{(n)} = 0$, если $n > N$; $p_{(0)}^{il}$ – начальные напряжения; c^{ijlm} – тензор модулей упругости, λ^{il} – коэффициенты теплопроводности, $\beta^{ij} = c^{ijlm}\alpha_{lm}$, α_{lm} – коэффициенты теплового линейного расширения и сдвига, $\varepsilon_{lm}^{(k)}$ – моменты деформаций.

Рассмотрим некоторые частные случаи. Предположим, что материал оболочки трансверсально-изотропный, поверхность изотропии которого совпадает со срединной поверхностью S ; в качестве поверхности S примем сферу радиуса R . Кроме того, будем считать, что в оболочке имеет место поперечное начальное напряжение $p_{33}^{(0)} = \text{const}$ и теплообмен между оболочкой и окружающей средой осуществляется по закону Ньютона [3]

$$Q_3^+ = \alpha_{x_3}(\theta^+ - T_c^+); \quad Q_3^- = -\alpha_{x_3}(\theta^- - T_c^-), \quad (5)$$

где T_c^+ и T_c^- – температура окружающих сред; θ^+ и θ^- – температура на граничных поверхностях $x^3 = h$, $x^3 = -h$; α_{x_3} – коэффициент теплоотдачи с граничных поверхностей. Наличие начальных напряжений в определяющих уравнениях (3) приводит к несимметричности касательных напряжений.

На поверхности сферы, как известно [4], можно ввести изометрическую систему координат x, y , относительно которой первая квадратичная форма принимает вид $ds^2 = \Lambda(dx^2 + dy^2)$, $\Lambda > 0$. Кроме того, в изометрической системе координат целесообразно использовать комплексную форму записи рассматриваемых уравнений. Вводя комплексные переменные

$z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, представим систему уравнений (2) для сферической оболочки в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} + 2i\sigma_{12}^{(k)} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{1}{\Lambda} \left(\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} \right) + \frac{1}{R} \sigma_+^{(k)} - \frac{1}{h} \underline{\sigma}_{3+}^{(k)} &= 0, \\ \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial \sigma_+^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\sigma}_+^{(k)}}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{1}{R} \frac{1}{\Lambda} \left(\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} \right) - \frac{1}{h} \underline{\sigma}_{33}^{(k)} &= 0, \\ \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial q_+^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{q}_+^{(k)}}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{1}{h} q_3^{(k)} + \left(k + \frac{1}{2} \right) \left[Q_3^+ - (-1)^k Q_3^- \right] &= 0 \quad (k = \overline{0, N}), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\sigma_+^{(k)} = \sigma_{13}^{(k)} + \sigma_{23}^{(k)}$, $\sigma_{3+}^{(k)} = \sigma_{31}^{(k)} + \sigma_{32}^{(k)}$, $\underline{\sigma}_{3j}^{(k)} = (2k+1) \left(\sigma_{3j}^{(k-1)} + \sigma_{3j}^{(k-3)} + \dots \right)$.

Подставляя соотношения (4) в уравнение теплопроводности системы (6) и учитывая формулы (1) и (5), получим для трансверсально-изотропной оболочки такие равенства

$$\begin{aligned} \lambda_1 \nabla^2 \theta^{(2k)} - (4k+1) \lambda_3 h^{-2} \sum_{s=0}^n \left(\beta_{2s}^{(k)} + \varepsilon \right) \theta^{(2s)} &= \\ = -(4k+1) \varepsilon \lambda_3 \left(T_c^+ + T_c^- \right) / 2h^2 \quad (k = 0, 1, \dots, n), \\ \lambda_1 \nabla^2 \theta^{(2k-1)} - (4k-1) \lambda_3 h^{-2} \sum_{s=0}^n \left(\alpha_{2s-1}^{(k)} + \varepsilon \right) \theta^{(2s-1)} &= \\ = -(4k-1) \varepsilon \lambda_3 \left(T_c^+ - T_c^- \right) / 2h^2 \quad (k = 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (7)$$

в которых ∇^2 – оператор Лапласа на поверхности сферы; $\alpha_{2s-1}^{(k)}$, $\beta_{2s}^{(k)}$ – абсолютные константы; λ_1 и λ_3 – коэффициенты теплопроводности в продольном и поперечном направлениях; $\varepsilon = \alpha_{x_3} h / \lambda_3$. Если температура окружающих сред вдоль граничных поверхностей не изменяется, т.е. T_c^+ , T_c^- – константы, то из (7) следует, что

$$2\theta^{(0)} = T_c^+ + T_c^-; \quad 2\theta^{(1)} = \varepsilon(1+\varepsilon)^{-1} \left(T_c^+ - T_c^- \right). \quad (8)$$

Для трансверсально-изотропной сферической оболочки определяющие уравнения (3) записываются в комплексной форме таким образом:

$$\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} = 2h\Lambda \left[(c_{12} + c_{66}) \left(e^{(k)} + \frac{2}{R} u_3^{(k)} \right) + \frac{c_{13}}{h} u_3^{(k)} - \beta_{11} \theta^{(k)} \right],$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} + 2i\sigma_{12}^{(k)} &= 4c_{66}h\Lambda \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{u_+^{(k)}}{\Lambda} \right), \\
\sigma_{33}^{(k)} &= h \left[c_{13}(e^{(k)} + \frac{2}{R}u_3^{(k)}) + \frac{\tilde{c}_{33}}{h}u_{=3}^{(k)} - \beta_{33}\theta^{(k)} \right], \\
\sigma_+^{(k)} &= c_{44}h \left(2\frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{R}u_+^{(k)} + \frac{1}{h_{=+}}u^{(k)} \right), \\
\sigma_+^{(k)} &= h \left[c_{44} \left(2\frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{R}u_+^{(k)} \right) + \frac{\tilde{c}_{44}}{h}u_{=+}^{(k)} \right], \tag{9}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
u_+^{(k)} &= u_1^{(k)} + iu_2^{(k)}, \quad e^{(k)} = \Lambda^{-1} \left(\partial u_+^{(k)} / \partial z + \partial \bar{u}_+^{(k)} / \partial \bar{z} \right), \\
\beta_{11} &= 2(c_{12} + c_{66})\alpha_1 + c_{13}\alpha_3, \quad \beta_{33} = 2c_{13}\alpha_1 + c_{33}\alpha_3; \tag{10}
\end{aligned}$$

c_{ij} – упругие постоянные; α_1 и α_3 – продольный и поперечный коэффициенты линейного расширения; $\tilde{c}_{33} = c_{33}(1+d_3)$; $\tilde{c}_{44} = c_{44}(1+d_4)$; параметры d_3 и d_4 определяются формулами

$$d_3 = \nu_3 \left[1 - 2e\nu'^2 / (1 - \nu) \right], \quad d_4 = \nu_3 E / G', \tag{11}$$

в которых $\nu_3 = p_{33}^{(0)} / E$, $e = E / E'$; E , E' и ν , ν' – модули упругости и коэффициенты Пуассона в плоскости изотропии и нормальной к ней плоскости, G' – поперечный модуль сдвига.

Если внести соотношения (9) в первые два равенства (6), то получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
4c_{66} \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial}{\partial z} \Lambda \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{u_+^{(k)}}{\Lambda} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[(c_{12} + c_{66}) \left(e^{(k)} + \frac{2}{R}u_3^{(k)} \right) + \right. \\
\left. + \frac{c_{13}}{h}u_{=3}^{(k)} - \beta_{11}\theta^{(k)} \right] + \frac{c_{44}}{R} \left(2\frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{R}u_+^{(k)} + \frac{1}{h_{=+}}u^{(k)} \right) - \\
- \frac{2k+1}{h} \sum_{s=0}^{[(k-1)/2]} \left[2c_{44} \frac{\partial u_3^{(k-2s-1)}}{\partial \bar{z}} + \frac{\tilde{c}_{44}}{h}u_{=+}^{(k-2s-1)} \right] = 0, \\
c_{44} \left(\nabla^2 u_3^{(k)} - \frac{1}{R}e^{(k)} + \frac{1}{h_{=+}}e^{(k)} \right) - \frac{2}{R} \left[(c_{12} + c_{66}) \left(e^{(k)} + \frac{2}{R}u_3^{(k)} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c_{13}}{h} u_3^{(k)} - \beta_{11} \theta^{(k)} \Big] - \frac{2k+1}{h} \sum_{s=0}^{[(k-1)/2]} \left[c_{13} \left(e^{(k-2s-1)} + \frac{2}{R} u_3^{(k-2s-1)} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\tilde{c}_{33}}{h} u_3^{(k-2s-1)} - \beta_{33} \theta^{(k-2s-1)} \right] = 0, \tag{12}
\end{aligned}$$

где символ $[e]$ обозначает целую часть e .

Согласно равенств (8) частное решение системы (12) примет вид

$$c_{66} \hat{u}_3^{(k)} = \eta_{30}^{(k)} \theta^{(0)} + \eta_{31}^{(k)} \theta^{(1)}; \quad \hat{u}_+^{(k)} = 0; \quad \hat{e}^{(k)} = 0, \tag{13}$$

где $\eta_{30}^{(k)}$ и $\eta_{31}^{(k)}$ – постоянные, определяемые алгебраическими уравнениями, например,

$$\begin{aligned}
& \frac{4(c_{12} + c_{66})h}{c_{66}R} \eta_{30}^{(0)} + \frac{2c_{13}}{c_{66}} \sum_{s=1}^n \eta_{30}^{(2s-1)} = 2\beta_1, \\
& \frac{4(c_{12} + c_{66})h^2}{(4k+1)c_{66}R^2} \eta_{30}^{(2k)} + \frac{\tilde{c}_{33}}{c_{66}} \sum_{s=1}^n \left(\beta_{2s}^{(k)} \eta_{30}^{(2s)} + \frac{2c_{13}h}{\tilde{c}_{33}R} \eta_{30}^{(2s-1)} \right) = 0, \\
& \frac{4(c_{12} + c_{66})h^2}{(4k-1)c_{66}R^2} \eta_{30}^{(2k-1)} + \frac{\tilde{c}_{33}}{c_{66}} \sum_{s=0}^n \left(\alpha_{2s-1}^{(k)} \eta_{30}^{(2s-1)} + \frac{2c_{13}h}{\tilde{c}_{33}R} \eta_{30}^{(2s)} \right) = \beta_3 \\
& (k = 1, \dots, n), \tag{14}
\end{aligned}$$

$$\beta_1 = c_{13}/c_{66} + 2\alpha(c_{12} + c_{66})/c_{66}, \quad \beta_3 = c_{33}/c_{66} + 2\alpha c_{13}/c_{66}, \quad \alpha = \alpha_1/\alpha_3.$$

Общее решение однородной системы (12) находим аналогичным способом [2]. Присоединяя к нему равенства (13), будем иметь

$$\begin{aligned}
c_{66} u_+^{(k)} &= h \sum_{m=1}^{4n+2} a_m^{(k)} \partial V_m / \partial \bar{z} + ih \sum_{s=1}^{2n+1} b_s^{(k)} \partial w_s / \partial \bar{z}, \\
c_{66} e^{(k)} &= \frac{1}{2h} \sum_{m=1}^{4n+2} a_m^{(k)} k_m V_m; \\
c_{66} u_3^{(k)} &= \eta_{30}^{(k)} \theta^{(0)} + \eta_{31}^{(k)} \theta^{(1)} + \sum_{m=1}^{4n+2} c_m^{(k)} V_m \quad (k = 0, 1, \dots, 2n), \tag{15}
\end{aligned}$$

где $a_m^{(k)}, c_m^{(k)}, b_s^{(k)}$ – константы; V_m и w_s – метагармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\nabla^2 V_m - k_m h^{-2} V_m = 0; \quad \nabla^2 w_s - t_s h^{-2} w_s = 0. \tag{16}$$

в которых параметрами k_m и t_s служат корни соответствующих характеристических уравнений. Следует отметить, что при симметричном нагружении оболочки функции w_s вихревого решения не используются.

Термонапряженное состояние сферической оболочки с круговым отверстием. На основе приведенных формул рассмотрим задачу о термонапряженном состоянии полой сферической оболочки с круговой цилиндрической полостью радиуса r_0 . Поверхность полости термоизолирована и свободна от механических напряжений. Оболочка находится под действием постоянного температурного поля T_c^+ , T_c^- . Для пологих оболочек, как известно, величину Λ можно принять равной единице, а оператор ∇^2 заменить оператором Лапласа Δ на плоскости. Если внести значения функций (15) в соотношения (7) и перейти к полярным координатам r , ϑ , то получим с учетом сделанного замечания такие выражения

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(k)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(k)} &= \gamma_{10}^{(k)}\theta^{(0)} + \gamma_{11}^{(k)}\theta^{(1)} + 2 \sum_{m=1}^{4n+2} d_m^{(k)} V_m ; \\ \sigma_{rr}^{(k)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(k)} + 2i\sigma_{r\vartheta}^{(k)} &= 4h^2 \sum_{m=1}^{4n+2} a_m^{(k)} e^{-2i\vartheta} \partial^2 V_m / \partial \bar{z}^2 ; \\ \sigma_{r3}^{(k)} + i\sigma_{\vartheta 3}^{(k)} &= 2h \sum_{m=1}^{4n+2} p_m^{(k)} e^{-i\vartheta} \partial V_m / \partial \bar{z} ; \\ \sigma_{3r}^{(k)} + i\sigma_{3\vartheta}^{(k)} &= 2h \sum_{m=1}^{4n+2} p_{3m}^{(k)} e^{-i\vartheta} \partial V_m / \partial \bar{z} ; \\ \sigma_{33}^{(k)} &= \gamma_{30}^{(k)}\theta^{(0)} + \gamma_{31}^{(k)}\theta^{(1)} + 2 \sum_{m=1}^{4n+2} d_{3m}^{(k)} V_m \quad (k = 0, 1, \dots, 2n), \quad (17)\end{aligned}$$

где $\gamma_{1i}^{(k)}$, $\gamma_{3i}^{(k)}$ ($i = 0, 1$); $d_m^{(k)}$, $d_{3m}^{(k)}$, $p_m^{(k)}$, $p_{3m}^{(k)}$ – константы.

Условия равенства нулю нормального σ_{rr} и касательного σ_{r3} напряжений на поверхности полости $r_0 \times [-h, h]$ сводится на контуре $r = r_0$ срединной поверхности S к равенствам

$$\sum_{m=1}^{4n+2} \left[2d_m^{(k)} V_m + 4h^2 \operatorname{Re} \left(a_m^{(k)} e^{-2i\vartheta} \partial^2 V_m / \partial \bar{z}^2 \right) \right] = -\gamma_{1i}^{(k)},$$

$$\sum_{m=1}^{4n+2} \operatorname{Re} \left(p_m^{(k)} e^{-i\vartheta} \partial V_m / \partial \bar{z} \right) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, 2n). \quad (18)$$

При $i = 0$ имеем граничные условия относительно $\theta^{(0)}$, а при $i = 1$ – относительно $\theta^{(1)}$. Вид функций V_m , входящих в условия (18), зависит от значений корней характеристического уравнения системы (18). Пусть k_1 – вещественный отрицательный, k_2 – вещественный положительный корень, а k_3 и k_4 – комплексно-сопряженные корни. Тогда

$$\begin{aligned} V_1 &= A_{0i} Y_0(x_1 \rho); & V_2 &= B_{0i} K_0(x_2 \rho); \\ V_3 &= C_{0i} H_0^{(1)}(x_3 \rho); & V_4 &= D_{0i} H_0^{(2)}(x_4 \rho). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь A_{0i} , B_{0i} , C_{0i} , D_{0i} ($i = 0, 1$) – произвольные постоянные, $Y_0(x_1 \rho)$, $K_0(x_2 \rho)$, $H_0^{(1)}(x_3 \rho)$ и $H_0^{(2)}(x_4 \rho)$ – цилиндрические функции Неймана, Бесселя, Ханкеля первого и второго рода; $\rho = r/r_0$, $x_1 = r_0 h^{-1} \sqrt{-k_1}$, $x_2 = r_0 h^{-1} \sqrt{k_2}$, $x_3 = r_0 h^{-1} \sqrt{-k_3}$, $x_4 = \bar{x}_3$.

Подставляя значения функций (19) в условия (18), после некоторых преобразований получаем алгебраическую систему уравнений, из которой определяем неизвестные константы. Обозначим моменты напряжений, найденные при значениях констант с индексом $i = 0$ через $N_{99}^{(k)}(\rho)$, а при значениях констант с индексом $i = 1$ – через $M_{99}^{(k)}(\rho)$. Тогда, полагая $\nu_T = \varepsilon(1-t)/(1+\varepsilon)(1+t)$, $\varepsilon = \alpha_{x_3} h / \lambda_3$, $t = T_c^- / T_c^+$, будем иметь

$$\frac{\sigma_{99}}{G\alpha_3 T_0} = \sum_{k=0}^{4n+2} \left[N_{99}^{(k)}(\rho) + \nu_T M_{99}^{(k)}(\rho) \right], \quad (20)$$

где $G = c_{66}$, $T_0 = (T_c^+ + T_c^-) / 2$.

Числовые исследования проведены для трансверсально-изотропной оболочки с коэффициентами Пуассона $\nu = 0,25$, $\nu' = 0,15$ при $E/E' = 1$, $E/G' = 7,5$, $h/R = 0,05$, $r_0/h = 5$, $t = 0,005$.

В таблице даны значения окружных напряжений $\sigma_{99}/G\alpha_3 T_0$ на контуре отверстия в точках, лежащих на срединной ($\zeta = 0$) и граничных ($\zeta = \pm 1$) поверхностях в зависимости от параметров λ_3 и α . Как видно, наибольшего значения окружные напряжения достигают на граничной поверхности

$\zeta = 1$. Начальные напряжения снижают концентрацию напряжений. С ростом параметра λ_3 напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ по абсолютной величине умень-

α	ζ	λ_3				
		0,0	0,01	0,02	0,03	0,04
0,75	1	1,0350	0,9219	0,8490	0,7977	0,7594
	0	0,2132	0,1671	0,1379	0,1178	0,1030
	-1	-0,6193	-0,6027	-0,5905	-0,5809	-0,5730
1,0	1	1,2829	1,1433	1,0532	0,9899	0,9427
	0	0,2631	0,2060	0,1700	0,1451	0,1269
	-1	-0,7643	-0,7440	-0,7291	-0,7174	-0,7078
1,5	1	1,7787	1,5859	1,4617	1,3744	1,3029
	0	0,3629	0,2840	0,2342	0,1998	0,1747
	-1	-1,0542	-1,0265	-1,0063	-0,9905	-0,9776
2,0	1	2,2746	2,0286	1,8702	1,7589	1,6759
	0	0,4627	0,3620	0,2984	0,2546	0,2224
	-1	-1,3441	-1,3090	-1,2835	-1,2636	-1,2474

шаются во всех точках поперечного сечения. Существенное влияние на $\sigma_{\theta\theta}$ оказывает отношение α_1/α_3 коэффициентов линейного расширения в продольном и поперечном направлениях.

РЕЗЮМЕ. Розглянута задача про термонапружений стан в околі кругового отвору в трансверсально ізотропній сферичній оболонці з однорідним полем початкових напружень.

SUMMARY. A problem on a thermo-stressed state in a vicinity of a circular hole in a transversely isotropic spherical shell with a uniform field of initial stresses.

Список литературы: 1. Хома И.Ю., Хома Ю.И. Учет температурного поля в теории тонких оболочек с начальными напряжениями // Вісн. Донец. ун-ту, Сер. А. Природничі науки, Вип. 1. – 2006. – С.117–120. 2. Khoma I.Yu. Complex Representation of the Equations of Transversely Isotropic Spherical Shell with Prestresses // Int. Appl. Mech. 2007. – Vol. 43, N 2. – P.228–237. 3. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. К.: Наук. думка. 1976. – 310 с. 4. Векуа И. Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1986. – 296 с.

Институт механики НАН Украины, г.Киев

Поступила 22.11.2007

УДК 539.3

О. П. ЧЕРВИНКО, канд. физ.-мат. наук,
И. К. СЕНЧЕНКОВ, д-р. физ.-мат. наук, Е. В. ДОЛЯ

УПРОЩЕННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ И РАЗОГРЕВЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ ПРИ СИЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ ВИБРИРУЮЩИМ ШТАМПОМ

Задача о колебаниях и диссипативном разогреве прямоугольной призмы, возбуждаемой вибрирующим плоским штампом, рассмотрена в работах [1–3]. При исследовании случая силового нагружения в этих работах принимались упрощенные граничные условия на площадке контакта. Сущность упрощения состояла в том, что вместо заданной сдвиговой или нормальной нагрузки постоянной принималась соответствующая компонента напряжений. В данной статье на основе численного решения задачи в обеих постановках оцениваются возможности упрощенной модели.

Постановка и метод решения задачи. Рассмотрим плоское деформированное состояние, а также разогрев отнесенной к прямоугольной системе координат Oxy призмы прямоугольного сечения $|x| \leq c, 0 \leq y \leq b$, состоящей из слоев полимера и меди. Половина сечения призмы показана на рис. 1. Призма располагается на жестком гладком основании. На части

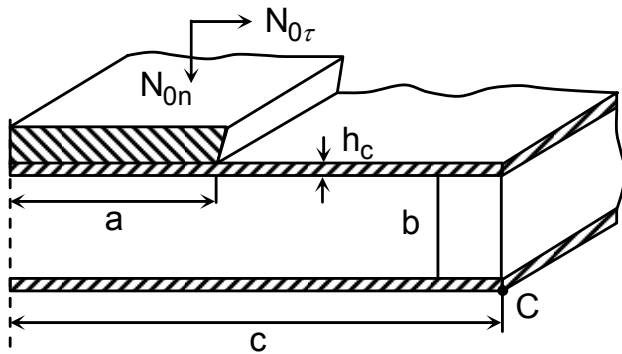


Рис. 1

верхней грани $y = b, |x| \leq a$ действует нормальная или касательная нагрузка с амплитудой N_{0n} или $N_{0\tau}$, осциллирующая с частотой ω . На поверхностях опирания и нагружения поддерживается постоянная температура θ_c . Остальная поверхность призмы свободна от нагрузки и находится в условиях конвективного теплообмена с окружающей средой θ_c . На внутренних границах предполагается идеальный тепловой и механический контакт.

Постановка задачи термовязкоупругости при гармоническом нагружении включает уравнения колебаний и теплопроводности

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} + \rho \omega^2 \tilde{u}_i = 0, \quad c_V \dot{\theta} = (k\theta_{,i})_{,i} + \beta \bar{D}' \quad (i, j = x, y), \quad (1)$$

определяющие уравнения для амплитуд напряжений и усредненной за период скорости диссипации на единицу объема \bar{D}'

$$\tilde{s}_{ij} = 2\tilde{G}\tilde{\varepsilon}_{ij}, \quad \tilde{\sigma}_{kk} = 3\tilde{K}\tilde{\varepsilon}_{kk}, \quad \bar{D}' = \frac{\omega}{2} \text{Im}(\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij}^*);$$

граничные условия, исключая поверхность нагружения $|x| \leq a, y = b,$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_y &= 0, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = 0, \quad \theta = \theta_c, \quad |x| \leq c, \quad y = 0, \\ \tilde{\sigma}_{yy} &= 0, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = 0, \quad -k\theta_{,y} = \gamma(\theta - \theta_c), \quad |x| > a, \quad y = b, \\ \tilde{\sigma}_{xx} &= 0, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = 0, \quad -k\theta_{,x} = \gamma(\theta - \theta_c), \quad |x| = c, \quad 0 < y < b, \end{aligned} \quad (2)$$

а также начальное условие для температуры

$$\theta = \theta_0 \quad \text{при} \quad t = 0,$$

где $\tilde{\sigma}_{ij}$ и $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ – тензоры комплексных амплитуд напряжений и деформаций;

$\tilde{\sigma}_{kl} = \sigma'_{kl} + i\sigma''_{kl}$, $\tilde{\varepsilon}_{kl} = \varepsilon'_{kl} + i\varepsilon''_{kl}$; \tilde{s}_{ij} и \tilde{e}_{ij} – девиаторы тензоров $\tilde{\sigma}_{ij}$ и $\tilde{\varepsilon}_{ij}$; \tilde{u}_i – вектор амплитуды перемещения; θ – температура; θ_0 – начальная температура; k и c_V – коэффициенты теплопроводности и объемной теплоемкости; ρ – плотность; \tilde{G} и \tilde{K} – комплексные модули сдвига и объемного сжатия, $\tilde{G} = G' + iG''$, $\tilde{K} = K' + iK''$; $\tilde{\varepsilon}_{kl}^*$ – величина, комплексно сопряженная $\tilde{\varepsilon}_{kl}$, $\tilde{\varepsilon}_{kl}^* = \varepsilon'_{kl} - i\varepsilon''_{kl}$; γ – коэффициент теплоотдачи; β – доля диссипированной энергии, перешедшая в тепло; $\dot{\theta} = \partial\theta / \partial t$, $\theta_{,x} = \partial\theta / \partial x$.

Нормальное или касательное силовое нагружение призмы на поверхности $y = 0$ жестким штампом с плоским основанием $|x| \leq a$ дается следующими условиями:

при нормальном нагружении

$$\bar{\sigma}_{yy} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \tilde{\sigma}_{yy} dx = \frac{1}{2a} N_{0n} = \bar{\sigma}_0, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = 0; \quad \tilde{u}_y = \tilde{u}_{0y} \quad (3)$$

и при касательном нагружении (штамп сцеплен с призмой)

$$\bar{\sigma}_{xy} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \tilde{\sigma}_{xy} dx = \frac{1}{2a} N_{0\tau} = \bar{\sigma}_0, \quad \tilde{u}_y = 0; \quad \tilde{u}_x = \tilde{u}_{0x}. \quad (4)$$

Здесь \tilde{u}_{0x} и \tilde{u}_{0y} – комплексные амплитуды перемещения, не зависящие от координаты x . Их значения определяются из первых условий (3) и (4). Фаза нагрузки принимается равной нулю, поэтому величины N_{0n} и $N_{0\tau}$ являются вещественными константами. Комплексность \tilde{u}_{0x} и \tilde{u}_{0y} отражает

сдвиг фаз между перемещением штампа и нагрузками N_{0n} и $N_{0\tau}$. Ниже постановки (3) и (4) будут называться точными.

В упрощенной постановке вместо первых условий (3) и (4) рассматриваются граничные условия в виде заданного постоянного нормального или касательного напряжения на площадке нагружения, т. е. для сжатия и сдвига принимается

$$\tilde{\sigma}_{yy} = \sigma_0, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = 0; \quad (5)$$

$$\tilde{\sigma}_{xy} = \sigma_0, \quad \tilde{\sigma}_{yy} = 0, \quad (6)$$

где $\sigma_0 = \bar{\sigma}_0$.

Для температуры имеем

$$\theta = \theta_c \quad (7)$$

Очевидно, условия (3) и (5), а также (4) и (6) эквивалентны по нагрузкам, однако численная реализация упрощенной модели существенно проще.

Геометрия призмы, условия нагружения и теплообмена характеризуются параметрами $c = 2,5 \cdot 10^{-2}$ м, $b = 2,2 \cdot 10^{-3}$ м, $h_c = 10^{-4}$ м, $a = 10^{-2}$ м, $\theta_0 = \theta_c = 20$ °С, $f = \omega / 2\pi = 20$ кГц, $\gamma = 30$ Вт/м²·°С, $\beta = 0,80$.

Краевая задача колебаний и теплопроводности решается с помощью конечно-элементной методики. В ее основе лежит подход, развитый в работе [4]. Используется восьмиузловой изопараметрический четырехугольный элемент. Для повышения точности расчетов область максимальной изменчивости напряжений, деформаций и температуры разбивается на более мелкие элементы. Наиболее густая сетка генерируется вблизи граничных точек поверхности нагружения.

В расчетах используются температурные зависимости физико-механических свойств полиэтилена (ПЭ), взятые из работ [5, 6]. Расчет объемных потерь производится с помощью соотношения $K'' / K' = \chi G'' / G'$, которое установлено экспериментально для изотермического случая в работе [7] для ряда полимеров, в частности, полиэтилена, причем принимается $\chi = 0,32$.

Описание результатов расчетов. Численные результаты, полученные для точной и приближенной постановок, представлены на рис. 2 – 7.

На рис. 2 и 3 приведены кривые разогрева при силовом сжатии трехслойной призмы штампом для $\sigma_0 = \bar{\sigma}_0 = 15$ МПа. Здесь и ниже используются обозначения: θ_1 – максимальная температура призмы в сечении $x = 0$, θ_m – максимальная по объему температура призмы. Толстые сплошные линии отвечают температурам для приближенной постановки (5), тонкие сплошные – для точной постановки (3), толстые и тонкие штриховые линии – соответствуют квазистатическим задачам ($\rho = 0$). Видно, что результаты, полученные в рамках обеих постановок задач о силовом на-

гружении призмы, отличаются несущественно, по крайней мере, до температуры вязкотекучего перехода ($\theta_{liq} = 125^{\circ}C$).

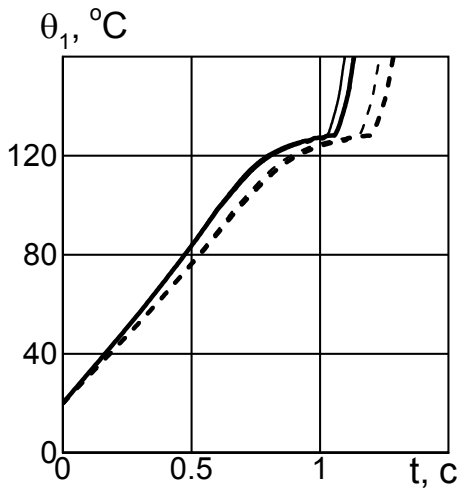


Рис.2

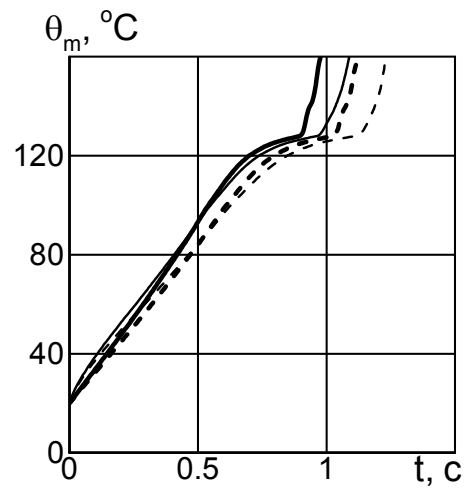


Рис.3

При нагружении штампом, на который действует заданное усилие (условие (3)) амплитуда перемещения возрастает в процессе разогрева в 3–4 раза. При этом фаза перемещений также заметно увеличивается (рис. 4), что указывает на возрастание потока энергии через площадку нагружения. Эффект динамичности (сил инерции) состоит в ускорении разогрева в связи со снижением частоты первого резонанса призмы $f_r = 29,2$ кГц и приближением его к частоте нагружения $f = 20$ кГц. Аналогичные расчеты проводились и для случая сдвигового силового нагружения. Сравнение проводилось для условий (4) и (6) при $\sigma_0 = \bar{\sigma}_0 = 5$ МПа. Результаты приведены на рис. 5. Видно, что и в случае касательного нагружения приближенные гра-

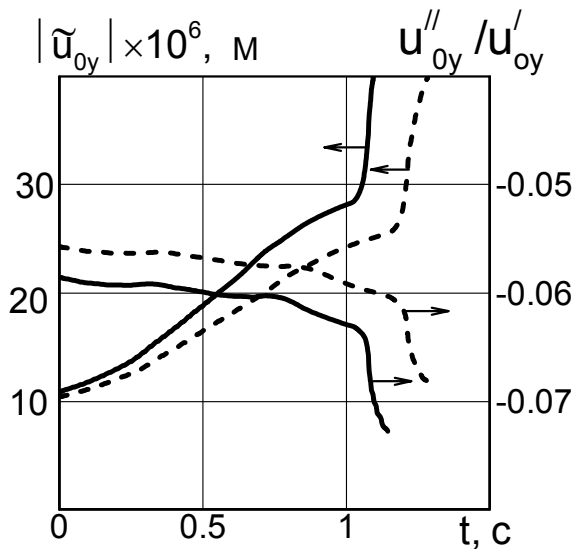


Рис.4

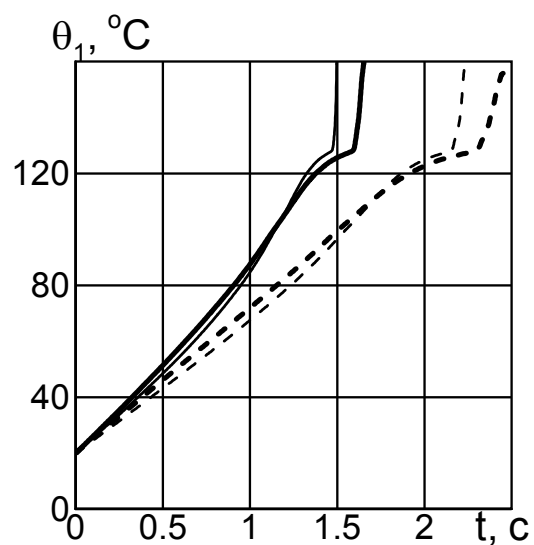


Рис.5

нические условия (6) обеспечивают хорошую аппроксимацию точным условиям (4). Имеет место также хорошее согласование и пространственных распределений механических и термических полевых величин.

Идентичность эффектов динамичности для решений в двух постановках объясняется практическим совпадением резонансов призмы при силовых нагружениях типа (3), (4) и (5), (6). На рис. 6 приведены частотные характеристики для перемещения $\tilde{u}_x(c, 0)$ и фазы колебаний, рассчитанные для обеих постановок силовой задачи сжатия призмы. В масштабе рисунка кривые совпадают. Хорошее согласование имеет место и при расчете критических параметров σ_0^* в задаче о термической неустойчивости [9]. Диаграммы $\theta_m \sim \sigma_0, \bar{\sigma}_0$, рассчитанные в точной и приближенной постановках и приведенные на рис. 7, согласуются с точностью не ниже 3%. Здесь θ_m –

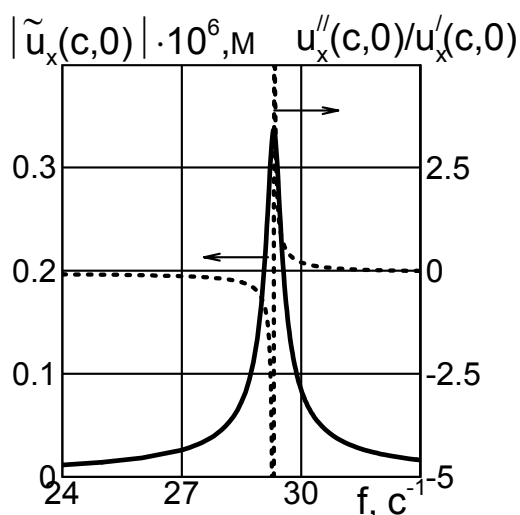


Рис.6

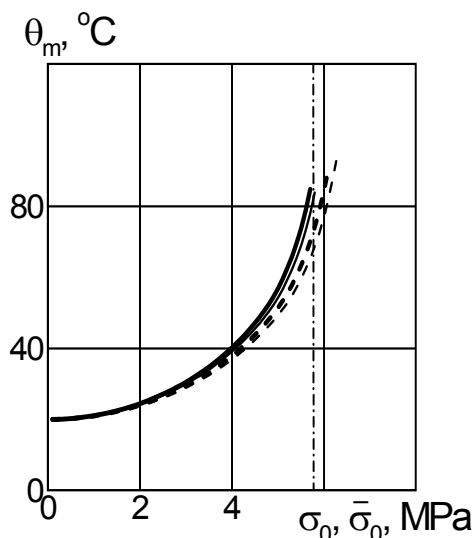


Рис.7

максимальная по объему стационарная температура, отвечающая нагрузке σ_0 . Видно, что точной постановке задачи для штампа отвечает несколько большее значение критической нагрузки, при которой прекращается стационарное тепловое состояние тела. Различие критических значений для динамической и квазистатической задач не превышает 2%. Таким образом, точная и приближенная постановки задачи о силовом нагружении плоским штампом дают близкие результаты при исследовании колебаний, вибронагрева и термической неустойчивости для армированной призмы. Однако для однородной полиэтиленовой призмы следует ожидать существенных различий в локальном поведении механических и тепловых полей в окрестности краевых точек $x = \pm a, y = b$ из-за наличия особенности напряжения в точной постановке (3) и (4), отсутствия таковой в задаче сжатия (5) и снижения ее уровня в задаче сдвига (6) [8]. Вместе с тем, как показывают расчеты, вне окрестностей этих точек полевые величины, а также интегральные термомеханические параметры, в частности резонансные, удов-

летворительно согласуются. Поэтому для исследования качественных закономерностей и получения количественных оценок могут быть использованы приближенные граничные условия (5)–(6).

РЕЗЮМЕ. В рамках зв'язаної задачі термов'язкопружності досліджено можливість наближеної моделі контактної взаємодії шаруватої прямокутної призми при силовому гармонічному навантаженні плоским жорстким штампом. Оцінка здійснюється шляхом порівняння чисельних розв'язків задач в точній і наближеній постановках. Встановлено добре узгодження обох моделей за максимальною температурою вібророзігріву, резонансними частотами і напружено-деформованим станом за винятком околиць кутових точок штампю.

SUMMARY. The potentialities of an approximate model of contact interaction between layered prism and plane rigid punch under harmonic force loading is studied within the coupled problem of thermoviscoelasticity. To evaluate the model numerical solutions of both problems are compared. Good correlation relatively maximum temperature of vibration heating, resonance frequencies as well as stress state except the small vicinity of punch corner points is established.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. Доля Е. В., Червинко О. П., Сенченков И. К. Колебания и виброразогрев упруго-вязкоупругой прямоугольной слоистой призмы под действием вибрирующего штампа // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 8. – С. 71–79. 2. Червинко О. П., Сенченков И. К. Доля Е. В. Расчет параметров тепловой неустойчивости слоистой призмы // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 63–67. 3. Доля О. В., Червинко О. П., Сенченков И. К. Вібророзігрів шаруватої пружно-в'язкопружної прямокутної призми при високочастотному силовому навантаженні // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. наук. – 2007. – № 2. – С. 54–58. 4. Мотовиловец И. А., Козлов В. И. Термоупругость. – К.: Наук. думка, 1987. – 264 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т., т. 1.) 5. Теплофизические и реологические характеристики полимеров. Справочник / Под ред. Ю.С.Липатова. – К.: Наук. думка, 1977. – 244 с. 6. Penn R.W. Dynamic mechanical properties of crystalline linear polyethylene // J. Polym. Sci. – 1966. – № 4, pt.A-2. – P. 545–557. 7. Lifschitz J. M., Kolsky H. The propagation of spherically divergent stress pulses in the viscoelastic solids // J. Mech. Phys. Solids. – 1965. – Vol. 13, № 6. – P. 361 – 376. 8. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с. 9. Червинко О. П. Расчет критических параметров тепловой неустойчивости вязкоупругой призмы с концентратором напряжений при гармоническом сжатии // Прикладная механика. – 2004. – Т. 40, № 8. – С.111–118.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев
Национальный университет строительства
и архитектуры, г. Киев*

Поступила 10.11.2007

УДК 539.3

В. Г. КАРНАУХОВ, д-р физ.-мат н., *В. М. СИЧКО*, канд. физ.-мат. н.,
А. С. КАРПЕНЮК

ВЛИЯНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ ТРЕХСЛОЙНЫХ НЕУПРУГИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

Трехслойные прямоугольные пластины из композитных материалов находят широкое применение в различных областях современной техники. У них часто одни из слоев являются несущими, другие изготавливаются из материалов с высокими гистерезисными потерями и предназначены для увеличения демпфирования колебаний. В зависимости от назначения конструкции и условий ее работы такие включения могут изготавливаться из полимерных (вязкоупругих) или металлических (упруго-пластических, вязкоупруго-пластических) материалов. Вопросам пассивного демпфирования тонкостенных элементов при помощи неупругих включений посвящена обширная литература, обзор которой представлен в [3, 7–11, 13, 14]. Однако в существующей на сегодня литературе практически не исследуется уровень температуры диссипативного разогрева при резонансных колебаниях пластин с демпфирующими физически нелинейными неупругими слоями. Большинство авторов ограничиваются лишь построением амплитудно-частотных характеристик тонкостенных элементов. Между тем при резонансных (особенно высокочастотных) колебаниях неупругих элементов конструкций, изготовленных из диссипативных материалов, в зависимости от условий теплообмена, их геометрических размеров и т. п. температура диссипативного разогрева может быть настолько высокой, что нарушаются условия применимости заложенных в расчет моделей термомеханического поведения неупругих материалов. С другой стороны, если даже эти условия выполняются, температура диссипативного разогрева может существенно повлиять на динамические характеристики пластин. Поэтому во многих случаях обязателен расчет температуры диссипативного разогрева при вынужденных резонансных колебаниях пластин с физически нелинейными слоями.

В настоящей статье рассмотрена задача о колебаниях и диссипативном разогреве тонкой трехслойной пластины, средний диссипативный слой которой изготовлен из физически нелинейного неупругого материала, а два внешних слоя – из линейного упругого материала. Для моделирования термомеханического поведения неупругого материала используется концепция комплексных характеристик [4]. Для решения нелинейной краевой задачи используются как аналитические, так и численные методы, в частности, метод конечных элементов. При помощи метода Бубнова-Галеркина получено аналитическое решение задачи о вынужденных резонансных колебаниях такой пластины. Эта же задача решается с использованием итерационной

процедуры, которая сводит исходную нелинейную задачу к последовательности линейных задач механики и теплопроводности. Последние решаются методом конечных элементов. Сравнение результатов, полученных обоими методами, свидетельствует об их хорошей согласованности. Представлен анализ влияния физической нелинейности неупругого слоя на эффективность пассивного демпфирования вынужденных резонансных колебаний пластин при действии на них равномерного поверхностного давления.

Постановка задачи. Введем декартовую систему координат Oxy и рассмотрим прямоугольную пластину с размерами $a \times b$. На пластину действует равномерное поверхностное давление, изменяющееся по гармоническому закону с частотой ω , близкой к резонансной: $p = p_0 \exp(i\omega t)$. Действительная G' и мнимая G'' составляющие модуля комплексного сдвига $G = G' + iG''$ среднего слоя зависят от амплитуд деформаций сдвига. Эта зависимость находится из экспериментов. Такой подход является общепринятым в динамике конструкций при моногармоническом нагружении [3, 7–14]. По аналогии с деформационной теорией пластичности для неоднородного напряженно-деформированного состояния считается, что компоненты комплексного модуля зависят от интенсивности деформаций

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[(\varepsilon'_{xx} - \varepsilon'_{yy})^2 + (\varepsilon''_{xx} - \varepsilon''_{yy})^2 + \dots + (\varepsilon''_{xx} - \varepsilon''_{zz})^2 + 6(\varepsilon'^2_{xy} + \varepsilon''^2_{xy} + \varepsilon'^2_{yz} + \varepsilon''^2_{yz} + \varepsilon'^2_{xz} + \varepsilon''^2_{xz}) \right]^{1/2}. \quad (1)$$

Здесь ε_{kl} ($k, l = x, y, z$) – комплексные компоненты тензора деформаций.

Таким образом, имеет место известная упруго-вязкоупругая аналогия, когда все отличие в постановке задач механики для неупругого материала сводится к замене действительных модулей на комплексные [9–11] и для изотропного материала уравнения состояния, связывающие компоненты тензора напряжений σ_{kl} ($k, l = x, y, z$) с компонентами тензора деформаций ε_{kl} , приобретают вид:

$$\sigma_{kl} = 2\mu\varepsilon_{kl} + \lambda\varepsilon_{mm}\delta_{kl}. \quad (2)$$

Здесь компоненты тензоров напряжений и деформаций, параметры Ламе λ, μ являются комплексными: $\sigma_{kl} = \sigma'_{kl} + i\sigma''_{kl}$, $\varepsilon_{kl} = \varepsilon'_{kl} + i\varepsilon''_{kl}$, $\lambda = \lambda' + i\lambda''$, $\mu = \mu' + i\mu''$. При этом параметры Ламе зависят от интенсивности деформаций Γ .

Для вычисления действительной и мнимой составляющих модуля сдвига в их зависимости от интенсивности деформаций для изотропного неупругого материала необходимо иметь петлю гистерезиса, например, для деформаций сдвига $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_0 \cos \omega t$. Действительная и мнимая составляющие комплексного модуля сдвига находятся из косинус- и синус-преобразования

Фурье напряжений сдвига. В полученной таким образом формуле необходимо заменить величину ε_0 на Γ . Деформации считаются малыми, а связь между деформациями и перемещениями u_k определяется линейными соотношениями Коши. Для моделирования термомеханического состояния пластины необходимо, кроме представленных выше соотношений, использовать известные в механике деформируемого твердого тела уравнения движения

$$\sigma_{k,l} - \rho\omega^2 u_k = 0, \quad (3)$$

где ρ – плотность материала, и граничные условия [1].

Для расчета стационарной температуры диссипативного разогрева к приведенным выше уравнениям необходимо добавить уравнение энергии

$$k\Delta\theta + W = 0, \quad (4)$$

где k – коэффициент теплопроводности; W – мощность источника тепла, совпадающего с усредненной по периоду мощностью, так что диссипативная функция для изотропного материала определяется по следующей формуле:

$$W = \frac{\omega}{2} \left\{ 2\mu'' (\varepsilon'_{kl}\varepsilon'_{kl} + \varepsilon''_{kl}\varepsilon''_{kl}) + \lambda'' \left[(\varepsilon'_{mm})^2 + (\varepsilon''_{mm})^2 \right] \right\}. \quad (5)$$

Уравнение энергии (4) с диссипативной функцией (5) дополняется тепловыми граничными условиями, например, условиями конвективного теплообмена [6]. Подставляя кинематические соотношения в комплексные уравнения состояния (2) и диссипативную функцию (5), а полученный результат – в уравнения движения (3) и уравнение энергии (4), приходим к нелинейной краевой задаче для четырех уравнений в частных производных с неизвестными комплексными перемещениями u_k и действительной температурой θ :

$$L_m(u_k, \theta) = 0 \quad (m = 1, 2, 3, 4; k = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Решение такой задачи в пространственной постановке встречает значительные математические трудности. Для упрощения постановки связанных задач термомеханики в случае пластин можно использовать различные механические гипотезы и соответствующие им гипотезы относительно распределения температуры по толщине пластины [1, 6, 11]. В данной работе мы ограничимся самыми простыми из гипотез – гипотезами Кирхгоффа-Лява – для описания термомеханического состояния тонких пластин из неупругих материалов. Основные соотношения механики пластин – кинематические соотношения, уравнения движения, механические граничные условия – представлены в монографии [1]. В дальнейшем мы будем интересоваться только изгибными термомеханическими колебаниями тонких прямоугольных пластин. Универсальное комплексное уравнение гармонического изгибного движения таких пластин с общей толщиной $H = h_0 + 2h_1$ имеет

следующий вид [1]

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} - \tilde{\rho} \omega^2 w = p_0, \quad (7)$$

где $\tilde{\rho}$ – приведенная плотность; для трехслойной пластины $\tilde{\rho} = \rho_0 h_0 + 2\rho_1 h_1$, ρ_0, ρ_1 – плотности среднего и внешних слоев, а h_0, h_1 – их толщины.

Универсальные комплексные кинематические соотношения для изгибных колебаний запишутся в форме [1]:

$$\kappa_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (8)$$

При предположении постоянства температуры по толщине пластины универсальное стационарное уравнение энергии может быть представлено в виде [6, 11]

$$\tilde{k} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) - 2\alpha \theta + W = 0. \quad (9)$$

Здесь $\tilde{k} = (k_0 h_0 + 2k_1 h_1)$; k_0, k_1 – коэффициенты теплопроводности среднего и внешних слоев; α – коэффициент теплоотдачи.

Приведенные универсальные уравнения необходимо дополнить комплексными определяющими уравнениями для моментов

$$\begin{aligned} M_1 &= -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ M_2 &= -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad M_{12} = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (10)$$

и для диссипативной функции

$$W = \frac{\omega}{2} \left[(M_1'' \kappa_1' - M_1' \kappa_1'') + (M_2'' \kappa_2' - M_2' \kappa_2'') + 2(M_{12}'' \kappa_{12}' - M_{12}' \kappa_{12}'') \right]. \quad (11)$$

В дальнейшем будем считать коэффициенты Пуассона материалов постоянными величинами. Так как модуль сдвига зависит от второго инварианта Γ тензора деформаций, то изгибная жесткость D будет нелинейной функцией изгибных деформаций. Подставляя уравнения состояния (10) в уравнения движения (7) и в диссипативную функцию (11), из (7), (9) получим нелинейную систему дифференциальных уравнений относительно комплексного прогиба и температуры.

Аналитическое решение. Анализ результатов. Вид аналитического решения поставленной выше задачи зависит от аппроксимации модуля сдвига, как функции второго инварианта тензора деформаций. Эта функция

может быть получена с использованием различных моделей. Как указывалось в [5], приемлемые уровни температур достигаются при деформировании в области микропластичности. Для описания термомеханической связанности в рассматриваемом случае можно использовать модель, разработанную, например, в монографии [9]. Эта модель дает такие выражения для действительной и мнимой составляющих комплексного модуля сдвига:

$$G' = G(1 - r\Gamma^\alpha), \quad G'' = gG\Gamma^\alpha. \quad (12)$$

Здесь r, g, α – определяемые из экспериментов параметры.

Диссипативная функция по-прежнему рассчитывается по формуле (11). Наконец, можно просто использовать экспериментальные данные по гистерезисным петлям и по ним рассчитать комплексный модуль сдвига или использовать табличные данные для них. Так, например, приведенные в работе [13] экспериментальные данные для модуля сдвига вязкоупругого материала в пределах до 10% деформаций можно с большой точностью аппроксимировать такими функциями:

$$G' = a_1 - b_1\Gamma^2, \quad G'' = a_2 - b_2\Gamma^2, \quad (13)$$

причем для указанного выше материала $a_1 = 2,410 \cdot 10^5$ Па, $a_2 = 1,810 \cdot 10^5$ Па, $b_1 = 0,537 \cdot 10^7$ Па, $b_2 = 0,380 \cdot 10^7$ Па.

Коэффициенты Пуассона слоев будем считать одинаковыми и равными усредненному коэффициенту обоих слоев ν . Аппроксимация (13) дает возможность получить замкнутое аналитическое решение задачи о колебаниях и диссипативном разогреве прямоугольной пластины из физически нелинейного материала и на его основе построить амплитудно-частотные и температурно-частотные характеристики. Это решение может служить эталоном при апробации численных методов, в частности, метода конечных элементов.

Пусть торцы пластины шарнирно оперты. Тогда прогиб пластины при колебаниях на резонансе можно представить в виде

$$w = w_{mn} \sin k_m x \sin p_n y, \quad (14)$$

где $k_m = m\pi/a$, $p_n = n\pi/b$, $m, n = 1, 2, 3, \dots$

Используя аппроксимацию (13) и выражения (14), после громоздких выкладок из представленных выше уравнений при помощи метода Бубнова-Галеркина можно получить следующее кубическое уравнение для амплитуды колебаний:

$$y^3 - (\Delta_2 / \Delta_0) y^2 + (\Delta_1 / \Delta_0) y - q_0^2 / (h^6 \Delta_0) = 0. \quad (15)$$

Здесь опущен нижний индекс после каждой из букв $()_{mn}$ и введены обозначения

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= 2h^{-2} (C_1' C_2' + C_1'' C_2''), \quad \Delta_1 = 2h^{-4} (C_1' C_2' + C_1'' C_2''), \\
\Delta_0 &= (C_2')^2 + (C_2'')^2, \quad y = |w_{mn}|^2 / h^2, \\
C_1' &= k_m^2 d_1' + p_n^2 d_2' - 2k_m p_n d_{12}', -\tilde{\rho} \omega^2, \\
C_1'' &= k_m^2 d_1'' + p_n^2 d_2'' - 2k_m p_n d_{12}'', \\
C_2' &= k_m^2 e_1' + p_n^2 e_2' - 2k_m p_n e_{12}', \\
C_2'' &= k_m^2 e_1'' + p_n^2 e_2'' - 2k_m p_n e_{12}''.
\end{aligned} \tag{16}$$

Для трехслойной пластины с упругими внешними слоями

$$\begin{aligned}
d_1' &= \left\{ \frac{h^3}{6(1-\nu)} a_1 + \frac{4G_1 h_1^3}{3(1-\nu)} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{h_0}{h_1} + \frac{3}{4} \left(\frac{h_0}{h_1} \right)^2 \right] \right\} (k_m^2 + \nu p_n^2), \\
d_2' &= \left\{ \frac{h^3}{6(1-\nu)} a_1 + \frac{4G_1 h_1^3}{3(1-\nu)} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{h_0}{h_1} + \frac{3}{4} \left(\frac{h_0}{h_1} \right)^2 \right] \right\} (k_m^2 + \nu p_n^2), \\
d_{12}' &= - \left\{ \frac{h^3}{6} a_1 + \frac{4G_1 h_1^3}{3} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{h_0}{h_1} + \frac{3}{4} \left(\frac{h_0}{h_1} \right)^2 \right] \right\} k_m p_n.
\end{aligned} \tag{17}$$

Остальные коэффициенты, фигурирующие в выражениях (16), определяются по формулам, представленным в статье [5].

Стационарная температура диссипативного разогрева находится из решения дифференциального уравнения теплопроводности (9) с источником тепла (11) при граничных условиях, отвечающих теплоизоляции торцов пластины:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0, a; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, b. \tag{18}$$

Точное решение краевой задачи (9), (18) имеет вид

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 \cos 2k_m x + \theta_2 \cos 2p_n y + \theta_{12} \cos 2k_m x \cos 2p_n y, \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= \omega |w_{mn}|^2 W_0 / (16\alpha), \quad \theta_1 = -\omega |w_{mn}|^2 W_1 / \left[8 \left(2\alpha + 4\tilde{k} k_m^2 \right) \right], \\
\theta_2 &= -\omega |w_{mn}|^2 W_2 / \left[8 \left(2\alpha + 4\tilde{k} p_n^2 \right) \right], \\
\theta_{12} &= \omega |w_{mn}|^2 W_{12} / \left\{ 8 \left[2\alpha + 4\tilde{k} \left(k_m^2 + p_n^2 \right) \right] \right\};
\end{aligned} \tag{20}$$

$$W_0 = W_{12} = \left[D'' \left(k_m^4 + 2\nu k_m^2 p_n^2 + p_n^4 \right) + 2D''_{12} k_m^2 p_n^2 \right],$$

$$W_1 = W_2 = - \left[D'' \left(k_m^4 + 2\nu k_m^2 p_n^2 + p_n^4 \right) - 2D''_{12} k_m^2 p_n^2 \right]; \quad (21)$$

$$D'' = \frac{h^3}{1-\nu} \left[\frac{1}{6} a_2 - \frac{h^2}{160} b_2 |w_{mn}|^2 e^1_{mn} \right],$$

$$D''_{12} = -h^3 \left[\frac{1}{6} a_2 - \frac{h^2}{160} b_2 |w_{mn}|^2 e^2_{mn} \right]. \quad (22)$$

Поставленная выше нелинейная задача решалась также при помощи итерационной процедуры Стеффенсона – Эйткена, которая сводит решение исходной нелинейной задачи к последовательности линейных задач механики и теплопроводности [11]. Последние решались методом конечных элементов [11]. Имело место хорошее согласование аналитических и конечно-элементных решений. Расчеты проведены для квадратной пластины с общей толщиной $h = 0,05$ м и длиной стороны $a = b = 0,5$ м. Усредненный коэффициент Пуассона $\nu = 0,31$, плотность неупругого материала $\rho_0 = 1200$ кг/м³ а упругого – $\rho_1 = 7800$ кг/м³. Модуль сдвига упругого материала $G_1 = 0,7505 \cdot 10^{11}$ Па. Амплитуда изменяющегося по гармоническому во времени закону поверхностного давления $p_0 = 2 \cdot 10^3$ Па. Коэффициент теплопроводности неупругого материала $\lambda_0 = 0,3$ Вт/м·град, а упругого – $\lambda_1 = 0,38$ Вт/м·град. Тепловые граничные условия отвечают условиям конвективного теплообмена с внешней средой с температурой $\theta = 20^0$ С, при этом коэффициент теплообмена по внешним поверхностям пластины $\alpha = 5$ Вт/м²·град. При решении конечно-элементным методом использовались экспериментальные данные, представленные в [13], а при расчете с применением аналитического решения использовалась указанная выше аппроксимация (13). Расчетные данные, иллюстрирующие влияние физической нелинейности на амплитудно- и температурно-частотные характеристики при очень малой толщине упругого слоя ($h_1 = 10^{-5}$ м), представлены на рис. 1 и рис. 2 соответственно. Здесь жирная линия отвечает расчетам с учетом физической нелинейности, а пунктирная – без такого учета. Как видно, учет физической нелинейности для указанного выше характера зависимости составляющих комплексного модуля от второго инварианта ухудшает эффективность демпфирования резонансных колебаний пластины и увеличивает температуру диссипативного разогрева.

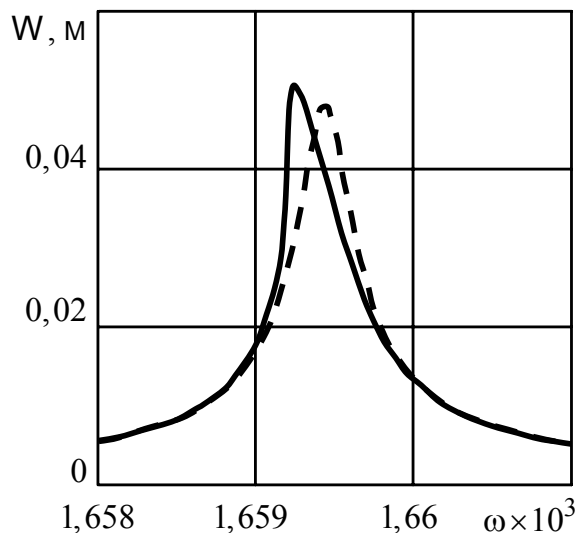


Рис. 1

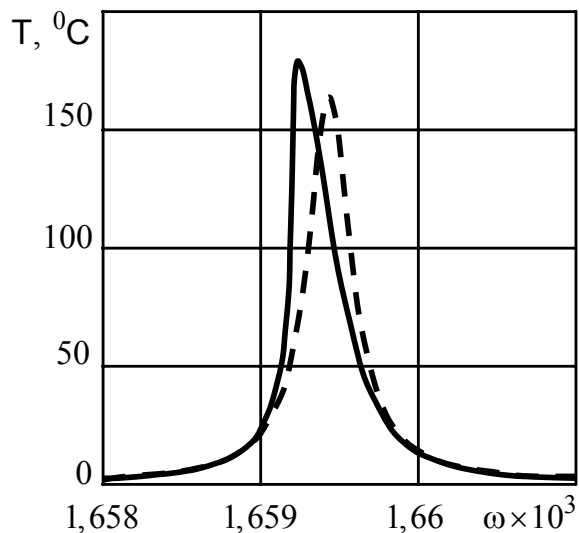


Рис. 2

В предельном случае отсутствия металлического слоя эти характеристики стремятся к характеристикам пластины из нелинейного вязкоупругого материала, представленным в [5], в которой приведено сравнение результатов расчетов по аналитическому и конечно-элементному решениям.

РЕЗЮМЕ. На основі концепції комплексних характеристик подано постановку спряжених нелінійних задач про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів непружних тришарових прямокутних пластин з фізично нелінійних матеріалів, для яких дійсна та уявна частини механічних комплексних характеристик залежать від амплітуд деформацій. Представлено чисельно-аналітичні методи розв'язування вказаної нелінійної задачі. Проведено аналіз впливу фізичної нелінійності на амплітудно-температурно-частотні характеристики і на коефіцієнт демпфірування коливань прямокутних пластин.

SUMMARY. On base of conception of complex characteristics the coupled problems on the forced resonant vibrations and dissipative heating of inelastic threelayer' plates with the physical nonlinear materials are considered. The real and image parts of complex material depend on the amplitudes of deformations. The analytical and numerical methods of the solution of the nonlinear problems are given. The analysis of influence of physical nonlinearity on amplitude- and temperature – frequency characteristics and damping coefficients of vibrations of rectangular plates is given.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ: 1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1967. – 266 с. 2. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с. 3. Дубенец В.Г., Хильчевский В.В. Колебания демпфированных композитных конструкций. – К.: Вища шк., 1995. – Т.1. – 226 с. 4. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейные одночастотные колебания и диссипативный разогрев неупругих пьезоэлектрических тел. – Житомир, 2005. – 428 с. 5. Карнаухов В.Г., Січко В.М., Карпенюк А.С. Влияние физической нелинейности на резонансные колебания и диссипативный разогрев неупругих прямоугольных пластин // Мат. мет. и физ.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 3. – С. 90–98. 6. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. – К.: Наук. думка, 1970. – 307 с. 7. Матвеев В.В. Демпфирование колебаний деформируемых тел. – К.: Наук. думка. 1985. – 264 с.

8. *Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж.* Демпфирование колебаний. – М: Мир, 1988. – 448 с. 9. *Пальмов В.А.* Колебания упругопластических тел, – М.: Наука, 1976. – 328 с. 10. *Старовойтов Э.И.* Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки. – Гомель, 2002. – 343 с. 11. *Термомеханика* эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении / Потураев В.Н., Дырда В.И., Карнаухов В.Г. и др. – К.: Наук. думка, 1987. – 278 с. 12. *Gandhi F. and Wolons D.* Characterization of the pseudoelastic damping behavior of shape memory alloy wires using complex modulus // *Smart Mater. Struct.* – 1999 . – Vol. 8. – P. 49–56. 13. *Gandhi F.* Influence of Nonlinear Viscoelastic Material Characterization on Performance of Constrained Layer Damping Treatment // *AIAA Journal.* – 2001. – Vol. 39, № 5. – P. 924–931. 14. *Li Z. and Crocker M.J.* A Review on Vibration Damping in Sandwich Composite Structures // *Int. J. Acoustics and Vibration.* – 2005. – Vol. 10, № 4. – P. 159–169.

*Институт механики НАН Украины, г.Киев
Николаевский государственный университет*

Поступила 18.11.2007

УДК 539.3:534.6

А. Я. ГРИГОРЕНКО, д-р физ.-мат. наук,
Т. Л. ЕФИМОВА, канд. физ.-мат. наук, Л. В. СОКОЛОВА

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ В УТОЧНЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

Конструктивные элементы цилиндрической формы находят широкое применение в машиностроении, авиационной промышленности, во многих других областях современной техники, а также строительных сооружениях. При исследовании динамических характеристик оболочек средней толщины следует применять уточненную теорию [1, 2]. В работах, посвященных изучению свободных колебаний цилиндрических оболочек, приводятся расчеты для цилиндрических оболочек постоянной толщины, либо оболочек с изменяющейся толщиной по длине цилиндра. В данном сообщении предлагается эффективная численная методика исследования собственных частот колебаний ортотропных цилиндрических оболочек переменной в продольном и окружном направлениях толщины при различных граничных условиях на торцах. Исходная краевая задача на собственные значения сводится с помощью сплайн-аппроксимации к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

Постановка и решение задачи. Рассмотрим задачу о свободных колебаниях круговой цилиндрической оболочки с переменной толщиной в окружном и продольном направлениях в уточненной постановке, которая базируется на гипотезе прямой линии. Суть этой гипотезы состоит в том, что прямолинейный элемент нормали исходной координатной поверхности при малых деформациях сохраняет свою длину и прямолинейность, но не остается перпендикулярным деформированной координатной поверхности. Согласно принятой гипотезе в системе координат γ, θ, z , связанной со срединной поверхностью оболочки (γ – координата в направлении нормали

срединной поверхности, $(-\frac{h}{2} \leq \gamma \leq \frac{h}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq L)$, малые перемещения точек можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_\gamma(r, \theta, z) &= w(\theta, z), \quad u_\theta(r, \theta, z) = v(\theta, z) + \gamma \psi_\theta(\theta, z), \\ u_z(r, \theta, z) &= u(\theta, z) + \gamma \psi_z(\theta, z). \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(\theta, z)$, $v(\theta, z)$, $w(\theta, z)$ – перемещения координатной поверхности $\psi_\theta(\theta, z)$, $\psi_z(\theta, z)$ – функции, характеризующие независимый полный поворот нормали.

В соответствии с (1) выражения для деформаций записываются в виде

$$\begin{aligned}
e_{\theta}(r, \theta, z) &= \varepsilon_{\theta}(\theta, z) + \gamma \kappa_{\theta}(\theta, z), \\
e_z(r, \theta, z) &= \varepsilon_z(\theta, z) + \gamma \kappa_z(\theta, z), \\
e_{\theta z}(r, \theta, z) &= \varepsilon_{\theta z}(\theta, z) + 2\gamma \kappa_{\theta z}(\theta, z), \\
e_{\gamma_{\theta}}(r, \theta, z) &= \gamma_{\theta}(\theta, z), \quad e_{\gamma_z}(r, \theta, z) = \gamma_z(\theta, z),
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \kappa_z = \frac{\partial \psi_z}{\partial z}, \\
\kappa_{\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w \right), \quad 2\kappa_{\theta z} = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_{\theta}}{\partial z} - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\
\gamma_{\theta} &= \psi_{\theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R} v, \quad \gamma_z = \psi_z + \frac{\partial w}{\partial z};
\end{aligned}$$

$\varepsilon_{\theta}, \varepsilon_z, \varepsilon_{\theta z}$ – тангенциальные деформации координатной поверхности, $\kappa_{\theta}, \kappa_z, \kappa_{\theta z}$ – компоненты изгибной деформации, $\gamma_{\theta}, \gamma_z$ – углы поворота нормали, обусловленные поперечными сдвигами.

Уравнения движения элемента координатной поверхности имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} + \rho h \omega^2 u &= 0, \\
\frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{R} Q_{\theta} + \rho h \omega^2 v &= 0, \\
\frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} N_{\theta} + \rho h \omega^2 w &= 0, \\
\frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta z}}{\partial \theta} - Q_z + \rho \frac{h^3 \omega^2}{12} \psi_z &= 0, \\
\frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial z} - Q_{\theta} + \rho \frac{h^3 \omega^2}{12} \psi_{\theta} &= 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

где $N_{z\theta} - M_{\theta z} R^{-1} - N_{\theta z} = 0$; $N_z, N_{\theta}, N_{\theta z}, N_{z\theta}, Q_{\theta}, Q_z$ – тангенциальные и перерезывающие усилия; $M_{\theta}, M_z, M_{\theta z}, M_{z\theta}$ – изгибающие и крутящие моменты; $\rho, h = h(\theta, z)$ – плотность материала и толщина оболочки.

Соотношения упругости для цилиндрически ортотропных оболочек запишутся в виде

$$\begin{aligned}
N_z &= C_{11} \varepsilon_z + C_{12} \varepsilon_{\theta}, \quad N_{\theta} = C_{12} \varepsilon_z + C_{22} \varepsilon_{\theta}, \\
N_{z\theta} &= C_{66} \varepsilon_{\theta z} + 2D_{66} \kappa_{\theta z} / R, \quad M_z = D_{11} \kappa_z + D_{12} \kappa_{\theta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_\theta &= D_{12}\kappa_z + D_{22}\kappa_\theta, & M_{\theta z} &= M_{z\theta} = 2D_{66}\kappa_{\theta z}, \\
Q_\theta &= K_2\gamma_\theta, & Q_z &= K_1\gamma_z, & N_{\theta z} &= C_{66}\varepsilon_{\theta z},
\end{aligned} \tag{4}$$

где $K_1 = \frac{5}{6}h(\theta, z)G_{13}$, $K_2 = \frac{5}{6}h(\theta, z)G_{23}$, G_{13} , G_{23} – модули поперечных сдвигов, $D_{ij} = B_{ij}h^3(\theta, z)/12$, $B_{66} = G_{12}$; $B_{11} = E_1/(1-\nu_1\nu_2)$; $B_{12} = \nu_2 E_1/(1-\nu_1\nu_2) = \nu_1 E_2/(1-\nu_1\nu_2)$; $B_{22} = E_2/(1-\nu_1\nu_2)$; E_1 , E_2 , G_{12} , ν_1 , ν_2 – модули упругости, сдвига и коэффициенты Пуассона соответственно.

На криволинейных контурах $z = 0$ и $z = L$ будем рассматривать следующие граничные условия: 1) контур жестко закреплен $u = v = w = \psi_\theta = \psi_z = 0$; 2) контур шарнирно оперт и свободен в направлении образующей:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = v = w = \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = \psi_\theta = 0. \text{ При } \theta = 0 \text{ и } \theta = \pi \text{ будем задавать условия}$$

$$\text{симметрии } \frac{\partial u}{\partial \theta} = v = \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi_z}{\partial \theta} = \psi_\theta = 0.$$

Для решения задачи разрешающие функции $u(\theta, z)$, $v(\theta, z)$, $w(\theta, z)$, $\psi_\theta(\theta, z)$, $\psi_z(\theta, z)$ представим в виде

$$\begin{aligned}
u(\theta, z) &= \sum_{i=0}^N u_i(\theta)\varphi_{1i}(z), & v(\theta, z) &= \sum_{i=0}^N v_i(\theta)\varphi_{2i}(z), \\
w(\theta, z) &= \sum_{i=0}^N w_i(\theta)\varphi_{3i}(z), & \psi_\theta &= \sum_{i=0}^N \psi_{\theta i}(\theta)\varphi_{4i}(z), \\
\psi_z &= \sum_{i=0}^N \psi_{zi}(\theta)\varphi_{5i}(z),
\end{aligned} \tag{5}$$

где $u_i(\theta)$, $v_i(\theta)$, $w_i(\theta)$, $\psi_{\theta i}(\theta)$, $\psi_{zi}(\theta)$ – искомые функции переменной θ , $\varphi_{ji}(z)$ ($j = \overline{1, 5}$; $i = \overline{0, N}$) – линейные комбинации B -сплайнов на равномерной сетке Δ : $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_N = L$ с учетом граничных условий при $z = 0$ и $z = L$. В разрешающую систему входят производные по координате z от $u(\theta, z)$, $v(\theta, z)$, $w(\theta, z)$, $\psi_\theta(\theta, z)$, $\psi_z(\theta, z)$ не выше второго порядка, и можно ограничиться аппроксимацией сплайн-функциями третьей степени. Введем обозначения:

$$\Phi_{j\alpha} = \left[\varphi_{ji}^{(\alpha)}(\xi_k) \right] \quad (i, k = \overline{0, N}; j = \overline{1, 5}; \alpha = 0, 1, 2),$$

$$\begin{aligned}\bar{u} &= [u_0, \dots, u_N]^T, \quad \bar{v} = [v_0, \dots, v_N]^T, \quad \bar{w} = [w_0, \dots, w_N]^T, \\ \bar{\Psi}_z &= [\Psi_{z0}, \dots, \Psi_{zN}]^T, \quad \bar{\Psi}_\theta = [\Psi_{\theta 0}, \dots, \Psi_{\theta N}]^T, \\ \bar{b}_{kl}^T &= \{b_{kl}(\theta, \xi_0), \dots, b_{kl}(\theta, \xi_N)\} \quad (k = \overline{1, 5}; l = \overline{0, N}; l = \overline{1, 19}).\end{aligned}$$

С учетом этих обозначений система разрешающих уравнений примет вид

$$\begin{aligned}\bar{u}'' &= \Phi_{10}^{-1} (\bar{b}_{11} * \Phi_{12} + \bar{b}_{15} * \Phi_{11} + \rho\omega^2 \bar{b}_{19} * \Phi_{10}) \bar{u} + \Phi_{10}^{-1} (\bar{b}_{18} * \Phi_{10}) \bar{u}' + \\ &+ \Phi_{10}^{-1} (\bar{b}_{14} * \Phi_{21}) \bar{v} + \Phi_{10}^{-1} (\bar{b}_{12} * \Phi_{21} + \bar{b}_{16} * \Phi_{20}) \bar{v}' + \\ &+ \Phi_{10}^{-1} (\bar{b}_{13} * \Phi_{31} + \bar{b}_{17} * \Phi_{30}) \bar{w}, \\ \bar{v}'' &= \Phi_{20}^{-1} (\bar{b}_{2,10} * \Phi_{11}) \bar{u} + \Phi_{20}^{-1} (\bar{b}_{21} * \Phi_{11} + \bar{b}_{2,12} * \Phi_{10}) \bar{u}' + \\ &+ \Phi_{20}^{-1} (\bar{b}_{22} * \Phi_{20} + \bar{b}_{23} * \Phi_{22} + \bar{b}_{2,13} * \Phi_{21} + \rho\omega^2 \bar{b}_{2,15} * \Phi_{20}) \bar{v} + \\ &+ \Phi_{20}^{-1} (\bar{b}_{2,11} * \Phi_{20}) \bar{v}' + \Phi_{20}^{-1} (\bar{b}_{24} * \Phi_{30}) \bar{w} + \Phi_{20}^{-1} (\bar{b}_{25} * \Phi_{30}) \bar{w}' + \\ &+ \Phi_{20}^{-1} (\bar{b}_{25} * \Phi_{41} + \bar{b}_{2,14} * \Phi_{40}) \Psi'_z + \Phi_{20}^{-1} (\bar{b}_{27} * \Phi_{50} + \bar{b}_{28} * \Phi_{52} + \\ &+ \bar{b}_{29} * \Phi_{51}) \bar{\Psi}_\theta, \\ \bar{w}'' &= \Phi_{30}^{-1} (\bar{b}_{31} * \Phi_{11}) \bar{u} + \Phi_{30}^{-1} (\bar{b}_{32} * \Phi_{20}) \bar{v} + \Phi_{30}^{-1} (\bar{b}_{33} * \Phi_{20}) \bar{v}' + \\ &+ \Phi_{30}^{-1} (\bar{b}_{34} * \Phi_{30} + \bar{b}_{35} * \Phi_{32} + \bar{b}_{3,10} * \Phi_{31} + \rho\omega^2 \bar{b}_{3,12} * \Phi_{30}) \bar{w} + \\ &+ \Phi_{30}^{-1} (\bar{b}_{3,11} * \Phi_{30}) \bar{w}' + \Phi_{30}^{-1} (\bar{b}_{36} * \Phi_{41} + \bar{b}_{39} * \Phi_{40}) \bar{\Psi}_z + \\ &+ \Phi_{30}^{-1} (\bar{b}_{38} * \Phi_{50}) \bar{\Psi}_\theta + \Phi_{30}^{-1} (\bar{b}_{37} * \Phi_{50}) \bar{\Psi}'_\theta, \\ \bar{\Psi}_z'' &= \Phi_{40}^{-1} (\bar{b}_{42} * \Phi_{12} + \bar{b}_{49} * \Phi_{11} + \rho\omega^2 \bar{b}_{4,16} * \Phi_{10}) \bar{u} + \Phi_{40}^{-1} (\bar{b}_{41} * \Phi_{10}) \bar{u}' + \\ &+ \Phi_{40}^{-1} (\bar{b}_{4,12} * \Phi_{21}) \bar{v} + \Phi_{40}^{-1} (\bar{b}_{43} * \Phi_{21} + \bar{b}_{4,10} * \Phi_{20}) \bar{v}' + \\ &+ \Phi_{40}^{-1} (\bar{b}_{44} * \Phi_{31} + \bar{b}_{4,11} * \Phi_{30}) \bar{w} + \Phi_{40}^{-1} (\bar{b}_{45} * \Phi_{40} + \bar{b}_{46} * \Phi_{42} + \\ &+ \bar{b}_{4,13} * \Phi_{41} + \rho\omega^2 \bar{b}_{4,17} * \Phi_{40}) \Psi_z + \Phi_{40}^{-1} (\bar{b}_{4,15} * \Phi_{40}) \bar{\Psi}'_z + \\ &+ \Phi_{40}^{-1} (\bar{b}_{48} * \Phi_{51}) \bar{\Psi}_\theta + \Phi_{40}^{-1} (\bar{b}_{47} * \Phi_{51} + \bar{b}_{4,14} * \Phi_{50}) \bar{\Psi}'_\theta, \\ \bar{\Psi}_\theta'' &= \Phi_{50}^{-1} (\bar{b}_{5,11} * \Phi_{11}) \bar{u} + \Phi_{50}^{-1} (\bar{b}_{51} * \Phi_{11} + \bar{b}_{5,12} * \Phi_{10}) \bar{u}' + \\ &+ \Phi_{50}^{-1} (\bar{b}_{52} * \Phi_{20} + \bar{b}_{5,13} * \Phi_{21} + \bar{b}_{54} * \Phi_{22} + \rho\omega^2 \bar{b}_{5,17} * \Phi_{20}) \bar{v} +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\Phi_{50}^{-1}(\bar{b}_{53} * \Phi_{20})\bar{v}' + \Phi_{50}^{-1}(\bar{b}_{55} * \Phi_{30})w + \Phi_{50}^{-1}(\bar{b}_{56} * \Phi_{30})\bar{w}' + \\
& +\Phi_{50}^{-1}(\bar{b}_{5,16} * \Phi_{41})\bar{\Psi}_z + \Phi_{50}^{-1}(\bar{b}_{57} * \Phi_{41} + \bar{b}_{5,14} * \Phi_{40})\bar{\Psi}_z' + \\
& +\Phi_{50}^{-1}(\bar{b}_{58} * \Phi_{50} + \bar{b}_{59} * \Phi_{52} + \bar{b}_{5,15} * \Phi_{51} + \rho\omega^2\bar{b}_{5,18} * \Phi_{50})\bar{\Psi}_\theta + \\
& +\Phi_{50}^{-1}(\bar{b}_{5,10} * \Phi_{50})\bar{\Psi}_\theta'.
\end{aligned} \tag{6}$$

Систему дифференциальных уравнений (6) можно свести к виду

$$\bar{Y}' = A(\theta, \omega)\bar{Y}, \tag{7}$$

в которой $\bar{Y} = \{\bar{u}, \bar{u}', \bar{v}, \bar{v}', \bar{w}, \bar{w}', \bar{\Psi}_z, \bar{\Psi}_z', \bar{\Psi}_\theta, \bar{\Psi}_\theta'\}^T$, $A(\theta, \omega)$ – квадратная матрица порядка $10(N+1) \times 10(N+1)$. Граничные условия запишутся при этом в виде

$$B_1\bar{Y}(0) = \bar{0}, \quad B_2\bar{Y}(\pi) = \bar{0}, \tag{8}$$

где B_1 и B_2 – прямоугольные матрицы порядка $5(N+1) \times 10(N+1)$.

Краевую задачу (7), (8) на собственные значения можно решить, используя метод дискретной ортогонализации совместно с методом пошагового поиска [3–5].

Анализ результатов численных исследований. На основании предложенной методики исследовался спектр свободных колебаний замкнутой цилиндрической изотропной оболочки. Точность методики проверялась сравнением частот колебаний оболочки с шарнирно опертыми краями, вычисленных по уточненной теории с использованием данного подхода при различном числе N точек коллокации и по трехмерной теории с возможным представлением перемещений в виде

$$\begin{aligned}
u_r &= \bar{u}_r(r) \cos n\theta \sin \frac{k\pi z}{L}, \quad u_z = \bar{u}_z(r) \cos n\theta \cos \frac{k\pi z}{L}, \\
u_\theta &= \bar{u}_\theta(r) \sin n\theta \sin \frac{k\pi z}{L}
\end{aligned}$$

и последующим применением метода дискретной ортогонализации и пошагового поиска. Рассматривалась оболочка с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$ и геометрическими параметрами: длиной $L = 20$, радиусом $R = 10$ и толщиной $H = 2$, $\bar{\omega}_m = \omega_m H \sqrt{\rho/G}$ (m – номер частоты). Полученные результаты приведены в табл. 1. В ней представлены также частоты свободных колебаний жестко защемленной по торцам оболочки. Как следует из табл. 1, полученные результаты имеют хорошее совпадение даже при малом числе точек коллокации для небольших значений коэффициента волнообразования в продольном направлении k ($k = 0, k = 1$), что говорит о точности предложенной методики расчетов, и о возможности применения

Таблица 1

m	Трехмерная теория	Уточненная теория					
		Шарнирное закрепление торцов					Жесткая заделка торцов
		Волнообразование	$N = 10$	$N = 14$	$N = 18$	$N = 22$	$N = 14$
1	0,06964	$n = 2, k=1$	0,0708	0,0707	0,0707	0,0707	0,0899
2	0,09142	$n = 3, k=1$	0,0939	0,0939	0,0938	0,0938	0,1083
3	0,09899	$n = 1, k=1$	0,0987	0,0987	0,0987	0,0986	0,1089
4	0,10017	$n = 1, k=0$	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000	0,1562
5	0,14486	$n = 4, k=1$	0,1472	0,1472	0,1472	0,1472	0,1733
6	0,15494	$n = 2, k=2$	0,1569	0,1555	0,1552	0,1551	0,1796
7	0,16748	$n = 3, k=2$	0,1697	0,1685	0,1682	0,1681	0,1912
8	0,16802	$n = 1, k=2$	0,1699	0,1686	0,1683	0,1683	0,1918

уточненной теории Миндлина для достаточно короткой оболочки ($L = 2R$). Для жестко заделанной по торцам оболочки наблюдается увеличение частот по сравнению с частотами шарнирно опертого цилиндра.

Исследовался также спектр частот колебаний оболочки с переменной в окружном направлении толщиной, изменяющейся по закону $H = H_0(1 + \alpha \cos 2\theta)$. В табл. 2 представлены три первых собственных частоты $\bar{\omega}_m = \omega_m H \sqrt{\rho/G}$ изотропной оболочки с $\nu = 0,3$ и геометрическими параметрами: $L = 20$, $R = 10$ и $H_0 = 2$ при различных значениях пара-

Таблица 2

$\bar{\omega}$	α					
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\bar{\omega}_1$	0,0899	0,0900	0,0901	0,0905	0,0909	0,0915
$\bar{\omega}_2$	0,1083	0,1071	0,1060	0,1048	0,1036	0,1019
$\bar{\omega}_3$	0,1089	0,1087	0,1083	0,1077	0,1068	0,1058

метра α . Торцы оболочки жестко закреплены. Возрастание параметра α приводит к возрастанию (до 1,6%) первой частоты, убыванию второй (порядка 6,5%) и третьей (до 3%) частот в рассматриваемом диапазоне изменения параметра α .

РЕЗЮМЕ. Дослідження задачі про власні коливання циліндричних оболонок змінної товщини при різних граничних умовах проведено на основі чисельно-

аналітичного методу в рамках теорії Міндліна. Для вивчення даної проблеми запропоновано метод сплайн-колокації разом із методом дискретної ортогоналізації. Наведено результати розрахунків для різних граничних умов на торцях та деяких законів змінення товщини.

SUMMARY. Investigation of the problem about natural vibration of cylindrical shells of a variable thickness under the complicated conditions is offered to be conducted as based on numerical-analytical method within the framework of Mindlin theory. The calculation results are presented for different kinds of boundary conditions on the end-faces and variants shapes of cylinder thickness for isotropic cylindrical shells.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. *Свободные колебания элементов оболочечных конструкций* / Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., А.И. Шинкарь. – К.: Наук. думка, 1986. – 172 с. 2. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости.* – К.: Наук. думка, 1981. – 544 с. (Методы расчета оболочек: В 5 т., т. 4). 3. *Григоренко А.Я. Численное решение задачи о свободных осесимметричных колебаниях полого ортотропного цилиндра при различном закреплении торцов* // Прикладная механика. – 1997. – Т. 33, № 5. – С.49–54. 4. *Grigorenko A. Ya., Efimova T.L.. Application of Spline-Approximation for Solving the Problems on Natural Vibration of Rectangular Plates of Variable Thickness* // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41, № 10. – P. 1161–1169. 5. *Григоренко О.Я., Єфімова Т.Л., Пузирьов С.В. Дослідження вільних коливань прямокутних ортотропних пластин лінійно змінної товщини* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – 49, № 3. – С. 153–161.

*Институт механики НАН Украины, г.Киев
Киевский национальный университет строительства
и архитектуры*

Поступила 20.11.2007

УДК 539.3

В. А. СМЕТАНКИН, канд. техн. наук, Н. В. СМЕТАНКИНА, канд. техн. наук

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Основными методами исследования динамического поведения пластин и оболочек неканонической формы являются численные методы, например, метод конечных элементов или вариационные методы [1, 2]. Кроме них для решения краевых задач применяются методы, основанные на приеме «расширения» заданной системы: расширения заданной области [3], компенсирующих нагрузок [4], геометрического погружения [5], контурных рядов [6]. Как правило, с помощью указанных методов рассматриваются задачи о статическом деформировании однородных изотропных элементов конструкций или задачи об их свободных колебаниях. В данной статье на основе приема «расширения» заданной системы предложен метод исследования нестационарных колебаний многослойных пластин неканонической формы в плане.

Постановка задачи. Рассмотрим многослойную пластину, состоящую из I ортотропных слоев постоянной толщины h_i ($i = \overline{1, I}$). Пластина отнесена к декартовой системе координат, связанной с наружной поверхностью первого слоя, и занимает на координатной поверхности Oxy область Ω , ограниченную контуром

$$\Gamma: x_\Gamma = x(s), \quad y_\Gamma = y(s),$$

где s – текущая длина дуги линии контура.

Пластина находится под действием системы нестационарных нагрузок $\mathbf{P} = \{p_j(x, y, t)\}$ ($j = \overline{1, 2I+3}$), $(x, y) \in \tilde{\Omega} \subset \Omega$. Будем считать, что процесс деформирования пластины можно описать в рамках теории пластин первого порядка, в пределах каждого слоя учитываются деформации поперечного сдвига и инерции вращения нормального элемента, а для пакета слоев в целом выполняется гипотеза ломаной линии [7]. Перемещения согласно принятым гипотезам представим в следующем виде:

$$u_k^i = u_k + \sum_{j=1}^{i-1} h_j u_{3+I(k-1)+j} + (z - \delta_{i-1}) u_{3+I(k-1)+i},$$

$$u_3^i = u_3, \quad (k = 1, 2, i = \overline{1, I}). \quad (1)$$

Здесь $u_l = u_l(x, y, t)$ ($l = 1, 2, 3$) – перемещения точки координатной поверхности в направлении координатных осей; $u_{3+I(k-1)+i} =$

$= u_{3+I(k-1)+i}(x, y, t)$, $k = 1, 2$ – углы поворота нормального элемента в i -

м слое вокруг осей Ox и Oy соответственно; $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$, $\delta_{i-1} \leq z \leq \delta_i$

($i = \overline{1, I}$); t – время.

Деформации определяются формулами Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^i &= u_{1,x}^i, \quad \varepsilon_y^i = u_{2,y}^i, \quad \gamma_{xy}^i = u_{1,y}^i + u_{2,x}^i, \\ \gamma_{xz}^i &= u_{1,x}^i + u_{3,x}^i, \quad \gamma_{yz}^i = u_{2,z}^i + u_{3,y}^i \quad (i = \overline{1, I}). \end{aligned} \quad (2)$$

Соотношение между напряжениями и деформациями в i -м слое устанавливается на основе уравнений закона Гука [8]

$$\begin{aligned} \sigma_x^i &= B_{11}^i \varepsilon_x^i + B_{12}^i \varepsilon_y^i, \quad \sigma_y^i = B_{12}^i \varepsilon_x^i + B_{22}^i \varepsilon_y^i, \\ \tau_{yz}^i &= B_{44}^i \gamma_{yz}^i, \quad \tau_{xz}^i = B_{55}^i \gamma_{xz}^i, \quad \tau_{xy}^i = B_{66}^i \gamma_{xy}^i \quad (i = \overline{1, I}). \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения движения многослойной пластины

$$\left[\mathbf{M}^p \right] \mathbf{U}_{,tt} + \left[\mathbf{A} \right] \mathbf{U} = \mathbf{P}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_{,t} = 0, \quad t = 0, \quad (4)$$

и граничные условия на контуре Γ

$$\left[\mathbf{B}^\Gamma \right] \mathbf{U} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (5)$$

получим из вариационного уравнения Остроградского-Гамильтона. В уравнениях (3) и (5) принято обозначение $\mathbf{U} = \{u_j(x, y, t)\}$ ($j = \overline{1, 2I+3}$).

Ненулевые элементы матрицы $\left[\mathbf{M}^p \right]$ имеют вид

$$m_{11}^p = m_{22}^p = m_{33}^p = C_\rho^I, \quad m_{13+i}^p = m_{3+i1}^p = m_{23+I+i}^p = m_{3+I+i2}^p = D_\rho^i,$$

$$m_{3+i3+j}^p = m_{3+I+i3+I+j}^p = \eta_\rho^{ij} \quad (i, j = \overline{1, I});$$

$$C_\rho^i = \sum_{j=1}^i \alpha_\rho^i; \quad D_\rho^i = h_i (C_\rho^I - C_\rho^i) + \beta_\rho^i; \quad K_\rho^i = h_i^2 (C_\rho^I - C_\rho^i) + \gamma_\rho^i;$$

$$\eta_\rho^{ij} = \begin{cases} h_j D_\rho^i & (j < i), \\ K_\rho^i & (j = i), \\ h_i D_\rho^j & (j > i); \end{cases}$$

$$\alpha_{\rho}^i = \rho_i h_i; \quad \beta_{\rho}^i = \frac{\rho_i h_i^2}{2}; \quad \gamma_{\rho}^i = \frac{\rho_i h_i^3}{3} \quad (i, j = \overline{1, I});$$

ρ_i – плотность материала i -го слоя.

Элементами матриц $[\Lambda]$ и $[\mathbf{B}^{\Gamma}]$ являются дифференциальные операторы [7]. Вид элементов матрицы $[\mathbf{B}^{\Gamma}]$ зависит от способа заданных граничных условий на контуре Γ

$$B_{ij}^{\Gamma} = \chi_i^1 B_{ij}^u + \chi_i^2 B_{ij}^{\sigma} \quad (i, j = \overline{1, 2I+3}),$$

моделирование которых осуществляется соответствующим выбором коэффициентов χ_i^1 и χ_i^2 .

Метод решения. Исходную многослойную пластину «расширим» до вспомогательной многослойной пластины с такой же композицией слоев. Форма и граничные условия для вспомогательной пластины выбираем таким образом, чтобы решение задачи можно было получить достаточно просто. Наиболее простой вид решения имеет место, если принять в качестве вспомогательной прямоугольную в плане шарнирно опертую пластину [7, 9]. Это позволяет представить решение исходной краевой задачи в виде разложений в тригонометрические ряды по функциям, удовлетворяющим граничным условиям шарнирного опирания.

Чтобы обеспечить выполнение исходных граничных условий (5), к вспомогательной пластине прилагаются дополнительные компенсирующие нагрузки $q_j^c(x, y, t)$ ($j = \overline{1, 2I+3}$), непрерывно распределенные по следу контура Γ . Таким образом, задача (4), (5) о колебаниях пластины произвольной формы сводится к задаче о колебаниях прямоугольной пластины. Компенсирующие нагрузки входят в уравнения движения прямоугольной пластины в виде следующих интегральных соотношений:

$$p_j^c(x, y, t) = \sum_{k=1}^{2I+3} \oint_{\Gamma} L_{jk} q_k^c(s, t) \delta(x - x_{\Gamma}, y - y_{\Gamma}) ds, \quad (6)$$

где $\delta(x - x_{\Gamma}, y - y_{\Gamma})$ – δ -функция, $j, k = \overline{1, 2I+3}$.

Ненулевые элементы матрицы L_{jk} имеют вид

$$L_{11} = L_{22} = L_{3+i3+i} = L_{3+I+i3+I+i} = y'_{\Gamma},$$

$$L_{33} = 1, \quad L_{12} = L_{3+i3+I+i} = x'_{\Gamma},$$

$$L_{21} = L_{3+I+i3+i} = -x'_{\Gamma} \quad (i = \overline{1, I}); \quad x'_{\Gamma} = \frac{dx_{\Gamma}}{ds}, \quad y'_{\Gamma} = \frac{dy_{\Gamma}}{ds}.$$

Интенсивности компенсирующих нагрузок определяются из решения системы интегральных уравнений, которая формируется из условия удовлетворения исходным граничным условиям на следе контура Γ (5) с учетом соотношений (6):

$$\left[\mathbf{B}^\Gamma \right] \mathbf{U} \left[\mathbf{Q}^c(x, y, t) \right] = 0, \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (7)$$

Метод решения системы (7) состоит в том, что функции перемещений (1) и компенсирующих нагрузок (6) разлагаются в двойные тригонометрические ряды по функциям, удовлетворяющим граничным условиям вспомогательной пластины, и в ряд вдоль следа контура Γ [7, 9]. В результате система интегральных уравнений (7) преобразуется в систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений компенсирующих нагрузок, а система уравнений движения (4) преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Система дифференциальных уравнений интегрируется методом разложения решения в ряд Тейлора [9].

Таким образом, решение задачи записывается в виде

$$u_j(x, y, t) = \sum_{m=1}^{m^*} \sum_{n=1}^{n^*} \left[\sum_{k=1}^{2I+3} \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\mu^*} \pi_{jk}^{mn} \theta_{k\alpha\mu}^{mn} q_{k\alpha\mu}(t) + \varepsilon_{jmn}(t) \right] B_{jmn}(x, y) \quad (j = \overline{1, 2I+3}),$$

где π_{jk}^{mn} , $\theta_{k\alpha\mu}^{mn}$, $\varepsilon_{jmn}(t)$ – элементы матриц, полученных в результате численных преобразований; $q_{k\alpha\mu}(t)$ – коэффициенты разложения компенсирующих нагрузок в ряд вдоль контура Γ ;

$$\begin{aligned} B_{1mn} &= \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, & B_{2mn} &= \sin \alpha_m x \cos \beta_n y, \\ B_{3mn} &= \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, & B_{3+imn} &= B_{1mn}, \\ B_{3+I+imn} &= B_{2mn} \quad (i = \overline{1, I}); & \alpha_m &= \frac{m\pi}{A}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{B}; \end{aligned}$$

A и B – размеры в плане прямоугольной пластины.

После вычисления компенсирующих нагрузок определяются перемещения (1), деформации (2) и напряжения (3) в слоях заданной пластины.

Описание результатов численных исследований. Численные исследования проведены для пятислойной шарнирно опертой пластины, форма плана которой показана на рис. 1. Контур пластины описывается уравнениями отрезков прямых и сопряженных с ними дуг окружностей. Общий вид этих уравнений приведен в работе [10]. На пластину действует равномерно распределенная импульсная нагрузка, изменяющаяся во времени по закону

$$p_3 = P_0 H(t),$$

где P_0 – интенсивность нагрузки, $P_0 = 0,1$ МПа; $H(t)$ – функция Хевисайда.

Слои пластины имеют следующие геометрические и механические характеристики: $I = 5$; $h_i = 0,005$ м; $s_1 = 0,48$ м, $s_2 = 0,31$ м, $s_3 = 0,36$ м, $s_4 = 0,24$ м; $R_1 = 0,12$ м, $R_2 = 0,06$ м, $R_3 = 0,2$ м, $R_4 = 0,07$ м; $E_1^i = 132,5$ ГПа, $E_2^i = 10,8$ ГПа (модули упругости); $G_{12}^i = G_{13}^i = 5,7$ ГПа, $G_{23}^i = 3,4$ ГПа (модули сдвига); $\nu_1^i = 0,24$ (коэффициенты Пуассона); $\theta_1 = \theta_3 = \theta_5 = 0$, $\theta_2 = \theta_4 = \pi/2$ (углы армирования); $\rho_i = 1500$ кг/м³.

На рис. 2 приведены зависимости напряжения σ_y^5 от времени в разных точках пластины. Сплошной линией показана зависимость в точке C_1 с координатами $x = 0,35$ м, $y = 0,25$ м, $z = \delta_5$ (см. (1)), штриховой – зависимость в точке C_2 с координатами $x = 0,15$ м, $y = 0,25$ м, $z = \delta_5$.

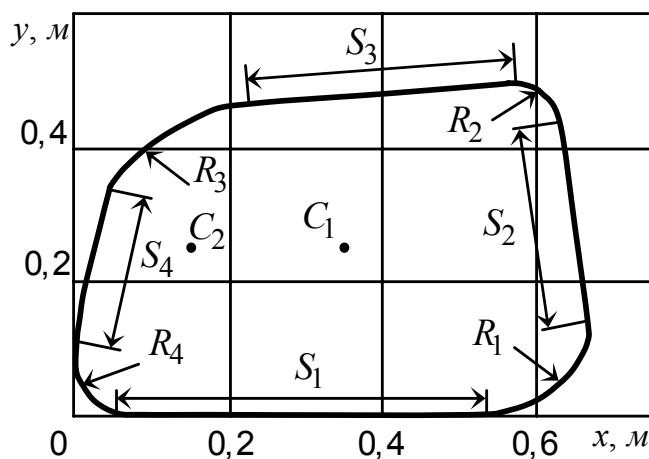


Рис. 1

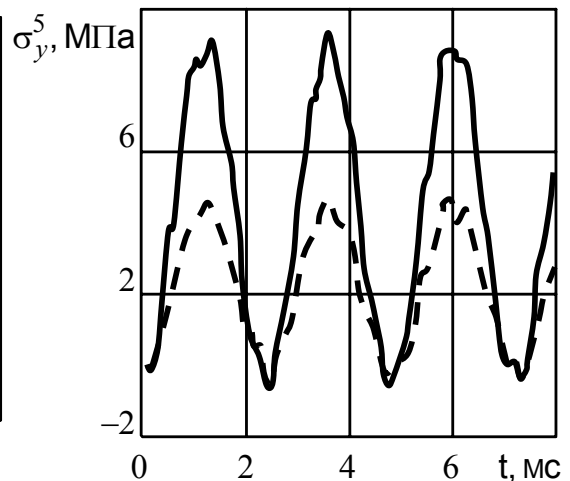


Рис. 2

Таким образом, предложен подход к решению задачи о нестационарном деформировании многослойных ортотропных пластин неканонической формы в плане, который позволяет представить решение задачи в виде разложения в тригонометрические ряды. К основным преимуществам данного подхода можно отнести то, что система уравнений составляется только относительно точек, лежащих на контуре, а алгоритм решения задачи является общим и не зависит от формы области и вида граничных условий.

РЕЗЮМЕ. На основі методу розширення заданої системи розроблено підхід до розв'язання задачі про нестационарні коливання багатослойових ортотропних пластин неканонічної форми у плані. Коливання пластин досліджуються у рамках кінематичних гіпотез, які враховують деформації поперечного зсуву та інерції обертання

нормального елемента у кожному шарі. Наведено чисельні результати для п'ятишарової пластини, на яку діє імпульсне навантаження.

SUMMARY. An approach to solution of the problem about non-stationary vibrations of multilayer orthotropic plates with a non-canonical shape in plan view is developed on the basis of the method of the given system expansion. Vibrations of plates are investigated within the framework of the kinematic hypotheses accounting to transverse shear strains and normal element rotation inertia in each layer. Numerical results for a five-layer plate at an impulse loading are presented.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. Рвачев В. Л., Курпа Л. В. Применение теории R-функций к исследованию пластин и оболочек сложной формы // Проблемы машиностроения. – 1998. – Т. 1, № 1. – С. 33–53. 2. Librescu L., Hause T. Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey // Composite Structures. – 2000. – Vol. 48. – P. 1–17. 3. Безухов Н. И., Лужин О. В. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. – М.: Высшая шк., 1974. – 200 с. 4. Баженов В. А., Чан Дык Тинь. Анализ гармонических колебаний цилиндрических оболочек методом компенсирующих нагрузок // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2003. – Вип. 72. – С. 28–40. 5. Шардаков И. Н., Труфанов Н. А., Матвеев В. П. Метод геометрического погружения в теории упругости. – Екатеринбург: УрО РАН, 1999. – 298 с. 6. Zielinski A. P. A contour series method applied to shells // Thin-Walled Structures. – 1985. – Vol. 3. – P. 217–229. 7. Сметанкина Н. В. Исследование динамического отклика многослойных композитных пластин сложной формы в плане // Весн. нац. техн. ун-та «ХПИ». Динамика и прочность машин. – 2004. – № 20. – С. 91–98. 8. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448 с. 9. Шупиков А. Н., Бузько Я. П., Сметанкина Н. В., Угримов С. В. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация. – Харьков: ИД «ИНЖЭК», 2004. – 252 с. 10. Shupikov A. N., Smetankina N. V., Svet Ye. V. Nonstationary heat conduction in complex-shape laminated plates // Trans. ASME. Journal of Heat Transfer. – 2007. – Vol. 129, № 3. – P. 335–341.

*Харьковский национальный технический
университет сельского хозяйства*

Поступила 14.12.2007

УДК 539.3

Л.А. ФИЛЬШТИНСКИЙ, д-р физ.-мат.наук, Е.И. МОСКАЛЕНКО

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГИХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ С ВКЛЮЧЕНИЕМ

В работе [1] задачи дифракции упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях сведены к соответствующим интегральным уравнениям, а в [2] методом рядов исследована дифракция упругих волн на включениях. В работах [3, 4] рассмотрена дифракция упругих волн на тонких включениях. В данной работе для задачи о дифракции волн на инородном включении проведена численная реализация построенного аналитического алгоритма.

Постановка задачи. Рассмотрим отнесённую к прямоугольной декартовой системе координат Ox_1x_2 изотропную упругую среду, содержащую инородное упругое включение D , ограниченное достаточно гладким контуром L . Будем предполагать, что включение непрерывно скреплено с матрицей таким образом, что векторы напряжения и перемещения непрерывно продолжимы через L . Пусть из бесконечности излучается плоская монохроматическая волна расширения-сжатия, причем часть энергии падающей волны поглощается включением, остальная часть рассеивается в матрице. Задача заключается в определении концентрации напряжения на линии раздела материалов.

Краевые условия на границе раздела сред имеют вид

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} - e^{\pm 2i\psi} (\sigma_{22} - \sigma_{11} \pm 2i\sigma_{12}) = 2(N \mp iT).$$

Здесь $\sigma_{i,j}$, $i, j = 1, 2$ – тензор напряжения; ψ – угол между положительной нормалью к L и осью Ox_1 ; N, T – нормальная и касательная к L соответствующие нагрузки.

Уравнения движения в данном случае имеют вид

$$\nabla^2 u_i + \sigma \partial_i (\partial_k u_k) = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i, k = 1, 2).$$

Введя волновые потенциалы Φ_m (временной множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и ниже опущен), представим комплексные комбинации напряжений и перемещений в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 2(\lambda + \mu)\nabla^2 \Phi_1, \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= -8\mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\Phi_1 + i\Phi_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12} &= -8\mu \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} (\Phi_1 - i\Phi_2), \\ u_1 - iu_2 &= 2 \frac{\partial}{\partial z} (\Phi_1 + i\Phi_2), \quad u_1 + iu_2 = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\Phi_1 - i\Phi_2), \\ z &= x_1 + ix_2, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2),\end{aligned}\quad (1)$$

где $\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$ ($j = 1, 2$); λ, μ – постоянными Ламе.

Условия сопряжения, заключающиеся в непрерывности векторов перемещения и напряжения при переходе через L , приводят к смешанной системе сингулярных и фредгольмовых уравнений. Чтобы избежать этого целесообразно условия сопряжения по перемещениям продифференцировать по дуговой координате s . Тогда, в силу соотношений (1) получаем следующую систему граничных условий на границе раздела сред:

$$\sum_{n=1}^2 (A_{mn} \Phi_n - A_{mn}^* \Phi_n^*) = 0 \quad (m = \overline{1, 4}), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned}A_{11} &= -\gamma_1^2 (\lambda + \mu) + 4\mu e^{2i\psi} d^2, \quad A_{2n} = \bar{A}_{1n}, \\ A_{12} &= 4i\mu e^{2i\psi} d^2, \quad d = \partial/\partial z, \quad A_{4n} = \bar{A}_{3n}, \\ A_{31} &= \gamma_1^2 + 4e^{2i\psi} d^2, \quad A_{32} = i(\gamma_2^2 + 4e^{2i\psi} d^2), \quad \gamma_n = \omega/c_n;\end{aligned}$$

c_1 и c_2 – скорости распространения волн расширения и сдвига соответственно; ω – круговая частота. Функции Φ_n и Φ_n^* относятся к матрице и включению соответственно. Для определения операторов A_{mn}^* необходимо в формулах для A_{mn} константам $\lambda, \mu, \gamma_1, \gamma_2$ приписать сверху звездочку.

Интегральные уравнения задачи. Функции Φ_n и Φ_n^* представим в виде [1]

$$\begin{aligned}\Phi_n(z) &= \Phi_n^0 + \int_L \left\{ q_n(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} H_0^{(1)}(\gamma_n r) d\zeta + r_n(\zeta) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} H_0^{(1)}(\gamma_n r) d\bar{\zeta} \right\}, \quad z \in D, \\ \Phi_n^*(z) &= \Phi_n^0 + \int_L \left\{ \alpha_n(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} H_0^{(1)}(\gamma_n^* r) d\zeta + \beta_n(\zeta) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} H_0^{(1)}(\gamma_n^* r) d\bar{\zeta} \right\}, \quad z \in D^*, \\ \Phi_n^0 &= d_n \exp(-i\gamma_n (\xi_1 \cos \beta + \xi_2 \sin \beta)),\end{aligned}$$

$$r = |\zeta - z|, \quad \zeta = \xi_1 + i\xi_2 \in L, \quad (n = 1, 2). \quad (3)$$

Здесь $q_n(\zeta)$, $r_n(\zeta)$, $\alpha_n(\zeta)$, $\beta_n(\zeta)$ – искомые плотности; $H_p^1(x)$ – функции Ханкеля первого рода порядка p ; d_n – амплитуды падающих волн.

Функции (3) являются решениями соответствующих уравнений Гельмгольца и обеспечивают выполнение условий излучения. Для уничтожения расходящейся части в напряжениях на L достаточно потребовать, чтобы $q_2 = iq_1$, $r_2 = -ir_1$, $\alpha_2 = i\alpha_1$, $\beta_2 = -i\beta_1$.

Подставив предельные значения функций (3) в условия сопряжений (2), получим систему сингулярных интегральных уравнений

$$\sum_{n=1}^2 \left(a_{mn} y_n(\zeta_0) + b_{mn} y_n^*(\zeta_0) + \int_L [G_{mn}(\zeta, \zeta_0) y_n(\zeta) + R_{mn}^*(\zeta, \zeta_0) y_n^*(\zeta)] ds \right) = W_m(\zeta_0) \quad (m = \overline{1, 4}), \quad (4)$$

где

$$y_1(\zeta) = q_1(\zeta), \quad y_2(\zeta) = r_1(\zeta),$$

$$y_1^*(\zeta) = \alpha_1(\zeta), \quad y_2^*(\zeta) = \beta_1(\zeta),$$

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = -\gamma_1^2 (\lambda + \mu) + \mu (\gamma_1^2 + \gamma_2^2),$$

$$a_{21} = -a_{12}, \quad a_{22} = -a_{11},$$

$$a_{31} = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 + \sigma \gamma_1^2, \quad a_{32} = -2(\gamma_1^2 - \gamma_2^2),$$

$$a_{41} = -a_{32}, \quad a_{42} = -a_{31},$$

$$R_{mn}^* = -G_{mn}^*, \quad b_{mn}^* = a_{mn}^* \quad (m = \overline{1, 4}; \quad n = \overline{1, 4}),$$

$$G_{11} = \frac{i}{2} \left[(\lambda + \mu) \gamma_1^3 e^{i(\psi - \alpha_0)} H_1^{(1)}(\gamma_1 r_0) + \mu e^{i(2\psi_0 + \psi - 3\alpha_0)} f_3 \right],$$

$$G_{12} = -\frac{i}{2} \left[(\lambda + \mu) \gamma_1^3 e^{i(\alpha_0 - \psi)} H_1^{(1)}(\gamma_1 r_0) + \mu e^{i(2\psi_0 - \psi - \alpha_0)} f_1 \right],$$

$$G_{21} = \frac{i}{2} \left[(\lambda + \mu) \gamma_1^3 e^{i(\psi - \alpha_0)} H_1^{(1)}(\gamma_1 r_0) + \mu e^{i(\psi - 2\psi_0 + \alpha_0)} f_1 \right],$$

$$G_{22} = -\frac{i}{2} \left[(\lambda + \mu) \gamma_1^3 e^{i(\alpha_0 - \psi)} H_1^{(1)}(\gamma_1 r_0) + \mu e^{i(3\alpha_0 - 2\psi_0 - \psi)} f_3 \right],$$

$$G_{31} = -\frac{i}{2} \left[e^{i(\psi - \alpha_0)} f_2 - e^{i(2\psi_0 + \psi - 3\alpha_0)} f_3 \right],$$

$$\begin{aligned}
G_{32} &= \frac{i}{2} \left[e^{i(\alpha_0 - \psi)} e^i f_2 - e^{i(2\psi_0 - \psi - \alpha_0)} f_1 \right], \\
G_{41} &= -\frac{i}{2} \left[e^{i(\psi - \alpha_0)} - e^{i(\psi + \alpha_0 - 2\psi_0)} \right] f_1, \\
G_{42} &= \frac{i}{2} \left[e^{i(\alpha_0 - \psi)} f_1 - \mu e^{i(3\alpha_0 - \psi - 2\psi_0)} f_3 \right], \\
f_1 &= \gamma_1^3 H_1^{(1)}(\gamma_1 r_0) + \gamma_2^3 H_1^{(1)}(\gamma_2 r_0), \\
f_2 &= \gamma_1^3 H_1^{(1)}(\gamma_1 r_0) - \gamma_2^3 H_1^{(1)}(\gamma_2 r_0), \\
f_3 &= -\gamma_1^3 H_3^*(\gamma_1 r_0) + \gamma_2^3 H_3^*(\gamma_2 r_0), \quad H_3^*(x) = \frac{16i}{\pi x^3} + H_3^{(1)}(x), \\
W_1 &= \sigma \gamma_1^2 \Phi_1^0 - \sigma_j \gamma_{1j}^2 \Phi_{1j}^0 + \frac{1}{2} e^{2i(\psi_0 - \beta)} \left[\left(\gamma_1^2 \Phi_1^0 + i \gamma_2^2 \Phi_2^0 \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left(\gamma_{1j}^2 \Phi_{1j}^0 + i \gamma_{2j}^2 \Phi_{2j}^0 \right) \right], \\
W_2 &= \sigma \gamma_1^2 \Phi_1^0 - \sigma_j \gamma_{1j}^2 \Phi_{1j}^0 + \frac{1}{2} e^{-2i(\psi_0 - \beta)} \left[\left(\gamma_1^2 \Phi_1^0 - i \gamma_2^2 \Phi_2^0 \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left(\gamma_{1j}^2 \Phi_{1j}^0 - i \gamma_{2j}^2 \Phi_{2j}^0 \right) \right], \\
W_3 &= \frac{i}{2} \left[\left(\gamma_1^2 \Phi_1^0 + i \gamma_2^2 \Phi_2^0 \right) - \left(\gamma_{1j}^2 \Phi_{1j}^0 + i \gamma_{2j}^2 \Phi_{2j}^0 \right) \right] \cdot \left[e^{i(\psi_0 - 2\beta)} - e^{-i\psi_0} \right], \\
W_4 &= \frac{i}{2} \left[\left(\gamma_1^2 \Phi_1^0 - i \gamma_2^2 \Phi_2^0 \right) - \left(\gamma_{1j}^2 \Phi_{1j}^0 - i \gamma_{2j}^2 \Phi_{2j}^0 \right) \right] \cdot \left[e^{-i(\psi_0 - 2\beta)} - e^{i\psi_0} \right], \\
\psi_0 &= \psi(\zeta_0), \quad r_0 = |\zeta - \zeta_0|, \quad \alpha_0 = \arg(\zeta - \zeta_0).
\end{aligned}$$

Описание и анализ результатов расчетов. При численной реализации решения был использован метод механических квадратур [5]. Исследования проводились для случаев, когда материал матрицы – алюминий, материал включения – сталь. Из бесконечности вдоль оси x_2 излучается волна растяжения-сжатия.

На рисунках представлена зависимость относительного нормального окружного напряжения K , $K = \left| \frac{\sigma_\Theta}{\sigma^0} \right|$ от волнового числа $\gamma_1 R$ (где σ_0 – напряжение σ_{22}^0 в падающей волне). Кривая 1 построена для точек на контуре А и С, кривые 2 и 3 – для точек В и D соответственно.

На рис. 1, 2 представлены графики зависимости величины K от волнового числа $\gamma_1 R$ для матрицы и включения соответственно. Па-

раметризация контура L имеет вид: $\zeta = R e^{i\varphi}$, где $R = 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

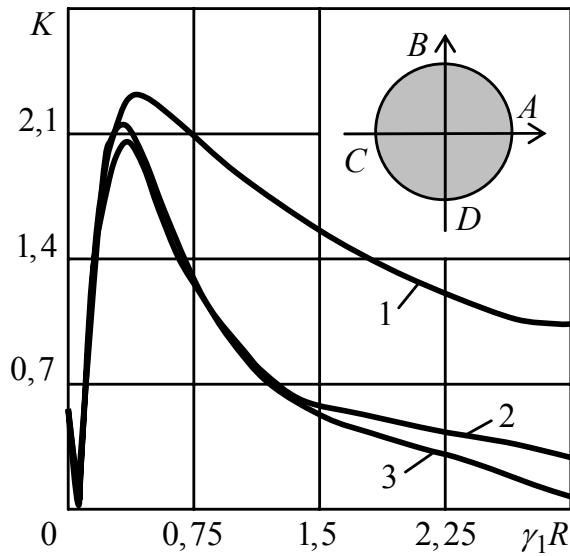


Рис. 1

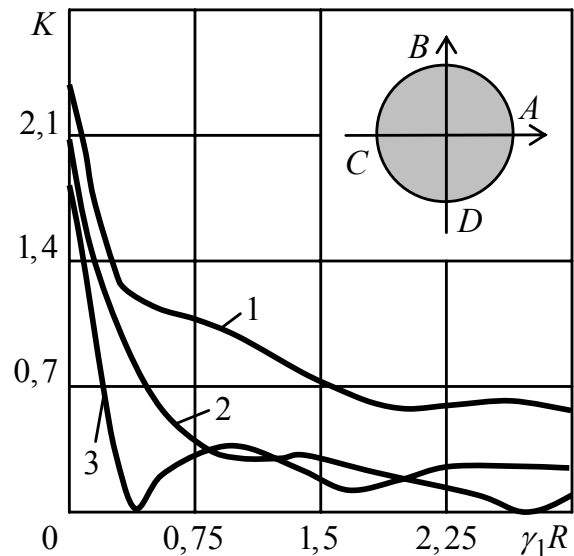


Рис. 2

На рис. 3, 4 приведены результаты расчетов зависимости величины K от волнового числа $\gamma_1 R$ для матрицы и включения соответственно, на «квадратном» контуре. Параметрическое уравнения контура выбиралось в виде: $\zeta = R(e^{i\varphi} + 0.14036e^{-3i\varphi})$, где $R = 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

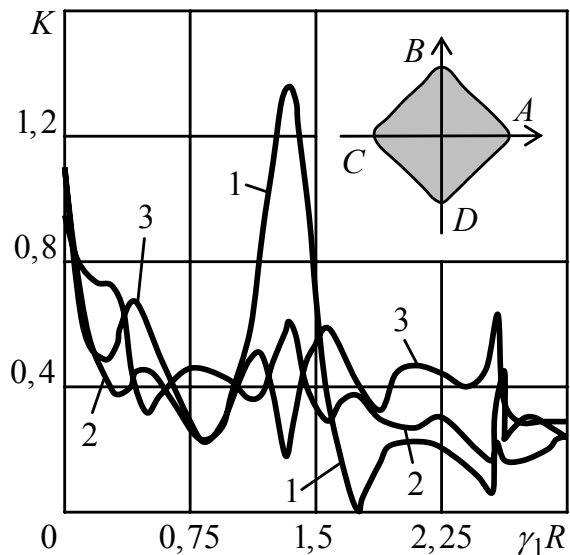


Рис. 3

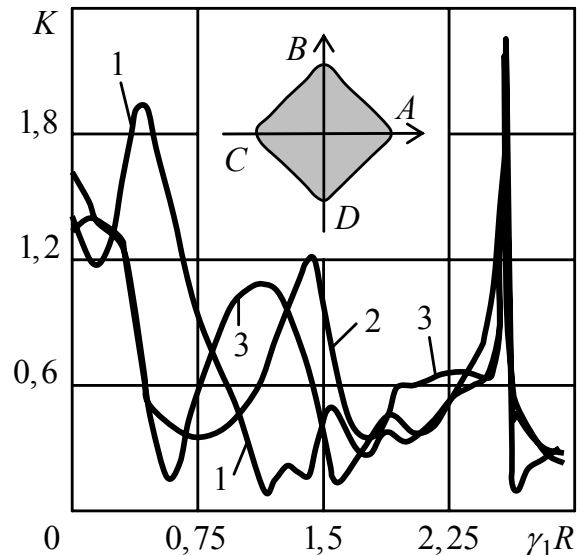


Рис. 4

Кривые на рис. 5, 6 соответствуют «эллиптическому» включению. Параметрическое уравнение контура: $\zeta = R_1 \cos \varphi + iR_2 \sin \varphi$, где $R_1 = 1,5$, $R_2 = 0,5$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Из результатов расчетов следует, что в процессе динамического воз-

буждения происходит перераспределение напряжения σ_{Θ} на контуре, как со стороны матрицы, так и со стороны включения. Напряжение σ_{Θ} значи-

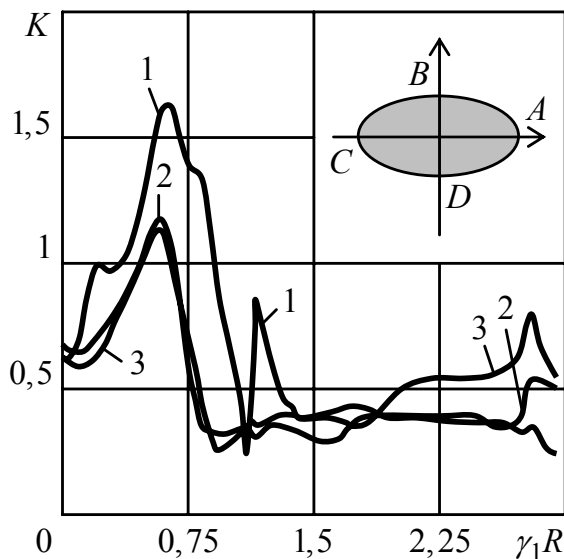


Рис. 5

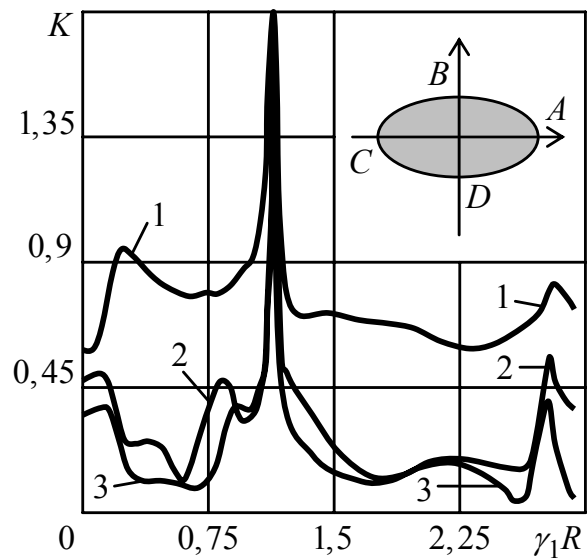


Рис. 6

тельно зависит от вида включения.

Концентрация напряжения на контуре матрицы и во включении увеличивается в некотором диапазоне частоты ω , по сравнению с соответствующим статическим случаем ($\omega = 0$).

РЕЗЮМЕ. Розглядається аналітичний алгоритм розв'язання дифракційної задачі, для визначення концентрації напружень на лінії розділу матеріалів у ізотропному середовищі зі стороннім включенням.

SUMMARY. Using integral equation technique to determination density of stresses in unbounded isotropic medium with heterogeneous include. The results of calculations are considered in this paper.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. Фильштинский Л.А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1991. – № 4. – С. 119–127. 2. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – К.: Наук. думка, 1978. – 307 с. 3. Вахонина Л.В., Попов В.Г. Концентрация напряжений вблизи тонкого кругового упругого включения нулевой изгибной жесткости при волновом воздействии // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 172–178. 4. Kit H.S., Kunets Ya.I., Yemets V.F. Elastodynamic scattering from a thin-walled inclusion of low rigidity // Int. J. Eng. Sci. – 1999. – Vol. 37. – P. 331–345. 5. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – К.: Наук. думка, 1984. – 344 с.

Сумской государственной университет

Поступила 10.11.2007

А. О. ВАТУЛЬЯН, д-р физ.-мат. наук, О. А. БЕЛЯК

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ ПРИ РАСЧЕТЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ С ПОЛОСТЬЮ.

Задачи о колебаниях полуограниченных упругих тел с дефектами различной природы (полости, включения, трещины) представляют собой один из важных классов динамических задач теории упругости. Одним из наиболее эффективных методов решения задач теории упругости для областей с дефектами является сведение исходных задач к системам граничных интегральных уравнений при помощи функций Грина [1–3], что позволяет снизить размерность исследуемой задачи на единицу. На основе решения таких задач может быть осуществлен расчет волновых полей в слое. Однако, в случае малого характерного размера полости решение таких задач можно значительно упростить, и построить решение, не прибегая к процедуре обращения системы граничных уравнений.

Рассмотрим установившиеся колебания с частотой ω ортотропного упругого слоя толщины h с цилиндрической полостью, не выходящей на границы слоя, направляющая которой есть гладкая замкнутая кривая l_0 с образующей, параллельной оси Ox_2 . Нижняя грань слоя жестко закреплена и совпадает с осью Ox_1 , ось Ox_3 направлена перпендикулярно вверх. Оси упругой симметрии ортотропного материала совпадают с осями системы координат. Колебания в слое вызваны нагрузкой $p_i(x_1)$ ($i = 1, 2, 3$), приложенной к верхней части границы слоя.

Краевая задача после отделения временного множителя имеет вид:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

$$u_i |_{x_3=0} = 0, \quad \sigma_{i3} |_{x_3=h} = p_i, \quad \sigma_{ij} n_j |_{l_0} = 0, \quad (2)$$

где ρ – плотность среды C_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных материала, n_j – компоненты единичного вектора нормали к кривой l_0 , внешнего по отношению к области, занятой упругой средой. Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечности, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения [4].

В зависимости от способа приложения нагрузки исходная задача (1) – (2) распадается на две. Первая задача – задача об антиплоских колебаниях ортотропного слоя с цилиндрической полостью (задача 1). В этом случае

отличной от нуля является компонента $u_2(x_1, x_3)$, и в краевой задаче (1) – (2) полагаем $i = 2, j = 1, 3$. Вторая задача – плоская задача о колебаниях слоя с полостью (задача 2). Ненулевыми в этом случае будут компоненты $u_1(x_1, x_3), u_3(x_1, x_3)$, а в краевой задаче (1) – (2) полагаем $i, j = 1, 3$.

Решения прямых задач 1, 2 строятся на основе функций Грина для слоя $U_i^{(m)}(x, \xi), i, m = 1, 2, 3$ и обобщенной теоремы взаимности [5]. Компоненты вектор-функции Грина [2, 3, 6] для слоя представимы в виде суммы двух слагаемых, первое из которых является фундаментальным решением для неограниченной среды, а второе – регулярная добавка, обеспечивающая выполнение однородных граничных условий на границах слоя

$$U_i^{(m)}(x, \xi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \frac{\Delta_{im}(\alpha, \omega)}{\Delta(\alpha, \omega)} e^{i(\alpha, \xi)} d\alpha_1 d\alpha_3 + S_{im}(x, \xi) \quad (i, m = 1, 2, 3),$$

где $\Delta_{im}(\alpha, \omega), \Delta(\alpha, \omega)$ – полиномы второго и четвертого порядка, Γ – поверхность всюду совпадающая с плоскостью R^2 за исключением множества нулей полинома $\Delta(\alpha, \omega)$.

Представление полей перемещений под действием поверхностной нагрузки с носителем на отрезке $[a, b]$ на основании теоремы взаимности имеет вид:

$$\begin{aligned} u_m(\xi) &= u_m^*(\xi) - \int_{l_0} K_{im}(x, \xi)(u_i(x) - u_i(\xi)) dl_x - \\ &- \rho\omega^2 \int_{S_0} U_i^{(m)}(x, \xi) dS_x u_i(\xi), \quad K_{im}(x, \xi) = \sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi) n_j(x), \\ u_m^*(\xi) &= \int_a^b p_i(x_1) U_i^{(m)}(x_1, h, \xi) dx_1, \end{aligned} \quad (3)$$

где $u_m^*(\xi)$ – эталонные поля смещений в среде без дефекта, S_0 – плоская область, ограниченная гладкой кривой l_0 . Обычный способ дальнейшего исследования задачи состоит в составлении нерегулярной системы граничных интегральных уравнений по границе полости. Однако, представление (3) дает возможность получить систему с регулярными подынтегральными функциями. Осуществляя в соотношении (3) предельный переход $\xi \rightarrow y \in l_0$ получаем эту систему граничных интегральных уравнений (ГИУ):

$$u_m(y) = u_m^*(y) - \int_{l_0} K_{im}(x, y)(u_i(x) - u_i(y)) dl_x -$$

$$-\rho\omega^2 \int_{S_0} U_i^{(m)}(x, y) dS_x u_i(y), \quad i, j, m = 1, 2, 3 \quad (4)$$

Интеграл по контуру дефекта в ГИУ (4) существует как несобственный, что позволяет при дискретизации избежать вычисления сингулярных интегралов [2, 3].

На основании представления (3) может быть рассчитано поле смещений всюду в слое, если найдено поле смещений на границе полости.

Рассмотрим асимптотический подход к решению задачи (1) – (2) о колебаниях ортотропного слоя с цилиндрической полостью, поперечное сечение которой представляет собой окружность малого относительного радиуса r . Метод реализован в следующей области изменения безразмерных параметров:

$$\varepsilon_1 \ll 1, \quad \varepsilon_* < \varepsilon_2 < 1,$$

где $\varepsilon_1 = r/h$, $\varepsilon_2 = \omega r \sqrt{\rho/C}$, причем $C = C_{44}$ для задачи 1, $C = C_{33}$ для задачи 2. Отметим, что решение обратной задачи идентификации обычно строится при $\varepsilon_2 > \varepsilon_*$, что соответствует случаю малого дефекта, когда в слое имеются бегущие волны.

Осуществим параметризацию полости в ГИУ (4) $x = x_0 + \varepsilon_1 \eta$, $y = x_0 + \varepsilon_1 \zeta$, $x_0 = \{x_{10}, x_{30}\}$, $\eta = \{\cos \theta, \sin \theta\}$, $\zeta = \{\cos \psi, \sin \psi\}$, $\theta, \psi \in [0, 2\pi]$, а также $\alpha_1 = \alpha \cos \varphi$, $\alpha_3 = \alpha \sin \varphi$.

Представим подынтегральное выражение интеграла по контуру дефекта в виде суммы двух слагаемых, первое из которых соответствует статическому случаю ($\varepsilon_2 = 0$) и некоторой добавки:

$$K_{im}(\alpha, \theta, \psi, \varphi) = K_{im}^0(\alpha, \theta, \psi, \varphi) + K_{im}^1(\alpha, \theta, \psi, \varphi).$$

Проведено исследование структуры функций $K_{im}^0(\alpha, \theta, \psi, \varphi)$ и $K_{im}^1(\alpha, \theta, \psi, \varphi)$, а также двойного интеграла по области S . Показано, что имеют место следующие оценки.

Если $x, y \in l_0$, то

$$K_{im}^1(x, y) = O(\varepsilon_2^2), \quad K_{im}^0(x, y) = \varepsilon_1^{-1} F_{im}(x, y) + O(\varepsilon_1),$$

$$\rho\omega^2 \int_{S_0} U_i^{(m)}(x, y) dS_x = O(\varepsilon_2^2),$$

$$F_{im}(\alpha, \theta, \psi, \varphi) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{A_{im}(\theta, \psi, \varphi)}{A(\varphi)} e^{i\alpha[\cos(\theta-\varphi) - \cos(\varphi-\psi)]} d\alpha d\varphi.$$

Осуществляя разложение в ряд полей смещений

$$u_m(x_0 + r\eta) = u_m^0(x_0) + \varepsilon_1 (u_{m,1}(x_0) \cos \theta + u_{m,3}(x_0) \sin \theta) + O(\varepsilon_1^2) \quad (m = 1, 2, 3),$$

и подставляя в (4) полученные разложения, вычислим криволинейный интеграл по контуру дефекта и соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε_1 . При этом для нахождения неизвестных коэффициентов разложения воспользуемся условием ортогональности и получим линейные алгебраические системы. Разрешая их, найдем искомые коэффициенты разложения.

Так, например, поле смещений на контуре полости для задачи 1 представлено в работах [2, 3], а для задачи 2: имеет вид:

$$u_{1,1} = \frac{I_2(a_2^{(2)}, b_2^{(2)})u_{3,3}^*(x_0) + (2\pi - I_1(a_3^{(1)}, b_3^{(1)}))u_{3,1}^*(x_0)}{\Delta_1},$$

$$u_{1,3} = \frac{I_1(a_1^{(1)}, b_1^{(1)})u_{3,1}^*(x_0) + (2\pi - I_2(a_3^{(2)}, b_3^{(2)}))u_{1,3}^*(x_0)}{\Delta_2},$$

$$u_{3,1} = \frac{(2\pi - I_1(a_1^{(1)}, b_1^{(1)}))u_{3,1}^*(x_0) + I_2(a_3^{(2)}, b_3^{(2)})u_{1,3}^*(x_0)}{\Delta_2},$$

$$u_{3,3} = \frac{(2\pi - I_2(a_1^{(2)}, b_1^{(2)}))u_{3,3}^*(x_0) + I_1(a_2^{(1)}, b_2^{(1)})u_{1,1}^*(x_0)}{\Delta_1},$$

$$\Delta_1 = (2\pi - I_2(a_1^{(2)}, b_1^{(2)}))(2\pi - I_1(a_3^{(1)}, b_3^{(1)})) - I_2(a_2^{(2)}, b_2^{(2)}) \times I_1(a_2^{(1)}, b_2^{(1)}),$$

$$\Delta_2 = (2\pi - I_1(a_1^{(1)}, b_1^{(1)}))(2\pi - I_2(a_3^{(2)}, b_3^{(2)})) - I_1(a_1^{(1)}, b_1^{(1)})I_2(a_3^{(2)}, b_3^{(2)});$$

$$I_1(a^{(1)}, b^{(1)}) = \frac{\pi}{2(\gamma_1\gamma_5 + \gamma_5 - s_2)s_1\gamma_5\sqrt{\gamma_1\gamma_5}}(a^{(1)}C_1 + b^{(1)}C_2);$$

$$I_2(a^{(2)}, b^{(2)}) = \frac{\pi}{(\gamma_1\gamma_5 + \gamma_5 - s_2)s_1\gamma_1\gamma_5}(a^{(2)}C_3 + b^{(2)}C_4);$$

$$C_1 = 2\gamma_1\gamma_5(s_1(2\sqrt{\gamma_5} - s_4) + (2\gamma_1\gamma_5 - s_2)s_3);$$

$$C_2 = s_1 s_2 (s_3 - s_4) - 4\gamma_1 \sqrt{\gamma_5^3} (s_1 - s_3 \sqrt{\gamma_5}) - 2\gamma_1 \gamma_5 (s_2 s_3 - s_1 s_4),$$

$$C_3 = \left(4s_1 \sqrt{\gamma_1^3 \gamma_5^3} - (2\gamma_1 \gamma_5 - s_2) s_2 s_3 + s_1^2 s_3 - 2\gamma_1 \gamma_5 s_1 s_4 \right) / (2\gamma_1 \gamma_5),$$

$$C_4 = -2s_1 \sqrt{\gamma_1 \gamma_5} + (2\gamma_1 \gamma_5 - s_2) s_3 + s_1 s_3,$$

$$s_1 = \sqrt{4\gamma_1 \gamma_5^2 - s_2^2}, \quad s_2 = \gamma_1 - 2\gamma_5 \gamma_7 - \gamma_7^2,$$

$$s_n = \sqrt{2\gamma_5 \sqrt{\gamma_1} - (-1)^n |s_2|} \quad n = 3, 4;$$

$$a_1^{(1)} = \gamma_5, \quad a_2^{(1)} = \gamma_5 \gamma_7, \quad a_3^{(1)} = a_1^{(1)}, \quad b_1^{(1)} = -a_2^{(1)}, \quad b_2^{(1)} = -a_2^{(1)},$$

$$b_3^{(1)} = \gamma_1 - \gamma_5 \gamma_7 - \gamma_7^2, \quad a_1^{(2)} = \gamma_1 \gamma_5, \quad a_2^{(2)} = a_2^{(1)}, \quad a_3^{(2)} = a_1^{(2)},$$

$$b_1^{(2)} = b_2^{(1)}, \quad b_2^{(2)} = -a_1^{(1)}, \quad b_3^{(2)} = -a_2^{(1)}.$$

$$\gamma_1 = C_{11} / C_{33}, \quad \gamma_5 = C_{55} / C_{33}, \quad \gamma_7 = C_{13} / C_{33}.$$

Таким образом, для задач 1, 2, получены явные представления полей смещений на контуре дефекта l_0 минуя процедуру дискретизации ГИУ (4) на основе метода граничных элементов [2, 3, 5].

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу про коливання анізотропного шару з циліндричною порожниною під дією навантаження, що діє на поверхні шару. Задачу розв'язано з припущенням малості характерного розміру порожнини. Наведено асимптотичні результати про розподіл хвильових полів на границі порожнини.

SUMMARY. The problem about fluctuations of an anisotropic layer with a cylindrical cavity under action of the loading enclosed on a surface of a layer is considered. The problem is solved in the assumption little the characteristic size of a cavity. Are submitted asymptotic results about distribution of wave fields to border of a cavity.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: Физматлит, 2007. – 223 с. 2. Ватульян А.О., Беляк О.А. Асимптотический подход к решению обратной задачи о реконструкции полости в упругом слое // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2006. – Вип. 1. – С. 73–79. 3. Ватульян А.О., Беляк О.А. К реконструкции малых полостей в упругом слое // Дефектоскопия. – 2006. – № 10. – С. 33–39. 4. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. – М.: Наука, – 1979. – 319 с. 5. Бребия К., Телес Ж., Врубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с. 6. Ватульян А.О., Гусева И.А., Сюнякова И.М. О фундаментальных решениях для ортотропной среды и их применении // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра. Сер. естеств. науки. – 1989. – №2. – С. 81–85.

Южный федеральный университет,
г. Ростов-на-Дону (Россия)

Поступила 25.11.2007

УДК 539.3:534.1

В. В. МЕЛЕШКО, д-р физ.-мат. наук,
В. А. МОИСЕЕНКО, канд. физ.-мат. наук

ВОЛНОВОДНЫЕ СВОЙСТВА УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ КУБИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Материалы кубической структуры среди анизотропных материалов являются наиболее распространенными. Их упругие свойства характеризуются тремя независимыми безразмерными упругими константами C , G , λ , отнесенными к нормирующей величине C_0 . Волноводные свойства этих материалов зависят как от их упругих свойств и плотности ρ , так и от направления распространения волн и определяются набором бездисперсионных упругих волн (мод) в неоднородном волноводном объекте (неограниченном волноводе). Это обстоятельство приводит к увеличению числа параметров исследований волновых процессов и обуславливает необходимость группировать и упорядочить материалы по волноводным свойствам с целью выявления качественных эффектов и закономерностей распространения волн. Волноводные свойства изотропных материалов изучены [1, 2] в полном объеме и определяются набором (спектром) упругих волн в изотропном волноводном объекте. Этот спектр для любого направления волнового вектора состоит из одной бездисперсионной продольной волны и двух равных по скорости бездисперсионных сдвиговых волн поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях. При переходе к материалам гексагональной структуры волноводные свойства становятся частично зависимыми от направления распространения волн, так как характер этой зависимости определяется только одной координатой единичного волнового вектора [3]. Волноводные свойства материалов кубической структуры зависят от всех трех координат единичного волнового вектора.

Постановка и построение решения задачи. Неограниченный волновод из материала кубической структуры отнесем к декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) , совместив плоскости упругой симметрии с координатными плоскостями. Структура волнового поля в рассматриваемом волноводном объекте не допускает деления на независимые структурные составляющие, как это происходит в изотропном объекте [1, 2] и в волноводном объекте гексагональной структуры [2], а представляет собой сложную комбинацию одной квазипродольной и двух квазипоперечных волновых составляющих [2]. Эта комбинированная волновая характеристика определяется векторным потенциалом $\vec{\Psi}^{(PSS)}(\vec{x}, t)$, который по своей структуре является трехволновым, в виде произведения амплитудного и волнового множителей [1]:

$$\bar{\Psi}^{(PSS)}(\vec{x}, t) = \bar{A}^{(PSS)}(\vec{n}) e^{i(\gamma\vec{n}\vec{x} - \omega t)}, \quad (1)$$

где \vec{x} – радиус-вектор произвольной точки волноводного объекта; γ – волновое число; ω – круговая частота волнового процесса; \vec{n} – единичный волновой вектор; t – время; $\bar{A}^{(PSS)}(\vec{n})$ – амплитудный вектор. Разрешающее уравнение для определения неизвестного потенциала имеет вид [2]:

$$L_{PSS}^{(6)} \bar{\Psi}^{(PSS)}(\vec{x}, t) = 0. \quad (2)$$

Дифференциальный оператор $L_{PSS}^{(6)}$ после выделения характерных слагаемых запишется так [2]:

$$L_{PSS}^{(6)} = L_{KP}^{(2)} L_{KS}^{(2)} L_{KS}^{(2)} + [C - (\lambda + 2G)] \left\{ (C + \lambda) (\partial_1^2 \partial_3^2 + \partial_2^2 \partial_3^2 + \partial_1^2 \partial_2^2) L_{KS}^{(2)} + [(C + \lambda)(C - G) - 2(\lambda + G)^2] \partial_1^2 \partial_2^2 \partial_3^2 \right\}, \quad (3)$$

где

$$L_{KP}^{(2)} = C \nabla^2 - \frac{\rho}{C_0} \partial_t^2, \quad L_{KS}^{(2)} = G \nabla^2 - \frac{\rho}{C_0} \partial_t^2;$$

$\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$, ∂_1 , ∂_2 , ∂_3 , ∂_t – частные производные по пространственным координатам и времени.

Подстановка представления (1) в разрешающее уравнение (2) с учетом того, что компоненты единичного волнового вектора связаны равенством $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, приводит к бикубическому дисперсионному уравнению для определения фазовых скоростей бездисперсионных упругих волн $C^f = \omega/\gamma$ в волноводном объекте в зависимости от направления единичного волнового вектора, упругих свойств и плотности материала. Это дисперсионное уравнение, полученное из уравнения (2), будет таким:

$$C^6 - (2 + K_3) C^4 + (1 + 2K_3 + K_1 K_3 K_n^{(4)}) C^2 - K_3 (1 + K_1 K_n^{(4)} + K_1 K_2 K_n^{(6)}) = 0, \quad (4)$$

где

$$K_1 = \frac{(C + \lambda)(C - \lambda - 2G)}{CG}, \quad K_2 = \left(C - G - 2 \frac{(\lambda + G)^2}{C + \lambda} \right) G^{-1},$$

$$K_3 = \frac{C}{G}, \quad K_n^{(4)} = n_1^2 n_3^2 + n_2^2 n_3^2 + n_1^2 n_2^2, \quad K_n^{(6)} = n_1^2 n_2^2 n_3^2.$$

Из уравнения (4) определяются безразмерные фазовые скорости

$C_{1,2,3} = C_{1,2,3}^f / V_{KS}$ квазипродольной моды и двух квазипоперечных мод в смешанной трехволновой бездисперсионной моде. Эти безразмерные фазовые скорости нормированы величиной $V_{KS} = \sqrt{C_0 G / \rho}$.

Важной особенностью уравнения (4) для определения фазовых скоростей C_1, C_2, C_3 является то, что при переходе к изотропному материалу все коэффициенты при $K_n^{(4)}$ и $K_n^{(6)}$ за счет коэффициентов K_1 и K_2 тождественно обращаются в нуль. Это означает, что фазовые скорости становятся независимыми от направления распространения волны и принимают известные значения [1]:

$$\begin{aligned} C_1^f &= C_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}, \\ C_2^f &= C_3^f = C_s = \sqrt{\mu / \rho}. \end{aligned}$$

Особый интерес представляют три предельных случая, когда одна из компонент волнового вектора равна единице, а две другие – нулю. В этих случаях направление волнового вектора совпадает с направлением одной из координатных осей и дисперсионное уравнение (4) из-за того, что $K_n^{(6)} = K_n^{(4)} \equiv 0$, существенно упрощается и принимает вид:

$$C^6 - (2 + K_3)C^4 + (1 + 2K_3)C^2 - K_3 = (C^2 - K_3)(C^2 - 1)^2 = 0. \quad (5)$$

Последнее означает, что все три волновые составляющие поля становятся независимыми и определяют соответственно одну независимую продольную волновую составляющую с безразмерной фазовой скоростью $C_1 = \sqrt{K_3}$ и две независимые поперечные (сдвиговые) волновые составляющие с одинаковой безразмерной фазовой скоростью $C_2 = C_3 = 1$. При переходе к соответствующим размерным значениям фазовых скоростей, как и следовало ожидать [4], получим, что $C_1^f = V_{KS} \sqrt{K_3} = \sqrt{C_0 C / \rho} = V_{KP}$, $C_2^f = C_3^f = V_{KS}$.

Если одна из компонент волнового вектора равна нулю, а две другие отличны от нуля, то приходим к трем характерным случаям, когда волновой вектор лежит в одной из координатных плоскостей. Для этих случаев коэффициент $K_n^{(6)} \equiv 0$, а в коэффициенте $K_n^{(4)}$ из трех слагаемых остается одно. Дисперсионные уравнения для этих случаев идентичны и содержат в качестве параметров только две соответствующие компоненты волнового вектора и другие постоянные:

$$C^6 - (2 + K_3)C^4 + (1 + 2K_3 + K_1 K_3 n_i^2 n_j^2)C^2 - K_3 (1 + K_1 n_i^2 n_j^2) = 0. \quad (6)$$

Здесь при i , равном 1, 2, 3, индекс j принимает значения 2, 3, 1 соответ-

ственно, причем $n_i^2 + n_j^2 = 1$.

Анализ уравнения (6) показывает, что для всех трех случаев оно всегда представимо произведением двух сомножителей в следующем виде:

$$\left(C^4 - (1 + K_3)C^2 + K_3(1 + K_1 n_i^2 n_j^2)\right) * (C^2 - 1) = 0. \quad (7)$$

Это говорит о появлении в волновом поле двух независимых составляющих: волновой и биволновой. Волновая составляющая имеет безразмерную фазовую скорость, равную единице, т.е. $C_3 = 1$. Соответствующая ей размерная фазовая скорость будет равна V_{KS} и поэтому $C_3^f = V_{KS}$, что соответствует скорости чисто сдвиговой моды. Биволновая составляющая представляет взаимосвязанную комбинацию квазипродольной и квазипоперечной мод, безразмерные фазовые скорости C_1^f и C_2^f которых определяются, как решения биквадратного уравнения

$$C^4 - (1 + K_3)C^2 + K_3(1 + K_1 n_i^2 n_j^2) = 0. \quad (8)$$

Учитывая, что $1 + K_3 > 0$, $1 + K_1 n_i^2 n_j^2 > 0$, можно показать, что уравнение (8) будет иметь различные вещественные положительные корни, если

$$D = (1 + K_3)^2 - 4K_3(1 + K_1 n_i^2 n_j^2) > 0. \quad (9)$$

Условие (9) выполняется при любых значениях упругих постоянных и координат волнового вектора, так как после соответствующих преобразований оно принимает следующий вид:

$$D = 1 + 4n_i^2 n_j^2 K_4(K_4 + 2) + (1 - 4n_i^2 n_j^2)K_3(K_3 - 2) > 0 \quad (10)$$

или

$$D = 1 + K_4(K_4 + 2)\sin^2(2\varphi) + K_3(K_3 - 2)\cos^2(2\varphi) > 0, \quad (11)$$

где $K_4 = \lambda/G$; φ – угол между волновым вектором и соответствующей осью Ox_i . Это означает, что для определения безразмерных фазовых скоростей квазипродольной и квазипоперечной мод взаимосвязанных уравнением (8) будут справедливы такие формулы:

$$C_1 = \sqrt{\frac{1 + K_3 + \sqrt{D}}{2}}, \quad C_2 = \sqrt{\frac{1 + K_3 - \sqrt{D}}{2}}. \quad (12)$$

При этом для предельных значений $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ из формул (12) следуют значения $C_1 = \sqrt{K_3}$, $C_2 = 1$, полученные выше, а для $\varphi = \pi/4$ имеем

формулы $C_1 = \sqrt{\frac{K_3 + K_4 + 2}{2}}$, $C_2 = \sqrt{\frac{K_3 - K_4}{2}}$, которые совпадают с ранее известными [4] с точностью до нормировки величиной G .

Если все три компоненты волнового вектора отличны от нуля, то безразмерные фазовые скорости квазипродольной и двух квазипоперечных взаимосвязанных мод в трехволновой бездисперсионной моде, определяемые из уравнения (4) с использованием формул Кардано, имеют значения

$$\begin{aligned} C_1 &= \sqrt{\frac{2+K_3}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{(K_3-1)^2 - 3K_1K_3K_n^{(4)}} \cos((\alpha+2\pi)/3)}, \\ C_2 &= \sqrt{\frac{2+K_3}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{(K_3-1)^2 - 3K_1K_3K_n^{(4)}} \cos((\alpha-2\pi)/3)}, \\ C_3 &= \sqrt{\frac{2+K_3}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{(K_3-1)^2 - 3K_1K_3K_n^{(4)}} \cos(\alpha/3)}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos(A/B), \\ B &= 2\left(\sqrt{(K_3-1)^2 - K_1K_3K_n^{(4)}}\right)^3, \\ A &= -2(2+K_3)^3 + 9(2+K_3)(1+2K_3 + K_1K_3K_n^{(4)}) - \\ &\quad - 27K_3(1+K_1K_n^{(4)} + K_1K_2K_n^{(6)}). \end{aligned}$$

Эти формулы справедливы и для всех, рассмотренных выше предельных случаев. При этом формулы (13) для симметричного случая, когда $n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = 1/3$, существенно упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} C_1 &= \sqrt{(K_3 + 2K_4 + 4)/3}, \\ C_{2,3} &= \sqrt{(K_3 - K_4 + 1)/3}. \end{aligned} \quad (14)$$

Последнее позволяет рассмотреть еще один предельный случай. Следует отметить полное совпадение с точностью до нормировки величиной G формул (14) с аналогичными формулами, приведенными в справочнике [4]. Это еще раз подтверждает достоверность проведенных аналитических исследований.

Анализ результатов численных исследований. Численные исследования волноводных свойств проводились для упругих материалов кубической структуры с постоянными, представленными в табл. 1 [4].

В табл. 1 упругие константы приведены с точностью до множителя $C_0 = 10^{10} \cdot \text{Н} / \text{м}^2$, плотности материалов – с точностью до множителя

$10^3 \cdot \text{кг}/\text{м}^3$. По результатам проведенных исследований материалы по волновым свойствам разбиты в таблице на две группы и упорядочены в пределах каждой группы. Начальным критерием для этого выбрано значение характерного безразмерного коэффициента $K_0 = (C - \lambda - 2G)G^{-1}$, который соответствует общему множителю второго и третьего характерных слагаемых в представлении (3). Полностью вписывается в такое упорядочивание материалов и значение безразмерного коэффициента K_2 , который в том же представлении (3) определяет соотношение коэффициентов непосредственно в третьем и втором характерных слагаемых. Для изотропных материалов $K_0 = K_2 \equiv 0$, поэтому первой группе материалов (первая половина таблицы) соответствуют отрицательные значения K_0 и K_2 . Второй группе материалов (вторая половина таблицы) соответствуют положительные значения K_0 и K_2 . В пределах каждой группы материалы упорядочены по возрастанию модулей этих параметров.

Таблица 1

Материал	Постоянные					
	C	G	λ	ρ	K_0	K_2
BaF ₂	9,040	2,530	4,060	4,8930	-0,0316	-0,0475
SrTiO ₃	31,760	12,350	10,250	5,1300	-0,2583	-0,3973
MgO	29,590	15,390	9,540	3,5760	-0,6972	-1,1414
Ge	13,000	6,700	4,900	5,3267	-0,7910	-1,3037
GaP	11,400	7,043	3,475	4,1800	-0,8748	-1,4933
GaAs	12,260	6,000	5,710	5,3160	-0,9083	-1,5002
LiF	11,200	6,320	4,560	2,6400	-0,9494	-1,6048
ZnSe	8,720	3,920	5,240	5,4200	-1,1122	-1,8421
B-ZnS	10,460	4,613	6,530	4,0910	-1,1481	-1,9010
Bi ₄ (GeO ₄) ₃	11,580	4,360	2,700	7,1200	0,0367	0,0548
NaF	9,710	2,800	2,430	2,8090	0,6000	0,8585
NaCl	4,911	1,284	1,285	2,1678	0,8240	1,1656
NaI	3,040	0,720	0,900	3,6550	0,9722	1,3720
AgBr	5,630	0,720	3,300	6,4760	1,2361	1,7926
CsCl	3,640	0,800	0,920	3,9880	1,4000	1,9281
AgCl	6,010	0,625	3,620	5,5710	1,8240	2,6280
KCl	4,070	0,630	0,690	1,9891	3,3651	4,2982
KBr	3,460	0,515	0,560	2,7500	3,6311	4,6021

Значения отношений безразмерных фазовых скоростей C_1 и C_2 с использованием формул (12) при различных значениях φ для рассматриваемых материалов представлены в табл. 2.

Таблица 2

Материал	φ				K_{ps}	K_{ss}
	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$		
	Значения C_1/C_2					
BaF ₂	1,8903	1,8951	1,9048	1,9096	1,0102	1,0080
SrTiO ₃	1,6036	1,6426	1,7212	1,7611	1,0982	1,0716
MgO	1,3866	1,5083	1,7443	1,8673	1,3467	1,2390
Ge	1,3929	1,5352	1,8154	1,9658	1,4112	1,2862
GaP	1,2723	1,4427	1,7503	1,9116	1,5026	1,3332
GaAs	1,4295	1,5976	1,9432	2,1391	1,4964	1,3535
LiF	1,3312	1,5152	1,8708	2,0681	1,5535	1,3797
ZnSe	1,4915	1,7078	2,1929	2,5029	1,6781	1,5010
B-ZnS	1,5058	1,7309	2,2453	2,5828	1,7152	1,5322
Bi ₄ (GeO ₄) ₃	1,6297	1,6246	1,6145	1,6094	0,9875	0,9910
NaF	1,8622	1,7845	1,6347	1,5610	0,8383	0,8771
NaCl	1,9557	1,8501	1,6513	1,5547	0,7949	0,8416
NaI	2,0548	1,9284	1,6962	1,5856	0,7716	0,8203
AgBr	2,7963	2,5908	2,2531	2,1097	0,7544	0,7861
CsCl	2,1331	1,9598	1,6516	1,5049	0,7055	0,7670
AgCl	3,1010	2,7895	2,3206	2,1336	0,6880	0,7232
KCl	2,5417	2,1683	1,6024	1,3346	0,5251	0,6106
KBr	2,5920	2,1930	1,6001	1,3196	0,5091	0,5960

Проведенные численные исследования характера поведения фазовых скоростей для приведенных в табл. 2 направлений волнового вектора показывают, что при возрастании φ происходит изменение значений фазовых скоростей C_1 и C_2 и их отношения C_1/C_2 . Значение фазовой скорости C_3 при этом остается постоянным, а меняется отношение C_3/C_2 , при чем для материалов первой группы (первая половина табл. 2) эти отношения возрастают, а для материалов второй группы (вторая половина табл. 2) эти отношения убывают. Это говорит о том, что разбивка материалов на две группы в табл. 1 сохраняется и в табл. 2. Характер поведения отношения C_1/C_2 для каждого из значений φ индивидуальный и упорядочить материалы по этому признаку в пределах каждой группы не удастся. Однако монотонный характер поведения отношения C_1/C_2 при последовательном увеличении φ позволяет ввести в рассмотрение обобщающий параметр

K_{ps} как отношение экстремальных (крайних) значений для отношения C_1/C_2 и упорядочить материалы в пределах каждой группы по этому параметру.

Таким образом, введенный параметр $K_{ps} = (C_1/C_2)_{\varphi=\pi/4} / (C_1/C_2)_{\varphi=0}$, который в случае изотропного материала равен единице, характеризует влияние анизотропии на волноводные свойства материала и позволяет упорядочить их по этому признаку. Если по аналогии и для отношения C_3/C_2 ввести характерный обобщающий параметр $K_{ss} = (C_3/C_2)_{\varphi=\pi/4} / (C_3/C_2)_{\varphi=0}$, то он полностью подтверждает проведенную группировку и соответствующее упорядочивание материалов по волноводным свойствам. Для остальных значений φ от $\varphi = \pi/4$ до $\varphi = \pi/2$ согласно формулам (12) будет полная симметрия. Следует отметить, что при переходе к изотропному материалу $K_{ps} = K_{ss} = 1$, а $C_1/C_2 = C_p/C_s = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\mu} = \sqrt{2(1-\nu)(1-2\nu)}$ и $C_3/C_2 = 1$, следовательно, все материалы объединяются в одну группу и упорядочиваются по значению отношения C_1/C_2 .

Для представления общей картины распределения поля скоростей ниже приведем абсолютные (без нормировки) значения фазовых скоростей C_1^f , C_2^f и C_3^f , которые внесены в таблицу 3 с точностью до множителя $10^3 \cdot \text{м/с}$. Значения фазовых скоростей вычислены по формулам (13) и проверены по формулам соответствующим всем предельным случаям. В 1 случае волновой вектор направлен по осям координат, во 2 случае – по биссектрисам координатных плоскостей, в 3 случае – в симметричном направлении когда $n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = 1/3$.

Представленная картина поля скоростей в основном согласуется с имеющимися экспериментальными данными [4], а также подтверждает и дополняет проведенное выше исследование волноводных свойств рассматриваемых материалов. Для всех материалов первой половины табл. 1 C_1^f монотонно возрастает, и максимальное значение принимает в симметричном направлении. Для материалов второй группы C_1^f монотонно убывает, и в симметричном направлении принимает минимальное значение. Характер поведения C_2^f и C_3^f для материалов первой группы определяются соотношением $C_2^f \leq C_3^f$, а для материалов второй группы – соотношением $C_2^f \geq C_3^f$.

Таблица 3

Материал	1- случай		2- случай			3- случай	
	C_1^f	$C_2^f = C_3^f$	C_1^f	C_2^f	C_3^f	C_1^f	$C_2^f = C_3^f$
BaF ₂	4,2983	2,2739	4,3078	2,2559	2,2739	4,3110	2,2619
SrTiO ₃	7,8683	4,9065	8,0635	4,5787	4,9065	8,1275	4,6906
MgO	9,0965	6,5603	9,8868	5,2947	6,5603	10,134	5,7476
Ge	4,9402	3,5466	5,4203	2,7574	3,5466	5,5712	3,0433
GaP	5,2223	4,1048	5,8858	3,0789	4,1048	6,0909	3,4549
GaAs	4,8023	3,3596	5,3093	2,4821	3,3596	5,4678	2,8052
LiF	6,5134	4,8928	7,3340	3,5462	4,8928	7,5879	4,0452
ZnSe	4,0111	2,6893	4,4845	1,7917	2,6893	4,6316	2,1333
B-ZnS	5,0565	3,3580	5,6605	2,1916	3,3580	5,8480	2,6383
Bi ₄ (GeO ₄) ₃	4,0329	2,4746	4,0189	2,4972	2,4746	4,0143	2,4897
NaF	5,8794	3,1572	5,6193	3,5998	3,1572	5,5299	3,4585
NaCl	4,7597	2,4337	4,4960	2,8919	2,4337	4,4046	2,7477
NaI	2,8840	1,4035	2,7129	1,7110	1,4035	2,6534	1,6150
AgBr	2,9485	1,0544	2,8296	1,3412	1,0544	2,7888	1,2530
CsCl	3,0212	1,4163	2,7791	1,8467	1,4163	2,6935	1,7153
AgCl	3,2845	1,0592	3,1249	1,4646	1,0592	3,0698	1,3431
KCl	4,5234	1,7797	3,8900	2,9148	1,7797	3,6546	2,5923
KBr	3,5471	1,3685	3,0302	2,2962	1,3685	2,8370	2,0346

Тенденция поведения самих значений C_2^f и C_3^f в пределах каждой группы разная, и при этом меняться на противоположную при переходе от одной группы материалов к другой группе.

РЕЗЮМЕ. У тривимірній постановці проведено дослідження хвилеводних властивостей пружних матеріалів кубічної структури і порівняння отриманих аналітичних і чисельних результатів з відомими крайовими випадками. Проведено зіставлення та упорядкування матеріалів за хвилеводними властивостями. Приведено розрахункові формули для фазових швидкостей і чисельні їхні значення.

SUMMARY. In three-dimensional statement research of waveguide properties of elastic materials h cubic structures and comparison of the received analytical and numerical results with known limiting cases is carried out. Comparison and ordering of materials on waveguide properties is carried out. Formulas for phase speeds and their numerical values are presented.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с. 2. Моїсеєнко В. О. Дослідження кінематичної структури хвильових полів у анізотропних хвилеводних просторових об'єктах // Вісн. Київс. ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2007. – №4. – С.88–93. 3. Моїсеєнко В. А. Волноводные свойства упругих материалов гексагональной структуры // Вісн. Донец. ун-ту. Сер.А: Природничі науки. 2008. – Вип. 1. – С. 45–49. 4. Акустические кристаллы. Справочник / Блистанов А. А, Бондаренко В. С, Чкалова В. В. и др.; под ред. Шаскольской М.П. – М.: Наука, 1982. – 632 с.

Киевский национальный университет

Поступила 11.11.2007

УДК 539.3

В. А. МЕНЬШИКОВ, канд. техн. наук

КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ МЕЖМАТЕРИАЛЬНОЙ ТРЕЩИНЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВОЛНЫ РАСТЯЖЕНИЯ-СЖАТИЯ

Решению задач механики разрушения для тел с межфазными трещинами при статическом нагружении посвящены работы [1–3]. Решены многие динамические задачи для трещиноподобных дефектов круговой и эллиптической формы в однородной среде [4, 5]. В данной статье приводится численное решение задачи для эллиптической трещины в плоскости раздела сред под действием нормально падающей волны растяжения-сжатия. На основе найденных характеристик напряженно-деформированного состояния вычислены коэффициенты интенсивности напряжений для вершин малой и большой полуосей эллиптической трещины с разным эксцентриситетом. Проанализировано их изменение в зависимости от частоты нагрузки.

Постановка задачи. Рассмотрим линейно-упругое тело из двух изотропных полупространств с механическими характеристиками $\lambda^{(m)}, \mu^{(m)}, \rho^{(m)}$ ($m = 1, 2$) с общей границей по плоскости $x_3 = 0$ декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$. В плоскости $x_3 = 0$ имеет место сцепление упругих сред везде за исключением разреза – эллиптической трещины $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 \leq 1$ с берегами $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}$, принадлежащими разным средам, и фронтом в плоскости их раздела (рис. 1). На участке плоскости $\Gamma^{(*)}$ условия сцепления зададим в виде полного механического контакта. Будем

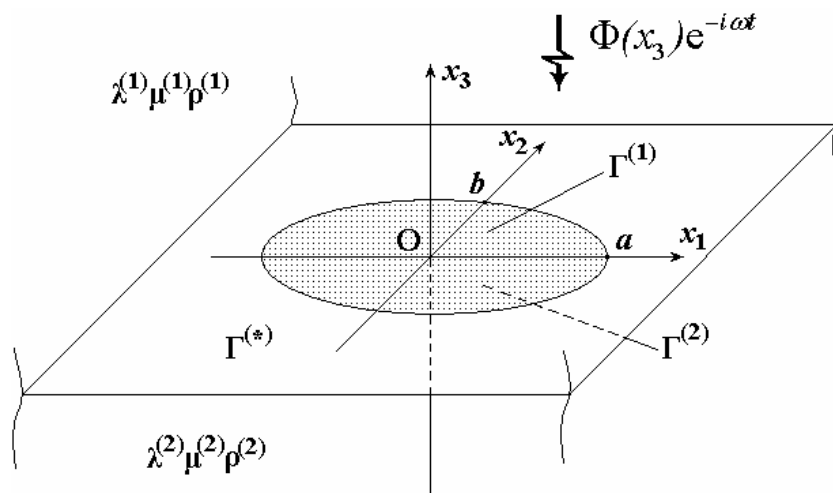


Рис. 1

считать, что трещина открыта (имеет предварительное раскрытие) и фронт ее неподвижен (трещина не растет в процессе нагружения). Составное тело подвержено нагружению гармонической волной растяжения-сжатия с частотой $\omega = 2\pi/T$, распространяющейся перпендикулярно плоскости раздела полупространств.

Для открытых трещин на границе раздела двух различных сред под воздействием нормально ориентированной нагрузки локальное разрушение определяется критериями вида [6]

$$f(K_I, K_{II}) = 0, \quad (1)$$

где f – некоторая функция, определяемая экспериментально; K_I , K_{II} – коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) нормального отрыва (первая мода) и поперечного сдвига (вторая мода), соответственно.

Для КИН первой и второй мод при динамическом нагружении используем выражения [6]

$$K_I = \max_t \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma(r, t),$$

$$K_{II} = \max_t \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau(r, t), \quad t \in [0, T] \quad (2)$$

при следующих ограничениях на параметры расчетной схемы, механические характеристики материалов и действующую нагрузку:

$$1 \gg r/a \gg \exp^{-1/|\beta|}, \quad 2\pi c/\omega > a. \quad (3)$$

Здесь σ и τ – нормальная и тангенциальная компоненты напряжения на поверхности сцепления сред у фронта трещины; r – расстояние от фронта трещины до точки, где вычислено напряжение; t – время; T – период нагружения; a – характерный размер трещины, в данном случае – большая полуось эллипса; c – скорость распространения волны; ν – коэффициент Пуассона; $\beta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu^{(1)} + \mu^{(2)} (3 - 4\nu^{(1)})}{\mu^{(2)} + \mu^{(1)} (3 - 4\nu^{(2)})}$ – биупругая постоянная материалов.

Метод решения. Для вычисления КИН (2), которые используются в критериальном уравнении (1), необходимо найти компоненты напряжений на сцепленных поверхностях у фронта трещины. В работе [7] показано, что параметры напряженно-деформированного состояния биматериального тела с трещиной на границе раздела сред в условиях гармонического нагружения находятся из решения системы граничных интегральных уравнений относительно компонент комплексных амплитуд перемещений и усилий с граничными условиями в виде заданных комплексных амплитуд поверхностных сил на берегах трещины. В системе граничных интегральных уравнений неизвестными являются компоненты комплексных амплитуд пере-

мещений на берегах трещины $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, а также перемещений и усилий на поверхности сцепления $\Gamma^{(*)}$.

После преобразований, связанных с разделением комплекснозначных переменных в системе граничных интегральных уравнений на действительные и мнимые части [8], можно реализовать прямой метод граничных элементов на основе коллокаций с постоянной аппроксимацией параметров задачи на каждом элементе.

Анализ результатов численных исследований. Были проведены расчеты для эллиптической трещины в плоскости соединения материалов сталь–алюминий при изменении приведенного волнового числа k_2a в интервале $[0, 3]$ ($k_2 = \omega/c_2$, c_2 – скорость поперечных волн в стали). Механические параметры материалов следующие: для стали $E = 207$ ГПа, $\nu = 0,288$, $\rho = 7860$ кг/м³; для алюминия $E = 70$ ГПа, $\nu = 0,347$, $\rho = 2700$ кг/м³. Пара сталь–алюминий имеет биупругую постоянную $\beta = 0,0305$.

Изменение формы трещины производилась так, что большая полуось эллипса полагалась неизменной ($a = 1$), малая полуось b менялось в интервале от 1 до 0,5 (при этом эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ возрастал от 0 до 0,866).

Верхняя и нижняя поверхности берегов трещины и плоскость сцепления материалов были аппроксимированы двумерными граничными элементами, которые сгущались при подходе к фронту как со стороны трещины, так и со стороны поверхности сцепления. Минимальный размер элементов, примыкающих непосредственно к вершине трещины с двух сторон, составлял $r/a = 0,002$. В пределах граничного элемента параметры задачи полагались неизменными.

Значение биупругой постоянной ($\beta = 0,0305$), степень приближения расчетной точки к фронту трещины ($r/a = 0,002$) и величина приведенного волнового числа ($k_2a \in [0, 3]$) обеспечивают условия (3) и, следовательно, корректность решения задачи согласно [6].

Для рассматриваемого биматериала сталь–алюминий с эллиптическими трещинами указанного эксцентриситета при изменении частоты нагружения в заданном интервале вычислены компоненты напряжений, возникающие на сцепленных поверхностях, вблизи фронта трещины. По соотношениям (2) вычислены КИН в вершинах малой и большой полуосей эллипсов. Полученные результаты сравнивались с данными работ [4, 5]. При тестировании решения данные работы [5] считались эталонными.

На рис. 2 для эллиптической трещины в стали представлены распределения относительных КИН первой моды в вершинах малой и большой полуоси эллипса, когда $b/a = 0,5$, в зависимости от приведенного волнового числа. При этом пунктирная линия (1) – эталонное решение [5], кружки (2) –

решение автора в вершине малой полуоси; сплошная линия (3) – эталонное решение [5], треугольники (4) – решение автора в вершине большой полуоси. Параметры \tilde{K}_I определены следующим образом $\tilde{K}_I = K_I / K_I^{stat}$, где K_I^{stat} – КИН первой моды при статическом нагружении.

Для эллиптической трещины в однородной среде КИН первой моды при статическом нагружении в вершинах большой и малой полуосей вычислялся согласно [6]

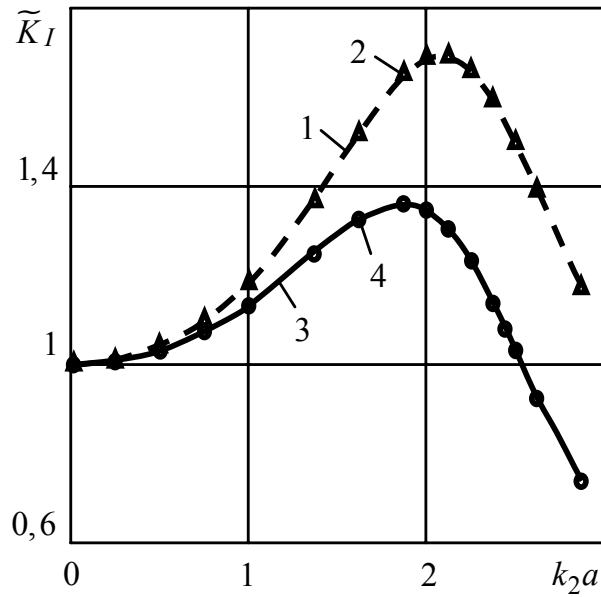


Рис. 2

$$K_I^{stat} = \frac{p_0 \sqrt{\pi b}}{E(\varepsilon)} \left(\sin^2 \theta + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \theta \right)^{1/4},$$

где p_0 – статическое усилие растяжения на бесконечности; $\theta = \pi/2$ – в вершине малой полуоси, $\theta = 0$ – в вершине большой полуоси; $E(\varepsilon)$ – полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра второго рода.

Видно, что для эллиптической трещины в однородном материале полученные предложенным подходом численные результаты хорошо согласуются с данными работы [5].

На рис. 3, 4 изображены графики изменения относительных коэффициентов интенсивности напряжений первой и второй моды в вершинах малой (рис. 3а, 4а) и большой (рис. 3б, 4б) полуосей эллиптической трещины в паре сталь – алюминий при разных эксцентриситетах в зависимости от приведенной частоты гармонического нагружения. Обозначения на рисунках следующие: звездочки (1) – $b/a = 1,0$; кружки (2) – $b/a = 0,75$; треугольники (3) – $b/a = 0,5$. Здесь, как и ранее, нормирование коэффициентов интенсивности напряжений произведено следующим образом: $\tilde{K}_I = K_I / K_I^{stat}$, $\tilde{K}_{II} = K_{II} / K_{II}^{stat}$, (K_{II}^{stat} – КИН второй моды при статическом нагружении).

Для трещины с $b/a = 1,0$ статические КИН первой и второй моды находились по соотношениям из [9]

$$K_I^{stat} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} p_0 (1 - 0,7023\beta^2), \quad K_{II}^{stat} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} p_0 (1 - 2 \ln 2)\beta.$$

Для трещин с $b/a < 1$ статические КИН первой и второй моды определялись как $K_I^{stat} = K_I |_{\omega=0}$, $K_{II}^{stat} = K_{II} |_{\omega=0}$.

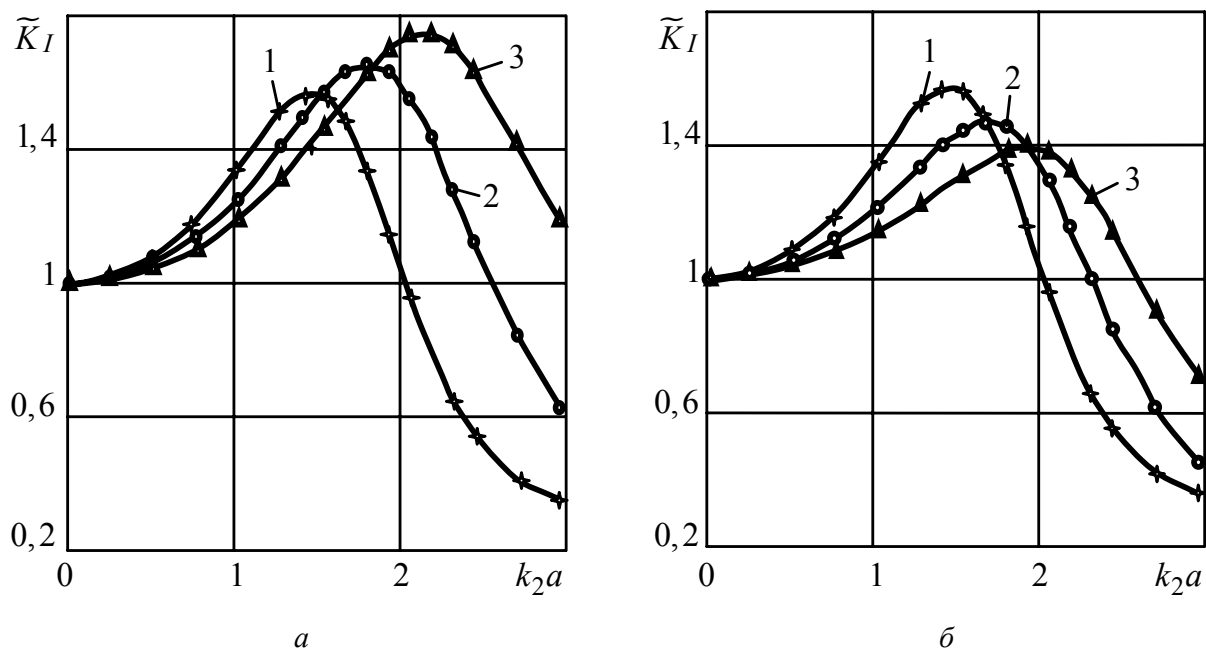


Рис. 3

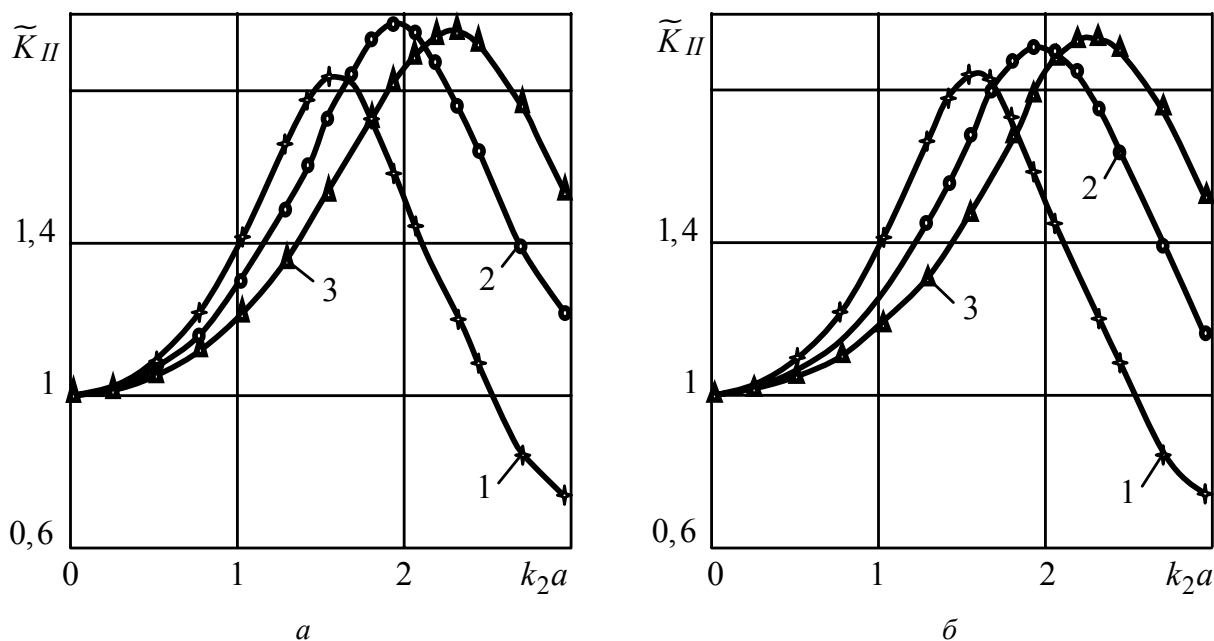


Рис. 4

Анализ результатов, представленных на рис. 2–4 показывает, что характер распределений относительных КИН первой моды в вершинах малой и большой полуоси фронта эллиптической трещины в биматериале иденти-

чен их распределению в однородной среде. Максимальное превышение динамического значение КИН первой моды над статическим для межфазных эллиптических трещин в вершине малой полуоси растёт, а в вершине большой полуоси уменьшается с ростом эксцентриситета от 0 до 0,866. Максимальное превышение динамического значение КИН второй моды над статическим в вершине малой и большой полуоси эллипса растёт с ростом эксцентриситета в указанном интервале. При этом точки максимумов в распределениях относительных КИН первой и второй моды в обеих вершинах эллиптической трещины в биматериале смещается на большие частоты нагружения.

РЕЗЮМЕ. Чисельно вирішена задача теорії пружності для еліптичної тріщини в площині поділу пружних середовищ під дією нормально падаючої хвилі розтягустиску. На основі знайдених параметрів напружено-деформованого стану обчислені коефіцієнти інтенсивності напруг у вершинах малої й великої півосей еліптичної тріщини з різним эксцентриситетом. Проаналізовано їхню зміну залежно від частоти навантаження.

SUMMARY. The problem of elasticity theory for the elliptical crack located at the interface between dissimilar elastic materials under action of the normally incident tension-compression wave is solved numerically. The stress intensity factors are computed near the major and the minor vertices of the ellipse using components of the stress-strain state obtained for different ellipticity constants. The stress intensity factors as functions of the loading frequency are studied.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. *Kaminskii A.A., Kipnis L.A., Dudik M.V.* On the direction of development of a thin fracture process zone at the tip of an interfacial crack between dissimilar media // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – Vol. 42, № 2. – P. 136–144. 2. *Loboda V.V., Sheveleva A.E.* Determining prefracture zones at a crack tip between two elastic orthotropic bodies // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – Vol. 39, № 5. – P. 566–572. 3. *Острик В.І., Улітко А.Ф.* Тріщина на межі розділу півплощин з різних матеріалів // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2000. – Т. 43, № 2. – С. 119–126. 4. *Гузь А.Н., Зозуля В.В., Меншиков А.В.* Контактное взаимодействие берегов эллиптической трещины под воздействием нормальной гармонической нагрузки // *Пробл. механики деформируемых твердых тел и горн. пород.* – М.: Физматлит. – 2006. – С. 203–220. 5. *Zhang Ch., Gross D.* On Wave Propagation in Elastic Solids with Cracks // *Comput. Mech. Publ.* – Southampton, UK, Boston, 1998. – 248 p. 6. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения.– М.: Наука, 1974. – 640 с. 7. *Men'shikov V.A., Men'shikov A.V., Guz I.A.* Interfacial crack between elastic half-spaces under harmonic loading // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – Vol. 43, № 8. – P. 856–873. 8. *Меньшиков В.А.* Уравнения метода граничных элементов в динамической пространственной задаче о трещине на поверхности раздела упругих сред // *Докл. НАН Украины.*– 2007.– № 8. – С. 59–65. 9. *Вайншельбаум В.М., Гольдштейн Р.В.* Осесимметричная задача о трещине на границе раздела слоев в многослойной среде // *Механика твердого тела.*– 1976. – № 2. – С. 130–143.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 24.11.2007

УДК 539.3

В. Ф. МЕЙШ, д-р физ.-мат. наук, *Н. В. МАЙБОРОДИНА***ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО–ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
ДИСКРЕТНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ
ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ НАГРУЗКАХ**

Исследование свободных и вынужденных колебаний упругих элементов занимает важное место в динамике деформируемых систем, в частности в динамике оболочек и оболочечных конструкций. На сегодняшний день в основном рассмотрены осесимметричные и неосесимметричные гармонические колебания подкрепленных оболочек простой геометрии (цилиндрические, конические и сферические подкрепленные оболочки) [1–3]. Результаты исследований по вынужденным колебаниям подкрепленных оболочек при импульсных нагрузках представлены в работах [4–8]. Практически отсутствуют работы по изучению динамического поведения подкрепленных оболочек более сложной формы. В этом направлении можно выделить работы [5, 6, 8], в которых рассмотрены вынужденные колебания оболочек вращения, в частности эллипсоидальных подкрепленных оболочек. Интерес представляет исследование по изучению неосесимметричных колебаний подкрепленных оболочек более сложной геометрии с учетом дискретного расположения ребер. Трудности решения задач для оболочек сложной формы аналитическими методами, приводит к необходимости применения различных численных методов. Свободные колебания таких оболочек численно-аналитическими методами рассмотрены в монографии [9]. Вынужденные колебания гладких и подкрепленных оболочек канонической формы при нестационарных нагрузках с применением численных методов изучены в работе [6].

Целью данной статьи является численное решение задач о вынужденных неосесимметричных колебаниях дискретно подкрепленных продольными ребрами эллипсоидальных оболочек при действии нестационарных распределенных нагрузок.

Постановка задачи. Рассмотрим неоднородную упругую структуру, которая представляет собой дискретно подкрепленную продольными ребрами эллипсоидальную оболочку. Пусть геометрия срединной поверхности гладкой оболочки задается соотношениями [9]

$$x = R \sin \alpha_1 \sin \alpha_2, \quad y = R \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \quad z = kR \cos \alpha_1, \quad (1)$$

где параметры α_1 , α_2 представляют собою гауссовы криволинейные координаты на поверхности оболочки, причем координата α_1 соответствует меридиальному направлению, α_2 – окружному направлению; $k = b/a$ –

параметр эллиптичности; a, b – полуоси эллипса.

При построении математической модели процесса динамического деформирования конструкции будем использовать геометрически нелинейный вариант теории оболочек типа Тимошенко, в основу которого положены следующие предположения. Деформированное состояние обшивки может быть определено через компоненты обобщенного вектора перемещений $\bar{U} = (U_1, U_2, U_3, \varphi_1, \varphi_2)^T$. Изменение перемещений по толщине оболочки в системе координат (s_1, s_2, z) задается аппроксимацией вида

$$\begin{aligned} U_1^z(s_1, s_2, z) &= U_1(s_1, s_2) + z\varphi_1(s_1, s_2), \\ U_2^z(s_1, s_2, z) &= U_2(s_1, s_2) + z\varphi_2(s_1, s_2), \\ U_3^z(s_1, s_2, z) &= U_3(s_1, s_2), \quad z \in [-h/2, h/2] \end{aligned} \quad (2)$$

где $U_1, U_2, U_3, \varphi_1, \varphi_2$ – компоненты обобщенного вектора перемещений срединной поверхности оболочки; $s_1 = \alpha_1 A_1, s_2 = \alpha_2 A_2$, где A_1, A_2 – коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности эллипсоидальной оболочки. Деформационные соотношения и соотношения между напряжениями и деформациями для гладкой оболочки принимаются согласно [6].

При построении математической модели деформирования i -го подкрепляющего ребра направляемого вдоль оси α_1 будем исходить из гипотезы недеформируемости поперечного сечения подкрепляющего элемента в рамках геометрически нелинейной теории стержней Тимошенко. Деформированное состояние i -го подкрепляющего ребра определяется через компоненты обобщенного вектора перемещений $\bar{U}_i = (U_{1i}, U_{2i}, U_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i})^T$. При этом используется следующая аппроксимация перемещений по сечению i -го подкрепляющего ребра

$$\begin{aligned} U_{1i}^{yz}(s_1, y, z) &= U_{1i}(s_1) + z\varphi_{1i}(s_1), \\ U_{2i}^{yz}(s_1, y, z) &= U_{2i}(s_1) + z\varphi_{2i}(s_1), \\ U_{3i}^{yz}(s_1, y, z) &= U_{3i}(s_1). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $U_{1i}, U_{2i}, U_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i}$ – компоненты обобщенного вектора перемещений центра тяжести поперечного сечения i -го ребра. Деформационные соотношения и соотношения между напряжениями и деформациями для i -го ребра принимаются согласно [6].

Условия контакта между компонентами вектора перемещений центра

тяжести поперечного сечения i – го ребра направленного вдоль оси α_1 и компонентами обобщенного вектора перемещения исходной срединной поверхности записывается в виде [1, 5, 6]

$$\begin{aligned} U_{1i}(s_1) &= U_1(s_1, s_{2i}) \pm h_{ci} \Phi_1(s_1, s_{2i}), \\ U_{2i}(s_1) &= U_2(s_1, s_{2i}) \pm h_{ci} \Phi_2(s_1, s_{2i}), \\ U_{3i}(s_1) &= U_3(s_1, s_{2i}), \quad \Phi_{1i}(s_1) = \Phi_1(s_1, s_{2i}), \\ \Phi_{2i}(s_1) &= \Phi_2(s_1, s_{2i}), \end{aligned} \quad (4)$$

где $h_{ci} = 0,5(h + h_i)$ – расстояние от срединной поверхности к линии центра тяжести поперечного сечения i -го ребра; h_i – высота i -го подкрепляющего ребра, направленного вдоль оси α_1 ; s_{1i} – координата линии проектирования центра тяжести поперечного сечения i -го ребра на координатную срединную поверхность обшивки.

Уравнения колебаний. Для вывода уравнений колебаний дискретно подкрепленной структуры используются вариационный принцип Гамильтона-Остроградского. После стандартного выполнения операций варьирования и интегрирования с учетом условий контакта обшивка – i -ое ребро (4) получаем две группы уравнений:

уравнения колебаний оболочки в гладкой области

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1} T_{22} \right] + k_1 \bar{T}_{13} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 T_{21}) &= \rho h \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{12}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1} T_{21} \right] + k_2 \bar{T}_{23} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 T_{22}) &= \rho h \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 \bar{T}_{13}) - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} + P_3 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 \bar{T}_{23}) &= \rho h \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 M_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1} M_{22} \right] - T_{13} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 M_{21}) &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 M_{12}) + \frac{\partial A_2}{\partial s_1} M_{21} \right] + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 M_{22}) - T_{23} &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

уравнения колебания i -го подкрепляющего ребра, направленного вдоль оси α_1

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1} + k_{1i} \bar{T}_{13i} + [S]_i = \rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \right), \\
& \frac{\partial \bar{T}_{12i}}{\partial s_1} + [T_{22}]_i = \rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} \right), \\
& \frac{\partial \bar{T}_{13i}}{\partial s_1} - k_{1i} T_{11i} + [\bar{T}_{23}]_i = \rho_i F_i \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2}, \\
& \frac{\partial M_{11i}}{\partial s_1} - T_{13i} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1} k_{1i} \bar{T}_{13i} + [H]_i = \\
& \quad = \rho_i F_i \left(\pm h_{ci} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \right), \\
& \frac{\partial M_{12i}}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial \bar{T}_{12i}}{\partial s_1} + [M_{22}]_i = \rho_i F_i \left(\pm h_{ci} \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{cri}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} \right), \quad (6)
\end{aligned}$$

Обозначения величин и соответствующие выражения усилий – моментов для гладкой оболочки и подкрепляющих ребер введены согласно [6].

Уравнения колебаний (5), (6) дополняются соответствующими естественными граничными и начальными условиями. Они представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных по переменным s_1, s_2, t при наличии пространственных разрывов по координате s_2 . Исходя из этого фактора, численный алгоритм решения исходной задачи строится следующим образом: ищется решение в гладкой области эллипсоидальной оболочки (уравнения (5)) и на линиях пространственных разрывов – (уравнения (6)) [5, 6]. Разностный алгоритм основан на применении интегро–интерполяционного метода построения разностных схем по пространственным координатам и явной конечно–разностной аппроксимации по временной координате [10].

Анализ результатов численных исследований. В качестве числового примера рассматривалась задача о вынужденных колебаниях продольно подкрепленной части эллипсоидальной оболочки с жестко защемленными краями в области $D = \{ \alpha_{10} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{1N}, \alpha_{20} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{2N} \}$ при действии распределенной нормальной нагрузки $P_3(\alpha_1, \alpha_2, t)$. Краевые условия при этом имеют вид $\bar{U}(\alpha_{10}, \alpha_2) = \bar{U}(\alpha_{1N}, \alpha_2) = 0$, $\bar{U}(\alpha_1, \alpha_{20}) = \bar{U}(\alpha_1, \alpha_{2N}) = 0$. Начальные условия для всех компонент обобщенного вектора перемещений нулевые при $t = 0$.

Распределенная нормальная нагрузка $P_3(\alpha_1, \alpha_2, t)$ имеет вид

$$P_3(\alpha_1, \alpha_2, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

где A – амплитуда нагрузки, T – длительность нагрузки. В расчетах полагось $A = 10^6 \text{ Па}$; $T = 50 \cdot 10^{-6} \text{ с}$.

Задача рассматривалась при следующих геометрических и физико-механических параметрах исходной конструкции (случай изотропной оболочки):

$$\alpha_{10} = \frac{\pi}{12}; \quad \alpha_{1N} = \pi - \frac{\pi}{12}; \quad \alpha_{20} = -\frac{\pi}{2}; \quad \alpha_{2N} = \frac{\pi}{2}; \quad \frac{a}{h} = 30;$$

$$E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad \nu = 0,33; \quad \rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Продольно подкрепляющие элементы располагались вдоль координаты α_1 в сечениях $\alpha_{2i} = \frac{7}{24}\pi + \frac{5}{24}\pi i$ ($i = 0, 1, 2$).

На рис. 1–2 приведены результаты расчетов. Они проводились на временном интервале $t = 10T$. На рисунках даны наиболее характерные кривые для величин u_3 , ε_{11} (рассматривались времена достижения указанными величинами максимальных значений по модулю), которые позволяют проводить анализ напряженно-деформированного состояния исследуемой структуры. На всех рисунках кривая с индексом 1–3 соответствуют моментам времени $t_1 = T$, $t_2 = 7T$, $t_3 = 9T$.

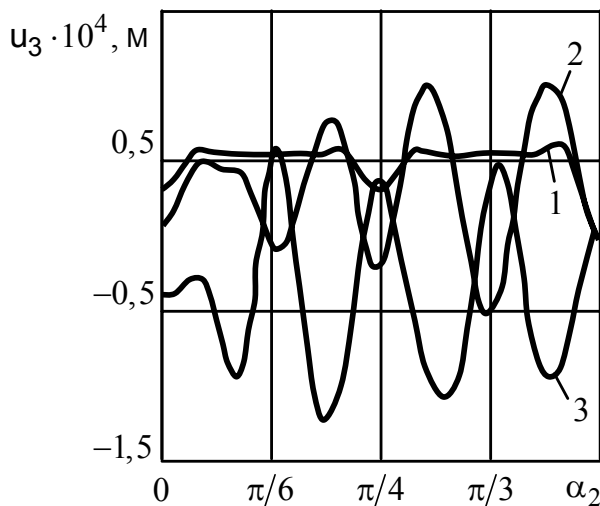


Рис. 1

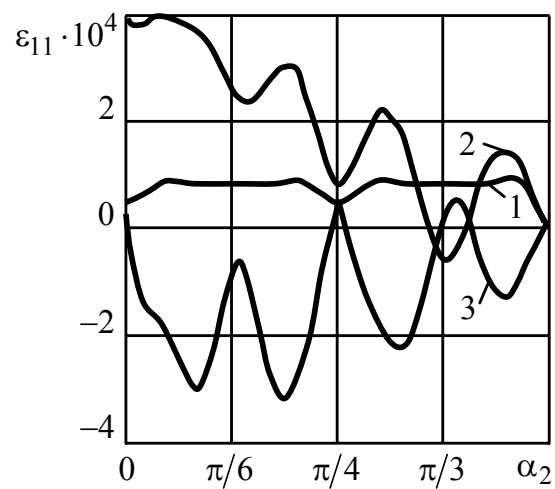


Рис. 2

Рис. 1 соответствуют зависимостям величины u_3 от пространственной координаты α_2 в сечении $\alpha_1 = \pi/2$ (в силу симметрии приводятся зависимости по координате α_2 в диапазоне $0 \leq \alpha_2 \leq \pi/2$). На рис. 2 изображена зависимость величины ε_{11} от пространственной координаты α_2 в сечении

$\alpha_1 = \pi/2$ (в силу симметрии приводятся зависимости по координате α_2 в диапазоне $0 \leq \alpha_2 \leq \pi/2$).

РЕЗЮМЕ. Представлено постановку задачі про вимушені неосесиметричні коливання повздовжньо підкріплених еліпсоїдальних оболонок при нестационарних навантаженнях. Побудовано чисельний алгоритм вихідної задачі та представлено аналіз результатів розрахунків.

SUMMARY. The statement of problems of forced non-axisymmetric vibrations of longitudinal supported ellipsoidal shells under nonstationary loads is presented. A numerical algorithm of solving is constructed and an analysis of obtained results is given.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. *Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Паламарчук В.Г.* Динамика ребристых оболочек. – К.: Наук. думка, 1983. – 204 с. 2. *Амиро И.Я., Заруцкий В.А.* Учет дискретного размещения ребер при изучении напряженно-деформированного состояния, колебаний и устойчивости ребристых оболочек (обзор) // Прикладная механика. – 1998. – Т. 34, № 4. – С. 3–22. 3. *Колебания* ребристых оболочек вращения. / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий, В.Н. Ревуцкий и др. – К.: Наук. думка, 1988. – 171 с. 4. *Луговой П.З.* Динамика тонкостенных конструкций при нестационарных нагрузках (обзор) // Прикладная механика. – 2001.– Т. 37, № 5. – С. 44–73. 5. *Луговой П.З., Мейш В.Ф.* Численное моделирование динамического поведения подкрепленных оболочек вращения при нестационарном воздействии // Прикладная механика. – 1992. – Т. 28, № 11. – С.38–44. 6. *Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А.* Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – К.: Изд-во полиграф.центр “Киевский университет”, 2005. – 563 с. 7. *Мейш В.Ф.* О численном решении двумерных динамических задач геометрически нелинейной теории дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек типа Тимошенко // Прикладная механика. – 1997. – Т. 33, № 2. – С. 61–67. 8. *Мейш В.Ф.* К численному решению задач динамики подкрепленных эллипсоидальных оболочек при нестационарных нагрузках // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 4. – С. 53–60. 9. *Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И.* Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – К.: Наук. думка, 1986. – 172 с. 10. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев
Национальный аграрный университет, г. Киев*

Поступила 25.11.2007

УДК 534.21:537.226.86

В. В. ЛЕВЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук,
Л. П. ЗИНЧУК, канд. физ.-мат. наук

АКУСТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ СДВИГА В СЛОИСТО– ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ «ПЬЕЗОЭЛЕКТРИК – ЩЕЛЬ»

Широкое применение в различных отраслях науки и техники нашли многослойные слоисто–периодические структуры из электроупругих материалов, что обуславливает потребность в моделировании и изучении закономерностей распространения акустоэлектрических волн в слоистых средах с пьезоэффектом. В рамках концепций механики сплошной среды для построения и анализа дисперсионных уравнений, описывающих распространение объемных, поверхностных и волноводных мод различной поляризации в слоисто–периодических средах разных типов, был предложен целый ряд подходов [1–3]. В данной работе на основе подхода [1] изучаются объемные акустоэлектрические сдвиговые волны, распространяющиеся в регулярно–слоистой структуре «пьезоэлектрик–вакуумный зазор». Дисперсия таких волн определяется связью пьезоэлектрических слоев электрическими полями через зазор [4].

Постановка и построение решения задачи. Рассмотрим регулярно–слоистое пространство, отнесенное к декартовой системе координат $Oxyz$, которое образовано периодическим повторением вдоль оси Ox слоя пьезоэлектрика толщины h_p , физико–механические свойства которого описываются материальными соотношениями кристаллографического класса $6mm$ и вакуумного зазора (щели) толщины h_v . Направим ось Oz декартовой системы координат вдоль оси симметрии шестого порядка.

Распространение вдоль оси Oy сдвиговой волны в пьезоэлектрических слоях описывается соответственно линеаризованной системой уравнений электроупругости вида [3]

$$\rho_p \partial_t^2 u_p = c_{44,p}^* \Delta u_p, \quad \Delta \Psi_p = 0, \quad (1)$$

а в щели уравнением [5]

$$\Delta \varphi_0 = 0, \quad (2)$$

где $c_{44,p}^* = c_{44,p} + e_{15,p}^2 / \varepsilon_{11,p}$, $\Psi_p = \varphi_p - \left(\frac{e_{15,p}}{\varepsilon_{11,p}} \right) u_p$; $c_{44,p}$, ρ_p , $\varepsilon_{11,p}$,

$e_{15,p}$ – физико–механические параметры пьезоэлектрического слоя; φ_p и

φ_0 – электростатические потенциалы соответственно в пьезоэлектрике и вакууме.

Решение системы уравнений (1)–(2) в каждом из слоев будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_p &= B_{2n-1}^{(1)} \sin \Omega_p (x - x_{n,p}^*) + B_{2n-1}^{(2)} \cos \Omega_p (x - x_{n,p}^*), \\ \psi_p &= D_{2n-1}^{(1)} \operatorname{sh} k (x - x_{n,p}^*) + D_{2n-1}^{(2)} \operatorname{ch} k (x - x_{n,p}^*), \quad x_{n-1,v}^* < x < x_{n,p}^*; \\ \varphi_0 &= D_{2n}^{(1)} \operatorname{sh} k (x - x_{n,v}^*) + D_{2n}^{(2)} \operatorname{ch} k (x - x_{n,v}^*), \quad x_{n,p}^* < x < x_{n,v}^* \end{aligned} \quad (3)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $x_{n,p}^* = nh + h_p$; $x_{n,v}^* = nh + h$; $h = h_v + h_p$;

$\Omega_p = (k_p^2 - k^2)^{1/2}$; $k_p^2 = \omega^2 / \tilde{c}_p^2$; $\tilde{c}_p^2 = c_{44,p}^* / \rho_p$; k – волновое число; ω – круговая частота. В формулах (3) множитель $\exp(iky - i\omega t)$ опущен.

На границах раздела свойств рассматриваемой среды $x = x_{n,p}^*$ и $x = x_{n,v}^*$ должны выполняться условия [5]

$$c_{44,p}^* \partial_x u_p + e_{15,p} \partial_x \psi_p = 0, \quad \partial_x \psi_p = \partial_x \varphi_0, \quad \psi_p - \frac{e_{15,p}}{\varepsilon_{11,p}} u_p = \varphi_0. \quad (4)$$

Эти условия выражают отсутствие сдвиговых напряжений, непрерывность электрических потенциалов и нормальных компонент электрической индукции.

Подставляя решение (3) в граничные условия (4), исходную задачу сведем к бесконечной системе уравнений относительно неизвестных \vec{B}_j и \vec{D}_i

$$\begin{aligned} N(\varepsilon_{11,p}; k_p^*) \vec{D}_{2n-1} + N_u(e_{15,p}; \theta_p) \vec{B}_{2n-1} &= N(\varepsilon_0; 0) \vec{D}_{2n}, \\ N(\varepsilon_0; k_v^*) \vec{D}_{2n} &= N_u(e_{15,p}; 0) \vec{B}_{2n+1} + N(\varepsilon_{11,p}; 0) \vec{D}_{2n+1}, \\ \vec{M}(a_p; \theta_p) \vec{B}_{2n-1} + \vec{M}_u(e_{15,p}; k_p^*) \vec{D}_{2n-1} &= 0, \\ \vec{M}(a_p; 0) \vec{B}_{2n+1} + \vec{M}_u(e_{15,p}; 0) \vec{D}_{2n+1} &= 0, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$N(\varepsilon_{11,p}, k_p^*) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11,p} k \operatorname{ch} k_p^* & -\varepsilon_{11,p} k \operatorname{sh} k_p^* \\ -\operatorname{sh} k_p^* & \operatorname{ch} k_p^* \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
N(\varepsilon_0, k_v^*) &= \begin{bmatrix} \varepsilon_0 k \operatorname{ch} k_v^* & -\varepsilon_0 k \operatorname{sh} k_v^* \\ -\operatorname{sh} k_v^* & \operatorname{ch} k_v^* \end{bmatrix}, \\
N(e_{15,p}, \theta_p) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -e_{15,p} k \sin \theta_p & e_{15,p} k \cos \theta_p \end{bmatrix}, \\
\vec{M}(a_p; \theta_p) &= [a_p \cos \theta_p; a_p \sin \theta_p], \\
\vec{M}_u(e_{15,p}; k_p^*) &= [e_{15,p} k \operatorname{ch} k_p^*; -e_{15,p} k \operatorname{sh} k_p^*], \\
\vec{B}_i &= \operatorname{col}(B_i^{(1)}, B_i^{(2)}), \quad \vec{D}_i = \operatorname{col}(D_i^{(1)}, D_i^{(2)}); \\
k_p^* &= kh_p, \quad \theta_p = \Omega_p h_p, \quad a_p = c_{44,p}^* \Omega_p, \quad k_v^* = kh_v.
\end{aligned}$$

Выполнив ряд преобразований, систему уравнений (5) приведем к системе относительно неизвестных \vec{D}_i

$$\begin{aligned}
\bar{N}(\varepsilon_{11,p}; k_p^*; \theta_p) \vec{D}_{2n-1} &= N(\varepsilon_0; 0) \vec{D}_{2n}, \\
N(\varepsilon_0; k_v^*) \vec{D}_{2n} &= \bar{N}(\varepsilon_{11,p}; 0; 0) \vec{D}_{2n+1}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (6)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{N}^{11} &= \varepsilon_{11,p} k \operatorname{ch} k_p^*, \quad \bar{N}^{12} = -\varepsilon_{11,p} k \operatorname{sh} k_p^*, \\
\bar{N}^{21} &= -\operatorname{sh} k_p^* - \frac{e_{15,p}}{\varepsilon_{11,p}} R^{11} \sin \theta_p + \frac{e_{15,p}}{\varepsilon_{11,p}} R^{21} \cos \theta_p, \\
\bar{N}^{22} &= \operatorname{ch} k_p^* + \frac{e_{15,p}}{\varepsilon_{11,p}} R^{22} \cos \theta_p; \quad R^{11} = -\frac{ke_{15,p}}{a_p}, \\
R^{21} &= \frac{-ke_{15,p} \operatorname{ch} k_p^* - a_p R^{11} \cos \theta_p}{a_p \sin \theta_p}, \quad R^{22} = \frac{ke_{15,p} \operatorname{sh} k_p^*}{a_p \sin \theta_p}.
\end{aligned}$$

Используя предложенный в [1] подход, общее решение системы уравнений (6) представим в виде

$$\vec{D}_{2n-1} = \sum_{j=1}^2 \chi_j^n \bar{N}^{-1}(\varepsilon_{11,p}; 0; 0) N(\varepsilon_0; k_v^*) N^{-1}(\varepsilon_0; 0) \vec{Y}_j,$$

$$\bar{D}_{2n} = \sum_{j=1}^2 \chi_j^n N^{-1}(\varepsilon_0; 0) \bar{Y}_j, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (7)$$

в котором χ_j^n и \bar{Y}_j ($j = 1, 2$) – характеристические числа и соответствующие им собственные векторы передаточной матрицы

$$N = \bar{N}(\varepsilon_{11,p}; k_p^*; \theta_p) \bar{N}^{-1}(\varepsilon_{11,p}; 0; 0) N(\varepsilon_0; k_v^*) N^{-1}(\varepsilon_0; 0) \quad (8)$$

На основе системы уравнений (5) получим решение для \bar{B}_{2n-1} в виде

$$\bar{B}_{2n-1} = \sum_{j=1}^2 (\bar{R}_1 + \bar{R}_2) \chi_j^n \bar{N}^{-1}(\varepsilon_{11,p}; 0; 0) N(\varepsilon_0; k_v^*) N^{-1}(\varepsilon_0; 0) \bar{Y}_j,$$

где введены вектор-столбцы $\bar{R}_1 = \text{col}(R^{11}; R^{22})$, $\bar{R}_2 = \text{col}(R^{21}; 0)$.

Непосредственные вычисления показали, что $\det N = 1$. Тогда согласно [1], условие существования объемных электроупругих волн сдвига имеет вид

$$|b_{pv}| \leq 1, \quad b_{pv} = \text{spur } N/2, \quad (8)$$

а уравнения

$$b_{pv} = \pm 1 \quad (9)$$

задают границы этих зон.

В предельном случае, когда толщина щели $h_v = 0$, дисперсионное уравнение (9) для границ зон пропускания примет вид

$$a_p \sin \theta_p (\text{ch } k_p^* \mp 1) + \frac{k(e_{15,p})^2}{\varepsilon_{11,p}} (\cos \theta_p \mp 1) = 0. \quad (10)$$

Знак "-" в (10) соответствует границам, где $b_{pv} = 1$. Нетрудно увидеть, что $\cos \theta_p = \pm 1$ будет определять корни последнего уравнения.

Анализ результатов численных исследований. Ниже представлены результаты численного анализа полученных дисперсионных уравнений для границ зон пропускания в случае, когда слой пьезоэлектрика имеет параметры CdS. На рис.1 по оси абсцисс отложено безразмерное волновое число $\bar{k} = kh_p$, по оси ординат – безразмерная частота $\bar{\omega} = \omega h_p / c_p$

($c_p^2 = c_{44,p} / \rho_p$). В силу того, что границы зон лежат достаточно близко друг к другу, на рис. 1 представлен лишь фрагмент второй зоны пропускания, который отражает основную закономерность изменения положения

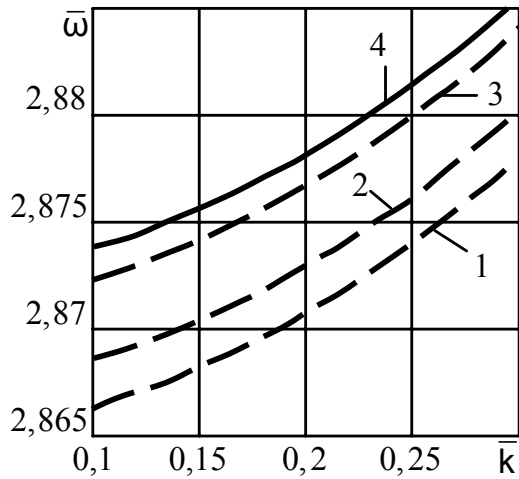


Рис. 1

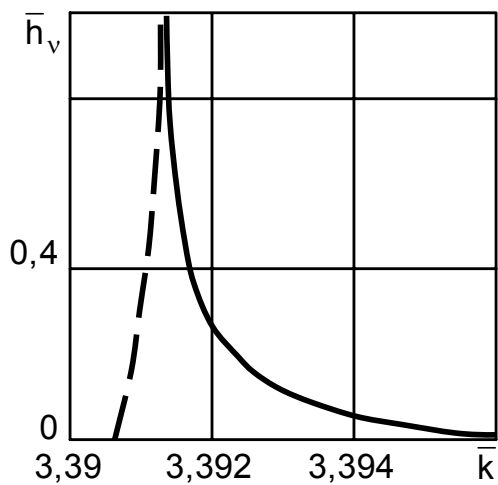


Рис. 2

границ зон при различных толщинах вакуумного зазора. При численном анализе толщина слоя CdS оставалась постоянной $\bar{h}_p = h_p/h_p = 1$, а толщина щели $\bar{h}_v = h_v/h_p$ была такой: $\bar{h}_v = 0$ (кривая 1), $\bar{h}_v = 0,05$ (кривая 2), $\bar{h}_v = 0,5$ (кривая 3). Указанные кривые отвечают тем границам зон, где $b_{pv} = 1$. В пределах масштаба рисунка границы зон, которые определяются уравнением $b_{pv} = -1$ и соответствуют различным значениям \bar{h}_v , практически совпадают и поэтому обозначены одной кривой 4. Как видно из рисунка, граница $b_{pv} = 1$ с увеличением \bar{h}_v приближается к границе $b_{pv} = -1$.

На рис. 2 в координатах (\bar{k}, \bar{h}_v) для второй зоны пропускания при $\bar{\omega} = 3,1$ нанесена сплошная кривая, соответствующая $b_{pv} = -1$, и штриховая кривая, соответствующая $b_{pv} = 1$. Приведенные результаты позволяют проследить изменение ширины зоны пропускания с ростом толщины вакуумного зазора.

Таким образом, в результате численных экспериментов установлено существование зон пропускания для объемных электроакустических волн в регулярно-слоистых средах типа «пьезоэлектрик – щель». Эти зоны очень узкие по сравнению с зонами запираения и локализованы в окрестности кривых $\cos \theta_p = \pm 1$. С увеличением толщины вакуумного зазора \bar{h}_v ширина зоны пропускания становится все уже и в пределе вырождается в линию. Установлено, что с ростом \bar{k} и $\bar{\omega}$ ширина зон незначительно увеличивается.

РЕЗЮМЕ. Вивчена можливість існування та отримано дисперсійні рівняння для об'ємних акустoeлектричних хвиль зсуву в регулярно-шаруватій структурі „п'єзоелектрик – щілина”. Чисельні дослідження представлено для середовища, яке утворене чергуванням шару CdS та щілини при різних відносних товщинах шарів.

SUMMARY. Capacity of existence for bulk acoustoelectric shear waves in the regularly-stratified structure of “piezoelectric - vacuum gap” is studied and appropriate dispersion equations are received. Numerical results are represented for the medium formed by alternation of the CdS layer and vacuum gap at different relative thicknesses of layers.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ. 1. *Шульга Н.А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с. 2. *Podlipenets A. N., Shulga N. A., Zinchuk L. P.* Hamiltonian system formalism in the theory of acoustic wave propagation in multilayered piezoelectrics // *Zeitschrift Ang. Math. und Mech.* – 1996. – Vol. 76, S. 5. – P. 395–396. 3. *Зинчук Л. П., Левченко В. В., Шульга Н. А.* Распространение объемных электроупругих волн сдвига в регулярно–слоистой среде типа металл – пьезоэлектрик // *Мат. методы и физ.– мех. поля.* – 1989. – Вып. 30. – С. 4–8. 4. *Gulyaev Yu. V. and Plesky V. P.* Shear surface acoustic waves in dielectrics in the presence of an electric field // *Physics Letters A.* – 1976. – Vol. 56, № 6. – P. 491–492. 5. *Балакирев М. К., Гилинский И. А.* Волны в пьезокристаллах. – Новосибирск: Наука, 1982. – 240 с.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 25.11.2007

УДК 539.3

А. К. ПРИВАРНИКОВ, д-р физ.-мат. наук, И. А. СТОЛЯРЧУК

ДЕЙСТВИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ШТАМПОВ НА МНОГОСЛОЙНОЕ ОСНОВАНИЕ

В связи с потребностями инженерной практики уже многие десятилетия решаются различные контактные задачи по определению напряжений и перемещений в многослойных основаниях, под которыми понимаются пакеты из конечного числа упругих однородных изотропных слоев, лежащих на упругом полупространстве. К настоящему времени достаточно полные исследования проведены в случае неперiodических контактных задач [1–2], решены некоторые периодические задачи [3–5]. Но до сих пор открытыми остаются многие вопросы определения условий, при которых возможно отставание поверхности основания от штампов; разработки методов определения границ участков контакта штампов с основанием, получения достоверных численных результатов при решении конкретных задач. В данной статье предлагается подход к решению указанных вопросов.

Постановка задачи. Пусть на верхнюю границу многослойного основания действует периодическая система штампов, содержащая m штампов в одном периоде длины $2l$. Будем считать, что деформация основания остается плоской, вне областей контакта поверхность основания не нагружена, при вдавливании в основание штампы перемещаются поступательно нормально к его недеформированной поверхности независимо один от другого, известны силы, действующие на штампы в их конечном положении, силы трения между поверхностью основания и штампами отсутствуют, профили штампов являются выпуклыми, гладкими, пологими и такими, что их угловые точки могут быть только на концах.

Отнесем тело к прямоугольной декартовой системе координат. Ось x направим вдоль верхней границы основания, ось z направим вглубь основания. Во всех точках верхней границы $\tau_{xz}(x, 0) = 0$. Выберем из периодической системы какую-либо систему штампов, расположенных на участке границы длиной $2l$. Пусть $z = -f_k(x)$ – уравнение профиля подошвы k -го штампа в начальном положении. В конечном положении этот штамп касается границы основания вдоль отрезка $[a_k, b_k]$. Будем считать, что функции $f_k(x)$ непрерывны, а их производные удовлетворяют условиям Гельдера с показателем $\mu > 0$ на каждом отрезке $[a_k, b_k]$. Для определенности считаем, что $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_m < b_m$. Определим нормальные напряжения σ_z на границе основания и размеры участков контак-

та, если они априори неизвестны.

Интегральное уравнение и решение задачи. Введем функцию $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in L_1, \\ \dots & \dots \\ f_m(x), & x \in L_m, \end{cases}$$

где $L_k = [a_k, b_k]$ ($k = \overline{1, m}$). Сингулярное интегральное уравнение первого рода для неизвестного контактного давления $q(x)$ в области контакта

$L = \bigcup_{k=1}^m L_k$ имеет вид [1]

$$\begin{aligned} \theta f'(x) = & \frac{\pi}{2l} \sum_{k=1}^m \int_{a_k}^{b_k} q(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{2l} dt - \\ & - \sum_{k=1}^m \int_{a_k}^{b_k} q(t) F(t-x) dt, \quad x \in L, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \theta = & \pi E_1 / 2(1 - \nu_1^2), \\ F(t) = & \frac{\pi}{l} \sum_{k=1}^{\infty} a_1 \left(\frac{k\pi}{l} \right) e^{-2 \frac{k\pi}{l} h_1} \sin \frac{k\pi t}{l}; \end{aligned} \quad (2)$$

E_1, ν_1, h_1 – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и толщина верхнего слоя основания; $a_1(p)$ – модифицированная функция податливости основания [1].

В общем случае неизвестен не только закон распределения давлений на участках контакта, но и границы $a_1 < b_1 < \dots < a_m < b_m$ этих участков. Для определения искомых величин интегральное уравнение необходимо дополнить условиями равновесия штампов

$$\int_{a_k}^{b_k} q(x) dx = Q_k \quad (k = \overline{1, m}), \quad (3)$$

где Q_k – сила, вдавливающая штамп в основание.

Рассмотрим случай, когда известны все m участков контакта штампов. В окрестности концов этих участков напряжения неограниченны, т. е. функ-

ция $q(x)$ на отрезке $L_k = [a_k, b_k]$ ($k = \overline{1, m}$), имеет такую структуру [6]

$$q(x) = \tilde{q}(x) / \sqrt{(x - a_k) \cdot (b_k - x)}, \quad (4)$$

где $\tilde{q}(x)$ – функция, непрерывная на $[a_k, b_k]$. Такая структура $q(x)$ позволяет использовать для приближенного вычисления интегралов в (3) квадратурную формулу наивысшей алгебраической степени точности [7]

$$\int_{a_k}^{b_k} \left[f(t) / \sqrt{(t - a_k) \cdot (b_k - t)} \right] dt \approx \frac{\pi}{M_k} \sum_{i=1}^{M_k} f(t_i^k), \quad (5)$$

где

$$t_i^k = \frac{b_k - a_k}{2} \cos \frac{2i-1}{2M_k} \pi + \frac{b_k + a_k}{2}, \quad t_i^k \in (a_k, b_k), \quad (i = \overline{1, M_k}) \quad (6)$$

Таким образом, условия (3) согласно формулам (4) и (5) принимают вид

$$Q_k \approx \frac{\pi}{M_k} \sum_{i=1}^{M_k} \tilde{q}(t_i^k) \quad (k = \overline{1, m}), \quad (7)$$

в котором узлы t_i^k определяются из (6). Для приближенного решения (1) применим метод замены интегралов в уравнении квадратурными суммами. Будем использовать квадратурную формулу типа Гаусса для вычисления сингулярного интеграла по промежутку $[a_k, b_k]$ в $M_k - 1$ точках x_r^k [7]

$$\int_{a_k}^{b_k} \frac{\tilde{q}(t)}{\sqrt{(t - a_k) \cdot (b_k - t)}} \operatorname{ctg} \frac{\pi(t - x_r^k)}{2l} dt \approx \frac{\pi}{M_k} \sum_{i=1}^{M_k} \tilde{q}(t_i^k) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t_i^k - x_r^k)}{2l}, \quad (8)$$

Здесь $r = \overline{1, M_k - 1}$, узлы t_i^k определяются из (6), т.е. совпадают с узлами квадратурной формулы (5), узлы x_r^k определяются по формулам

$$x_r^k = \frac{b_k - a_k}{2} \cos \frac{\pi r}{M_k} + \frac{b_k + a_k}{2}, \quad x_r^k \in (a_k, b_k) \quad (r = \overline{1, M_k - 1}). \quad (9)$$

После замены искомой функции $q(x)$ на $\tilde{q}(x)$ по формуле (4) интегральное уравнение относительно функции $\tilde{q}(x)$ будет иметь вид

$$\frac{\pi}{2l} \sum_{k=1}^m \int_{a_k}^{b_k} \frac{\tilde{q}(t)}{\sqrt{(t - a_k)(b_k - t)}} \operatorname{ctg} \frac{\pi(t - x)}{2l} dt =$$

$$= \theta f'(x) + \sum_{k=1}^m \int_{a_k}^{b_k} \frac{\tilde{q}(t) F(t-x)}{\sqrt{(t-a_k)(b_k-t)}} dt. \quad (10)$$

Задавая m натуральных чисел M_1, \dots, M_m и применяя формулы (8) для сингулярных интегралов и (5) для несингулярных, с учетом (7) решение рассматриваемой периодической контактной задачи сведем к решению системы $M_1 + \dots + M_m$ линейных алгебраических уравнений относительно $M_1 + \dots + M_m$ неизвестных значений функции $\tilde{q}(t)$ в узлах (6)

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{2l} \sum_{k=1}^m \frac{\pi}{M_k} \sum_{i=1}^{M_k} \tilde{q}(t_i^k) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t_i^k - x_r^k)}{2l} - \\ & - \sum_{k=1}^m \frac{\pi}{M_k} \sum_{i=1}^{M_k} \tilde{q}(t_i^k) F(t_i^k - x_r^k) = \theta f'(x_r^k), \\ & \frac{\pi}{M_k} \sum_{i=1}^{M_k} \tilde{q}(t_i^k) = Q_k, \quad x_r^k \in \bigcup_{k=1}^m [a_k, b_k] \quad (k = \overline{1, m}). \end{aligned} \quad (11)$$

Решив эту систему, получим по формуле (4) приближенные значения $q(t)$ в дискретной системе точек каждого участка контакта. Точность замены сингулярного уравнения контактной задачи (10) и дополнительных условий (3) системой линейных алгебраических уравнений (11) зависит от выбора натуральных чисел M_1, \dots, M_m .

Рассмотрим теперь случай, когда не все границы участков контакта штампов с основанием известны. По физическому смыслу давление на каждом участке контакта должно быть положительным и на неизвестной границе участка оно равно нулю. Пусть $L_k = [a_k, b_k]$ – участок контакта, границы которого необходимо определить. Из условий задачи всегда можно указать отрезок $L'_k = [a'_k, b'_k]$, содержащий в себе L_k . Из физических соображений контактное давление в окрестности концов отрезка L'_k будет отрицательным и неограниченным. Пусть $L''_k = [a''_k, b''_k]$ максимальная по размеру часть L'_k , на которой $q(t)$ неотрицательно. Решим систему (11) в предположении, что неизвестные участки контакта заменены их приближениями $L''_k = [a''_k, b''_k]$ с известными границами. Определим максимальную по размеру часть L''_k , на которой $q(t)$ неотрицательно. Получим следующее приближение L''_k к искомому участку L_k . Продолжив процесс, определим с

необходимой точностью искомые границы L_k . Положим $q(a_k) = 0$, $q(b_k) = 0$. Используя также найденные при решении системы (11) значения давления в узлах $t_i^k \in (a_k, b_k)$ ($i = \overline{1, M_k}$), построим интерполяционный полином или сплайн и получим приближенный закон распределения контактного давления на L_k .

Таким образом, приближенное решение контактных задач с неизвестными границами участков контакта сводится к решению нескольких контактных задач со всеми известными участками контакта, т. е. к решению системы линейных алгебраических уравнений (11) несколько раз. Аналогичный способ определения неизвестных границ области контакта штампа с упругой полуплоскостью описан в монографии [8].

Анализ численных результатов. Рассмотрим задачу о действии периодической системы одинаковых штампов с плоскими подошвами на двухслойное основание (слой толщины h с модулями упругости E_1, ν_1 , сцепленный с упругой полуплоскостью, модули упругости которой E_2, ν_2) Формулы для определения функции $a_1(p)$ такого основания приведены в [1]. Пусть подошва одного плоского штампа имеет длину $2a$. Для численного решения задачи в системе уравнений (11) положим $m = 1$, $a_1 = -a$, $a_2 = a$, $Q_k = Q$, $f(x) = 0$, $h_1 = a$, $\Delta_1 = 0,1$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$. Как показали расчеты, для чисел узлов $M_1 = 25$, $M_1 = 27$, $M_1 = 31$ графики контактного

x/a	$aq_1(x)/Q$	$aq_2(x)/Q$
0	-0,00925	0,01497
0,1000	-0,00334	0,02063
0,2000	0,01496	0,03812
0,3000	0,04736	0,06906
0,4000	0,09709	0,11640
0,5000	0,16950	0,18540
0,6000	0,27480	0,28550
0,7000	0,42720	0,43000
0,8000	0,67470	0,66430
0,9000	1,18480	1,14960
0,9987	12,90720	12,37370

давления практически совпадают. В таблице приведены значения контактного давления на правой половине $[0, a]$ участка контакта.

Контактное давление $q_1(x)$ соответствует относительно большому периоду размещения штампов на поверхности двухслойного основания ($l = 9a$), $q_2(x)$ соответствует случаю $l = 5a$. Из анализа численных результатов следует, что при действии плоского штампа на основание, для которого модуль Юнга материала верхнего слоя значительно больше модуля Юнга нижнего, возможно отставание поверхности основания от подошвы штампа (отрицательное давление

на участке контакта). При уменьшении периода расположения штампов яв-

ление отставания исчезает. Отметим, что в задаче о действии на двухслойное основание периодической системы одинаковых штампов с плоскими подошвами ($l = 9a$) истинная область контакта одного штампа с основанием представляет собой два отрезка $[-a, -0,1766a]$ и $[0,1766a, a]$.

РЕЗЮМЕ. Пропонується метод розв'язання плоских контактних задач про дію періодичної системи гладких штампів на багат шарову основу. Невідомими вважаються закони розподілу контактних тисків на ділянках контакту і межі цих ділянок. Наведено вірогідні чисельні результати розв'язання конкретної задачі про вдавлювання штампу з плоскою підшвою у двошарову основу. З'ясовано, що має місце ефект відокремлення поверхні основи від штампу.

SUMMARY. The technique of the solution of the planar contact problems, connected with the interaction of the periodical system of smooth dies with the multilayer foundation is proposed. The laws of the distribution of the contact stresses at the domains of the contact and the boundaries of these domains are unknown. The problem, connected with the pressing of the die with the planar bottom in the two-layered foundation is considered. The reliable numerical results are obtained. We have discovered an effect of the detachment of the surface of the foundation from the die.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. Приварников А.К., Ламзюк В.Д. Упругие многослойные основания. – Днепропетровск, 1985. – 162 с. (Деп. в ВИНТИ 23.12.85, 8789–В7). 2. Матушко Ю.О. Определение напряженно-деформированного состояния многослойного основания, на которое действует штамп // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып. 38 – С. 15–19. 3. Приварников А.К., Столярчук І.А. Дія на багат шарову основу гладкого штампу, що має у плані форму смуги // Вісн. Волин. держ. ун-ту. Фізхім., мат. науки. – 1998. – Вип.. 6. – С.77–85. 4. Приварников А.К., Столярчук І.А. Про відокремлення поверхні пружної багат шарової основи від штампу з плоскою подошвою // Наука та практика – 2007: Зб. матер. Міжнар. наук.-практ. конф. – Полтава, 2007. – С. 192–195. 5. Ильман В.М., Приварников А.К. Плоская периодическая контактная задача для многослойного упругого основания // Вопросы прочности и пластичности. – Днепропетровск, 1971. – С. 36–57. 6. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацишин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с. . 7. Приварников А.К. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности для особых интегралов // Задачи механики многослойных сред и их численная реализация. – Запорожье, 2002. – С. 8–14. 8. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.

Запорожский национальный университет

Поступила 22.11.2007

УДК 539.3

О. В. БОЧАРОВА, А. О. ВАТУЛЬЯН, д-р физ.-мат. наук**О МЕТОДАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕОДНОРОДНЫХ
СВОЙСТВ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ**

В работе рассматриваются задачи о восстановлении модуля упругости и плотности упругого неоднородного стержня при возбуждении продольных и изгибных колебаний. Для решения поставленных задач предложен итерационный алгоритм, основанный на аппарате интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода. Рассмотрены конкретные примеры восстановления искомых характеристик.

Коэффициентные обратные задачи об определении коэффициентов дифференциальных операторов в последние годы все чаще привлекают внимание исследователей в связи с проблемой идентификации и уточнением моделей в различных областях естествознания. Модель однородной изотропной теории упругости, основные положения которой сформулированы достаточно давно и играющая огромную роль в современной практике расчетов прочности конструкций, в некоторых случаях требует уточнения и отказа от гипотезы однородности среды (в геофизике, нано – и биомеханике, механике функционально-градиентных материалов). Определение модулей упругости и плотности как функций координат из экспериментальных данных о вибрационных характеристиках исследуемых объектов требует решения обратных задач. Главная трудность при исследовании таких проблем состоит в сложной процедуре построения операторных соотношений, связывающих искомые и заданные функции при анализе волновых процессов в таких структурах. Это обусловлено переменностью коэффициентов дифференциальных операторов и невозможностью построения в явном виде общих представлений решений для соответствующих операторов, как это имеет место для операторов с постоянными коэффициентами. Особую сложность представляют случаи, когда модули резко меняются (на один или два порядка, особенно при локализации неоднородности в малой области). В ситуации, когда коэффициенты дифференциальных операторов переменны, методы решения прямых задач о построении амплитудно-частотных характеристик опираются либо на аппарат интегральных уравнений Фредгольма второго рода (для стержней и пластин), либо на конечно-элементные пакеты. Построение операторных соотношений в обратных задачах можно осуществить, формулируя итерационные процессы при отыскании неизвестных функций, основанные либо на обобщении теоремы взаимности, либо на использовании условия ортогональности и сведении исходной задачи к поэтапному решению интегральных уравнений Фредгольма первого рода с суммируемыми ядрами [1].

Рассмотрим установившиеся колебания с частотой ω ограниченной

области V с границей $S = S_u \cup S_\sigma$, а n_j – компоненты единичного вектора внешней нормали к S .

Уравнения колебаний имеют вид

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3); \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l}, \quad (m = 1, 2, 3); \quad (2)$$

$$u_i|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{S_\sigma} = p_i. \quad (3)$$

Здесь c_{ijkl} – компоненты тензора модулей упругости, являющиеся кусочно-непрерывными функциями координат и удовлетворяющие обычным условиям симметрии и положительной определенности. Сформулируем задачу определения коэффициентов дифференциального оператора теории упругости по информации

$$u_i|_{S_\sigma} = f_i(x, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (4)$$

Такая постановка соответствует измерению поля перемещений на части границы S_σ , на которой осуществляется нагружение, в некотором диапазоне частот.

Сформулированная обратная коэффициентная задача является нелинейной некорректной задачей, для решения которой можно использовать подход, опирающийся на обобщенные соотношения взаимности и позволяющий формулировать линейаризованные операторные уравнения в обратной задаче.

Сформулируем кратко обобщенное соотношение взаимности. Пусть имеется два решения задачи (1)–(3), отвечающие, различным модулям упругости и различным плотностям: $u_i^{(1)}, c_{ijkl}^{(1)}, \rho^{(1)}$ и $u_i^{(2)}, c_{ijkl}^{(2)}, \rho^{(2)}$. Тогда можно получить следующее соотношение [2]:

$$\begin{aligned} \int_V (c_{ijkl}^{(2)} - c_{ijkl}^{(1)}) u_{k,l}^{(2)} u_{i,j}^{(1)} dV + \int_{S_\sigma} p_i (u_i^{(2)} - u_i^{(1)}) dS + \\ + \omega^2 \int_V (\rho^{(1)} - \rho^{(2)}) u_i^{(2)} u_i^{(1)} dV = 0, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \end{aligned} \quad (5)$$

На основе соотношения (5) легко построить итерационные процессы и сформулировать последовательность линейных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода с суммируемым ядром.

Положим в соотношении (5) $u_i^{(1)} = u_i^{(n-1)}$, $u_i^{(2)} = u_i^{(n-1)} + u_i^{(n)}$, $c_{ijkl}^{(1)} = c_{ijkl}^{(n-1)}$, $c_{ijkl}^{(2)} = c_{ijkl}^{(n-1)} + c_{ijkl}^{(n)}$, $\rho^{(1)} = \rho^{(n-1)}$, $\rho^{(2)} = \rho^{(n-1)} + \rho^{(n)}$ и, сохраняя в нем линейные по величинам n -го приближения слагаемые, с учетом дополнительного условия (4) получим следующее уравнение относительно $c_{ijkl}^{(n)}$, $\rho^{(n)}$ [2]

$$\int_V c_{ijkl}^{(n)} u_{k,l}^{(n-1)} u_{i,j}^{(n-1)} dV - \omega^2 \int_V \rho^{(n)} u_i^{(n-1)} u_i^{(n-1)} dV + \int_{S_\sigma} p_i \left(f_i - u_i^{(n-1)} \right) dS = 0, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (n = \overline{1, N}). \quad (6)$$

Соотношение (6) можно трактовать как интегральное уравнение относительно компонент $c_{ijkl}^{(n)}(x)$ и $\rho^{(n)}(x)$, если предварительно решена прямая задача о нахождении полей смещений и деформаций внутри области V и на ее границе S с упругими характеристиками $c_{ijkl}^{(n-1)}(x)$ и $\rho^{(n-1)}(x)$. Подынтегральные выражения в объемных интегралах в (6) представляют собой по форме аналог удвоенной удельной потенциальной энергии деформаций и удельной кинетической энергии, в которой перемещения и деформации соответствуют $n-1$ итерации (предыдущей), а модули $-n$ итерации (последующей). Мерой выхода из итерационной процедуры является функционал

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{S_\sigma} \left(f_i - u_i^{(n-1)} \right)^2 dS d\omega, \text{ и если его значение становится меньше погрешно-$$

сти входной информации, то процесс необходимо остановить.

Рассмотрим далее частный случай: задачу о восстановлении модуля упругости и плотности в стержне при анализе его продольных и изгибных колебаний. При этом нет необходимости анализировать заново краевые задачи, достаточно лишь знать удельные потенциальную и кинетические энергии при растяжении и изгибе.

Краевая задача, описывающая продольные колебания консольно закрепленного стержня постоянного поперечного сечения под действием силы на конце, после отделения временного множителя имеет вид [3]:

$$\frac{d}{dx} \left(E(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + \rho(x) \omega^2 u(x) = 0, \\ u(0) = 0, \quad E(l) \frac{du}{dx}(l) = -P_1. \quad (7)$$

Для изгибных колебаний соответствующая краевая задача будет иметь вид [3]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(E(x) J \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \omega^2 F \rho(x) w(x) &= 0, \\ w(0) = 0, \quad \frac{dw}{dx}(0) &= 0, \\ \left(JE(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right)(l) = 0, \quad \frac{d}{dx} \left(JE(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right)(l) &= -P. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $E(x)$, $\rho(x)$ – неизвестные функции, характеризующие законы изменения модуля упругости и плотности, которые могут быть как гладкими положительными функциями, так и иметь конечное число разрывов первого рода; F и J – соответственно площадь и момент инерции поперечного сечения стержня.

Будем считать, что известна дополнительная информация об амплитудно-частотной характеристике торца стержня следующего вида:

$$u(l, \omega) = f_1(\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (9)$$

$$w(l, \omega) = f_2(\omega), \quad \omega \in [\omega_3, \omega_4], \quad (10)$$

по которой требуется определить две неизвестные функции $E(x)$, $\rho(x)$. Далее будем считать, что соответствующие отрезки изменения частоты колебаний не содержат резонансных частот.

При продольных колебаниях из компонент вектора перемещений отлична от нуля только одна $u = u_1(x_1)$

Следовательно, отнесенные к единице длины потенциальная энергия деформации и кинетическая энергия имеют вид соответственно:

$$U = \frac{1}{2} FC_{1111} u_{1,1}^2 = \frac{1}{2} FE u_{1,1}^2 = \frac{1}{2} FE (u')^2,$$

$$K = \frac{1}{2} \rho F u_1^2 = \frac{1}{2} \rho F u^2.$$

Тогда операторное уравнение (6) принимает вид:

$$\begin{aligned} \int_0^l \left(\frac{du^{(n-1)}(x, \omega)}{dx} \right)^2 E^{(n)}(x) dx - \omega^2 \int_0^l \left(u^{(n-1)}(x, \omega) \right)^2 \rho^{(n)}(x) dx = \\ = P_1 \left(f_1(\omega) - u^{(n-1)}(l, \omega) \right), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \end{aligned} \quad (11)$$

Для изгибных колебаний $u_3 = w(x_1)$, $u_1 = -w_1 x_3$, тогда $\varepsilon_{11} = -x_3 w_{,11}$, $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{33} = 0$ и соответственно $U = EJ(w'')^2/2$, $K = \rho F w^2/2$. В этом случае операторное уравнение (6) примет вид:

$$\int_0^l \left(\frac{d^2 w^{(n-1)}(x, \omega)}{dx^2} \right)^2 E^{(n)}(x) dx - k^4 \int_0^l \left(w^{(n-1)}(x, \omega) \right)^2 \rho^{(n)}(x) dx = -P_2 \left(f_2(\omega) - w^{(n-1)}(l, \omega) \right), \quad \omega \in [\omega_3, \omega_4] \quad (12)$$

где $P_2 = P/J$, $k^4 = \omega^2 F/J$.

На основе системы интегральных уравнений первого рода (11), (12) могут быть построены итерационные процессы уточнения неизвестных функций.

Отметим, что первый этап итерационного процесса требует знания начального приближения. В настоящей работе начальные приближения строились в классе линейных положительных ограниченных функций, так как это показано в [4].

На каждом шаге построенного процесса посредством решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода находятся новые значения $u^{(n)}$, $w^{(n)}$, с помощью которых вычисляются правые части интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода и их ядра. После решения этих уравнений вычисляются поправки к неизвестным функциям, и с их учетом производится следующий этап итерационного процесса.

Отметим, что в рамках исследования только одной из задач (о продольных или изгибных колебаниях) невозможно восстановить одновременно обе функции $E(x)$ и $\rho(x)$, так как в этом случае восстановление искомым характеристик неединственно.

Предположим, что известна априорная информация о законе изменения плотности (т.е. плотность известна), в этом случае второй интегральный оператор в уравнениях (11) и (12) можно опустить. Тогда функцию, характеризующую распределение модуля Юнга можно восстановить, используя какую-либо из задач (о продольных или изгибных колебаниях) и соответственно одно из интегральных уравнений (11) или (12).

В задаче об изгибных колебаниях в отличие от задачи о продольных колебаниях ядро интегрального уравнения Фредгольма первого рода пропорционально $\left(w''(x, \omega) \right)^2$. Из краевого условия задачи известно, что

$w''(l, \omega) = 0$, следовательно, задача может иметь неединственное решение. Поэтому для решения поставленной задачи необходимо задавать значение функции, характеризующей модуль упругости в точке $x = l$.

Для дальнейшего исследования введем безразмерные функции, характеризующие законы изменения модуля и плотности следующими соотношениями $\rho(x) = \rho_0 g_1(x)$, $E(x) = E_0 g_2(x)$.

На рис. 1 приведен график относительной погрешности δ для восстановления модуля упругости при изгибных (сплошной линией) и продольных (пунктиром) колебаниях для следующих законов $g_1(x) = 1 + x$, $g_2(x) = 1 + (x - 0,3)^2$. При изгибных колебаниях рассматривался отрезок измерения амплитудно-частотной характеристики, соответствующий безразмерному параметру $\lambda = l^4 \sqrt{\rho_0 F \omega^2} / (J E_0)$, причем в расчетах принято $\lambda_1 = 0,2$, $\lambda_2 = 1,2$; измерения производились для двух частот внутри выбранного диапазона, значение модуля упругости на свободном конце считалось заданным. При продольных колебаниях рассматривался отрезок $[k_1, k_2]$, где $k_1 = 2$, $k_2 = 3,5$, измерения производились в семи частотах внутри выбранного диапазона.

В том случае, когда известна априорная информация о законе изменения модуля Юнга, то плотность можно восстановить аналогично, используя одну из двух задач (о продольных или изгибных колебаниях).

Особенностью этих задач является то, что ядро интегрального уравнения Фредгольма пропорционально $(u(x, \omega))^2$, так как $u(0, \omega) = 0$, то необходимо знать значение функции плотности в месте заземления стержня, т.е. в точке $x = 0$. Отметим, что в том случае, когда информация о значении функции плотности на заземленном конце стержня не задана, погрешность восстановления функции на этом конце составляет около 20%.

На рис. 2 приведен график относительной погрешности при восстановлении плотности при изгибных (сплошной линией) и продольных (пунктиром) колебаниях для законов $g_1(x) = 3 - 0,7x^3$, $g_2(x) = 3 + 0,5x$.

Безразмерные отрезки измерения амплитудно-частотной характеристики

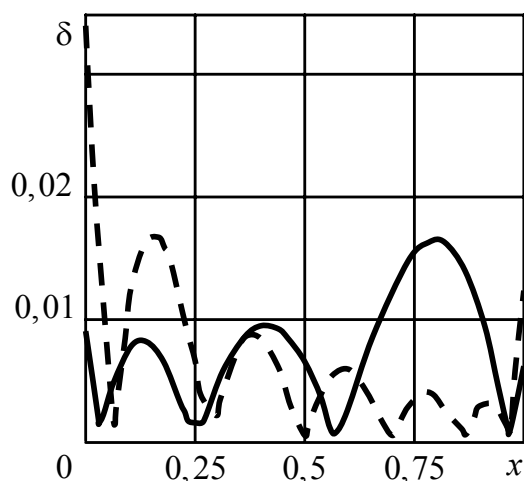


Рис. 1

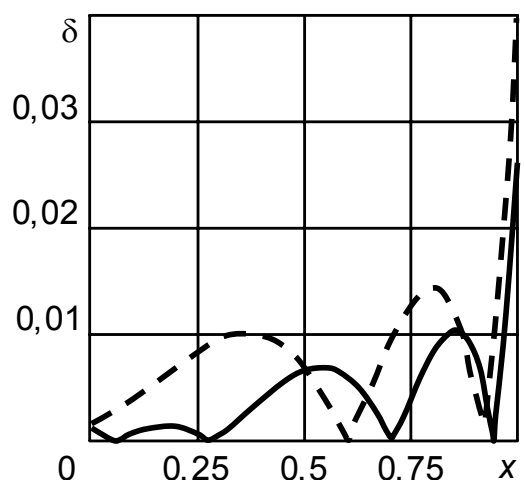


Рис. 2

$\kappa_1 = 0,2$, $\kappa_2 = 1,9$ и $\lambda_1 = 0,2$, $\lambda_2 = 1,7$ были расположены до 1-ых резонансных частот. Измерения производились для трех частот внутри выбранного диапазона, значение функции плотности на защемленном конце считалось известным.

На рис. 3 представлены результаты восстановления кусочно-постоянной функции плотности при изгибных колебаниях. Здесь сплошной линией показан график исходной функции, квадратики – для восстановленной в соответствии с описанным выше итерационным процессом, прерывистой линией показано начальное приближение.

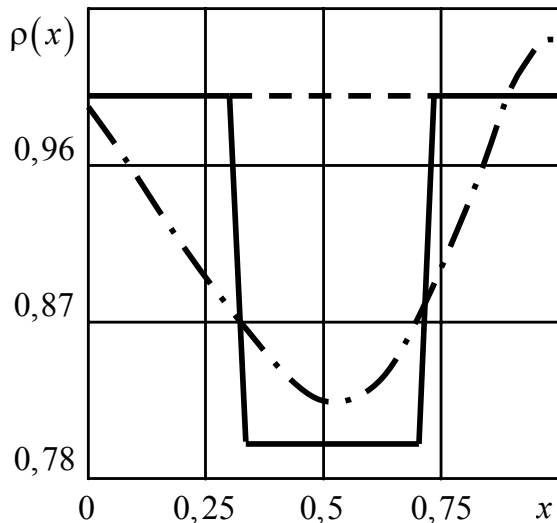


Рис. 3

Отметим, что в подобных вычислительных экспериментах обычно точность реконструкции хуже, чем для гладких зависимостей и восстанавливается некоторая усредненная функция, близкая к искомой в среднем-неквадратичном.

Проводились вычислительные эксперименты по одновременному восстановлению двух функций при совместном анализе продольных и

изгибных колебаний.

На рис. 4 представлены результаты восстановления безразмерных функций, характеризующих плотность и модуль Юнга для следующих законов $g_1(x) = 1 + (x - 0,5)^2$, $g_2(x) = 1 + (x - 0,3)^2$. В этом эксперименте считалось известным значение функции плотности на защемленном конце. При продольных и изгибных колебаниях рассматривались частотные отрезки $\kappa \in [0,1; 0,8]$, $\lambda \in [0,1; 0,8]$, находящиеся ниже 1-ых резонансных частот (как для продольных, так и для изгибных колебаний), измерения производились для трех частот внутри выбранного диапазона. Для восстановления оказалось достаточно 5-ти итераций.

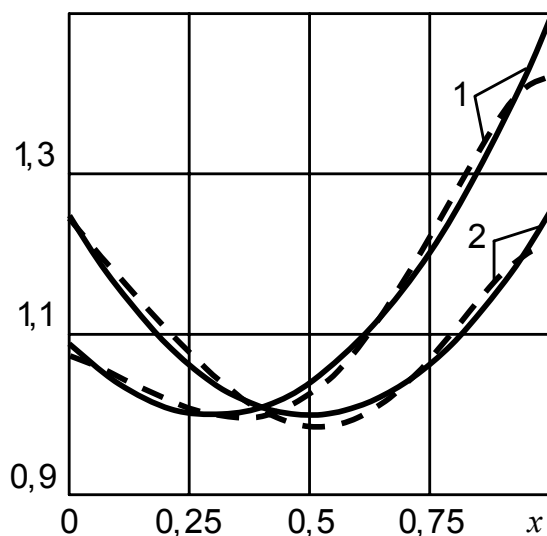


Рис. 4

Предложенная схема восстановления модуля Юнга и плотности упругого стержня по амплитудно-частотным характеристикам, основанная на формулировке итерационных процессов в решении обратных

коэффициентных задач для операторов второго и четвертого порядков, показала свою работоспособность в достаточно большой серии вычислительных экспериментов при восстановлении гладких законов неоднородности, однако разрывный закон восстанавливается значительно хуже.

РЕЗЮМЕ. Вирішена задача про відновлення модуля пружності та щільності в пружного неоднорідного стержні при аналізі поздовжніх і ізгібних коливань. Використаний ітераційний алгоритм, що базується на рішенні інтегральних рівнянь Фредгольма. Розглянуто приватні задачі.

SUMMARY. The problems concerning the reconstruction of Young modulus and density of elastic inhomogeneous rod while exciting longitudinal and bending oscillations are considered in the paper. The repetitive algorithm based on the apparatus of Fredholm integral equations is proposed to solve the problems formulated. Specific examples of required properties reconstruction are regarded.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. *Ватульян А.О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: Физматлит, 2007. – 223 с. 2. *Ватульян А.О.* Проблемы идентификации неоднородных свойств твердых тел. // Вест. Самар. гос. ун-та. Естест. науки. – 2007. – № 4 (54). – С. 93–103. 3. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с. 4. *Бочарова О.В.* Идентификация модуля упругости в стержне // Современ. пробл. механики сплошной среды: Тр. X Междунар. конф., Ростов-на-Дону, 5–9 декабря 2006 г. – Ростов-на-Дону: ЦВВР, 2007. – Т. 2. – С. 94–98.

*Южный федеральный университет,
г. Ростов-на-Дону (Россия)*

Поступила 12.11.2007

УДК 539.3

В. Б. ГОВОРУХА, канд. физ.-мат. наук

ОБ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ЭФФЕКТАХ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИМИ МАТЕРИАЛАМИ

Исследование поведения трещин между двумя пьезокерамическими материалами имеет большое значение для практики, поскольку указанные трещины в ряде случаев инициируют разрушение композитных конструкций в целом. Первые основополагающие результаты в этой области были получены в работах [1, 2], где предполагалось, что трещина полностью открыта. Однако такое предположение привело к появлению осциллирующей особенности в решении и физически нереальному взаимопроникновению материалов. В связи с этим, в последнее время получили распространения другие модели трещин, в частности, нелинейные. Так в работе [3], по аналогии с известной моделью Леонова-Панасюка-Дагдейла [4], была предложена расчетная модель однородного пьезокерамического тела с трещиной, предполагающая наличие в полосе на продолжении трещины зон электрического предразрушения. При этом считалось, что максимальное значение нормальной составляющей вектора электрической индукции в таком теле не превосходит величины D_s – предела электрической насыщенности пьезокерамики. Это позволило получить физически непротиворечивые результаты применительно к трещине в однородном материале. В случае трещины между двумя пьезоэлектрическими материалами, эффекты, вызванные наличием зон предразрушения вблизи ее вершин, изучены недостаточно. В данной работе дается точное аналитическое решение задачи для кусочно-однородной пьезоэлектрической плоскости с трещиной при наличии зон электромеханического предразрушения в окрестности ее вершин, а также формулируются основные параметры разрушения для этой модели.

Постановка и построение решения задачи. Рассмотрим плоскую задачу электроупругости для биматериальной плоскости с трещиной в области $-a \leq x_1 \leq a$, $x_3 = 0$ на линии раздела материалов с вектором предварительной поляризации, коллинеарным оси Ox_3 (рис. 1). На бесконечности заданы постоянное растягивающее напряжение σ_{33}^∞ и нормальная составляющая электрической индукции D_3^∞ . Будем считать, что на бесконечности действуют также компоненты напряжения $(\sigma_{11}^\infty)_m$ и электрической индукции $(D_1^\infty)_m$, которые обеспечивают выполнение условий непрерывности на

границе сред. Индексы $m = 1, 2$ относятся к верхней и нижней полуплоскости соответственно.

Будем предполагать, что на берегах трещины отсутствуют электрические заряды и механическая нагрузка, а на ее продолжении $a < |x_1| \leq c$ возникают зоны электромеханического предразрушения, в которых допускается скачок перемещений и электрического потенциала, а для нормальной компоненты электрической индукции выполняется условие $D_3 = D_s$. Напряжения в зонах электромеханического предразрушения полагаются равными $\sigma_{33} = \sigma_0$, $\sigma_{13} = \tau_0$, где σ_0 , τ_0 – неизвестные постоянные. Положение точки c выбрано пока произвольно. Тогда условия на линии раздела материалов имеют вид

$$[\mathbf{V}(x_1, 0)] = 0, [\mathbf{t}(x_1, 0)] = 0, x_1 \notin (-c, c); \quad (1)$$

$$\sigma_{33}(x_1, 0) \equiv q_1(x_1) = \begin{cases} \sigma_0, & -c \leq x_1 \leq -a, \\ 0, & -a < x_1 < a, \\ \sigma_0, & a \leq x_1 \leq c; \end{cases}$$

$$\sigma_{13}(x_1, 0) \equiv q_2(x_1) = \begin{cases} -\tau_0, & -c \leq x_1 \leq -a, \\ 0, & -a < x_1 < a, \\ \tau_0, & a \leq x_1 \leq c; \end{cases}$$

$$D_3(x_1, 0) \equiv q_3(x_1) = \begin{cases} D_s, & -c \leq x_1 \leq -a, \\ 0, & -a < x_1 < a, \\ D_s, & a \leq x_1 \leq c. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $V = \{u_1, u_3, \varphi\}^T$, $t = \{\sigma_{13}, \sigma_{33}, D_3\}^T$. Квадратные скобки означают скачок функции при переходе через линию раздела материалов.

В работе [5] для двух сцепленных пьезоэлектрических полуплоскостей с дефектами по линии раздела материалов при условии, что электроупругое состояние не зависит от x_2 , были получены следующие выражения

$$\sigma_{33}(x_1, 0) + m_{14}D_3(x_1, 0) + im_{11}\sigma_{13}(x_1, 0) = F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1); \quad (3)$$

$$\sigma_{33}(x_1, 0) + m_{44}D_3(x_1, 0) = F_4^+(x_1) + F_4^-(x_1); \quad (4)$$

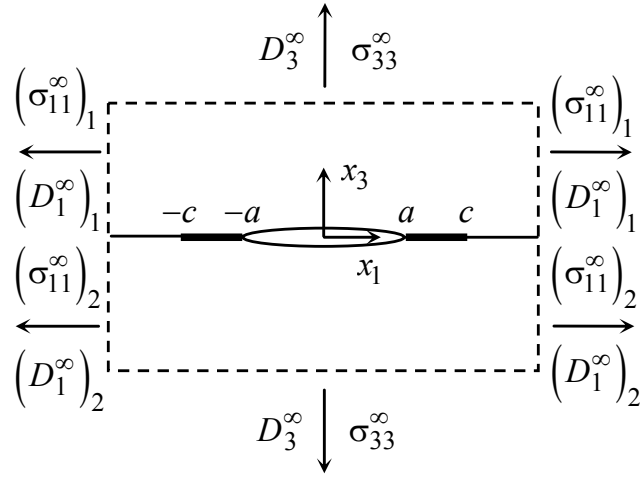


Рис. 1

$$n_{11}[u'_1(x_1, 0)] + in_{13}[u'_3(x_1, 0)] + in_{14}[\varphi'(x_1, 0)] = F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1); \quad (5)$$

$$in_{43}[u'_3(x_1, 0)] + in_{44}[\varphi'(x_1, 0)] = F_4^+(x_1) - F_4^-(x_1), \quad (6)$$

где функции $F_j(z)$ – аналитические всюду, за исключение отрезка $[-c, c]$; γ_1, m_{ij}, n_{ij} – действительные константы, зависящие от характеристик пьезоэлектрического материала [5].

Учитывая, что представления (3)–(6) и свойства функций $F_j(z)$ обеспечивают выполнение условий (1), и удовлетворяя условиям (2), приходим к следующим краевым задачам

$$F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1) = p_1(x_1), \quad F_4^+(x_1) + F_4^-(x_1) = p_4(x_1); \quad (7)$$

$$F_1(z)|_{z \rightarrow \infty} = \frac{1}{1 + \gamma_1}(\sigma_{33}^\infty + m_{14}D_3^\infty), \quad F_4(z)|_{z \rightarrow \infty} = \frac{1}{2}(\sigma_{33}^\infty + m_{44}D_3^\infty), \quad (8)$$

где $p_1(x_1) = q_1(x_1) + m_{14}q_3(x_1) + im_{11}q_2(x_1)$, $p_4(x_1) = q_1(x_1) + m_{44}q_3(x_1)$.

Решения задач (7), (8) в соответствии с [6] имеют вид

$$F_1(z) = \frac{1}{(1 + \gamma_1)Y_1(z)} \left\{ (\sigma_{33}^\infty + m_{14}D_3^\infty)(z - 2ci\varepsilon_1) + (1 + \gamma_1)(\sigma_0 + m_{14}D_s - im_{11}\tau_0)\Phi_{11}(z) + (1 + \gamma_1)(\sigma_0 + m_{14}D_s + im_{11}\tau_0)\Phi_{12}(z) \right\}; \quad (9)$$

$$F_4(z) = \frac{1}{2Y_4(z)} \left\{ z(\sigma_{33}^\infty + m_{44}D_3^\infty) + 2(\sigma_0 + m_{44}D_s)(\Phi_{41}(z) + \Phi_{42}(z)) \right\}, \quad (10)$$

где

$$\Phi_{11}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-c}^{-a} \frac{Y_1^+(t)dt}{t-z}, \quad \Phi_{12}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^c \frac{Y_1^+(t)dt}{t-z},$$

$$\Phi_{41}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-c}^{-a} \frac{Y_4^+(t)dt}{t-z}, \quad \Phi_{42}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^c \frac{Y_4^+(t)dt}{t-z},$$

$$Y_1(z) = (z+c)^{0.5-i\varepsilon_1}(z-c)^{0.5+i\varepsilon_1}, \quad Y_4(z) = \sqrt{z^2 - c^2}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\ln \gamma_1}{2\pi}.$$

Принимая во внимание, что для $|x_1| > c$ справедливо соотношение $\Phi_{jk}^+(x_1) = \Phi_{jk}^-(x_1) = \Phi_{jk}(x_1)$, из уравнений (3), (4) получаем

$$\sigma_{33}(x_1, 0) + m_{14}D_3(x_1, 0) + im_{11}\sigma_{13}(x_1, 0) = \frac{1}{Y_1(x_1)} \left\{ (\sigma_{33}^\infty + m_{14}D_3^\infty) \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times (x_1 - 2ci\varepsilon_1) + (1 + \gamma_1)(\sigma_0 + m_{14}D_s - im_{11}\tau_0)\Phi_{11}(x_1) + \\ & + (1 + \gamma_1)(\sigma_0 + m_{14}D_s + im_{11}\tau_0)\Phi_{12}(x_1) \}, \\ \sigma_{33}(x_1, 0) + m_{44}D_s(x_1, 0) &= \frac{1}{Y_4(x_1)} \left\{ x_1 (\sigma_{33}^\infty + m_{44}D_3^\infty) + \right. \\ & \left. + 2(\sigma_0 + m_{44}D_s)(\Phi_{41}(x_1) + \Phi_{42}(x_1)) \right\}. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы левые и правые часть последних выражений при $x_1 \rightarrow c + 0$ были ограниченными. Это будет выполнено, если

$$\begin{aligned} & c(\sigma_{33}^\infty + m_{14}D_3^\infty)(1 - 2i\varepsilon_1) + (1 + \gamma_1) \left\{ (\sigma_0 + m_{14}D_s - im_{11}\tau_0)\Phi_{11}^c + \right. \\ & \left. + (\sigma_0 + m_{14}D_s + im_{11}\tau_0)\Phi_{12}^c \right\} = 0, \\ & c(\sigma_{33}^\infty + m_{44}D_3^\infty) + 2(\sigma_0 + m_{44}D_s)(\Phi_{41}^c + \Phi_{42}^c) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\Phi_{jk}^c = \lim_{x_1 \rightarrow c+0} \Phi_{jk}(x_1)$.

Из системы (11) получаем следующее трансцендентное уравнение, определяющее длину зоны предразрушения:

$$\frac{c(\omega_{22} + 2\varepsilon_1\omega_{12})(\sigma_{33}^\infty + m_{14}D_3^\infty)}{(1 + \gamma_1)(\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21})} + \frac{\pi(\sigma_{33}^\infty + m_{44}D_3^\infty)}{2 \arccos(a/c)} - (m_{44} - m_{14})D_s = 0.$$

Здесь $\omega_{11} = \text{Re}(\Phi_{11}^c) + \text{Re}(\Phi_{12}^c)$, $\omega_{12} = \text{Im}(\Phi_{11}^c) - \text{Im}(\Phi_{12}^c)$, $\omega_{21} = \text{Im}(\Phi_{11}^c) + \text{Im}(\Phi_{12}^c)$, $\omega_{22} = \text{Re}(\Phi_{12}^c) - \text{Re}(\Phi_{11}^c)$.

В общем случае решение этого уравнения может быть найдено численно. Зная месторасположение точки c , из системы (11) легко получить значение напряжений в зонах электромеханического предразрушения.

Определим далее скачок перемещений и электрического потенциала на промежутке $(-c, c)$. Учитывая, что на этом промежутке

$$F_1^-(x_1) = \frac{1}{\gamma_1} p_1(x_1) - F_1^+(x_1), \quad F_4^-(x_1) = p_4(x_1) - F_4^+(x_1),$$

из соотношений (5), (6) после интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} n_{11}[u_1(x_1, 0)] + in_{13}[u_3(x_1, 0)] + in_{14}[\varphi(x_1, 0)] &= \frac{1}{\gamma_1} (\sigma_{33}^\infty + m_{14}D_3^\infty) \times \\ & \times (x_1 + c)^{0.5+i\varepsilon_1} (x_1 - c)^{0.5-i\varepsilon_1} + \frac{1 + \gamma_1}{\gamma_1} \left\{ (\sigma_0 + m_{14}D_s - im_{11}\tau_0) \times \right. \end{aligned}$$

$$\times J_{11}(x_1) + (\sigma_0 + m_{14}D_s + im_{11}\tau_0)J_{12}(x_1)\},$$

$$n_{43}[u_3(x_1, 0)] + n_{44}[\varphi(x_1, 0)] = \frac{\sigma_0 + m_{44}D_s}{2\pi} \times$$

$$\times \{(x_1 - a)\Gamma(c, x_1, a) - (x_1 + a)\Gamma(c, x_1, -a)\},$$

где

$$J_{11}(x_1) = \int_{-c}^{x_1} \frac{\Phi_{11}^+(t)dt}{Y_1^+(t)}, \quad J_{12}(x_1) = \int_{-c}^{x_1} \frac{\Phi_{12}^+(t)dt}{Y_1^+(t)},$$

$$\Gamma(b, x_1, \xi) = \ln \frac{b^2 - x_1\xi - \sqrt{(b^2 - x_1^2)(b^2 - \xi^2)}}{b^2 - x_1\xi + \sqrt{(b^2 - x_1^2)(b^2 - \xi^2)}}.$$

При этом скачок перемещений и электрического потенциала в вершине трещины определяется следующим образом

$$n_{11}\delta_{u_1} + in_{13}\delta_{u_3} + in_{14}\delta_\varphi = \frac{1}{\gamma_1} (\sigma_{33}^\infty + m_{14}D_3^\infty)(a+c)^{0,5+i\varepsilon_1} \times$$

$$\times (a-c)^{0,5-i\varepsilon_1} + \frac{1+\gamma_1}{\gamma_1} \{(\sigma_0 + m_{14}D_s - im_{11}\tau_0) \times$$

$$\times J_{11}(a) + (\sigma_0 + m_{14}D_s + im_{11}\tau_0)J_{12}(a)\},$$

$$n_{43}\delta_{u_3} + n_{44}\delta_\varphi = -\frac{a(\sigma_0 + m_{44}D_s)}{2\pi} \Gamma(c, a, -a),$$

где $\delta_{u_1} = [u_1(a, 0)]$, $\delta_{u_3} = [u_3(a, 0)]$, $\delta_\varphi = [\varphi(a, 0)]$.

Величины δ_{u_1} , δ_{u_3} , δ_φ определяют раскрытие вершины трещины и аналогично [4] могут служить основными параметрами, определяющими возможность развития трещины.

Анализ результатов численных исследований. Результаты вычисления длины зоны предразрушения, а также величин δ_{u_1} , δ_{u_3} , δ_φ для

$a = 0,01м$, $\sigma_{33}^\infty = 10МПа$ и различных D_3^∞ / D_s приведены в таблице. В расчетах использовались данные пьезокерамического биматериала PZT-5Н/ВаТiО₃, приведенные в [7]. Из полученных результатов следует, что аналогично случаю трещины в однородном материале величины c , а также δ_{u_3} , δ_φ растут нелинейным образом с ростом параметра D_3^∞ / D_s . Указанные величины зависят также от характеристик биматериала, однако эта зависимость не является столь существенной.

D_3^∞ / D_s	$\frac{c-a}{2a}$	$\delta_{u_1}, 10^{-6} \text{ м}$	$\delta_{u_3}, 10^{-6} \text{ м}$	$\delta_\varphi, \text{ В}$
0,2	0,02565	1,31633	0,72675	-420,313
0,3	0,06109	0,71964	1,14214	-1160,63
0,4	0,11798	0,42424	1,70908	-2378,48
0,5	0,20707	0,24582	2,44255	-4152,14
0,6	0,35063	0,12053	3,39652	-6642,95

На рис. 2 и 3 изображены соответственно графики, характеризующие изменение $\sigma_{33}(x_1, 0)$ при $x_1 > c$ и $[u_3(x_1, 0)]$ на промежутке $0 < x_1 < c$. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям D_3^∞ / D_s равным 0,2; 0,4; 0,6. Видно, что с увеличением внешней электрической нагрузки значение $[u_3(x_1, 0)]$ и $\sigma_{33}(x_1, 0)$ возрастает. При этом заметим, что точки $x_1 = \pm a$

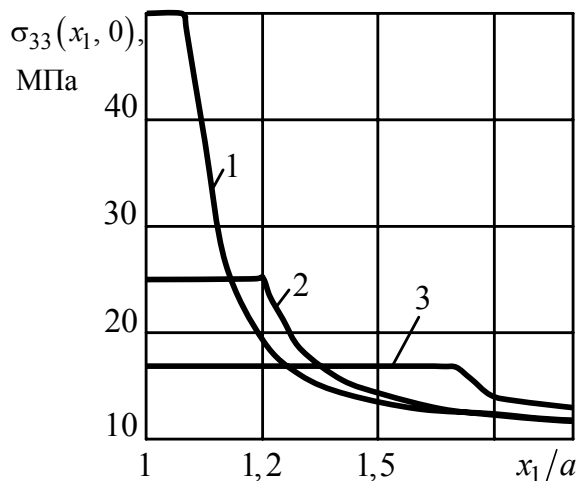


Рис. 2

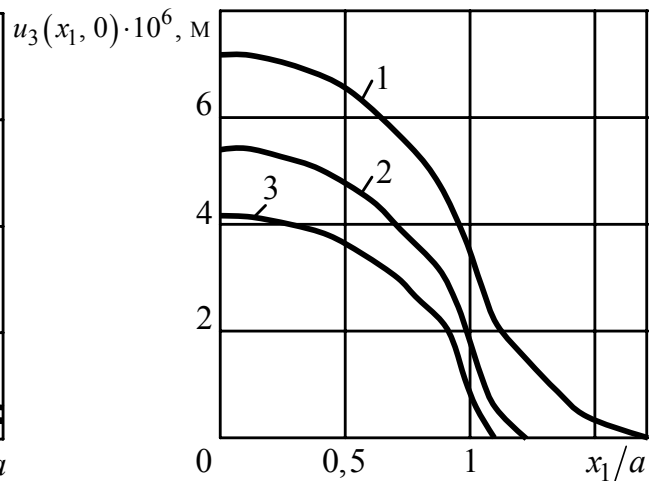


Рис. 3

являются точками перегиба функции $[u_3(x_1, 0)]$. Других особых точек на промежутке $0 < x_1 < c$ эта функция, как видно из рис. 3, не имеет.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто модель тріщини із електромеханічними смугами передруйнування для біматеріальної п'єзокерамічної площини. Вважаючи, що смуга передруйнування локалізована на продовженні тріщини, одержано точний аналітичний розв'язок задачі, з якого знайдено рівняння для визначення довжини цієї смуги передруйнування та розкриття тріщини в її вершині.

SUMMARY. This work is concerned with the analytical characterization of the electromechanical nonlinear effects on the fields surrounding the tip of an interface crack located in a thin interlayer between two piezoelectric materials. Modeling the pre-fracture zones by electrical displacement reaching a saturation limit and unknown constant stresses reduces the problem to linear interface crack analysis leading to a Hilbert problem. This

problem is solved exactly. The pre-fracture zone lengths and stresses in these zones are found from algebraic and transcendental equations. Numerical results corresponding to certain material combinations and remote loading are presented and analyzed.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. Кудрявцев Б.А., Партон В.З., Ракитин В.И. Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе с проводником // Прикладная математика и механика – 1975. – Т. 39, №1. – С. 149–159. 2. Parton V.Z. Fracture mechanics of piezoelectric materials // Acta Astronautica. – 1976. – Vol. 3. – P.771–683. 3. Gao H. J., Zhang T. Y., Tong P. Local and global energy release rates for an electrically yielded crack in a piezoelectric ceramic // J. Mech. Phys. Solids. – 1997. – Vol. 45. – P. 491–510. 4. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1968. – 248 с. 5. Herrmann K.P., Loboda V.V., Govorukha V.B. On contact zone models for an electrically impermeable interface crack in a piezoelectric biomaterial // Int. J. Fract. – 2001. – Vol. 111. – P. 203–227. 6. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с. 7. Dunn M.L., Taya M. Electroelastic field concentrations in and around inhomogeneities in piezoelectric solids // J. Appl. Mech. – 1994. – Vol. 61. – P. 474–475.

Днепропетровский национальный университет

Поступила 20.11.2007

УДК 539.3

С. А. КАЛОЕРОВ, д-р физ.-мат. наук,
Е. В. АВДЮШИНА, канд. физ.-мат. наук, М. А. КОЛОМИЕЦ

ЗАДАЧА ВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИНКИ С ЖЕСТКИМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

В современной промышленности и строительстве широко используются конструкционные вязкоупругие материалы, в частности полимеры, стекло- и углепластики. Так как их напряженное состояние за период, соизмеримый со сроком эксплуатации, не может рассматриваться как стационарное, возникает потребность исследования во времени механического поведения этих материалов. Так, в работах [1–3] предложены различные подходы определения вязкоупругого состояния изотропных и ортотропных сред. Вязкоупругое состояние многосвязных изотропных пластинок изучалось в статье [4]. В данном сообщении предложен метод решения задач вязкоупругости для анизотропных пластинок, исследовано вязкоупругое состояние пластинки с жесткими эллиптическими или линейными включениями.

1. Постановка задачи. Рассмотрим отнесенную к прямоугольной системе координат Oxy бесконечную вязкоупругую анизотропную пластинку с конечным числом жестких включений, которые будем считать эллиптически-ми, т. к. другие формы контуров можно аппроксимировать дугами эллипсов. Обозначим контуры включений, их полуоси и координаты центров через L_l , a_l , b_l , x_{0l} , y_{0l} ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) (рис. 1), бесконечную область, ограниченную контурами L_l , – через S . На бесконечности пластинка находится под действием растягивающих усилий p , направленных под углом α к оси Ox , т. е.

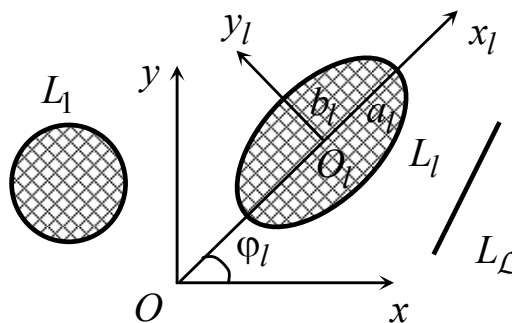


Рис. 1

$$\sigma_x^\infty = p(1 + \cos 2\alpha)/2, \quad \sigma_y^\infty = p(1 - \cos 2\alpha)/2,$$

$$\tau_{xy}^\infty = p \sin 2\alpha, \quad \omega_3^\infty = 0.$$

Будем считать, что материал пластинки обладает свойствами, описываемыми линейной теорией вязкоупругости.

2. Метод решения задачи. Определение вязкоупругого состояния пластинки будем проводить на основе принципа Вольтерра, по которому вначале нужно решить соответствующую задачу теории упругости, а затем заменой коэффициентов упругости временными операторами найти напря-

женно-деформированное состояние пластинки в любой момент времени.

Определение упругого состояния рассматриваемой пластинки сводится к нахождению производных комплексных потенциалов $\Phi'_k(z_k)$ ($k=1,2$), удовлетворяющих на контурах включений L_l граничным условиям [5, 6]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{qk} \delta_k \Phi'_k(t_k) = \omega_{3l} (dy/ds, -dx/ds) \quad (q=1,2), \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} g_{1k} = p_k &= a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k, \\ g_{2k} = q_k &= a_{12}\mu_k + a_{22}/\mu_k - a_{26}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

μ_k – корни характеристического уравнения

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0; \quad (2.3)$$

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_2}{E_1} = -\frac{\nu_1}{E_2}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_{12}}; \quad (2.4)$$

E_1, E_2 и ν_1, ν_2 – модули Юнга и коэффициенты Пуассона для направлений осей Ox и Oy ; G_{12} – модуль сдвига для этих же направлений; ω_{3l} – угол поворота l -го включения вокруг оси Oz против часовой стрелки.

Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в бесконечных областях S_k , получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями $z_k = x + \mu_k y$. В плоскостях z_k контурам L_l соответствуют контуры L_{kl} , а функции $\Phi_k(z_k)$ в рассматриваемом случае имеют вид [6]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \Phi_k^*(z_k), \quad (2.5)$$

где $\Phi_k^*(z_k)$ – функции, голоморфные в бесконечных многосвязных областях, ограниченных L_{kl} ; Γ_k – постоянные, определяемые из системы уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (\mu_k^2, 1, -\mu_k, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k = (\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty, 2\omega_3^\infty), \quad (2.6)$$

решением которой будут [7]

$$\Gamma_k = \frac{\mu_k}{(\mu_k - \bar{\mu}_k)(\mu_k - \mu_{k+1})(\mu_k - \bar{\mu}_{k+1})} \left\{ \sigma_x^\infty + (\bar{\mu}_k + \mu_{k+1} + \bar{\mu}_{k+1}) \tau_{xy}^\infty + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (\bar{\mu}_k \mu_{k+1} + \bar{\mu}_k \bar{\mu}_{k+1} + \mu_{k+1} \bar{\mu}_{k+1}) \sigma_y^\infty - \bar{\mu}_k \mu_{k+1} \bar{\mu}_{k+1} \left(2\omega_3^\infty + \right. \\
& \left. + a_{16} \sigma_x^\infty + 3a_{26} \sigma_y^\infty + (2a_{12} + a_{66}) \tau_{xy}^\infty \right) / 2a_{22} \}. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Здесь и далее индекс k принимает значения 1, 2, причем значение индекса $k+1$ при $k=2$ формально полагается равным 1.

В задаче вязкоупругости коэффициенты деформации (2.4) зависят от времени. Пусть со временем коэффициент Пуассона ν_2 изменяется на некоторую малую величину λ , т. е.

$$\nu_2 = \nu_2^0 + \lambda, \quad (2.8)$$

где ν_2^0 – мгновенно-упругое значение коэффициента ν_2 ; λ – малый параметр, равный отклонению коэффициента ν_2 от его мгновенного значения ν_2^0 . В этом случае, если считать постоянными во времени коэффициенты E_1 и E_2 , то, как видно из (2.4), коэффициент ν_1 также зависит от λ линейным образом, причем $\nu_1 = \nu_2 \frac{E_2}{E_1} = \nu_1^0 + \frac{E_2}{E_1} \lambda$, где $\nu_1^0 = \frac{E_2}{E_1} \nu_2^0$.

Учитывая равенство (2.8), получаем

$$a_{12} = a_{12}^0 - \frac{\lambda}{E_1}, \quad g_{1k} = g_{1k0} - \frac{\lambda}{E_1}, \quad g_{2k} = g_{2k0} - \lambda \frac{\mu_k}{E_1}, \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned}
a_{12}^0 &= -\frac{\nu_2^0}{E_1}, \quad g_{1k0} = \frac{1}{E_1} (\mu_k^2 - \nu_2^0) - a_{16} \mu_k, \\
g_{2k0} &= -\mu_k \frac{\nu_2^0}{E_1} + \frac{1}{E_2 \mu_k} - a_{26}. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Из соотношений (2.7) следует, что Γ_k линейно зависят от λ , т. е.

$$\Gamma_k = \Gamma_{k0} + \lambda \Gamma_{k1}. \quad (2.11)$$

Если в (2.7) подставить выражения (2.11) и a_{12} по формуле (2.9), а затем в полученных соотношениях сравнить коэффициенты при λ и без него, то получим, что выражения для Γ_{k0} имеют тот же вид (2.7), если в нем заменить a_{12} на a_{12}^0 , а для Γ_{k1} найдем

$$\Gamma_{k1} = \frac{\mu_k \bar{\mu}_k \mu_{k+1} \bar{\mu}_{k+1}}{(\mu_k - \bar{\mu}_k)(\mu_k - \mu_{k+1})(\mu_k - \bar{\mu}_{k+1})} \frac{a_{11}}{a_{22}} \tau_{xy}^{\infty}. \quad (2.12)$$

Учитывая (2.8), граничные условия (2.1) запишем в виде

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(g_{1k0} - \frac{\lambda}{E_1}, g_{2k0} - \mu_k \frac{\lambda}{E_1} \right) \delta_k \Phi'_k(t_k) = \omega_{3l}^{(j)} \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right). \quad (2.13)$$

Разложим функции $\Phi_k^*(z_k)$ и углы поворотов включений ω_{3l} в ряды по степеням малого параметра λ :

$$\left(\Phi_k^*(z_k), \omega_{3l} \right) = \sum_{j=0} \lambda^j \left(\Phi_k^{(j)}(z_k), \omega_{3l}^{(j)} \right). \quad (2.14)$$

Подставив (2.5) в граничные условия (2.13) с учетом равенств (2.8), (2.14) и приравняв в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра λ , будем иметь рекуррентную последовательность граничных условий

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{qk0} \delta_k \Phi_k^{(j)}(t_k) = f_q^{(j)}(t), \quad (2.15)$$

в которых

$$\begin{aligned} f_q^{(j)}(t) = & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1, \mu_k) \frac{1 - \delta_0^j}{E_1} \delta_k \Phi_k^{(j-1)}(t_k) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left\{ (1, \mu_k) \times \right. \\ & \times \frac{1}{E_1} \left[\delta_1^j \delta_k \Gamma_{k0} + \delta_2^j \delta_k \Gamma_{k1} \right] - g_{qk0} \left[\delta_1^j \delta_k \Gamma_{k1} + \delta_0^j \delta_k \Gamma_{k0} \right] \left. \right\} + \\ & + \omega_{3l}^{(j)} \left(dy/ds, -dx/ds \right); \end{aligned} \quad (2.16)$$

$\delta_k = dt_k / ds$; δ_i^j – символ Кронекера; $\Phi_k^{(j)}(z_k)$ – функции, голоморфные вне контуров L_{kl} , включая бесконечно удаленные точки. Если использовать методы конформных отображений, то для производных последних функций получаем [6]

$$\Phi_k^{(j)}(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln}^{(j)} \phi'_{kln}(z_k), \quad (2.17)$$

где

$$\phi'_{kln}(z_k) = - \frac{n}{R_{kl} \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}; \quad (2.18)$$

ζ_{kl} – переменные, определяемые из неявных зависимостей

$$z_k = z_{0kl} + R_{kl} (\zeta_{kl} + m_{kl} / \zeta_{kl}); \quad (2.19)$$

$$z_{0kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = [a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)] / 2,$$

$$m_{kl} = [a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)] / 2R_{kl}; \quad (2.20)$$

$a_{kln}^{(j)}$ – постоянные, которые будем определять из граничных условий (2.15).

Исходя из граничных условий (2.15), составим функционал

$$I = \sum_{i=1}^{\mathcal{L}} \sum_{m=1}^{M_i} \sum_{q=1}^2 \left| \sum_{k=1}^2 \left[g_{qk0} \delta_{km} \Phi_k^{(j)}(t_{km}) + \bar{g}_{qk0} \bar{\delta}_{km} \overline{\Phi_k^{(j)}(t_{km})} \right] - f_{qi}^{(j)}(t_m) \right|^2, \quad (2.21)$$

в котором t_m – система точек, выбираемых на контурах L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$).

Удовлетворяя условиям минимума $\partial I / \partial a_{kln}^{(j)} = 0$ функционала (2.21), получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\mathcal{L}} \sum_{m=1}^{M_i} \sum_{q=1}^2 \sum_{s=1}^2 A_{iqkln} \left[g_{qs0} \delta_{sm} \Phi_s^{(j)} + \bar{g}_{qs0} \bar{\delta}_{sm} \overline{\Phi_s^{(j)}} \right] - \\ & - \sum_{i=1}^{\mathcal{L}} \sum_{m=1}^{M_i} \sum_{q=1}^2 A_{iqkln} f_{qi}^{(j)} = 0 \quad (k = \overline{1, 2}; l = \overline{1, \mathcal{L}}; n = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (2.22)$$

где

$$A_{iqkln} = g_{qk0} \delta_{km} \Phi_{kln}' . \quad (2.23)$$

Подставив выражения (2.17) в уравнения (2.22), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\mathcal{L}} \sum_{m=1}^{M_i} \sum_{q=1}^2 \sum_{s=1}^2 \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} \sum_{p=1}^{\infty} A_{iqkln} \left[A_{iqsrp} a_{srp}^{(j)} + \overline{A_{iqsrp}} \bar{a}_{srp}^{(j)} \right] = \\ & = \sum_{i=1}^{\mathcal{L}} \sum_{m=1}^{M_i} \sum_{q=1}^2 A_{iqkln} f_{qi}^{(j)} \quad (k = \overline{1, 2}; l = \overline{1, \mathcal{L}}; n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Кроме уравнений (2.24), для каждого из контуров включений должно выполняться условие равенства нулю главного момента сил, приложенных к включению [8]. Из этих условий получаем соотношения

$$\sum_{k=1}^2 \left[R_{kl} a_{kl}^{(j)} - \bar{R}_{kl} \bar{a}_{kl}^{(j)} \right] = 0 \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}). \quad (2.25)$$

Уравнения (2.24) совместно с (2.25) составляют полную систему линейных алгебраических уравнений для определения $a_{kln}^{(j)}$, $\omega_{3l}^{(j)}$ ($k = \overline{1, 2}$, $l = \overline{1, \mathcal{L}}$, $n = 1, 2, \dots$). После решения этой системы функции (2.17) станут известными и на основании (2.14) с использованием принципа Вольтерра можно найти $\Phi_k^*(z_k)$, а по ним и функции (2.5) для любого момента времени.

На основе принципа Вольтерра степени λ^j заменим операторами

$$\lambda^j = \lambda^{*j} \cdot 1 = \left(v_2^* - v_2^0 \right)^j \cdot 1, \quad (2.26)$$

где v_2^* – операторный коэффициент Пуассона, который на основе (2.4) определяется через коэффициенты v_1^* , E_1^* , E_2^* . Для вычисления последних коэффициентов резольвентные интегральные операторы Вольтерра с ядром Ю.Н. Работнова представим в виде [9]

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_1^*} &= \frac{1}{E_1^0} \left[1 + \delta_1 \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_1) \right], & \frac{1}{E_2^*} &= \frac{1}{E_2^0} \left[1 + \delta_2 \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_2) \right], \\ v_1^* &= v_1^0 \left[1 + \delta_3 \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_3) \right], \end{aligned} \quad (2.27)$$

где α , δ_1 , β_1 , δ_2 , β_2 , δ_3 , β_3 – реологические параметры материала, определяемые из опытов на ползучесть. Учитывая, что воздействие оператора Ю.Н. Работнова на единицу имеет вид

$$\mathcal{E}_\alpha^*(-\beta) \cdot 1 = t^{1-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{n(1-\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1-\alpha)+1]}, \quad (2.28)$$

и используя формулы преобразования резольвентных операторов [9], получаем

$$v_2^* = \frac{E_1^*}{E_2^*} v_1^* = v_2^0 \left\{ 1 - \delta_1 \left[1 + \frac{\delta_2}{\beta_2 - \beta_1 - \delta_1} \left(1 + \frac{\delta_3}{\beta_3 - \beta_2} \right) \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\delta_3}{\beta_3 - \beta_1 - \delta_1} \left(1 - \frac{\delta_2}{\beta_3 - \beta_2} \right) \left. \vphantom{\frac{\delta_3}{\beta_3 - \beta_1 - \delta_1}} \right] \mathcal{E}_\alpha^* (-\beta_1 - \delta_1) + \\
& + \delta_2 \left(1 + \frac{\delta_1}{\beta_2 - \beta_1 - \delta_1} \right) \left(1 + \frac{\delta_3}{\beta_3 - \beta_2} \right) \mathcal{E}_\alpha^* (-\beta_2) + \\
& + \delta_3 \left(1 + \frac{\delta_1}{\beta_3 - \beta_1 - \delta_1} \right) \left(1 - \frac{\delta_2}{\beta_3 - \beta_2} \right) \mathcal{E}_\alpha^* (-\beta_3) \left. \vphantom{\frac{\delta_3}{\beta_3 - \beta_1 - \delta_1}} \right\}. \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Если постоянными во времени считать коэффициенты E_1 , ν_1 , то из линейной зависимости (2.8) и формул (2.4) следует, что переменной во времени будет E_2 , а из формулы (2.29) будем иметь

$$\nu_2^* = \frac{E_1^0}{E_2^*} \nu_1^0 = \nu_2^0 \left[1 + \delta_2 \mathcal{E}_\alpha^* (-\beta_2) \right]. \quad (2.30)$$

3. Описание и анализ результатов численных исследований. Проведены численные исследования распределения напряжений и изменения так называемых КИН (комбинаций коэффициентов при сингулярных членах функций) в зависимости от геометрических параметров включений, материала пластинки и времени действия нагрузок. Пластинка считалась изготовленной из композитного материала на основе эпоксидного (М3) или полиэтиленового связующего (М2), а также изотропного материала алюминия (М1). В случае эпоксидного связующего [2]

$$\begin{aligned}
E_1 &= 23,0 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad E_2 = 16,0 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \\
G_{12} &= 3,08 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad \nu_1 = 0,0765, \quad \nu_2 = 0,11, \\
\alpha &= 0,846, \quad \beta_2 = 0,2745 c^{\alpha-1}, \quad \delta_2 = 0,1295 c^{\alpha-1};
\end{aligned}$$

для полиэтиленового связующего

$$\begin{aligned}
E_1 &= 19,7 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad E_2 = 11,7 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \\
G_{12} &= 0,637 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad \nu_1 = 0,083, \quad \nu_2 = 0,14, \\
\alpha &= 0,717, \quad \beta_2 = 0,1283 c^{\alpha-1}, \quad \delta_2 = 0,0608 c^{\alpha-1};
\end{aligned}$$

для алюминия [3]

$$\begin{aligned}
E_1 &= 7,1 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,34, \quad \alpha = 0,5, \\
\beta &= 6,65 \cdot 10^{-3} c^{\alpha-1}, \quad \delta = 6,15 \cdot 10^{-3} c^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

При проведении численных исследований количество членов в рядах

(2.17) и количество «коллокационных точек» на контурах включений L_l , для которых вычислялся квадрат невязки, увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности. В зависимости от расстояния между включениями в рядах (2.17) для каждого включения оставлялось от 5 до 20 членов (в случае линейных включений – от 10 до 70) и выбиралось от 100 до 200 «коллокационных точек» t_m . Количество приближений j по степеням малого параметра λ увеличивалось до тех пор, пока последующее приближение изменяло значения максимальных напряжений в предыдущем приближении более чем на 0,01%. Для удовлетворения этому условию в рассмотренных случаях необходимо было оставлять степени малого параметра λ от 3 до 8. Ниже описаны некоторые из полученных результатов для случая растяжения пластинки усилиями, параллельными оси Oy , т. е. когда $\sigma_y^\infty = p$. Все результаты даны с точностью до множителя p .

Для пластинки из различных материалов с двумя одинаковыми круговыми включениями (рис. 2, а) радиуса a в табл. 1 в зависимости от време-

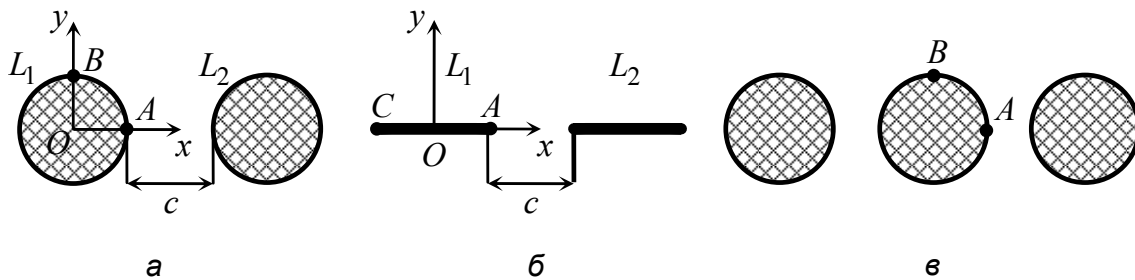


Рис. 2

ни действия нагрузки и отношения c/a , где c – расстояние между включениями, приведены значения напряжений в точке A левого включения, а на рис. 3, 4 для $c/a = 0,5$ даны графики их изменения с течением времени. При этом графики рис. 3 относятся к пластинке из материала М3, рис. 4 – к материалам М1 и М2.

Как следует из табл. 1 и рис. 3 – 4, в пластинке из материалов М3, М2, М1 через соответственно 10000, 1000, 300 час. после приложения нагрузки напряжения с течением времени не изменяются, т. е. в ней устанавливается стационарное состояние. Но значительные изменения напряжений происходят лишь в первые 50 час. (для материалов М2 и М3 даже раньше). При переходе в стационарное состояние в точке A значения σ_x и σ_y по модулю для материала М3 изменяются соответственно на 57,7% и 71,6%, для М2 и М1 значения σ_x по модулю изменяются на 39,2% и 58%.

Заметим, что полученные для алюминия результаты совпали с известными [10].

Таблица 1

Напря- жение	t , час.	c/a					
		∞	2	1	0,5	0,1	0,01
Эпоксидное связующее							
σ_x	0	0,1113	0,0516	-0,0024	-0,0652	-0,1897	-0,4754
	100	0,0906	0,0167	-0,0516	-0,1341	-0,3267	-0,8504
	1000	0,0878	0,0119	-0,0583	-0,1436	-0,3456	-0,9021
	10000	0,0859	0,0087	-0,0629	-0,1499	-0,3584	-0,9370
	∞	0,0846	0,0065	-0,0660	-0,1543	-0,3673	-0,9610
σ_y	0	0,0085	0,0039	-0,0002	-0,0049	-0,0145	-0,0363
	100	0,0096	0,0020	-0,0050	-0,0134	-0,0330	-0,0859
	1000	0,0096	0,0015	-0,0059	-0,0150	-0,0364	-0,0950
	10000	0,0096	0,0011	-0,0067	-0,0162	-0,0391	-0,1020
	∞	0,0095	0,0007	-0,0074	-0,0173	-0,0413	-0,1082
Полиэтиленовое связующее							
σ_x	0	0,0215	-0,0306	-0,0700	-0,1241	-0,3111	-0,8525
	100	0,0075	-0,0668	-0,1234	-0,2016	-0,4793	-1,3135
	500	0,0071	-0,0679	-0,1251	-0,2040	-0,4846	-1,3280
	1000	0,0070	-0,0681	-0,1252	-0,2043	-0,4852	-1,3298
	∞	0,0070	-0,0681	-0,1253	-0,2044	-0,4855	-1,3306
σ_y	0	0,0017	-0,0025	-0,0058	-0,0103	-0,0258	-0,0709
	100	0,0009	-0,0079	-0,0147	-0,0241	-0,0575	-0,1576
	500	0,0008	-0,0082	-0,0152	-0,0248	-0,0591	-0,1621
	1000	0,0008	-0,0083	-0,0153	-0,0249	-0,0593	-0,1627
	∞	0,0008	-0,0083	-0,0153	-0,0250	-0,0595	-0,1630
Алюминий							
σ_x	0	0,0727	-0,0440	-0,1844	-0,3646	-0,7856	-2,1335
	50	-0,0964	-0,2683	-0,4889	-0,8051	-1,7177	-4,6345
	100	-0,1094	-0,2869	-0,5158	-0,8465	-1,8107	-4,8680
	200	-0,1160	-0,2967	-0,5306	-0,8702	-1,8663	-5,0027
	300	-0,1177	-0,2994	-0,5347	-0,8772	-1,8836	-5,0429
	∞	-0,1189	-0,3013	-0,5380	-0,8829	-1,8993	-5,0777
σ_y	0	0,0181	-0,0110	-0,0461	-0,0911	-0,1964	-0,5334
	50	-0,0367	-0,1117	-0,2074	-0,3437	-0,7330	-1,9807
	100	-0,0465	-0,1276	-0,2320	-0,3820	-0,8164	-2,1986
	200	-0,0531	-0,1383	-0,2484	-0,4079	-0,8741	-2,3461
	300	-0,0553	-0,1419	-0,2539	-0,4167	-0,8941	-2,3960
	∞	-0,0572	-0,1450	-0,2588	-0,4248	-0,9139	-2,4436

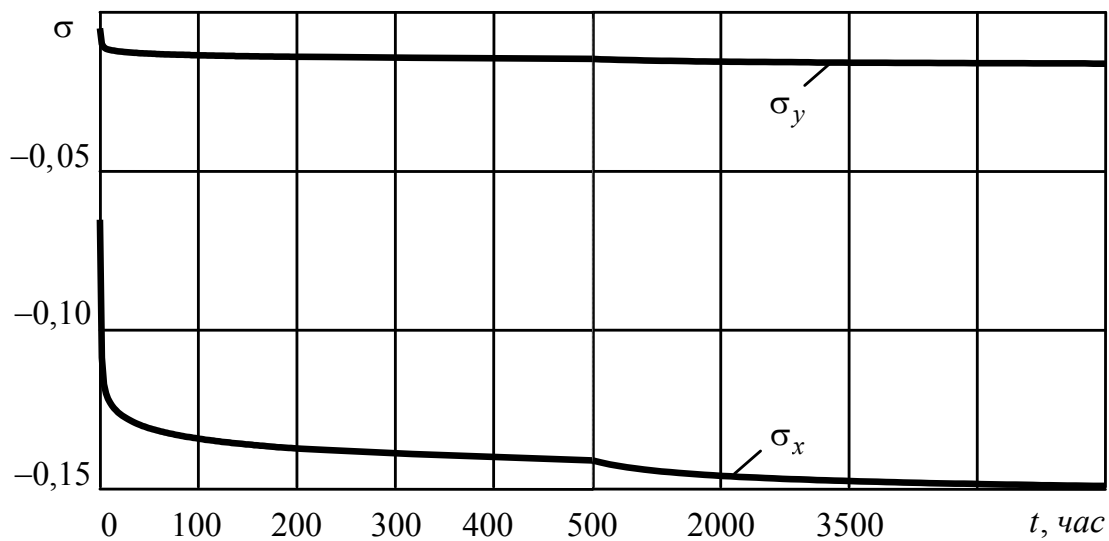


Рис. 3

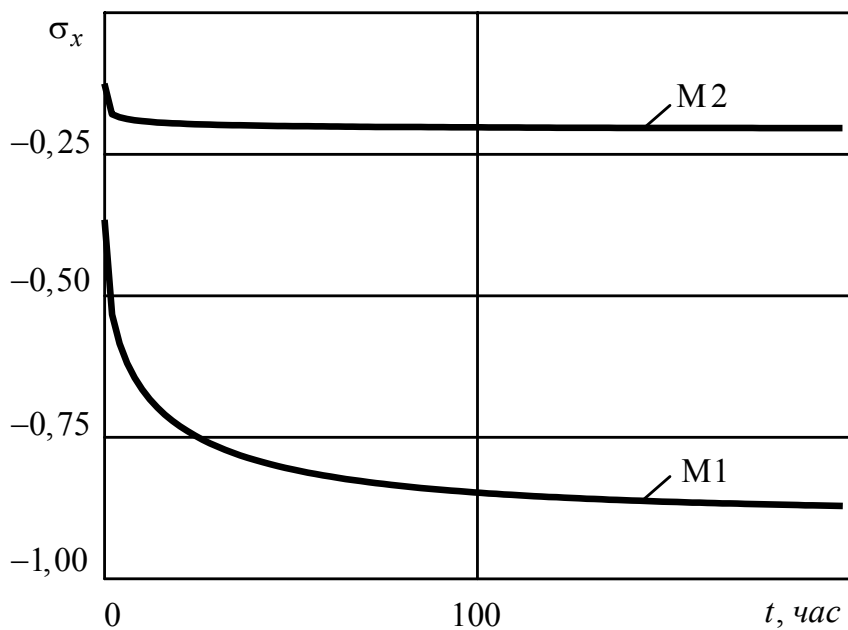


Рис. 4

В табл. 2 приведены значения КИН для левого включения в случае пластинки с двумя одинаковыми линейными включениями (рис. 2, б) в зависимости от отношения c/a расстояния между включениями к полудлине включения. Из табл. 2 видно, что значения КИН с приближением включений друг с другом и со временем увеличиваются.

В табл. 3 для материала М3 приведены значения напряжений σ_x и σ_y в точке A центрального включения для пластинки с рядом круговых включений (рис. 2, в) в зависимости от количества включений. Из табл. 3 видно,

Таблица 2

Величина	t , час.	c/a			
		∞	1	0,1	0,01
Эпоксидное связующее					
k_1^-	0	0,0115	0,0121	0,0132	0,0141
	∞	0,0161	0,0168	0,0185	0,0191
k_1^+	0	0,0115	0,0128	0,0207	0,0443
	∞	0,0161	0,0178	0,0288	0,0616
Полиэтиленовое связующее					
k_1^-	0	0,0038	0,0040	0,0044	0,0047
	∞	0,0053	0,0057	0,0063	0,0067
k_1^+	0	0,0038	0,0043	0,0069	0,0148
	∞	0,0053	0,0064	0,0095	0,0207

Таблица 3

Напряжение	c/a	t , час.	Количество включений, \mathcal{L}				
			1	2	3	5	15
σ_x	∞	0	0,1113	-	-	-	-
		∞	0,0846	-	-	-	-
	0,5	0	-	-0,0652	-0,1030	-0,1710	-0,3159
		10000	-	-0,1499	-0,2015	-0,2945	-0,4927
		∞	-	-0,1543	-0,2066	-0,3009	-0,5020
	0,1	0	-	-0,1897	-0,2737	-0,4467	-0,9965
		10000	-	-0,3584	-0,4774	-0,7221	-1,4985
		∞	-	-0,3673	-0,4881	-0,7365	-1,5251
	σ_y	∞	0	0,0085	-	-	-
∞			0,0095	-	-	-	-
0,5		0	-	-0,0049	-0,0078	-0,0130	-0,0241
		10000	-	-0,0162	-0,0219	-0,0321	-0,0539
		∞	-	-0,0173	-0,0232	-0,0338	-0,0565
0,1		0	-	-0,0145	-0,0209	-0,0341	-0,0762
		10000	-	-0,0391	-0,0521	-0,0789	-0,1641
		∞	-	-0,0413	-0,0549	-0,0829	-0,1717

что с увеличением количества включений и с течением времени значения напряжений по модулю в точке A увеличиваются.

РЕЗЮМЕ. Методом малого параметра задачу в'язкоупружності для багатов'язної анізотропної пластинки з жорсткими включеннями приведено до рекурентної послідовності задач теорії пружності. Останні задачі розв'язуються з використанням узагальнених комплексних потенціалів. Визначення невідомих функцій методом найменших квадратів зведено до розв'язання ряду систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Для різних матеріалів описано результати чисельних досліджень для пластинки з двома круговими або лінійними включеннями, з різною скінченною кількістю кругових включень. Показано суттєвий вплив на значення напружень часу прикладання навантаження, а також матеріалу пластинки.

SUMMARY. The problem of viscoelasticity for multiconnected anisotropic plate with rigid inclusions is reduced to the recurring sequence of elastic problems by the method of small parameter. The latter problems are solved with the use of generalized complex potentials. The determination of unknown functions is reduced to the solving of series of systems of linear algebraic equations by the least-squares method. For different materials the results of numerical investigations are described for plate with two circular or linear inclusions, with various finite number of circular inclusions. The essential influence of applied loading period and plate material on the stress value is shown.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. *Ван Фо Фы Г. А.* Теория армированных материалов с покрытиями. – К.: Наук. думка, 1971. – 332 с. 2. *Каминский А. А., Гаврилов Д. А.* Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. – К.: Наук. думка, 1992. – 248 с. 3. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с. 4. *Космодамианський О. С., Іванов Г. М.* Напружено-деформований стан в'язко-пружних ізотропних багатов'язних середовищ // ДАН УРСР, Сер. А. – 1970. – Вип. 9. – С. 813–816. 5. *Лехницький С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с. 6. *Калоеров С. А., Горянская Е. С.* Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений. – К.: А.С.К., 1998. – С. 10–26. (Механика композитов: В 12 т. Т.7). 7. *Калоеров С. А.* Комплексные потенциалы плоской задачи теории упругости для многосвязного анизотропного тела с трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 1990. – № 21. – С. 24–34. 8. *Калоеров С. А., Баева А. И., Бороненко О. И.* Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 269 с. 9. *Работнов Ю. Н.* Равновесие упругой среды с последствием // Прикладная математика и механика. – 1948. – Т. 12, № 1. – С. 53–62. 10. *Калоеров С. А., Мироненко А. Б.* Исследование вязкоупругого состояния пластинки с жесткими эллиптическими или линейными включениями // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2005. – Вип.1, ч.1. – С. 61–69.

Донецкий национальный университет

Поступила 15.11.2007

УДК 539.3

Напряженное состояние полубесконечного тела при тепловыделении в параллельной к его границе дисковой области / Г. С. Кит, О. П. Сушко // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43.–С. 3–8.

Определяются температурное поле и напряжения в бесконечном теле, обусловленные тепловыделением в параллельной к его границе дисковой области. Свободная от нагрузки граница тела поддерживается при нулевой температуре или она теплоизолирована. Исследовано влияние глубины размещения монетобразной области на распределение температуры и нормальных напряжений при постоянном тепловыделении. Установлено, что сжимающие нормальные напряжения достигают максимальной по модулю величины в окрестности области тепловыделения и увеличиваются при ее удалении от границы тела.

Ил. 4. Табл. 1. Библиогр.: 10 назв.

УДК 539.3

Неполный контакт полупространств при воздействии теплового потока, направленного к материалу с меньшей термической дистортивностью / Р. М. Мартыняк, К. А. Чумак // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 9–15.

Рассматривается термоупругое взаимодействие двух изотропных полупространств при наличии между ними теплопроницаемого зазора, когда тепловой поток направлен к материалу с меньшей термической дистортивностью. Сформулированная контактная задача сведена к системе нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений относительно высоты зазора и скачка температуры между его берегами. Для ее решения предложена аналитико-численная процедура, которая использует предположение об асимптотической эквивалентности скачка температуры и высоты зазора в окрестности его концов. На основании численных исследований выявлено влияние теплопроводности заполнителя зазора и величины теплового потока на контактные параметры системы.

Ил. 4. Библиогр.: 7 назв.

УДК 539.3

О перемещениях жесткого эллиптического диска в трансверсально-изотропном пьезоэлектрическом пространстве / В. С. Кириллюк // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 16–21.

Получено точное решение задачи о перемещении жесткого эллиптиче-

ского диска в пьезоэлектрическом пространстве вдоль оси поляризации материала под действием силы. Решение построено с помощью общего представления решений трехмерных уравнений электроупругости для трансверсально-изотропных тел. В замкнутом виде получены выражения напряжений под диском, связь значения приложенной силы с перемещением диска. Проведены численные исследования перемещений под диском для различных пьезоматериалов, дана оценка влияния связанности силового и электрического полей на эти перемещения.

Табл. 1. Библиогр.: 10 назв.

УДК 539.3

Применение метода установления к решению статических контактных задач с односторонними связями / А.А. Бобылев, Е.Л. Сутурин // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 22–27.

Исследована вычислительная эффективность метода установления при решении статических контактных задач для упругих тел с односторонними связями на основе алгоритмов численного решения динамических контактных задач для вязкоупругих тел. Численные результаты, полученные этим методом, практически совпадают с результатами решения с использованием вычислительного алгоритма, разработанного на основе вариационных формулировок статических контактных задач, но в отличие от последних для получения необходимых значений требуется гораздо больше затрат машинного времени. Даны рекомендации по выбору реологических параметров вязкоупругих тел, позволяющих минимизировать влияние реологических свойств на напряженно-деформированное состояние, обеспечив при этом достаточно высокую скорость сходимости шагового алгоритма метода установления.

Ил. 2. Библиогр.: 8 назв.

УДК 539.3

Методика прогнозирования термомеханического поведения ферритовых элементов электромагнитных устройств при обеспечении их функциональных свойств / А.Р. Гачкевич, Р.А. Ивасько, М.Т. Солодяк, С.Шимюра // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 28–34.

Предложена методика прогнозирования термомеханического поведения, изготовленных из нестрикционных поликристаллических изотропных ферритовых материалов, элементов электромагнитных устройств в слабых квазиустановившихся электромагнитных полях (ЭМП) высокой несущей частоты ($H_m < 10^3$ А/м, $\omega \geq 10^5$ с⁻¹, где H_m – максимальное значение напряженности магнитного поля в теле, ω – круговая несущая частота). Она базируется на общей теории взаимодействия ЭМП и материального конти-

нуума (способного к одновременному намагничиванию и поляризации в некоторых диапазонах частотного спектра квазиустановившихся ЭМП), в которой влияние электромагнитного излучения учтено тепловыделениями (как связанными с перемагничиванием и переполяризацией, так и джоулевыми) и пондеромоторными силами (при статистическом описании силовых факторов воздействия излучения на рассматриваемое тело), а также известных из литературы для таких материалов (определенных экспериментально) характеристиках – комплексных магнитных и диэлектрических проницаемостях и соответствующих тангенсах углов потерь. Это позволило ввести формализм приближенных комплексных представлений для параметров ЭМП с дальнейшим сведением исходной задачи об определении этих параметров к задаче на комплексные амплитуды напряженностей магнитного или электрического полей. С использованием такого подхода найдены и исследованы электромагнитные, температурные и механические поля в упругом слое из конкретного ферритового материала, находящемся в ЭМП, созданном квазиустановившимся током, протекающим в плоскости, параллельной к основанию слоя.

Ил. 2. Библиогр.: 4 назв.

УДК 539.3

Математическая модель оптимизации режимов низкотемпературного нагрева кусочно-однородных тел вращения / А.Р.Гачкевич, Н.Г.Гачкевич, Е.М.Ирза, Б.М.Трищ // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 35–39.

В работе предлагается методика оптимизации по быстрдействию процесса термообработки кусочно-однородных тел вращения при ограничениях на напряженное состояние тела. Для описания термомеханического поведения кусочно-однородного тела вращения использована модель термочувствительного упругого тела в трехмерной постановке при зависимости характеристик материала от пространственной координаты. Оптимизация по быстрдействию процесса термообработки сводится к задаче на условный экстремум функции, которая выражает продолжительность процесса термообработки, при соответствующих связях параметров состояния и ограничениях на напряженное состояние. Задача решается с использованием метода прямого поиска на множестве кусочно-линейных функций управления. Предложенная численная математическая модель оптимизации может быть использована для исследования параметров процесса нагревания при различных ограничениях тепловой и механической природы и дает возможность существенно сократить продолжительность режимов термообработки.

Ил. 5. Библиогр.: 6 назв.

УДК 539.376

Нестационарная ползучесть линейных вязкоупругих материалов при одноосном растяжении и сжатии / В.П.Голуб, Я.В.Павлюк, П.В.Фернати // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С.40–49.

Рассматривается задача определения деформаций ползучести композитных материалов и их компонентов в режиме догрузки, полной разгрузки и циклического нагружения. Решение строится на основе линейной наследственной теории ползучести Больцмана-Вольтерра. Ядро наследственности выбрано в форме дробно-экспоненциальной функции Работнова. Параметры ядра найдены исходя из единой экспериментальной функции ползучести. Получено удовлетворительное согласование результатов расчета с экспериментальными данными.

Ил. 4. Табл. 1. Библиогр.: 7 назв.

УДК 539.3

Двумерная и плоская задачи электромагнитоупругости для тела с отверстиями и трещинами / С.А.Калоеров, А.В.Петренко // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 50–62.

С использованием методов комплексных потенциалов, конформных отображений и наименьших квадратов получены решения двумерной и плоской задач электромагнитоупругости для анизотропных тел из пьезоматериалов с отверстиями и трещинами. Для пластинки с различным количеством отверстий и трещин и их взаимным расположением проведены исследования ЭМУС и изменения КИНН в зависимости от геометрических и физико-механических свойств материалов. Рассматривались случаи действия силовых, электрических и магнитных полей.

Ил. 2. Табл. 6. Библиогр.: 5 назв.

УДК 539.375

Начальная зона предразрушения в конце межфазной трещины с гладким контактом берегов / А.А.Каминский, М.В.Дудик, Л.А.Кипнис // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 63–68.

В условиях плоской деформации методом Винера-Хопфа выполнен расчет начальной зоны предразрушения вблизи вершины межфазной трещины в кусочно-однородном изотропном упругом теле, берега которой кон-

тактируют без трения. Зона предразрушения моделируется прямой линией разрыва нормального смещения, исходящей из конца трещины под углом к границе раздела сред. Исследованы зависимости длины зоны предразрушения и угла наклона от упругих параметров тела.

Табл. 1. Библиогр.: 10 назв.

УДК 539.375

О расчете пластической зоны предразрушения в угловой точке кусочно-однородного тела / А.А.Каминский, Л.А.Кипнис, Г.А.Хазин, Т.В.Полищук // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 69–75.

Решена симметричная задача о расчете пластической зоны предразрушения в угловой точке кусочно-однородного изотропного тела. Зона предразрушения моделируется линиями разрыва касательного смещения. Соответствующая задача теории упругости решена методом Винера-Хопфа.

Ил.: 3. Табл.: 1. Библиогр.: 11 назв.

УДК 539.37

Неупругое деформирование гибкой сферической оболочки в виде эксцентричного кольца / Е.А.Сторожук, И.С.Чернышенко, И.Б.Руденко // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 76–81.

Рассмотрено упругопластическое состояние тонких сферических оболочек, ослабленных круговым эксцентричным отверстием, при учете конечных прогибов. Дано постановку задачи и методику ее численного решения. Числовые результаты представлены для изотропных оболочек, находящихся под действием внутреннего давления заданной интенсивности. Изучено влияние пластических деформаций материала, конечных прогибов и геометрических параметров оболочки на распределение напряжений (деформаций, перемещений) вдоль контура отверстия и в зоне их концентрации.

Ил.1. Табл.2. Библиогр.: 9 назв.

УДК 539.3

Устойчивость ослабленных круговыми отверстиями гладких цилиндрических оболочек при действии поперечного изгиба / В.С.Гудрамович, П.А.Дзюба, Е.Ф.Прокопало // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 82–87.

Изложены результаты широкомасштабного эксперимента (270 моделей), проведенного с целью изучения влияния кругового отверстия на ус-

тойчивость ортотропной тонкостенной цилиндрической оболочки при поперечном изгибе. Получены зависимости критической силы от диаметра отверстия, его расположения по длине оболочки и по окружной, относительно плоскости действия изгибающего момента, координате. Полученные данные иллюстрируются графиками и фотографиями испытанных моделей.

Ил. 6. Библиогр.: 8 назв.

УДК 539.3

Термонапряженное состояние около кругового отверстия в предварительно напряженной трансверсально-изотропной сферической оболочке / И. Ю. Хома, Ю. И. Хома // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 88–95.

С использованием метода разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра от координаты толщины решена задача о термонапряженном состоянии около круговой цилиндрической полости в полой трансверсально-изотропной сферической оболочке с начальными напряжениями. Оболочка находится под действием постоянного температурного поля. Поверхность полости теплоизолирована и свободна от механических напряжений.

Табл. 1. Библиогр.: 4 назв.

УДК 539.3

Упрощенная постановка задачи о колебаниях и разогреве прямоугольной призмы при силовом нагружении вибрирующим штампом / О. П. Червинко, И. К. Сенченков, Е. В. Доля // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 96–101.

В рамках связанной задачи термовязкоупругости исследованы возможности приближенной модели контактного взаимодействия слоистой прямоугольной призмы при силовом гармоническом нагружении плоским жестким штампом. Оценка осуществляется путем сравнения численных решений задач в точной и приближенной постановках. Установлено хорошее согласование моделей по максимальной температуре виброразогрева, резонансным частотам и напряженно-деформированному состоянию за исключением окрестностей угловых точек штампа.

Ил. 7. Библиогр.: 9 назв

УДК 539.3

Влияние физической нелинейности на резонансные колебания и диссипативный разогрев трехслойных неупругих прямоугольных пла-

стин / В. Г. Карнаухов, В. М. Сичко, А. С. Карпенюк // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С.102–110.

На основе концепции комплексных характеристик дана постановка сопряженных нелинейных задач о вынужденных резонансных колебаниях и диссипативном нагреве неупругих трехслойных прямоугольных пластин из физически нелинейных материалов, для которых действительная и мнимая части механических комплексных характеристик зависят от амплитуды деформаций. Представлены численно-аналитические методы решения рассматриваемой нелинейной задачи. Проведен анализ влияния физической нелинейности на амплитудно-температурно-частотные характеристики и на коэффициент демпфирования колебаний прямоугольных пластин.

Ил. 2. Библиогр.: 14 назв.

УДК 539.3:534.6

Свободные колебания круговых цилиндрических оболочек переменной толщины в уточненной постановке / А. Я. Григоренко, Т. Л. Ефимова, Л. В. Соколова // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 111–117.

Исследование задачи про свободные колебания цилиндрических оболочек переменной толщины при различных граничных условиях проведено на основе численно-аналитического метода в рамках теории Миндлина. Для изучения данной проблемы предлагается метод сплайн-коллокации совместно с методом дискретной ортогонализации. Представлены результаты расчетов для различных граничных условий на торцах и разных видов изменения толщины.

Табл. 2. Библиогр.: 5 назв.

УДК 539.3

Об одном подходе к исследованию нестационарных колебаний многослойных ортотропных пластин / В. А. Сметанкин, Н. В. Сметанкина // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 118–123.

На основе метода расширения заданной области разработан подход к исследованию колебаний многослойных пластин неканонической формы в плане при импульсном нагружении. Исходная пластина расширяется до вспомогательной прямоугольной шарнирно опертой пластины. Заданные граничные условия моделируются с помощью компенсирующих нагрузок, прилагаемых к прямоугольной пластине и непрерывно распределенных по следу контура исходной пластины. Интенсивности компенсирующих нагрузок определяются из системы интегральных уравнений, алгоритм решения

которой основан на разложении искомым граничных функций в тригонометрические ряды в области вспомогательной пластины и вдоль контура исходной пластины. Динамическое поведение пластин описано в рамках теории первого порядка. Приведен пример расчета колебаний пятислойной пластины.

Ил. 2. Библиогр.: 10 назв.

УДК 539.3

Исследование упругих волновых полей в неограниченной изотропной среде с включением / Л. А. Фильштинский, Е. И. Москаленко // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 124–129.

Для изотропной упругой среды с инородным включением решена задача по определению концентрации напряжений на линии раздела материалов. Предполагается, что включение непрерывно скреплено с матрицей, а из бесконечности излучается плоская монохроматическая волна расширения-сжатия. Приводится аналитический алгоритм решения дифракционной задачи, основанный на специальных интегральных представлениях волновых потенциалов и сведении краевых задач к сингулярным интегральным уравнениям. Даны результаты расчетов.

Ил. 6. Библиогр.: 5 назв.

УДК 539.3

Об асимптотическом подходе при расчете волновых полей в анизотропном слое с полостью / А. О. Ватульян, О. А. Беляк // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 130–134.

Рассмотрена задача о колебаниях анизотропного слоя с цилиндрической полостью под действием нагрузки, приложенной на поверхности слоя. Задача решена в предположении малости характерного размера полости. Представлены асимптотические результаты о распределении волновых полей на границе полости.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 539.3:534.1

Волноводные свойства упругих материалов кубической структуры / В. В. Мелешко, В. А. Моисеенко // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 135–143.

В трехмерной постановке проведено исследование волноводных свойств упругих материалов кубической структуры и сравнение полученных аналитических и численных результатов с известными предельными слу-

чаями. Проведено сопоставление и упорядочивание материалов по волновым свойствам. Приведены расчетные формулы для фазовых скоростей и численные их значения.

Табл. 3. Библиогр.: 4 назв.

УДК 539.3

Коэффициенты интенсивности напряжений для эллиптической межматериальной трещины при действии волны растяжения-сжатия / В. А. Меньшиков // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 144–149.

Численно решена задача теории упругости для эллиптической трещины в плоскости раздела упругих сред под действием нормально падающей волны растяжения-сжатия. На основе найденных значений характеристик напряженно-деформированного состояния вычислены коэффициенты интенсивности напряжений для вершин малой и большой полуосей эллиптической трещины с разным эксцентриситетом. Проанализировано их изменение в зависимости от частоты нагружения.

Ил. 4. Библиогр.: 9 назв.

УДК 539.3

Исследование напряженно-деформированного состояния дискретно подкрепленных продольными ребрами эллипсоидальных оболочек при нестационарных распределенных нагрузках / В. Ф. Мейш, Н. В. Майбородина // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 150–155.

Рассмотрена задача о динамическом поведении дискретно подкрепленных продольными ребрами эллипсоидальных оболочек. Проведены численные исследования динамического поведения продольно подкрепленных эллипсоидальных оболочек при нестационарных нагрузках с их анализом.

Ил. 2. Библиогр.: 10 назв.

УДК 534.21: 537.226.86

Акустоэлектрические волны сдвига в слоисто-периодической структуре «пьезоэлектрик – щель» / В. В. Левченко, Л. П. Зинчук // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43 – С. 156–161.

Изучена возможность существования и получены дисперсионные уравнения для объемных акустоэлектрических сдвиговых волн в регулярно-слоистой структуре «пьезоэлектрик – вакуумный зазор». Численные результаты представлены для среды, образованной чередованием слоев

CdS и щели при различных относительных толщинах слоев.
Ил. 2. Библиогр.: 5 назв.

УДК 539.3

Действие периодической системы штампов на многослойное основание / А. К. Приварников, И. А. Столярчук // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43 – С. 162–167.

Предлагается способ решения плоских контактной задачи о действии периодической системы гладких штампов на упругое многослойное основание. В одном периоде содержится $m \geq 1$ штампов, которые могут перемещаться независимо друг от друга. Неизвестными считаются законы распределения контактных давлений на участках контакта и границы этих участков. Решение контактной задачи сводится к решению линейного сингулярного интегрального уравнения первого рода. Для приближенного решения этого уравнения используется метод конечных сумм. Неизвестные значения искомой функции определяются в системе узлов специальной квадратурной формулы наивысшей алгебраической степени точности. Неизвестные априори участки контакта предлагается определять методом последовательных приближений. Приведены достоверные численные результаты решения конкретной задачи о вдавливании периодической системы одинаковых штампов с плоскими подошвами в двухслойное основание. Обнаружен эффект отставания поверхности основания от штампов.

Табл. 1. Библиогр.: 8 назв.

УДК 539.3

О методах идентификации неоднородных свойств упругих стержней / О. В. Бочарова, А. О. Ватульян // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43 – С. 168–175.

Рассмотрены задачи о восстановлении модуля упругости и плотности в упругом неоднородном стержне при анализе продольных и изгибных колебаний. Для решения задач использован итерационный алгоритм, при котором на каждом шаге решаются интегральные уравнения Фредгольма 1-го и 2-го рода. Начальное приближение находится в классе линейных функций из условия минимума функционала невязки на компактном множестве, на каждом шаге находятся значения смещений в узловых точках стержня для следующей итерации и используются для вычисления правой части интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода и его ядра. Уравнение Фредгольма первого рода решается методом регуляризации А. Н. Тихонова. Эффективность предложенного подхода исследована вычислительными

экспериментами при восстановлении гладких законов неоднородности для небольших (3-5) чисел итераций.

Ил. 4. Библиогр.: 4 назв.

УДК 539.3

Об электромеханических эффектах у вершины трещины между двумя пьезокерамическими материалами / В. Б. Говоруха // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43 – С. 176–182.

На основе модели трещины с зонами предразрушения решена плоская задача электроупругости для биматериальной плоскости с трещиной, когда зоны электрического предразрушения локализованы на продолжении трещины и на них имеет место лишь скачок электрического потенциала. Получено аналитическое решение задачи, а также уравнения для определения длины зоны предразрушения, коэффициентов интенсивности и скорости освобождения энергии. Изучено влияние внешнего электрического поля на основные параметры разрушения.

Ил. 3. Табл. 1. Библиогр.: 7 назв.

УДК 539.3

Задача вязкоупругости для пластинки с жесткими эллиптическими включениями / С. А. Калоеров, Е. В. Авдюшина, М. А. Коломиец // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43 – С. 183–194.

Методом малого параметра задача вязкоупругости для многосвязной анизотропной пластинки с жесткими включениями приведена к рекуррентной последовательности задач теории упругости. Последние решаются с использованием обобщенных комплексных потенциалов. Определение искоемых функций методом наименьших квадратов приведено к решению ряда систем линейных алгебраических уравнений. Для различных материалов описаны результаты численных исследований для пластинки с двумя круговыми или линейными включениями, с различным конечным числом круговых включений. Показано существенное влияние на значения напряжений времени приложения загрузки, а также материала пластинки. Показано совпадение получаемых результатов с известными.

Ил.: 4. Табл.: 3. Библиогр.: 10 назв.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Кит Г. С., Сушко О. П.</i> Напряженное состояние полубесконечного тела при тепловыделении в параллельной к его границе дисковой области	3
<i>Мартыняк Р. М., Чумак К. А.</i> Неполный контакт полупространств при воздействии теплового потока, направленного к материалу с меньшей термической дистортивностью	9
<i>Кирилюк В. С.</i> О перемещениях жесткого эллиптического диска в трансверсально-изотропном пьезоэлектрическом пространстве	16
<i>Бобылев А. А., Сутурин Е. Л.</i> Применение метода установления к решению статических контактных задач с односторонними связями	22
<i>Гачкевич А. Р., Ивасько Р. А., Солодяк М. Т., Шимура С.</i> Методика прогнозирования термомеханического поведения ферритовых элементов электромагнитных устройств при обеспечении их функциональных свойств	28
<i>Гачкевич А. Р., Гачкевич Н. Г., Ирза Е. М., Трищ Б. М.</i> Математическая модель оптимизации режимов низкотемпературного нагрева кусочно-однородных тел вращения	35
<i>Голуб В. П., Павлюк Я. В., Фернати П. В.</i> Нестационарная ползучесть линейных вязкоупругих материалов при одноосном растяжении и сжатии	40
<i>Калоеров С. А., Петренко А. В.</i> Двумерная и плоская задачи электромагнитоупругости для тела с отверстиями и трещинами	50
<i>Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А.</i> Начальная зона предразрушения в конце межфазной трещины с гладким контактом берегов	63
<i>Каминский А. А., Кипнис Л. А., Хазин Г. А., Полищук Т. В.</i> О расчете пластической зоны предразрушения в угловой точке кусочно-однородного тела	69
<i>Сторожук Е. А., Чернышенко И. С., Руденко И. Б.</i> Неупругое деформирование гибкой сферической оболочки в виде эксцентричного кольца	76
<i>Гудрамович В. С., Дзюба П. А., Прокопало Е. Ф.</i> Устойчивость ослабленных круговыми отверстиями гладких цилиндрических оболочек при действии поперечного изгиба	82
<i>Хома И. Ю., Хома Ю. И.</i> Термонапряженное состояние около кругового отверстия в предварительно напряженной трансверсально-изотропной сферической оболочке	88
<i>Червинко О. П., Сенченков И. К., Доля Е. В.</i> Упрощенная постановка задачи о колебаниях и разогреве прямоугольной призмы при силовом нагружении вибрирующим штампом	96
<i>Карнаухов В. Г., Сичко В. М., Карпенюк А. С.</i> Влияние физической нелинейности на резонансные колебания и диссипативный разогрев трехслойных неупругих прямоугольных пластин	102
<i>Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л., Соколова Л. В.</i> Свободные колебания круговых цилиндрических оболочек переменной толщины в уточненной постановке	111
<i>Сметанкин В. А., Сметанкина Н. В.</i> Об одном подходе к исследованию нестационарных колебаний многослойных ортотропных пластин	118
<i>Фильштинский Л. А., Москаленко Е. И.</i> Исследование упругих волновых полей в неограниченной изотропной среде с включением	124

<i>Ватульян А. О., Беляк О. А.</i> Об асимптотическом подходе при расчете волновых полей в анизотропном слое с полостью	130
<i>Мелешко В. В., Моисеенко В. А.</i> Волноводные свойства упругих материалов кубической структуры	135
<i>Меньшиков В. А.</i> Коэффициенты интенсивности напряжений для эллиптической межматериальной трещины при действии волны растяжения-сжатия . . .	144
<i>Мейш В. Ф., Майбородина Н. В.</i> Исследование напряженно-деформированного состояния дискретно подкрепленных продольными ребрами эллипсоидальных оболочек при нестационарных распределенных нагрузках	150
<i>Левченко В. В., Зинчук Л. П.</i> Акустоэлектрические волны сдвига в слоисто-периодической структуре «пьезоэлектрик – щель»	156
<i>Приварников А. К., Столярчук И. А.</i> Действие периодической системы штампов на многослойное основание	162
<i>Бочарова О. В., Ватульян А. О.</i> О методах идентификации неоднородных свойств упругих стержней	168
<i>Говоруха В. Б.</i> Об электромеханических эффектах у вершины трещины между двумя пьезокерамическими материалами	176
<i>Калоеров С. А., Авдюшина Е. В., Коломиец М. А.</i> Задача вязкоупругости для пластинки с жесткими эллиптическими включениями	183
<i>Рефераты</i>	195

ЗМІСТ

<i>Кім Г. С., Сушко О. П. Напружений стан півбезмежного тіла при тепловиділенні в паралельній до його межі дисковій області</i>	3
<i>Мартиняк Р. М., Чумак К. А. Неповний контакт півпросторів за дії теплового потоку, напрямленого до матеріалу з меншою термічною дистортивністю</i>	9
<i>Кирилюк В. С. Про переміщення жорсткого еліптичного диску у трансверсально-ізотропному п'єзоелектричному просторі</i>	16
<i>Бобильов О. О., Сутурін Є. Л. Застосування методу встановлення до розв'язання статичних контактних задач з односторонніми в'язями</i>	22
<i>Гачкевич О. Р., Івасько Р. О., Солодяк М. Т., Шимура С. Методика прогнозування термомеханічної поведінки феритових елементів електромагнітних пристроїв при забезпеченні їх функціональних властивостей</i>	28
<i>Гачкевич О. Р., Гачкевич М. Г., Ірза Є. М., Трищ Б. М. Математична модель оптимізації режимів низькотемпературного нагріву кусково-однорідних тіл обертання</i>	35
<i>Голуб В. П., Павлюк Я. В., Фернати П. В. Нестационарна повзучість лінійних в'язкопружних матеріалів за умов одновісного розтягу та стиску</i>	40
<i>Калоєров С. О., Петренко О. В. Двовимірна та плоска задачі електромагнітопружності для тіл з отворами та тріщинами</i>	50
<i>Камінський А. О., Дудик М. В., Кіпніс Л. А. Початкова зона передруйнування в кінці між фазної тріщини з гладким контактом берегів</i>	63
<i>Камінський А. О., Кіпніс Л. А., Хазін Г. А., Поліщук Т. В. Про розрахунок пластичної зони передруйнування у кутовій точці кусково-однорідного тіла</i>	69
<i>Сторожук Є. А., Чернишенко І. С., Руденко І. Б. Непружне деформування гнучкої сферичної оболонки у вигляді ексцентричного кільця</i>	76
<i>Гудрамович В. С., Дзюба П. А., Прокопало Є. Ф. Стійкість послаблених круговими отворами гладких циліндричних оболонок під дією поперечного згину</i>	82
<i>Хома І. Ю., Хома Ю. І. Термонапружений стан біля кругового отвору в попередньо напруженій трансверсально-ізотропній сферичній оболонці</i>	88
<i>Червінко О. П., Сенченков І. К., Доля О. В. Спрощена постановка задачі про коливання і розігрів прямокутної призми при силовому навантаженні вібруючим штампом</i>	96
<i>Карнаухов В.Г., Січко В.М., Карпенюк А.С Вплив фізичної нелінійності на резонансні коливання і дисипативний розігрів тришарових непружних прямокутних пластин</i>	102
<i>Григоренко О.Я., Єфімова Т.Л., Соколова Л.В. Вільні коливання кругових циліндричних оболонок змінної товщини в уточненій постановці</i>	111
<i>Сметанкін В. О., Сметанкіна Н. В. Про один підхід до дослідження нестационарних коливань багат шарових ортотропних пластин</i>	118
<i>Фильштинський Л.А., Москаленко О.І.. Дослідження пружних хвильових полів у необмеженому ізотропному середовищі зі стороннім включенням</i>	124
<i>Ватульян О. О., Беляк О. О. Про асимптотичний підхід при розрахунку хвильових полів у анізотропному шарі з отвором</i>	130
<i>Мелешко В. В., Моїсеєнко В. О. Хвилеводні властивості пружних матеріалів кубічної структури</i>	135

<i>Меншиков В. О.</i> Коефіцієнти інтенсивності напруг для еліптичної між матеріальної тріщини під дією хвилі розтягу-стиску	144
<i>Мейш В. Ф., Майбородіна Н. В.</i> Дослідження напружено – деформованого стану дискретно підкріплених повздовжніми ребрами еліпсоїдальних оболонок при нестационарних розподілених навантаженнях	150
<i>Левченко В.В., Зінчук Л.П.</i> Акустоелектричні хвилі зсуву в шарувато-періодичній структурі „п’єзоелектрик – щілина”	156
<i>Приварников А. К., Столярчук І. А.</i> Дія періодичної системи штампів на багатшарову основу	162
<i>Бочарова О. В., Ватульян О. О.</i> Про методи ідентифікації неоднорідних властивостей пружних стрижнів	168
<i>Говоруха В. Б.</i> Про електромеханічні ефекти в околі вершини тріщини між двома п’єзокерамічними матеріалами	176
<i>Калоєров С. О., Авдюшина О. В., Коломиєць М. О.</i> Задача в’язкопружності для пластинки з жорсткими еліптичними включеннями	183
<i>Реферати</i>	195

CONTENTS

<i>Kit H. S., Sushko O. P.</i> Stressed state of semi infinite body under heat emission in circular domain parallel to its boundary	3
<i>Martynyak R. M., Chumak K. A.</i> Incomplete interaction of half-spaces at a heat flux directed to a less thermal distortivity material	9
<i>Kirilyuk V.S.</i> On the displacements of a hard elliptical disk in a transversally-isotropic piezoelectric space	16
<i>Bobylov A. A., Sutturin E. L.</i> Application of the stabilization method for solving static contact problems with unilateral constraints	22
<i>Hachkevych O. R., Ivas'ko R. O., Solodyak M. T., Shymura S.</i> An approach to predict thermomechanical behavior of ferrite elements of electromagnetic devices with observing their functionality	28
<i>Hachkevyc O., Gachkevych M., Irza E., Trishch B.</i> Mathematical model of optimization of modes of low-temperature heat of piecewise-homogeneous bodies of rotation	35
<i>Golub V. P., Pavluyk Y. V., Fernati P. V.</i> Nonstationary creep of linear viscoelastic materials under uniaxial tension and compression	40
<i>Kaloerov S. A., Petrenko A. V.</i> Two-dimensional and plane problems for bodies with cavities and cracks	50
<i>Kaminsky A. A., Dudik M. V., Kipnis L. A.</i> The initial prefracture zone at the end of the interfacial crack with smooth contact of lips	63
<i>Kaminskiy A. A., Kipnis L. A., Khazin G. A., Polishchuk T. V.</i> On calculation of plastic prefracture zone at the corner point of piece-homogeneous body	69
<i>Storozhuk E. A., Chernyshenko I. S., Rudenko I. B.</i> Inelastic deforming of a flexible spherical shell by the way of eccentric ring	76
<i>Gydranovich V. S., Dzyuba P. A., Prokopalo E. F.</i> Stability hyposthenic the circular openings of smooth cylindrical shells at the action of cross-bending	82
<i>Khoma I.Yu., Khoma Yu. I.</i> A thermo-stressed state in a vicinity of a circular hole in a prestressed transversely isotropic spherical shell	88
<i>Chervinko O. P., Senchenkov S. K., Dolia E. V.</i> Simplified statement of the problem on vibration and heating of rectangular prism under force loading by vibrating punch	96
<i>Karnaukhov V.G., Sichko V.M., Karpenjuk A.C.</i> An influence of physical nonlinearity on the resonant vibrations and dissipative heating of threelayeres inelastic rectangular plates	102
<i>Grigorenko A. Ya., Efimova T.L., Sokolova L.V.</i> Natural vibration of circular cylindrical shells with variable thickness within refined theory	111
<i>Smetankin V. A., Smetankina N. V.</i> About an approach to research of non-stationary vibrations of multilayer orthotropic plates	118
<i>Fil'shtinskii L.A., Moskalenko E.I.</i> Investigation of elastic wave fields in unbounded isotropic medium with heterogeneous include	124
<i>Vatulyan A.O., Belyak O.A.</i> About asymptotical approach at calculation of wave fields in an anisotropic layer with a cavity	130

<i>Meleshko V. V., Moiseenko V. A.</i> Waveguide properties of elastic materials of cubic structure	135
<i>Menshykov V. A.</i> Stress intensity factors for the interface elliptical crack under tension-compression wave	144
<i>Meish V.F., Mayborodina N.V.</i> Investigation of stress – stain state of longitudinal discretely supported ellipsoidal shells under nonstationary distributed loads	150
<i>Levchenko V.V., Zinchuk L.P.</i> Acoustoelectric shear waves in the regularly-stratified structure of “piezoelectric - vacuum gap”	156
<i>Privarnikov A.K., Stolyarchuk I.A.</i> The deformation of the multilayer foundation by the periodical system of stamps	162
<i>Bocharova O. V., Vatulyan A. O.</i> Inhomogeneous properties identification methods for elastic rods	168
<i>Govorukha V. B.</i> On the electromechanical effects at the tip of an interface crack between two piezoelectric materials	176
<i>Kaloerov S. A., Avdyushyna E. V., Kolomyiets M. A.</i> <i>The problem of viscoelasticity for the plate with rigid elliptic inclusions</i>	183
<i>Abstracts</i>	195