

ISSN 0136-4545

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

**Журнал
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ
МЕХАНИКИ**

№ 2-3 (67-68)

2019

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: В.И. Сторожев

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА: С.А. Калоеров

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ: Пачева М.Н.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Анциферов А.В.

Белоусов В.В.

Болнокин В.Е.

Болонов Н.И.

Ватульян А.О.

Вовк Л.П.

Глазунов В.А.

Глухов А.А.

Гольцев А.С.

Горр Г.В.

Губанов В.В.

Дрибан В.А.

Ковалев А.М.

Коносевиц Б.И.

Левин В.М.

Муцанов В.Ф.

Недопекин Ф.В.

Петраков А.А.

Судаков С.Н.

Улитин Г.М.

Шалдырван В.А.

Адрес редакции:

83001 Донецк, ул. Университетская, 24
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
Тел. 302 92 71
E-mail: jtam_donnu@mail.ru

Технический редактор: Пачева М.Н.

Утверждено к печати ученым советом
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016г.

№ 2-3 (67-68) / 2019

Основан в 1970г.

ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Механика твердого тела

- Данилюк Д.А.* Комплексный подход в истолковании решения
Д.Н. Горячева 3

Механика деформируемого твердого тела

- Калоеров С.А., Занько А.И.* Изгиб многосвязной анизотропной плиты
под действием поперечных сил..... 19

- Сторожев С.В., Номбре С.Б., Прийменко С.А.* Нечетко-множественные
оценки скоростей волн кручения в тонкостенных стержнях на основе
уточненных теорий..... 32

- Глушанков Е.С.* Определение термоэлектромагнитоупругого состояния
многосвязной пьезопластинки в случае неоднородного распределения
температуры на ее контурах..... 54

Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика

- Васютина В.В., Голубев Ф.М., Нестерова Л.И.* Особенности деформа-
ционных процессов в массиве при консервации шахт..... 65

- Канин В.А., Пащенко А.В.* Многоцелевой геоклей для закрепления не-
устойчивых пород и гидроизоляции горного массива..... 75

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 531.38; 531.39

©2019. Д.А. Данилюк

КОМПЛЕКСНЫЙ ПОДХОД
В ИСТОЛКОВАНИИ РЕШЕНИЯ Д.Н. ГОРЯЧЕВА

В статье на основе комплексного подхода исследовано движение тяжелого твердого тела в решении Д.Н. Горячева, полученном для динамически симметричного твердого тела. С помощью модифицированного метода Пуансо изучены подвижный и неподвижный годографы вектора угловой скорости и вектора, коллинеарного вектору угловой скорости. Найдены углы Эйлера в исследуемом решении, указаны зависимости основных переменных задачи от эллиптических функций Якоби.

Ключевые слова: решение Д.Н. Горячева, комплексный подход в истолковании движения, углы Эйлера.

Введение. Основы геометрических подходов в динамике твердого тела описаны в классической статье Л. Пуансо [1]. Свой подход он продемонстрировал в исследовании движения тела в решении Л. Эйлера, представив его посредством качения без скольжения эллипсоида инерции по неподвижной в пространстве плоскости. Л. Пуансо доказал, что любое движение тела, имеющего неподвижную точку, можно истолковать качением без скольжения подвижного аксоида угловой скорости по неподвижному аксоиду. Большой вклад в развитие геометрических методов динамики твердого тела внесли В. Гесс, И. Мак-Куллаг, Г. Дарбу, Ж. Кениг, К. Якоби, Ж. Сильвестр, Н.Б. Делоне, Н.Е. Жуковский и другие. Результаты этих ученых в полной мере отражены в монографии Г.К. Сушлова [2] и книге [3]. Например, И. Мак-Куллаг установил, что при движении свободного твердого тела гирационный эллипсоид, соответствующий точке опоры, проходит во все время движения через точку пространства, лежащую на неизменном главном моменте количества движения. Ж. Сильвестр и К. Якоби изучали свойства вращений Л. Пуансо. Н.Е. Жуковский предлагал метод истолкования движения на основе качения со скольжением аксоидов вектора момента количества движения.

Универсальность метода Л. Пуансо проявилась после получения П.В. Харламовым [4] уравнений неподвижного годографа вектора угловой скорости, поскольку они содержат компоненты вектора угловой скорости и вектора оси симметрии действующих на тело силовых полей. К настоящему времени во всех решениях уравнений Эйлера–Пуассона исследовано движение тела методом годографов (см. обзоры [5, 6]).

Метод Пуансо получил дальнейшее развитие: в [7] предложен модифицированный метод Пуансо, позволяющий представить движение тела, имеющего неподвижную точку, качением без скольжения подвижного годографа вектора, коллинеарного вектору угловой скорости, по неподвижному годографу этого вектора. Этот метод позволяет использовать два подхода в истолковании движения тела, имеющего неподвижную точку. Первый подход основан на выборе подвижного или неподвижного годографа указанного выше вектора в некоторой плоскости в подвижной или неподвижной системе координат. С его помощью показано, что движение тела в решениях В.А. Стеклова [8] и А.И. Докшевича [9] можно представить качением без скольжения поверхностей, направляющие линии которых являются эллипсами [7]. Второй подход заключается в том, что конец вектора, коллинеарного вектору угловой скорости, выбирается на эллипсоиде инерции для неподвижной точки. Он использован в [10] для анализа некоторых частных решений уравнений динамики.

В статье [11] описывается комплексный подход в истолковании движения тела с неподвижной точкой. Он обоснован тем, что на практике необходимо иметь наибольший объем информации о свойствах движения тела (свойства углов Эйлера и параметров Родрига–Гамильтона, свойства годографов угловой скорости, свойства движения эллипсоида инерции и другие). Применение комплексного подхода использовано в статье [12] для частных случаев [13, 14] решения С.В. Ковалевской [15], в статье [16] для частного случая [17] решения Чаплыгина [18]. В данной статье исследовано решение Д.Н. Горячева [19].

1. Истолкование движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Рассмотрим уравнения движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, в векторном виде:

$$A\dot{\omega} = A\omega \times \omega + s(\mathbf{e} \times \nu), \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega. \quad (1)$$

Эти уравнения допускают три первых интеграла

$$\nu \cdot \nu = 1, \quad A\omega \cdot \nu = k, \quad A\omega \cdot \omega - 2s(\mathbf{e} \cdot \nu) = 2E, \quad (2)$$

где k и E – произвольные постоянные. В (1), (2) обозначено: $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости; $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, указывающий направление силы тяжести; s – произведение веса тела и расстояния от неподвижной точки O до центра тяжести C_i ; $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3) = \frac{OC}{|OC|}$; A – тензор инерции, построенный в точке O ; точка над переменными ω и ν обозначает дифференцирование по времени t .

Пусть в результате интегрирования уравнений (1) получены функции

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^3 \omega_i(t) \mathfrak{e}_i, \quad \nu(t) = \sum_{i=1}^3 \nu_i(t) \mathfrak{e}_i, \quad (3)$$

где $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ – единичные векторы подвижной системы $Oxyz$. На основании зависимостей (3) необходимо установить свойства движений тела, то есть получить истолкование этого движения.

Рассмотрим первый метод, который предложен Л. Эйлером. Он заключается в нахождении углов φ, ψ, θ , определяющих положение тела в пространстве. В силу известных зависимостей [20]

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, & \omega_2(t) &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_3(t) &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \varphi;\end{aligned}\tag{4}$$

$$\nu_1(t) = \sin \theta \sin \varphi, \quad \nu_2(t) = \sin \theta \cos \varphi, \quad \nu_3(t) = \cos \theta,\tag{5}$$

углы $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$ можно найти по формулам:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \operatorname{arctg} \frac{\boldsymbol{\nu}(t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1}{\boldsymbol{\nu}(t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2}, & \theta(t) &= \arccos(\boldsymbol{\nu}(t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3), \\ \psi(t) &= \int_{t_0}^t \frac{(\boldsymbol{\omega}(\tau) \times \boldsymbol{\varepsilon}_3) \cdot (\boldsymbol{\nu}(\tau) \times \boldsymbol{\varepsilon}_3)}{(\boldsymbol{\nu}(\tau) \times \boldsymbol{\varepsilon}_3)^2} d\tau.\end{aligned}\tag{6}$$

На основании соотношений (6) сформировался метод апекса: исследование свойств характерной оси в теле (например, оси симметрии в случае Ж.Л. Лагранжа [2]).

Второй метод истолкования движения тела применяется в задачах определения ориентации твердого тела в неподвижном пространстве. Для его применения выбираются параметры Родрига–Гамильтона [20, 21], которые выражаются через углы Эйлера (6):

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2}, & \lambda_1 &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2}, \\ \lambda_2 &= \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2}, & \lambda_3 &= \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2}.\end{aligned}\tag{7}$$

Укажем зависимости углов Эйлера через параметры $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, t$ [21]:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2}{\lambda_0 \lambda_1 + \lambda_2 \lambda_3}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\lambda_0 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3}{\lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2 \lambda_3}, \quad \cos \theta = \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2.\tag{8}$$

К третьему методу кинематического истолкования отнесен метод годографов Пуансо [1] с использованием уравнений П.В. Харламова [4]. Для компонент вектора $\boldsymbol{\omega}$ в неподвижной системе координат $O\xi\eta\zeta$ с единичными векторами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ имеем соотношения [4]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}(t) &= \omega_\xi(t) \mathbf{i}_1 + \omega_\eta(t) \mathbf{i}_2 + \omega_\zeta(t) \mathbf{i}_3, \\ \omega_\xi(t) &= \omega_\rho(t) \cos \alpha(t), \quad \omega_\eta(t) = \omega_\rho(t) \sin \alpha(t), \quad \omega_\zeta(t) = \sum_{i=1}^3 \omega_i(t) \nu_i(t), \\ \omega_\rho^2(t) &= \sum_{i=1}^3 \omega_i^2(t) - \omega_\zeta^2(t), \quad \alpha(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{\omega_\rho^2(\tau)} [\dot{\boldsymbol{\omega}}(\tau) \cdot (\boldsymbol{\nu}(\tau) \times \boldsymbol{\omega}(\tau))] d\tau,\end{aligned}\tag{9}$$

где $\dot{\omega}$ – производная от $\omega(t)$ по времени t . В статье [7] получена более простая формула

$$\operatorname{tg}(\alpha(t) - \psi(t)) = \delta \frac{(\boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\nu}(t)) \cdot (\boldsymbol{\nu}(t) \times \boldsymbol{\varepsilon}_3)}{\boldsymbol{\varepsilon}_3 \cdot (\boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\nu}(t))}, \quad (10)$$

где $\delta = 0$, если постоянен угол θ между векторами $\boldsymbol{\nu}(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_3$, и $\delta = 1$, если $\theta \neq \text{const}$. Поскольку для $\psi(t)$ можно использовать формулу из (6), то для $\alpha(t)$ из (10) получим выражение (полагаем $\delta = 1$)

$$\alpha(t) = \alpha_0^\bullet + \int_{t_0}^t \frac{(\boldsymbol{\omega}(\tau) \times \boldsymbol{\varepsilon}_3) \cdot (\boldsymbol{\nu}(\tau) \times \boldsymbol{\varepsilon}_3)}{(\boldsymbol{\nu}(\tau) \times \boldsymbol{\varepsilon}_3)^2} d\tau + \operatorname{arctg} \frac{(\boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\nu}(t)) \cdot (\boldsymbol{\nu}(t) \times \boldsymbol{\varepsilon}_3)}{\boldsymbol{\varepsilon}_3 \cdot (\boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\nu}(t))}. \quad (11)$$

В комплексном подходе истолкования движения тела целесообразно применять и соотношения [11]

$$\begin{aligned} \omega_\xi(t) &= \dot{\psi}(t) + \dot{\varphi}(t) \cos \theta(t), & \omega_\rho^2(t) &= \dot{\theta}^2(t) + \dot{\varphi}^2(t) \sin^2 \theta(t), \\ \alpha(t) &= \psi(t) - \operatorname{arctg} \left(\frac{\dot{\varphi}(t) \sin \theta(t)}{\dot{\theta}(t)} \right). \end{aligned}$$

Запишем уравнения подвижного и неподвижного годографов угловой скорости из (3) и (9)

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i(t) \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_\xi(t) \mathbf{i}_1 + \omega_\eta(t) \mathbf{i}_2 + \omega_\zeta(t) \mathbf{i}_3. \quad (12)$$

Остановимся на модифицированном методе Пуансо [7]. Введем в рассмотрение вектор

$$\mathbf{b}(t) = b(t) \boldsymbol{\omega}(t), \quad (13)$$

где $b(t)$ – дифференцируемая функция. На основании вытекающего из (13) условия $d\mathbf{b}(t)/dt = d'\mathbf{b}(t)/dt$ получим, что подвижный и неподвижный годографы вектора $\mathbf{b}(t)$ имеют общую касательную, а длины дуг, описанные за одинаковый промежуток времени концом вектора $\mathbf{b}(t)$ на подвижном и неподвижном годографах, равны. Следовательно, движение тела с неподвижной точкой может быть представлено качением без скольжения подвижного годографа вектора $\mathbf{b}(t)$ по неподвижному годографу этого вектора. Необходимо при таком истолковании учитывать, что вращение тела вокруг вектора $\mathbf{b}(t)$ происходит с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Этот метод позволил получить дополнительные свойства в частных решениях уравнений Эйлера–Пуассона [7, 10, 12]. Он может быть применен в следующих подходах.

Первый подход. Пусть в уравнениях (12) $\omega_\zeta(t) \neq 0$. Следуя [7] выберем в (13) функцию $b(t)$ в виде

$$b(t) = \frac{1}{\omega_\zeta(t)}. \quad (14)$$

В силу (12), (13), (14) неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ имеет представление

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\omega_\xi(t)}{\omega_\zeta(t)} \mathbf{i}_1 + \frac{\omega_\eta(t)}{\omega_\zeta(t)} \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3. \quad (15)$$

Подвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ найдем из первой формулы системы (12), используя равенство (14):

$$\mathbf{b}(t) = \frac{1}{\omega_\zeta(t)} \sum_{j=1}^3 \omega_j(t) \mathbf{e}_j. \quad (16)$$

Движение тела воспроизводим качением без скольжения аксоида с направляющей (16) по аксоиду с направляющей (15). В силу (15) неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ является плоской кривой. Этот подход позволяет получить картину движения тела, близкую по наглядности к картине движения, указанной Л. Пуансо. В работах [7, 10] показано, что в решениях А.И. Докшевича [9] и В.А. Стеклова [8] движение тела можно представить качением без скольжения двух плоских кривых (эллипсов).

Для изложения *второго подхода* положим, что конец вектора $\mathbf{b}(t)$ принадлежит эллипсоиду инерции в неподвижной точке. Обозначим через A_1, A_2, A_3 главные моменты инерции тела. Тогда уравнение эллипсоида инерции таково

$$A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 = \sigma_0^2, \quad (17)$$

где x, y, z – координаты точек, принадлежащих эллипсоиду, σ_0^2 – постоянная. Потребуем, чтобы конец вектора $\mathbf{b}(t)$ из формулы (13) принадлежал эллипсоиду (17). Для нахождения функции $b(t)$ подставим в (17) вместо x, y, z величины $b_i = b(t)\omega_i(t)$. Тогда [10]

$$b(t) = \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{A_1 \omega_1^2(t) + A_2 \omega_2^2(t) + A_3 \omega_3^2(t)}}. \quad (18)$$

В силу (12) подвижный и неподвижный годографы вектора $\mathbf{b}(t)$ таковы:

$$\mathbf{b}_\Pi(t) = b(t)(\omega_1(t) \mathbf{e}_1 + \omega_2(t) \mathbf{e}_2 + \omega_3(t) \mathbf{e}_3), \quad (19)$$

$$\mathbf{b}_H(t) = b(t)(\omega_\rho(t) \cos \alpha(t) \mathbf{i}_1 + \omega_\rho(t) \sin \alpha(t) \mathbf{i}_2 + \omega_\xi(t) \mathbf{i}_3). \quad (20)$$

Функция $b(t)$ определена значением (18).

Движение тела будем воспроизводить качением без скольжения поверхностей с направляющими (19), (20).

Если истолкование движения тела проводится для решений уравнений (1), то для упрощения формулы (18) можно использовать интеграл энергии из (2). Тогда вместо (18) целесообразно применить формулу

$$b(t) = \frac{\varkappa_0^2}{\sqrt{E + s(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\nu}(t))}} \quad (\varkappa_0^2 - \text{const}). \quad (21)$$

Таким образом, в комплексном истолковании [11] предлагается использовать указанные выше методы.

2. Вид решения Д.Н. Горячева. Д.Н. Горячев [19] получил новое решение Эйлера–Пуассона в случае, когда главные моменты инерции тела удовлетворяют условиям

$$A_1 = A_2 = 4A_3, \quad (22)$$

а центр тяжести принадлежит главной оси эллипсоида инерции: $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$. Позже С.А. Чаплыгин обобщил решение Д.Н. Горячева [18] и показал, что при нулевой постоянной интеграла площадей ($k = 0$) имеет место дополнительный первый интеграл уравнений Эйлера–Пуассона. Исследованию решения Д.Н. Горячева–С.А. Чаплыгина посвящены многочисленные работы (см. обзор [5]).

Положим в уравнениях (1), (2) $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$, а главные моменты подчиним условиям (22). Тогда получим в безразмерных переменных [17]

$$p = \sqrt{\frac{A_3}{s}} \omega_1, \quad q = \sqrt{\frac{A_3}{s}} \omega_2, \quad r = \sqrt{\frac{A_3}{s}} \omega_3, \quad \tau = \sqrt{\frac{s}{A_3}} t \quad (23)$$

следующие уравнения

$$4\dot{p} = 3qr, \quad 4\dot{q} = -3rp - \nu_1, \quad \dot{r} = \nu_2, \quad (24)$$

$$\dot{\nu}_1 = r\nu_2 - q\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = p\nu_3 - r\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = q\nu_1 - p\nu_2, \quad (25)$$

где точкой обозначена производная по τ .

Уравнения (24), (25) имеют первые интегралы

$$\begin{aligned} \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad 4(p\nu_1 + q\nu_2) + r\nu_3 = 0, \\ 2p^2 + 2q^2 + \frac{1}{2}r^2 - \nu_1 = E, \quad r(p^2 + q^2) + p\nu_3 = c_0, \end{aligned} \quad (26)$$

где E, c_0 – произвольные постоянные.

Сведение задачи к квадратурам выполнил С.А. Чаплыгин [18]. Во втором соотношении постоянная интеграла площадей положена равной нулю, так как интеграл С.А. Чаплыгина (четвертое равенство из (26)) существует только в этом случае.

Для наглядности результатов рассмотрим частный случай решения Д.Н. Горячева. Положим в равенствах (26) $c_0 = 0$, $E = \sqrt{1 + 4b^3}$. Тогда уравнения (24), (25) допускают решение Д.Н. Горячева [19], которое запишем в обозначениях [22]:

$$q^2 = p^{2/3}(b - p^{4/3}), \quad (27)$$

$$r^2 = \frac{4p^{2/3}}{b} (\sqrt{1 + 4b^3} p^{2/3} - 2b^2), \quad (28)$$

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \frac{1}{b}(2\sqrt{1+4b^3}p^{4/3} - 2b^2p^{2/3} - b\sqrt{1+4b^3}), \\ \nu_2 &= \frac{2}{b}(\sqrt{1+4b^3}p^{2/3} - b^2)\sqrt{b-p^{4/3}},\end{aligned}\quad (29)$$

$$\begin{aligned}\nu_3 &= -2\sqrt{b}\sqrt{\sqrt{1+4b^3}p^{2/3} - 2b^2}, \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{3p^{2/3}}{2\sqrt{b}}\sqrt{(b-p^{4/3})(p^{2/3}\sqrt{1+4b^3} - 2b^2)},\end{aligned}\quad (30)$$

где $b > 0$ (b – постоянный параметр). Введем новую переменную σ : $p = \sigma^{3/2}$. Решение (27)–(30) примет вид [23]

$$p = \sigma^{3/2}, \quad (31)$$

$$q = \sqrt{\sigma(\sigma_1^2 - \sigma^2)}, \quad r = 2\sigma_1\sqrt{2\sigma_2^{-1}\sigma(\sigma - \sigma_2)}, \quad (32)$$

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \frac{2\sigma_1^2}{\sigma_2}(2\sigma^2 - \sigma_2\sigma - \sigma_1^2), \\ \nu_2 &= \frac{2\sigma_1^2}{\sigma_2}(2\sigma - \sigma_2)\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma^2}, \\ \nu_3 &= -4\sigma_1^3\sqrt{\frac{\sigma - \sigma_2}{2\sigma_2}},\end{aligned}\quad (33)$$

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = \sigma_1\sqrt{\frac{2\sigma}{\sigma_2}(\sigma_1^2 - \sigma^2)(\sigma - \sigma_2)}, \quad (34)$$

где

$$\sigma_1 = \sqrt{b}, \quad \sigma_2 = \frac{2b^2}{\sqrt{1+4b^3}}. \quad (35)$$

Переменная σ изменяется на отрезке

$$\sigma_2 \leq \sigma \leq \sigma_1, \quad (36)$$

который получен из требования действительности решения (31)–(34).

3. Истолкование движения тела в решении (27)–(30) методом Пуансо. Подвижный годограф вектора угловой скорости определяется соотношениями (27), (28) из статьи [22]:

$$p^2 + q^2 = bp^{2/3}, \quad r^2 = \frac{4}{b}p^{2/3}(\sqrt{1+4b^3}p^{2/3} - 2b^2). \quad (37)$$

Введем обозначения

$$p_1 = b^{3/4}, \quad p_2 = \frac{2\sqrt{2}b^3}{(1+4b^3)^{3/4}}. \quad (38)$$

В силу (38) уравнения (37) примут вид

$$q^2 = p^{2/3}(p_1^{4/3} - p^{4/3}), \quad r^2 = \frac{4\sqrt{1+4b^3}}{b}p^{2/3}(p^{2/3} - p_2^{2/3}). \quad (39)$$

Из (39) следует, что переменная p изменяется в двух промежутках, из которых в силу симметрии рассмотрим положительный ($p > 0$):

$$p_2 \leq p \leq p_1. \quad (40)$$

Очевидно, что $q^2(p_1) = 0$, $r^2(p_2) = 0$. Приведем уравнения к полиномиальному виду

$$(p^2 + q^2)^3 = p_1^4 p^2, \quad (41)$$

$$\frac{b^3}{4\sqrt{1+4b^3}}r^2 = (p^2 + q^2)(p^2 + q^2 - p_1^{4/3} p_2^{2/3}). \quad (42)$$

При $r = \text{const} \neq 0$ из уравнения (42) следует уравнение кривой Персея.

Подвижный годограф вектора угловой скорости – линия пересечения поверхности шестого порядка (41) и поверхности четвертого порядка (42). Для исследования кривой (41) введем полярные координаты: $p = \rho \cos \gamma$, $q = \rho \sin \gamma$. Тогда из равенства (41) получим

$$\rho^2(\gamma) = p_1^2 \cos \gamma. \quad (43)$$

Поверхность (42) является поверхностью вращения, меридиан которой описывается уравнением

$$\frac{b^3}{4\sqrt{1+4b^3}}r^2(\rho) = \rho^2\left(\rho^2 - \frac{b^3}{\sqrt{1+4b^3}}\right). \quad (44)$$

Основные свойства подвижного годографа таковы: он состоит из двух замкнутых кривых (здесь рассматривается только часть, которая соответствует отрезку (40), плоскости $q = 0$ и $r = 0$ являются плоскостями симметрии). Движение конца вектора угловой скорости по подвижному годографу периодическое с периодом

$$T = \sqrt{\sigma_2} \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{\sqrt{2\sigma(\sigma_1^2 - \sigma^2)(\sigma - \sigma_2)}}. \quad (45)$$

Запишем уравнения неподвижного годографа для решения (31) – (35) [23]:

$$\omega_\zeta = -\frac{6\sigma_1^4}{\sigma_2}(\sigma - \sigma_2)\sqrt{\sigma}, \quad (46)$$

$$\omega_\rho^2 = \frac{36\sigma_1^8}{\sigma_2^2}\sigma(\sigma - \sigma_3)(\sigma_4 - \sigma), \quad (47)$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{\sigma_2}}{3\sigma_1^2} \int_{\sigma_2}^{\sigma} \frac{(\sigma - \sigma_5)(\sigma_6 + \sigma)d\sigma}{(\sigma_4 - \sigma)(\sigma - \sigma_3)\sqrt{2(\sigma_1^2 - \sigma^2)(\sigma - \sigma_2)}}, \quad (48)$$

где

$$\sigma_{3,4} = \frac{\sigma_2}{18\sigma_1^6} [2(1 + 9\sigma_1^6) \pm \sqrt{4 + 9\sigma_1^4}], \quad \sigma_{5,6} = \frac{\sigma_2(\sigma_1^3\sqrt{3} \mp \sqrt{3\sigma_1^6 + 1})}{2\sigma_1^3\sqrt{3}}. \quad (49)$$

Используя соотношение

$$\frac{d\omega_\zeta}{d\omega_\rho} = \frac{(\sigma_2 - 3\sigma)\sqrt{(\sigma_3 - \sigma)(\sigma - \sigma_4)}}{3(\sigma - \sigma_8)(\sigma_7 - \sigma)},$$

где

$$\sigma_{7,8} = \frac{\sigma_2}{54\sigma_1^4} \left[4(1 + 9\sigma_1^6) \pm \sqrt{324\sigma_1^{12} + 99\sigma_1^6 + 16} \right],$$

можно построить меридиан поверхности вращения, параметрические уравнения которого приведены в (46), (47). На этой поверхности лежит неподвижный годограф.

Отметим, что при изменении σ в промежутке (36) производные $\frac{d\omega_\zeta}{d\omega_\rho}$, $\frac{d^2\omega_\zeta}{d\omega_\rho^2}$ отрицательны.

Для изучения проекции неподвижного годографа на горизонтальную плоскость проследим за изменением в этой плоскости функций ω_ρ и α в зависимости от σ . При изменении σ от σ_2 до σ_1 ω_ρ увеличивается от $\omega_\rho(\sigma_2)$ до $\omega_\rho(\sigma_1)$, то есть проекция расположена между окружностями радиусов $\omega_\rho(\sigma_2)$, $\omega_\rho(\sigma_1)$.

Если через θ_* обозначить угол между направлением радиуса ω_ρ и касательной к проекции в данной точке, отсчитываемый против хода часовой стрелки, то $\operatorname{tg} \theta_* = \frac{\omega_\rho d\alpha}{d\omega_\rho}$. Подставив сюда (47), (48), придем к выводу, что проекция нигде в промежутке (36) не встречается с окружностями $\omega_\rho = \operatorname{const}$ под прямым углом, а к граничным окружностям она подходит, касаясь их [23].

Выберем начальное значение α равным нулю: при $\sigma = \sigma_2$ $\alpha = 0$. С течением времени σ возрастает. Так как при $b > 0$ корень σ_5 заключен между граничными значениями σ_2 , σ_1 , то в начальный момент разность $\sigma - \sigma_5$ отрицательна. Поэтому угол α убывает до тех пор, пока переменная σ не достигнет значения σ_5 . После этого $\frac{d\alpha}{dt} > 0$ и α возрастает до значения α_0 , которое получаем из (48), когда верхний предел равен σ_1 . На основе численного интегрирования в статье [23] показано: если параметр b удовлетворяет неравенству $0 < b < b^* = 0.653182$, то $\alpha_0 < 0$ при $b = b^*$, $\alpha_0 = 0$ и при $b > b^*$ $\alpha_0 > 0$. Таким образом, движение этого гироскопа при $b = b^*$ будет периодическим, а при $b \neq b^*$ – условно-периодическим.

Отметим, что функция $\omega_\rho^2(\sigma)$ не обращается в нуль на отрезке $[\sigma_2, \sigma_1]$, так как функция $(\sigma - \sigma_3)(\sigma_4 - \sigma)$ относительно переменной σ принимает положительные значения при $\sigma \in [\sigma_2, \sigma_1]$.

4. Модифицированный метод Пуансо. Рассмотрим первый подход модифицированного метода. Запишем векторное уравнение подвижного годографа. В силу (31), (32) получим

$$\boldsymbol{\omega}_{\Pi} = \sigma_2^{3/2} \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \sqrt{\sigma(\sigma_1^2 - \sigma^2)} \boldsymbol{\varepsilon}_2 + c\sqrt{\sigma(\sigma - \sigma_2)} \boldsymbol{\varepsilon}_3, \quad (50)$$

где

$$c = 2\sigma_1 \sqrt{\frac{2}{\sigma_2}}. \quad (51)$$

Вектор $\mathbf{b}(t) = b(t)\boldsymbol{\omega}$ выберем таким образом

$$\mathbf{b}(t) = \frac{1}{\sigma^{3/2}}. \quad (52)$$

Тогда из (50), (52) следует

$$\mathbf{b}_{\Pi}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \frac{1}{\sigma} \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma^2} \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \frac{c}{\sigma} \sqrt{\sigma - \sigma_2} \boldsymbol{\varepsilon}_3, \quad (53)$$

то есть компоненты b_1, b_2, b_3 вектора (53) имеют вид

$$b_1 = 1, \quad b_2 = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma^2}, \quad b_3 = \frac{c}{\sigma} \sqrt{\sigma - \sigma_2}. \quad (54)$$

Подвижный годограф $\mathbf{b}_{\Pi}(t)$ с координатами (54) является плоской кривой, лежащей в плоскости $b_1 = 1$. Уравнение этой кривой определяется параметрическими уравнениями из (54) (второе и третье уравнения). Исключим из них переменную σ :

$$[\sigma_1^2 b_3^2 + c^2 \sigma_2 (1 + b_2^2)]^2 = \sigma_1^2 c^4 (1 + b_2^2). \quad (55)$$

Уравнение (55) в силу равенства (51) приведем к уравнению

$$(b_3^2 + 8b_2^2)^2 = \frac{64(\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2)}{\sigma_2^2} b_2^2 - 16b_3^2 + \frac{64(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)}{\sigma_2^2}, \quad (56)$$

которое с помощью замены $b_2 = \frac{b'_2}{2\sqrt{2}}$, где b'_2 – новая переменная, преобразуется к уравнению четвертого порядка, описывающему овалы Кассини.

Если сравнить подвижный годограф вектора угловой скорости (уравнения (41), (42)) с годографом вектора $\mathbf{b}(t)$ (53), то можно сделать вывод о том, что годограф (53) имеет более простой аналитический вид (например, этот годограф лежит в плоскости). Для численного исследования (53) можно использовать параметрический метод, положив $b_2 = \operatorname{sh}u$, где u – новая переменная. С учетом этого равенства из соотношений (54) получим

$$b_3^2 = \frac{c^2}{\sigma_1} \operatorname{ch}u \cdot (\sigma_1 - \sigma_2 \operatorname{ch}u). \quad (57)$$

Рассмотрим неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$:

$$\mathbf{b}_H(t) = \frac{1}{\sigma^{3/2}}(\omega_\rho \cos \alpha \cdot \mathbf{i}_1 + \omega_\rho \sin \alpha \cdot \mathbf{i}_2 + \omega_\zeta \cdot \mathbf{i}_3). \quad (58)$$

На основании (46), (47) из (58) находим компоненты вектора $\mathbf{b}(t)$ в неподвижной системе координат:

$$\begin{aligned} b_\xi &= \frac{6\sigma_1^3}{\sigma_2\sigma} \sqrt{(\sigma - \sigma_3)(\sigma_4 - \sigma)} \cos \alpha, \\ b_\eta &= \frac{6\sigma_1^3}{\sigma_2\sigma} \sqrt{(\sigma - \sigma_3)(\sigma_4 - \sigma)} \sin \alpha, \\ b_\zeta &= -\frac{6\sigma_1^4(\sigma - \sigma_2)}{\sigma_2\sigma}, \end{aligned} \quad (59)$$

где $\alpha(\sigma)$ удовлетворяет уравнению (48).

Изучим меридиан поверхности вращения, на которой лежит конец вектора $\mathbf{b}(t)$. Исключая переменную σ из соотношений (59), получим

$$\frac{b_\rho^2}{a_0^2} + \frac{(b_\zeta + c_0)^2}{b_0^2} = 1, \quad (60)$$

где $b_\rho^2 = b_\xi^2 + b_\eta^2$ и

$$a_0 = \frac{4}{\sigma_2} \sqrt{\frac{4 + 9\sigma_1^6}{7 + 36\sigma_1^6}}, \quad b_0 = \frac{12\sigma_1^4}{\sigma_2(7 + 36\sigma_1^6)} \sqrt{4 + 9\sigma_1^6}, \quad c_0 = \frac{18\sigma_1^4}{\sigma_2(7 + 36\sigma_1^6)}. \quad (61)$$

Таким образом, меридианом является эллипс (60) с полуосями a_0 , b_0 из (61); центр эллипса находится на вертикальной оси на расстоянии c_0 от неподвижной точки. Свойства угла α сохраняются, то есть они являются такими же, как в случае истолкования движения гироскопа Горячева прямым методом Пуансо. Полученный здесь результат показывает, что кинематическое истолкование движения тела в решении Д.Н. Горячева с помощью модифицированного метода Пуансо имеет более наглядный вид. Действительно, качение без скольжения аксоида с направляющей линией (53), который является плоской кривой класса кривой Персея, по аксоиду с направляющей (58), который принадлежит эллипсоиду (60), дает достаточно наглядное представление о движении гироскопа Горячева. В прямом методе Пуансо подвижный годограф вектора угловой скорости – линия пересечения алгебраических поверхностей (41), (42), имеющих шестой и четвертый порядок, а неподвижный годограф вектора угловой скорости принадлежит поверхности (44), имеющей более высокий порядок.

5. Решение Д.Н. Горячева в эллиптических функциях времени. Углы Эйлера. Сведение задачи интегрирования уравнения (34) в функциях Якоби выполнено в книге [5]. Запишем основные переменные, используя обозначения [5]:

$$p = b^{3/4} \sqrt{8s_1^3} \frac{du^3 v}{(1 + s_1^2 du^4 v)^{3/2}}, \quad (62)$$

Д.А. Данилюк

$$q = b^{3/4} \sqrt{2s_1} \frac{1 - s_1^2 \operatorname{du}^4 v \operatorname{du} v}{(1 + s_1^2 \operatorname{du}^4 v)^{3/2}}, \quad (63)$$

$$r = -\frac{4ks_1}{1 + s_1^2 \operatorname{du}^4 v} \operatorname{su} v \operatorname{cu} v \operatorname{du} v, \quad (64)$$

$$\nu_3 = b^{3/4} \sqrt{8s_1} \frac{k \operatorname{sn} v \operatorname{cu} v}{(1 + s_1^2 \operatorname{dn}^4 v)^{1/2}}, \quad (65)$$

$$\nu_1 = \frac{1}{(1 + s_1^2 \operatorname{du}^4 v)^2} [(6s_1^2 \operatorname{du}^4 v - 1 - s_1^4 \operatorname{du}^8 v) \sqrt{1 + 4b^3} - 4b^{3/2} s_1 \operatorname{du}^2 v - 4s_1^3 b^{3/2} \operatorname{du}^6 v], \quad (66)$$

$$\nu_2 = \frac{2}{(1 + s_1^2 \operatorname{du}^4 v)^2} [2s_1(1 - s_1^2 \operatorname{du}^4 v) \operatorname{du}^2 v \sqrt{1 + 4b^3} - b^{3/2}(1 - s_1^4 \operatorname{du}^8 v)], \quad (67)$$

где

$$s_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4b^3}}{2b^{3/2}}, \quad k = \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4b^3}}}, \quad v = \frac{1}{2k}(\tau - \tau_0). \quad (68)$$

Модуль эллиптических функций в равенствах (62)–(67) равен k , где его значение указано в системе (68).

Переменная $\sigma(v)$ в силу (31) такова

$$\sigma(v) = 2s_1 \sqrt{b} \frac{\operatorname{du}^2 v}{1 + s_1 \operatorname{du}^2 v}. \quad (69)$$

Углы Эйлера найдем, подставив решение (33) в соотношения (6)

$$\theta(\sigma) = \arccos 4\sigma_1^3 \sqrt{\frac{\sigma - \sigma_2}{2\sigma_2}}, \quad \varphi(\sigma) = \operatorname{arctg} \frac{2\sigma^2 - \sigma_2\sigma - \sigma_1^2}{(2\sigma - \sigma_2)\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma^2}}, \quad (70)$$

$$\psi(\sigma) = \sigma_1^3 \sqrt{2\sigma_2} \int_{\sigma_2}^{\sigma} \frac{\sqrt{\sigma - \sigma_2} d\sigma}{[\sigma_2(1 + 8\sigma_1^6) - 8\sigma\sigma_1^6] \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma^2}}. \quad (71)$$

Для получения зависимости углов Эйлера (70), (71) от времени необходимо в указанные уравнения внести функцию (69).

Представляет интерес функциональная связь между α и ψ . На основании равенства (10) и формул (31)–(33) получим

$$\operatorname{tg}(\alpha - \psi) = \frac{\sqrt{2}[6\sigma_1^6\sigma - \sigma_2(1 + 6\sigma_1^6)]\sqrt{\sigma - \sigma_2}}{\sigma_1^3 \sqrt{\sigma_2} \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma^2}}. \quad (72)$$

Соотношение (71) позволяет установить скорость прецессии относительно переменной σ :

$$\frac{d\psi(\sigma)}{d\sigma} = \sigma_1^3 \sqrt{2\sigma_2} \frac{\sqrt{\sigma - \sigma_2}}{[\sigma_2(1 + 8\sigma_1^6) - 8\sigma\sigma_1^6] \sqrt{(\sigma_1 - \sigma)(\sigma_1 + \sigma)}}. \quad (73)$$

Из (73) следует, что при $\sigma = \sigma_2$ скорость прецессии равна нулю, при изменении σ от σ_2 до σ_1 скорость прецессии положительна ($\psi(\sigma)$ – возрастает). При переходе через точку σ_1 радикал $\sqrt{\sigma_1 - \sigma}$ изменяет знак на противоположный и угол $\psi(\sigma)$ убывает. Это происходит до того времени, пока $\sigma > \sigma_2$. Если $\sigma = \sigma_2$ скорость прецессии вновь обращается в нуль. Когда σ возрастает от σ_2 до σ_1 , $\psi(\sigma)$ возрастает. Для анализа зависимостей $\theta(\sigma)$ $\phi(\sigma)$ можно использовать равенства (70).

Равенства (69)–(71) позволяют провести исследование оси динамической симметрии гироскопа Горячева в неподвижном пространстве. Для этой цели запишем значение единичного вектора в базисе $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$

$$\mathbf{a}_3(\sigma) = \sqrt{1 - \nu_3^2(\sigma)} \sin \psi(\sigma) \mathbf{i}_1 - \sqrt{1 - \nu_3^2(\sigma)} \cos \psi(\sigma) \mathbf{i}_2 + \nu_3(\sigma) \mathbf{i}_3.$$

Обозначим через $w_1(\sigma), w_2(\sigma), w_3(\sigma)$ – компоненты вектора $\mathbf{a}_3(\sigma)$:

$$w_1(\sigma) = \sqrt{1 - \nu_3^2(\sigma)} \sin \psi(\sigma), \quad w_2(\sigma) = \sqrt{1 - \nu_3^2(\sigma)} \cos \psi(\sigma), \quad w_3(\sigma) = \nu_3(\sigma).$$

В силу равенства (65) переменная ν_3 является периодической функцией времени; то есть проекция вектора \mathbf{a}_3 на вектор вертикали $\mathbf{i}_3 = \boldsymbol{\nu}$ также является периодической функцией времени. Для дальнейшего исследования свойства функции $\mathbf{a}_3(\sigma(t))$ достаточно рассмотреть проекцию годографа $\mathbf{a}_3(\sigma(t))$ на горизонтальную плоскость ($O\xi\eta$)

$$w_1^2(\sigma) + w_2^2(\sigma) = 1 - \nu_3^2(\sigma),$$

а также воспользоваться свойствами функции $\psi(\sigma)$, которые описаны выше. Таким образом, получим общие свойства апекса в решении Д.Н. Горячева.

Зависимости переменных (46)–(48) от функций τ устанавливаются с помощью (69).

6. О движении эллипсоида инерции в неподвижном пространстве.

Положим, что конец вектора $\mathbf{b}(\sigma)$ принадлежит эллипсоиду инерции тела. То есть координаты b_i этого вектора

$$\mathbf{b}_\Pi(\sigma) = b_1 \mathbf{a}_1 + b_2 \mathbf{a}_2 + b_3 \mathbf{a}_3 \tag{74}$$

удовлетворяют уравнению

$$4(b_1^2 + b_2^2) + b_3^2 = \sigma_0^2, \tag{75}$$

где σ_0^2 – постоянная. При записи (75) использованы условия $A_1 = A_2 = 4A_3$ и выполнен переход к безразмерным параметрам и переменным. Используя равенство $\mathbf{b}(\sigma) = b(\sigma)\boldsymbol{\omega}(\sigma)$ и решение (31)–(33), из (75) получим

$$b(\sigma) = \frac{\mu_0}{\sqrt{\sigma(2\sigma - \sigma_2)}}, \tag{76}$$

где μ_0 – новая постоянная, которую положим равной единице. Тогда из (31), (32), (74), (76) следует

$$\mathbf{b}_{\Pi}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma - \sigma_2}} \left(\sigma \mathfrak{a}_1 + \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma^2} \mathfrak{a}_2 + c\sqrt{\sigma - \sigma_2} \mathfrak{a}_3 \right). \quad (77)$$

То есть

$$b_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{2\sigma - \sigma_2}}, \quad b_2 = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma^2}}{\sqrt{2\sigma - \sigma_2}}, \quad b_3 = \frac{c\sqrt{\sigma - \sigma_2}}{\sqrt{2\sigma - \sigma_2}}. \quad (78)$$

Исключим переменную σ из первого и третьего уравнений (78):

$$\sigma_2(b_3^2 - c^2)^2 + c^2 b_1^2(2b_3^2 - c^2) = 0. \quad (79)$$

Таким образом, подвижный годограф вектора $\mathbf{b}(\sigma)$ – линия пересечения эллипсоида (75) и цилиндрической поверхности (79), направляющей линией которой является кривая четвертого порядка, а образующие параллельны второй координатной оси.

Рассмотрим неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(\sigma)$:

$$\mathbf{b}_{\Pi}(\sigma) = b_{\xi}(\sigma)\mathbf{i}_1 + b_{\eta}(\sigma)\mathbf{i}_2 + b_{\zeta}(\sigma)\mathbf{i}_3. \quad (80)$$

На основании формул (46), (47), (76) определим компоненты вектора (80)

$$b_{\xi}(\sigma) = \frac{6\sigma_1^4}{\sigma_2\sqrt{2\sigma - \sigma_2}} \sqrt{(\sigma - \sigma_3)(\sigma_4 - \sigma)} \cos \alpha(\sigma), \quad (81)$$

$$b_{\eta}(\sigma) = \frac{6\sigma_1^4}{\sigma_2\sqrt{2\sigma - \sigma_2}} \sqrt{(\sigma - \sigma_3)(\sigma_4 - \sigma)} \sin \alpha(\sigma), \quad (82)$$

$$b_{\zeta}(\sigma) = -\frac{6\sigma_1^4(\sigma - \sigma_2)}{\sigma_2\sqrt{2\sigma - \sigma_2}}, \quad (83)$$

где $\alpha(\sigma)$ определяется интегральной зависимостью (48).

Из соотношений (81) – (83) найдем уравнение меридиана, на котором лежит конец вектора (80):

$$\sigma_2 b_{\zeta}^2 [\sigma_2(b_{\rho}^2 + b_{\zeta}^2) - 4\sigma_1^2] + 3\sigma_1^6 [\sigma_1^2 - \sigma_2(b_{\rho}^2 + b_{\zeta}^2)]^2 = 0. \quad (84)$$

Уравнение (84) описывает алгебраическую кривую четвертого порядка. Следует отметить, что уравнение меридиана (84) проще уравнения меридиана поверхности вращения, на которой лежит неподвижный годограф вектора угловой скорости, которое можно получить из уравнений (46), (47):

$$\begin{aligned} & 8\sigma_2 [16\omega_{\zeta}^2 + 81\sigma_1^6(\omega_{\rho}^2 + \omega_{\zeta}^2)]^2 - 64\sigma_2\sigma_1^2 [\sigma_2\sigma_1^2 + 8(\omega_{\rho}^2 + \omega_{\zeta}^2)] \times \\ & \times [16\omega_{\zeta}^2 + 81\sigma_1^6(\omega_{\rho}^2 + \omega_{\zeta}^2)] - 81\sigma_1^{10} [\sigma_2\sigma_1^2 + 8(\omega_{\rho}^2 + \omega_{\zeta}^2)] = 0. \end{aligned} \quad (85)$$

Движение эллипсоида инерции тела в неподвижном пространстве воспроизводится путем качения без скольжения годографа (77) по годографу (80) с учетом (81)–(83).

Заключение. В статье изучены аналитические свойства годографов вектора угловой скорости и вектора, коллинеарного вектору угловой скорости. Рассмотрен комплексный подход в истолковании движения тела, имеющего неподвижную точку, предложенный Г.В. Горром в статье [7] и использованный в статьях [10, 11, 12].

1. *Poinsot L. Thèorie nouvelle de la rotation des corps / L. Poinsot // J. Math. Pures et Appl. – 1851. – 16. – P. 9–130.*
2. *Суслов Г.К. Теоретическая механика / Г.К. Суслов. – М.: Гостехиздат. – 1946. – 655 с.*
3. *Горр Г.В. Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние / Г.В. Горр, Л.В. Кудряшова, Л.А. Степанова. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.*
4. *Харламов П.В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку / П.В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1964. – 28, вып. 3. – С. 502–507.*
5. *Гашененко И.Н. Классические задачи динамики твердого тела / И.Н. Гашененко, Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – Киев: Наук. думка, 2012. – 401 с.*
6. *Горр Г.В. Движение гиростата / Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.*
7. *Горр Г.В. Об одном подходе в применении теоремы Пуансо кинематического истолкования движения тела с неподвижной точкой / Г.В. Горр // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 26–36.*
8. *Стеклов В.А. Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку / В.А. Стеклов // Тр. отд. физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1899. – 10, вып. 1. – С. 1–3.*
9. *Докшевич А.И. Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона / А.И. Докшевич. – Киев: Наук. думка, 1992. – 168 с.*
10. *Горр Г.В. О кинематическом истолковании движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой / Г.В. Горр, А.И. Синенко // Прикл. математика и механика. – 2014. – 20, вып. 3. – С. 334–345.*
11. *Горр Г.В. Применение параметров Родрига–Гамильтона при истолковании движения твердого тела с неподвижной точкой / Г.В. Горр, А.М. Ковалев // Прикл. математика и механика. – 2015. – 79, вып. 5. – С. 635–643.*
12. *Горр Г.В. О движении тяжелого твердого тела в двух частных случаях решения С.В. Ковалевской / Г.В. Горр, Е.К. Щетинина // Нелинейная динамика. – 2018. – 14, № 1. – С. 123–138.*
13. *Горр Г.В. Об одном случае движения тяжелого твердого тела в решении С.В. Ковалевской / Г.В. Горр, А.Я. Савченко // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 66–73.*
14. *Горр Г.В. Об одном периодическом движении в решении С.В. Ковалевской / Г.В. Горр, А.Я. Савченко // Механика твердого тела. – 1971. – Вып. 3. – С. 64–69.*
15. *Ковалевская С.В. Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки / С.В. Ковалевская // В кн.: Ковалевская С.В. Научные работы. – М.: Изд-во АН СССР, 1948. – С. 153–220.*
16. *Горр Г.В. Кинематическое истолкование движения тела в частном случае решения Горячева–Чаплыгина / Г.В. Горр, Д.А. Данилюк, Д.А. Ткаченко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017. – №3-4 (60–61). – С. 19–32.*
17. *Горр Г.В. Об одном периодическом движении гиростата Горячева–Чаплыгина / Г.В. Горр, Г.Д. Левицкая // Механика твердого тела. – 1971. – Вып. 3. – С. 101–106.*
18. *Чаплыгин С.А. Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке / С.А. Чаплыгин // Тр. отд. физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1901. – 10, вып. 2.*

– С. 32–34.

19. *Горячев Д.Н.* О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$ / Д.Н. Горячев // Мат. сборник Кружка любителей мат. наук. – 1900. – **21**, вып. 3. – С. 431–438.
20. *Лурье А.И.* Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
21. *Кошляков В.Н.* Параметры Родрига–Гамильтона и их приложения в механике твердого тела / В.Н. Кошляков. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. – 176 с.
22. *Горр Г.В.* Об одном движении тяжелого твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина / Г.В. Горр // Прикл. математика и механика. – 1970. – **34**, вып. 6. – С. 1139–1143.
23. *Горр Г.В.* Подвижный годограф вектора угловой скорости решения Д.Н. Горячева / Г.В. Горр // Механика твердого тела. – 1971. – Вып. 3. – С. 95–100.

D.A. Daniljuk

An integrated approach to the interpretation of D.N. Goryachev solutions.

For decision D.N. Goryachev the motion of a heavy rigid body was investigated in the article. The moving and fixed hodographs with angular velocity were studied. An integrated approach for a dynamically symmetric rigid body and a modified Poincot method were used. Euler angles were found to the investigated solution. The dependences of the main values on the Jacobi elliptic functions were indicated.

Keywords: *solution of Goryachev, interpretation of the movement, integrated approach, Euler angles.*

ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк
daniljuk@iamm.su

Получено 11.03.2019

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

©2019. С.А. Калоеров, А.И. Занько

ИЗГИБ МНОГОСВЯЗНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ

С использованием обобщенных комплексных потенциалов теории упругости анизотропного тела решены задачи теории упругости для плиты с эллиптическими отверстиями или трещинами находящейся под действием поперечных сил. Разложением голоморфных функций в ряды Лорана получены общие представления соответствующих функций для плиты с конечным числом отверстий.

Ключевые слова: анизотропная плита, поперечные силы, отверстия, трещины, концентрация напряжений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим отнесенную к прямоугольной декартовой системе координат Oxy анизотропную плиту, занимающую многосвязную область S (рис. 1), ограниченную внешним контуром L_0 и контурами эллипти-

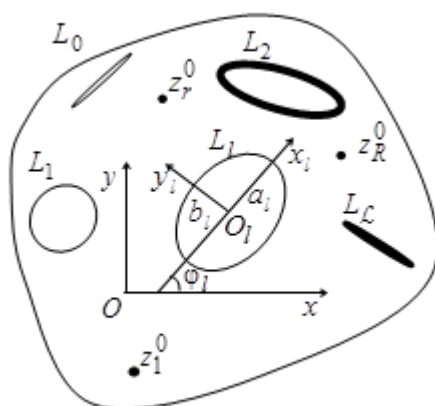


Рис. 1.

ческих отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с полуосями a_l, b_l , причем в локальных системах координат $O_l x_l y_l$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с началами в центрах эллипсов L_l и направлениями осей вдоль осей эллипсов их параметрические уравнения будут такими:

$$x_l = a_l \cos \theta, y_l = b_l \sin \theta, \quad (1)$$

а в основной системе координат Oxy имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \phi_l - y_l \sin \phi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \phi_l + y_l \cos \phi_l, \end{aligned} \quad (2)$$

где ϕ_l – угол между направлениями осей Ox и O_lx_l , отсчитываемый от Ox против часовой стрелки; x_{0l}, y_{0l} – координаты начала координат $O_lx_ly_l$ в основной системе координат Oxy ; θ – параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π . Плита находится под действием приложенных к ее контурам L_l ($l = \overline{0, \mathcal{L}}$) поперечных сил. Некоторые из контуров плиты жестко подкреплены или защемлены.

2. Решение задачи. Определение напряженного состояния рассматриваемой плиты сводится к нахождению производных комплексных потенциалов $W'_k(z_k)$ из соответствующих граничных условий. Для многосвязных областей эти условия удобнее использовать в дифференциальной форме, которые не будут содержать комплексных постоянных, входящих в граничные условия. Эти граничные условия имеют вид

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{ki\alpha} \delta_{k,s} W''_k(z_k) = \frac{df_{i\alpha}(t)}{ds} \quad (\alpha = 1, 2), \quad (3)$$

в котором

$$\begin{aligned} \delta_{k,s} &= dz_k/ds; \\ g_{ki1} &= \frac{p_k}{\mu_k}, \quad g_{ki2} = q_k, \\ \frac{df_{i1}}{ds} &= -f_i \frac{dx}{ds} - c_i \frac{dy}{ds}, \quad \frac{df_{i2}}{ds} = f_i \frac{dy}{ds} + c_i \frac{dx}{ds}, \end{aligned} \quad (4)$$

в случае нагруженного контура

$$\begin{aligned} g_{ki1} &= 1, \quad g_{ki2} = \mu_k, \\ \frac{df_{i1}(t)}{ds} &= 0, \quad \frac{df_{i2}(t)}{ds} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

если контур жестко защемлен или жестко подкреплен.

В рассматриваемом случае для производных комплексных потенциалов имеем представления [1, 2]

$$W'_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl}z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + W'_{k0}(z_k), \quad (6)$$

где A_{kl}, B_{kl} – величины, определяемые из решения систем линейных уравнений [1, 2]; $W'_{k0}(z_k)$ – функции голоморфные в многосвязных областях S_k , получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями $z_k = x + \mu_k y$ и ограниченных контурами L_{kl} ; z_{kl} и z_{kr}^0 – точки в областях S_k , соответствующие

при аффинных преобразованиях произвольным точкам внутри контуров L_l и точкам приложения сосредоточенных сил. Последние функции $W'_{k0}(z_k)$ можно представить в виде

$$W'_{k0}(z_k) = \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} W'_{kl0}(z_k), \quad (7)$$

в котором $W'_{k00}(z_k)$ – функции, голоморфные внутри внешних контуров L_{k0} ; $W'_{kl0}(z_k)$ – функции, голоморфные вне контуров отверстий L_{kl} ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$). Для построения указанных функций используем конформные отображения.

Отобразим конформно внешность единичного круга $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} [3]:

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (8)$$

где

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l (\cos \phi_l + \mu_k \sin \phi_l) + ib_l (\sin \phi_l - \mu_k \cos \phi_l)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l (\cos \phi_l + \mu_k \sin \phi_l) - ib_l (\sin \phi_l - \mu_k \cos \phi_l)}{2R_{kl}}.$$

Функции $W'_{k00}(z_k)$, голоморфные внутри L_{k0} , можно разложить в ряды по полиномам Фабера для внутренностей контуров L_{k0} , а после пересуммирования соответствующих рядов можно представить в виде степенных рядов вида [2, 4]

$$W'_{k00}(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k0n} \left(\frac{z_k - z_{k0}}{R_{k0}} \right)^n, \quad (9)$$

в котором R_{k0} – постоянные, определяемые из конформных отображений (8) для контуров L_{k0} .

Функции $W'_{kl0}(z_k)$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$), голоморфные вне отверстий L_{kl} , после конформных отображений (8) в областях переменных ζ_{kl} будут голоморфными вне единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ и их можно разложить в ряды Лорана вида [2, 5, 6]

$$W'_{kl0}(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}, \quad (10)$$

в котором a_{kln} – неизвестные постоянные.

Окончательно для производных комплексных потенциалов получаем

$$W'_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k), \quad (11)$$

$$W_k''(z_k) = N_k'(z_k) + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k), \quad (12)$$

где

$$N_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl}z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}), \quad (13)$$

$$\phi_{k0n}(z_k) = \left(\frac{z_k - z_{k0}}{R_{k0}} \right)^n, \quad \phi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n} (l = \overline{1, \mathcal{L}});$$

$$N_k'(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \frac{(A_{kl}z_k + B_{kl})}{z_k - z_{kl}} \right], \quad (14)$$

$$\phi'_{k0n}(z_k) = \frac{n(z_k - z_{k0})^{n-1}}{R_{k0}^n},$$

$$\phi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{R_{kl}\zeta_{kl}^{n-1}(\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} (l = \overline{1, \mathcal{L}}).$$

Выберем на внешнем контуре и на контурах отверстий систему точек $M_{lm}(x_{lm}, y_{lm})$ ($m = \overline{1, M_l}$), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям. Подставляя функции (12) в граничные условия (3) в точках $M_{lm}(x_{lm}, y_{lm})$, для определения неизвестных a_{kln} получаем систему, состоящую из уравнений

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_{kia} \delta_{k,s} \phi'_{kln}(t_{klm}) a_{kln} + \bar{g}_{kia} \bar{\delta}_{k,s} \overline{\phi'_{kln}(t_{klm})} \bar{a}_{kln} \right) =$$

$$= - \sum_{k=1}^2 \left[g_{kia} \delta_{k,s} N_k'(t_{klm}) + \bar{g}_{kia} \bar{\delta}_{k,s} \overline{N_k'(t_{klm})} \right] + \quad (15)$$

$$+ \frac{df_{i\alpha}(t_{im})}{ds} \quad (i = \overline{g, \mathcal{L}}; \quad m = \overline{1, M_l}; \quad \alpha = 1, 2),$$

где $t_{klm} = x_{lm} + \mu_k y_{lm}$, $t_{im}(x_{im}, y_{im})$.

Кроме приведенных уравнений, для каждого отверстия должно выполняться условие

$$\sum_{k=1}^2 i (a_{ki1} R_{ki} - \bar{a}_{ki1} \bar{R}_{ki}) = 0 \quad (i = \overline{1, \mathcal{L}}), \quad (16)$$

следующее из условия однозначности прогиба при полном обходе по контуру, охватывающему L_l .

Система (15), дополненная уравнениями (16), служит для определения комплексных переменных a_{kln} и вещественных переменных c_l . Эту систему будем

решать с использованием метода сингулярных разложений [7, 8]. После нахождения псевдорешений этой системы постоянные a_{kln} , а следовательно и функции $W'_k(z_k)$, будут известными, и по ним можно вычислять моменты (2.2) и перерезывающие силы (2.3) в любой точке плиты. Если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейный разрез (трещину или жесткое линейное включение), то, используя формулы [9], для его концов можно вычислить и коэффициенты интенсивности моментов (КИМ), в том числе k_{1M}^\pm (КИМ соответствующий моменту M_y) и k_{2M}^\pm (КИМ соответствующий моменту H_{xy}), задаваемые соотношениями

$$k_{1M}^\pm = 2Re \sum_{k=1}^2 [p_k \sin^2 \phi_l + q_k \cos^2 \phi_l - 2r_k \sin \phi_l \cos \phi_l] M_k, \quad (17)$$

$$k_{2M}^\pm = 2Re \sum_{k=1}^2 [(q_k - p_k) \cos \phi_l \sin \phi_l + r_k (\cos^2 \phi_l - \sin^2 \phi_l)] M_k,$$

в которых

$$M_k = \pm \frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \left(A_{kl} (z_{kl} \pm 2R_{kl}) + B_{kl} - \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln} \right),$$

знаки $+$ и $-$ у КИМ относятся к правому и левому концам разреза в локальной системе координат соответственно.

Конформные отображения можно построить и по координатам концов осей эллипсов L_l (x_{A_l}, y_{A_l}), (x_{B_l}, y_{B_l}), (x_{C_l}, y_{C_l}), (x_{D_l}, y_{D_l}) (рис. 2). В этом случае

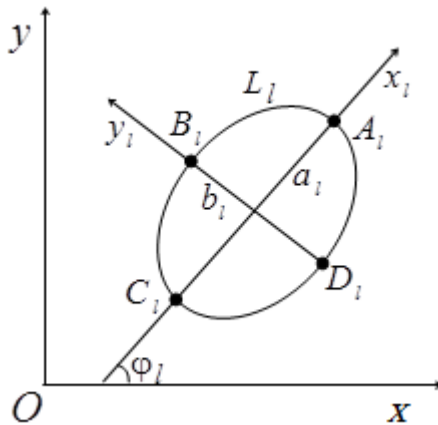


Рис. 2.

во всех предыдущих формулах нужно принять

$$\begin{aligned}
 a_l &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_{A_l} - x_{C_l})^2 + (y_{A_l} - y_{C_l})^2}, \\
 b_l &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_{B_l} - x_{D_l})^2 + (y_{B_l} - y_{D_l})^2}, \\
 x_{0l} &= (x_{A_l} + x_{C_l}) / 2, \quad y_{0l} = (y_{A_l} + y_{C_l}) / 2, \\
 \phi_l &= \operatorname{arctg} \left(\frac{y_{A_l} - y_{C_l}}{x_{A_l} - x_{C_l}} \right).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Для различных конечных и бесконечных плит с отверстиями были проведены численные исследования изменения значений моментов в зависимости от геометрических параметров отверстий, способов их загрузки и подкрепления, материалов плит. При проведении расчетов количество членов в рядах Лорана (9) и по полиномам Фабра (10) и «коллокационных» точек M_l на контурах L_l , для которых составлялись линейные алгебраические уравнения (15), увеличивались до тех пор, пока относительная погрешность удовлетворения краевых условий для граничных значений моментов не становилась менее сотых долей процента. Для такого показателя удовлетворения граничным условиям, как показали численные исследования, в решаемых задачах, в зависимости от геометрических и упругих характеристик необходимо было в указанных рядах оставлять от 10 до 20 членов, на каждом из контуров брать от 100 до 200 «коллокационных точек». Ниже описаны некоторые из полученных результатов для плит из изотропного материала алюминий (материал М1) [10], стеклопластик косоугольной намотки (М2) [11], сосна (М3) [1]. Коэффициенты a_{ij} деформаций для этих материалов приведены в табл. 1.

Таблица 1. Постоянные материалов

Материал	Постоянные материала				$\frac{a_{11}}{a_{22}}$
	$a_{11} \cdot 10^4$, МПа	$a_{22} \cdot 10^4$, МПа	$a_{12} \cdot 10^4$, МПа	$a_{66} \cdot 10^4$, МПа	
М1	0,1408	0,1408	-0,035	0,352	1,000
М2	10,000	2,800	-0,770	27,000	3,571
М3	2,381	0,100	-0,024	1,333	23,810

При этом для того, чтобы использовать приведенное выше решение для изотропной пластинки постоянная a_{22} заменялась на $0,1458 \cdot 10^{-4}$, т. е. на значение, незначительно отличающееся от табличного. В противном случае при решении задачи возникнет деление на ноль, т. к. корни характеристического уравнения для изотропного материала будут двукратными и равными i и $-i$. Приводимые ниже значения основных характеристик изгиба даны с точностью до значения постоянной D_0 , как множителя. При этом значения моментов всюду приведены в МПа \cdot м² (или МН \cdot м), КИМ в МПа \cdot м² $\sqrt{м}$ (или МН \cdot м $\sqrt{м}$).

Пусть в эллиптической плите с внешним контуром L_0 и полуосями a_0, b_0 имеется произвольно расположенное эллиптическое отверстие L_1 с полуосями a_1, b_1 (рис. 3). В данном случае в приведенном в предыдущем пункте решении,

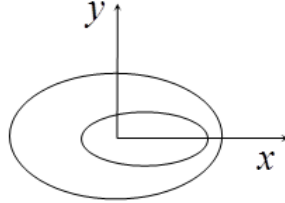


Рис. 3.

нужно принять $\mathcal{L} = 1$.

Численные исследования в задаче проводились с целью выявления влияния размеров, расположения и формы контуров L_0, L_1 , параметров анизотропии материала, способов загрузки и подкрепления контуров на значения моментов, а в случае, когда L_1 является прямолинейным разрезом, и на значения КИМ. Ниже описаны некоторые из полученных результатов.

3. Действие равномерно распределенных поперечных усилий на одном контуре при жестком защемлении второго контура. Пусть один из контуров кольца жестко защемлен, а на втором действуют равномерно распределенные поперечные усилия.

а) Круговое кольцо с жестко зашпемленным внешним контуром. В этом случае в приведенном решении необходимо принять

$$\begin{aligned} \phi_1 = 0; \quad g_{k01} = 1, \quad g_{k02} = \mu_k, \quad f_{01} = 0, \quad f_{02} = 0, \\ [g_{k11} = \frac{p_k}{\mu_k}, \quad g_{k12} = q_k, \\ f_{11} = - \int_0^x f_1(s) dx + c_{10} = -p_1 a_1^2 \int_0^\vartheta \vartheta \sin \vartheta d\vartheta + c_{10} = \\ -p_1 a_1^2 [\sin(\vartheta) - \vartheta \cos(\vartheta)] + c_{10}, \\ f_{12} = \int_0^y f_1(s) dy + c_{20} = -p_1 a_1^2 \int_0^\vartheta \vartheta \cos \vartheta d\vartheta + c_{20} = \\ -p_1 a_1^2 [\sin(\vartheta) \vartheta + \cos(\vartheta) - 1] + c_{20}; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{df_{01}}{ds} = 0, \quad \frac{df_{02}}{ds} = 0, \quad \frac{df_{11}}{ds} = -f_1 \frac{dx}{ds}, \quad \frac{df_{12}}{ds} = f_1 \frac{dy}{ds}. \quad (20)$$

Заметим, что в данном случае главный вектор усилий, приложенных к контуру L_1 , равен $P_1 = 2\pi R_1 p_1$, а компоненты их главного момента равны нулю, т.е. $M_{x1} = M_{y1} = 0$.

Для кругового кольца с жестко заземленным внешним контуром радиуса a_0 ($b_0 = a_0$) и нагруженным равномерно распределенными поперечными усилиями p_1 внутренним контуром радиуса a_1 ($b_1 = a_1$) (рис. 4) в зависимости от

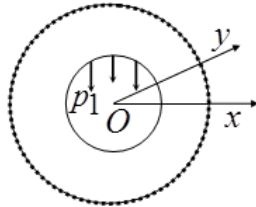


Рис. 4.

центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox , и значения отношения a_1/a_0 в табл. 2 приведены значения моментов M_s и M_n с точностью до p_1 , в точках контуров L_0, L_1 . Значения моментов M_n на контуре L_1 равны нулю, поэтому они в табл. 2 не приведены.

Таблица 2. Значения моментов в точках контуров кругового кольца с жестко заземленным внешним и нагруженным поперечными усилиями p_1 внутренним контурами

Материал	θ , рад.	a_1/a_0								
		0, 1			0, 5			0, 9		
		M_s на L_0			M_n на L_0			M_s на L_1		
М1	0	-0,013	-0,059	-0,023	-0,052	-0,234	-0,091	0,222	0,140	0,005
	М2	0	-0,004	-0,028	-0,025	-0,014	-0,100	-0,141	0,457	0,375
М2	$\pi/12$	-0,007	-0,046	-0,037	-0,015	-0,107	-0,136	0,395	0,296	0,015
	$\pi/6$	-0,014	-0,089	-0,054	-0,021	-0,136	-0,136	0,251	0,146	0,003
	$\pi/4$	-0,022	-0,115	-0,051	-0,038	-0,205	-0,159	0,159	0,075	0,001
	$\pi/3$	-0,022	0,095	-0,030	-0,072	-0,305	-0,187	0,149	0,063	0,001
	$5\pi/12$	-0,014	-0,054	-0,013	-0,106	-0,405	-0,196	0,162	0,056	0,001
	$\pi/2$	-0,009	-0,035	-0,008	-0,119	-0,451	-0,194	0,168	0,053	0,001
М3	0	0,000	-0,002	-0,012	0,000	-0,007	-0,051	0,644	0,583	0,116
	$\pi/12$	0,000	-0,010	-0,060	0,000	-0,012	-0,066	0,525	0,407	0,019
	$\pi/6$	-0,001	-0,044	-0,099	-0,001	-0,044	-0,100	0,297	0,149	-0,023
	$\pi/4$	-0,005	-0,096	-0,061	-0,009	-0,171	-0,108	0,157	0,034	-0,007
	$\pi/3$	-0,012	-0,092	-0,024	-0,050	-0,395	-0,102	0,091	0,003	-0,001
	$5\pi/12$	-0,009	-0,032	-0,006	-0,150	-0,517	-0,099	0,062	-0,001	0,000
	$\pi/2$	-0,002	-0,005	-0,001	-0,217	-0,527	-0,099	0,054	0,001	0,000

Значения моментов для изотропного кольца в силу геометрической и упругой симметрии не зависят от угла θ , поэтому они приведены только для $\theta = 0$. Эти значения для изотропного кольца совпадают с их значениями, вычисленными по точному решению задачи. На рис. 5 и рис. 6 изображены графики распределения моментов M_s около контуров L_0 и L_1 . Сплошные линии относятся к материалу

M_2 , штриховые – к материалу M_1 .

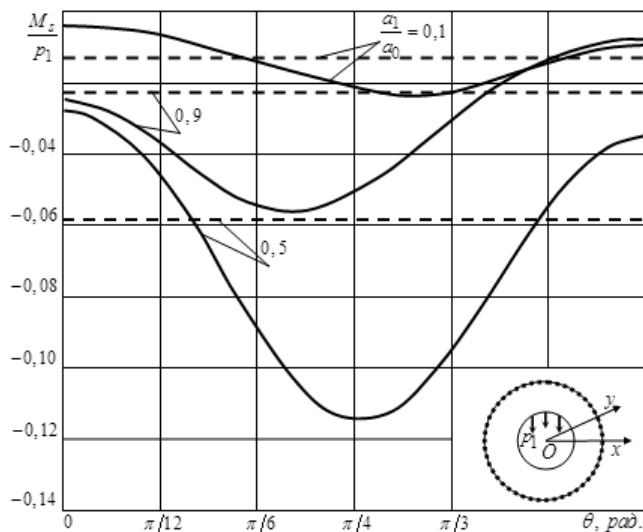


Рис. 5.

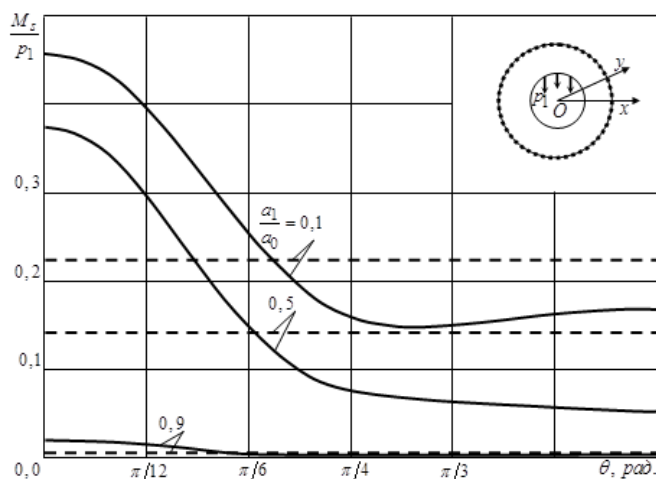


Рис. 6.

Из данных табл. 2, рис. 5 и рис. 6 видно, что, чем выше «степень анизотропии», тем больше уровень концентрации изгибающих моментов. С ростом отношения a_1/a_0 на контуре L_0 значения моментов по модулю вначале возрастают, а затем убывают, на L_1 постоянно убывают, что говорит о том, что моменты на L_0 уменьшаются с удалением приложенной нагрузки от контура и с приближением нагруженного контура к жестко заземленному контуру [6]. Уменьшение же моментов на контуре L_1 связано с приближением L_1 к жестко заземленному контуру. При $a_1/a_0 \rightarrow 0$ и $a_1/a_0 \rightarrow 1$ значения моментов стремятся к нулю.

б) Плита с жестко защемленным внутренним контуром. В этом случае в приведенном в п. 3.2 решении необходимо принять

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 0; & g_{k01} &= \frac{p_k}{\mu_k}, & g_{k02} &= q_k, \\ f_{01} &= - \int_0^x f_1(s)dx + c_{10} = p_1 a_1^2 \int_0^\vartheta \vartheta \sin \vartheta d\vartheta + c_{10} = \\ &= p_1 a_1^2 [\sin(\vartheta) - \vartheta \cos(\vartheta)] + c_{10}, \\ f_{02} &= \int_0^y f_1(s)dy + c_{20} = p_1 a_1^2 \int_0^\vartheta \vartheta \cos \vartheta d\vartheta + c_{20} = \\ &= p_1 a_1^2 [\sin(\vartheta) \vartheta + \cos(\vartheta) - 1] + c_{20}, \\ g_{k11} &= 1, & g_{k12} &= \mu_k, & f_{11} &= 0, & f_{12} &= 0; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{df_{01}}{ds} = -f_0 \frac{dx}{ds}, \quad \frac{df_{02}}{ds} = f_0 \frac{dy}{ds}, \quad \frac{df_{11}}{ds} = 0, \quad \frac{df_{12}}{ds} = 0. \quad (22)$$

Заметим, что сила реакции опоры равна $P_0 = 2\pi R_0 p_0$, поэтому главный вектор усилий, приложенных к контуру L_1 , равен $P_1 = -P_0$, т.е. $P_1 = -P_0 = -2\pi R_0 p_0$, а компоненты их главного момента равны нулю, т. е. $M_{x1} = M_{y1} = 0$.

Для кругового кольца при действии поперечных усилий p_0 на внешнем контуре и жестко защемленном внутреннем контуре (рис. 7) в зависимости от цен-

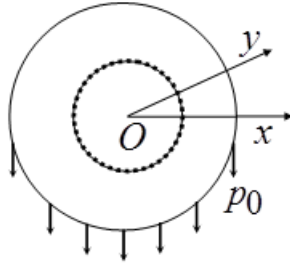


Рис. 7.

трального угла θ и значения отношения a_1/a_0 в табл. 3 с точностью до p_0 приведены значения моментов M_s, M_n в точках контуров L_0, L_1 , где они достигают максимальных значений. Значения моментов M_n на контуре L_0 равны нулю, поэтому они в табл. 3 не приведены.

Значения моментов для изотропного кольца в силу геометрической и упругой симметрии не зависят от угла θ , поэтому они приведены только для $\theta = 0$. Эти значения для изотропного кольца совпадают с их значениями, вычисленными по точному решению задачи [6]. На рис. 8 и рис. 9 изображены графики распределения моментов M_s около контуров L_0 и L_1 соответственно. Сплошные линии относятся к материалу М2, штриховые – к материалу М1.

Изгиб многосвязной анизотропной плиты под действием поперечных сил

Таблица 3. Значения моментов в точках контуров кругового кольца с жестко заземленным внутренним и загруженным поперечными усилиями p_0 внешним контурами

Материал	θ , рад.	a_1/a_0								
		0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9
		M_s на L_0			M_s на L_1			M_n на L_1		
M1	0	-0,352	-0,132	-0,005	-0,646	-0,200	-0,027	-2,584	-0,798	-0,109
M2	0	-0,011	-0,121	-0,018	-0,880	-0,251	-0,030	-3,198	-0,913	-0,110
	$\pi/12$	-0,049	-0,130	-0,013	-1,337	-0,383	-0,048	-3,104	-0,888	-0,112
	$\pi/6$	-0,153	-0,128	-0,003	-1,857	-0,542	-0,074	-2,846	-0,831	-0,114
	$\pi/4$	-0,286	-0,095	-0,001	-1,395	-0,431	-0,062	-2,498	-0,771	-0,110
	$\pi/3$	-0,386	-0,083	-0,003	-0,666	-0,220	-0,033	-2,152	-0,710	-0,105
	$5\pi/12$	-0,432	-0,109	-0,002	-0,256	-0,088	-0,014	-1,901	-0,652	-0,103
	$\pi/2$	-0,443	-0,129	-0,002	-0,139	-0,048	-0,008	-1,810	-0,626	-0,103
M3	0	0,072	-0,047	-0,051	-1,062	-0,269	-0,030	-4,462	-1,128	-0,128
	$\pi/12$	0,035	-0,085	-0,020	-3,755	-0,937	-0,108	-4,152	-1,036	-0,120
	$\pi/6$	-0,074	-0,175	0,012	-3,293	-0,820	-0,109	-3,304	-0,823	-0,109
	$\pi/4$	-0,252	-0,203	0,006	-1,200	-0,354	-0,057	-2,142	-0,632	-0,102
	$\pi/3$	-0,458	-0,095	0,001	-0,227	-0,130	-0,023	-0,975	-0,557	-0,101
	$5\pi/12$	-0,579	-0,038	0,000	-0,007	-0,035	-0,006	-0,118	-0,565	-0,102
	$\pi/2$	-0,613	-0,025	0,000	0,002	-0,006	-0,001	0,196	-0,578	-0,102

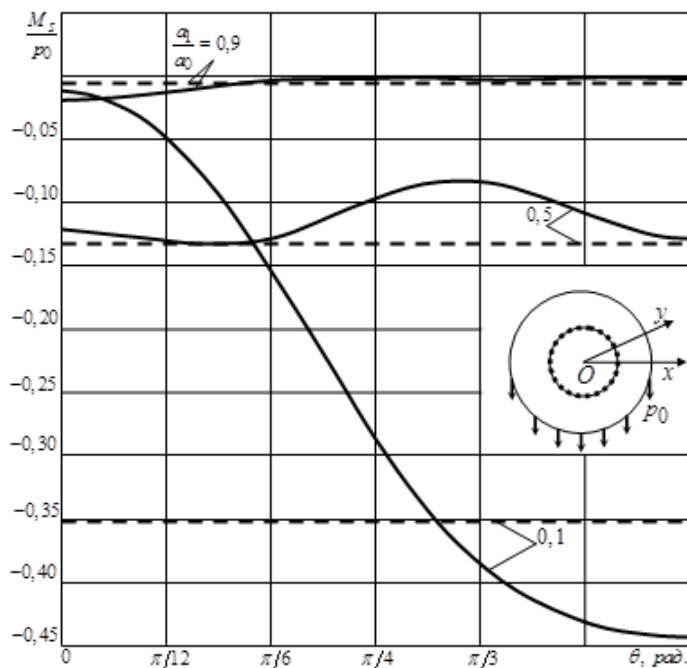


Рис. 8.

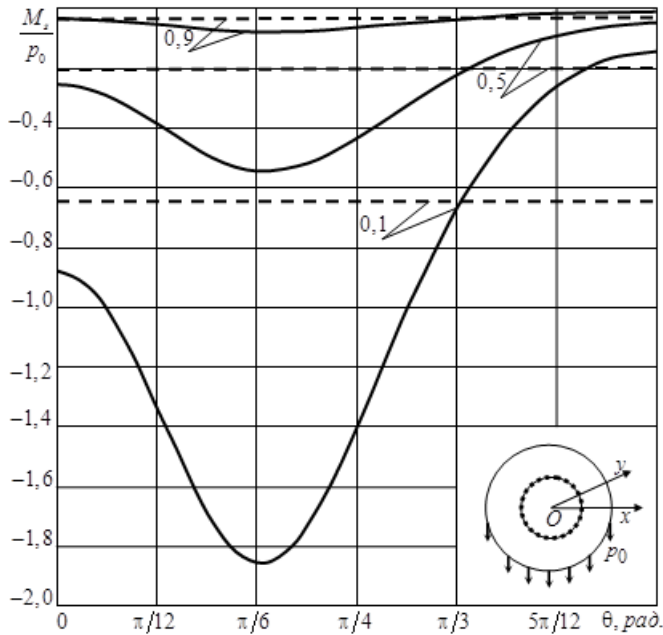


Рис. 9.

Из данных табл. 3, рис. 8 и рис. 9 видно, что, чем выше «степень анизотропии», тем больше уровень концентрации изгибающих моментов. С ростом отношения a_1/a_0 значения моментов по модулю убывают, что связано с приближением L_0 к жестко заземленному контуру L_1 . При $a_1/a_0 \rightarrow 1$ значения моментов стремятся к нулю.

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
2. Калоеров С.А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит / С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 2012. – № 4(50). – С. 115 – 136.
3. Калоеров С.А. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Концентрация напряжений. – К.: А.С.К., 1998. – С. 10–26. (Механика композитов: В 12 т., т. 7).
4. Калоеров С.А. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках / С.А. Калоеров, Е.В. Авдошина, А.Б. Мироненко. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2013. – 440 с.
5. Калоеров С.А. Решение задач об изгибе многосвязных плит под действием распределенных по основанию усилий / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Вісн. Запорізь. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2015. – Вып. 2. – С. 94–104.
6. Калоеров С.А. Решения задач об изгибе тонких плит для канонических областей / С.А. Калоеров, А.И. Занько, А.А. Кошкин // Теорет. и прикладная механика. – 2014. – Вып. 55. – С. 99–138.
7. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
8. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1969. – 280 с.
9. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и на-

пряженности для многосвязных электроупругих анизотропных сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика.– 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.

10. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
11. *Космодамианский А.С.* Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров.– К., Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.

S.A. Kaloerov, A.I. Zan'ko

Bending a multiply anisotropic plate under lateral forces.

Using the generalized complex potentials of the theory of elasticity of an anisotropic body, the problems of the theory of elasticity are solved for a plate with elliptical holes or cracks under the action of transverse forces. By expanding holomorphic functions into Laurent series, general representations of the corresponding functions for a plate with a finite number of holes are obtained.

Keywords: *anisotropic plate, lateral forces, holes, cracks, stress concentration.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
al.zanko@mail.ru

Получено 15.03.2019

УДК 539.3:534.1:519

©2019. С.В. Сторожев, С.Б. Номбре, С.А. Прийменко

НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТЕЙ ВОЛН КРУЧЕНИЯ В ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЯХ НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННЫХ ТЕОРИЙ

Осуществлено распространение численно-аналитической нечетко-множественной методики получения оценок для значений скоростей волн деформаций в тонкостенных конструкциях на случай анализа волн крутильного типа в прямых стержнях с неопределенными параметрами на базе использования трех вариантов уточненных теорий. Разработанный и апробированный подход позволяет учитывать разбросы величин экзогенных физико-механических и геометрических параметров в рассматриваемых моделях и основывается на использовании модифицированных версий эвристического принципа обобщения в процессе перехода в соотношения классических моделей расчета фазовых скоростей к нечетко-множественным аргументам с различными видами функций принадлежности.

Ключевые слова: прямые однородные стержни, неопределенные физико-механические параметры, распространение волн кручения, уточненные модели, анализ фазовых скоростей, нечетко-множественная методика, эвристический принцип обобщения.

Введение. Упругие колебания крутильного типа являются важным классом возникающих на практике динамических вибрационных деформаций для весьма широкого класса тонкостенных конструкций, к числу которых относятся однородные прямые стержни с разнообразной формой поперечных сечений [1 - 4]. Получение достоверных оценок прочностных характеристик и соответствующее обеспечение адекватности результатов предпроектных расчетов таких конструкций, используемых в качестве ответственных деталей машин приборов и строительных сооружений, сопряжено с учетом неопределенности, вносимой при исследовании как целым рядом гипотез перехода к моделям тонкостенных стержней, так и разбросами значений экзогенных параметров в выбранных прикладных либо уточненных моделях [5 - 7]. При этом методика учета разбросов исходных данных для расчетных схем на основе выбранных моделей, в свою очередь, должна учитывать природу информации о подлежащих учету отклонениях в значениях экзогенных параметров, которая в весьма обширном ряде случаев не носит корректного статистического характера, что, тем самым, затрудняет обоснованное применение методов вероятностно-стохастического анализа для получения искомых эндогенных оценок [8 - 9].

В контексте представленных соображений целью настоящей работы является разработка методики получения оценок для возможных разбросов значений эндогенных параметров скоростей крутильных волн, рассчитываемых на основе нескольких вариантов уточненных теорий динамического кручения прямых однородных тонкостенных стержней [1 - 7]. Для построения такой методики с учетом задачи использования в ней информации о разбросах исходных параметров,

получаемой на основе экспертных заключений и опытных оценок, могут быть применены методологические принципы теории нечетких множеств [10 - 16]. Предлагаемый в работе подход базируется на применении соотношений детерминистических вариантов анализируемых моделей с переходом в их расчетных соотношениях к нечетко-множественным аргументам путем фрагментированного поэтапного применения альфа-уровневой формы эвристического принципа обобщения в сочетании с методами нечетко-интервальной арифметики.

1. Нечетко-множественные оценки для скоростей волн кручения, получаемых в рамках теории стесненного кручения С.П. Тимошенко. В рамках уточненной модели С.П. Тимошенко, описывающей распространение крутильных волн в однородном изотропном стержне с полярным моментом инерции I_r , крутильным моментом инерции I_x , секториальным моментом инерции I_ω , из материала с параметром плотности ρ , модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона ν и соответствующим модулем сдвига $G = E(2(1 + \nu))^{-1}$, дисперсионное уравнение для волны кручения с круговой частотой ω и волновым числом k , а также представление для фазовых скоростей V_f исследуемых волн, имеют вид

$$\omega = \omega(k) = (GI_x/\rho I_r)^{1/2} k (1 + (EI_\omega/GI_x)k^2)^{1/2}, \quad (1)$$

$$V_f = F_V(\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega, k) = (GI_x/\rho I_r)^{1/2} (1 + (EI_\omega/GI_x)k^2)^{1/2}. \quad (2)$$

В рамках предположения о существовании разбросов в значениях экзогенных физико-механических и геометрических параметров стержня $\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega$, содержащихся в представлении (2) для эндогенной характеристики V_f , осуществляется переход к описанию указанных исходных параметров нормальными нечеткими множествами $\tilde{\rho}, \tilde{\nu}, \tilde{E}, \tilde{I}_r, \tilde{I}_x, \tilde{I}_\omega$, дополняемый гипотезами о формах функций принадлежности $\mu_{\tilde{\rho}}(\rho), \mu_{\tilde{\nu}}(\nu), \mu_{\tilde{E}}(E)$, а также о формах функций принадлежности для определяющих вид $\tilde{I}_r, \tilde{I}_x, \tilde{I}_\omega$ нечетко-множественных геометрических параметров стержней с рассматриваемыми конкретными формами поперечных сечений. Количественные характеристики функций принадлежности соответствующих профилей определяются на основе имеющихся статистических данных либо экспертных заключений.

Реализация описываемого подхода применительно ко всем вариантам рассматриваемых в работе моделей осуществляется для частного случая однородного изотропного стержня двутаврового сечения [5]. В рассматриваемом варианте представленная на рисунке 1 форма сечения определяется тремя параметрами B, h, t , через которые три геометрические характеристики I_r, I_x, I_ω выражаются формулами [5]

$$\begin{aligned} I_r &= (B(h+t)^3 + 2tB^3 + (h-t)t^3 - (b-t)(h-t)^3)/12, \\ I_x &= (2B+h)t^3/3, \quad I_\omega = B^3h^2t/24. \end{aligned} \quad (3)$$

Соотношения (3) могут интерпретироваться как преобразования независимых переменных. В дальнейшем для параметров B, h, t также вводятся их обоб-

ценные учитывающие разбросы представления в виде нормальных нечетких множеств \tilde{B} , \tilde{h} , \tilde{t} с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{B}}(B)$, $\mu_{\tilde{h}}(h)$, $\mu_{\tilde{t}}(t)$.

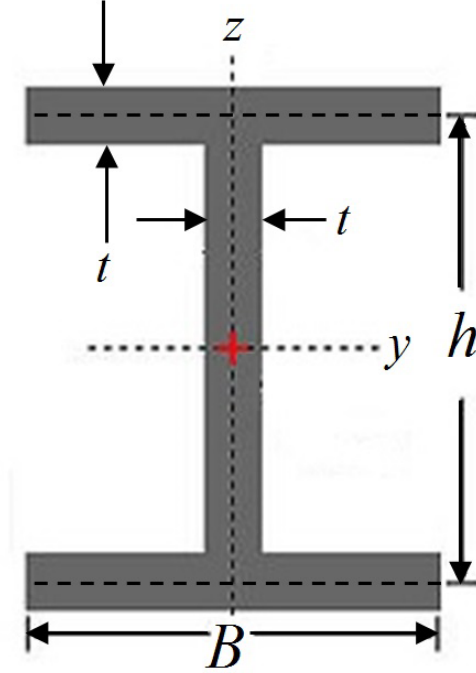


Рис. 1. Геометрические параметры двутаврового сечения.

В рассматриваемом варианте методики оценивания разбросов для значений фазовых скоростей волн кручения в стержневой конструкции вводится предположение возможности описания нечетко-множественных физико-механических $\tilde{\rho}$, $\tilde{\nu}$, \tilde{E} и геометрических \tilde{B} , \tilde{h} , \tilde{t} параметров нормальными трапецидальными нечеткими интервалами [17 - 20] с кортежами реперных точек

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4), \quad \tilde{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4), \quad \tilde{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4), \\ \tilde{B} &= (B_1, B_2, B_3, B_4), \quad \tilde{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4), \quad \tilde{t} = (t_1, t_2, t_3, t_4). \end{aligned} \quad (4)$$

Введенные нечетко-интервальные величины $\tilde{\rho}$, $\tilde{\nu}$, \tilde{E} и \tilde{B} , \tilde{h} , \tilde{t} могут быть представлены суперпозициями множеств α – уровня в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha], \quad \tilde{\nu} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha], \quad \tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha], \\ \tilde{B} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{B}_\alpha, \bar{B}_\alpha], \quad \tilde{h} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha], \quad \tilde{t} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{t}_\alpha, \bar{t}_\alpha], \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}
 \underline{\rho}_\alpha &= (1 - \alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2, & \bar{\rho}_\alpha &= \alpha\rho_3 + (1 - \alpha)\rho_4, \\
 \underline{\nu}_\alpha &= (1 - \alpha)\nu_1 + \alpha\nu_2, & \bar{\nu}_\alpha &= \alpha\nu_3 + (1 - \alpha)\nu_4, \\
 \underline{E}_\alpha &= (1 - \alpha)E_1 + \alpha E_2, & \bar{E}_\alpha &= \alpha E_3 + (1 - \alpha)E_4, \\
 \underline{B}_\alpha &= (1 - \alpha)B_1 + \alpha B_2, & \bar{B}_\alpha &= \alpha B_3 + (1 - \alpha)B_4, \\
 \underline{h}_\alpha &= (1 - \alpha)h_1 + \alpha h_2, & \bar{h}_\alpha &= \alpha h_3 + (1 - \alpha)h_4, \\
 \underline{t}_\alpha &= (1 - \alpha)t_1 + \alpha t_2, & \bar{t}_\alpha &= \alpha t_3 + (1 - \alpha)t_4.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Соответственно нечетко-множественные геометрические характеристики \tilde{I}_r , \tilde{I}_x , \tilde{I}_ω , получаемые на основе перехода к нечетко-интервальным аргументам в соотношениях (3) и использования правил арифметики нечетких интервалов, также являются нечетко-интервальными величинами с кортежами реперных точек

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_r &= (I_{r1}, I_{r2}, I_{r3}, I_{r4}), & \tilde{I}_x &= (I_{x1}, I_{x2}, I_{x3}, I_{x4}), \\
 \tilde{I}_\omega &= (I_{\omega1}, I_{\omega2}, I_{\omega3}, I_{\omega4}),
 \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
 I_{r1} &= (B_1(h_1 + t_1)^3 + 2t_1B_1^3 + (h_1 - t_4)t_1^3 - (B_4 - t_1)(h_4 - t_1)^3)/12, \\
 I_{r2} &= (B_2(h_2 + t_2)^3 + 2t_2B_2^3 + (h_2 - t_3)t_2^3 - (B_3 - t_2)(h_3 - t_2)^3)/12, \\
 I_{r3} &= (B_3(h_3 + t_3)^3 + 2t_3B_3^3 + (h_3 - t_2)t_3^3 - (B_2 - t_3)(h_2 - t_3)^3)/12, \\
 I_{r4} &= (B_4(h_4 + t_4)^3 + 2t_4B_4^3 + (h_4 - t_1)t_4^3 - (B_1 - t_4)(h_1 - t_4)^3)/12; \\
 I_{x1} &= (2B_1 + h_1)t_1^3/3, & I_{x2} &= (2B_2 + h_2)t_2^3/3, \\
 I_{x3} &= (2B_3 + h_3)t_3^3/3, & I_{x4} &= (2B_4 + h_4)t_4^3/3; \\
 I_{\omega1} &= B_1^3h_1^2t_1/24, & I_{\omega2} &= B_2^3h_2^2t_2/24, \\
 I_{\omega3} &= B_3^3h_3^2t_3/24, & I_{\omega4} &= B_4^3h_4^2t_4/24.
 \end{aligned} \tag{8}$$

В свою очередь нечетко-интервальные величины \tilde{I}_r , \tilde{I}_x , \tilde{I}_ω также могут быть представлены суперпозициями множеств α - уровня

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_r &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{I}_{r\alpha}, \bar{I}_{r\alpha}], & \tilde{I}_x &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{I}_{x\alpha}, \bar{I}_{x\alpha}], \\
 \tilde{I}_\omega &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{I}_{\omega\alpha}, \bar{I}_{\omega\alpha}],
 \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_{r\alpha} &= (1 - \alpha)I_{r1} + \alpha I_{r2}, & \bar{I}_{r\alpha} &= \alpha I_{r3} + (1 - \alpha)I_{r4}, \\
 \underline{I}_{x\alpha} &= (1 - \alpha)I_{x1} + \alpha I_{x2}, & \bar{I}_{x\alpha} &= \alpha I_{x3} + (1 - \alpha)I_{x4}, \\
 \underline{I}_{\omega\alpha} &= (1 - \alpha)I_{\omega1} + \alpha I_{\omega2}, & \bar{I}_{\omega\alpha} &= \alpha I_{\omega3} + (1 - \alpha)I_{\omega4}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Непосредственно процедура получения параметрических нечетких оценок $\tilde{V}_f(k)$ для значений фазовых скоростей упругих волн кручения в рассматриваемой модели динамического крутильного деформирования стержня заключается в применении модифицированной α -уровневой формы эвристического принципа расширения [21 - 22] к функциональной зависимости (2). При этом в качестве элемента применения данного приема используется возможность получения оценок, справедливых во всей области определения аргументов функции $V_f = F_V(\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega, k)$:

$$\begin{aligned} \partial F_V(\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega, k)/\partial \rho &< 0; \\ \partial F_V(\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega, k)/\partial E &> 0; \\ \partial F_V(\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega, k)/\partial I_r &< 0; \\ \partial F_V(\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega, k)/\partial I_\omega &> 0. \end{aligned} \quad (11)$$

В результате для эндогенной нечетко-множественной характеристики $\tilde{V}_f(k)$ записывается параметрическое представление вида

$$\tilde{V}_f(k) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [V_{f\alpha}(k), \bar{V}_{f\alpha}(k)], \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \underline{V}_{f\alpha}(k) &= \inf_{\substack{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha] \\ I_x \in [\underline{I}_{x\alpha}, \bar{I}_{x\alpha}]}} \{F_V(\bar{\rho}_\alpha, \nu, \underline{E}_\alpha, \bar{I}_{r\alpha}, I_x, \underline{I}_{\omega\alpha}, k)\}, \\ \bar{V}_{f\alpha}(k) &= \sup_{\substack{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha] \\ I_x \in [\underline{I}_{x\alpha}, \bar{I}_{x\alpha}]}} \{F_V(\underline{\rho}_\alpha, \nu, \bar{E}_\alpha, \underline{I}_{r\alpha}, I_x, \bar{I}_{\omega\alpha}, k)\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Пример численной реализации описанной методики относится к задаче описания разбросов в получаемых количественных оценках при анализе параметрической зависимости $\tilde{V}_f(k)$ для стержневого элемента двутаврового сечения со следующими нечетко-интервальными экзогенными параметрами:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= (7.72\rho_*, 7.78\rho_*, 7.81\rho_*, 7.84\rho_*), \\ \tilde{\nu} &= (0.29, 0.297, 0.301, 0.307), \\ \tilde{E} &= (202E_*, 205E_*, 207E_*, 209E_*), \\ \tilde{B} &= (0.195l_*, 0.2l_*, 0.204l_*, 0.206l_*), \\ \tilde{h} &= (0.374l_*, 0.377l_*, 0.378l_*, 0.38l_*), \\ \tilde{t} &= (0.02l_*, 0.022l_*, 0.0225l_*, 0.023l_*), \\ \rho_* &= 10^3[\text{кг/м}^3], \quad E_* = 1[\text{ГПа}], \quad l_* = 1[\text{м}]. \end{aligned} \quad (14)$$

Для данного набора нечетко-интервальных параметров с использованием соотношений (8) определяются величины нечетких геометрических характеристик

$\tilde{I}_r, \tilde{I}_x, \tilde{I}_\omega$:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_r &= (2.957I_*, 4.040I_*, 4.653I_*, 5.376I_*), \\ \tilde{I}_x &= (2.037I_{**}, 2.758I_{**}, 2.984I_{**}, 3.212I_{**}), \\ \tilde{I}_\omega &= (0.864I_{***}, 1.042I_{***}, 1.137I_{***}, 1.210I_{***}), \\ I_* &= 10^{-4}[\text{M}^4], \quad I_{**} = 10^{-6}[\text{M}^4], \quad I_{***} = 10^{-6}[\text{M}^6]. \end{aligned} \tag{15}$$

Формы функций принадлежности для рассматриваемого ряда нечетко-множественных исходных параметров представлены на рисунках 2 – 10.

Результаты расчетов для описываемой соотношениями (12), (13) нечетко-множественной эндогенной характеристики $\tilde{V}_f(k)$ рассматриваемой модели соответственно представленному варианту задания неопределенных исходных параметров приведены на рисунках 11 – 14.

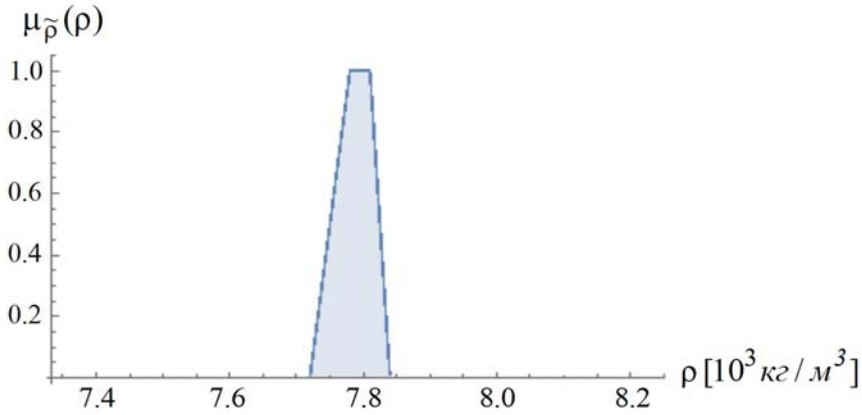


Рис. 2. Функция принадлежности $\tilde{\rho}$.

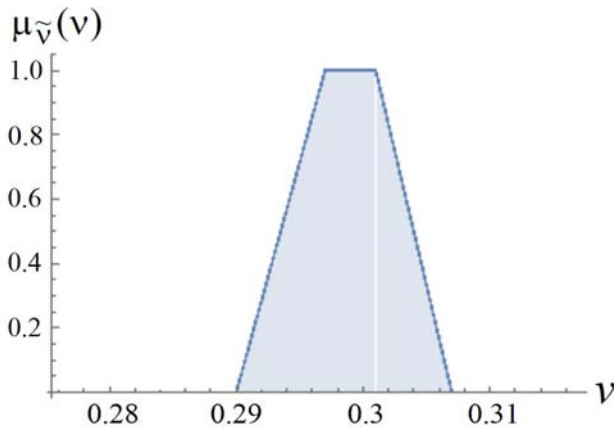


Рис. 3. Функция принадлежности $\tilde{\nu}$.

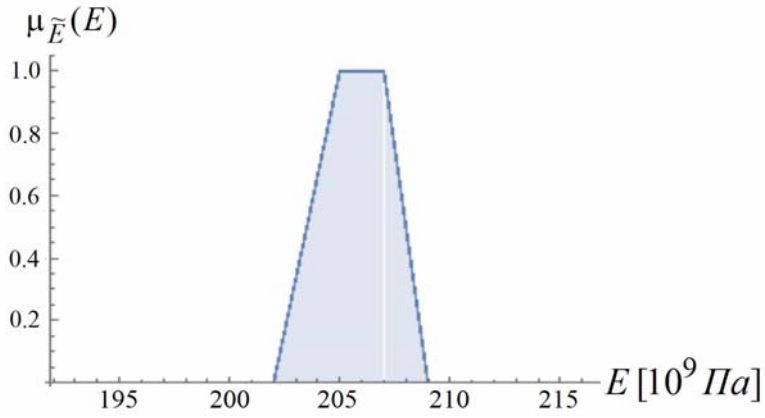


Рис. 4. Функция принадлежности \tilde{E} .

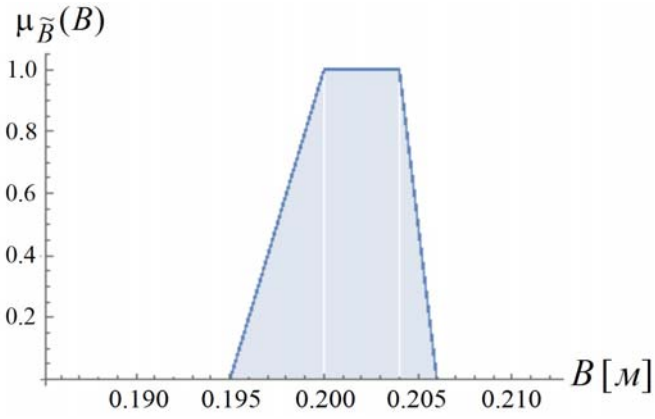


Рис. 5. Функция принадлежности \tilde{B} .

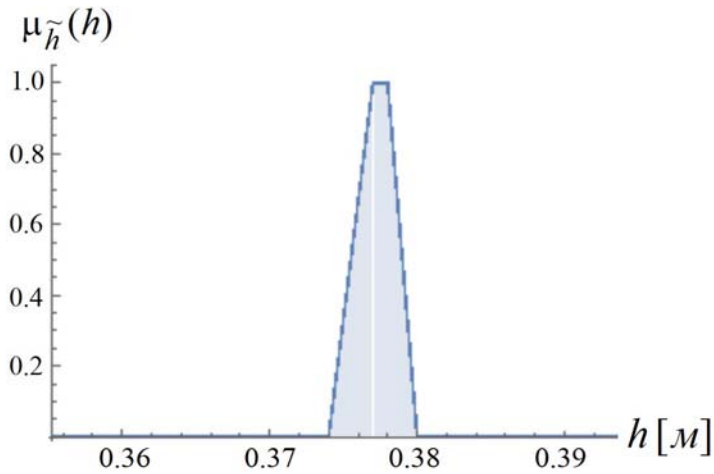


Рис. 6. Функция принадлежности \tilde{h} .

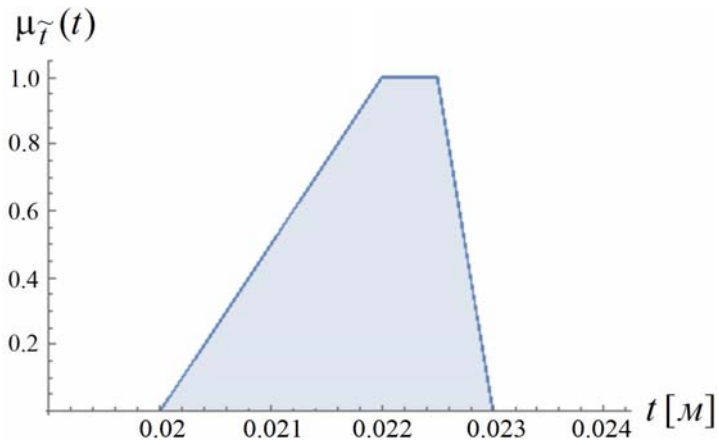


Рис. 7. Функция принадлежности \tilde{t} .

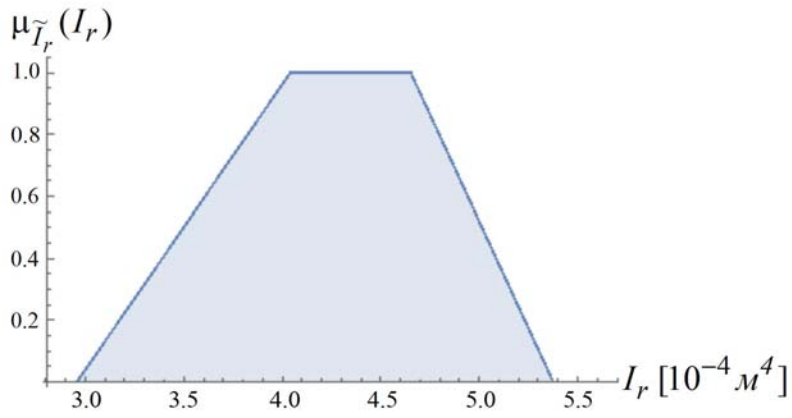


Рис. 8. Функция принадлежности \tilde{I}_r .

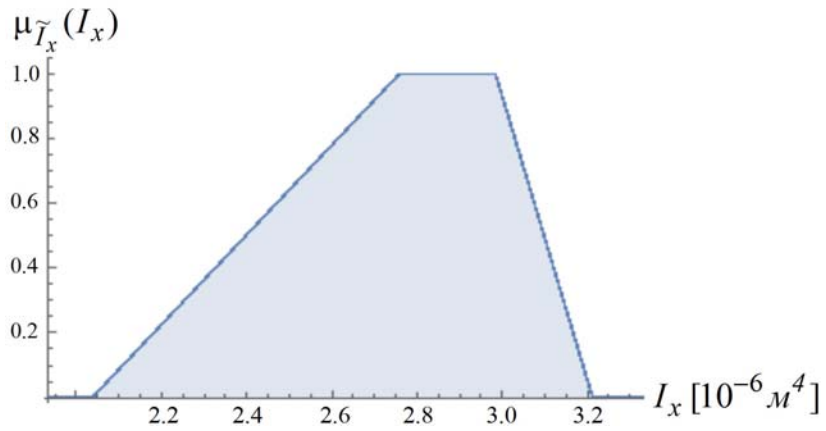


Рис. 9. Функция принадлежности \tilde{I}_x .

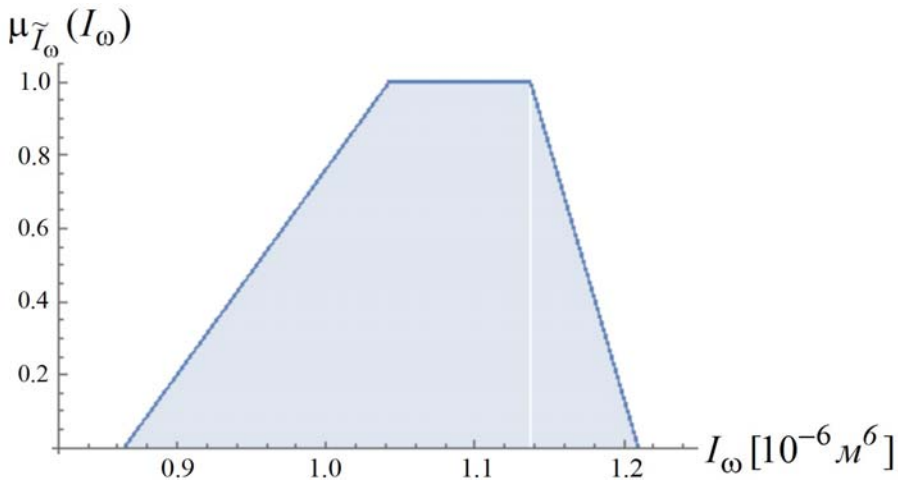


Рис. 10. Функция принадлежности \tilde{I}_ω .

Так на рисунке 11 представлены параметрические зависимости для границ $\mu = 0$ носителей и границ $\mu = 1$ модальных областей максимальной достоверности нечетко-множественных оценок эндогенных параметров $\tilde{V}_f(k)$ от параметра волнового числа k крутильной волны (связанного соотношением $\lambda = 2\pi/k$ с относительной длиной λ волны кручения), а на рисунках 12, 13 и 14 – соответственно формы функций принадлежности для нечетко-множественных оценок $\tilde{V}_f(0.1)$, $\tilde{V}_f(1.8)$ и $\tilde{V}_f(3.6)$.

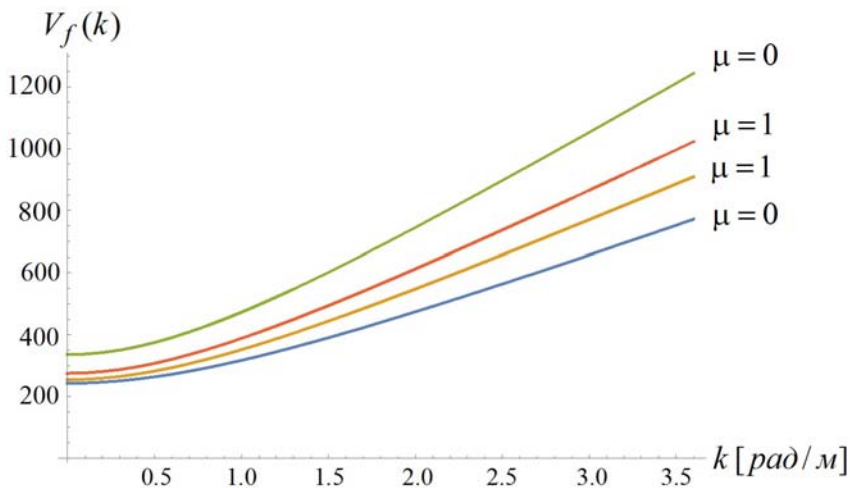


Рис. 11. Распределения $V_f(k)$ с показателями $\mu_{\tilde{V}_f(k)}(V_f(k))$.

Как следует из этих распределений, степень неопределенности эндогенной характеристики $\tilde{V}_f(k)$ при рассматриваемых значениях заданных с разбросами исходных параметров возрастает с увеличением k .

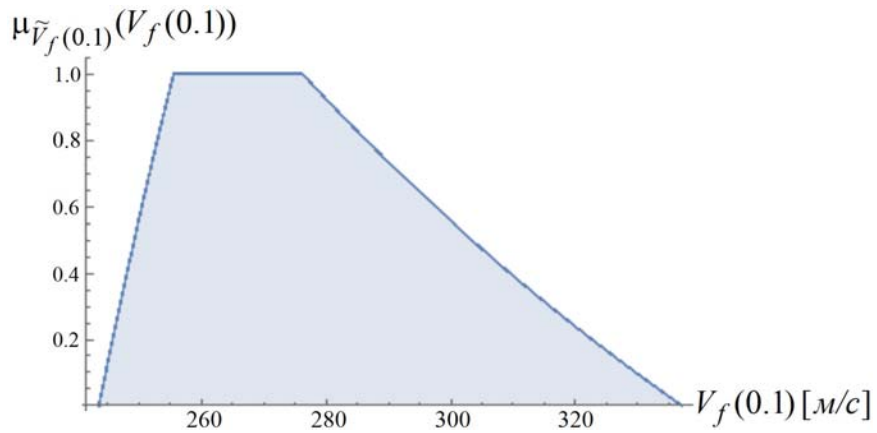


Рис. 12. Функция принадлежности $\tilde{V}_f(0.1)$.

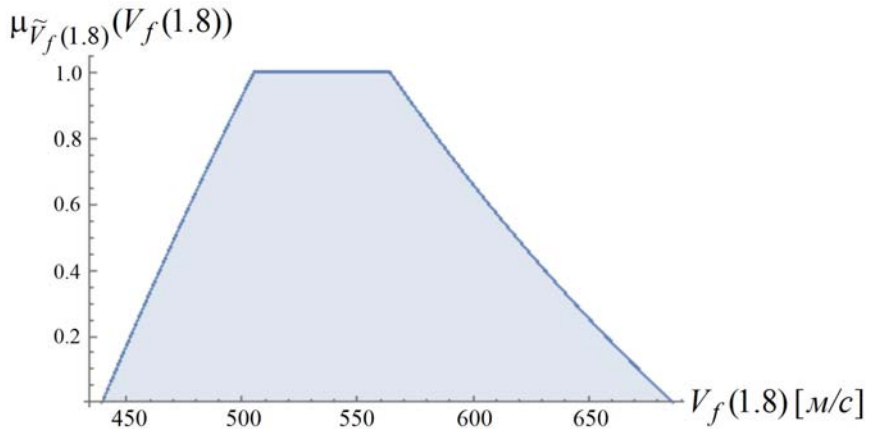


Рис. 13. Функция принадлежности $\tilde{V}_f(1.8)$.

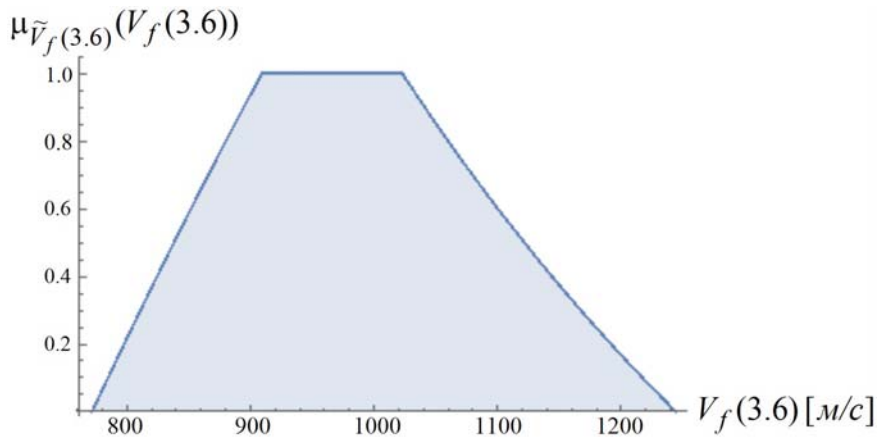


Рис. 14. Функция принадлежности $\tilde{V}_f(3.6)$.

2. Нечетко-множественные оценки для скоростей волн кручения, получаемых в рамках модели учета кинетической энергии деформации. Вторым рассматриваемым вариантом анализируемой уточненной модели распространения крутильных волн в однородном изотропном стержне является модель В.З. Власова, особенностью которой является учет кинетической энергии деформации [4 - 5]. В рамках этой модели дисперсионное соотношение и представление для фазовой скорости исследуемых волн [5] имеют вид

$$\omega = \omega(k) = k(((GI_x/\rho I_r) + (EI_\omega/\rho I_r)k^2)/(1 + I_\omega I_r^{-1}k^2))^{1/2}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} V_{f1} &= F_{V1}(\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega, k) = \\ &= (((GI_x/\rho I_r) + (EI_\omega/\rho I_r)k^2)/(1 + I_\omega I_r^{-1}k^2))^{1/2}. \end{aligned} \quad (17)$$

В этом случае в рамках всех принятых в процессе анализа предшествующей рассмотренной модели предположений, а также с учетом оценок

$$\begin{aligned} \partial F_{V1}(\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega, k)/\partial \rho &< 0, \\ \partial F_{V1}(\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega, k)/\partial \nu &< 0, \\ \partial F_{V1}(\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega, k)/\partial E &> 0, \\ \partial F_V(\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega, k)/\partial I_x &> 0, \end{aligned} \quad (18)$$

для эндогенной нечетко-множественной характеристики $\tilde{V}_{f1}(k)$ записывается параметрическое представление вида

$$\tilde{V}_{f1}(k) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{V}_{f1\alpha}(k), \bar{V}_{f1\alpha}(k)], \quad (19)$$

в котором

$$\begin{aligned} \underline{V}_{f1\alpha}(k) &= \inf_{\substack{I_r \in [L_{r\alpha}, \bar{I}_{r\alpha}] \\ I_\omega \in [L_{\omega\alpha}, \bar{I}_{\omega\alpha}]} } \{F_V(\bar{\rho}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha, \underline{E}_\alpha, I_r, \underline{I}_{x\alpha}, I_\omega, k)\}, \\ \bar{V}_{f1\alpha}(k) &= \sup_{\substack{I_r \in [L_{r\alpha}, \bar{I}_{r\alpha}] \\ I_\omega \in [L_{\omega\alpha}, \bar{I}_{\omega\alpha}]} } \{F_V(\underline{\rho}_\alpha, \underline{\nu}_\alpha, \bar{E}_\alpha, I_r, \bar{I}_{x\alpha}, I_\omega, k)\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Численная реализация методики нечетко-множественного анализа данного варианта модели распространения волн кручения в стержневом элементе двутаврового сечения осуществляется для случая задания экзогенных параметров в виде (14), (15).

Результаты расчетов для описываемой соотношениями (19), (20) нечетко-множественной эндогенной характеристики $\tilde{V}_{f1}(k)$ рассматриваемой модели соответственно варианту (14) задания неопределенных исходных параметров приведены на рисунках 15 – 22.

Диапазоны изменения и отдельные значения k в расчетах, иллюстрируемых на рисунках 15–18, идентичны выбранным ранее при расчетах с использованием модели С.П. Тимошенко. Так, на рисунке 15 для данного варианта уточненной модели представлены параметрические зависимости для $\tilde{V}_{f1}(k)$, отвечающих границам $\mu = 0$ носителей и границам $\mu = 1$ модальных областей максимальной достоверности нечетко-множественных оценок эндогенных параметров $\tilde{V}_{f1}(k)$ от параметра волнового числа k крутильной волны (параметра, связанного соотношением $\lambda = 2\pi/k$ с относительной длиной λ волны кручения). На рисунках 16, 17 и 18 даны отвечающие рассматриваемому варианту уточненной модели В.З. Власова формы функций принадлежности для нечетко-множественных оценок $\tilde{V}_{f1}(0.1)$, $\tilde{V}_{f1}(1.8)$ и $\tilde{V}_{f1}(3.6)$. Сопоставление результатов, получаемых соответственно двум рассматриваемым моделям, указывает на крайне незначительное уменьшение значений k , соответствующих границам диапазонов получаемых нечетко-множественных оценок при использовании модели В.З. Власова. Как и в случае ранее проанализированной модели С.П.Тимошенко, степень неопределенности эндогенной характеристики $\tilde{V}_{f1}(k)$ при рассматриваемых значениях заданных с разбросами исходных параметров в исследуемом диапазоне изменения волнового числа возрастает с увеличением k .

На рисунках 19 – 22 приведены аналогичные результаты расчетов в более широком диапазоне изменения волнового числа крутильной волны. При этом на основании расчетов, отраженных на рисунке 19, можно заключить, что изменение степени неопределенности для нечеткой оценки $\tilde{V}_{f1}(k)$ не является монотонным; мера неопределенности нарастает к середине диапазона изменения $k \in [0, 36]$, однако при дальнейшем росте k возникает тенденция к снижению степени разбросов эндогенного параметра фазовой скорости.

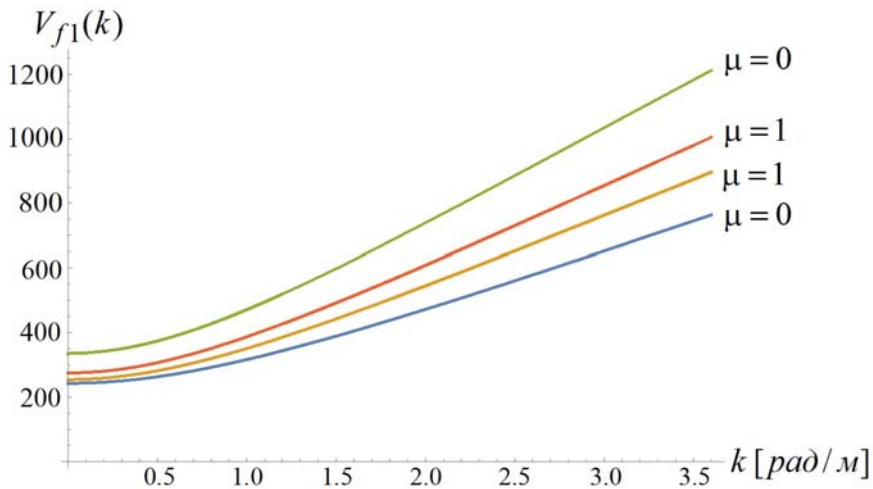


Рис. 15. Распределения $V_f(k)$ с показателями $\mu_{\tilde{V}_f(k)}(V_f(k))$.

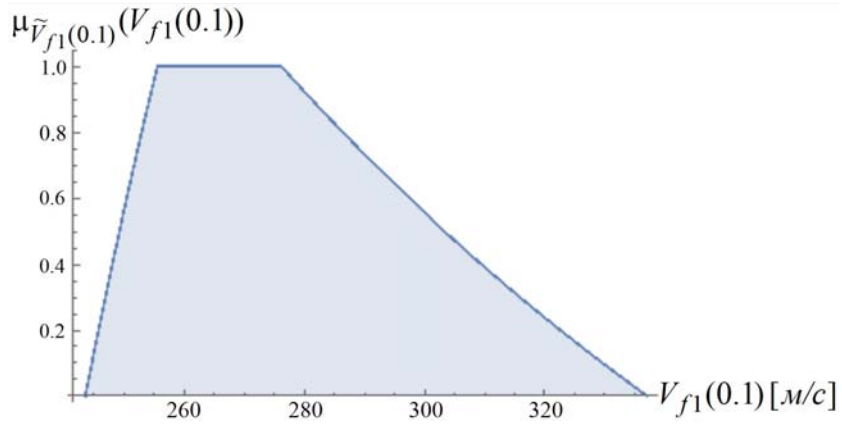


Рис. 16. Функция принадлежности $\tilde{V}_{f1}(0.1)$.

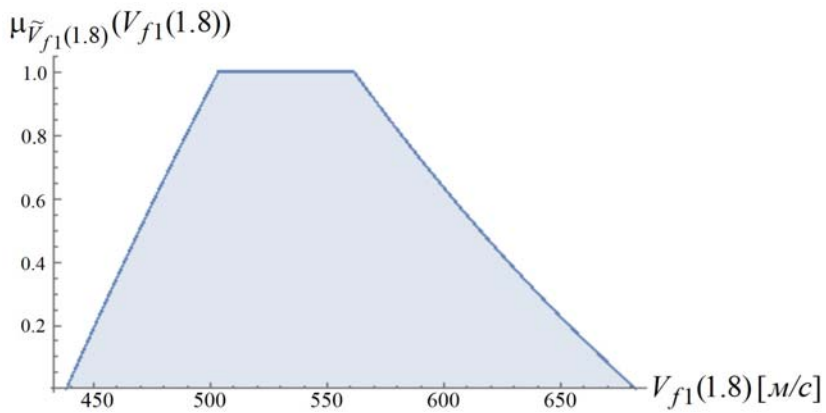


Рис. 17. Функция принадлежности $\tilde{V}_{f1}(1.8)$.

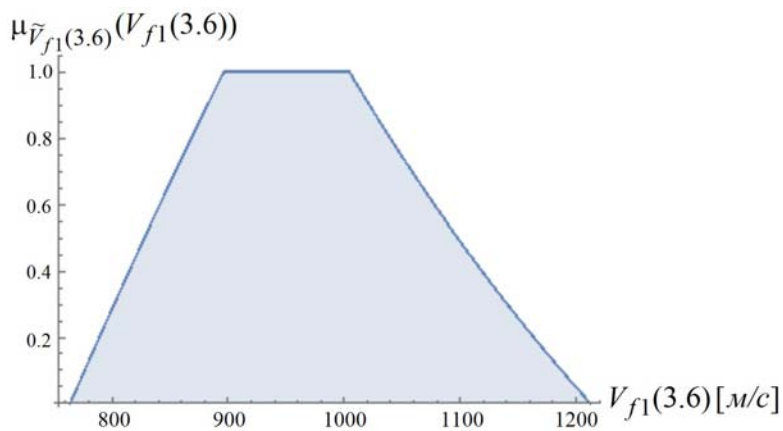


Рис. 18. Функция принадлежности $\tilde{V}_{f1}(3.6)$.

Нечетко-множественные оценки скоростей волн кручения

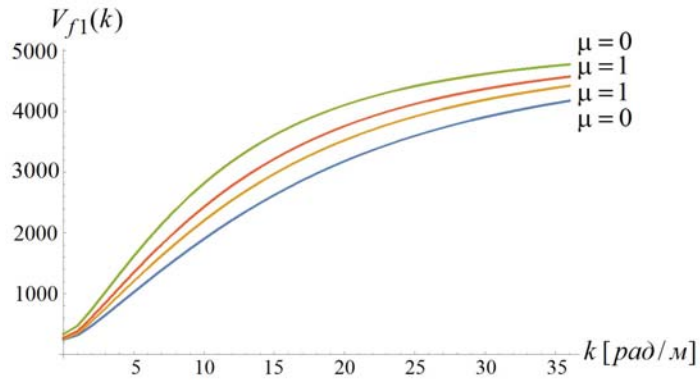


Рис. 19. Распределения $V_{f1}(k)$ с показателями $\mu_{\tilde{V}_{f1}(k)}(V_{f1}(k))$.

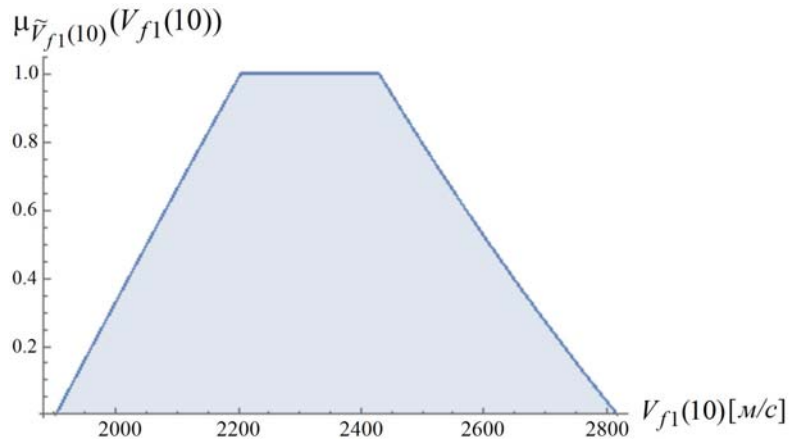


Рис. 20. Функция принадлежности $\tilde{V}_{f1}(10)$.

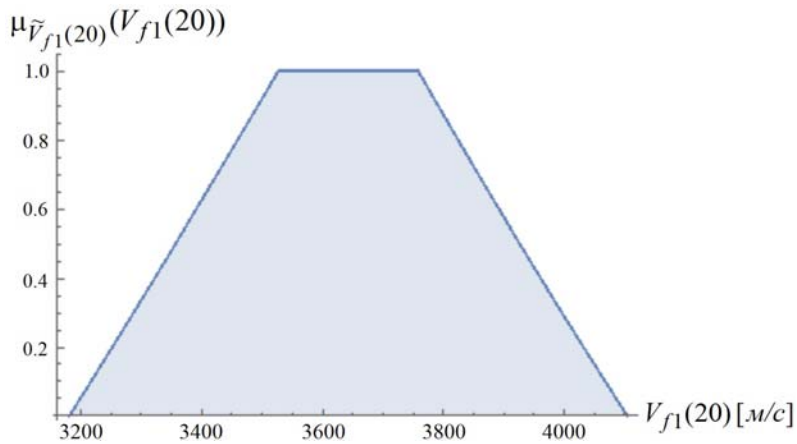


Рис. 21. Функция принадлежности $\tilde{V}_{f1}(20)$.

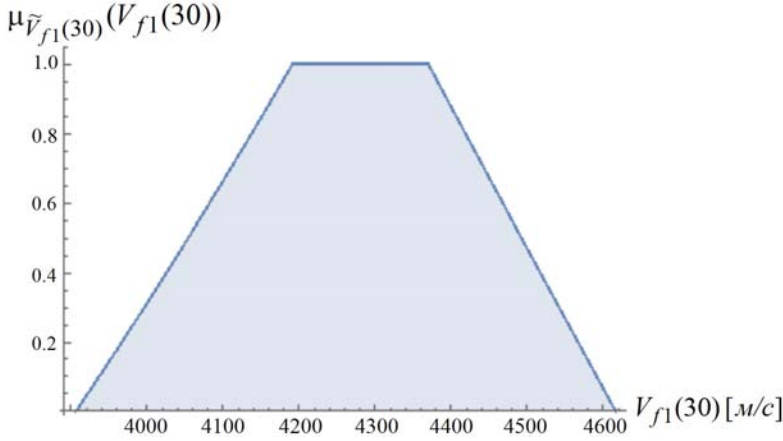


Рис. 22. Функция принадлежности $\tilde{V}_{f1}(30)$.

3. Нечетко-множественные оценки для скоростей волн кручения, получаемых в рамках модели частичного учета энергии деформаций сдвига. Третьим рассматриваемым вариантом уточненной модели распространения волн кручения в стержневом элементе двутаврового сечения, для которого разрабатывается методика нечетко-множественного обобщения с целью учета влияния разбросов значений исходных физико-механических и геометрических параметров, является описываемая в работах [5 - 7] модель И.В. Сливкера. Специфика уточнения в картине анализируемых деформационных процессов, вносимого данной моделью, заключается в частичном учете энергии деформаций сдвига при описании эффектов закручивания прямых тонких стрижней с деформацией [5 - 7].

В рамках данной модели наряду с экзогенными физико-механическими характеристиками, введенными в вышерассмотренных уточненных моделях С.П. Тимошенко и В.З. Власова, учитывается [5 - 7] специальный геометрический параметр ψ и вводится в рассмотрение геометрическая характеристика

$$I_g = 480I_\omega^2 \cdot (B^5 h^2 t)^{-1}, \quad (21)$$

$$I_g = (\psi - 1)^{-1} I_x = (\psi - 1)^{-1} (2B + h)t^3/3.$$

Дисперсионное уравнение для бегущих крутильных волн и представление для их фазовых скоростей согласно данной версии уточненной модели описывает две ветви [5] («акустическую» $j = 1$ и «оптическую» $j = 2$) с аналитическими описаниями

$$\omega = \omega_j(k) = [(-b + ck^2) + (-1)^j((b + ck^2)^2 - 4a(dk^2 + fk^3))]/(2a)]^{1/2}, \quad (22)$$

$$V_{f2}^{(j)} = F_{V2}^{(j)}(\rho, \nu, E, B, h, t, \psi, k) =$$

$$= (k\rho)^{-1} [(-b + ck^2) + (-1)^j((b + ck^2)^2 - 4a(dk^2 + fk^3))]^{1/2} / (2a)]^{1/2}, \quad (23)$$

где [5]

$$\begin{aligned} a &= I_r I_\omega, & b &= -G I_r I_g, & c &= -G \psi I_\omega I_g - E I_\omega I_r, \\ d &= G^2 I_x I_g, & f &= E G \psi I_\omega I_g. \end{aligned} \quad (24)$$

При нечетко-множественном обобщении рассматриваемого варианта модели используются все гипотезы и предположения, принимавшиеся выше в отношении природы и способа представления нечетких исходных параметров рассматриваемой конструкции в процессе анализа скоростей волн кручения на базе уточненных моделей С.П. Тимошенко и В.З. Власова и дополняемые введением нечетко-интервальных геометрических параметров

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} &= (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4), \\ \tilde{\psi} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\psi}_\alpha, \overline{\psi}_\alpha], \\ \underline{\psi}_\alpha &= (1 - \alpha)\psi_1 + \alpha\psi_2, & \overline{\psi}_\alpha &= \alpha\psi_3 + (1 - \alpha)\psi_4; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= (G_1, G_2, G_3, G_4), \\ G_1 &= E_1(2(1 + \nu_4))^{-1}, & G_2 &= E_2(2(1 + \nu_3))^{-1}, \\ G_3 &= E_3(2(1 + \nu_2))^{-1}, & G_4 &= E_4(2(1 + \nu_1))^{-1}; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_g &= (I_{g1}, I_{g2}, I_{g3}, I_{g4}), \\ I_{g1} &= I_{x1}/(\psi_4 - 1), & I_{g2} &= I_{x2}/(\psi_3 - 1), \\ I_{g3} &= I_{x3}/(\psi_2 - 1), & I_{g4} &= I_{x4}/(\psi_1 - 1); \\ \underline{I}_{g\alpha} &= (1 - \alpha)I_{g1} + \alpha I_{g2}, & \overline{I}_{g\alpha} &= \alpha I_{g3} + (1 - \alpha)I_{g4}. \end{aligned} \quad (27)$$

С учетом оценки

$$\partial F_{V_2}^{(j)}(\rho, \nu, E, B, h, t, \psi, k)/\partial \rho < 0, \quad (28)$$

для эндогенной нечетко-множественной характеристики $\tilde{V}_{f_2}^{(j)}(k)$ записывается параметрическое представление вида

$$\tilde{V}_{f_2}^{(j)}(k) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{V}_{f_2\alpha}^{(j)}(k), \overline{V}_{f_2\alpha}^{(j)}(k)], \quad (29)$$

в котором

$$\begin{aligned} \underline{V}_{f_2\alpha}^{(j)}(k) &= \inf_{\substack{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha] \\ E \in [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha] \\ B \in [\underline{B}_\alpha, \overline{B}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha] \\ t \in [\underline{t}_\alpha, \overline{t}_\alpha] \\ \psi \in [\underline{\psi}_\alpha, \overline{\psi}_\alpha]}} \{F_{V_2}^{(j)}(\overline{\rho}_\alpha, \nu, E, B, h, t, \psi, k)\}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\bar{V}_{f2\alpha}^{(j)}(k) = \sup_{\substack{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha] \\ E \in [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha] \\ B \in [\underline{B}_\alpha, \bar{B}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha] \\ t \in [\underline{t}_\alpha, \bar{t}_\alpha] \\ \psi \in [\underline{\psi}_\alpha, \bar{\psi}_\alpha]}} \{F_{V2}^{(j)}(\underline{\rho}_\alpha, \nu, E, B, h, t, \psi, k)\}.$$

Численная реализация методики нечетко-множественного анализа данного варианта модели распространения волн кручения в стержневом элементе двутаврового сечения осуществляется для случая задания экзогенных параметров в виде (14), (15) а также соответствующего задания $\tilde{\psi}$ в на основе соотношения (21).

Некоторые результаты расчетов для описываемой соотношениями (23), (24), (29), (30) нечетко-множественной эндогенной характеристики $\tilde{V}_{f2}(k)$ в рассматриваемой уточненной модели приведены на рисунках 23 – 30. Диапазон изменения $k \in [0, 36]$ и отдельные значения k из этого диапазона в представляемых расчетах идентичны выбранным при расчетах с использованием модели В.З. Власова. При этом распределения на рисунках 23 – 26 относятся к частному случаю, когда физико-механические параметры материала стержня являются нечеткими величинами с описаниями (14), а геометрические параметры двутаврового сечения рассматриваемого стержня полагаются четкими величинами со значениями

$$\begin{aligned} B &= 0.2l_*, & h &= 0.378l_*, \\ t &= 0.022l_*. \end{aligned} \tag{31}$$

В качестве отдельных выводов, следующих из анализа результатов расчетов, можно отметить существенно более низкий уровень неопределенности эндогенного параметра $\tilde{V}_{f2}(k)$, определяемого на основании нечетко-множественного варианта модели И.В. Сливкера по сравнению с уровнем неопределенности параметра $\tilde{V}_{f2}(k)$, определяемого в рамках модели В.З. Власова. Также установлено достаточно существенное уменьшение значений k , соответствующих границам диапазонов нечетко-множественных оценок $\tilde{V}_{f2}(k)$ при использовании модели И.В. Сливкера, в сравнении с результатами, получаемыми на основе модели В.З. Власова. Изменение степени неопределенности для нечеткой оценки $\tilde{V}_{f2}(k)$ при использовании модели И.В. Сливкера является монотонным с нарастанием меры неопределенности при росте k в диапазоне $k \in [0, 36]$.

Следует также отметить, что результаты расчетов с применением всех трех рассмотренных вариантов уточненных моделей с высокой степенью корректности согласуются с оценками, получаемыми в работе [5] на основе детерминистических вариантов соответствующих моделей.

Нечетко-множественные оценки скоростей волн кручения

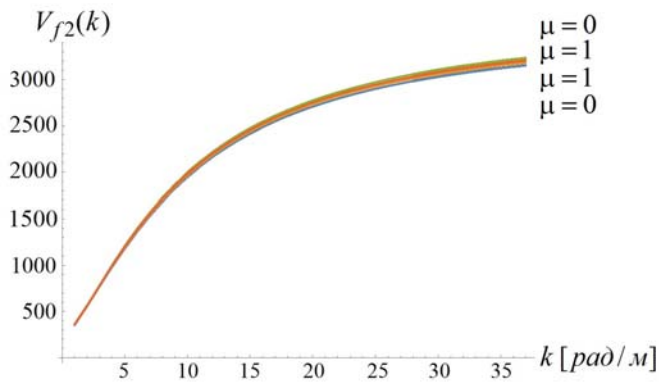


Рис. 23. Распределения $V_{f2}(k)$ с показателями $\mu_{\tilde{V}_{f2}(k)}(V_{f2}(k))$.

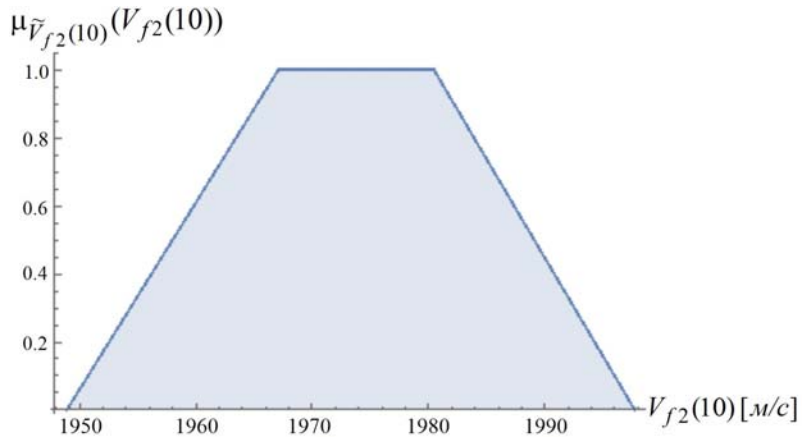


Рис. 24. Функция принадлежности $\tilde{V}_{f2}(10)$.

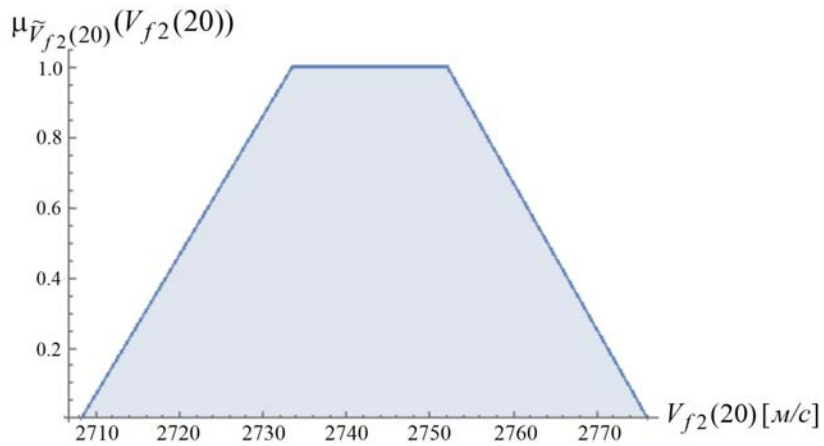


Рис. 25. Функция принадлежности $\tilde{V}_{f2}(20)$.

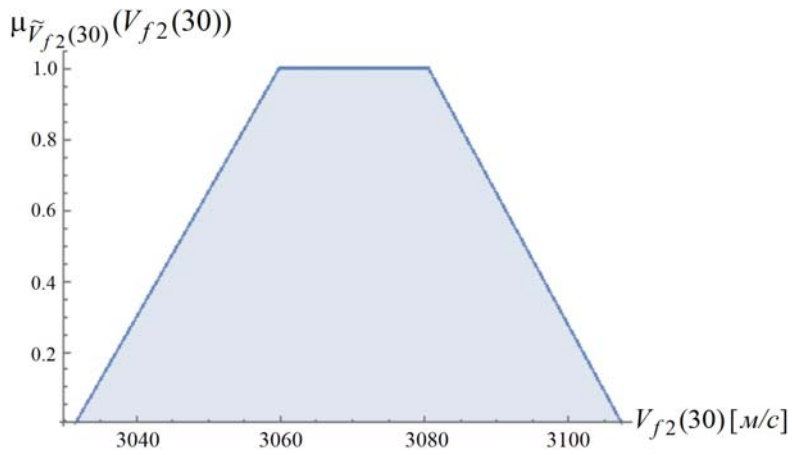


Рис. 26. Функция принадлежности $\tilde{V}_{f2}(30)$.

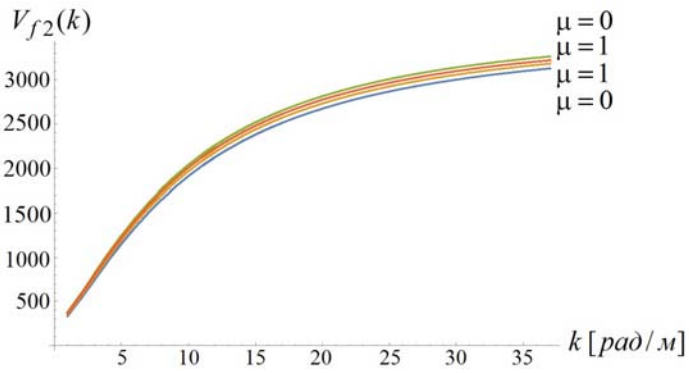


Рис. 27. Распределения $V_{f2}(k)$ с показателями $\mu_{\tilde{V}_{f2}(k)}(V_{f2}(k))$.

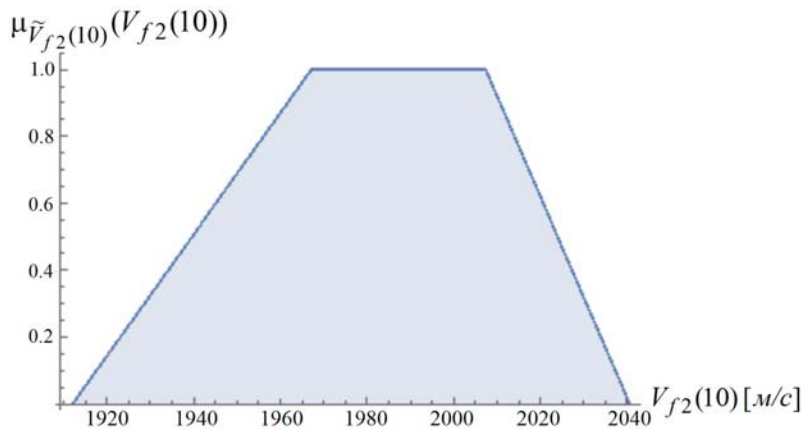


Рис. 28. Функция принадлежности $\tilde{V}_{f2}(10)$.

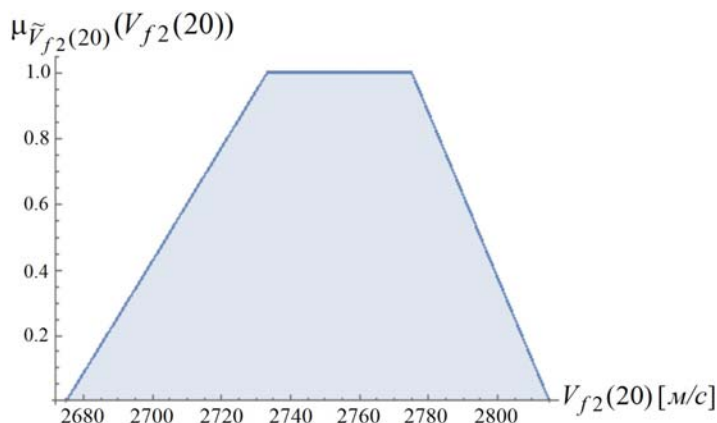


Рис. 29. Функция принадлежности $\tilde{V}_{f2}(20)$.

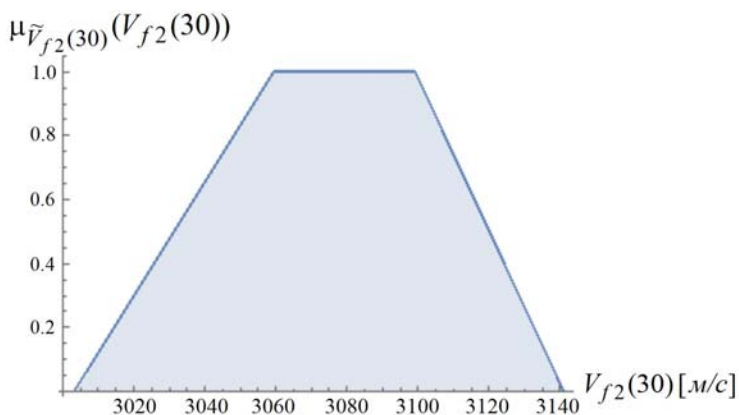


Рис. 30. Функция принадлежности $\tilde{V}_{f2}(30)$.

Выводы. Итогом представленных исследований является разработка нечетко-множественной численно-аналитической методики учета разбросов исходных значений физико-механических и геометрических параметров при получении оценок для значений скоростей волн деформаций крутильного типа в прямых стержнях на базе использования трех вариантов уточненных теорий. Разработанный и апробированный подход основывается на использовании модифицированных версий эвристического принципа обобщения в процессе перехода в соотношения классических моделей расчета фазовых скоростей к нечетко-множественным аргументам в виде нормальных трапециевидальных нечетких интервалов. Оценки, получаемые на основе применения разработанной методики, позволяют установить диапазоны наиболее достоверных отклонений в значениях анализируемых скоростей при заданных разбросах исходных физико-механических и геометрических параметров стержня, а также границы предельных достижимых разбросов значений анализируемых характеристик на минимальном уровне уверенности.

1. *Артоболевский И.И.* Введение в акустическую динамику машин / И. И. Артоболевский, Ю. И. Бобровницкий, М. Д. Генкин. – М.: Наука, 1979. – 296 с.
2. *Ерофеев В.И.* Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность / В.И. Ерофеев, В.В. Кажаяев, Н.П. Семерикова. – М.: Физматлит, 2002. – 208 с.
3. *Джанелидзе Г.Ю.* К теории тонких и тонкостенных стержней / Г.Ю. Джанелидзе // Прикладная математика и механика. – 1949. – Т. 13 – Вып. 6. – С. 44–57.
4. *Власов В.З.* Тонкостенные упругие стержни / В.З. Власов. – М.:Физматгиз, 1959. – 568 с.
5. *Дьяков С.Ф.* Дисперсия крутильной волны, распространяющейся в тонкостенном стержне / С.Ф. Дьяков, В.В. Лалин // Интернет-журнал «Науковедение». – 2013. – № 5. – <http://naukovedenie.ru> – 24ТВН513.
6. *Сливкер В.И.* Строительная механика. Вариационные основы. Учебное пособие / В.И. Сливкер. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2005. – 736 с.
7. *Дьяков С.Ф.* Сравнительный анализ задачи кручения тонкостенного стержня по моделям Власова и Сливкера / С.Ф. Дьяков // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2013. – № 1. – С. 24–32.
8. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел / В.А. Ломакин. – М.: Наука, 1970. – 139 с.
9. *Ларин В.Б.* Статистические задачи виброзащиты / В.Б. Ларин. – Киев: Наукова думка, 1974. – 128 с.
10. *Диллигенский Н.В.* Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Диллигенский Н.В., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В. – М.: Издательство Машиностроение – 1, 2004. – 397 с.
11. *Ротштейн А.П.* Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов / А.П. Ротштейн, С.Д. Штовба, А.Н. Козачко. – Винница: УНІВЕРСУМ, 2007. – 215 с.
12. *Алтунин А.Е.* Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях / А.Е. Алтунин, М.В. Семухин. – Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2002. – 352 с.
13. *Kaufmann A.* Introduction to fuzzy arithmetic-theory and applications / A. Kaufmann, M. Gupta. – New York: Van Nostrand Reinhold, 1985. – 349 p.
14. *Anastassiou G.A.* Fuzzy Mathematics: Approximation Theory / G.A. Anastassiou. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. – 444 p.
15. *Kandasamy W.B.V.* Special set linear algebra and special set fuzzy linear algebra / W.B.V. Kandasamy, F. Smarandache, K. Ilanthenral. – Slatina, Judetul Olt, Romania: Editura CuArt, 2009. – 469 p.
16. *Sonbol A.H.* TSK Fuzzy Function Approximators: Design and Accuracy Analysis / A.H. Sonbol, M.S. Fadali // IEEE Trans. Syst. Man and Cybern. – 2012. – Vol. 42 – P. 702–712.
17. *Ban A.I.* Trapezoidal approximation and Aggregation / A.I. Ban, L.C. Coroianu, P. Grzegorzewski // Fuzzy Sets Syst. – 2011. – Vol. 177. – P. 45–59.
18. *Bede B.* Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic / B. Bede. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. – 276 p.
19. *Grzegorzewski P.* Trapezoidal approximations of fuzzy numbers / P. Grzegorzewski, E. Mrrowka // Fuzzy Sets Syst. – 2005. – Vol. 153. – P. 115–135.
20. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
21. *Сторожев В.И.* Нечетко-множественные оценки в моделях теории объемных волн деформаций / В.И. Сторожев, С.В. Сторожев // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 103–111.
22. *Storozhev S.V.* Uncertainty in the models of the theory of volume elastic waves through the use of the theory of fuzzy sets / S.V. Storozhev // Modeling and information technologies: selected papers of the international scientific school "Paradigma"(Summer-2015, Varna, Bulgaria) / Compiling editor dr. sc., prof. O. Ja. Kravets. - Yelm, WA, USA: Science Book Publ. House,

2015. – P. 45–52.

S.V. Storozhev, S.B. Nombre, S.A. Priyenko

Fuzzy-multiple estimates of the velocities of torsion waves in thin-walled rods based on refined theories.

Dissemination of numerical-analytical fuzzy-set methods for obtaining of estimates of values of strain wave velocities in thin-walled structures to the case of analysis of torsion-type waves in straight rods with uncertain parameters based on the use of three variants of refined theories are realized. The developed and tested approach makes it possible to take into account the scatter errors of exogenous physical-mechanical and geometric parameters in the models under consideration and is based on the use of modified versions of the heuristic principle of generalization by the transition to fuzzy-set arguments with various types of membership functions in the ratios of classical models for calculating phase velocities.

Keywords: *straight homogeneous rods, uncertain physical-mechanical parameters, propagation of torsion wave, refined models, analysis of phase velocities, fuzzy-set technique, heuristic principle of generalization..*

ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры”, Макеевка
ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
s.storozhev@donnu.ru

Получено 08.04.2019

УДК 539.3

©2019. Е.С. Глушанков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМОЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСВЯЗНОЙ ПЬЕЗОПЛАСТИНКИ В СЛУЧАЕ НЕОДНОРОДНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ЕЕ КОНТУРАХ

В данной работе решена задача определения термоэлектромагнитоупругого состояния многосвязной пластинки из пьезоматериала, когда на ее контурах задано неоднородное распределение значений температуры. Решение построено с использованием конформных отображений и комплексных потенциалов. Для случая пластинки с одним эллиптическим отверстием найдено точное аналитическое решение задачи. В общем случае многосвязности задача решена с применением метода наименьших квадратов.

Ключевые слова: термоэлектромагнитоупругое состояние, температурные напряжения, многосвязная пластинка, комплексные потенциалы.

Введение. В различных областях науки и техники в качестве элементов конструкций широко применяются пластинки из пьезоматериалов. Эти пластинки могут содержать концентраторы напряжений типа отверстий или трещин. В процессе эксплуатации пластинки могут подвергаться действию различных температурных полей, в результате чего в них могут возникать высокие концентрации напряжений [1, 2]. Это следует учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. К настоящему времени были проведены обширные исследования различных случаев температурных воздействий, в том числе, действия на контурах пластинки разности температур, но при этом распределение температуры на каждом контуре полагалось однородным [3].

В данной работе рассмотрен случай действия неоднородно распределенной температуры на контурах отверстий. Для случая пластинки с одним отверстием построено точное аналитическое решение задачи, а в общем случае многосвязной области для решения задачи применен метод наименьших квадратов. Проведены численные исследования термоэлектромагнитоупругого состояния (ТЭМУС) с выявлением закономерностей влияния геометрии пластинки и свойств ее материала на значения основных характеристик ТЭМУС.

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную пластинку из пьезоматериала, находящуюся в условиях плоской задачи, занимающую многосвязную область S , ограниченную контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с центрами $O_l(x_{0l}, y_{0l})$, полуосями a_l, b_l , углами поворота φ_l (рис. 1). Контур L_l располагаются произвольно относительно друг друга, они могут касаться, пересекаться, переходить в прямолинейные разрезы. В случае наличия криволинейных отверстий

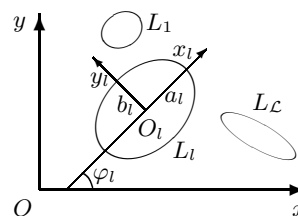


Рис. 1

их контуры можно аппроксимировать совокупностями дуг эллипсов и берегов прямолинейных разрезов. На контурах пластинки заданы непрерывные, гладкие, в общем случае, неоднородные распределения температуры T_l . Контуры не подкреплены либо жестко подкреплены, а нормальные компоненты векторов индукций электромагнитного поля равны нулю. На бесконечности напряжения, компоненты векторов индукции электромагнитного поля равны нулю ($\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = D_x^\infty = D_y^\infty = B_x^\infty = B_y^\infty = 0$).

Если несвязанную задачу определения ТЭМУС пластинки решать с использованием комплексных потенциалов, то она сводится к определению комплексного потенциала теплопроводности $F_5(z_5)$ и комплексных потенциалов термоэлектромагнитоупругости $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) из соответствующих граничных условий. Если эти функции определены, то основные характеристики ТЭМУС (температура T , напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, индукции D_x, D_y, B_x, B_y и напряженности E_x, E_y, H_x, H_y электромагнитного поля, перемещения u, v , потенциалы φ, ψ электромагнитного поля) вычисляются по формулам [3]

$$T = 2 \operatorname{Re} F_5(z_5); \quad (1)$$

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k); \quad (2)$$

$$(D_x, D_y, B_x, B_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\nu_k \mu_k, -\nu_k, \rho_k \mu_k, -\rho_k) \Phi'_k(z_k); \quad (3)$$

$$(E_x, E_y, H_x, H_y) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi'_k(z_k); \quad (4)$$

$$(u, v, \varphi, \psi) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k^0, q_k^0, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k). \quad (5)$$

Здесь μ_5 и μ_k ($k = \overline{1, 4}$) — корни характеристических уравнений теплопроводности и электромагнитоупругости [3, 4]

$$k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} = 0; \quad (6)$$

$$\Delta(\mu) = 0; \quad (7)$$

$$\Delta(\mu) = l_{4s}(\mu)[l_{2\beta}(\mu)l_{2\chi}(\mu) - l_{2\nu}^2(\mu)] - l_{3g}(\mu)[l_{3g}(\mu)l_{2\chi}(\mu) - l_{3p}(\mu)l_{2\nu}(\mu)] -$$

$$- l_{3p}(\mu)[l_{3p}(\mu)l_{2\beta}(\mu) - l_{3g}(\mu)l_{2\nu}(\mu)],$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11}\mu^4 + 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 + 2s_{26}\mu + s_{22},$$

$$l_{3g}(\mu) = g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu + g_{22},$$

$$l_{3p}(\mu) = p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu + p_{22},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22},$$

$$l_{2\nu}(\mu) = -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22};$$

$$\nu_k = \frac{l_{3p}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \nu_5 = \frac{r_\chi}{r_5},$$

$$\rho_k = \frac{l_{3g}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3p}(\mu_k)l_{2\beta}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \rho_5 = \frac{r_\omega}{r_5};$$

$$r_5 = \frac{l_5(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\chi = \frac{l_\chi(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\omega = \frac{l_\omega(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)},$$

$$l_5(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{1t}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{1m}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix}, \quad l_\chi(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\omega(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) \end{vmatrix};$$

$$l_{2\alpha}(\mu_5) = -\alpha_1\mu_5^2 + \alpha_6\mu_5 - \alpha_2,$$

$$l_{1t}(\mu_5) = t_1\mu_5 - t_2,$$

$$l_{1m}(\mu_5) = m_1\mu_5 - m_2;$$

$$p_k = s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} - (g_{11}\mu_k - g_{12})\nu_k - (p_{11}\mu_k - p_{12})\rho_k + \frac{\delta_k^5\alpha_1}{r_5};$$

$$q_k = s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} - (g_{21}\mu_k - g_{22})\nu_k - (p_{21}\mu_k - p_{22})\rho_k + \frac{\delta_k^5\alpha_2}{r_5\mu_5},$$

$$r_k^0 = g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})\nu_k - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\rho_k + \frac{\delta_k^5 t_1}{r_5},$$

$$h_k^0 = p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\nu_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k + \frac{\delta_k^5 m_1}{r_5};$$

$$\Phi_5(z_5) = r_5 \int F_5(z_5) dz_5;$$

k_{ij} — коэффициенты теплопроводности материала пластинки; s_{ij} — коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей и температуре; g_{ij} и p_{ij} — пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформаций и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях, индукциях и температуре; β_{ij} , ν_{ij} и χ_{ij} — коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной проницаемости, измеренные при постоянных напряжениях и температуре; α_i — коэффициенты

теплового расширения, измеренные при постоянной индукции электромагнитного поля; t_i и m_i — пирозлектрические и пиромагнитные модули, измеренные при постоянных напряжениях; δ_j^i — символ Кронекера.

Функции $F_5(z_5)$, $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) определены в многосвязных областях S_5 , S_k , получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями [3, 4]

$$z_5 = x + \mu_5 y, \quad (8)$$

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (9)$$

В общем случае многосвязной области эти функции имеют вид [3, 4]

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_l w_{5l}(z_5) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5); \quad (10)$$

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) w_{kl}(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k). \quad (11)$$

Здесь c_5 — вещественная постоянная, определяемая из условий на контурах пластинки; $D_l = -q_l/4\pi \varkappa_T$; q_l — суммарный поток тепла через контур L_l в область S ; $\varkappa_T = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}$; z_{5l} — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (8) произвольным точкам внутри контуров L_l ; $w_{5l} = \ln(z_5 - z_{5l})$; c_{5ln} — комплексные постоянные, определяемые из условий на контурах пластинки; $\varphi_{5ln}(z_5) = \zeta_{5l}^{-n}$; ζ_{5l} — переменные; Γ_k , A_{kl} , B_{kl} — постоянные, определяемые из систем уравнений

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, \nu_k, \mu_k \nu_k, \rho_k, \mu_k \rho_k) \Gamma_k = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \quad (12)$$

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i A_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \quad (13)$$

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i B_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \quad (14)$$

$\Gamma_5 = r_5 c_5$; $A_{5l} = r_5 D_l$; $B_{5l} = r_5 (b_{5l} - D_l z_{5l})$; b_{5l} — вычет функции $F_5(z_5)$ в точке z_{5l} ; z_{kl} — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (9) произвольным точкам внутри контуров L_l ; $w_{kl} = \ln(z_k - z_{kl})$; $\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}$; ζ_{kl} — переменные.

В локальных системах координат $O_l x_l y_l$ параметрические уравнения эллипсов (рис. 1) имеют вид [3, 4]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе Oxy координат —

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l,$$

где θ — параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π .

Переменные ζ_{5l} , ζ_{kl} определяются из конформных отображений внешностей единичных кругов $|\zeta_{5l}| \geq 1$, $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{5l} , L_{kl} , получаемых из L_l аффинными преобразованиями (8), (9). Эти конформные отображения имеют вид [3, 4]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (15)$$

где

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l(\cos \varphi_k + \mu_k \sin \varphi_k) - ib_l(\sin \varphi_k - \mu_k \cos \varphi_k)}{2R_{kl}}.$$

Функция $F_5(z_5)$ должна удовлетворять граничному условию [3, 4]

$$2 \operatorname{Re} F_5(t_5) = T_l(t). \quad (16)$$

Функции $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) должны удовлетворять граничным условиям [3, 4]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) \Phi_k(t_k) = (c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}), \quad (17)$$

где для неподкрепленных контуров L_l

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (1, \mu_k, \nu_k, \rho_k),$$

а для жестко подкрепленных контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (p_k, q_k, \nu_k, \rho_k).$$

2. Бесконечная пластинка с одним отверстием.

Рассмотрим бесконечную пластинку с одним эллиптическим отверстием. Обозначим его контур как L_1 , его полуоси — a_1 и b_1 (рис. 2). На контуре отверстия задано непрерывное и гладкое распределение температуры T_1 .

Исходя из (10), для комплексного потенциала теплопроводности имеем

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{51n}}{\zeta_{51}^n}. \quad (18)$$

На контуре отверстия $x = a_1 \cos \theta$, $y = b_1 \sin \theta$,

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta} = \sigma, \quad (19)$$

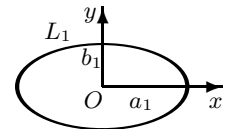


Рис. 2

где θ — параметр задания эллипса (центральный угол, отсчитываемый от положительного направления оси Ox против часовой стрелки). Тогда

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right), \quad y = -\frac{ib}{2} \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right); \\ \cos \theta &= \frac{1}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right), \quad \sin \theta = -\frac{i}{2} \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right); \\ \zeta_{51} &= \zeta_{k1} = \sigma. \end{aligned}$$

Представим непрерывную и гладкую функцию температуры на контуре T_l в виде тригонометрического ряда Фурье:

$$T_1(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta, \quad (20)$$

где A_0, A_n, B_n — коэффициенты ряда Фурье, определяемые по формулам

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T_1(\theta) d\theta, \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T_1(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T_1(\theta) \sin n\theta d\theta.$$

Учитывая (19), получим

$$\begin{aligned} \cos n\theta + i \sin n\theta &= e^{in\theta} = \sigma^n, \\ \cos n\theta &= \frac{1}{2} \left(\sigma^n + \frac{1}{\sigma^n} \right), \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2} \left(\sigma^n - \frac{1}{\sigma^n} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя (21) в (20), получим

$$T_1 = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{2} - i \frac{B_n}{2} \right) \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{2} + i \frac{B_n}{2} \right) \frac{1}{\sigma^n}. \quad (22)$$

Подставляя (18) и (22) в граничное условие (16) и применив метод рядов, для неизвестных постоянных c_5, c_{51n} получим

$$c_5 = \frac{A_0}{4}, \quad c_{51n} = \frac{A_n - iB_n}{4},$$

а функция (18) принимает вид

$$F_5(z_5) = \frac{A_0}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n - iB_n}{4} \zeta_{51}^{-n}. \quad (23)$$

Интегрируя (23), получим

$$\Phi_5(z_5) = \Gamma_5 z_5 + B_{51} \ln \zeta_{51} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{51n}}{\zeta_{51}^n}, \quad (24)$$

где

$$\Gamma_5 = \frac{r_5 A_0}{4}, \quad B_{51} = \frac{r_5 R_{51} (A_1 - iB_1)}{4}, \quad a_{511} = \frac{r_5 R_{51} (A_2 - iB_2)}{4},$$

$$a_{51n} = \frac{r_5 R_{51}}{4} \left(\frac{A_{n+1} - iB_{n+1}}{n+1} + m_{51} \frac{A_{n-1} - iB_{n-1}}{n-1} \right) \quad (n = 2, 3, \dots).$$

На этой основе для комплексных потенциалов термоэлектромагнитоупругости $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) имеем

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + B_{k1} \ln \zeta_{k1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k1n}}{\zeta_{k1}^n}, \quad (25)$$

где Γ_k, B_{k1} — постоянные, определяющиеся из решений систем (12), (14).

Подставив функции (25) в граничные условия (17) и применив метод рядов, для определения неизвестных постоянных a_{k1n} получим системы

$$\sum_{k=1}^4 (d_{k11}, d_{k12}, d_{k13}, d_{k14}) a_{k1n} = - (d_{511}, d_{512}, d_{513}, d_{514}) a_{51n} \quad (26)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

После решения этих систем коэффициенты a_{k1n} и, следовательно, функции $\Phi_k(z_k)$ станут известными и по ним можно определять значения основных характеристик ТЭМУС в любой точке пластинки по формулам (2)–(5).

Были проведены численные исследования для пластинки из материалов: композит на основе титаната бария-феррита (II) кобальта $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ (материал М1) [5]; композит на основе $PZT - 4$ и $CoFe_2O_4$ (материал М3) [6]. Физико-механические постоянные этих материалов приведены в табл. 1.

Таблица 1. Постоянные материалов

Величина	Материалы		Величина	Материалы	
	М1	М3		М1	М3
s_{11}/s_0	7, 165	10, 745	β_{22}/β_0	0, 137	0, 090
s_{22}/s_0	6, 797	7, 398	ν_{11}/ν_0	-0, 190	-14, 931
s_{66}/s_0	19, 912	7, 637	ν_{22}/ν_0	-0, 185	-3, 740
s_{12}/s_0	-2, 337	-2, 542	χ_{11}/χ_0	0, 336	0, 805
g_{16}/g_0	2, 028	2, 054	χ_{22}/χ_0	0, 119	0, 704
g_{21}/g_0	-0, 496	-1, 159	α_1/α_0	8, 530	-1, 578
g_{22}/g_0	1, 157	2, 458	α_2/α_0	1, 990	-0, 326
p_{16}/p_0	1, 850	98, 843	t_2^g/t_0	133, 000	2, 405
p_{21}/p_0	0, 576	12, 102	m_2^g/m_0	133, 000	0, 207
p_{22}/p_0	1, 186	22, 268	k_{11}/k_0	2, 500	1, 200
β_{11}/β_0	0, 156	0, 106	k_{22}/k_0	2, 500	1, 500

При этом для нормирующих величин приняты значения:

$$s_0 = 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad g_0 = 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{ м}^{-2}, \quad p_0 = 10^{-5} \text{ МТл}^{-1},$$

$$\beta_0 = 10^3 \text{ МН} \cdot \text{ м}^2 \cdot \text{ МКл}^{-2}, \quad \nu_0 = 10^{-1} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{ м} \cdot \text{ МА},$$

$$\chi_0 = 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{ МТл}^{-1}, \quad \alpha_0 = 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad t_0 = 10^{-3} \text{ МН} \cdot (\text{МКл} \cdot \text{ К})^{-1},$$

$$m_0 = 10^{-3} \text{ МА} \cdot (\text{ м} \cdot \text{ К})^{-1}, \quad k_0 = 1 \text{ Вт} \cdot (\text{ м} \cdot \text{ К})^{-1}.$$

Указанные материалы относятся к кристаллографическому классу *6mm* гексагональной сингонии.

В табл. 2 для пластинки с круговым отверстием радиуса a_1 ($b_1 = a_1$) (рис. 3), на неподкрепленном контуре которого поддерживается температура $T_1 = \cos(\theta + \alpha_1) = \cos \alpha_1 \cos \theta - \sin \alpha_1 \sin \theta$, в зависимости от значения параметра («фазы») α_1 приведены значения нормальных напряжений σ_s в некоторых точках контура отверстия на площадках, перпендикулярных к контуру, для задач термоупругости (ТУ), когда не учитываются электромагнитные свойства материала, и термоэлектромагнитоупругости (ТЭМУ), когда учитываются все свойства материала.

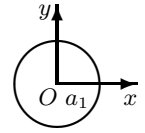


Рис. 3

Из результатов следует, что при неоднородном распределении температуры по контуру отверстия возникают значительные концентрации напряжений вблизи отверстия. Чем выше степень анизотропии материала, тем сильнее изменяется характер распределения напряжений при изменении параметра α_1 . Так, в пластинке из материала М1 (с меньшей количественной мерой анизотропии) зона наивысшей концентрации напряжений около контура отверстия равномерно перемещалась по контуру с изменением значения параметра α_1 , а в пластинке из материала М3 (более анизотропного) эта зона оставалась малоподвижной. На распределение напряжений также влияет учет электромагнитных свойств материала, поэтому при проведении расчетов не следует пренебрегать электромагнитными свойствами, а следует учитывать все свойства материала.

3. Многосвязная бесконечная пластинка. В общем случае многосвязной области (рис. 1) неизвестные постоянные c_5 , D_l , c_{5ln} , a_{kln} определяются из граничных условий (16) и (17) с использованием метода наименьших квадратов (МНК). Для этого на контурах L_i выбирается система точек M_{im} ($m = \overline{1, M_i}$), в которых удовлетворяются граничные условия соответствующих задач.

В задаче теплопроводности, при подстановке функции (10) в граничное условие (16), для определения неизвестных постоянных c_5 , D_l , c_{5ln} получается система линейных алгебраических уравнений [3, 4]

$$2c_5 + 2 \operatorname{Re} w_{5l}(t_{5im})D_l + 2 \operatorname{Re} \varphi_{5ln}(t_{5im})c_{5ln} = T_i(t_{5im}) \quad (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, M_i}), \quad (27)$$

где $t_{5im} = x_{im} + \mu_5 y_{im}$, $t_{im} = t_{im}(x_{im}, y_{im})$. Систему (27) можно решать, например, с использованием метода сингулярных разложений [7, 8]. После решения этой системы постоянные c_5 , D_l , c_{5ln} , а следовательно, и комплексный потенциал теплопроводности (10) будут известны. По известной функции можно в любой точке найти температуру по формуле (1).

Таблица 2. Значения напряжений σ_s в точках контура отверстия

Материал	Тип задачи	θ рад.	Значения параметра α_1						
			0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
М1	ТЭМУ	0	1,817	1,755	1,573	1,285	0,908	0,470	0,000
		$\pi/12$	1,755	1,574	1,285	0,908	0,470	0,000	-0,470
		$\pi/6$	1,544	1,261	0,891	0,461	0,000	-0,461	-0,891
		$\pi/4$	1,121	0,793	0,410	0,000	-0,410	-0,793	-1,121
		$\pi/3$	0,477	0,247	0,000	-0,247	-0,477	-0,674	-0,826
		$5\pi/12$	-0,080	0,000	0,080	0,155	0,219	0,268	0,299
		$\pi/2$	0,000	0,308	0,595	0,842	1,031	1,150	1,190
		$7\pi/12$	0,080	0,155	0,219	0,268	0,299	0,309	0,299
		$4\pi/3$	-0,477	-0,674	-0,826	-0,921	-0,953	-0,921	-0,826
		$3\pi/2$	-1,121	-1,373	-1,531	-1,585	-1,531	-1,373	-1,121
		$5\pi/3$	-1,544	-1,722	-1,783	-1,722	-1,544	-1,261	-0,891
		$11\pi/12$	-1,755	-1,817	-1,755	-1,574	-1,285	-0,908	-0,470
		π	-1,817	-1,755	-1,573	-1,285	-0,908	-0,470	0,000
	ТУ	0	-0,293	-0,283	-0,254	-0,207	-0,146	-0,076	0,000
		$\pi/12$	-0,340	-0,305	-0,249	-0,176	-0,091	0,000	0,091
		$\pi/6$	-0,440	-0,360	-0,254	-0,132	0,000	0,132	0,254
		$\pi/4$	-0,510	-0,360	-0,187	0,000	0,187	0,360	0,510
		$\pi/3$	-0,471	-0,244	0,000	0,244	0,471	0,667	0,817
		$5\pi/12$	-0,290	0,000	0,290	0,560	0,792	0,971	1,083
		$\pi/2$	0,000	0,308	0,595	0,842	1,031	1,150	1,190
		$7\pi/12$	0,290	0,560	0,792	0,971	1,083	1,121	1,083
		$4\pi/3$	0,471	0,667	0,817	0,911	0,943	0,911	0,817
		$3\pi/2$	0,510	0,624	0,696	0,721	0,696	0,624	0,510
		$5\pi/3$	0,440	0,491	0,509	0,491	0,440	0,360	0,254
		$11\pi/12$	0,340	0,352	0,340	0,305	0,249	0,176	0,091
		π	0,293	0,283	0,254	0,207	0,146	0,076	0,000
М3	ТЭМУ	0	0,135	0,130	0,117	0,095	0,067	0,035	0,000
		$\pi/12$	0,150	0,133	0,108	0,075	0,037	-0,004	-0,044
		$\pi/6$	0,172	0,138	0,094	0,044	-0,008	-0,061	-0,109
		$\pi/4$	0,149	0,101	0,046	-0,011	-0,068	-0,120	-0,165
		$\pi/3$	0,088	0,040	-0,011	-0,061	-0,106	-0,145	-0,173
		$5\pi/12$	0,033	-0,007	-0,047	-0,083	-0,114	-0,137	-0,151
		$\pi/2$	0,000	-0,035	-0,068	-0,096	-0,118	-0,131	-0,136
		$7\pi/12$	-0,033	-0,071	-0,105	-0,131	-0,148	-0,155	-0,151
		$4\pi/3$	-0,088	-0,130	-0,163	-0,185	-0,194	-0,190	-0,173
		$3\pi/2$	-0,149	-0,186	-0,211	-0,221	-0,217	-0,197	-0,165
		$5\pi/3$	-0,172	-0,194	-0,203	-0,198	-0,180	-0,149	-0,109
		$11\pi/12$	-0,150	-0,156	-0,152	-0,137	-0,113	-0,082	-0,044
		π	-0,135	-0,130	-0,117	-0,095	-0,067	-0,035	0,000

В задаче термоэлектромагнитоупругости, граничным условиям (17) удовлетворим в дифференциальной форме, чтобы не определять функции $\Phi_5(z_5)$ и неизвестные постоянные $c_{i\alpha}$, входящие в граничные условия [3, 4]:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{kl\alpha} \delta_{k,s} \Phi'_k(t_k) = -2 \operatorname{Re} d_{5l\alpha} \delta_{5,s} r_5 F_5(t_5) \quad (\alpha = \overline{1,4}), \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned}\delta_{k,s} &= dt_k/ds, \\ \Phi'_k(z_k) &= N'_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k), \\ N'_k(z_k) &= \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \frac{A_{kl} z_k + B_{kl}}{z_k - z_{kl}} \right], \\ \varphi'_{kln}(z_k) &= -\frac{n}{R_{kl} \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}.\end{aligned}\tag{29}$$

При подстановке функций (10) и (29) в условия (28) для определения неизвестных постоянных a_{kln} получается следующая система линейных алгебраических уравнений [3, 4]:

$$\begin{aligned}2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} d_{kia} \delta_{k,s} \varphi'_{k,s}(t_{kim}) a_{kln} &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{kia} \delta_{k,s} N'_k(t_{kim}) - \\ &- 2 \operatorname{Re} d_{5i\alpha} \delta_{5,s} r_5 F_5(t_{5im}) \quad (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, M_i}, \alpha = \overline{1, 4})\end{aligned}\tag{30}$$

где $t_{kim} = x_{im} + \mu_k y_{im}$.

После решения с использованием сингулярных разложений [7, 8] системы (30) становятся известными постоянные a_{kln} , а следовательно, комплексные потенциалы (11), и по ним можно находить значения основных характеристик ТЭМУС в точках пластинки по формулам (2)–(5) [3, 4]. А если эллипс L_l является прямолинейным разрезом ($b_l = 0$), то можно вычислить и коэффициенты интенсивности напряжений, индукций и напряженностей по формулам [9]

$$\begin{aligned}k_1^{\pm} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [\mu_k^2 \sin^2 \varphi_l + \cos^2 \varphi_l + 2\mu_k \sin \varphi_l \cos \varphi_l] M_k^{\pm}, \\ k_2^{\pm} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [(1 - \mu_k^2) \sin \varphi_l \cos \varphi_l - \mu_k (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l)] M_k^{\pm}, \\ (k_D^{\pm}, k_E^{\pm}) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [(-\nu_k, r_k^0 \mu_k) \cos \varphi_l - (\nu_k \mu_k, r_k^0) \sin \varphi_l] M_k^{\pm}, \\ (k_B^{\pm}, k_H^{\pm}) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [(-\rho_k, h_k^0 \mu_k) \cos \varphi_l - (\rho_k \mu_k, h_k^0) \sin \varphi_l] M_k^{\pm},\end{aligned}$$

где

$$M_k^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{a_l}} \left(A_{kl}(z_{kl} \pm a_l) + B_{kl} - \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln} \right).$$

Численными исследованиями было установлено, на значения основных характеристик ТЭМУС, помимо свойств материала пластинки, заметное влияние оказывают геометрические характеристики пластинки. Так, расстояние между отверстиями существенно влияет на значения напряжений в зоне между этими отверстиями и несущественно — вне этой зоны. Если средние температуры на контурах двух отверстий мало отличаются, то при расстояниях, превышающих 10 размеров этих отверстий, влияние одного отверстия на значения основных характеристик ТЭМУС вблизи контура другого отверстия незначительно и им можно пренебречь.

1. Желудев И.С. Физика кристаллических диэлектриков / И.С. Желудев. – М.: Наука, 1968. – 463 с.
2. Партон В.З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
3. Калоеров С.А. Плоская задача термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, О.А. Сорочан // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 4. – С. 81–91.
4. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в пьезопластинках с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестник Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 1. – С. 15–26.
5. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.
6. Hou P.-F. Three-dimensional Green's function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material / P.-F. Hou, G.-H. Teng, H.-R. Chen // Mech. Mat. – 2009. – Vol. 41. – P. 329–338.
7. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
8. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
9. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих многосвязных сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.

E.S. Glushankov

Determining the thermo-electro-magneto-elastic state of multiply connected piezoelectric plate in case of inhomogeneously distributed temperature acting on its contours.

The problem of determining the thermo-electro-magneto-elastic state of multiply connected piezoelectric plate with inhomogeneously distributed temperature acting on its contours is solved. The solution is constructed with using the conformal mappings and complex potentials. In case of a plate with one elliptic hole an exact solution is constructed. In general case of multiply connected plate the problem is solved with using the least squares.

Keywords: thermo-electro-magneto-elastic state, thermal stresses, multiply connected plate, complex potentials.

ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

УДК 622.831, 622.23.02

©2019. В.В. Васютина, Ф.М. Голубев, Л.И. Нестерова

ОСОБЕННОСТИ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В МАССИВЕ ПРИ КОНСЕРВАЦИИ ШАХТ

В настоящей статье с применением экспериментальных и лабораторных исследований описан механизм деформационных процессов, происходящих в горном массиве при его намокании. Установлено, что выемка угольных пластов приводит к деформации и обрушению пород, а деформации пород (сдвигения) при развитии горных работ на большой площади могут распространяться вплоть до земной поверхности. Сдвигение вызывает в породах деформации сжатия, растяжения и сдвига. При отработке двух сближенных пластов в толще горных пород будут образовываться зоны повышенного напряжения с наложением зон деформаций друг на друга, что может повлечь за собой дополнительные деформации и образования больших зон расслоения и трещинообразования.

Ключевые слова: сдвигения земной поверхности, затопление горных выработок, ликвидация шахт, МКЭ модели.

Введение. По программе реструктуризации украинской угольной промышленности в Донбасском регионе в последние десятилетия был закрыт ряд горнодобывающих предприятий. Однако необходимые данные по оценке возникающих при этом геомеханических процессов в горных массивах и их негативному воздействию на земную поверхность отсутствуют.

Как показал опыт закрытия шахт в Центральном районе Донбасса, с наибольшими осложнениями эти процессы протекают при наложении зон влияния от одновременно отработываемых свит угольных пластов, что характерно для крутого падения. Также влияние на деформационные процессы в горном массиве оказывает тектоническая нарушенность [1, 2].

Для предотвращения возможного возникновения аварийных ситуаций при активизации геомеханических процессов в массивах и на поверхности с затоплением выработанного пространства необходима разработка надежных способов их прогнозирования. Это позволит снизить риск возникновения техногенных ситуаций, связанных с процессами провалообразования и подтопления на территориях уже законсервированных объектов и территориях рядом расположенных действующих горнодобывающих предприятий.

Процесс сдвижения земной поверхности в Центральном районе Донбасса существенно отличается от процессов, происходящих в других геолого-промышленных районах. Эти отличия проявляются не только по сравнению с пологим залеганием, но и с деформационными процессами при разработке крутых пластов в других районах. Основное принципиальное отличие состоит в образовании на земной поверхности ступенчатообразной мульды с сосредоточенными деформациями в виде уступов [2], возникновение которых сопровождается значительными горизонтальными и вертикальными деформациями. Такое проявление сдвижения на земной поверхности объясняется двумя основными причинами:

- большим количеством совместно отрабатываемых пластов;
- малой мощностью четвертичных отложений (от 0 до 4 м), что не дает возможности сглаживать сдвижения, происходящие в коренных породах карбона [3].

Поэтому при исследовании активизации геомеханических процессов на территории горных отводов законсервированных шахт Центрального района Донбасса необходимо учитывать особые горно-геологические и горнотехнические условия, а также специфику деформирования земной поверхности.

Существенное влияние на деформации земной поверхности при разработке свит пластов оказывает взаимное положение горных выработок в разных пластах, порядок и сроки их отработки. Так, при расположении границ очистных выработок в сближенных пластах примерно в одной вертикальной плоскости происходит наложение зон деформаций друг на друга, и сумма их в несколько раз превышает значения деформаций, возникающих от влияния одного отдельно взятого из этих пластов [4].

В окрестностях очистных выработок образуется большое число трещин расслоения, а над границей выработанного пространства формируются пустоты, вызванные зависанием пород кровли над целиком [5]. Это объясняется тем, что горный массив сложен вмещающими породами различной прочности и мощности, которые не могут одинаково изгибаться в подработанных слоях [6], что в дальнейшем является причиной активизации процесса сдвижения при затоплении закрывающихся шахт. Техногенная трещиноватость массива обусловлена воздействием на него горного давления при процессах разработки массива.

С повышением метаморфизма породы становятся более прочными, что в меньшей степени влияет на процесс деформации и сдвижения боковых пород. Поэтому с повышением степени метаморфизма деформации на поверхности проявляются в менее неоднородной форме, т.е. без образования ярко выраженных уступов, которые наиболее часто встречались в районе ГП «Дзержинскуголь» и «Артемуголь».

Механизм деформирования кровли при различных способах управления горным давлением на крутых и крутонаклонных угольных пластах отличается от пологого падения. Наибольшие отличия выявлены при отработке крутых угольных пластов щитовыми агрегатами, когда угольный пласт отрабатывается ши-

рокими полосами (шириной 60-120 м) по падению, т.е. выемка начинается с вентиляционного горизонта и забой перемещается вниз до откаточного [7]. Наблюдения показывают, что при отработке пласта щитовым агрегатом максимальные деформации пород реализуются под вентиляционным горизонтом. В толще подработанных пород в направлении вверх от выработанного пространства условно можно выделить три зоны, характеризующиеся различной степенью нарушения горного массива: 1) зона обрушения пород кровли в очистном забое; 2) зона прогиба с нарушением слоев в виде трещин; 3) зона плавного прогиба без нарушения сплошности слоев.

В процессе разрушения породы непосредственной кровли образуют своеобразную характерную зону, называемую зоной интенсивного дробления или разрыхления. В дальнейшем в этой зоне происходит уплотнение, а в ряде случаев слеживание пород. В этой зоне обрушение пород непосредственной кровли не вполне беспорядочно. Основная особенность разрыхления заключается в образовании «гребней» по простиранию и по падению вследствие налегания блоков обрушившихся слоев друг на друга.

При подработке двух сближенных пластов в толще горных пород будут образовываться зоны повышенных напряжений с их взаимным наложением, что может повлечь за собой дополнительные деформации и образования больших зон расслоения и трещинообразования.

Непосредственно над выработанным пространством находится зона интенсивного разрыхления, которую ориентировочно можно определить по формуле [4]:

$$h_p = \frac{(m - h_c)}{(k_{cp} - 1)}, \quad (1)$$

где m – вынимаемая мощность разрабатываемого пласта;

h_c – предел свободного опускания основной кровли;

k_{cp} – средний коэффициент разрыхления.

Приведенная формула в основном справедлива для пластов всех углов падения, хотя при отработке крутых пластов имеются некоторые особенности.

Смещение пород кровли в вышележащей части по высоте отработываемой полосы (столба) в 1,5 раза ниже из-за присутствия закладки. Нижние слои непосредственной кровли смещаются вниз за щитовым агрегатом на 20-30 м, что соответствует длине породной подушки, а в нижней части кровля почти не обрушается.

Оседание горного массива при щитовой выемке имеет ярко выраженный асимметричный вид – максимум оседаний реализуется над местом пересечения пласта с горизонтом. При намокании массива кривая оседаний также имеет асимметричный характер, а показатели увеличиваются на величину осадки примерно 15 – 30 %. В ходе деформационных процессов в массиве возможно разрушение межэтажных целиков, что приводит к перепуску боковых пород.

Следует учесть тот факт, что по данным шахтных исследований обрушенные породы в выработанном пространстве имеют различную крупность кусков в

зависимости от расстояния до вентиляционного штрека.

В нижней части отработанной полосы обрушенные породы имеют крупность кусков размером $(0,1-0,2) \times (0,25-0,6) \times (0,3-0,7)$ м. Это объясняется тем, что эти породы перемещались, как правило, с верхней части полосы вслед за щитовым агрегатом, образуя своеобразную породную подушку. Расположенная выше по столбу обрушенная порода представляет другие слои, которые обрушались уже кусками $(0,1-0,8) \times (0,25-1,5) \times (0,9-2,5)$ м и имеют больший коэффициент разрыхления. В верхней части столба в районе бывшей монтажной ниши образуются своеобразные полосы на высоту до 6 мощностей ($6m$) вынутаго пласта и длиной до 20 м по падению, где обрушенная порода практически не заполняет выработанное пространство, т.к. вышележащие слои основной кровли образуют устойчивые пролеты или блочно-шарнирные системы [8]. Как показывают замеры, площадь обнажений пород может достигать $800 - 1700\text{м}^2$ [1].

Обрушивающиеся породы, разрыхляясь, частично подбучивают образовавшуюся полость. Оставшиеся полости создают условия для дальнейшего развития воронки обрушения, которая в соответствующих условиях может достичь поверхности.

При изучении механизма деформационных процессов, происходящих в горном массиве, экспериментальными и лабораторными исследованиями установлено, что выемка угольных пластов приводит к деформации и обрушению пород, залегающих выше пласта, а при развитии горных работ на большой площади деформации пород (сдвигения) могут распространяться вплоть до земной поверхности. Сдвигение вызывает в породах деформации сжатия, растяжения и сдвига.

При отработке нижележащего пласта в свите, в его кровле происходят процессы деформирования и обрушение слагающих её пород, в результате чего в этот процесс вновь вовлекаются породы уже отработанного выше пласта. Если процесс деформирования к этому моменту уже закончен, то он снова возобновляется, а если этот процесс находится в стадии затухания, то происходит его активизация и в него вовлекаются новые слои пород кровли. На рисунке 1 представлена схема развития процесса обрушения и перемещения пород кровли при намокании почвы в сближенных крутых пластах.

Вследствие дополнительного уплотнения обрушенных пород свод обрушения в верхней части лавы увеличится на высоту до $6m$, а по длине лавы он распространится до ее середины. На рисунке 1 видно, что почва подработанного и кровля надработанного пласта нарушена многочисленными трещинами, образовавшимися после технологического процесса отработки пластов: при оставлении целиков под и над вентиляционными штреками произойдет их частичное разрушение.

Возможен также и перепуск пород с вышележащего горизонта, что происходит до поступления воды в вышележащие горизонты и позволяет возобновить процесс деформации пород кровли над выработанным пространством. Таким образом, будет затронута площадь подработки большая, чем площадь затопле-

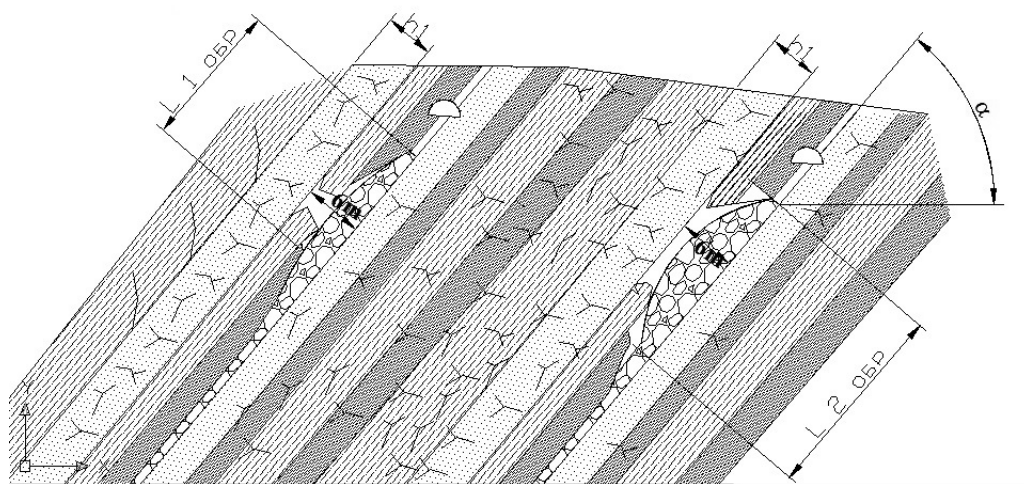


Рис. 1. Схема разрушения пород основной и непосредственной кровли при разработке крутых пластов после затопления.

ния; на верхних горизонтах, как правило, расположены старые горные выработки. Такая картина имеет место, если отработка пластов велась в основном по камерно-столбовой системе в нисходящем порядке, при которой выработанное пространство крепило забойщицкой деревянной и органной крепью, оставляемой в выработанном пространстве.

Для сравнения картины протекания геомеханических процессов по ранее представленной схеме была создана конечно-элементная упруго-пластическая модель. Математическое моделирование, осуществляемое при помощи аналитических и численных методов - один из основных современных методов, позволяющих исследовать и пронаблюдать реальную картину напряженно-деформированного состояния породного массива при решении различных задач геомеханики. Он дает возможность получать качественные характеристики и количественные зависимости. При этом аналитические методы основаны на значительном упрощении решаемых задач и требуют наличия развитого математического аппарата. Основной прием при применении аналитических методов - упрощение задачи до известных решений теории упругости или сопротивления материалов, представление слоев пород в виде плит или балок, жестко заземленных или на упругом основании. Такое упрощение в постановке задачи не позволяет получить надежный результат. Аналитическое решение задачи сдвига горного массива при затоплении выработанного пространства горных выработок сложно получить ввиду отсутствия необходимых исходных данных и упрощенных решений.

Поэтому в геомеханике в последнее время широко используются численные методы моделирования, обладающие более широкими возможностями и получившие новое развитие, в частности с появлением высокоскоростных ЭВМ. Ос-

новые численные методы, реализуемые при решении задач прочности в различных областях техники: метод конечных элементов, метод конечных разностей, метод граничных элементов, метод дискретных элементов, комбинированные методы. При этом лидирующее положение занимает метод конечных элементов (МКЭ), основные идеи которого были заложены Р. Курантом и Д. Гильбертом.

При создании конечно-элементной модели задавались следующие характеристики для каждого из пластов: модуль Юнга, коэффициент Пуассона, плотность, угол внутреннего трения, удельное сцепление.

Размеры модели и граничные условия задавались согласно принципам, описанным в [9 - 14]; общая ширина расчетной области модели принималась равной ширине 7 – 8 лав. На основании моделирования исследовались сдвигения массива в модели между лавами (рисунок 2).

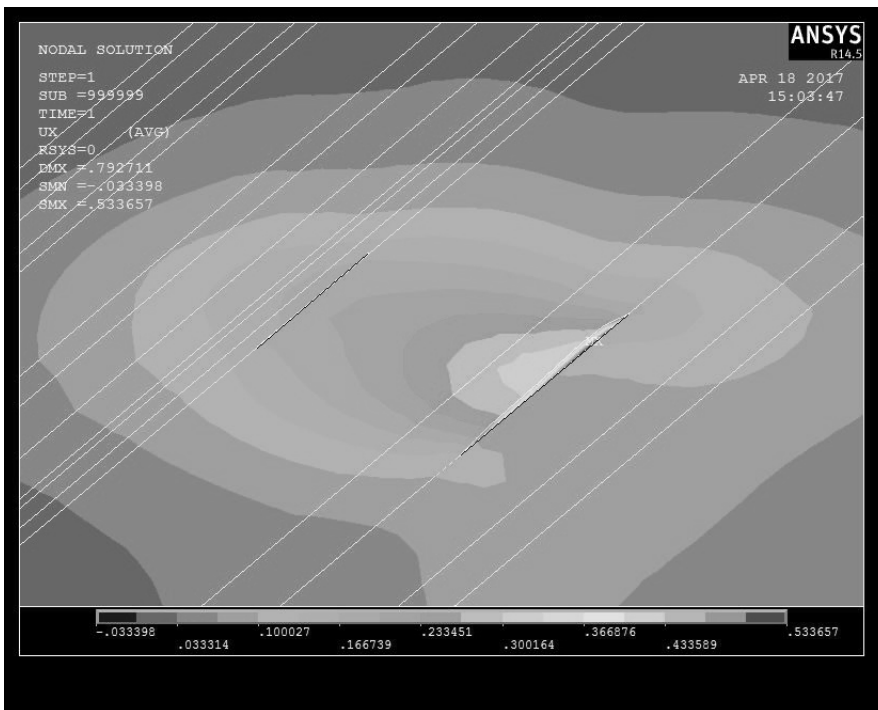


Рис. 2. Конечно-элементная модель деформации горного массива.

В результате, моделирования видно, что даже на весьма тонких пластах, в условиях крутого падения, горизонтальные сдвигения в массиве между лавами могут превышать 240 мм, что подтверждает схему деформации горного массива между лавами, полученную опытным путем.

При заполнении водой этих выработок горные породы будут намокать, в результате чего будет происходить их обрушение в выработанное пространство, что способно повлечь за собой развитие этого процесса до поверхности с возможным образованием деформационных воронок.

В подавляющем большинстве случаев нарушение сплошности пород и высота зоны первичного обрушения сравнительно невелика и на величину от 1,5 до 3 кратная мощности пласта.

Вышележащие слои прогибаются плавно или с образованием разломов и блоков, шарнирно связанных друг с другом. Специально проведенными исследованиями на шахтах Донбасса, установлено, что средняя кратность высоты обрушения к мощности пласта в различных горно-геологических условиях составляет 1,9, а в некоторых случаях не превышает 1,0 [7].

Если рассматривать аргиллиты, то при намокании они набухают, что способствует их пластифицированию. Как показывают лабораторные исследования образцов из аргиллита, при влажности около 6-8 % в их структуре еще сохраняется целостность, но прочность уменьшается в 3-4 раза по сравнению с неувлажненными образцами [15 -17]. Но при достижении более 14 % дополнительной влаги образцы разрушаются. Это свидетельствует о том, что в выработанном пространстве обрушившиеся породы кровли и почвы, а это, к примеру, глинистый сланец, будут быстро намокать и разрушаться. Под действием сил тяжести эти породы будут перемещаться вниз и уплотняться. Можно оценить степень уплотнения мокрых обрушенных пород исходя из компрессионных свойств сухой и мокрой закладки, применяемой на шахтах крутого и пологого падения. Коэффициент заполнения выработанного пространства при гидравлической закладке из дробленой породы составляет 0,70-0,85, при самотечной, при прочих равных условиях, он составляет уже 0,50-0,65, т.е. в 1,2-1,7 раза меньше [5]. Следовательно, и при намокании горного массива возможно уплотнение обрушенных пород в выработанном пространстве на 20-70 % или в среднем на 30 % с учетом перепуска пород по горизонту.

Известно, что устойчивый пролет пород кровли зависит от их прочности, мощности и геометрических размеров обнажения.

Шаг обрушения пород непосредственной кровли можно определить по формуле [18]:

$$L = \frac{1,3 m_{н.к}}{m + 1,2f - 4,8}, \quad (2)$$

а шаг обрушения пород основной кровли определяется по формуле [12]:

$$L = \frac{1,7m_{н.к}}{m + 0,6f_{о.к} + 0,1m_{о.к} + 7,5}, \quad (3)$$

где $m_{н.к}$ – мощность пород непосредственной кровли;

$f_{о.к}$ – крепость пород по М.М. Протодьяконову;

$m_{о.к}$ – мощность пород основной кровли.

Как показали расчеты, предельный пролет кровли зависит от прочности пород почти линейно и его можно рассчитать для разных значений прочности при прочих равных условиях [3].

Прогнозирование устойчивого пролета основной кровли можно выполнить на основе уже ранее разработанной классификации по устойчивости, в основу

которой положены критериальные признаки прочности пород, литологичности и структурного состава [19]. Такой поход к критерию устойчивости основной кровли справедлив для прогноза при намокании массива, если учитывать изменение физико-механических свойств, критерия дилатационного изменения подработанной толщи пород.

Учитывая литологические особенности строения кровли угольных пластов, где непосредственно над пластом в основном залегает глинистый или песчано-глинистый сланец, а основная кровля это песчаник, то в нижней части отработанного столба в слоях непосредственной кровли коэффициент разрыхления будет составлять $K_p = 1,2 - 1,25$, а в остальной части выработанного пространства породы более разрыхлены в зависимости от мощности слагающих её слоев.

Максимально возможная величина уплотнения составит:

$$h = H(K_p - K_n) \quad (4)$$

где H – мощность слоев глинистого сланца;

K_p – коэффициент разрыхления;

K_n – коэффициент увеличения объема за счет намокания ($K_n = 1,01$).

Определение возможной величины уплотнения обрушенных пород позволяет судить о дополнительных деформациях за счет их намокания и уплотнения. Следовательно этот процесс может вызвать активизацию сдвижения за счет уменьшения высоты обрушенных пород.

Выводы. По данным выполненных в результате исследований расчетов можно сделать такие выводы.

1. При заполнении водой выработанного пространства будет происходить намокание пород кровли, последующая потеря её устойчивости и возобновление процесса обрушения и деформации нависающего горного массива, что может вызвать дополнительное оседание земной поверхности.

2. Установлено, что активизация деформационных процессов в горном массиве при его намокании наиболее характерна при применении щитовой выемки и способе управления кровлей полным обрушением, когда породы, разрыхляясь, частично подбучивают образовавшуюся полость, а в полости создают условия для дальнейшего развития воронки обрушения, которая в соответствующих условиях может достичь поверхности.

3. Показатель предельного пролета основной кровли при работе лавы, в данном случае при щитовой выемке, можно использовать как один из критериев устойчивости при обнажении основной кровли, что в дальнейшем позволяет прогнозировать обрушаемость пород при их увлажнении.

1. Алексеев А.Д. Решение геоэкологических и социальных проблем при эксплуатации и закрытии угольных шахт / А.Д. Алексеев, А.В. Андиферов, Е.И. Питаленко. – Донецк: Алан, 2002. – 480 с.
2. Гавриленко Ю.Н. Техногенные последствия закрытия угольных шахт Украины / Ю.Н. Гавриленко, В.Н. Ермаков, Ю.Ф. Кренида, О.А. Улицкий, В.А. Дрибан. – Донецк, 2004. – 630 с.

3. *Питаленко Е.И.* Геомеханические процессы отработки крутых пластов: новые исследования и решения / Е.И. Питаленко, С.Б. Кулибаба, Ю.Н. Гавриленко, М.Г. Тиркель, Ю.А. Пивень. – Донецк, 2007. – 380 с.
4. *Борисов А.А.* Механика горных пород и массивов / А.А. Борисов. – М. : «Недра», 1980. – 258 с.
5. *Черняк И.Л.* Управление состоянием массива горных пород. / И.Л. Черняк, С.А. Ярунин. М. : «Недра», 1995. – 395 с.
6. *Иофис М.А.* О расчете сдвижения горных пород в условиях крутого падения угольных пластов. / М.А. Иофис // Уголь Украины, 1960. – № 7. – С. 20–23.
7. *Александров В.Г.* Вопросы управления горным давлением на тонких крутых пластах Донбасса. / В.Г. Александров, А.В. Аксенов, Н.А. Альшев, Е.И. Питаленко и др. – Донецк, 1998. – 288 с.
8. *Кузнецов Г.Н.* Определение полной несущей способности кровли подземных выработок / Г.Н. Кузнецов // Сб. науч. тр. ВНИМИ – Л., 1950. – Вып. 22. – С. 26–42.
9. *Басов К.А.* Графический интерфейс комплекса ANSYS / К.А. Басов // М.: ДМК Пресс, 2006. – 248 с.
10. *Сахно И.Г.* Математическое моделирование сдвижений горного массива над одиночной лавой / И.Г. Сахно, Н.Н. Грищенко, Ф.М. Голубев // Наукові праці УкрНДМІ НАН України. – 2013. – № 13. – С. 209–219
11. *Касьян Н.Н.* Моделирование структурно-неоднородных массивов горных пород с применением метода конечных элементов / Н.Н. Касьян, И.Г. Сахно, С.Г. Негрей // Наукові праці УкрНДМІ НАН України. – 2008. – № 5. – С. 49 – 52.
12. *Амусин Б.З.* Метод конечных элементов при решении задач геомеханики / Б.З. Амусин, А.Б. Фадеев. // М.: Недра, 1975. – 144 с.
13. *Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом* / Отраслевой стандарт. – К. : Мінпаливенерго України, 2004. – 127 с.
14. *Каплун А.Б.* ANSYS в руках инженера: практическое руководство. / А.Б. Каплун, Е.М. Морозов, М.А. Олферьева. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 272 с.
15. *Алексеев А.Д.* Разрушение горных пород в объемном поле сжимающих напряжений / А.Д. Алексеев, В.Н. Ревва, Н.А. Рязанцев. – Киев: Наук. думка, 1989. – 168 с.
16. *Земисев В.Н.* Расчеты деформаций горного массива / В.Н. Земисев. – М.: Недра, 1973. – 102 с.
17. *Питаленко Е. И.* Влияние увлажнения горного массива на активизацию геомеханических процессов при закрытии угольных шахт / Е.И. Питаленко, В.В. Васюткина, В.Н. Ревва. // Наукові праці УкрНДМІ НАН України. – 2011. – № 8. – С. 117–127.
18. *Слесарев В.Д.* Крепление подземных выработок / В.Д. Слесарев, А.А. Борисов. – М.: Гостехиздат, 1970. – 275 с.
19. *Пивень Ю.А.* Прогрессивные схемы вскрытия и подготовки крутых угольных пластов Донбасса / Ю.А. Пивень, Н.М. Ткаченко, А.В. Анциферов и др. – Донецк: Каштан, 2006. – 287 с.

V.V. Vasutina, Ph.M. Golubev, L.I. Nesterova

Features of deformation processes in the massif during conservation of mines.

The article describes the mechanism of deformation processes that occur in a rock mass when it gets wet using experimental and laboratory studies. It is established that the extraction of coal seams leads to deformation and collapse of rocks, and with the development of mining operations over a large area, rock deformations (displacements) can spread up to the earth's surface. Displacement causes compressive, tensile, and shear deformations in the rocks. During the development of two adjacent layers in the rock mass, zones of increased stress will be formed with superimposed zones

В.В. Васютина, Ф.М. Голубев, Л.И. Нестерова

of deformation on each other, which may entail additional deformations and the formation of large zones of delamination and crack formation.

Keywords: *displacement of the earth's surface, flooding of mine workings, liquidation of mines, FEM models.*

*Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ), Донецк
ranimi@ranimi.org*

Получено 17.05.2019

УДК 622.847-658.382.3

©2019. В.А. Канин, А.В. Пащенко

МНОГОЦЕЛЕВОЙ ГЕОКЛЕЙ ДЛЯ ЗАКРЕПЛЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ ПОРОД И ГИДРОИЗОЛЯЦИИ ГОРНОГО МАССИВА

В настоящей статье показано, что обвалы и обрушения пород являются основным фактором смертельного травматизма в мировой угольной промышленности. Лучший способ повышения устойчивости пород – их физико-химическое закрепление. Рассмотрены результаты исследования органического синтеза состава СКАТ и обоснование его рецептуры.

Ключевые слова: безопасность горных работ, обвалы и обрушения пород, карбамидная смола, органический синтез, состав СКАТ.

Введение. В 1556 году в Базеле был опубликован труд «De Re Metallica Libri XII» [1]. Этой работой Георгий Агрикола заложил научные основы горного дела с элементами охраны труда и промышленной санитарии. Рассматривая вопросы рудничного травматизма, он выделил пять основных причин гибели горняков: «*рудокопы гибнут от пагубного воздуха; чахнут от пыли; погибают, задавленные горными обвалами; ломают руки и ноги при спусках в копи; тонут при прорывах воды в рудники*». Но из всех этих причин настоящим бичом в те времена были обвалы и обрушения пород. В том же труде [1] описан случай, происшедший в 1376 году в руднике Нижней Силезии, когда при обрушении пород на большой площади погибли 400 рабочих.

По мере развития горного дела, роста добычи угля и глубины работ горняки начали подвергаться новым опасностям, связанным с пожарами, взрывчатыми веществами, взрывами газа и другими, о которых в эпоху Агриколы еще не знали. Тем не менее, экскурс в историю развития горного дела показывает, что во все времена и во всех угледобывающих странах обрушения пород в шахтах и рудниках по абсолютному количеству смертельных случаев являлись и являются основным травмирующим фактором.

В 1864 году в шахтах Англии при годовой добыче 93 млн. т погибли 867 человек: от обрушений породы – 45,6 %; от взрывов газа – 10,8 %. Через 30 лет, в 1894 году в той же Англии при добыче 180 млн. т угля погибли 1055 человек: от обрушений породы – 43,3 %; от взрывов газа – 30 %. В шахтах Пруссии с 1891 по 1895 год при средней добыче 73 млн. т/год погибли 3270 человек (в среднем – 654 чел./год): от обрушений пород – 37 %; в бремсбергах и в стволах – 22,5 %; от взрывов газа – 13,3 %; при взрывных работах – 4,8 %.

Динамика распределения по годам и странам среднего индекса смертельных случаев (отношения числа погибших горняков на 1000 подземных рабочих) в XIX столетии характеризуется данными в табл. 1.

Приведенные числа отчетливо показывают, как на протяжении XIX века в

Таблица 1. Средние значения индексов смертельных случаев в угольных рудниках Европы

Страна	Годы	Индексы смертельных случаев по травмирующим факторам				
		Обвалы и обрушения породы	Взрывы газа	Взрывные работы	В ствoлах	По разным причинам
Бельгия	1861-1865	1,11	0,62	0,07	0,93	-
	1881-1885	0,95	0,59	0,09	0,09	-
	1896-1900	0,65	0,13	0,03	0,18	-
Англия	1873-1882	1,12	0,65	-	0,32	0,47
	1899	0,75	0,09	-	0,12	0,41
Франция	1850-1857	2,2	0,68	0,18	1,31	0,4
	1863-1870	1,48	0,92	0,1	0,92	-
	1891-1900	0,58	0,09	0,06	0,45	0,22

угольных шахтах происходило уменьшение числа несчастных случаев. При одновременном росте добычи угля, это никаким другим образом не может быть объяснено, как только улучшением условий труда. Прогресс в освещении и проветривании шахт, постоянная модернизация предохранительных ламп, взрывчатых веществ и технологии работ – в значительной степени уменьшили число несчастных случаев. Но забота о сохранении крепления выработок в надлежащем виде была предоставлена самим рабочим при недостаточном надзоре со стороны руководителей работ и контролирующих органов. В XX столетии снижение смертельного травматизма в угольных шахтах продолжилось. Но соотношение аварий по факторам травматизма практически не изменилось. В 1920 году на шахтах Пруссии при добыче 130 млн. т погибли 1683 человека: от обрушений породы – 35,6 %; в наклонных выработках – 23,3 %; от взрывов газа – 6,9 %. В том же году в США при добыче 450 млн. т погибли 2126 горняков: от обрушений породы – 54,2 %; на подземном транспорте – 19,4 %; при взрывах газа – 17,5 %. В СССР в 1926/1927 году при добыче 32 млн. т угля произошло 70 смертельных случаев: от обрушения пород – 42,4 %; при откатке и доставке – 19,3 %; при падениях в выработки – 10,9 %. На шахтах Украины с 1991 по 2009 год при средней добыче 88,6 млн. т/год погибли 4064 человека (в среднем 214 чел./год): от обрушений породы – 23,8 %; на шахтном транспорте – 23,1 %; от взрывов газа – 18,5 %. В Российской Федерации в 2011 году на 109 шахтах с объемом добычи 100 млн. т погибли 46 человек: 28,3 % – от обрушений породы; 23,9 % – на подземном транспорте.

Анализ условий регистрации смертельного травматизма от обрушений породы показывает, что подавляющее большинство этих случаев происходит, за редким исключением, не при массовых обвалах, а в ординарных ситуациях – при возведении постоянной или временной крепи и в процессе перекрепления

выработок, т. е. в условиях, когда неустойчивая кровля лишается поддержки. Это подтверждается и тем, что основными местами аварий при обрушениях пород являются [2]:

- сопряжения очистных и подготовительных забоев при передвижке конвейерных «головок», выкладке бутовых полос и выемке ниш (51 %);
- подготовительные забои при их оформлении и уборке породы (18 %);
- пространство за комбайном перед задвижкой конвейера (13 %);
- места передвижки вручную посадочных стоек и тумб (8 %);
- места перекрепления горных выработок (6 %).

1. Анализ последних исследований. Мировой опыт показал, что лучшим способом предотвращения обрушений пород в рассмотренных условиях является их физико-химическое закрепление. Впервые такой способ был апробирован в 1896 году на шахте «Райн Прайсен» (Германия) при заполнении трещин в кровле выработки цементным раствором. Позднее было установлено, что наиболее универсальными являются растворы на основе полимерных смол, которые имеют низкую вязкость, а при реакции с отвердителем превращаются в большие макромолекулы, твердеющие с адгезией к горным породам. Наилучшая адгезия (3,5 МПа) была у полиуретановых составов. Они хорошо проявили себя во многих странах и широко использовались в Донбассе в 1980-х и 1990-х годах [3]. Но, наряду с высокой адгезией и скоростью отверждения, эти составы имели низкую прочность на сжатие (0,5-1,2 МПа). Поэтому их применение рационально в случае необходимости быстрого закрепления пород, не подвергающихся в дальнейшем высоким нагрузкам. Кроме того, входящий в их состав полиизоцианат является токсичным веществом 2-го класса, которое раздражает дыхательные пути и может вызывать хронические заболевания легких. Полиуретан, также, относится к горючим веществам и при толщине слоя более 5 см не исключена возможность его самовозгорания.

В 70-х годах для закрепления пород применялись и карбамидные составы, которые были значительно дешевле полиуретановых. Но они имели множество недостатков, а попытки улучшить их качество до уровня зарубежных аналогов путем внесения различных добавок [3, 4] к положительным результатам не привели. Это связано с тем, что карбамидные смолы модифицировались в то время исключительно кислотными растворами. Синтез карбамидного полимера сопровождался превращением метиленэфирных связей в метиленовые, что приводило к интенсивному выделению формальдегида, а, следовательно, к увеличению токсичности, усадки и растрескивания материала в процессе его полимеризации. Твердый карбамидно-кислотный полимер содержал также от 10 до 25 % воды в диспергированном состоянии [5], испарение которой являлось еще одной причиной его усадки.

Цель статьи. Представлены результаты исследований нового направления модификации карбамидной смолы для получения на ее основе качественного геоклея для снижения аварийности и травматизма в угольных шахтах по фактору «Обвалы и обрушения пород», а также для гидроизоляции горного массива

в обводненных условиях.

2. Результаты исследований. Для улучшения эксплуатационных качеств карбамидного геоклея была принята смола КФ-МТ-15, удовлетворяющая требованиям Евростандарта по содержанию остаточного формальдегида (менее 0,15%) и поставлена задача – подобрать в качестве модификатора вещество, способное на первой стадии реакции химически связать воду в карбамидной смоле, а затем создать в растворе кислую среду для образования полимера. Из химических соединений такого класса наиболее распространенными являются ангидриды, которые при взаимодействии с водой гидролизуются до кислот. При выборе одной из разновидностей ангидрида мы исходили из того, что модификатор, как компонент инъекционного состава, должен быть однозначно жидким и иметь минимальную вязкость. Так как приготовление водного раствора ангидрида исключено (иначе он утратит реакционную способность до смешивания со смолой), то и выбранная разновидность ангидрида в условиях, близких к нормальным, должна иметь жидкое фазовое состояние, минимальную токсичность и налаженное производство. Всем этим условиям в наибольшей степени удовлетворял изо-метилтетрагидрофталевый ангидрид (изо-МТГФА), который использовался ранее только в качестве отвердителя для эпоксидных смол. Таким образом, был получен карбамидно-ангидридный (КА) клей включающий смолу КФ-МТ-15 (85-95 %) и изо-МТГФА (5-15 %).

Интегральной оценкой качества любого клея являются непосредственные результаты его «работы» – физико-механические характеристики закрепленных пород, токсиколого-гигиенические характеристики и горючесть.

Многократными лабораторными испытаниями установлено, что прочность адгезии КА-клея при концентрации изо-МТГФА 8,0-11,0 % составляет 3,5-5,4 %. Прочность на сжатие в первые два-три часа после начала отверждения достигает уровня 10-12 МПа. Через сутки прочность увеличивается до 32-44 МПа, через пять суток – до 64 МПа, через 10 суток и далее – 65 МПа. При испытаниях одного образца, который хранился в лабораторном помещении в открытой атмосфере на протяжении двух с половиной лет, прочность на одноосное сжатие была равна 90 МПа. Это весьма существенное отличие от карбамидно-кислотных составов, у которых со временем происходит необратимое снижение прочностных характеристик. Образцы раздробленных пород, независимо от их литологического типа, с содержанием 5 % КА-клея закрепляются до уровня $(0,73-0,78)\sigma_{сж}$ ненарушенных образцов, а при использовании карбамидно-кислотных составов этот показатель не превышает $0,5\sigma_{сж}$ при минимальных значениях $0,27\sigma_{сж}$.

По результатам токсиколого-гигиенических исследований, выполненных в НИИ медико-экологических проблем Донбасса, КА-клею были присвоены следующие классы токсичности:

в неотвержденном виде:

при однократном ингаляционном воздействии – 3, умеренно токсичный;

при однократном введении в желудок – 4, малотоксичный;

при однократном нанесении на кожу – 0, отсутствие раздражающего дей-

ствия;

в отвержденном виде:

при однократном ингаляционном воздействии – 4, малотоксичный;

при однократном введении в желудок – 4, малотоксичный;

при однократном нанесении на кожу – 0, отсутствие раздражающего действия.

Весьма показательными являются испытания отвержденного КА-клея на горючесть. При нагревании его образцов до 200°C потеря массы в различных опытах составила 3,4-4,6 %; при таком же нагревании образцов карбамиднокислотного состава «Карбопласт» потеря их массы составляла 61-62 %, то есть в 15 раз больше, а скорость потери этой массы при нагревании «Карбопласта» была в 37 раз выше, чем при нагревании КА-клея. В химии высокомолекулярных соединений снижение деструкции полимера при нагревании однозначно свидетельствует об увеличении в нем поперечных связей и большей разветвленности цепей [6]. Следовательно, карбамидно-ангидридный состав в отличие от карбамидно-кислотных превращается в полимер при качественно ином механизме отверждения.

Исследования механизма отверждения КА-клея выполнялись по трем направлениям – путем изучения теплового эффекта реакции, определения потери массы полимерной смеси при отверждении и установления образовавшихся химических связей.

Тепловой эффект при отверждении КА-клея изучался на специальной установке, в которой температура полимерной смеси измерялась дистанционно с помощью тарированного терморезистора ТС2-26. Результаты этих измерений представлены на рисунке 1.

Параллельно с измерениями температуры, но с меньшей частотой, определяемой качественными изменениями хода реакции, выполнялась оценка вязкости полимерной смеси по времени ее стекания со стеклянной палочки.

Анализ полученных результатов показал, что процесс отверждения КА-клея состоит, как минимум, из пяти стадий.

На первой стадии (0-4 мин) тепловой эффект отсутствует – при точке отсчета 21,5 °С температура смеси составляла 21,5-21,6 °С. Вязкость смеси также оставалась неизменной. Исходя из этого, первую стадию можно рассматривать как период индукции, но по данным [6] отверждение карбамидных смол происходит без индукционного периода.

На второй стадии (5-49 мин) наблюдается непрерывное повышение температуры смеси до 35,2 °С со скоростью 0,3 °С/мин. Такое выделение тепла характерно для экзотермических реакций, при которых происходит образование макромолекул, их сшивка и формирование сетчатого полимера. На заключительной части стадии произошло образование геля. На основании этого можно заключить, что наблюдаемая реакция является необратимой поликонденсацией.

Третья стадия (50-65 мин) характеризуется стабилизацией реакционной температуры смеси на уровне 34,8-35,1 °С, которая, вероятнее всего, связана с на-

ступлением равновесия между экзо- и эндотермическими реакциями. В течение этой, достаточно короткой стадии (14 мин), гель превратился в пластичное тело. На четвертой стадии (66-1226 мин) происходило снижение температуры полимера от 35,1 до 20,5 °С (при комнатной температуре 21,5 °С), что характерно для эндотермических реакций. Полимер превратился в твердое тело.

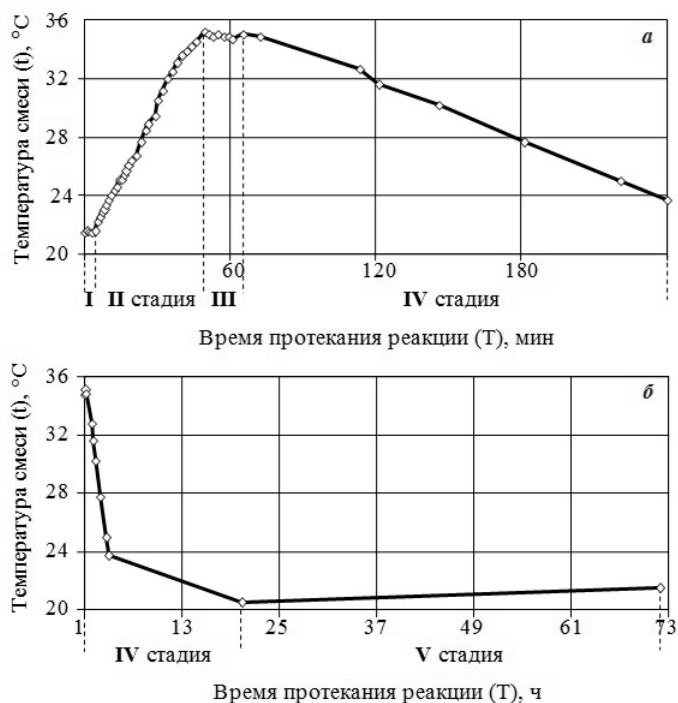
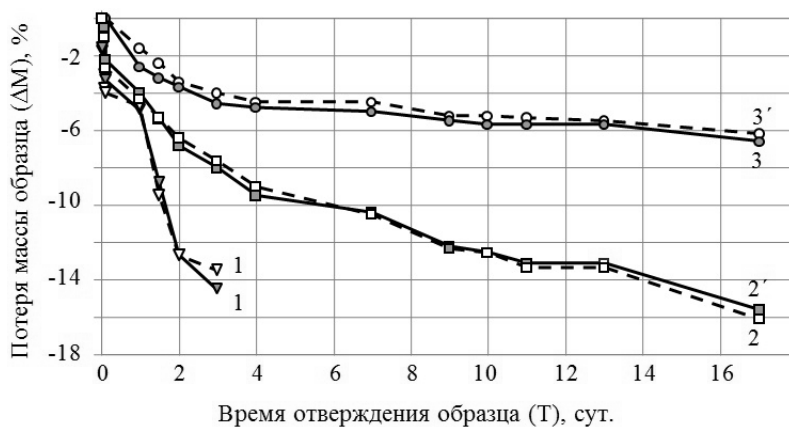


Рис. 1. Изменение температуры (t) полимерной смеси при отверждении КА-клея в интервале времени (T): 0-240 мин (а) и 1-72 ч (б).

В последующие двое суток, которые можно рассматривать, как пятую стадию, происходило повышение температуры полимера до 21,5 °С и начали проявляться усадочные процессы. Через 73 часа после начала смешивания смолы и изо-МТГФА прочность полимера на сжатие составила 52 МПа.

Процедура определения потери массы полимерной смеси при ее отверждении включала: смешивание компонентов (90 % КФ-МТ-15 и 10 % изо-МТГФА); выдерживание смеси в течение 15 мин; разливка ее в стальные формы; размещение форм (по две в каждом случае) в сушильном шкафу с температурой нагрева до 100 °С, в эксикаторе и на воздухе с комнатной температурой; взвешивание форм на весах ВЛКТ-500 с точностью до 0,1 г. Полученные результаты представлены на рисунке 2, из которого следует, что при отверждении в сушильном шкафу (t = 100 °С) за 3 сут образцы КА-клея потеряли 13,5-14,5 % массы; на воздухе за 17 сут. – 15,6-16,1 %; в эксикаторе за 17 сут. – 6,2-6,6 %.

Следовательно, при отверждении КА-клея потеря его массы на 14–16% определяется условиями массообмена с окружающей средой и выделившаяся вода



1 и 1' – при отверждении в сушильном шкафу ($t = 100-105\text{ }^{\circ}\text{C}$); 2 и 2' – то же на воздухе; 3 и 3' – то же в эксикаторе.

Рис. 2. Уменьшение массы образцов КА-клея во время отверждения.

химически с ним не связана. Остальная часть воды (14-16 %, так как в исходном состоянии КА-клей содержит 30% воды) вошла в тонкую структуру полимера и даже при длительном нагревании не выделяется.

С потерей массы полимерной смеси при отверждении тесно связана величина ее усадки. В случае отверждения КА-клея на воздухе зависимость $L1 = f(\Delta M)$ с достоверностью $R2 = 0,989$ аппроксимируется полиномом

$$L_1 = 0,0006 \cdot \Delta M^4 - 0,0204 \cdot \Delta M^3 + 0,235 \cdot \Delta M^2 - 0,5136 \cdot \Delta M + 0,1143.$$

Характер химических связей, образующихся при модификации смолы КФ-МТ-15 изо-МТГФА, анализировался путем сравнения ИК-спектров смолы КФ-МТ-15, модифицированной 10%-ным раствором H_3PO_4 , КА-клея и изо-МТГФА гидролизованного, которые были получены в ИнФОУ им. Л.М. Литвиненко на спектрометре Spесord-80М в области поглощения с частотами $4000 - 400\text{ см}^{-1}$.

Не приводя достаточно объемного детального анализа полученных ИК-спектров, остановимся на основных особенностях механизма взаимодействия изо-МТГФА с карбамидной смолой КФ-МТ-15:

1. При выборе изо-МТГФА в качестве модификатора кабамидной смолы планировалось, что при смешивании со смолой он будет химически связывать воду и создавать кислую среду для конденсации метилолмочевин. Однако, как показали результаты исследований, гидролиз изо-МТГФА протекает медленнее, чем отверждается КА-клей, и при гидролизе изо-МТГФА образуются концевые группы $-COOH$, которые не способны принять участие в сшивке метилолмочевин, но, уменьшая рН среды, способствуют их поликонденсации. Таким образом, в случае гидролиза изо-МТГФА последний выступал бы в роли кислот-

ного катализатора и КА-клей по своим свойствам мало, чем отличался бы от карбамидно-кислотных составов.

2. Изо-МТГФА имеет две активные функциональные группы – ангидридную группу и двойную $>C=C<$ связь. Метилломочевины в карбамидной смоле имеют три функциональные группы – OH ; NH_2 и NH . Этого количества функциональных групп достаточно для рассмотрения варианта синтеза карбамидного полимера, при котором реакция отверждения протекает путем химического взаимодействия функциональных групп и двойных связей олигомера и отвердителя.

3. В первую очередь изо-МТГФА взаимодействует с наиболее активной функциональной группой метилломочевин – гидроксильной группой монометилломочевины. При этом происходит раскрытие кольца ангидрида, и образование карбоксильной, сложноэфирной и амидной групп. Метилломочевины могут присоединяться к изо-МТГФА и по двойной связи. Не исключено, что по этой связи к изо-МТГФА присоединяется и свободный формальдегид.

Таким образом, в механизме отверждения карбамидной смолы взятый в качестве модификатора изо-МТГФА участвует в нескольких реакциях, являясь активным центром, формирующим большие агрегаты молекул, которые посредством метиленовых мостиков и амидных связей «сшиваются» в твердый, нерастворимый полимер трехмерной структуры.

Определенную роль в формировании КА-клея могут выполнять и карбоксильные группы. Несмотря на то, что карбоновые кислоты слабее минеральных, они способны уменьшать pH среды до уровня, при котором возможна реакция поликонденсации метилломочевин. Кроме того, введение карбоксила в метилломочевину вместо гидроксила приводит к увеличению подвижности атомов водорода и амидов за счет большей электроотрицательности карбоксильных групп в ангидридном остатке. В воде карбоксильные группы диссоциируют на ионы COO^- и H^+ . При этом COO^- вступают в межфазную водородную связь с молекулами воды, увеличивая притяжение последней к поверхности полимера (в данном случае – субстрата).

Установленные особенности механизма модификации смолы КФ-МТ-15 изо-МТГФА практически полностью определяют качественные отличия КА-клея от карбидно-кислотных составов.

По сравнению с простыми эфирами сложные эфиры являются более устойчивыми звеньями макромолекул. Преобладание в КА-клею сложных эфиров и незначительное содержание слабых метиленэфирных связей, при разложении которых происходит выделение формальдегида, обеспечивает низкую токсичность материала и является одним из элементов снижения его усадки. Метиленовые группы формируют сетчатую структуру полимера, обеспечивая сшивку макромолекул. Увеличение числа метиленовых групп повышает плотность поперечных связей (сетки) и снижает кинетическую подвижность отрезков сетки между узлами, повышая тем самым прочность и термостойкость материала. КА-клей по сравнению с карбамидно-кислотными составами обладает более проч-

ными водородными связями и более прочными углерод-водородными связями в амидных группах и, как следствие, – более высокими и устойчивыми к внешним воздействиям механическими характеристиками. Высокая адгезия КА-клея к различным субстратам, в том числе и к горным породам, определяется большим содержанием в нем функциональных групп с высокой реакционной способностью – карбоксильных, амидных и гидроксильных, способных к образованию межфазных химических связей на границе раздела адгезив (КА-клей) – субстрат (порода). Функциональные группы с высокой реакционной способностью повышают также адгезионный потенциал внутренних поверхностей полимера, как в процессе, так и после отверждения, а анионы COO^- карбоксильных групп к тому же вступают в межфазную водородную связь с молекулами воды. В результате – выход диспергированной воды из структуры КА-клея затрудняется и вследствие этого существенно снижается его усадка.

По сравнению с простыми эфирами сложные эфиры являются более устойчивыми звеньями макромолекул. Преобладание в КА-клею сложных эфиров и незначительное содержание слабых метиленэфирных связей, при разложении которых происходит выделение формальдегида, обеспечивает низкую токсичность материала и является одним из элементов снижения его усадки. Метиленовые группы формируют сетчатую структуру полимера, обеспечивая сшивку макромолекул. Увеличение числа метиленовых групп повышает плотность поперечных связей (сетки) и снижает кинетическую подвижность отрезков сетки между узлами, повышая тем самым прочность и термостойкость материала. КА-клей по сравнению с карбамидно-кислотными составами обладает более прочными водородными связями и более прочными углерод-водородными связями в амидных группах и, как следствие, – более высокими и устойчивыми к внешним воздействиям механическими характеристиками. Высокая адгезия КА-клея к различным субстратам, в том числе и к горным породам, определяется большим содержанием в нем функциональных групп с высокой реакционной способностью – карбоксильных, амидных и гидроксильных, способных к образованию межфазных химических связей на границе раздела адгезив (КА-клей) – субстрат (порода). Функциональные группы с высокой реакционной способностью повышают также адгезионный потенциал внутренних поверхностей полимера, как в процессе, так и после отверждения, а анионы COO^- карбоксильных групп к тому же вступают в межфазную водородную связь с молекулами воды. В результате – выход диспергированной воды из структуры КА-клея затрудняется и вследствие этого существенно снижается его усадка.

Заключение. При модификации карбамидной смолы изо-МТГФА образуется КА-клей, который в отличие от карбамидно-кислотных клеев имеет трехмерную сетчатую структуру за счет сшивки макромолекул метиленовыми группами; обладает более прочными водородными и углерод-водородными связями в амидных группах; характеризуется преобладанием сложных эфиров и отсутствием слабых метиленэфирных связей и содержит большое количество функциональных групп с высокой реакционной способностью, что в совокупности

определяет его повышенную прочность (45-65 МПа), высокую адгезию к горным породам (3,5-5,4 МПа), небольшую усадку (0,6-2,1 %), низкую токсичность и отнесение к трудно горючим материалам.

Предложенный авторами КА-клеи прошел успешные испытания на пяти шахтах Донецкого каменноугольного бассейна.

Перспективами последующих исследований в данном направлении является создание современного технологического комплекса для инъекционных работ по профилактике техногенных аварий, связанных с различными видами обрушений горных пород в подземных горных выработках и на земной поверхности, проявлениями оползней, разрушений гидротехнических сооружений и фундаментов зданий, проведения различных горных работ в обводненных массивах.

1. *Agrikola G.* О горном деле і металлургії в двенадцати книгах (главах): монографія [On mining and metallurgy in twelve books (chapters): monograph] / G. Agrikola, S.V. Shukhardin, eds. – 2-ye izd. – М.: Nedra, 1986. – 294 s.
2. *Левкин Н.Б.* Предотвращение аварий и травматизма в угольных шахтах Украины: монография / Н.Б. Левкин. – Макеевка: МакНИИ, 2002. – 392 с.
3. *Васильев В.В.* Технология физико-химического упрочнения горных пород: монография / В.В. Васильев, В.И. Левченко. – М.: Недра, 1991. – 267 с.
4. *Васильев В.В.* Полимерные композиции в горном деле: монография / В.В. Васильев. – М.: Наука, 1986. – 294 с.
5. *Энциклопедия полимеров:* в 3 т. Том 1. / под ред. В.А. Кабанова. – М.: Сов. энциклопедия, 1977. – 1224 с.
6. *Виноградова С.В.* Поликонденсационные процессы и полимеры / С.В. Виноградова, В.А. Васнев. – М.: Наука, 2000. – 373 с.

V.A.Kanin, A.V. Pashchenko

Multi-purpose geoclay for fixing unstable rocks and waterproofing the mountain range.

It is shown, that rock falls and caving are the main factor of fatal injuries in the world coal industry. The best way to increase the stability of rocks is their physico-chemical fixation. The results of the investigation of the organic synthesis of the composition of SKAT and the justification of its formulation.

Keywords: *safety of mining operations, rock falls and collapses, urea resin, organic synthesis, scat composition.*

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ), Донецк
ranimi@ranimi.org

Получено 25.06.2019