

ISSN 0136-4545

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

---

---

**Журнал  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ  
МЕХАНИКИ**

---

---

**№ 1 (70)**

**2020**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:** В.И. Сторожев

**ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:** С.А. Калоеров

**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:** Пачева М.Н.

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

*Анциферов А.В.*

*Белоусов В.В.*

*Болнокин В.Е.*

*Болонов Н.И.*

*Ватульян А.О.*

*Вовк Л.П.*

*Глазунов В.А.*

*Глухов А.А.*

*Гольцев А.С.*

*Горр Г.В.*

*Губанов В.В.*

*Дрибан В.А.*

*Ковалев А.М.*

*Коносевиц Б.И.*

*Левин В.М.*

*Муцанов В.Ф.*

*Недопекин Ф.В.*

*Петраков А.А.*

*Судаков С.Н.*

*Улитин Г.М.*

*Шалдырван В.А.*

Адрес редакции:

83001 Донецк, ул. Университетская, 24  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
Тел. 302 92 71  
E-mail: jtam\_donnu@mail.ru

Технический редактор: Пачева М.Н.

Утверждено к печати ученым советом  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016г.

№ 1 (70) / 2020

Основан в 1970г.

# ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

### Механика твердого тела

*Ткаченко Д.Н.* Об одном классе движений твердого тела под действием потенциальных сил..... 3

### Механика деформируемого твердого тела

*Глушанков Е.С.* Действие линейного потока тепла в многосвязной полуплоскости из пьезоматериала..... 16

*Занько А.И.* Изгиб анизотропной плиты с двоякопериодическим рядом эллиптических отверстий или трещин..... 28

### Строительная механика

*Фоменко С.А., Оржиховский А.Н., Макаренко С.Ю.* Математическая модель затухающих колебаний упругого стержня с присоединенной массой на упругих опорах (на примере жесткой ошиновки)..... 37

### Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

*Сторожев С.В., Чан Ба Ле Хоанг* Нечетко-множественное моделирование процессов распыления жидкости в центробежных форсунках..... 48

### Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика

*Глухов А.А.* О влиянии сближенного пласта на структуру волнового поля в задачах шахтной сейсморазведки ..... 61

*Лобков Н.И., Лобков А.А., Драган Л.А., Маевский В.С.* Особенности формирования опорного давления впереди очистного забоя..... 67



## МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 53.38; 53.39

©2020. Д.Н. Ткаченко

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА  
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИЛ

Рассмотрена задача о комплексном истолковании движения твердого тела, имеющего неподвижную точку, в потенциальном поле сил в случае, когда уравнения движения допускают три инвариантных соотношения специального вида. Получены аналитические соотношения для углов Эйлера, уравнений подвижного и неподвижного годографов вектора угловой скорости тела. Установлены зависимости основных переменных задачи от времени.

**Ключевые слова:** потенциальные силы, истолкование движения, углы Эйлера, годограф угловой скорости.

**Введение.** Истолкование движения тела в аналитической механике играет важную роль. На это обстоятельство особое внимание обратил Н.Е. Жуковский [1]. П.В. Харламов [2] считал, что геометрическое истолкование движения тела должно проводится на заключительном этапе построения полного решения задачи. Он предложил уравнения неподвижного годографа [3], которые являются обобщением уравнений Г. Дарбу ([4], стр. 176). Г.В. Горр [5] получил не только более простую формулу для полярного угла, который характеризует неподвижный годограф в цилиндрической системе координат, но и разработал модифицированный метод Пуансо прямого кинематического истолкования движения тела. Обзоры результатов, полученных в исследовании свойств движений тела, имеющего неподвижную точку, изложены в монографиях [6, 7]. При обсуждении перспектив развития классических задач динамики П.В. Харламов [8] говорил о необходимости дальнейших исследований в кинематическом истолковании движения твердого тела.

Данная статья является продолжением изучения движения твердого тела, имеющего неподвижную точку в потенциальном поле сил, начатого в статьях [9, 10, 11]. В статье [9] Г.В. Горр применил метод инвариантных соотношений (ИС) [12] для построения новых решений уравнений движения в случае, когда они допускают три ИС специального вида. Данный подход обусловлен тем, что уравнения динамики твердого тела, в общем случае, не интегрируемы в квадратурах по Якоби (см., например, статьи [13, 14, 15]).

В связи с этим, для построения решений уравнений динамики в замкнутом виде и применяется метод инвариантных соотношений, который отмечен выше.

Особенности метода инвариантных соотношений изложены в монографии Г.В. Горра [16]. Следует отметить, что ИС рассматриваются не только для уравнений Эйлера–Пуассона и Кирхгофа–Пуассона, но и для уравнений Пуанкаре–Жуковского [17, 18], а так же для дифференциальных уравнений Лагранжевых динамических систем [19].

Остановимся на характеристике результатов, полученных в данной статье. В качестве решения уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку, в потенциальном поле сил, рассматривается решение, построенное в [9], которое характеризуется тем, что постоянная интеграла момента количества движения тела отлична от нуля. Перспективность исследования свойств движения тела для решений [9] может быть обоснована результатом [20], поскольку в [20] приведен случай истолкования движения тела, который имеет определенный аналог истолкования Пуансо в решении Эйлера. Основными результатами статьи являются: получение и изучение аналитических зависимостей для углов Эйлера, уравнений подвижного и неподвижного годографов угловой скорости.

**1. Постановка задачи. Исследуемое решение.** Запишем уравнения движения твердого тела, имеющего неподвижную точку, в потенциальном поле сил [9]

$$A\dot{\omega} = A\omega \times \omega + \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu} \times \nu, \quad (1)$$

$$\dot{\nu} = \nu \times \omega, \quad (2)$$

где  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  – вектор угловой скорости;  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  – единичный вектор оси симметрии силового поля;  $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  – силовая функция;  $A = (A_{ij})$  ( $i, j = \overline{1, 3}$ ) – тензор инерции тела; точка над переменными  $\omega$  и  $\nu$  обозначает производную по времени  $t$ .

Уравнения (1), (2) имеют первые интегралы

$$\begin{aligned} \nu \cdot \nu &= 1, & A\omega \cdot \nu &= k, \\ A\omega \cdot \omega - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) &= 2E, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $E$  и  $k$  – произвольные постоянные.

Пусть  $A_i$  – главные моменты инерции тела, тогда в скалярной форме из (1)-(3) имеем

$$A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \nu_3 \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_2} - \nu_2 \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_3}, \quad (4)$$

$$A_2\dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + \nu_1 \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_3} - \nu_3 \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_1}, \quad (5)$$

$$A_3\dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \nu_2 \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_1} - \nu_1 \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_2}, \quad (6)$$

Об одном классе движений твердого тела под действием потенциальных сил

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2. \quad (7)$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad A_1\omega_1\nu_1 + A_2\omega_2\nu_2 + A_3\omega_3\nu_3 = k, \quad (8)$$

$$A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 2E. \quad (9)$$

Зададим для системы (4)-(7) три ИС [9]

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \nu_1\varepsilon(\nu_3) + \beta_1g(\nu_3), \\ \omega_2 &= \nu_2\varepsilon(\nu_3) + \beta_2g(\nu_3), \\ \omega_3 &= h(\nu_3). \end{aligned} \quad (10)$$

В системе (10)  $\beta_1, \beta_2$  – постоянные параметры;  $\varepsilon(\nu_3), g(\nu_3), h(\nu_3)$  – дифференцируемые функции переменной  $\nu_3$ . В статье [9] для исследования ИС (10) применяется метод решения обратных задач механики, то есть функция  $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  выбирается в виде

$$U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{1}{2}[A_1(\nu_1\varepsilon(\nu_3) + \beta_1g(\nu_3))^2 + A_2(\nu_2\varepsilon(\nu_3) + \beta_2g(\nu_3))^2 + A_3h^2(\nu_3)] - E. \quad (11)$$

Учтем в уравнениях (7) ИС (10)

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= \nu_2(h(\nu_3) - \nu_3\varepsilon(\nu_3)) - \beta_2\nu_3g(\nu_3), \\ \dot{\nu}_2 &= \nu_1(\nu_3\varepsilon(\nu_3) - h(\nu_3)) + \beta_1\nu_3g(\nu_3), \\ \dot{\nu}_3 &= g(\nu_3)(\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Эти уравнения имеют геометрический интеграл  $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$  и интегральное соотношение [9]

$$\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 = c_0 + F(\nu_3), \quad (13)$$

где  $c_0$  – произвольная постоянная, а

$$F(\nu_3) = \int \frac{\nu_3\varepsilon(\nu_3) - h(\nu_3)}{g(\nu_3)} d\nu_3. \quad (14)$$

Условием на моменты инерции тела существования решений, которые характеризуются ИС (10), для динамических уравнений (4)-(6) служит равенство

$$A_2 = A_1, \quad (15)$$

то есть тело является динамически симметричным. В статье [9] показано, что функция  $\varepsilon(\nu_3)$  имеет вид

$$\varepsilon(\nu_3) = -\frac{A_3}{A_1}h'(\nu_3), \quad (16)$$

то есть, в силу (16), ИС (10) таковы

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\frac{A_3}{A_1}\nu_1 h'(\nu_3) + \beta_1 g(\nu_3), \\ \omega_2 &= -\frac{A_3}{A_1}\nu_2 h'(\nu_3) + \beta_2 g(\nu_3), \\ \omega_3 &= h(\nu_3).\end{aligned}\tag{17}$$

Запишем уравнения (12), используя равенство (16)

$$\begin{aligned}\dot{\nu}_1 &= \frac{\Phi_1(\nu_3)}{A_1}\nu_2 - \beta_2\nu_3 g(\nu_3), \\ \dot{\nu}_2 &= -\frac{\Phi_1(\nu_3)}{A_1}\nu_1 + \beta_1\nu_3 g(\nu_3), \\ \dot{\nu}_3 &= g(\nu_3)(\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2),\end{aligned}\tag{18}$$

где

$$\Phi_1(\nu_3) = A_1 h(\nu_3) + A_3 \nu_3 h'(\nu_3).\tag{19}$$

В формулах (16), (17), (19) штрихом обозначена производная по переменной  $\nu_3$ . В [9] используется и интеграл моментов из системы (3) при наличии равенств (15), (16)

$$\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 = \frac{\Phi_2(\nu_3)}{A_1 g(\nu_3)},\tag{20}$$

где

$$\Phi_2(\nu_3) = k - A_3 \nu_3 h(\nu_3) + A_3(1 - \nu_3^2)h'(\nu_3).\tag{21}$$

Запишем равенство (13) в силу (14), (16), (19)

$$\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 - c_0 + \frac{1}{A_1} \int \frac{\Phi_1(\nu_3)}{g(\nu_3)} d\nu_3 = 0.\tag{22}$$

Подстановка значения выражения  $\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2$  из (20) в левую часть (22) и вычисление производной от полученной функции показывает, что функции  $g(\nu_3)$  и  $h(\nu_3)$  должны удовлетворить уравнению [9]

$$g(\nu_3)\Phi_3(\nu_3) = g'(\nu_3)\Phi_2(\nu_3),\tag{23}$$

где

$$\Phi_3(\nu_3) = A_3(1 - \nu_3^2)h''(\nu_3) - 2A_3\nu_3 h'(\nu_3) + (A_1 - A_3)h(\nu_3).\tag{24}$$

Из (23) получим

$$g(\nu_3) = e^{\int \frac{\Phi_3(\nu_3)}{\Phi_2(\nu_3)} d\nu_3}.\tag{25}$$

В статье [9] исследованы случаи

$$1) g(\nu_3) = const \quad (\Phi_3(\nu_3) = 0);\tag{26}$$

$$2) g(\nu_3) = g_{n-1}\nu_3^{n-1}, \quad h(\nu_3) = h_n\nu_3^n;\tag{27}$$



где  $g_{n-1}$  и  $h_n$  – постоянные. Показано, что вариант (26) при условии полиномиальной структуры  $h(\nu_3)$  имеет место при выполнении равенства

$$A_1 = A_3(n^2 + n + 1), \quad (28)$$

а вариант (27) – при выполнении равенств

$$k = 0, \quad A_1 = A_3(n + 2), \quad (29)$$

Геометрическое истолкование движения тела в случае (27), (29) представлено в статье [11]. Здесь будем полагать, что выполнено следующее интегральное равенство

$$\int \frac{\Phi_3(\nu_3)}{\Phi_2(\nu_3)} d\nu_3 = \sigma_0 l n |\Phi_2(\nu_3)|. \quad (30)$$

Вычислим производную от левой и правой частей равенства (30). Используя обозначения (21) и (24), получим уравнение

$$A_3(1 - \sigma_0)(1 - \nu_3^2)h''(\nu_3) + A_3(3\sigma_0 - 2)\nu_3 h'(\nu_3) + [A_1 + A_3(\sigma_0 - 1)]h(\nu_3) = 0. \quad (31)$$

Таким образом, функция  $h(\nu_3)$  должна удовлетворять дифференциальному уравнению второго порядка (31). На основании соотношения (30) функцию  $g(\nu_3)$  из (25) преобразуем к виду

$$g(\nu_3) = \mu_0 \Phi_2^{\sigma_0}(\nu_3), \quad (32)$$

где  $\mu_0, \sigma_0$  – произвольные постоянные. Следовательно, ИС (17) можно записать иначе

$$\begin{aligned} \omega_1(\nu_3) &= -\frac{A_3}{A_1} \nu_1(\nu_3) h'(\nu_3) + \beta_1 \mu_0 \Phi_2^{\sigma_0}(\nu_3), \\ \omega_2(\nu_3) &= -\frac{A_3}{A_1} \nu_2(\nu_3) h'(\nu_3) + \beta_2 \mu_0 \Phi_2^{\sigma_0}(\nu_3), \\ \omega_3(\nu_3) &= h(\nu_3). \end{aligned} \quad (33)$$

**2. Преобразование решения уравнений (1)-(3), (18).** Вначале найдем функции  $\nu_1(\nu_3), \nu_2(\nu_3)$ . Для этого обратимся к геометрическому интегралу  $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$  и равенству (20). Принимая  $\nu_3$  за вспомогательную переменную, имеем

$$\nu_1(\nu_3) = \frac{1}{\chi_0^2 A_1 g(\nu_3)} [\beta_1 \Phi_2(\nu_3) - \beta_2 \sqrt{\Phi(\nu_3)}], \quad (34)$$

$$\nu_2(\nu_3) = \frac{1}{\chi_0^2 A_1 g(\nu_3)} [\beta_2 \Phi_2(\nu_3) + \beta_1 \sqrt{\Phi(\nu_3)}], \quad (35)$$

где  $\chi_0^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2$  и

$$\Phi(\nu_3) = \chi_0^2 A_1^2 (1 - \nu_3^2) g^2(\nu_3) - \Phi_2^2(\nu_3^2). \quad (36)$$

Далее определим уравнение, которому должна удовлетворять функция  $\nu_3(t)$ . В силу очевидного равенства

$$(\beta_2 \nu_1 - \beta_1 \nu_2)^2 = \chi_0^2 (1 - \nu_3^2) - (\beta_1 \nu_1 + \beta_2 \nu_2)^2$$

и равенства (20) из третьего уравнения системы (18) получим

$$\int_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{\sqrt{\Phi(\nu_3)}} = -\frac{1}{A_1}(t - t_0). \quad (37)$$

Действительность функции  $\nu_3(t)$  из (37) будем рассматривать в дальнейшем при условии свойств функций  $g(\nu_3)$ ,  $h(\nu_3)$ .

Сформулируем задачу. Изучить движение тела с помощью комплексного подхода в истолковании движения тела, которое описывается соотношениями (33)-(37).

При изучении этой задачи следует учитывать, что полученное решение зависит от функции  $h(\nu_3)$ , которая должна удовлетворять уравнению (31). Поэтому, исследование уравнения (31) необходимо проводить в классе тех функций, для которого можно получить решение уравнения (31) в квадратурах.

Первый класс решений. Пусть параметр  $\sigma_0$  в (31), (32) имеет значение

$$\sigma_0 = \frac{A_3 - A_1}{A_3}. \quad (38)$$

Из неравенств треугольника на главные моменты инерции тела имеем условие

$$A_1 > \frac{A_3}{2}. \quad (39)$$

В силу условия (38) уравнение (31) интегрируется в квадратурах

$$h(\nu_3) = a_2 + a_1 \int_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} (1 - \nu_3^2)^{\beta_0} d\nu_3, \quad \beta_0 = \frac{A_3 - 3A_1}{2A_1}, \quad (40)$$

где  $a_1$ ,  $a_2$  – постоянные параметры. Учтем в формуле (32) значение  $\sigma_0$  из (38)

$$g(\nu_3) = \mu_0[k - A_3\nu_3h(\nu_3) + A_3(1 - \nu_3^2)h'(\nu_3)]^{\sigma_0}. \quad (41)$$

Рассмотрим функцию (36) при  $\nu_3 = 0$

$$\Phi(0) = \chi_0^2 A_1^2 g^2(0) - \Phi_2^2(0).$$

Если в правой части данного равенства учесть соотношения (21), (40), то, полагая

$$\chi_0^2 A_1^2 \mu_0^2 (k + A_3 a_1)^{\sigma_0} - (k + A_3 a_1)^2 > 0,$$

из формулы (37) устанавливаем, что функция  $\nu_3(t)$  является действительной функцией  $t$ .

Наиболее простой вид функции (40) получим при условии  $A_3 = A_1$ . Таким образом, в силу данного условия и равенства (15) эллипсоид инерции тела является сферой. В этом случае из (40) следует

$$h(\nu_3) = b_0 \ln \frac{1 + \nu_3}{1 - \nu_3}, \quad (42)$$

где  $b_0$  — произвольная постоянная. Запишем ИС (17), учитывая равенство  $g(\nu_3) = \mu_0$  и функцию (42)

$$\begin{aligned}\omega_1(\nu_3) &= -\frac{2b_0}{1-\nu_3^2}\nu_1 + \beta_1\mu_0, \\ \omega_2(\nu_3) &= -\frac{2b_0}{1-\nu_3^2}\nu_2 + \beta_2\mu_0, \\ \omega_3(\nu_3) &= b_0 \ln \frac{1+\nu_3}{1-\nu_3}.\end{aligned}\tag{43}$$

В силу равенства (42) функция  $\Phi$  из (36) такова

$$\Phi(\nu_3) = \chi_0^2 A_1^2 \mu_0^2 (1 - \nu_3^2) - [(k + 2b_0 A_3) - A_1 b_0 \nu_3^2 \ln \frac{1 + \nu_3}{1 - \nu_3}]^2.\tag{44}$$

Требую в (44) выполнения условия

$$\Phi(0) = \chi_0^2 A_1^2 \mu_0^2 - (k + 2b_0 A_1)^2 > 0,$$

из интегрального соотношения (37) получим свойство действительности функции  $\nu_3(t)$ .

В случае  $A_3 \neq A_1$  на основании условия (39) установим, что  $\beta_0 < 0$ , то есть степень подинтегральной функции в (40) отрицательна. Нахождение явной зависимости  $h(\nu_3)$  из (40) возможно при условии, когда эта степень равна:  $-n$ , где  $n \in N$ . Однако, это свойство не может выполняться в силу (39).

Укажем вид силовой функции из (11) при  $A_2 = A_1$  на ИС (43)

$$U = \frac{1}{2} \left[ A_1 \left( \frac{4b_0^2}{1-\nu_3^2} - \frac{4b_0\mu_0}{1-\nu_3^2} (\nu_1\beta_1 + \nu_2\beta_2) + \mu_0^2 \chi_0^2 \right) + A_3 b_0^2 \ln^2 \frac{1+\nu_3}{1-\nu_3} \right] - E.$$

Второй класс решений. Рассмотрим решения уравнения (31) в классе многочленов, то есть положим

$$h(\nu_3) = h_n \nu_3^n + h_{n-1} \nu_3^{n-1} + \dots + h_1 \nu_3 + h_0,\tag{45}$$

где  $h_i$  ( $i = \overline{0, n}$ ) — постоянные,  $n \in N$ . Подставляя значение  $h(\nu_3)$  из (45) в уравнение (31), потребуем, чтобы выражение левой части (31) было тождеством по  $\nu_3$ . Тогда равенство нулю слагаемого при  $\nu_3^n$  запишем в виде

$$h_n \left( \sigma_0 - \frac{A_3(n^2 + n + 1) - A_1}{A_3(n + 1)^2} \right) = 0.\tag{46}$$

В силу  $h_n \neq 0$  из (46) получим значение  $\sigma_0$ :

$$\sigma_0 = \frac{A_3(n^2 + n + 1) - A_1}{A_3(n + 1)^2}.\tag{47}$$

Рассматривая на основании равенства (47) слагаемое при  $\nu_3^{n-1}$  установим, что

$$h_{n-1} = 0.\tag{48}$$

Аналогичным образом, в силу (48) доказываем утверждение о том, что класс решений (45) разбивается на два подкласса:

$$h(\nu_3) = h_{2m}\nu_3^{2m} + h_{2(m-1)}\nu_3^{2(m-1)} + \dots + h_2\nu_3^2 + h_0, \quad (49)$$

$$h(\nu_3) = h_{2m+1}\nu_3^{2m+1} + h_{2m-1}\nu_3^{2m-1} + \dots + h_3\nu_3^3 + h_1\nu_3, \quad (50)$$

где  $m \in \mathbb{N}$ . Для первого подкласса (49) из уравнения (31) получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} [q_1 + 2mq_2 - 2m(2m-1)q_3]h_{2m} &= 0, \\ [q_1 + 2(m-1)q_2 - 2(m-1)(2m-3)q_3]h_{2(m-1)} &= -2m(2m-1)q_3h_{2m}, \dots, \\ [q_1 + 2(m-l)q_2 - 2(m-l)(2m-2l-1)q_3]h_{2(m-l)} &= \\ = -2(m-l+1)(2m-2l+1)q_3h_{2(m-l+1)}, \dots, \\ q_1h_0 + 2q_3h_2 &= 0, \end{aligned} \quad (51)$$

которая имеет место при значении

$$\sigma_0 = \frac{A_3(4m^2 + 2m + 1) - A_1}{A_3(2m + 1)^2}. \quad (52)$$

По аналогии с (51), (52) для второго класса (50) имеем

$$\begin{aligned} [-q_1 - (2m-1)q_2 + 2(m-1)(2m-1)q_3]h_{2m-1} &= -2m(2m+1)q_3h_{2m+1}, \dots, \\ h_{2m-l}[-q_1 - (2m-l)q_2 + (2m-l)(2m-l-1)q_3] &= \\ = (2m-l+1)(2m-l+2)q_3h_{2m-l+2}, \dots, \\ (q_1 + q_2)h_1 + 6q_3h_3 &= 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Значение  $\sigma_0$  для (50) таково

$$\sigma_0 = \frac{A_3(4m^2 + 6m + 3) - A_1}{4A_3(m + 1)^2}. \quad (54)$$

В системах (51), (53) введены обозначения

$$q_1 = A_1 + A_3(\sigma_0 - 1), \quad q_2 = A_3(3\sigma_0 - 2), \quad q_3 = A_3(1 - \sigma_0). \quad (55)$$

Отметим основные свойства систем (51), (53). В системе (51) параметр  $h_{2m}$  принимает произвольное значение, а остальные параметры многочлена (49) рекуррентным способом выражаются через  $h_{2m}$  и параметр  $\sigma_0$  из (52). В системе (53) свободным параметром является  $h_{2m+1}$ , а остальные параметры многочлена (50) рекуррентным способом выражаются через  $h_{2m+1}$  и параметр  $\sigma_0$  из (54). Для получения зависимости  $\nu_3(t)$  необходимо из (32) определить  $g(\nu_3)$  с помощью значения  $\Phi_2(\nu_3)$  из (21), а затем найти значение функции  $\Phi(\nu_3)$  из (36).

Действительность функции, определяемой в результате обращения интеграла (37), доказывается на основании структуры (49), (50),  $g(\nu_3)$ ,  $\Phi_2(\nu_3)$ . Для этой цели достаточно потребовать выполнения неравенства  $\Phi(0) > 0$ , которое имеет место при определенном выборе параметров  $\chi_0$ ,  $A_1$  и ввиду полиномиальной структуры решения.

**3. Комплексный подход в истолковании движения тела.** Пусть векторы  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  - единичные векторы подвижной системы координат  $Oxyz$ ;  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  - единичные векторы неподвижной системы координат  $O\xi\eta\zeta$ . Тогда имеют место векторные равенства

$$\boldsymbol{\omega}_n = \omega_1 \mathbf{i}_1 + \omega_2 \mathbf{i}_2 + \omega_3 \mathbf{i}_3, \quad (56)$$

$$\boldsymbol{\omega}_H = \omega_\xi \epsilon_1 + \omega_\eta \epsilon_2 + \omega_\zeta \epsilon_3. \quad (57)$$

В формуле (56)  $\omega_i(\nu_3)$  ( $i = \overline{1,3}$ ) задаются соотношениями (33)-(35). Для нахождения углов Эйлера используем известные уравнения

$$\theta = \arccos(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{i}_3), \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{i}_1)}{(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{i}_2)}, \quad (58)$$

$$\dot{\psi} = \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}_3) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{i}_3)}{(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{i}_3)^2}. \quad (59)$$

Компоненты  $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$  угловой скорости в неподвижной системе координат получим с помощью уравнений П.В. Харламова [3] и формулы Г.В. Горра [5]

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \omega_\rho \cos \alpha, \quad \omega_\eta = \omega_\rho \sin \alpha, \quad \omega_\zeta = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}, \\ \omega_\rho^2 &= \boldsymbol{\omega}^2 - \omega_\zeta^2, \quad \boldsymbol{\omega}^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \operatorname{arctg} \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{i}_3)}{\mathbf{i}_3 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu})} + \psi(t), \quad (61)$$

где функцию  $\psi(t)$  определим из уравнения

$$\psi(t) = \int_{t_0}^t \frac{(\boldsymbol{\omega}(\tau) \times \mathbf{i}_3) \cdot (\boldsymbol{\nu}(\tau) \times \mathbf{i}_3)}{(\boldsymbol{\nu}(\tau) \times \mathbf{i}_3)^2} d\tau. \quad (62)$$

Подставим значения (33)-(35) в равенства (58), (59), в третью и четвертую формулы системы (60) и равенство (61)

$$\theta(t) = \arccos \nu_3(t), \quad \varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{\beta_1 \Phi_2(\nu_3(t)) - \beta_2 \sqrt{\Phi(\nu_3(t))}}{\beta_2 \Phi_2(\nu_3(t)) + \beta_1 \sqrt{\Phi(\nu_3(t))}}, \quad (63)$$

$$\dot{\psi}(t) = \frac{1}{A_1(1 - \nu_3^2(t))} [k - A_3 \nu_3(t) h(\nu_3(t))], \quad (64)$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \psi(t) + \operatorname{arctg} \frac{k \nu_3(t) + [(A_1 - A_3) \nu_3^2(t) - A_1] h(\nu_3(t))}{\sqrt{\Phi(\nu_3(t))}}, \quad (65)$$

$$\omega_\zeta(t) = \frac{1}{A_1}[k + (A_1 - A_3)\nu_3(t)h(\nu_3(t))], \quad (66)$$

$$\omega_\rho^2(t) = \frac{1}{A_1^2}[A_1^2\chi_0^2\mu_0^2\Phi_2^{\sigma_0}(\nu_3(t)) + (A_1h(\nu_3(t)) + A_3\nu_3(t)h'(\nu_3(t)))^2 - (k + (A_1 - A_3)\nu_3(t)h(\nu_3(t)) + A_3h'(\nu_3(t)))^2]. \quad (67)$$

Соотношения (63)-(67) показывают, что в качестве вспомогательной переменной принята переменная  $\nu_3$ . Поэтому в формуле (64) перейдем к дифференцированию по  $\nu_3$

$$\psi'(\nu_3) = -\frac{k - A_3\nu_3h(\nu_3)}{(1 - \nu_3^2)\sqrt{\Phi(\nu_3)}}, \quad (68)$$

где штрихом обозначена производная переменной по  $\nu_3$ .

Примечательной особенностью выражений (64), (66) является свойство правых частей, которые не зависят от функции  $g(\nu_3)$ . Очевидно, что исследование подвижного и неподвижного годографов угловой скорости и углов Эйлера (63), (68) представляет собой достаточно сложную задачу.

Данное исследование целесообразно проводить для решений, построенных в этой статье. Перечислим случаи их существования в компактной форме:

Случай 1.

$$h(\nu_3) = a_2 + a_1 \int_{\nu_3(0)}^{\nu_3} (1 - \nu_3^2)^{\beta_0} d\nu_3, \quad \beta_0 = \frac{A_3 - 3A_1}{2A_1}, \quad (69)$$

$$g(\nu_3) = \mu_0[k - A_3\nu_3h(\nu_3) + A_3(1 - \nu_3^2)h'(\nu_3)]^{\sigma_0}, \quad \sigma_0 = \frac{A_3 - A_1}{A_3}.$$

Случай 2.

$$A_3 = A_1, \quad h(\nu_3) = b_0 \ln \frac{1 + \nu_3}{1 - \nu_3}, \quad g(\nu_3) = g_0. \quad (70)$$

Для решения (70) запишем систему (18) в виде

$$\nu_1 = \frac{\beta_1\mu_0 - \omega_1}{2b_0}(1 - \nu_3^2), \quad \nu_2 = \frac{\beta_2\mu_0 - \omega_2}{2b_0}(1 - \nu_3^2), \quad \nu_3 = \frac{e^{\frac{\omega_3}{b_0}} - 1}{e^{\frac{\omega_3}{b_0}} + 1}. \quad (71)$$

Случай 3.

$$h(\nu_3) = h_{2m}\nu_3^{2m} + h_{2(m-1)}\nu_3^{2(m-1)} + \dots + h_2\nu_3^2 + h_0, \quad (72)$$

$$\sigma_0 = \frac{A_3(4m^2 + 2m + 1) - A_1}{A_3(2m + 1)^2},$$

а функция  $g(\nu_3)$  имеет вид, указанный в (69), где  $\sigma_0$  принимает значение из (72).

Случай 4.

$$h(\nu_3) = h_{2m+1}\nu_3^{2m+1} + h_{2m-1}\nu_3^{2m-1} + \dots + h_1\nu_3, \quad (73)$$

$$\sigma_0 = \frac{A_3(4m^2 + 6m + 3) - A_1}{4A_3(m + 1)^2}.$$

Выражение  $g(\nu_3)$  можно получить из (69), положив в формуле для  $g(\nu_3)$   $h(\nu_3)$  и  $\sigma_0$  в виде (73).

Рассмотрим случай 2. Компоненты вектора угловой скорости удовлетворяют равенствам (17). На основании ИС  $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$  и

$$\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 = \frac{\Phi_2(\nu_3)}{A_1g_0} \quad (74)$$

получим уравнения подвижного годографа

$$(\beta_1\mu_0 - \omega_1)^2 + (\beta_2\mu_0 - \omega_2)^2 = 4b_0^2, \quad (75)$$

$$2g_0A_1e^{\frac{\omega_3}{b_0}} [\mu_0\chi_0^2 - (\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2)] - \\ - (e^{\frac{\omega_3}{b_0}} + 1)[(k + 2b_0A_3)(e^{\frac{\omega_3}{b_0}} + 1) - A_3\omega_3(e^{\frac{\omega_3}{b_0}} - 1)] = 0, \quad (76)$$

то есть подвижный годограф вектора  $\omega$  - линия пересечения цилиндра (75) и трансцендентной поверхности (76).

Зависимость  $\nu_3(t)$  определяется уравнением (37), в котором  $\Phi(\nu_3)$  имеет вид (44).

Из уравнения (66) следует, что неподвижный годограф вектора угловой скорости является плоской кривой, лежащей в плоскости  $\omega_\zeta = \frac{k}{A_1}$ . Свойства этой кривой определяют уравнения (65), (67). Очевидно, в общем случае исследование проекции неподвижного годографа представляет собой сложную задачу. Поэтому, для решения этой задачи необходимо применять численные методы. Аналогичной проблемой является изучение решений (69), (72), (73). Тем не менее, существуют и возможности применения модифицированного метода Пуансо. Например, в случае (70) ИС для этой цели может служить вектор, который сонаправлен с вектором угловой скорости. В модифицированном методе целесообразно выразить его так:

$$\mathbf{b}(t) = \frac{1}{\omega_3}\boldsymbol{\omega}(t), \quad (\omega_3 \neq 0), \quad (77)$$

где  $\omega_i$ , ( $i = \overline{1,3}$ ) имеют значения (33). В силу (56) при  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  получим, что подвижный годограф вектора  $\mathbf{b}(t)$  является плоской кривой. Данное свойство позволит получить более наглядные результаты в истолковании движения тела в потенциальном поле сил.

Отметим, что случаи (72), (73) играют важную роль в дальнейшем перспективном истолковании движения тела, поскольку аналогичных результатов в динамике твердого тела нет [6,7].

**Заключение.** В статье решена задача получения аналитических зависимостей основных кинематических параметров в истолковании движения тела в потенциальном силовом поле для решения, представленного в [9,10].

1. Жуковский Н.Е. О значении геометрического истолкования в теоретической механике / Н.Е. Жуковский // Собр.соч.: В 7 т. - М.; Л.: Гостехиздат. - 1950. - Т. 7. - С. 9-15. (Изд. 1-е: Мат. сборник. - 1986. - 5, вып. 3. - С. 37-42).

2. *Kharlamov P.V.* New method in the dynamics of rigid bodies / P.V. Kharlamov // Dynamics of multibody system: Proc. IUTAM Symp. – Berlin: Springer Verl., 1978. – P. 133–143.
3. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку / П.В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, № 3. – С. 502–507.
4. *Леви-Чевита Т.* Курс теоретической механики / Т. Леви-Чевита, У. Амальди. – В 2-х т. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т. 2, ч. 2. – 555 с.
5. *Горр Г.В.* Об одном подходе в применении теоремы Пуансо кинематического истолкования движения тела с неподвижной точкой / Г.В. Горр // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 26–36.
6. *Горр Г.В.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. / Г.В. Горр, Л.В. Кудряшова, Л.А. Степанова. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
7. *Гашененко И.Н.* Классические задачи динамики твердого тела / И.Н. Гашененко, Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – Киев: Наук. думка, 2012. – 401 с.
8. *Харламов П.В.* Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела / П.В. Харламов // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 1–13.
9. *Горр Г.В.* О трех инвариантных соотношениях уравнений движения тела в потенциальном поле сил / Г.В. Горр // Прикл. математика и механика. – 2019. – **83**, № 2. – С. 202–214.
10. *Gorr G.V.* On Three Invariant of the Equations of Motion of a Body in a Potential Field of Force // Mechanics of Solid, 2019. Vol. 54, Suppl 2, pp. S104–S114.
11. *Gorr G.V.* Research on the Motion of a Body in a Potential Force Field in the Case of Three Invariant Relations / G.V. Gorr, D.N. Tkachenko, E.K. Shchetinina // Russian j. of Nonlinear Dynamics. – 2019. – **15**, no. 3. – P. 327–342.
12. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений / П.В. Харламов // Механика твердого тела. – 1974. – № 6. – С. 15–24.
13. *Зиглин С.Л.* Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике / С.Л. Зиглин // Функц. анализ. – 1982. – **16**, вып. 3. – С. 30–41; там же. – 1983. – **17**, вып. 1. – С. 8–23.
14. *Козлов В.В.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа / В.В. Козлов, Д.А. Онищенко // Докл. АН СССР. – 1982. – **266**, № 6. – С. 1298–1300.
15. *Борисов А.В.* Необходимые и достаточные условия интегрируемости уравнений Кирхгофа / А.В. Борисов. – Reg. end Chaot. Dyn., 1996. – Vol. 1, № 2. – P. 61–73.
16. *Горр Г.В.* Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела (теория, результаты, комментарии) / Г.В. Горр. – М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2017. – 424 с.
17. *Ольшанский В.Ю.* Об одном новом линейном инварианте соотношения уравнений Пуанкаре–Жуковского / В.Ю. Ольшанский // Прикл. математика и механика. – 2012. – Т. 76, вып. 6. – С. 883–894.
18. *Ольшанский В.Ю.* Линейные инвариантные соотношения уравнений Пуанкаре–Жуковского / В.Ю. Ольшанский // Прикл. математика и механика. – 2014. – **78**. Вып. 1. – С. 29–45.
19. *Мухарлямов Р.Г.* Дифференциально-алгебраические уравнения программных движений лагранжевых динамических систем / Р.Г. Мухарлямов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 4. – С. 50–61.
20. *Горр Г.В.* Об одном аналоге истолкования Пуансо решения Эйлера в задаче о движении твердого тела в потенциальном поле сил / Г.В. Горр // Прикл. математика и механика. – 2020. – **84**, № 1. – С. 20–32.

## D.N. Tkachenko

### On one class of motions of a rigid body under the action of potential forces.

The problem of complex interpretation of the motion of a solid body with a fixed point in a potential field of forces is considered in the case when the equations of motion admit three invariant relations



*Об одном классе движений твердого тела под действием потенциальных сил*

of a special type. Analytical relations for Euler angles and equations of moving and stationary hodographs of the angular velocity vector of a body are obtained. The dependencies of the main task variables on time are established.

**Keywords:** *potential forces, interpretation of motion, Euler angles, angular velocity hodograph.*

ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк  
*dntkachenko@mail.ru*

*Получено 27.04.2020*

## МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

©2020. Е.С. Глушанков

## ДЕЙСТВИЕ ЛИНЕЙНОГО ПОТОКА ТЕПЛА В МНОГОСВЯЗНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ИЗ ПЬЕЗОМАТЕРИАЛА

В данной работе с использованием конформных отображений и комплексных потенциалов решена задача определения термоэлектромагнитоупругого состояния многосвязной полуплоскости из пьезоматериала, находящейся под действием линейного потока тепла. Определение неизвестных постоянных, входящих в комплексные потенциалы, проводилось из граничных условий с использованием метода наименьших квадратов. Численными исследованиями установлены закономерности влияния геометрических характеристик пластинки и свойств ее материала на концентрацию напряжений в пластинке.

**Ключевые слова:** линейный поток, тепла термоэлектромагнитоупругое состояние, полуплоскость, температурные напряжения, комплексные потенциалы.

**Введение.** К настоящему времени разработаны различные методы решения задач термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред, приведены решения ряда задач о действии разности температур в многосвязной пластинке [1, 2], а также в многосвязной полуплоскости [3]. Также имеются решения задач о действии линейного потока тепла в бесконечной многосвязной пьезопластинке [4, 5]. В данной работе решена задача о действии линейного потока тепла в многосвязной полуплоскости из пьезоматериала.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим находящуюся в условиях плоской задачи пластинку из пьезоматериала, отнесенную к декартовой системе координат  $Oxy$ , занимающую многосвязную полуплоскость  $S$ , ограниченную контурами эллиптических отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) и прямолинейной границей  $L_1^+$  (рис. 1). Обозначим центры эллипсов через  $O_l(x_{0l}, y_{0l})$ , полуоси эллипсов —  $a_l, b_l$ , углы поворота эллипсов —  $\varphi_l$ , угол поворота прямолинейной границы —  $\varphi_1^+$ . Контур пластины могут располагаться произвольно относительно друг друга, в том числе, касаться, пересекаться, переходить в прямолинейные разрезы. Контур криволинейных отверстий можно аппроксимировать совокупностями дуг эллипсов и берегов прямолинейных разрезов. На контурах

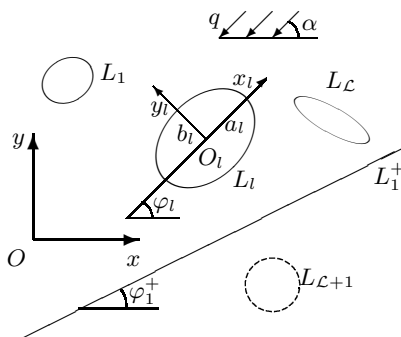


Рис. 1

пластинки заданы значения температуры  $T_l$  либо плотности потока тепла  $q_{ln}$  ( $l = \overline{1; \mathcal{L} + 1}$ ). Значения при  $l = \mathcal{L} + 1$  относятся к прямолинейной границе. Контуры пластинки не подкреплены либо жестко подкреплены. На бесконечности под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$  действует линейный поток тепла плотности  $q$ , а напряжения и индукции электромагнитного поля равны нулю ( $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = D_x^\infty = D_y^\infty = B_x^\infty = B_y^\infty = 0$ ).

Следуя [2, 5], несвязанная задача определения термоэлектромагнитоупругого состояния (ТЭМУС) многосвязной полуплоскости, сводится к последовательному определению комплексного потенциала теплопроводности  $F_5(z_5)$ , а затем комплексных потенциалов термоэлектромагнитоупругости  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) из соответствующих граничных условий. После их определения значения основных характеристик ТЭМУС в точках пластинки (температура  $T$ , плотности потока тепла  $q_x, q_y$ , напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , индукции  $D_x, D_y, B_x, B_y$  и напряженности  $E_x, E_y, H_x, H_y$  электромагнитного поля, перемещения  $u, v$ , потенциалы  $\varphi, \psi$  электромагнитного поля) можно вычислять по формулам [2, 5]

$$T = T^* + 2 \operatorname{Re} F_5(z_5); \quad (1)$$

$$(q_x, q_y) = (q_x^*, q_y^*) - 2 \operatorname{Re} i \varkappa_T(\mu_5, 1) F_5'(z_5); \quad (2)$$

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi_k'(z_k); \quad (3)$$

$$(D_x, D_y, B_x, B_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\nu_k \mu_k, -\nu_k, \rho_k \mu_k, -\rho_k) \Phi_k'(z_k); \quad (4)$$

$$(E_x, E_y, H_x, H_y) = (E_x^*, E_y^*, H_x^*, H_y^*) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi_k'(z_k); \quad (5)$$

$$(u, v, \varphi, \psi) = (u^*, v^*, \varphi^*, \psi^*) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k). \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} T^* &= q(t_x x + t_y y), \\ t_x &= \frac{k_{22} \cos \alpha - k_{12} \sin \alpha}{\varkappa_T^2}, \quad t_y = \frac{k_{11} \sin \alpha - k_{12} \cos \alpha}{\varkappa_T^2}, \\ \varkappa_T^2 &= \sqrt{k_{11} k_{22} - k_{12}^2}; \\ q_x^* &= -q \cos \alpha, \quad q_y^* = -q \sin \alpha; \end{aligned}$$

$\mu_5$  и  $\mu_k$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) — корни характеристических уравнений теплопроводности и электромагнитоупругости [2, 5]

$$k_{22} \mu^2 + 2k_{12} \mu + k_{11} = 0; \quad (7)$$

$$\Delta(\mu) = 0; \quad (8)$$

$$\Delta(\mu) = l_{4s}(\mu)[l_{2\beta}(\mu)l_{2\chi}(\mu) - l_{2\nu}^2(\mu)] - l_{3g}(\mu)[l_{3g}(\mu)l_{2\chi}(\mu) - l_{3p}(\mu)l_{2\nu}(\mu)] - l_{3p}(\mu)[l_{3p}(\mu)l_{2\beta}(\mu) - l_{3g}(\mu)l_{2\nu}(\mu)],$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11}\mu^4 + 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 + 2s_{26}\mu + s_{22},$$

$$l_{3g}(\mu) = g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu + g_{22},$$

$$l_{3p}(\mu) = p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu + p_{22},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22},$$

$$l_{2\nu}(\mu) = -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22};$$

$$\nu_k = \frac{l_{3p}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \nu_5 = \frac{r_\chi}{r_5},$$

$$\rho_k = \frac{l_{3g}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3p}(\mu_k)l_{2\beta}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \rho_5 = \frac{r_\omega}{r_5};$$

$$r_5 = \frac{l_5(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\chi = \frac{l_\chi(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\omega = \frac{l_\omega(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)},$$

$$l_5(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{1t}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{1m}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix}, \quad l_\chi(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\omega(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) \end{vmatrix};$$

$$l_{2\alpha}(\mu_5) = -\alpha_1\mu_5^2 + \alpha_6\mu_5 - \alpha_2,$$

$$l_{1t}(\mu_5) = t_1\mu_5 - t_2,$$

$$l_{1m}(\mu_5) = m_1\mu_5 - m_2;$$

$$p_k = s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} - (g_{11}\mu_k - g_{12})\nu_k - (p_{11}\mu_k - p_{12})\rho_k + \frac{\delta_k^5\alpha_1}{r_5},$$

$$q_k = s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} - (g_{21}\mu_k - g_{22})\nu_k - (p_{21}\mu_k - p_{22})\rho_k + \frac{\delta_k^5\alpha_2}{r_5\mu_5},$$

$$r_k^0 = g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})\nu_k - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\rho_k + \frac{\delta_k^5 t_1}{r_5},$$

$$h_k^0 = p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\nu_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k + \frac{\delta_k^5 m_1}{r_5};$$

$$(E_x^*, E_y^*, H_x^*, H_y^*) = (t_1, t_2, m_1, m_2)T^*;$$

$$\begin{aligned}
 u^* &= \frac{\alpha_1 q t_x}{2} x^2 - \frac{(\alpha_2 t_x - \alpha_6 t_y) q}{2} y^2 + \alpha_1 q t_y x y, \\
 v^* &= \frac{\alpha_2 q t_y}{2} y^2 - \frac{(\alpha_1 t_y - \alpha_6 t_x) q}{2} x^2 + \alpha_2 q t_x x y, \\
 \varphi^* &= -\frac{t_1 q t_x}{2} x^2 - \frac{t_2 q t_y}{2} y^2 - t_1 q t_x x y, \\
 \psi^* &= -\frac{m_1 q t_x}{2} x^2 - \frac{m_2 q t_y}{2} y^2 - m_1 q t_x x y; \\
 \Phi_5(z_5) &= r_5 \int F_5(z_5) dz_5;
 \end{aligned}$$

$k_{ij}$  — коэффициенты теплопроводности материала пластинки;  $s_{ij}$  — коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей и температуре;  $g_{ij}$  и  $p_{ij}$  — пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформаций и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях, индукциях и температуре;  $\beta_{ij}$ ,  $\nu_{ij}$  и  $\chi_{ij}$  — коэффициенты диэлектрической, электромагнитной и магнитной проницаемости, измеренные при постоянных напряжениях и температуре;  $\alpha_i$  — коэффициенты теплового расширения, измеренные при постоянной индукции электромагнитного поля;  $t_i$  и  $m_i$  — пирозлектрические и пиромагнитные модули, измеренные при постоянных напряжениях;  $\delta_j^i$  — символ Кронекера.

**2. Решение задачи.** Функции  $F_5(z_5)$ ,  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) определены в многосвязных полуплоскостях  $S_5$ ,  $S_k$ , получаемых из полуплоскости  $S$  аффинными преобразованиями [3, 5]

$$z_5 = x + \mu_5 y. \quad (9)$$

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (10)$$

В общем случае эти функции имеют вид [2, 5]

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_l w_{5l}(z_5) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5) + F_{51}^+(z_5); \quad (11)$$

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) w_{kl}(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k) + \Phi_{k1}^+(z_k). \quad (12)$$

Здесь  $c_5$  — вещественная постоянная, определяемая из условий на контурах пластинки;  $D_l = -q_l/4\pi\kappa_T$ ;  $q_l$  — суммарный поток тепла через контур  $L_l$  в область  $S$ ;  $w_{5l}(z_5) = \ln(z_5 - z_{5l})$ ;  $z_{5l}$  — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (9) произвольным точкам внутри эллиптических контуров  $L_{5l}$ , получаемых из  $L_l$  аффинными преобразованиями (9);  $c_{5ln}$  — комплексные постоянные, определяемые из условий на контурах пластинки;  $\varphi_{5ln}(z_5) = \zeta_{5l}^{-n}$ ;

$\zeta_{5l}$  — переменные;  $F_{51}^+(z_5)$  — функция, голоморфная в сплошной полуплоскости  $\left(\bigcup_{l=1}^{\mathcal{L}} \text{int} L_{5l}\right) \cup S_5$ ;  $\Gamma_k, A_{kl}, B_{kl}$  — постоянные, определяемые из систем уравнений

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, \nu_k, \mu_k \nu_k, \rho_k, \mu_k \rho_k) \Gamma_k = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \quad (13)$$

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i A_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \quad (14)$$

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i B_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \quad (15)$$

$\Gamma_5 = r_5 c_5$ ;  $A_{5l} = r_5 D_l$ ;  $B_{5l} = r_5 (b_{5l} - D_l z_{5l})$ ;  $b_{5l}$  — вычет функции  $F_5(z_5)$  в точке  $z_{5l}$ ;  $w_{kl} = \ln(z_k - z_{kl})$ ;  $z_{kl}$  — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (10) произвольным точкам внутри контуров  $L_{kl}$ , получаемых из  $L_l$  аффинными преобразованиями (10);  $\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}$ ;  $\zeta_{kl}$  — переменные;  $\Phi_{k1}^+(z_k)$  — функции, голоморфные в сплошных полуплоскостях  $\left(\bigcup_{l=1}^{\mathcal{L}} \text{int} L_{kl}\right) \cup S_k$ .

Выберем вне полуплоскости  $\left(\bigcup_{l=1}^{\mathcal{L}} \text{int} L_l\right) \cup S$  некоторый эллиптический контур  $L_{\mathcal{L}+1}$  (рис. 1). Обозначим его центр как  $O_{\mathcal{L}+1}(x_{0,\mathcal{L}+1}, y_{0,\mathcal{L}+1})$ , полуоси —  $a_{\mathcal{L}+1}, b_{\mathcal{L}+1}$ , угол поворота —  $\varphi_{\mathcal{L}+1}$ . Обозначим через  $L_{5,\mathcal{L}+1}, L_{k,\mathcal{L}+1}$  эллиптические контуры, получаемые из  $L_{\mathcal{L}+1}$  аффинными преобразованиями (9), (10).

В качестве функций  $F_{51}^+(z_5), \Phi_{k1}^+(z_k)$ , голоморфных в полуплоскостях, выберем функции, голоморфные вне контуров  $L_{5,\mathcal{L}+1}, L_{k,\mathcal{L}+1}$ , кроме, быть может, бесконечно удаленной точки. Тогда их можно представить в виде

$$F_{51}^+(z_5) = D_{\mathcal{L}+1} \ln(z_5 - z_{5,\mathcal{L}+1}) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{5,\mathcal{L}+1,n} \varphi_{5,\mathcal{L}+1,n}(z_5),$$

$$\Phi_{k1}^+(z_k) = (A_{k,\mathcal{L}+1} z_k + B_{k,\mathcal{L}+1}) \ln(z_k - z_{k,\mathcal{L}+1}) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,\mathcal{L}+1,n} \varphi_{k,\mathcal{L}+1,n}(z_k).$$

Тогда комплексные потенциалы  $F_5(z_5), \Phi_k(z_k)$  окончательно примут такой вид:

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+1} D_l w_{5l}(z_5) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+1} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5); \quad (16)$$

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+1} (A_{kl} z_k + B_{kl}) w_{kl}(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+1} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k). \quad (17)$$

Параметрические уравнения эллипсов  $L_l$  в локальных системах координат  $O_l x_l y_l$  (рис. 1) имеют вид [2, 5]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе  $Oxy$  координат —

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l,$$

где  $\theta$  — параметр параметрического задания эллипса ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ).

Переменные  $\zeta_{5l}$ ,  $\zeta_{kl}$  определяются из конформных отображений [2, 5]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left( \zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (18)$$

внешностей единичных кругов  $|\zeta_{5l}| \geq 1$ ,  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{5l}$ ,  $L_{kl}$ .  
Здесь

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_k + \mu_k \sin \varphi_k) - ib_l(\sin \varphi_k - \mu_k \cos \varphi_k)}{2R_{kl}}. \end{aligned}$$

Функция  $F_5(z_5)$  определяется из граничного условия [2, 5]

$$2 \operatorname{Re} d_l F_5(t_5) = f_l(t), \quad (19)$$

в котором в случае задания значений температуры  $T_l$

$$d_l = 1, \quad f_l = T_l,$$

а в случае задания плотности потока тепла  $q_{ln}$

$$d_l = i\alpha_T, \quad f_l = \int_0^s (q_n^* - q_{ln}) ds + c_l$$

Функции  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) определяются из граничных условий [2, 5]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) \Phi_k(t_k) = (f_{l1}(t), f_{l2}(t), f_{l3}(t), f_{l4}(t)), \quad (20)$$

где для неподкрепленных контуров

$$\begin{aligned} (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) &= (1, \mu_k, \nu_k, \rho_k), \\ (f_{l1}(t), f_{l2}(t), f_{l3}(t), f_{l4}(t)) &= (c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}), \end{aligned}$$

а для жестко подкрепленных контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (p_k, q_k, \nu_k, \rho_k),$$

$$(f_{l1}(t), f_{l2}(t), f_{l3}(t), f_{l4}(t)) = (-u^*, -v^*, c_{l3}, c_{l4}).$$

В общем случае многосвязной полуплоскости (рис. 1) неизвестные постоянные  $c_5, D_l, c_{5ln}, a_{kln}$  определяются из граничных условий (19) и (20) с использованием метода наименьших квадратов (МНК). Для этого на контурах  $L_i$  выбирается система точек  $M_{im}$  ( $m = \overline{1, M_i}, i = \overline{1, \mathcal{L} + 1}$ , где  $i = \mathcal{L} + 1$  относится к прямолинейной границе), в которых удовлетворяются граничные условия соответствующих задач.

В задаче теплопроводности, при подстановке функции (16) в граничное условие (19), для определения неизвестных постоянных  $c_5, D_l, c_{5ln}$  получается система линейных алгебраических уравнений [2, 5]

$$2 \operatorname{Re} d_i c_5 + 2 \operatorname{Re} d_i w_{5l}(t_{5im}) D_l + 2 \operatorname{Re} d_i \varphi_{5ln}(t_{5im}) c_{5ln} = f_i(t_{im}) \quad (21)$$

$$(i = \overline{1, \mathcal{L} + 1}, m = \overline{1, M_i}),$$

где  $t_{5im} = x_{im} + \mu_5 y_{im}$ ,  $t_{im} = t_{im}(x_{im}, y_{im})$ . После решения системы (21) с использованием метода сингулярных разложений [6, 7], становятся известными постоянные  $c_5, D_l, c_{5ln}$ , а следовательно, и комплексный потенциал теплопроводности (16). После этого становится возможным в любой точке полосы находить температуру и плотности потока тепла по формулам (1), (2) [2, 5].

В задаче термоэлектромагнитоупругости, граничным условиям (20) проще удовлетворить в дифференциальной форме [2, 5]:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{kl\alpha} \delta_{k,s} \Phi'_k(t_k) = \frac{df_{l\alpha}}{ds} - 2 \operatorname{Re} d_{5l\alpha} \delta_{5,s} r_5 F_5(t_5) \quad (\alpha = \overline{1, 4}), \quad (22)$$

где

$$\delta_{k,s} = dt_k/ds,$$

$$\Phi'_k(z_k) = N'_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+1} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k), \quad (23)$$

$$N'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+1} \left[ A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \frac{A_{kl} z_k + B_{kl}}{z_k - z_{kl}} \right],$$

$$\varphi'_{kln}(z_k) = - \frac{n}{R_{kl} \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}.$$



После подстановки функций (16) и (23) в граничные условия (22) для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$  получается такая система линейных алгебраических уравнений [2, 5]:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+1} \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} d_{k i \alpha} \delta_{k, s} \varphi'_{k l n}(t_{k i m}) a_{k l n} = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{k i \alpha} \delta_{k, s} N'_k(t_{k i m}) - 2 \operatorname{Re} d_{5 i \alpha} \delta_{5, s} r_5 F_5(t_{5 i m}) + \frac{d f_{i \alpha}}{d s}(t_{i m}) \quad (i = \overline{1, \mathcal{L}+1}, m = \overline{1, M_i}, \alpha = \overline{1, 4}) \quad (24)$$

где  $t_{k i m} = x_{i m} + \mu_k y_{i m}$ .

После решения системы (24) с использованием сингулярных разложений [6, 7] становятся известными комплексные постоянные  $a_{k l n}$ , а следовательно, и комплексные потенциалы (17). После этого становится возможным в любой точке полосы находить значения основных характеристик ТЭМУС в точках пластинки по формулам (3)–(6) [2, 5].

**3. Численные исследования.** Были проведены численные исследования для полуплоскости с отверстиями, изготовленной из композита на основе титаната бария-феррита (II) кобальта  $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$  [8]. Его физико-механические и теплофизические постоянные приведены в табл. 1.

Таблица 1. Постоянные материала

| Величина             | Значение | Величина             | Значение |
|----------------------|----------|----------------------|----------|
| $s_{11}/s_0$         | 7,165    | $\beta_{22}/\beta_0$ | 0,137    |
| $s_{22}/s_0$         | 6,797    | $\nu_{11}/\nu_0$     | -0,190   |
| $s_{66}/s_0$         | 19,912   | $\nu_{22}/\nu_0$     | -0,185   |
| $s_{12}/s_0$         | -2,337   | $\chi_{11}/\chi_0$   | 0,336    |
| $g_{16}/g_0$         | 2,028    | $\chi_{22}/\chi_0$   | 0,119    |
| $g_{21}/g_0$         | -0,496   | $\alpha_1/\alpha_0$  | 8,530    |
| $g_{22}/g_0$         | 1,157    | $\alpha_2/\alpha_0$  | 1,990    |
| $p_{16}/p_0$         | 1,850    | $t_2^{\sigma}/t_0$   | 133,000  |
| $p_{21}/p_0$         | 0,576    | $m_2^{\sigma}/m_0$   | 133,000  |
| $p_{22}/p_0$         | 1,186    | $k_{11}/k_0$         | 2,500    |
| $\beta_{11}/\beta_0$ | 0,156    | $k_{22}/k_0$         | 2,500    |

Здесь приняты обозначения:

$$s_0 = 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad g_0 = 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{ м}^2, \quad p_0 = 10^{-5} \text{ МТл}^{-1},$$

$$\beta_0 = 10^3 \text{ МН} \cdot \text{ м}^2 \cdot \text{ МКл}^{-2}, \quad \nu_0 = 10^{-1} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{ м} \cdot \text{ МА},$$

$$\chi_0 = 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{ МТл}^{-1}, \quad \alpha_0 = 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad t_0 = 10^{-3} \text{ МН} \cdot (\text{МКл} \cdot \text{ К})^{-1},$$

$$m_0 = 10^{-3} \text{ МА} \cdot (\text{ м} \cdot \text{ К})^{-1}, \quad k_0 = 1 \text{ Вт} \cdot (\text{ м} \cdot \text{ К})^{-1}.$$

Указанный материал относится к кристаллографическому классу *6mm* гексагональной сингонии.

При проведении численных расчетов количество членов в рядах Лорана в функциях (16) и (17) и точек  $M_{it}$  на контурах  $L_i$ , для которых составлялись системы линейных алгебраических уравнений (21) и (24), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (относительная погрешность не становилась менее сотых долей процента). Для этого, как показали исследования, в решаемых задачах, в зависимости от геометрических характеристик пластинок необходимо было в указанных рядах оставлять от 50 до 90 членов, на каждом из контуров брать от 500 до 1500 «коллокационных точек». Длина участка прямолинейной границы, на котором выбирались «коллокационные точки», составляла от 40 до 60 радиусов отверстий. Как показали исследования, для оптимальной сходимости численных результатов вспомогательный контур  $L_{\mathcal{L}+1}$  в виде кругового, расположенного на расстоянии 4–6 радиусов от прямолинейной границы.

При проведении численных исследований решались задачи термоупругости (ТУ), когда не учитывались электромагнитные свойства материала, и термоэлектромагнитоупругости (ТЭМУ), когда учитывались все свойства материала.

Линейный поток тепла направлялся под углом  $\alpha = \pi/2$  рад. [10, 4].

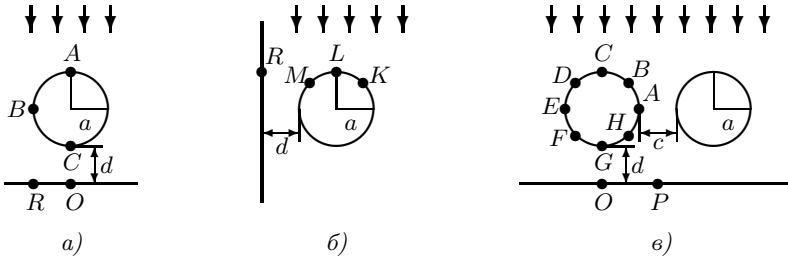


Рис. 2

В табл. 2 для полуплоскости с одним круговым отверстием радиуса  $a$  ( $a_1 = b_1 = a$ ), когда на контуре отверстия и на горизонтальной прямолинейной границе заданы значения температуры  $T_1 = T_2 = 0$  (рис. 2, а), с точностью

Таблица 2. Значения напряжений  $\sigma_s$  в точках полуплоскости (рис. 2, а)

| Тип задачи | Точка | Значения $d/a$ |        |        |        |        |        |
|------------|-------|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|
|            |       | 0,01           | 0,1    | 0,5    | 1      | 2      | 10     |
| ТЭМУ       | A     | 0,307          | 0,281  | -0,659 | -0,926 | -1,338 | -5,425 |
|            | B     | 1,331          | 1,325  | 1,772  | 2,005  | 2,456  | 6,117  |
|            | C     | 0,806          | 0,349  | 1,995  | 1,749  | 1,911  | 5,302  |
|            | O     | 0,652          | 0,051  | 0,490  | 0,801  | 1,254  | 3,353  |
|            | R     | 0,020          | 0,005  | 1,023  | 0,971  | 1,196  | 3,245  |
| ТУ         | A     | -0,292         | -0,248 | 0,039  | 0,136  | 0,157  | 0,448  |
|            | B     | 0,628          | 0,694  | 0,765  | 1,010  | 1,500  | 5,803  |
|            | C     | -0,431         | -0,056 | -0,651 | -0,259 | 0,330  | 4,773  |
|            | O     | -0,371         | -0,145 | -0,380 | -0,587 | -0,813 | -1,635 |
|            | R     | 0,015          | -0,001 | -0,499 | -0,589 | -0,747 | -1,495 |

до плотности линейного потока тепла  $q$  как множителя, приведены значения нормальных напряжений  $\sigma_s$  в некоторых точках контура отверстия и прямолинейной границы на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от значения отношения  $d/a$  расстояния между отверстием и прямолинейной границей  $d$  к радиусу отверстия  $a$ .

Из результатов, приведенных в табл. 2, следует, что расстояние между отверстием и горизонтальной прямолинейной границей существенно влияет на значения напряжений в пластинке. Наименьшие значения напряжений наблюдаются при расстоянии  $d/a = 0, 1$ , однако при дальнейшем сближении отверстия и прямолинейной границы концентрация напряжений возрастает. Но особенно сильно и резко она возрастает при отдалении отверстия, что связано с возрастанием плотностей потока тепла, действующих около контура отверстия и прямолинейной границы [9]. Из других полученных результатов следует, что на большом удалении от отверстия концентрация напряжений в полуплоскости снижается.

В табл. 3 приведены аналогичные значения напряжений для полуплоскости с одним круговым отверстием, когда на контуре отверстия задана температура  $T_1 = 0$  либо он теплоизолирован ( $q_{1n} = 0$ ), а вертикальная прямолинейная граница теплоизолирована ( $q_{2n} = 0$ ) (рис. 2, б).

Таблица 3. Значения напряжений  $\sigma_s$  в точках полуплоскости (рис. 2, б)

| Тип задачи   | Точка | Значения $d/a$ |        |        |        |          |
|--------------|-------|----------------|--------|--------|--------|----------|
|              |       | 0,1            | 1      | 10     | 100    | $\infty$ |
| $T_1 = 0$    |       |                |        |        |        |          |
| ТЭМУ         | $K$   | -0,553         | -0,538 | -0,482 | -0,450 | -0,448   |
|              | $L$   | 0,289          | 0,414  | 0,474  | 0,476  | 0,476    |
|              | $M$   | 0,001          | -0,114 | -0,403 | -0,447 | -0,448   |
|              | $R$   | -0,104         | -0,165 | -0,032 | 0,000  | 0,000    |
| ТУ           | $K$   | -0,104         | -0,004 | 0,161  | 0,203  | 0,204    |
|              | $L$   | 0,054          | 0,311  | 0,469  | 0,476  | 0,476    |
|              | $M$   | 0,138          | 0,355  | 0,248  | 0,204  | 0,204    |
|              | $R$   | -0,106         | -0,269 | -0,029 | -0,004 | 0,000    |
| $q_{1n} = 0$ |       |                |        |        |        |          |
| ТЭМУ         | $K$   | 0,838          | 0,605  | 0,484  | 0,450  | 0,448    |
|              | $L$   | -0,374         | -0,464 | -0,475 | -0,476 | -0,476   |
|              | $M$   | -0,055         | 0,127  | 0,405  | 0,447  | 0,448    |
|              | $R$   | 0,153          | 0,193  | 0,033  | 0,000  | 0,000    |
| ТУ           | $K$   | 0,168          | 0,014  | -0,161 | -0,203 | -0,204   |
|              | $L$   | -0,072         | -0,340 | -0,471 | -0,476 | -0,476   |
|              | $M$   | -0,235         | -0,455 | -0,249 | -0,204 | -0,204   |
|              | $R$   | 0,163          | 0,318  | 0,029  | 0,004  | 0,000    |

Из результатов, приведенных в табл. 3, следует, что расстояние между отверстием и вертикальной прямолинейной границей также существенно влияет на значения напряжений в пластинке, однако закономерности изменения значений напряжений здесь иные. Если на контуре заданы значения температуры, то при приближении отверстия к прямолинейной границе значения напряжений

в зоне-перемычке убывают, а с противоположной стороны контура отверстия — возрастают. Если контур отверстия теплоизолирован, то значения напряжений в перемычке и около отверстия сначала возрастают, однако при расстоянии  $d/a < 0,1$  концентрация напряжений в перемычке начинает убывать. Если же  $d/a > 10$ , то в обоих случаях взаимовлияние прямолинейной границы и отверстия становится малосущественным и им можно пренебречь. При дальнейшем увеличении расстояния между отверстием и прямолинейной границы значения напряжений около отверстия стремятся к значениям для случая бесконечной пластинки с одним отверстием [4], а около полуплоскости они стремятся к нулю. Из других полученных результатов следует, что для всех случаев концентрация напряжений в полуплоскости на большом расстоянии от отверстия снижается.

В табл. 4 приведены аналогичные значения напряжений для полуплоскости с двумя одинаковыми и равноотстоящими от прямолинейной границы круговыми отверстиями радиуса  $a$  ( $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a$ ), когда на контуре отверстия и на горизонтальной прямолинейной границе заданы значения температуры  $T_1 = T_2 = T_3 = 0$  (рис. 2, в), при некоторых значениях отношения  $d/a$ , в зависимости от значения отношения  $c/a$  расстояния между отверстиями  $c$  к радиусу отверстий  $a$ .

Таблица 4. Значения напряжений  $\sigma_s$  в точках полуплоскости (рис. 2, в)

| Тип задачи | Точка | $d/a = 0,1$    |        |          | $d/a = 1$ |        |          |
|------------|-------|----------------|--------|----------|-----------|--------|----------|
|            |       | Значения $c/a$ |        |          |           |        |          |
|            |       | 2              | 10     | $\infty$ | 2         | 10     | $\infty$ |
| ТЭМУ       | A     | 0,565          | -0,102 | 0,281    | -0,340    | -0,638 | -0,926   |
|            | B     | -0,912         | -1,054 | -1,011   | -0,328    | -0,928 | -1,012   |
|            | C     | 1,281          | 1,183  | 1,325    | 2,328     | 2,231  | 2,005    |
|            | D     | -0,940         | -0,915 | -1,011   | -0,898    | -1,077 | -1,012   |
|            | E     | 0,193          | -0,161 | 0,281    | -0,820    | -0,629 | -0,926   |
|            | F     | -0,127         | -0,100 | -0,113   | 0,346     | -0,205 | -0,109   |
|            | G     | 0,169          | 0,649  | 0,349    | 1,991     | 1,685  | 1,749    |
|            | H     | -0,115         | -0,030 | -0,113   | -0,346    | -0,194 | -0,109   |
|            | O     | 0,073          | 0,439  | 0,051    | 0,781     | 0,509  | 0,801    |
|            | P     | 0,593          | -0,634 | 0,000    | 1,414     | -0,268 | 0,000    |
| ТУ         | A     | -0,420         | -0,037 | -0,248   | -0,043    | 0,027  | 0,136    |
|            | B     | 0,703          | 0,183  | 0,555    | 0,262     | 0,451  | 0,483    |
|            | C     | 0,863          | 1,014  | 0,694    | 1,041     | 1,247  | 1,010    |
|            | D     | 0,673          | 0,235  | 0,558    | 0,567     | 0,510  | 0,482    |
|            | E     | -0,248         | 0,191  | -0,249   | 0,076     | 0,326  | 0,136    |
|            | F     | 0,079          | 0,010  | 0,089    | -0,007    | 0,285  | 0,121    |
|            | G     | -0,101         | -0,374 | -0,056   | -0,357    | -0,104 | -0,259   |
|            | H     | 0,112          | 0,022  | 0,088    | 0,289     | 0,189  | 0,120    |
|            | O     | -0,228         | -0,304 | -0,145   | -0,641    | -0,653 | -0,587   |
|            | P     | 0,026          | -0,548 | 0,000    | -0,740    | -0,758 | 0,000    |

Из данных табл. 4 и других полученных результатов следует, что расстояние между отверстиями также значительно влияет на значения напряжений в полуплоскости. Если  $c/a > 20$ , то влияние одного отверстия на ТЭМУС около

другого отверстия становится незначительным и им можно пренебречь.

Во всех вышеописанных случаях пренебрежение пьезоэффектом (электромагнитными свойствами материала) приводило к большому искажению результатов. Поэтому при проведении расчетов следует учитывать электромагнитные свойства материала.

1. Калоеров С.А. Двумерные задачи термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, О.А. Сорочан // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 61–79.
2. Калоеров С.А. Плоская задача термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, О.А. Сорочан // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 4. – С. 81–91.
3. Калоеров С.А. Термоэлектромагнитоупругое состояние многосвязной анизотропной полуплоскости / С.А. Калоеров, О.А. Сорочан // Теорет. и прикладная механика. – 2010. – Вып. 1 (47). – С. 45–61.
4. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в пьезопластинах / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестник Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2017. – № 1. – С. 12–25.
5. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в пьезопластинках с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестник Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 1. – С. 15–26.
6. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
7. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
8. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.
9. Глушанков Е.С. К вопросу корректности принципа стабильности теплового потока для задачи о действии линейного потока тепла в многосвязной пьезопластинке / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2019. – Вып. 4 (69). – С. 21–31
10. Калоеров С.А. Потенциальные электромагнитные поля в пьезопластинах при механических, электромагнитных и тепловых воздействиях / С.А. Калоеров // Вестник Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2016. – № 4. – С. 19–34.

### E.S. Glushankov

#### The linear heat flux action in the multiply connected semi-infinite piezoelectric plate.

With using the conformal mapping and the complex potentials the problem of determining the thermo-electro-magneto-elastic state of multiply connected semi-infinite piezoelectric plate under linear heat flux action is solved. The evaluation of the unknown coefficients of complex potentials is carried out using the boundary conditions and the least squares. The regularities of effect of plate's geometric characteristics and the properties of its material on the stress concentration in the plate are set with the numerical studies.

**Keywords:** linear heat flux, thermo-electro-magneto-elastic state, semi-infinite plate, thermal stresses, complex potentials.

УДК 539.3

©2020. А.И. Занько

## ИЗГИБ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ С ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИМ РЯДОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОТВЕРСТИЙ ИЛИ ТРЕЩИН

С использованием обобщенных комплексных потенциалов теории упругости анизотропного тела решена двоякопериодическая задача теории упругости для плиты с эллиптическими отверстиями или трещинами. Разложением голоморфных функций в ряды Лорана получены общие представления соответствующих функций для плиты с конечным числом отверстий, затем удовлетворением условиям двоякопериодичности напряженно-деформированного состояния найдены общие представления искомых комплексных потенциалов, что позволило удовлетворять граничным условиям лишь на одном контуре. Эти условия удовлетворяются обобщенным методом наименьших квадратов, что дает возможность с высокой степенью точности удовлетворять граничным условиям даже для весьма близких расстояний между отверстиями и трещинами при их любой ориентации.

**Ключевые слова:** анизотропная плита; двоякопериодическая задача; отверстия; трещины; концентрация изгибающих моментов.

**Введение.** Тонкие анизотропные плиты с отверстиями находят широкое применение в современной инженерной практике. Под действием внешних усилий около отверстий таких плит могут возникать высокие концентрации напряжений, которые весьма велики при наличии большого количества отверстий. Все это нужно учитывать при проектировании конструкций с элементами в виде тонких плит с отверстиями.

В данной статье обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК) решена двоякопериодическая задача для плиты с эллиптическими отверстиями или трещинами. Проведены численные исследования распределения моментов и изменения коэффициентов интенсивности моментов (КИМ).

### 1. Решение задачи для плиты с конечным числом отверстий.

Рассмотрим вначале отнесенную к прямоугольной декартовой системе координат  $Oxy$  бесконечную анизотропную плиту, занимающую многосвязную область  $S$  (рис. 1), ограниченную контурами произвольно расположенных эллиптических отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) с полуосями  $a_l$ ,  $b_l$ , центрами в точках  $(x_{0l}, y_{0l})$  и углами наклонов  $\varphi_l$  полуосей  $a_l$  к оси  $Ox$ . На контурах отверстий действуют изгибающие моменты или они подкреплены. На бесконечности заданы моменты  $M_x^\infty$ ,  $M_y^\infty$ ,  $H_{xy}^\infty$ .

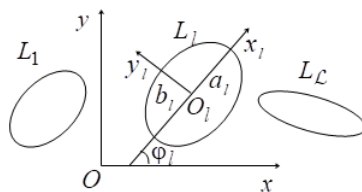


Рис. 1.

Определение напряженно-деформированного состояния (НДС) рассматри-

Изгиб плиты с двоякопериодическим рядом эллиптических отверстий или трещин

ваемой плиты сводится к нахождению комплексных потенциалов [1, 2, 3]

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kln} a_{kln},$$

где  $\Gamma_k$  – постоянные, определяемые из системы уравнений

$$2Re \sum_{k=1}^2 \Gamma_k = C_{11} M_x^\infty + C_{21} M_y^\infty + C_{31} H_{xy}^\infty,$$

$$2Re \sum_{k=1}^2 \mu_k \Gamma_k = C_{12} M_x^\infty + C_{22} M_y^\infty + C_{32} H_{xy}^\infty,$$

$$2Re \sum_{k=1}^2 \mu_k^2 \Gamma_k = C_{13} M_x^\infty + C_{23} M_y^\infty + C_{33} H_{xy}^\infty, \quad 2Re \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k = 0;$$

$$C_{11} = (2D_{22}D_{66} - 2D_{26}^2)/\Delta_1, \quad C_{21} = (2D_{16}D_{26} - 2D_{12}D_{66})/\Delta_1,$$

$$C_{31} = (2D_{12}D_{26} - 2D_{16}D_{22})/\Delta_1, \quad C_{12} = (D_{12}D_{26} - D_{16}D_{22})/\Delta_1,$$

$$C_{22} = (D_{12}D_{16} - D_{11}D_{26})/\Delta_1, \quad C_{32} = (D_{11}D_{22} - D_{12}^2)\Delta_1,$$

$$C_{13} = (2D_{16}D_{26} - 2D_{12}D_{66})/\Delta_1, \quad C_{23} = (2D_{11}D_{66} - 2D_{16}^2)/\Delta_1,$$

$$C_{33} = (2D_{12}D_{16} - 2D_{11}D_{26})/\Delta_1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} D_{11} & 2D_{16} & D_{12} \\ D_{12} & 2D_{26} & D_{22} \\ D_{16} & 2D_{66} & D_{26} \end{vmatrix};$$

$\mu_k$  ( $k = 1, 2$ ) – корни характеристического уравнения

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0;$$

$D_{i,j} = b_{i,j}D_0$  – жесткости материала, в которых

$$b_{11} = (a_{22}a_{66} - a_{26}^2)/\Delta, \quad b_{12} = (a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66})/\Delta,$$

$$b_{16} = (a_{12}a_{26} - a_{16}a_{22})/\Delta, \quad b_{22} = (a_{11}a_{66} - a_{16}^2)/\Delta,$$

$$b_{26} = (a_{12}a_{16} - a_{26}a_{11})/\Delta, \quad b_{66} = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)/\Delta,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix};$$

$D_0 = 2h^3/3$ ;  $h$  – полутолщина плиты;

$$\varphi_{kln} = 1/\zeta_{kt}^n; \quad (1)$$

$\zeta_{kl}$  – переменные, определяемые из конформных отображений

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left( \zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right)$$

внешности единичного круга  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности контуров  $L_{kl}$ , соответствующих контурам  $L_l$  при аффинных преобразованиях

$$z_k = x + \mu_k y,$$

причем

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$\begin{aligned} R_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}; \end{aligned} \quad (2)$$

$a_{kln}$  – неизвестные коэффициенты рядов Лорана, определяемые из граничных условий на контурах отверстий, которые в случае многосвязных плит удобнее использовать в дифференциальной форме, не содержащей постоянных слагаемых в этих условиях. Последние условия на контуре  $L_p$  ( $p = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) имеют вид [1, 2, 3]

$$2Re \sum_{k=1}^2 g_{kpi} \delta_{k,s} W_k''(z_k) = \frac{df_{pi}(t)}{ds} \quad (i = 1, 2), \quad (3)$$

в котором  $\delta_{k,s} = dz_k/ds$ , а также

$$g_{kp1} = \frac{p_k}{\mu_k}, \quad g_{kp2} = q_k,$$

$$\frac{df_{p1}}{ds} = -m_p \frac{dy}{ds} - c_p \frac{dx}{ds}, \quad \frac{df_{p2}}{ds} = -m_p \frac{dx}{ds} + c_p \frac{dy}{ds};$$

$$p_k = D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2, \quad q_k = D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2$$

в случае загруженного контура  $L_p$ ,

$$g_{kp1} = 1, \quad g_{kp2} = \mu_k, \quad \frac{df_{p1}(t)}{ds} = 0, \quad \frac{df_{p2}(t)}{ds} = 0,$$

если контур  $L_p$  жестко заземлен или жестко подкреплен. При этом

$$W_k''(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k); \quad (4)$$

$$\varphi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{R_{kl} \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}. \quad (5)$$



После определения постоянных  $a_{klm}$  функции  $W'_k(z_k)$  будут известными и по ним можно вычислять в любой точке плиты основные характеристики изгиба по формулам

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = -2Re \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k) W''_k(z_k); \quad (6)$$

$$r_k = D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2$$

и моменты

$$M_n = M_x \sin^2 \theta + M_y \cos^2 \theta - 2H_{xy} \sin \theta \cos \theta,$$

$$M_s = M_x \cos^2 \theta + M_y \sin^2 \theta + 2H_{xy} \sin \theta \cos \theta,$$

$$H_{ns} = (M_y - M_x) \sin \theta \cos \theta + H_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

на произвольных площадках с нормалью  $n$  и касательной  $s$ . При этом, если некоторый контур отверстия  $L_l$  переходит в прямолинейный разрез (трещину или жесткое линейное включение), то для его концов можно вычислить и коэффициенты интенсивности моментов (КИМ)  $k_{1M}^\pm$  и  $k_{2M}^\pm$  по формулам [4]

$$k_{1M}^\pm = 2Re \sum_{k=1}^2 [p_k \sin^2 \varphi_l + q_k \cos^2 \varphi_l - 2r_k \sin \varphi_l \cos \varphi_l] M_k,$$

$$k_{2M}^\pm = 2Re \sum_{k=1}^2 [(q_k - p_k) \cos \varphi_l \sin \varphi_l + r_k(\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l)] M_k,$$

в которых

$$M_k = \mp \frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{klm},$$

знаки + и - у КИМ в локальной системе координат  $O_l x_l y_l$  относятся к правому и левому концам разреза соответственно.

**2. Двоякопериодическая задача для плиты с эллиптическими отверстиями или трещинами.** Пусть теперь плита имеет  $m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) одинаковых бесконечных рядов одинаковых и одинаково ориентированных эллиптических отверстий или трещин с контурами  $L_{ml}$  ( $m, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), полуосями  $a, b$  и центрами вдоль одной прямой (рис. 2), принимаемой за ось  $Ox$  прямоугольной системы координат  $Oxy$  с началом в центре отверстия с контуром  $L_0$ , называемого основным. Обозначим расстояния между центрами соседних отверстий через  $h_x$ , угол между полуосью  $a$  и осью  $Ox$  - через  $\varphi$ , расстояния между центрами соседних рядов через  $h_y$ .

Для рассматриваемого случая производные комплексных потенциалов (4) примут вид

$$W''_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi'_{kmln}(z_k) a_{klmn}, \quad (7)$$

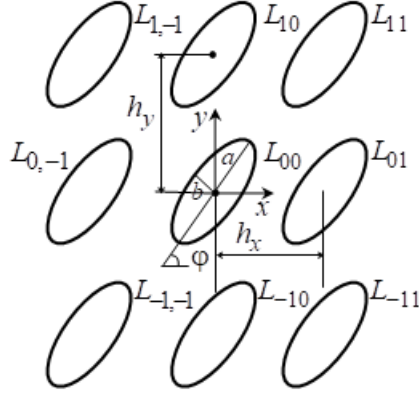


Рис. 2.

где  $\varphi'_{kmln}(z_k)$  – функции, вычисляемые по формулам (1) и (5),  $\zeta_{kml}$  – переменные, определяемые из неявных зависимостей

$$z_k = z_{kl} + R_k \left( \zeta_{kml} + \frac{m_k}{\zeta_{kml}} \right), \quad (8)$$

$$\varphi'_{kmln}(z_k) = - \frac{n}{R_k \zeta_{kml}^{n-1} (\zeta_{kml}^2 - m_k)},$$

причем  $z_{kl} = lh_x + \mu_k mh_y$ ;  $R_k$ ,  $m_k$  – величины, вычисляемые по формулам (2), в которых нужно опускать в индексах  $l$ .

В силу двоякопериодичности напряженного состояния значения напряжений в точках  $z_k$  и  $z_k + h_x + \mu_k h_y$  одинаковы. Поэтому

$$W_k''(z_k) = W_k''(z_k + h_x + \mu_k h_y), \quad (9)$$

А следовательно по (7)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kmln} \varphi'_{kmln}(z_k) =$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kmln} \varphi'_{kmln}(z_k + h_x + \mu_k h_y) \quad (10)$$

Тогда из (8) легко увидеть, что

$$\zeta_{kml}(z_k + h_x + \mu_k h_y) = \zeta_{km+1l+1}(z_k), \quad (11)$$

$$\varphi'_{kmln}(z_k + h_x + \mu_k h_y) = \varphi'_{km+1, l+1, n}(z_k).$$

Подставляя выражения (11) в (10) и переобозначая индексы суммирования,

находим

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kmln} \varphi'_{kmln}(z_k) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kmln} \varphi'_{km+1, l+1, n}(z_k) = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{km-1, l-1, n} \varphi'_{klm}(z_k) \end{aligned}$$

Сравнивая в этом равенстве коэффициенты при одинаковых функциях  $\varphi'_{kmln}(z_k)$ , будем иметь  $a_{kmln} = a_{km-1, l-1, n} = a_{kn}$ . Тогда для производных комплексных потенциалов окончательно будем иметь

$$W_k''(z_k) = \Gamma_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \xi'_{kn}(z_k). \quad (12)$$

где

$$\xi'_{kn}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi'_{klmn}(z_k). \quad (13)$$

Теперь для определения неизвестных постоянных  $a_{kn}$  нужно удовлетворять граничным условиям (3) лишь на одном из контуров, например, на контуре центрального отверстия  $L_0$ . На остальных контурах в силу периодичности комплексных потенциалов, граничные условия будут удовлетворены автоматически. Граничным условиям (3) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов. Для этого выберем на контуре  $L_0$  систему точек  $M_{m0}(x_{m0}, y_{m0})$  ( $m = \overline{1, M_0}$ ), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (12). Тогда для определения неизвестных постоянных  $a_{kn}$  получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 2Re \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} g_{k0i} \delta_{k,s} \xi'_{kn}(t_{km}) a_{kn} &= \\ = \frac{df_{0i}(t_m)}{ds} - 2Re \sum_{k=1}^2 g_{k0i} \delta_{k,s} \Gamma_k \quad (m = \overline{1, M_0}; i = 1, 2). \end{aligned} \quad (14)$$

Систему (14) будем решать с использованием сингулярных разложений [5, 6].

**3. Описание результатов численных исследований.** Были проведены численные исследования напряженного состояния плиты из изотропного материала алюминий [7] (материал М1) и сильно анизотропного материала (по общепринятой терминологии "степень анизотропии" определяется степенью отличия отношения  $a_{11}/a_{22}$  от 1) углепластик HMS/DX209 [8] с мягкими волокнами вдоль оси  $Ox$  (материал М3). Технические постоянные этих материалов приведены в табл. 1.

Таблица 1

| Материал | $E_1 \cdot 10^{-4}$ ,<br>МПа | $E_2 \cdot 10^{-4}$ ,<br>МПа | $G_{12} \cdot 10^{-4}$ ,<br>МПа | $\nu_{12}$ | $\nu_{21}$ |
|----------|------------------------------|------------------------------|---------------------------------|------------|------------|
| М1       | 7,10000                      | 7,10005                      | 2,84000                         | 0,25000    | 0,25000    |
| М3       | 0,60000                      | 18,88000                     | 0,27000                         | 0,00953    | 0,30000    |

При проведении численных исследований количество членов в рядах (12) по  $n$  и количество точек  $M_0$  на контуре  $L_0$ , в которых удовлетворялись граничные условия при получении систем уравнений, увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контуре не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (модуль абсолютной погрешности не превышал  $10^{-2}$ ). Как показали численные исследования, для такого удовлетворения граничным условиям в рассмотренных задачах в зависимости от близости концентраторов напряжений друг к другу достаточно было оставлять от 10 до 20 членов в рядах (12) по  $n$  и на контуре  $L_0$  выбирать от 100 до 150 «коллокационных» точек.

В табл. 2 для плиты с двоякопериодической системой круговых отверстий радиуса  $a$  ( $b = a$ ) при действии моментов на бесконечности интенсивности  $m$  ( $M_y^\infty = m$ ) в зависимости от центрального угла  $\theta$ , отсчитываемого от положительного направления оси  $Ox$ , и от отношения  $c/a$ , где  $c$  – расстояние между контурами отверстий ( $c = h_x - 2a$ ), приведены значения нормальных моментов  $M_s/m$  вблизи контура  $L_0$  на площадках, перпендикулярных к контуру, а на рис. 3 изображены графики распределения этих моментов.

Таблица 2

| Материал | $\theta$ , рад. | $c/a$    |       |       |       |       |       |        |
|----------|-----------------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
|          |                 | $\infty$ | 10    | 2     | 1     | 0,5   | 0,1   | 0,01   |
| М1       | 0               | 1,769    | 1,775 | 1,868 | 2,041 | 2,378 | 4,127 | 11,332 |
|          | $\pi/12$        | 1,666    | 1,671 | 1,736 | 1,839 | 2,003 | 2,324 | 1,395  |
|          | $\pi/6$         | 1,385    | 1,387 | 1,398 | 1,385 | 1,329 | 0,942 | 0,350  |
|          | $\pi/4$         | 1,000    | 1,000 | 0,972 | 0,911 | 0,803 | 0,463 | 0,158  |
|          | $\pi/3$         | 0,615    | 0,613 | 0,574 | 0,521 | 0,446 | 0,260 | 0,095  |
|          | $5\pi/12$       | 0,334    | 0,329 | 0,293 | 0,261 | 0,242 | 0,289 | 0,208  |
|          | $\pi/2$         | 0,231    | 0,226 | 0,191 | 0,170 | 0,186 | 0,487 | 1,680  |
| М3       | 0               | 3,793    | 3,690 | 3,603 | 4,017 | 4,498 | 7,916 | 28,523 |
|          | $\pi/12$        | 2,818    | 2,752 | 2,564 | 2,771 | 3,164 | 4,567 | 3,330  |
|          | $\pi/6$         | 0,756    | 0,745 | 0,614 | 0,589 | 0,640 | 0,724 | 0,362  |
|          | $\pi/4$         | 0,207    | 0,200 | 0,152 | 0,130 | 0,118 | 0,088 | 0,037  |
|          | $\pi/3$         | 0,134    | 0,123 | 0,077 | 0,057 | 0,042 | 0,041 | 0,024  |
|          | $5\pi/12$       | 0,131    | 0,117 | 0,043 | 0,030 | 0,048 | 0,125 | 0,113  |
|          | $\pi/2$         | 0,133    | 0,117 | 0,028 | 0,029 | 0,060 | 0,226 | 0,936  |

Из данных табл. 2 и рис. 3 видно, что наибольшая концентрация моментов наблюдается в окрестности угла  $\theta = 0$ . С уменьшением отношения  $c/a$  значения моментов в этой зоне, а также в окрестности угла  $\theta = \pi/2$  возрастают.

Сравнивая данные ранее полученные для случая периодической задачи можно заметить, что в случае двоякопериодической задачи значения моментов меньше. Существенно на значения моментов влияет «степень анизотропии».

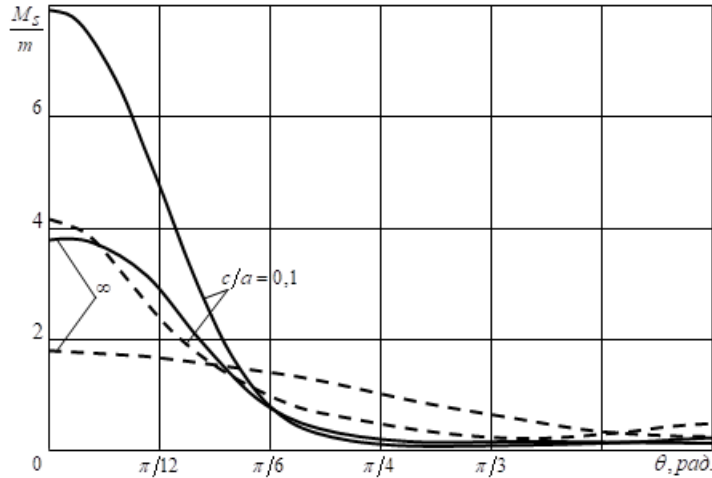


Рис. 3.

Исследованиями установлено, что при уменьшении отношения  $b/a$  полуосей эллипсов значения моментов в окрестности конца большой полуоси растут, стремясь к бесконечности. При  $b/a < 10^{-3}$  эллипсы можно считать трещинами и вычислять для них КИМ.

В табл. 3 для плиты с двоякопериодической системой трещин длины  $2a$  ( $b = 10^{-3}$ ) параллельных оси  $Ox$  при действии моментов на бесконечности интенсивности  $m$  ( $M_y^\infty = m$ ) в зависимости от отношения  $c/a$ , приведены значения КИМ  $k_{1M}^\pm$  ( $k_{2M}^\pm = 0$ ) для вершин трещин, а на рис. 4 изображены эти значения. На значения  $k_{1M}^\pm$  значительно влияет анизотропия материала, причем чем ближе трещины к друг другу, тем сильнее это влияние, при  $c/a > 10$  это влияние незначительно.

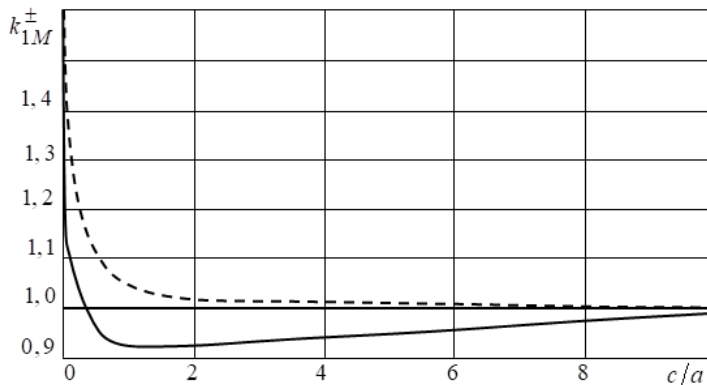


Рис. 4.

Таблица 3

| Материал | $c/a_0$  |       |       |       |       |       |       |
|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|          | $\infty$ | 10    | 2     | 1     | 0,5   | 0,1   | 0,01  |
| M1       | 1,000    | 1,000 | 1,020 | 1,051 | 1,107 | 1,319 | 1,644 |
| M3       | 1,000    | 0,992 | 0,927 | 0,926 | 0,962 | 1,104 | 1,315 |

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
2. Меглинский В.В. Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит / В.В. Меглинский. // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. – 1967. – № 3. – С. 97-127.
3. Калоеров С.А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит / С.А. Калоеров. // Теорет. и прикладная механика. – 2012. – № 4 (50). – С. 115 - 136.
4. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих анизотропных сред / С.А. Калоеров. // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56-62.
5. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
6. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1969. – 280 с.
7. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
8. Васильев В.В. Композиционные материалы: Справочник / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др. Под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.

**A.I. Zan'ko**

**Bending of anisotropic plate with double-periodic range of elliptical holes and cracks.**

Using the generalized complex potentials of the theory of elasticity of an anisotropic body, a doubly periodic problem of the theory of elasticity for a plate with elliptical holes or cracks is solved. By expanding holomorphic functions in Laurent series, general representations of the corresponding functions for a plate with a finite number of holes were obtained, then, by satisfying the conditions of doubly periodicity of the stress-strain state, general representations of the sought complex potentials were found, which made it possible to satisfy the boundary conditions on only one contour. These conditions are satisfied by the generalized least squares method, which makes it possible to meet the boundary conditions with a high degree of accuracy even for very close distances between holes and cracks at any orientation.

**Keywords:** *anisotropic plate; double-periodic task; holes; cracks; concentration of bending moments..*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк  
*a.zanko@donnu.ru*

Получено 04.02.2020

## СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

УДК 624.042.8 : 624.044.2

©2020. С.А. Фоменко, А.Н. Оржиховский, С.Ю. Макаренко

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ  
УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССОЙ  
НА УПРУГИХ ОПОРАХ  
(НА ПРИМЕРЕ ЖЕСТКОЙ ОШИНОВКИ)**

Проблема уменьшения уровня колебаний конструкций жесткой ошиновки во многих случаях связана с необходимостью повышения жесткости и снижения материалоемкости конструкций, однако важно выполнение технологических требований, предъявляемых условиями эксплуатации, и защита людей от вредного действия вибраций. В статье рассматривается конструкция жесткой ошиновки, которая может быть представлена в виде динамической модели стержня с распределенной массой на упругих опорах. Динамическая модель описывается дифференциальным уравнением колебаний упругого несомог стержня на упругих опорах, сжатого силой  $T$ , с присоединенной массой  $M$  с учетом сил инерции поворота, сдвига поперечных сечений и вязкого трения. Получено общее частотное уравнение, включающее в себя любую комбинацию внешних опорных связей (включая их отсутствие), а также произвольное расположение сосредоточенной массы на стержне. Получены уравнения динамических перемещений и максимального отклонения любого сечения трубы от положения равновесия.

**Ключевые слова:** жесткая ошиновка, гашение колебаний, колебания стержня на упругих опорах, частотное уравнение.

**1. Анализ состояния и формулировка проблемы.** Жесткая ошиновка (ЖО) [1-5] предназначена для передачи и распределения электрической энергии между высоковольтными аппаратами в составе как открытых (ОРУ), так и закрытых распределительных устройств (ЗРУ) быстромонтируемых комплектных трансформаторных подстанций (рис. 1).

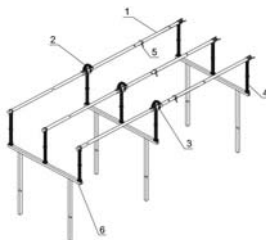


Рис. 1. Принципиальная схема конструкции ЖО: 1 – трубчатая шина; 2 – токовый компенсатор; 3 – шинодержатель; 4 – опорный изолятор; 5 – замок; 6 – опорная рама.

Одним из основных вопросов при проектировании конструкции жесткой ошиновки является вопрос стабилизации конструкции под действием различных динамических нагрузок [2, 3, 5 - 7]. Для изучения поведения жесткой ошиновки при проведении динамических испытаний необходимо создать математическую модель колеблющегося упругого стержня на упругих опорах, сжатого силой  $T$ , с присоединенной массой  $M$ .

Известно, что наиболее точным описанием процесса поперечных колебаний сжатого весомого стержня является дифференциальное уравнение, в котором учтены силы инерции поворота ( $J_0\ddot{\varphi} \cdot dx$ ) и сдвига поперечных сечений [8-11]:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - mi^2 \left( 1 + \frac{kE}{G} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{i^2 km^2}{FG} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} + T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

Целью исследования является создание математической модели колеблющегося весомого упругого стержня на упругих опорах, сжатого силой  $T$ , с присоединенной массой  $M$ .

**2. Методика и результаты анализа модели.** Рассмотрим свободные затухающие поперечные колебания стержня круглого сечения с погонной массой  $m$  (например, трубы-шины), изгибной жесткостью  $EI$ , нагруженного продольной силой, на упругих опорах (рис. 2).

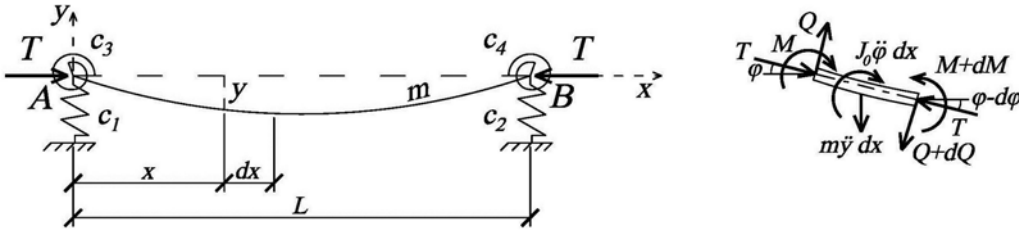


Рис. 2. Схема колебаний стержня с распределенной массой на упругих опорах

Запишем дифференциальное уравнение, в котором учтены силы инерции поворота, сдвиг поперечных сечений и вязкое трение:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - mi^2 \left( 1 + \frac{kE}{G} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{i^2 km^2}{FG} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} + T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial y}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

где  $m$ ,  $I$ ,  $F$ ,  $E$ ,  $G$ ,  $i$ ,  $k$  – соответственно погонная масса стержня, момент инерции поперечного сечения, площадь поперечного сечения, модуль упругости, модуль сдвига, радиус инерции поперечного сечения и коэффициент неравномерности распределения касательных напряжений по сечению определяемый по формуле:

$$k = \frac{F}{I^2} \int_F \left( \frac{S_x^{\text{отс}}}{b} \right)^2 dF. \quad (3)$$



В формулах (2) и (3) все геометрические характеристики вычисляются относительно главной центральной оси, перпендикулярной к плоскости колебаний.

Вводя обозначения:

$$a^2 = \frac{EI}{m}, \quad b^2 = i^2 \left(1 + \frac{kE}{G}\right), \quad c^2 = i^2 \frac{km}{FG}, \quad d^2 = \frac{T}{m}, \quad \varepsilon = \frac{\beta}{2m}, \quad (4)$$

перепишем уравнение (2) в виде

$$a^2 Y_{xxxx} + Y_{tt} - b^2 Y_{xxtt} + c^2 Y_{tttt} + d^2 Y_{xx} + 2\varepsilon Y_t = 0.$$

Согласно методу Фурье [12], решение может быть получено в виде  $Y = Y(x) \cdot \sin \omega t = e^{nx} \cdot \sin \omega t$ . Дифференцируя функцию, получим

$$y^{IV} + \frac{b^2 \omega^2 + d^2}{a^2} y^{II} + \frac{c^2 \omega^4 - \omega^2}{a^2} y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$n^4 + \frac{b^2 \omega^2 + d^2}{a^2} n^2 + \frac{c^2 \omega^4 - \omega^2}{a^2} = 0, \quad (5)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_d^2 + \varepsilon^2}$  – частота собственных колебаний стержня без учета затухания. Блочная форма данного уравнения:

Решением данного биквадратного уравнения является совокупность:

$$\left[ \begin{array}{l} n_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-(b^2 \omega^2 + d^2) - \sqrt{(b^4 - 4a^2 c^2) \omega^4 + (4a^2 + 2b^2 d^2) \omega^2 + d^4}}{2a^2}} = \pm iK, \\ n_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-(b^2 \omega^2 + d^2) + \sqrt{(b^4 - 4a^2 c^2) \omega^4 + (4a^2 + 2b^2 d^2) \omega^2 + d^4}}{2a^2}} = \pm k. \end{array} \right. , \quad (6)$$

где  $k$  и  $K$  – волновые числа (рациональные положительные). Волновые числа  $k$  и  $K$  являются функциями частоты при известной продольной силе и функциями продольной силы при известной частоте. Определим частотный диапазон, для которого запись (6) справедлива. Введем обозначение:

$$p(\omega) = (b^4 - 4a^2 c^2) \omega^4 + (4a^2 + 2b^2 d^2) \omega^2 + d^4.$$

Численные исследования функции  $p(\omega)$  при различных значениях жесткостных, геометрических и др. параметров стержня показали, что область значений функции определяется выражением  $p(\omega) \geq 0$ , причем  $p(\omega) = 0$  при  $\omega = 0$  и  $d = 0$ . Следовательно, выражение  $\sqrt{(b^4 - 4a^2 c^2) \omega^4 + (4a^2 + 2b^2 d^2) \omega^2 + d^4}$  существует и является числом рациональным.

Введем обозначения

$$\eta = \frac{-(d^2 + b^2 \omega^2) + \sqrt{(b^4 - 4a^2 c^2) \omega^4 + (4a^2 + 2b^2 d^2) \omega^2 + d^4}}{2a^2},$$

$$\mu = \frac{(d^2 + b^2 \omega^2) + \sqrt{(b^4 - 4a^2 c^2) \omega^4 + (4a^2 + 2b^2 d^2) \omega^2 + d^4}}{2a^2}.$$

Найдем область частот  $\omega$ , в которой выполняется равенство  $\text{sign}(\eta) = \text{sign}(\mu)$ . Для этого необходимо  $\mu \cdot \eta \geq 0$ . Применяя теорему Виета к характеристическому уравнению (5), получим  $\mu \cdot \eta = \frac{c^2 \omega^4 - \omega^2}{a^2}$ , тогда  $c^2 \omega^4 - \omega^2 \geq 0$ , откуда  $\omega \leq \frac{1}{c}$ . Следовательно, запись (6) и последующие выводы справедливы при частотах  $\omega < \omega_{кр}$ , где

$$\omega_{кр} = \frac{1}{c} = \sqrt{\frac{FG}{i^2 km}} = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{G}{k\rho}}, \quad (7)$$

$\rho$  – плотность материала стержня. Таким образом,  $\omega_{кр}$  обратно пропорциональна радиусу инерции сечения. Как видим, полученная зависимость справедлива для колебаний стержня без учета затухания [13], так и с учетом затухания.

Далее будем рассматривать решение уравнения (2) в области частот  $\omega < \omega_{кр}$ . Тогда функция прогибов примет вид:

$$y(x, t) = e^{-\varepsilon t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_{1n} \cdot e^{k_n x} + C_{2n} \cdot e^{-k_n x} + C_{3n} \cdot e^{iK_n x} + C_{4n} \cdot e^{-iK_n x} \right) \cdot e^{i\omega_{dn} t}$$

или через новые постоянные интегрирования

$$y(x, t) = e^{-\varepsilon t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot ch k_n x + B_n \cdot sh k_n x + C_n \cdot \cos K_n x + D_n \cdot \sin K_n x) \cdot \sin(\omega_{dn} t + \mu_n). \quad (8)$$

Выразим постоянные интегрирования через начальные параметры. Для этого продифференцируем уравнение изогнутой оси стержня:

$$y(x) = Achkx + Bshkx + C \cos Kx + D \sin Kx,$$

$$y'(x) = k(Ashkx + Bchkx) + K(-C \sin Kx + D \cos Kx),$$

$$M(x) = EIy''(x) = EIk^2(Achkx + Bshkx) - EIK^2(C \cos Kx + D \sin Kx),$$

$$Q(x) = EIk^3(Ashkx + Bchkx) + EIK^3(C \sin Kx - D \cos Kx).$$

Из начальных условий  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = y'_0$ ,  $M(0) = M_0$ ,  $Q(0) = P_0$  получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A + C = y_0, \\ Bk + DK = y'_0, \\ k^2 EIA - K^2 EIC = M_0, \\ k^3 EIB - K^3 EID = P_0. \end{cases}$$

Отсюда находим постоянные интегрирования через начальные параметры:

$$A = \frac{y_0 K^2 + \frac{M_0}{EI}}{k^2 + K^2}, \quad B = \frac{y'_0 \frac{K^2}{k} + \frac{P_0}{kEI}}{k^2 + K^2},$$

$$C = \frac{y_0 k^2 - \frac{M_0}{EI}}{k^2 + K^2}, \quad D = \frac{y'_0 \frac{k^2}{K} - \frac{P_0}{KEI}}{k^2 + K^2}.$$

Подставляя эти постоянные, получим уравнение деформированной оси стержня в виде:

$$y(x) = y_0 \frac{K^2 chkx + k^2 \cos Kx}{k^2 + K^2} + y'_0 \frac{K^3 shkx + k^3 \sin Kx}{kK(k^2 + K^2)} + \frac{M_0}{EI} \frac{chkx - \cos Kx}{k^2 + K^2} + \frac{P_0}{EI} \frac{K shkx - k \sin Kx}{kK(k^2 + K^2)}. \quad (9)$$

Обозначая произведения

$$kK = k_0^2, \quad \lambda = kL, \quad \Lambda = KL, \quad \lambda_0 = k_0L. \quad (10)$$

получим

$$\begin{aligned} A_{kx} &= \frac{K^2 chkx + k^2 \cos Kx}{k^2 + K^2}, & \frac{dA_{kx}}{dx} &= k_0 D_{kx}, \\ A_{kx}^* &= \frac{k^2 chkx + K^2 \cos Kx}{k^2 + K^2}, & \frac{dA_{kx}^*}{dx} &= k_0 D_{kx}^*, \\ B_{kx} &= \frac{K^3 shkx + k^3 \sin Kx}{k_0(k^2 + K^2)}, & \frac{dB_{kx}}{dx} &= k_0 A_{kx}, \\ B_{kx}^* &= k_0 \frac{k shkx + K \sin Kx}{k^2 + K^2}, & \frac{dB_{kx}^*}{dx} &= k_0 A_{kx}^*, \\ C_{kx} &= k_0^2 \frac{chkx - \cos Kx}{k^2 + K^2}, & \frac{dC_{kx}}{dx} &= k_0 B_{kx}^*, \\ C_{kx}^* &= \frac{k^4 chkx - K^4 \cos Kx}{k_0^2(k^2 + K^2)}, \\ D_{kx} &= k_0 \frac{K shkx - k \sin Kx}{k^2 + K^2}, & \frac{dD_{kx}}{dx} &= k_0 C_{kx}, \\ D_{kx}^* &= \frac{k^3 shkx - K^3 \sin Kx}{k_0(k^2 + K^2)}, & \frac{dD_{kx}^*}{dx} &= k_0 C_{kx}^*. \end{aligned} \quad (11)$$

Зависимости (11) являются динамическими функциями А.Н. Крылова. Таким образом, с учетом дифференциальных зависимостей, получим следующие расчетные уравнения в начальных параметрах:

$$\left\{ \begin{aligned} y(x) &= y_0 A_{kx} + \frac{y'_0}{k_0} B_{kx} + \frac{M_0}{k_0^2 EI} C_{kx} + \frac{P_0}{k_0^3 EI} D_{kx}, \\ y'(x) &= y'_0 A_{kx} + \frac{M_0}{k_0 EI} B_{kx}^* + \frac{P_0}{k_0^2 EI} C_{kx} + y_0 k_0 D_{kx}, \\ M(x) &= M_0 A_{kx}^* + \frac{P_0}{k_0} B_{kx}^* + y_0 k_0^2 EIC_{kx} + y'_0 k_0 EID_{kx}, \\ Q(x) &= P_0 A_{kx}^* + y_0 k_0^3 EIB_{kx}^* + y'_0 k_0^2 EIC_{kx} + M_0 k_0 D_{kx}^*. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Дальнейшее решение задачи сводится к определению волновых чисел исходя из граничных условий задачи.

На основе вышеизложенных решений получим решение для схемы, содержащей одну сосредоточенную массу  $M$  (установленная вибромашина), расстояние от левой опоры до которой обозначим  $u$  (рис. 3).

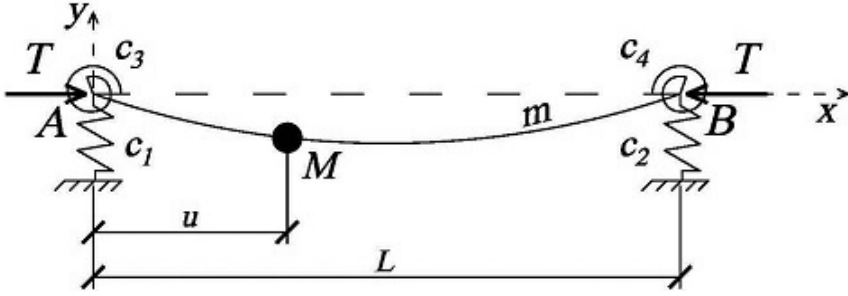


Рис. 3. Схема колебаний стержня на упругих опорах с распределенной массой и одной сосредоточенной массой

Дифференциальное уравнение имеет вид (2). Тогда с использованием (12) прогибы определяются в соответствии с методом начальных параметров:

$$y(x) = y_0 A_{kx} + \frac{y'_0}{k_0} B_{kx} + \frac{M_0}{k_0^2 EI} C_{kx} + \frac{P_0}{k_0^3 EI} D_{kx} + \frac{P}{k_0^3 EI} D_{k(x-u)} \varepsilon(x-u), \quad (13)$$

где  $P$  – сила инерции массы,  $\varepsilon(x-u)$  – единичная функция, определяющаяся как

$$\begin{cases} \varepsilon(x-a) = 1, & \text{при } x \geq a; \\ \varepsilon(x-a) = 0, & \text{при } x < a. \end{cases}$$

Сила инерции массы может быть найдена по формуле:

$$P = -M\ddot{y}(u) = M(\omega_d^2 - \varepsilon^2)y(u).$$

Используя теорему Виета применительно к характеристическому уравнению (5) и его решением (6), получим

$$\begin{aligned} \omega_d^2 &= \frac{(K^2 - k^2) \cdot a^2 - d^2}{b^2} - \varepsilon^2 \quad \text{или} \\ \omega_d^2 &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4k_0^4 c^2 a^2}}{2c^2} - \varepsilon^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Обозначим

$$\alpha_M = (\omega_d^2 - \varepsilon^2) \frac{M}{k_0^3 EI}, \quad \xi = \frac{M}{mL}. \quad (15)$$

Модель колебаний упругого стержня с присоединенной массой на упругих опорах

Функция  $\alpha_M$  является безразмерной, характеризующей влияние массы .

Тогда сила инерции массы с учетом граничных условий в начале координат  $M_0 = c_3 y_0$ ,  $P_0 = -c_1 y_0$ , определится как

$$P = M (\omega_d^2 - \varepsilon^2) \cdot \left( y_0 A_{ku} + \frac{y'_0}{k_0} B_{ku} + \frac{M_0}{k_0^2 EI} C_{ku} + \frac{P_0}{k_0^3 EI} D_{ku} \right) =$$

$$= \alpha_M k_0^3 EI \left( y_0 \left( A_{ku} - \frac{c_1 D_{ku}}{k_0^3 EI} \right) + \frac{y'_0}{k_0} \left( B_{ku} + \frac{c_3 C_{ku}}{k_0 EI} \right) \right)$$

Таким образом, с учетом дифференциальных зависимостей, получим следующие расчетные уравнения в начальных параметрах:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x) = y_0((A_{kx} + \alpha_M A_{ku} D_{k(x-u)} \varepsilon(x-u)) - \\ - \frac{c_1}{k_0^3 EI} (D_{kx} + \alpha_M D_{ku} D_{k(x-u)} \varepsilon(x-u))) + \\ + \frac{y'_0}{k_0} ((B_{kx} + \alpha_M B_{ku} D_{k(x-u)} \varepsilon(x-u)) + \\ + \frac{c_3}{k_0 EI} (C_{kx} + \alpha_M C_{ku} D_{k(x-u)} \varepsilon(x-u))), \\ \\ y'(x) = y_0(k_0(D_{kx} + \alpha_M A_{ku} C_{k(x-u)} \varepsilon(x-u)) - \\ - \frac{c_1}{k_0^2 EI} (C_{kx} + \alpha_M D_{ku} C_{k(x-u)} \varepsilon(x-u))) + \\ + y'_0((A_{kx} + \alpha_M B_{ku} C_{k(x-u)} \varepsilon(x-u)) + \\ + \frac{c_3}{k_0 EI} (B_{kx}^* + \alpha_M C_{ku} C_{k(x-u)} \varepsilon(x-u))), \\ \\ M(x) = y_0(k_0^2 EI (C_{kx} + \alpha_M A_{ku} B_{k(x-u)}^* \varepsilon(x-u)) - \\ - \frac{c_1}{k_0} (B_{kx}^* + \alpha_M D_{ku} B_{k(x-u)}^* \varepsilon(x-u))) + \\ + y'_0(k_0 EI (D_{kx} + \alpha_M B_{ku} B_{k(x-u)}^* \varepsilon(x-u)) + \\ + c_3 (A_{kx}^* + \alpha_M C_{ku} B_{k(x-u)}^* \varepsilon(x-u))), \\ \\ Q(x) = y_0(k_0^3 EI (B_{kx}^* + \alpha_M A_{ku} A_{k(x-u)}^* \varepsilon(x-u)) - \\ - c_1 (A_{kx}^* + \alpha_M D_{ku} A_{k(x-u)}^* \varepsilon(x-u))) + \\ + y'_0(k_0^2 EI (C_{kx} + \alpha_M B_{ku} A_{k(x-u)}^* \varepsilon(x-u)) + \\ + c_3 k_0 (D_{kx}^* + \alpha_M C_{ku} A_{k(x-u)}^* \varepsilon(x-u))). \end{array} \right. \quad (16)$$

Осуществляем переход к безразмерным параметрам жесткостей внешних опор:

$$s_1 = \frac{c_1 \cdot L^3}{EI}, \quad s_2 = \frac{c_2 \cdot L^3}{EI}, \quad s_3 = \frac{c_3 \cdot L}{EI}, \quad s_4 = \frac{c_4 \cdot L}{EI}. \quad (17)$$

При использовании безразмерных относительных величин жесткости внешних опор (17) получим частотное уравнение в виде:

$$\begin{aligned} F_u = & \left[ s_2 A_\lambda - \frac{s_1}{s_2} D_\lambda \lambda_0^3 - \lambda_0^3 B_\lambda^* + s_1 A_\lambda^* + \alpha_M (s_2 A_{ku} D_{k(L-u)} - \right. \\ & \left. - \frac{s_1 s_2}{\lambda_0^3} D_{ku} D_{k(L-u)} - \lambda_0^3 A_{ku} A_{k(L-u)}^* + s_1 D_{ku} A_{k(L-u)}^*) \right] \times \\ & \left[ s_4 A_\lambda + \frac{s_3 s_4 B_\lambda^*}{\lambda_0} + \lambda_0 D_\lambda + s_3 A_\lambda^* + \alpha_M \left( s_4 B_{ku} C_{k(L-u)} + \frac{s_3 s_4}{\lambda_0} C_{ku} C_{k(L-u)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \lambda_0 B_{ku} B_{k(L-u)}^* + s_3 C_{ku} B_{k(L-u)}^* \right) \right] - \left[ s_4 \lambda_0 D_\lambda - \frac{s_1 s_4 C_\lambda}{\lambda_0^2} + \lambda_0^2 C_\lambda - \right. \\ & \left. - \frac{s_1 B_\lambda^*}{\lambda_0} + \alpha_M \left( s_4 \lambda_0 A_{ku} C_{k(L-u)} - \frac{s_1 s_4}{\lambda_0^2} D_{ku} C_{k(L-u)} + \lambda_0^2 A_{ku} B_{k(L-u)}^* - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{s_1}{\lambda_0} D_{ku} B_{k(L-u)}^* \right) \right] \times \left[ s_2 \frac{B_\lambda}{\lambda_0} + \frac{s_2 s_3 C_\lambda}{\lambda_0^2} - \lambda_0^2 C_\lambda - s_3 \lambda_0 D_\lambda^* + \right. \\ & \left. + \alpha_M \left( s_2 \frac{B_{ku} D_{k(L-u)}}{\lambda_0} + \frac{s_2 s_3}{\lambda_0^2} C_{ku} D_{k(L-u)} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \lambda_0^2 B_{ku} A_{k(L-u)}^* - s_3 \lambda_0 C_{ku} A_{k(L-u)}^* \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Полученное уравнение (18) является общим частотным уравнением, включающим в себя любую комбинацию внешних опорных связей (включая их отсутствие), а также произвольное расположение сосредоточенной массы на стержне. Также следует отметить, что все коэффициенты уравнения (18) являются безразмерными величинами. Таким образом, уравнение (18) можно назвать универсальным частотным уравнением поперечных затухающих колебаний стержня в безразмерных параметрах [14].

Из уравнений (16) выразим  $y_0$  через  $y'_0$ :

$$y_0 = -\frac{y'_0}{k_0} \frac{\left( (B_\lambda + \alpha_M B_{ku} D_{k(L-u)}) + \frac{c_3}{k_0 EI} (C_\lambda + \alpha_M C_{ku} D_{k(L-u)}) \right)}{\left( (A_\lambda + \alpha_M A_{ku} D_{k(L-u)}) - \frac{c_1}{k_0^3 EI} (D_\lambda + \alpha_M D_{ku} D_{k(L-u)}) \right)}. \quad (19)$$

Уравнение динамических перемещений примет вид:

$$\begin{aligned}
 y(x, t) = & e^{-\varepsilon t} \sum_{i=1}^n \left( \frac{y'_0}{k_0} \left( (B_{kx} + \alpha_M B_{ku} D_{k(x-u)} \varepsilon (x-u)) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{c_3}{k_0 EI} (C_{kx} + \alpha_M C_{ku} D_{k(x-u)} \varepsilon (x-u)) \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{y'_0}{k_0} \left( (A_{kx} + \alpha_M A_{ku} D_{k(x-u)} \varepsilon (x-u)) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{c_1}{k_0^3 EI} (D_{kx} + \alpha_M D_{ku} D_{k(x-u)} \varepsilon (x-u)) \right) \right) \times \\
 & \times \left( (B_\lambda + \alpha_M B_{ku} D_{k(L-u)}) + \frac{c_3}{k_0 EI} (C_\lambda + \alpha_M C_{ku} D_{k(L-u)}) \right) \times \\
 & \times \left( (A_\lambda + \alpha_M A_{ku} D_{k(L-u)}) - \frac{c_1}{k_0^3 EI} (D_\lambda + \alpha_M D_{ku} D_{k(L-u)}) \right)^{-1} \times \\
 & \times \sin(\omega_{dn} t + \mu_n) = e^{-\varepsilon t} \cdot \sum_{i=1}^n y'_0 J_n(x) \sin(\omega_{dn} t + \mu_n)
 \end{aligned} \tag{20}$$

Максимальное отклонение любого сечения трубы от положения равновесия примет вид:

$$y^{\max}(x, t) = y_{cm}^G(x) + y(x, t). \tag{21}$$

Из начальных условий определим

$$\begin{aligned}
 tg(\mu) &= \frac{\omega_d \cdot y(x, 0)}{V(x, 0) + \varepsilon \cdot y(x, 0)}, \\
 y'_0 &= \frac{\sqrt{(y(x, 0))^2 + \frac{(V(x, 0) + \varepsilon \cdot y(x, 0))^2}{\omega_d^2}}}{J(x)}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

### Выводы.

1. Конструкция жесткой ошиновки может быть представлена в виде динамической модели стержня с распределенной массой на упругих опорах, что позволяет учитывать различные опорные закрепления трубы-шины.

2. Впервые получена математическая модель и получено общее частотное уравнение, включающее в себя любую комбинацию внешних опорных связей (включая их отсутствие), а также произвольное расположение сосредоточенной массы на стержне.

3. Получены уравнения динамических перемещений и максимального отклонения любого сечения трубы от положения равновесия.

1. СОУ 40.1-32385941-38:2011 "Загальні технічні вимоги до проектування та експлуатації конструкцій жорсткої ошиновки у відкритих розподільчих установках напругою від 110 до 750кВ". – Київ: Об'єднання енергетичних підприємств "ГРІФРЕ 2011. – 21 с.
2. СОУ 40.132385941-39:2011 Проектирование жесткой ошиновки в открытых распределительных устройствах напряжением от 110 до 750 кВ. Методические указания, Институт "Укрэнерго" проект 2010 г.
3. СТО 56947007-29.060.10.005-2008. Руководящий документ по проектированию жёсткой ошиновки ОРУ 110-500 кВ. ОАО "ФСК ЕЭС 2008 г.
4. СТО 56947007-29.060.10.006-2008. Методические указания по расчёту и испытаниям жёсткой ошиновки ОРУ 110-500 кВ. ОАО "ФСК ЕЭС 2008 г.
5. Design Guide for Rural Substations: RUS Bulletin 1724E-300. – Official publication – Washington: United States Department of Agriculture, 2001. – 764 p.
6. Eurocode 1: Actions on Structures – General Actions – Part 1-4: Wind Actions [Text]. – Will supersede ENV 199124:1995; introduced January 2004. – Brussels: CEN/TC 250, 2002. – 148 p.
7. Gorokhov Ye. V. Ways of antihunting rigid conductors structures of outdoor switchgears of the power supply network construction / Ye.V. Gorokhov, V.F. Mushchanov, V.V. Kulyabko [and other] // The 10th International Conference – “Modern Building Materials, Structures and Techniques”, Vilnius, 19-21 May, 2010. – p. 619-627.
8. Киселев В.А. Строительная механика: Спец. курс. Динамика и устойчивость сооружений / В.А. Киселев. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.
9. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле: пер. с англ. / С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер – Машиностроение, 1985. – 472 с.
10. Шевченко Ф.Л. Динамика упругих стержневых систем: учебное пособие / Ф.Л. Шевченко. – Донецк: ООО "Лебедь 1999. – 268 с.
11. Шевченко Ф.Л. Динамічні задачі стержневих систем / Ф.Л. Шевченко, Г.М. Улітін – К.: ІСДО, 1995. – 100 с.
12. Шалдырван В.А. Классические задачи математической физики: учеб. пособие. Ч.1. / В.А. Шалдырван, В.С. Герасимчук – Донецк: ДонГУ, 1999. – 152 с.
13. Денисов Е.В. Определение параметров напряженного состояния элементов эксплуатируемых металлических ферменных конструкций усовершенствованным вибрационным методом: дисс. канд. техн. наук : 05.23.01 : защищена 12.10.2006 / Денисов Евгений Валерьевич. – Макеевка: ДонНАСА, 2006. – 226 с.
14. Фоменко С.А. Рациональные способы демпфирования изгибных колебаний балочных конструкций (на примере жесткой ошиновки открытых распределительных устройств): дисс. канд. техн. наук : 05.23.01 : защищена 26.01.2018 / Фоменко Серафим Александрович. – Макеевка: ДонНАСА, 2017. – 163 с.

**S. Fomenko, A. Orzhehovskiy, S. Makarenko**

**Mathematical model of faded vibrations of an elastic rod with an attached mass on elastic supports (on the example of a rigid bus).**

The problem of reducing the level of vibrations of rigid busbar structures in many cases is associated with the need to increase the rigidity and reduce the material consumption of structures. However, it is important to comply with the technological requirements imposed by operating conditions and protect people from the harmful effects of vibrations. The article discusses the design of a rigid bus, which can be presented in the form of a dynamic model of a rod with a distributed mass on elastic supports. The dynamic model is described by the differential equation of vibrations of an



*Модель колебаний упругого стержня с присоединенной массой на упругих опорах*

elastic weighing bar on elastic supports compressed by a force  $T$ , with an added mass  $M$ , taking into account the forces of inertia of rotation, shear of cross sections and viscous friction. A general frequency equation is obtained, which includes any combination of external support links (including their absence), as well as an arbitrary arrangement of the concentrated mass on the rod. Equations of dynamic displacements and the maximum deviation of any pipe section from the equilibrium position are obtained.

**Keywords:** *rigid bus, vibration damping, bar vibrations on elastic supports, frequency equation.*

ГОУ ВПО "Донбасская национальная академия строительства  
и архитектуры", Макеевка  
*s. a. fomenko@donnasa.ru*

*Получено 14.05.2020*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

---

УДК 539.3:534.1:519

©2020. С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг

### НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАСПЫЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ЦЕНТРОБЕЖНЫХ ФОРСУНКАХ

Представлено описание численно-аналитической нечетко-множественной методики анализа эффектов неопределенности в математической модели процессов распыления жидкости в центробежных форсунках. Методика базируется на использовании подходов к исследованию детерминистического варианта модели механизмов формирования двухфазных тонкодисперсных газокапельных потоков в форсунках центробежного типа, и на реализуемой с применением модифицированной формы эвристического принципа обобщения процедуре расширения областей определения физико-механических и конструкционных параметров в получаемых соотношениях детерминистической модели на нечетко-множественные величины, описывающие факторы разброса значений неопределенных экспериментальных и технологических экзогенных характеристик исследуемых процессов.

**Ключевые слова:** формирование газокапельных потоков, модель центробежной форсунки, исследование эффектов неопределенности, разбросы экзогенных параметров, нечетко-интервальная аппроксимация, нечетко-множественная методика, эвристический принцип обобщения.

**Введение и цели исследования.** Устройства для создания тонкодисперсных двухфазных газокапельных потоков находят применение в самом широком спектре технических отраслей и промышленных технологий, в конструкциях машин, приборов и сооружений, в сельскохозяйственном и пищевом производстве, а также во многих и многих других сферах деятельности человека. Конструктивные и расчетные модели устройств распыления с самой высокой степенью полноты представлены и охарактеризованы в монографиях [1 – 7], а современное состояние разработок в данной научно-технической области описано в электронных ресурсах [8 – 10]. Одним из ведущих приемов образования газокапельных потоков является форсуночное распыление жидкостей, модификации моделей и вариантам технической реализации которого посвящены работы [11 – 16]. При этом предпроектные конструкторские расчеты подобных устройств распыления реализуются при весьма высоком уровне неопределенности и наличии разбросов в параметрах моделируемых процессов. Соответственно, разработка теоретических численно-аналитических алгоритмов учета факторов неопределенности при моделировании процессов распыления жидких субстанций является крайне актуальной научно-технической задачей, а подходы к ее решению

должны учитывать то обстоятельство, что исходная информация при анализе данных моделей зачастую не отвечает требованиям, устанавливаемым концепцией вероятностно-стохастического анализа, не является статистической информацией, получаемой в результате обработки однородных частотных выборок достаточной мощности, носит характер результатов обобщения данных незначительного числа экспериментальных замеров либо субъективных экспертных заключений и профессиональных оценок. В этой ситуации приемлемой является концепция использования для получения необходимых оценок влияния факторов неопределенности экзогенных параметров при расчетном моделировании процессов распыления жидкости в форсунках методов теории нечетких множеств [17 – 22] и обобщения результатов численно-аналитического исследования детерминистических вариантов соответствующих моделей путем перехода к нечетко-множественным аргументам в их расчетных соотношениях [23].

В контексте вышеизложенного, целью исследований, которым посвящена данная работа, является разработка и апробация нечетко-множественной модели учета неопределенности в виде разбросов значений исходных параметров в модели процессов распыления жидкости в центробежных форсунках. В представляемом варианте исследование основывается на применении  $\alpha$ -уровневой модификации эвристического принципа обобщения [17 – 23] как приема расширения областей определения классических функциональных отображений на нечеткие подмножества универсального множества, а также на гипотезе об описании обладающих количественными разбросами неопределенных экспериментальных значений экзогенных параметров модели центробежной форсунки нормальными трапецеидальными нечеткими интервалами [24, 25].

**1. Расчетные соотношения детерминистических вариантов рассматриваемых моделей.** Эндогенными расчетными параметрами в модели распыления жидкости в центробежных форсунках являются параметры расхода жидкости, параметры дисперсности для создаваемой газокапельной среды, а также параметры факела распыла.

Апробированные варианты детерминистической модели течения идеальной и реальной жидкости в распылителях центробежных форсунок и расчета параметров эффективности процессов распыления представлены в работах [3 – 6, 11 – 13] и базируются на применении закона сохранения момента количества движения и принципа обеспечения максимального расхода протекающей через форсунки жидкости. В рамках этих моделей [6, 12, 13] параметр расхода жидкости для центробежного распылителя описывается соотношениями, в которые входят его геометрические характеристики  $A$  либо  $A_v$ . Характеристика  $A$  прямо пропорциональна степени закрутки потока в камере форсунки (чем больше  $A$ , тем сильнее закрутка), вводится в случае распыления идеальной несжимаемой жидкости и описывается соотношением

$$A = R_b r_c n_b^{-1} r_b^{-2} \sin \gamma = \pi R_b r_c n_b^{-1} F_b^{-1} \sin \gamma, \quad (1)$$

или

$$A = F_A(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma). \quad (2)$$

Характеристика  $A$  однозначно определяет величину коэффициента расхода рабочей субстанции. Методика, базирующаяся на использовании данной характеристики, обеспечивает приемлемую точность вычислений для относительно крупных форсунок с высокой чистотой поверхности рабочей камеры. Как отмечается в работах [4, 6, 12, 13], из-за наличия вязкости реальной жидкости на стенке распылителя возникают силы трения, которые уменьшают момент количества движения в выходном сечении сопла форсунки по сравнению с моментом на входе в камеру закручивания. Это приводит к увеличению коэффициента расхода и снижению угла распыла. Для учета малой вязкости распыляемой реальной жидкости вместо характеристики  $A$  предлагается [6] вводить эквивалентную характеристику  $A_v$

$$A_v = F_{A_v}(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma, \varepsilon_d, \lambda) = A(\varepsilon_d + \lambda A(R_b/r_c - 1)/2)^{-1}. \quad (3)$$

Параметрами моделей в соотношениях (1) – (3) являются плечо закручивания  $R_b$  в центробежной форсунке (радиус вращения во входном сечении); радиус сопла  $r_c$ ; число  $n_b$  входных каналов с одинаковыми площадями поперечных сечений  $F_b$ ; радиус входных каналов  $r_b$ ; угол наклона  $\gamma$  осей входных каналов к оси сопла форсунки; изменяющийся в диапазоне 0,75–1 [6] в зависимости от соотношения  $r_b/R_b$  коэффициент деформации  $\varepsilon_d$  струи на входе в камеру закручивания; условный коэффициент трения  $\lambda$ , связываемый эмпирической зависимостью [6, 13]  $\lambda \approx 1,05/(Re^{0,3})$  с числом Рейнольдса  $Re$ , соответствующим течению жидкости по фиктивному отверстию с площадью, равной суммарной площади всех входных каналов. Корректна приближенная версия записываемых соотношений для условного случая неодинаковых входных каналов [6, 13], имеющих, возможно, некруговые сечения с общей суммарной площадью  $F_s$ . При этом

$$\begin{aligned} A &= \pi R_b r_c F_s^{-1} \sin \gamma, \\ A_v &= A(\varepsilon_d + \lambda(R_b^2/r_s^2 - A)/2)^{-1}, \\ r_s &= (F_s/\pi)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4)$$

В рассматриваемых моделях от геометрического параметра  $A$  и обобщенного эквивалентного геометрического параметра  $A_v$  определяющим образом зависят [6, 12, 13] основные эндогенные параметры, в том числе коэффициент расхода  $\mu$  распыляемой идеальной жидкости либо жидкой субстанции малой вязкости, коэффициент  $\varphi$  заполнения сопла, угол факела распыла (угол конусности потока распыляемой жидкости)  $\beta$ .

Вводимый в рассмотрение коэффициент расхода  $\mu$  представляет собой отношение расхода жидкости через отверстие сопла  $Q_c$  к величине теоретического

расхода  $Q$ . Для случая идеальной жидкости [6, 13]

$$\begin{aligned} Q_c &= (2P/\rho)^{1/2}(1 + A^2\varphi^2(1 - \varphi)^{-2})^{-1/2}, \\ Q &= (2P/\rho)^{1/2}\varphi, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\rho$  – плотность, а  $P$  – давление в подводимой к форсунке жидкости.

Для идеальной жидкости

$$\mu = (A^2(1 - \varphi)^{-1} + \varphi^{-2})^{-1/2}. \quad (6)$$

В случае жидкости малой вязкости в работе [13] для определения величины  $\mu_\nu$ , в частности, предложено соотношение

$$\mu_\nu = (A_v^2(1 - \varphi)^{-1} + \varphi^{-2} + \Delta_b + \Delta_k + \Delta_c)^{-1/2}, \quad (7)$$

параметры  $\Delta_b$ ,  $\Delta_k$ ,  $\Delta_c$  которого соответственно характеризуют потери момента количества движения за счет трения такой жидкости со стенками во входных каналах и в камере закручивания, а также за счет перетекания жидкости в сопло форсунки из камеры закручивания.

Соотношения связи между параметрами  $A$ ,  $\mu$  и коэффициентом  $\varphi$  заполнения сопла устанавливаются на базе принципа максимума расхода

$$\partial\mu/\partial\varphi = 0, \quad (8)$$

и для случая идеальной жидкости имеют вид

$$A = (1 - \varphi)(\varphi^3/2)^{-1/2}, \quad (9)$$

$$\mu = F_\mu(R_b, r_c, n_b, r_b, \gamma) = \varphi(\varphi/(2 - \varphi))^{1/2}, \quad (10)$$

откуда  $\varphi$ , в частности, определяется через экзогенные геометрические параметры модели  $R_b, r_c, n_b, r_b, \gamma, F_s$  как минимальный действительный корень кубического уравнения

$$A^2\varphi^3 - 2\varphi^2 + 4\varphi - 2 = 0, \quad (11)$$

с положительным дискриминантом. Для искомого значения

$$\varphi = F_\varphi(A) = F_\varphi(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma) \quad (12)$$

может быть записано аналитическое представление вида

$$\varphi = \min\{F_\varphi^{(1)}(A), F_\varphi^{(2)}(A), F_\varphi^{(3)}(A)\}, \quad (13)$$

в котором

$$\begin{aligned} F_\varphi^{(1)}(A) &= \Phi_1(A) + \Phi_2(A) + 2A^{-2}/3, \\ F_\varphi^{(2)}(A) &= -(\Phi_1(A) + \Phi_2(A))/2 + i(3/4)^{1/2}(\Phi_1(A) - \Phi_2(A)) + 2A^{-2}/3, \\ F_\varphi^{(3)}(A) &= -(\Phi_1(A) + \Phi_2(A))/2 - i(3/4)^{1/2}(\Phi_1(A) - \Phi_2(A)) + 2A^{-2}/3, \\ \Phi_1(A) &= -(\Delta_1(A))/2 + (((\Delta_2(A))/3)^3 + ((\Delta_1(A))/2)^2)^{1/2})^{1/3}, \\ \Phi_2(A) &= -(\Delta_1(A))/2 - (((\Delta_2(A))/3)^3 + ((\Delta_1(A))/2)^2)^{1/2})^{1/3}, \\ \Delta_1(A) &= -(16/27)A^{-6} + (8/3)A^{-4} - 2A^{-2}, \\ \Delta_2(A) &= -(4/3)A^{-4} + 4A^{-2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Средний угол раскрытия факела распыления идеальной жидкости при известном значении характеристики  $\varphi$  описывается выражением

$$\begin{aligned} \beta &= F_\beta(R_b, r_c, n_b, r_b, \gamma) = \\ &= \arctg((\varphi/8)^{-1/2}(1-\varphi)/((1+(1-\varphi)^{1/2})\varphi^{1/3})). \end{aligned} \quad (15)$$

Для случая учета малой вязкости жидкости соотношение связи  $A_\nu$  и  $\varphi$  аналогично соотношению (9) и имеет вид

$$A_\nu = (1-\varphi)/(\varphi^3/2)^{-1/2}. \quad (16)$$

Соответственно выражение

$$\varphi = F_\varphi(A_\nu) = F_{\varphi\nu}(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma, \varepsilon_d, \lambda) \quad (17)$$

сохраняет структуру, описываемую формулами (13), (14), при замене  $A$  на  $A_\nu$ . Через найденную применительно к этому случаю величину  $\varphi$  характеристика  $\mu_\nu$  выражается по формуле (7).

**2. Нечетко-множественные версии моделей.** Методика учета в рассматриваемых моделях неопределенности, обусловленной разбросами значений экзогенных параметров, основывается на применении эвристического принципа расширения (принципа обобщения) к полученным выше расчетным соотношениям детерминистических версий моделей.

В случае синтеза модели и алгоритма нечеткого оценивания характеристик распыления идеальной жидкости центробежной форсункой, переход к неопределенным аргументам нечетко-множественной природы осуществляется в аналитических функциональных выражениях (1) – (2), (10), (12) – (14), (15) для эндогенных параметров  $A$ ,  $\varphi$ ,  $\mu$ ,  $\beta$  через ее экзогенные характеристики  $R_b$ ,  $r_c$ ,  $n_b$ ,  $r_b$ ,  $\gamma$ .

В рамках концепции разрабатываемой методики, представленной в работе [23], вводится гипотеза об описании обладающих разбросами значений экзогенных параметров  $R_b$ ,  $r_c$ ,  $r_b$ ,  $\gamma$  нечеткими множествами  $\tilde{R}_b$ ,  $\tilde{r}_c$ ,  $\tilde{r}_b$ ,  $\tilde{\gamma}$  с функциями принадлежности  $\mu_{\tilde{R}_b}(R_b)$ ,  $\mu_{\tilde{r}_c}(r_c)$ ,  $\mu_{\tilde{r}_b}(r_b)$ ,  $\mu_{\tilde{\gamma}}(\gamma)$  и соответствующем получении определяемых оценок форме в нечетких множеств  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{\beta}$ . Для указанных нечетко-множественных характеристик далее вводятся представления в форме суперпозиций множеств  $\alpha$ -срезов.

Полагается, что неконтрастные величины экзогенных параметров  $R_b$ ,  $r_c$ ,  $r_b$ ,  $\gamma$  допускают эффективное описание в виде нормальных трапецеидальных нечетких интервалов [24, 25]  $\tilde{R}_b$ ,  $\tilde{r}_c$ ,  $\tilde{r}_b$ ,  $\tilde{\gamma}$  с кортежами реперных точек

$$\begin{aligned} \tilde{R}_b &= (R_1, R_2, R_3, R_4), \quad \tilde{r}_c = (r_{c1}, r_{c2}, r_{c3}, r_{c4}), \\ \tilde{r}_b &= (r_{b1}, r_{b2}, r_{b3}, r_{b4}), \quad \tilde{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4). \end{aligned} \quad (18)$$

Введенные нечеткие интервалы представляется разложениями по множествам  $\alpha$ - срезам в форме

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}_b &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha], & \underline{R}_\alpha &= (1 - \alpha)R_1 + \alpha R_2, & \overline{R}_\alpha &= \alpha R_3 + (1 - \alpha)R_4; \\
 \tilde{r}_c &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{r}_{c\alpha}, \overline{r}_{c\alpha}], & \underline{r}_{c\alpha} &= (1 - \alpha)r_{c1} + \alpha r_{c2}, & \overline{r}_{c\alpha} &= \alpha r_{c3} + (1 - \alpha)r_{c4}; \\
 \tilde{r}_b &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{r}_{b\alpha}, \overline{r}_{b\alpha}], & \underline{r}_{b\alpha} &= (1 - \alpha)r_{b1} + \alpha r_{b2}, & \overline{r}_{b\alpha} &= \alpha r_{b3} + (1 - \alpha)r_{b4}; \\
 \tilde{\gamma} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha], & \underline{\gamma}_\alpha &= (1 - \alpha)\gamma_1 + \alpha\gamma_2, & \overline{\gamma}_\alpha &= \alpha\gamma_3 + (1 - \alpha)\gamma_4.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Для эндогенных нечетко-множественных характеристик  $\tilde{\cdot}$ ,  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{\beta}$  соответственно записываются представления

$$\begin{aligned}
 \tilde{A} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{A}_\alpha, \overline{A}_\alpha], & \tilde{\varphi} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\varphi}_\alpha, \overline{\varphi}_\alpha], \\
 \tilde{\mu} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha], & \tilde{\beta} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\beta}_\alpha, \overline{\beta}_\alpha].
 \end{aligned} \tag{20}$$

В процессе численной реализации разрабатываемого алгоритма нечетко-множественной методики исследования рассматриваемой модели при использовании приема представления нормальных нечетких множеств  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{\beta}$  суперпозициями по множествам  $\alpha$ - срезов

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{A}_\alpha, \overline{A}_\alpha],$$

вводится гипотеза об обеспечивающей достаточную полноту получаемых конечных оценок замене континуального множества  $\alpha \in [0, 1]$  дискретным подмножеством  $\{\alpha_m\}_{m=1}^{M_\alpha} = \Xi_\alpha$ ,  $\Xi_\alpha \subset [0, 1]$ ; в частности,  $\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in \Xi_\alpha} [\underline{A}_\alpha, \overline{A}_\alpha]$ , и так далее.

Следующий этап алгоритма получения нечетких оценок  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{\beta}$  основывается на применении альфа-уровневой формы модифицированного эвристического принципа обобщения [17 – 23] к четким аналитическим функциональным соотношениям (1) – (2), (10), (12) – (14), (15) детерминистического варианта модели в процессе распространения областей определения этих соотношений на аргументы нечетко-множественного типа.

На основе представлений (19), (20), согласно модифицированному  $\alpha$ - уровневому варианту эвристического принципа расширения, для нечетких характеристик  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{\beta}$  могут быть записаны выражения

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{A}_\alpha, \overline{A}_\alpha], \tag{21}$$

$$\underline{A}_\alpha = \inf_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \overline{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \overline{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha]}} F_A(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma),$$

$$\overline{A}_\alpha = \sup_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \overline{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \overline{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha]}} F_A(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma);$$

$$\tilde{\varphi} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\varphi}_\alpha, \overline{\varphi}_\alpha],$$

$$\underline{\varphi}_\alpha = \inf_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \overline{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \overline{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha]}} F_\varphi(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma),$$

$$\overline{\varphi}_\alpha = \sup_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \overline{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \overline{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha]}} F_\varphi(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma),$$

$$\tilde{\mu} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha],$$

$$\underline{\mu}_\alpha = \inf_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \overline{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \overline{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha]}} F_\mu(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma),$$

$$\overline{\mu}_\alpha = \sup_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \overline{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \overline{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha]}} F_\mu(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma),$$

$$\tilde{\beta} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\beta}_\alpha, \overline{\beta}_\alpha],$$



$$\underline{\beta}_\alpha = \inf_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \bar{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \bar{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha]}} F_\beta(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma),$$

$$\bar{\beta}_\alpha = \sup_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \bar{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \bar{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha]}} F_\beta(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma).$$

Представления (20) определяют подлежащий численной реализации алгоритм формирования нечетких оценок  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{\beta}$  при учете разбросов в значениях экзогенных параметров  $R_b$ ,  $r_c$ ,  $r_b$ ,  $\gamma$  для модели функционирования центробежных форсунок для распыления идеальной несжимаемой жидкости.

Для варианта модели, предполагающего учет малой вязкости распыляемой реальной жидкости посредством введения задаваемой формулой (3) эквивалентной характеристики  $A_v$  вместо характеристики  $A$ , функциональная связь  $A_v$  и  $\varphi$ , как отмечалось выше, сохраняет вид (9). Характеристика  $\varphi$  соответственно может быть выражена через экзогенные параметры модели по формуле решения кубического уравнения (12) – (14), однако в данном случае множество экзогенных параметров состоит из величин  $R_b$ ,  $r_c$ ,  $r_b$ ,  $n_b$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon_d$ ,  $\lambda$ . При этом алгоритм получения искомых нечетких оценок включает все ранее приведенные соотношения, в которых  $A$  заменяется на  $A_v$ , а также дополнительные альтернативные соотношения для описания нечетких экзогенных параметров  $\tilde{\varepsilon}_d, \tilde{\lambda}$ :

$$\tilde{\varepsilon}_d = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\varepsilon}_\alpha, \bar{\varepsilon}_\alpha], \quad \tilde{\lambda} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha], \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_d &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4), & \tilde{\lambda} &= (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4); \\ \underline{\varepsilon}_\alpha &= (1 - \alpha)\varepsilon_1 + \alpha\varepsilon_2, & \bar{\varepsilon}_\alpha &= \alpha\varepsilon_3 + (1 - \alpha)\varepsilon_4; \\ \underline{\lambda}_\alpha &= (1 - \alpha)\lambda_1 + \alpha\lambda_2, & \bar{\lambda}_\alpha &= \alpha\lambda_3 + (1 - \alpha)\lambda_4. \end{aligned} \quad (23)$$

Соотношения для определения нечетких эндогенных параметров в данном случае имеют вид

$$\tilde{A}_v = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{A}_{v\alpha}, \bar{A}_{v\alpha}], \quad (24)$$

$$\underline{A}_{v\alpha} = \inf_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \bar{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \bar{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha]}} F_{A_v}(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma, \varepsilon_d, \lambda),$$

$$\bar{A}_{\nu\alpha} = \sup_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \bar{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \bar{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha]}} F_{A_\nu} (R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma, \varepsilon_d, \lambda),$$

$$\tilde{\varphi}_\nu = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\varphi}_{\nu\alpha}, \bar{\varphi}_{\nu\alpha}],$$

$$\underline{\varphi}_{\nu\alpha} = \inf_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \bar{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \bar{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha]}} F_{\varphi_\nu} (R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma, \varepsilon_d, \lambda),$$

$$\bar{\varphi}_{\nu\alpha} = \sup_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \bar{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \bar{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha]}} F_{\varphi_\nu} (R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma, \varepsilon_d, \lambda),$$

$$\tilde{\mu}_\nu = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mu}_{\nu\alpha}, \bar{\mu}_{\nu\alpha}],$$

$$\underline{\mu}_{\nu\alpha} = \inf_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \bar{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \bar{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha]}} F_{\mu_\nu} (R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma, \varepsilon_d, \lambda),$$

$$\bar{\mu}_{\nu\alpha} = \sup_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \bar{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \bar{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha]}} F_{\mu_\nu} (R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma, \varepsilon_d, \lambda),$$

$$\tilde{\beta}_\nu = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\beta}_{\nu\alpha}, \bar{\beta}_{\nu\alpha}],$$

$$\underline{\beta}_{\nu\alpha} = \inf_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \bar{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \bar{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha]}} F_{\beta_\nu} (R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma, \varepsilon_d, \lambda),$$

$$\bar{\beta}_{\nu\alpha} = \sup_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \bar{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \bar{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha]}} F_{\beta_\nu}(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma, \varepsilon_d, \lambda).$$

Получаемые на основе представленных алгоритмов оценки описывают показатели степеней уверенности в том, что соответствующие эндогенные характеристики рассматриваемой модели функционирования центробежной форсунки в процессе распыления идеальной жидкости либо жидкости малой вязкости будут принимать устанавливаемые значения при учете задаваемых уровней погрешностей для расчетных величин экзогенных параметров модели.

**3. Результаты численных исследований.** Пример численных исследований, осуществленных с применением описанной методики и разработанного программного приложения, относится к случаю распыления идеальной жидкости при помощи центробежной форсунки с шестью входными каналами ( $n_b = 6$ ) и следующими имеющими разбросы значений конструктивными характеристиками

$$\begin{aligned} \tilde{R}_b &= (32.7l_*, 33l_*, 34l_*, 34.4l_*), & \tilde{r}_b &= (1.7l_*, 1.9l_*, 2l_*, 2.1l_*), \\ \tilde{r}_c &= (0.96l_*, 0.99l_*, 1l_*, 1.03l_*), \\ \tilde{\gamma} &= (0.97\gamma_*, 0.99\gamma_*, \gamma_*, 1.02\gamma_*), \\ l_* &= 10^{-3}[\text{м}], & \gamma_* &= \pi/6 [\text{рад}]. \end{aligned}$$

Функции принадлежности для введенных нечетко-множественных экзогенных параметров представлены на рисунках 1 – 4, а результаты расчетов с использованием соотношений (21) в виде профилей функций принадлежности для нечетко-множественных эндогенных безразмерных характеристик коэффициента  $\tilde{\varphi}$  заполнения сопла, коэффициента расхода  $\tilde{\mu}$  распыляемой идеальной жидкости и угла факела распыла (угла конусности потока распыляемой идеальной жидкости)  $\tilde{\beta}$  [рад] описываются рисунками 5 – 7.

Как показывает анализ расчетных результатов, по отношению к средним значениям на интервалах носителей разбросы величин эндогенных параметров составляют  $\approx 3.5\%$  для характеристики  $\varphi$ ;  $\approx 3.9\%$  для характеристики  $\mu$ ;  $\approx 2.3\%$  для характеристики  $\beta$ .

**Выводы.** В результате проведенных исследований разработана численно-аналитическая нечетко-множественная методика оценивания неопределенных эндогенных параметров при исследовании теоретической модели функционирования центробежных форсунок, применяемых для формирования газоструйных потоков в технических системах с широким спектром назначения. Методика учитывает наличие ошибок рассеяния в значениях экзогенных конструктивных физико-механических и геометрических параметров модели с нечетко-множественными описаниями и основана на переходе в рамках эвристического

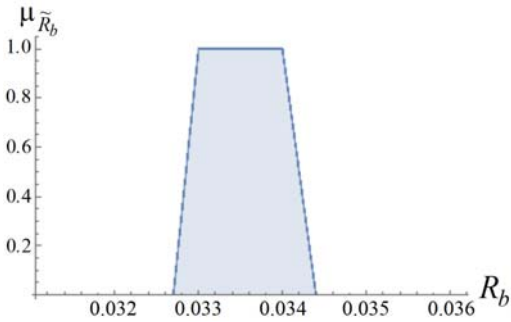


Рис. 1. Функция принадлежности для  $\tilde{R}_b$ .

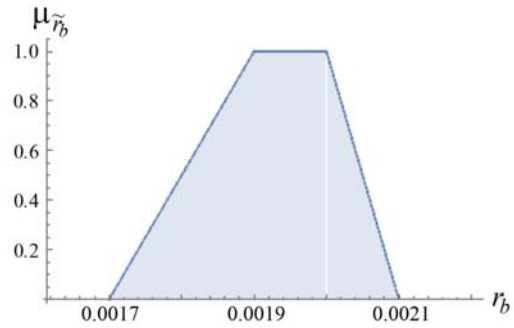


Рис. 2. Функция принадлежности для  $\tilde{r}_b$ .

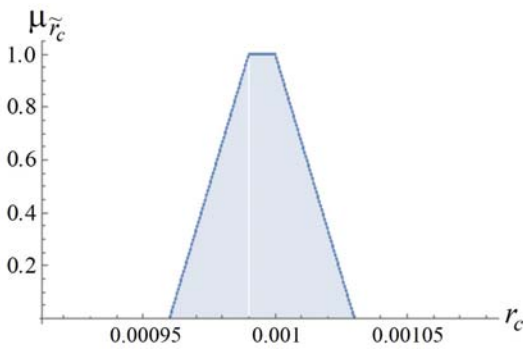


Рис. 3. Функция принадлежности для  $\tilde{r}_c$ .

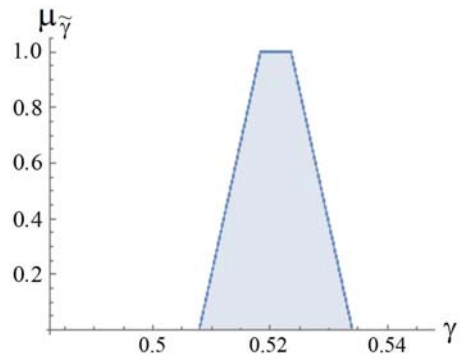


Рис. 4. Функция принадлежности для  $\tilde{\gamma}$ .

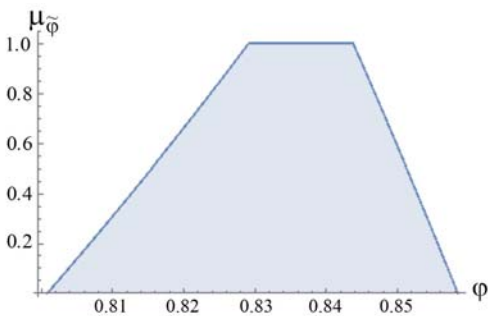


Рис. 5. Функция принадлежности для  $\tilde{\varphi}$ .

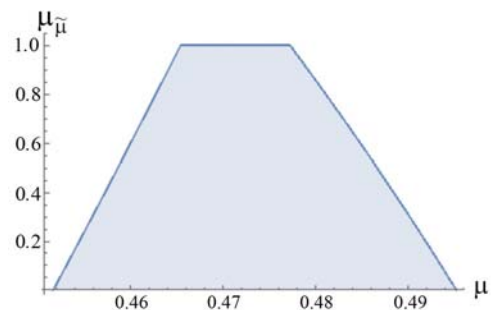


Рис. 6. Функция принадлежности для  $\tilde{\mu}$ .

принципа обобщения к нечетко-множественным аргументам в аналитических представлениях для исследуемых характеристик функционирования форсунок, получаемых в рамках детерминистической модели.

1. Бородин В.А. Распыливание жидкостей / В.А. Бородин. – М.: Машиностроение, 1967. – 208 с.
2. Витман Л.А. Распыливание жидкости форсунками / Л.А. Витман. – М.: Госэнергоиздат,

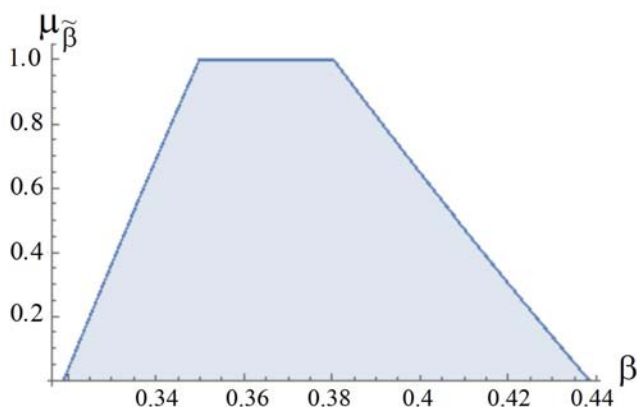


Рис. 7. Функция принадлежности для  $\tilde{\beta}$ .

1962. – 264 с.
3. *Галустов В.С.* Прямоточные распылительные аппараты в теплоэнергетике / В.С. Галустов. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 240 с.
  4. *Дитякин Ю.Ф.* Распыливание жидкостей / Ю.Ф. Дитякин, Л.А. Клячко, Б.В. Новиков, В.И. Ягодкин. – М.: Машиностроение, 1977. – 208 с.
  5. *Пажи Д.Г.* Распылители жидкости / Д.Г. Пажи, В.С. Галустов. – М.: Химия, 1979. – 216 с.
  6. *Пажи Д.Г.* Основы техники распыления жидкости / Д.Г. Пажи, В.С. Галустов. – М.: Химия, 1984. – 256 с.
  7. *Соколов Е.Я.* Струйные аппараты / Е.Я. Соколов, Н.М. Зингер. – Л.: Энергоатомиздат, 1989. – 352 с.
  8. Гидравлическое распыление [Электронный ресурс]. URL: <http://vseokraskah.net/lakokraska/8-4-gidravlichesкое-raspylenie.html> (дата обращения: 02.03.2017).
  9. Распылительные технологии [Электронный ресурс]. URL: [http://www.lechler-forsunki.ru/-/-/cbw GZ\\_AAABCBgAAAEyeIkEMEHk-ru\\_RU](http://www.lechler-forsunki.ru/-/-/cbw GZ_AAABCBgAAAEyeIkEMEHk-ru_RU) (дата обращения: 04.03.2017).
  10. Техника распыления [Электронный ресурс]. URL: [http://www.c-irimex.ru/catalog/forsunki\\_sistemiy\\_raspiylenija/forsunki\\_i\\_raspiylitelniye\\_sistemiy\\_lechler/tehnika\\_raspiylenija](http://www.c-irimex.ru/catalog/forsunki_sistemiy_raspiylenija/forsunki_i_raspiylitelniye_sistemiy_lechler/tehnika_raspiylenija) (дата обращения: 7.03.2017).
  11. *Лукачев С.* Математические модели и расчет распределения топлива в турбулентном потоке воздуха за центробежной форсункой / С. Лукачев, А. Диденко, И. Зубрилин. – М.: Минобрнауки РФ, 2011. – 115 с.
  12. *Хавкин Ю.И.* Центробежные форсунки / Ю.И. Хавкин. – Л.: Машиностроение, 1976. – 168 с.
  13. *Муленко В.В.* Моделирование течения реальной жидкости в распылителе центробежной форсунки / В.В. Муленко, А.И. Ходырев // Машиностроение и машиноведение. Труды РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина. – 2018. – № 3(292). – С. 161–174.
  14. *Солдатова М.С.* Моделирование процесса распыления жидкости из форсунки / М.С. Солдатова // Решетневские чтения. – 2017. – С. 374 – 375.
  15. *Ходырев А.И.* О распределении капель по размерам в спектре при распылировании жидкости центробежной форсункой / А.И. Ходырев, Д.А. Ходырев, М.Г. Блохина // Труды Российского государственного университета нефти и газа имени И.М. Губкина. – 2017. – № 4. – С. 101–113.
  16. *Шорин В.П.* Визуализация гидродинамической структуры течения в факеле центробеж-

- ной форсунки / В.П. Шорин, О.А. Журавлев, Л.Н. Мединская, В.В. Токарев // Изв. вузов. Авиационная техника. – 1988. – № 2. – С. 108–109.
17. Kaufmann A. Introduction to fuzzy arithmetic-theory and applications / A. Kaufmann, M. Gupta. – New York: Van Nostrand Reinhold, 1985. – 349 p.
  18. Anastassiou G.A. Fuzzy Mathematics: Approximation Theory / G.A. Anastassiou. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. – 444 p.
  19. Kandasamy W.B.V. Special set linear algebra and special set fuzzy linear algebra / W.B.V. Kandasamy, F. Smarandache, K. Panthenral. – Slatina, Judetul Olt, Romania: Editura CuArt, 2009. – 469 p.
  20. Sonbol A.H. TSK Fuzzy Function Approximators: Design and Accuracy Analysis / A.H. Sonbol, M.S. Fadali // IEEE Trans. Syst. Man and Cybern. – 2012. – Vol. 42. – P. 702-712.
  21. Дилигенский Н.В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Н.В. Дилигенский, Л.Г. Дымова, П.В. Севастьянов. – М.: Издательство Машиностроение – 1, 2004. – 397 с.
  22. Hanss M. Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
  23. Сторожев С.В. Учет неопределенности экзогенных параметров при моделировании процессов распада струи жидкости в пневматических распылителях / С.В. Сторожев, Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2019. – №1–2 (66–67). – С. 3–10.
  24. Ban A.I. Trapezoidal approximation and Aggregation / A.I. Ban, L.C. Coroianu, P. Grzegorzewski // Fuzzy Sets Syst.– 2011. – Vol. 177. – P. 45–59.
  25. Grzegorzewski P. Trapezoidal approximations of fuzzy numbers / P. Grzegorzewski, E. Mrrowka // Fuzzy Sets Syst. – 2005. – Vol. 153. – P. 115–135.

S.V. Storozhev, Tran Ba Le Hoang

## FUZZY-SET MODELING OF LIQUID SPRAYING PROCESSES IN CENTRIFUGAL NOZZLES.

A description of a numerical-analytical fuzzy-set technique for analyzing the effects of uncertainty in a mathematical model of processes of liquid spraying in centrifugal nozzles is presented. The methodology is based on the use of approaches to the study of the deterministic version of the model of mechanisms for the formation of two-phase fine-dispersed gas-droplet flows in centrifugal nozzles, and on the procedure for expanding the areas of determination of physical-mechanical and structural parameters in the resulting relations of the deterministic model into fuzzy-set quantities describing the factors of scatter errors of values of uncertain experimental and technological exogenous characteristics of the processes under study.

**Keywords:** formation of gas-droplet flows, model of a centrifugal nozzle, study of the effects of uncertainty, scatter errors of exogenous parameters, fuzzy-interval approximation, fuzzy-set technique, heuristic principle of generalization.

ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры», Макеевка  
ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ» МОН РФ, Москва  
s.v.storozhev@donnasa.ru

Получено 06.02.2020

## ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

---

УДК 550.834:622.12

©2020. А.А. Глухов

### О ВЛИЯНИИ СБЛИЖЕННОГО ПЛАСТА НА СТРУКТУРУ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В ЗАДАЧАХ ШАХТНОЙ СЕЙСМОРАЗВЕДКИ

В аналитическом виде предложено решение задачи о влиянии залегающего рядом угольного пласта на структуру волнового поля, формируемого в шахтных акустических экспериментах. Показано, что влияние сближенного угольного пласта подобно действию дополнительного источника сейсмических колебаний, характеристики которого можно определить из параметров среды.

*Ключевые слова:* шахтная сейсмозащита, сближенные пласты, волновое поле.

**Введение.** Большинство работ, посвященных использованию сейсмических волн для определения горно-геологических условий залегания отрабатываемых угольных пластов Донбасса и выбора оптимальных путей отработки, рассматривает залегающие в породах одиночные пласты простого строения, существенно упрощая тем самым анализ волновых полей [1-3]. Однако, согласно приведенному в монографии [1] анализу, более 40% пластов Донецкого угольного бассейна имеют пласты-спутники. Считается [4], что угольные пласты Донбасса при мощности разделяющего прослоя более 0,6-0,7 м не могут рассматриваться, как единые, т.е. угольные пачки являются самостоятельными пластами. Особенно характерно раздваивание угольных пластов для свит  $l_2^5$  и  $l_2^6$ , у которых мощность разделяющих прослоев может достигать несколько десятков метров.

В настоящей работе в аналитическом виде решается задача о влиянии залегающего рядом угольного пласта на структуру волнового поля, формируемого в шахтных акустических экспериментах.

**1. Методика теоретического исследования.** Для уточнения природы волнового поля, образуемого на сближенных пластах, выведем описывающие его аналитические соотношения. При этом для упрощения ограничимся рассмотрением волн  $SH$  поляризации.

Рассмотрим трехслойную модель, состоящую из отрабатываемого угольного пласта, в котором расположен источник сейсмоакустических колебаний, сближенного пласта и породного прослоя между ними.

Двухмерная модель среды, которая используется при выводе соотношений, изображена на рис. 1.

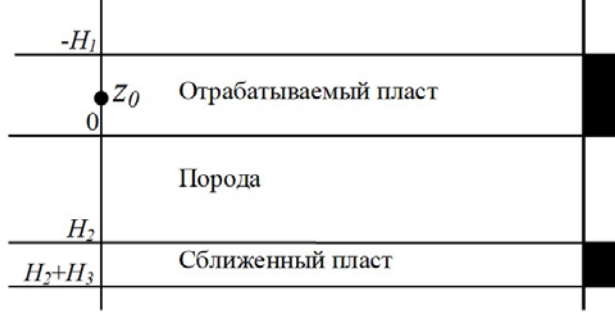


Рис. 1. К выводу аналитического выражения для волнового поля, образуемого на сближенных пластах.

Как известно для волн Лява, сумму волн всех кратностей, образованную источником внутри отрабатываемого угольного пласта можно (при  $Z > Z_0$ ), представить в виде выражения [5]:

$$\begin{aligned} \phi_1 = e^{i(k_{1X}X + k_{1Y}Y)} & \left( e^{ik_{1Z}(Z-Z_0)} + V_{10}e^{ik_{1Z}(Z_0+2H_1+Z)} + V_{12}e^{ik_{1Z}(-Z_0-Z)} + \right. \\ & \left. + V_{12}V_{10}e^{ik_{1Z}(Z_0+2H_1-Z)} \right) \sum_{m=0}^{\infty} (V_{10}V_{12})^m e^{2ik_{1Z}mH_1}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $k_{1i}$  – компоненты волнового числа в отрабатываемом угольном пласте,  $V_{12}$  и  $V_{10}$  – коэффициенты отражения на нижней и верхней его границах. Тогда, используя (1), поле  $\varphi_1^+$ , распространяющееся в сторону породного прослоя можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_1^+ = e^{i(k_{1X}X + k_{1Y}Y)} & \left( e^{ik_{1Z}(Z-Z_0)} + V_{10}e^{ik_{1Z}(Z_0+2H_1+Z)} \right) \sum_{m=0}^{\infty} (V_{10}V_{12})^m e^{2ik_{1Z}mH_1} = \\ = \frac{e^{i(k_{1X}X + k_{1Y}Y)} & \left( e^{ik_{1Z}(Z-Z_0)} + V_{10}e^{ik_{1Z}(Z_0+2H_1+Z)} \right)}{(1 - V_{10}V_{12}e^{2ik_{1Z}H_1})} \end{aligned}$$

Волны преломляются в прослой, образуя в нем совокупность волн, которые можно описать соотношением

$$\varphi_1^+|_0 = W_{12}e^{i(k_{2X}X + k_{2Y}Y + k_{2Z}Z)}, \quad (2)$$

где  $k_2$  – волновое число в прослое,  $k_{2i}$  – его компоненты,  $W_{12}$  – коэффициент преломления на границе между отрабатываемым пластом и породным прослоем. При этом волновые числа связаны законом Снеллиуса:  $k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2$ , где  $\theta_1$  – угол падения волны на границу пласта,  $\theta_2$  – угол её преломления в породе,  $\varphi_1^+|_0 = \frac{(e^{-ik_{1Z}Z_0} + V_{10}e^{ik_{1Z}(Z_0+2H_1)})}{1 - V_{10}V_{12}e^{2ik_{1Z}H_1}}$ . В результате многократных отражений



от границ в породном прослое образуется поле волн, которое по аналогии с (1) можно описать соотношением:

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \phi_1^+|_0 W_{12} \times e^{i(k_{2X}X+k_{2Y}Y)} \left( e^{ik_{2Z}Z} + V_{23}e^{ik_{2Z}(2H_2-Z)} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (V_{21}V_{23})^m e^{2ik_{2Z}mH_2} = \\ &= \phi_1^+|_0 W_{12} \times e^{i(k_{2X}X+k_{2Y}Y)} \frac{\left( e^{ik_{2Z}Z} + V_{23}e^{ik_{2Z}(2H_2-Z)} \right)}{\left( 1 - V_{21}V_{23}e^{2ik_{2Z}H_2} \right)}\end{aligned}\quad (3)$$

По направлению к сближенному пласту распространяется совокупность волн

$$\varphi_2^+ = \frac{\phi_1^+|_0 W_{12} \times e^{i(k_{2X}X+k_{2Y}Y+k_{2Z}Z)}}{1 - V_{21}V_{23}e^{2ik_{1Z}H_2}},$$

которые создают в нем поле

$$\begin{aligned}\phi_3 &= \phi_1^+|_0 W_{12} \times \phi_2^+|_{H_2} W_{23} e^{i(k_{3X}X+k_{3Y}Y)} \left( e^{ik_{3Z}(Z-H_2)} + V_{34}e^{ik_{3Z}(2H_3-H_2-Z)} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (V_{32}V_{34})^m e^{2ik_{3Z}mH_3} = \\ &= \phi_1^+|_0 W_{12} \times \phi_2^+|_{H_2} W_{23} e^{i(k_{3X}X+k_{3Y}Y)} \frac{\left( e^{ik_{3Z}(H_2+Z)} + V_{34}e^{ik_{3Z}(2H_3-H_2-Z)} \right)}{\left( 1 - V_{32}V_{34}e^{2ik_{3Z}H_3} \right)}\end{aligned}\quad (4)$$

где  $\varphi_2^+|_{H_2} = \frac{e^{i(k_{2Z}H_2)}}{1 - V_{21}V_{23}e^{2ik_{1Z}H_2}}$ .

Структура  $\varphi_3$  отличается от структуры  $\varphi_1$  отсутствием слагаемых в выражении в скобках (второе и четвертое слагаемое в (1)) и присутствием общего множителя  $\varphi_1^+|_0 W_{12} \times \varphi_2^+|_{H_2} W_{23}$ , который, по сути, учитывает вклады отрабатываемого пласта ( $\varphi_1^+|_0$ ) и прослоя ( $\varphi_2^+|_{H_2}$ ), а также влияние границ раздела ( $W_{12}$ ,  $W_{23}$ ).

В сближенном пласте в направлении его верхней границы распространяется совокупность волн

$$\begin{aligned}\phi_3^- &= \phi_1^+|_0 W_{12} \times \phi_2^+|_{H_2} W_{23} e^{i(k_{3X}X+k_{3Y}Y)} V_{34} e^{ik_{3Z}(2H_3-H_2-Z)} \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (V_{32}V_{34})^m e^{2ik_{3Z}mH_3} = \\ &= \phi_1^+|_0 W_{12} \times \phi_2^+|_{H_2} W_{23} \frac{e^{i(k_{3X}X+k_{3Y}Y)} V_{34} e^{ik_{3Z}(2H_3-H_2-Z)}}{\left( 1 - V_{32}V_{34}e^{2ik_{3Z}H_3} \right)},\end{aligned}$$

которая преломляется в прослой, создавая в нем поле

$$\begin{aligned} \phi_2^1 &= \phi_1^+ |_0 W_{12} \times \phi_2^+ |_{H_2} W_{23} \times \phi_3^- |_{H_2} W_{32} e^{i(k_{2X}X + k_{2Y}Y)}. \\ &\cdot \left( e^{ik_{2Z}(H_2-Z)} + V_{21} e^{ik_{2Z}(H_2+Z)} \right) \sum_{m=0}^{\infty} (V_{21} V_{23})^m e^{2ik_{2Z}mH_2} = \\ &= \phi_1^+ |_0 W_{12} \times \phi_2^+ |_{H_2} W_{23} \times \phi_3^- |_{H_2} W_{32} e^{i(k_{2X}X + k_{2Y}Y)}. \\ &\cdot \frac{(e^{ik_{2Z}(H_2-Z)} + V_{21} e^{ik_{2Z}(H_2+Z)})}{(1 - V_{21} V_{23} e^{2ik_{2Z}H_2})} e^{i(k_{2Z}(H_2-Z))}, \end{aligned}$$

где  $\phi_3^- |_{H_2} = \frac{V_{34} e^{ik_{3Z}(2H_3-2H_2)}}{1 - V_{32} V_{34} e^{2ik_{3Z}H_3}}$ .

По направлению к обрабатываемому пласту распространяется как часть поля  $\phi_2^1$ , описываемая соотношением

$$\phi_1^+ |_0 W_{12} \times \phi_2^+ |_{H_2} W_{23} \times \phi_3^- |_{H_2} W_{32} \frac{e^{i(k_{2X}X + k_{2Y}Y)} e^{ik_{2Z}(H_2-Z)}}{(1 - V_{21} V_{23} e^{2ik_{2Z}H_2})} e^{i(k_{2Z}(H_2-Z))},$$

так и часть поля  $\phi_2$ , имеющая вид:

$$\frac{\phi_1^+ |_0 W_{12} \times e^{i(k_{2X}X + k_{2Y}Y)} V_{23} e^{ik_{2Z}(2H_2-Z)}}{(1 - V_{21} V_{23} e^{2ik_{2Z}H_2})},$$

что в сумме составляет

$$\begin{aligned} \phi_{23}^{1-} &= \phi_1^+ |_0 W_{12} \times e^{i(k_{2X}X + k_{2Y}Y)}. \\ &\cdot \frac{(\phi_2^+ |_{H_2} W_{23} \times \phi_3^- |_{H_2} W_{32} e^{ik_{2Z}(H_2-Z)} + V_{23} e^{ik_{2Z}(2H_2-Z)})}{(1 - V_{21} V_{23} e^{2ik_{2Z}H_2})}. \end{aligned}$$

Индекс 23 в обозначении  $\phi_{23}^{1-}$  указывает на тот факт, что в этом поле учтен вклад как волн в прослой, так и волн, пришедших из сближенного пласта. Преломляясь в обрабатываемый пласт, данная система волн образует в нем в результате многократных отражений поле

$$\phi_1^1 = \phi_{23}^{1-} |_0 e^{i(k_{1X}X + k_{1Y}Y)} \frac{(e^{-ik_{1Z}Z} + V_{10} e^{ik_{1Z}(2H_1+Z)})}{(1 - V_{10} V_{12} e^{2ik_{1Z}H_1})} \quad (5)$$

где

$$\phi_{23}^{1-} |_0 = \frac{\phi_1^+ |_0 W_{12} \times e^{i(k_{2X}X + k_{2Y}Y)} (\phi_2^+ |_{H_2} W_{23} \times \phi_3^- |_{H_2} W_{32} e^{ik_{2Z}H_2} + V_{23} e^{ik_{2Z}H_2})}{(1 - V_{21} V_{23} e^{2ik_{2Z}H_2})}$$

Таким образом, поле, описываемое выражением (5), является результатом взаимодействия поля (1) с прослой и нижним пластом. Оно в свою очередь порождает дополнительную систему колебаний в прослой и нижнем пласте, и соответствующий вклад от их возврата в обрабатываемый пласт и так далее.

Исходя из этого, суммарное поле в отрабатываемом пласте можно записать в виде

$$\varphi = \varphi_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_1^n, \quad (6)$$

где второе слагаемое – вклад прослая и нижнего пласта в регистрируемое волновое поле,

$$\varphi_1^n = \varphi_{23}^{1-}|_0 (\varphi_{23}^{*-}|_0)^{n-1} e^{i(k_{1X}X+k_{1Y}Y)} \frac{(e^{-ik_{1Z}Z} + V_{10}e^{ik_{1Z}(2H_1+Z)})}{(1 - V_{10}V_{12}e^{2ik_{1Z}H_1})}, \quad (7)$$

$$\varphi_{23}^{*-}|_0 = \frac{\phi_1^{*+}|_0 W_{12} \times e^{i(k_{2X}X+k_{2Y}Y)} (\phi_2^+|_{H_2} W_{23} \times \phi_3^-|_{H_2} W_{32} e^{ik_{2Z}H_2} + V_{23}e^{ik_{2Z}H_2})}{(1 - V_{21}V_{23}e^{2ik_{2Z}H_2})},$$

$$\varphi_1^{*+}|_0 = \frac{V_{10}e^{ik_{1Z}2H_1}}{1 - V_{10}V_{12}e^{2ik_{1Z}H_1}}.$$

Анализируя вид соотношения (7) можно убедиться, что (6) представляет собой бесконечную геометрическую прогрессию и суммарное поле в отрабатываемом пласте можно записать в виде:

$$\varphi = \varphi_1 + e^{i(k_{1X}X+k_{1Y}Y)} \left( e^{-ik_{1Z}Z} + V_{10}e^{ik_{1Z}(2H_1+Z)} \right) \cdot \left( \frac{\varphi_{23}^{1-}|_0}{[(1 - V_{10}V_{12}e^{2ik_{1Z}H_1})(1 - \varphi_{23}^{*-}|_0)]} \right)$$

или

$$\begin{aligned} \phi = & \left( e^{ik_{1Z}(Z-Z_0)} + V_{10}e^{ik_{1Z}(Z_0+2H_1+Z)} + V_{12}e^{ik_{1Z}(-Z_0-Z)} + \right. \\ & \left. + V_{12}V_{10}e^{ik_{1Z}(Z_0+2H_1-Z)} + \left( e^{-ik_{1Z}Z} + V_{10}e^{ik_{1Z}(2H_1+Z)} \right) \left( \frac{\varphi_{23}^{1-}|_0}{(1 - \varphi_{23}^{*-}|_0)} \right) \right) \cdot \\ & \cdot e^{i(k_{1X}X+k_{1Y}Y)} / (1 - V_{10}V_{12}e^{2ik_{1Z}H_1}). \end{aligned} \quad (8)$$

Легко убедиться, что соотношение (8) с точностью до слагаемого в скобках с коэффициентом  $\varphi_{23}^{1-}|_0 (\varphi_{23}^{*-}|_0)^{n-1}$  соответствует соотношению (1). В то же время указанное слагаемое подобно соотношению, описывающему поле, образованное в пласте источником, находящимся за его пределами. В частности, в [5] показано, что поле, образованное в слое внешним источником (расположенном на уровне  $Z_0$   $VH < 0$ ) можно записать в виде:

$$\varphi_{1 \text{ BH}} = W_{21}e^{-ik_{2Z_0} \text{ BH}} e^{i(k_{1X}X+k_{1Y}Y)} \frac{(e^{-ik_{1Z}Z} + V_{10}e^{ik_{1Z}(2H_1+Z)})}{(1 - V_{10}V_{12}e^{2ik_{1Z}H_1})},$$

где  $W_{21}$  – коэффициент преломления на нижней границе пласта.

Таким образом, можно говорить о том, что сближенный угольный пласт можно рассматривать как дополнительный источник сейсмических колебаний, амплитуда и фаза которого определяются соотношением  $\varphi_{23}^{1-}|_0 (\varphi_{23}^{*-}|_0)^{n-1}$ .

**Выводы.** Результаты данной статьи могут быть использованы специалистами в области шахтной и наземной сейсморазведки для разработки и усовершенствования методик сейсмического прогноза горно-геологических условий залегания угольных пластов и способов обработки результатов сейсморазведки для повышения эффективности и надежности прогноза геологического строения горного массива.

1. Анциферов А.В. Теория и практика шахтной сейсморазведки / А.В. Анциферов. – Донецк: ООО "Алан 2002. – 312 с.
2. Анциферов А.В. Влияние геологических факторов на параметры волновых полей при решении задач шахтной сейсморазведки / А.В. Анциферов, А.А. Глухов, А.И. Компанец, Н.Я. Азаров // Проблемы гірського тиску. – Донецк: ДонНТУ, 2005. – № 13. – С. 68 – 85.
3. Глухов А.А. Сейсмические волновые поля, регистрируемые на угольных пластах Донбасса при решении задач шахтной сейсморазведки / А.А. Глухов, А.В. Анциферов // Зб. наук. праць Національного гірничого університету. – Днепропетровск: НГУ, 2005. – № 23. – С. 120 – 128.
4. Методика разведки угольных месторождений Донецкого бассейна. – М.: Недра, 1972. – 339 с.
5. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах / Л.М. Бреховских. – 2-е изд. – М.: Наука, 1973. – 343 с.

**A.A. Glukhov**

### **On the influence of superimposed seam on the wave field structure in mine seismic exploration problems.**

Analytical solution to the problem of a nearby coal seam influence on the structure of the wave field generated in mine acoustic experiments is proposed. It is shown that the influence of superimposed coal seam is similar to the action of an additional seismic vibrator, characteristics of which can be determined from the earth parameters.

**Keywords:** *seismic exploration in mines, superimposed seams, wave field/noise test.*

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ),  
Донецк  
Glukhov1964@yandex.ru

Получено 22.04.2020

УДК 622.831.24

©2020. Н.И. Лобков, А.А. Лобков, Л.А. Драган, В.С. Маевский

## ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ОПОРНОГО ДАВЛЕНИЯ ВПЕРЕДИ ОЧИСТНОГО ЗАБОЯ

Приведены результаты исследования формирования опорного давления. Установлено, что изменения величины опорного давления зависят от строения породного массива кровли. Установлено, что опорное давление формируется изгибом породных слоев, которые составляют область полных сдвижений пород над выработанным пространством лавы. Впереди лавы формируется зона разгрузки пласта.

*Ключевые слова:* очистной забой, лава, выработанное пространство, опорное давление, слои кровли, непосредственная кровля, основная кровля, обрушение, предел прочности.

**Введение и постановка задачи.** В результате выемки угля в очистном забое происходит увеличение площади выработанного пространства за счет продвижения лавы. Породы кровли пласта зависают, изгибаются, обрушаются над выработанным пространством, формируя опорное давление на краевые части угольного пласта. Процесс формирования опорного давления начинается с увеличения пролета зависших слоев кровли. С увеличением пролета породных слоев величина давления на краевую часть угольного пласта увеличивается [1]. При величине опорного давления, превышающем предел прочности пласта на сжатие, происходит разрушение угольного пласта. В зоне восходящей ветви опорного давления (от забоя лавы до максимума), за счет разрушения, происходит движение разрушенной части угля в призабойное пространство, что снижает энергоемкость его выемки. Однако, при достижении предельного пролета кровли, происходит ее разрушение и обрушение. В результате обрушения мощных и прочных породных слоев скачкообразно увеличивается давление на призабойную крепь. В случаях, когда давление на секции механизированной крепи превышает их несущую способность, происходит посадка крепи на жесткую базу.

Опорное давление оказывает непосредственное влияние на разрушение и обрушение пород непосредственной и основной кровли, которые приводят к непредвиденным простоям очистных забоев, деформированию подготовительных выработок.

Особенности строения породного массива над пластом определяют характер обрушения кровли в призабойном пространстве под действием вертикальных и горизонтальных сжимающих напряжений.

Целью работы является установление особенностей формирования опорного давления в результате изгиба породных слоев над выработанным пространством.

В результате натуральных и экспериментальных исследований установлено, что

в формировании опорного давления принимают участие породы, формирующие область интенсивных сдвижений над выработанным пространством [2,3]. В области сдвижения породные слои образуют группы слоев. Каждая группа состоит из прочного несущего и вышезалегающих, менее прочных породных слоев. Изгиб и обрушение всех слоев в группе происходит практически одновременно.

По строению, вмещающий массив может быть представлен тремя группами (рис. 1). В *первой группе (а)* непосредственно над пластом залегает мощный породный слой песчаника или алевролита, выше которых, залегают слои различной мощности и прочности. Во *второй группе (б)* непосредственно над пластом залегает маломощный слой алевролита или аргиллита, а выше него (основная кровля) мощный слой песчаника или алевролита. Остальная кровля представлена породными слоями различной мощности и прочности. В *третьей группе (в)* над пластом залегают маломощные породные слои различной прочности. Т.е. в кровле нет мощных и прочных слоев.

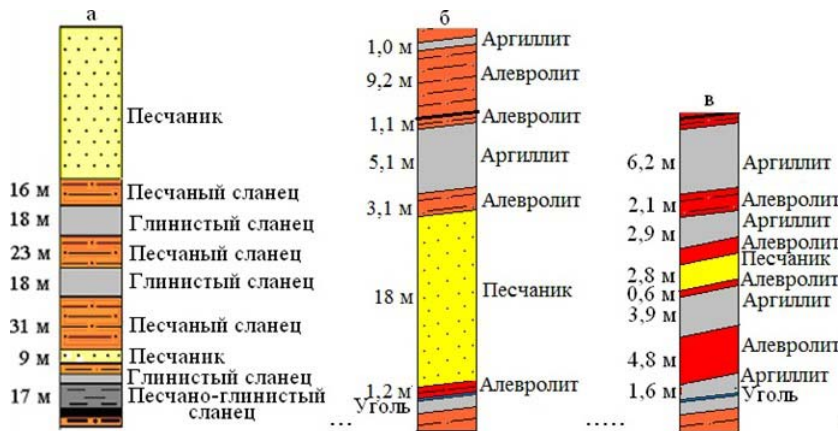


Рис. 1. Группы строения пород кровли.

**1. Анализ результатов моделирования.** В результате шахтных и лабораторных исследований на моделях из эквивалентных материалов установлен характер поведения пород при выемке пласта с тремя группами строения кровли.

На рисунке 2 показан характер развития области интенсивного сдвижения породных слоев при первой группе строения породного массива.

С отходом лавы от разрезной печи на 112 метров обрушилась первая группа слоев (1). Изгибающиеся породные группы слоев формируют опорное давление впереди лавы (рис.3). Нисходящая ветвь опорного давления опускается ниже условной линии  $\gamma H$ , что говорит о разгрузке пласта впереди лавы.

Разгрузка пласта происходит за счет поднятия первого слоя в первой группе слоев при его максимальном пролете. Аналогично ведут себя остальные группы слоев.

По такой же схеме формируется область интенсивных сдвижений кровли при

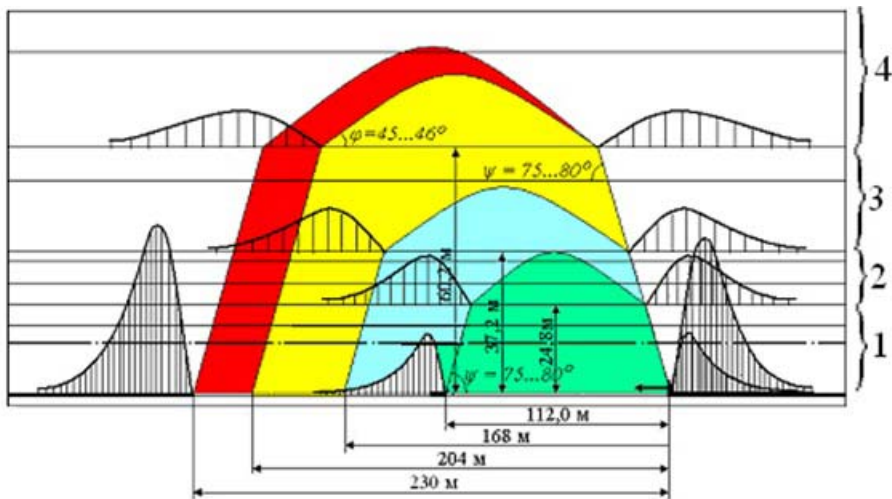


Рис. 2. Сдвигения пород первой группы строения:  
 1, 2, 3, 4 – группы слоев;  
 ← направление подвигания лавы.

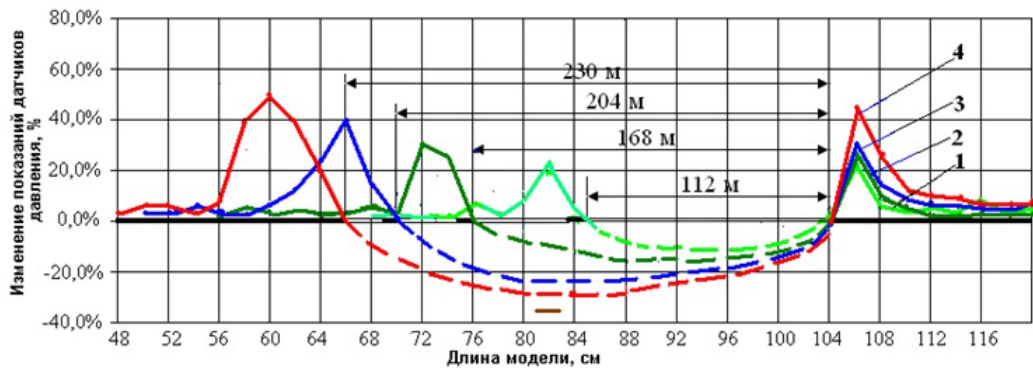


Рис. 3. Изменения опорного давления в модели с первой группой строения пород:  
 1 – при отходе лавы от разрезной печи на 112 м;  
 2 – при отходе лавы от разрезной печи на 168 м;  
 3 – при отходе лавы от разрезной печи на 204 м;  
 4 – при отходе лавы от разрезной печи на 230 м.

наличии в кровле пласта второй группы слоев (рис. 16). На рисунке 4 приведена область интенсивного сдвигения пород кровли второй группы строения, в процессе выемки пласта.

Из рисунка 4 видно, что породы первой группы слоев (слой непосредственной кровли) обрушаются при отходе лавы от разрезной печи на 120 метров. Породы второй группы слоев (2), общей мощностью 65,1 метра зависают, изгибаясь над выработанным пространством. При отходе лавы на 264 метра вторая группа слоев обрушается, а третья зависает, изгибаясь над выработанным пространством.

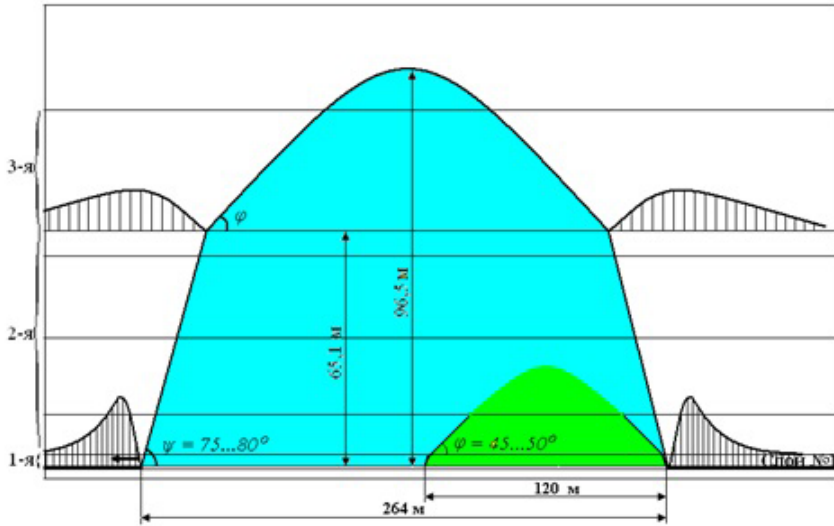


Рис. 4. Сдвигение пород второй группы строения:  
1, 2, 3 – группы слоев;  
← направление подвигания лавы.

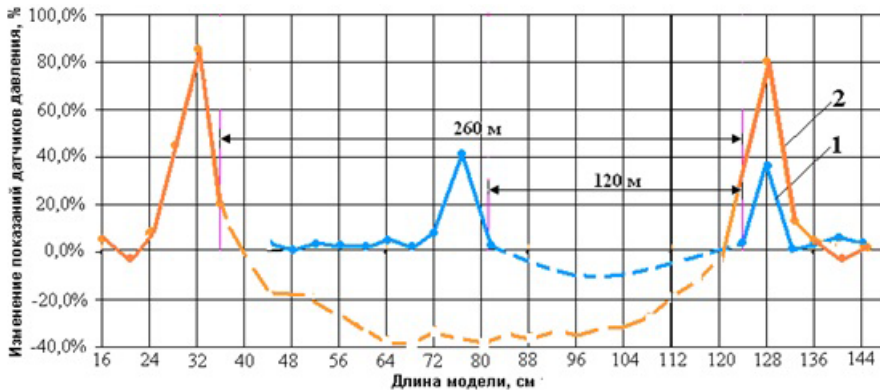


Рис. 5. Изменения показаний датчиков давления в модели №1:  
1 – при отходе лавы от разрезной печи на 120 м;  
2 – при отходе лавы от разрезной печи на 260 м.

Нисходящая ветвь опорного давления опускается ниже линии  $(0, 0)$ , при отходе лавы на 260 метров, что говорит о разгрузке пласта впереди лавы. Разгрузка пласта происходит из-за поднятия второй группы слоев впереди лавы при ее изгибе над выработанным пространством.

Формирование области интенсивных сдвижений пород кровли над выработанным пространством показано на рисунке 6.

Из рисунка 6 видно, что высота области интенсивных сдвижений кровли над выработанным пространством возрастает при последовательном разрушении и



обрушении групп породных слоев через каждые 23 – 25 метров подвигания лавы.

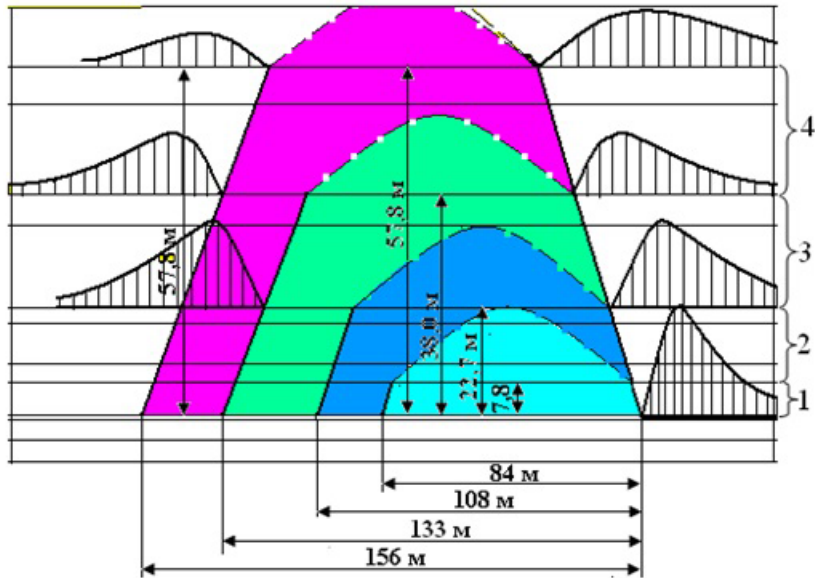


Рис. 6. Сдвигение третьей группы строения пород:  
1, 2, 3, 4 – группы слоев;  
← направление подвигания лавы.

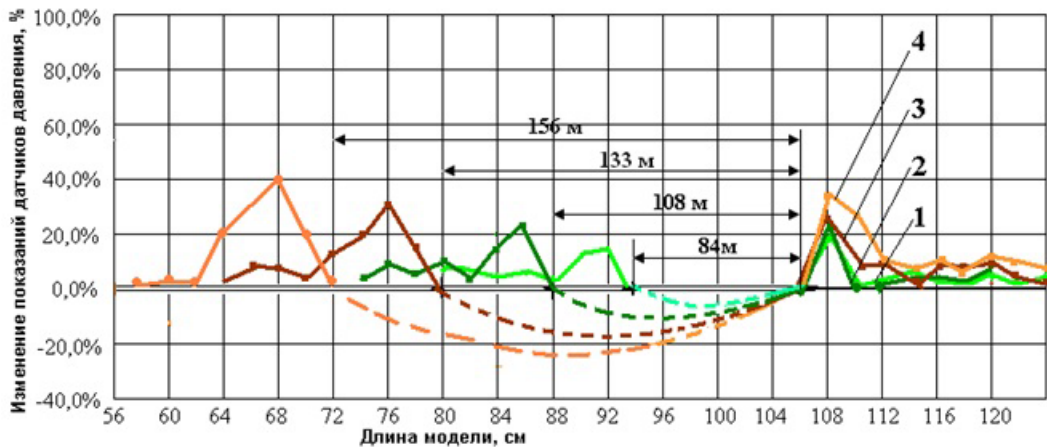


Рис. 7. Изменения показаний датчиков давления:  
1 – при отходе лавы от разрезной печи на 84м;  
2 – при отходе лавы от разрезной печи на 108м;  
3 – при отходе лавы от разрезной печи на 133м;  
4 – при отходе лавы от разрезной печи на 156м.

Из-за малых значений пролета групп слоев перед обрушением показания

датчиков давления в нисходящей ветви не опускались ниже линии (0,0%). Следовательно, разгрузка пласта впереди лавы не происходила.

Таким образом, результаты исследований характера сдвижения породного массива над выработанным пространством позволили установить следующее. Разгрузка пласта впереди лавы, для массивов первой и второй групп строения, формируется изгибом мощного породного слоя над выработанным пространством при его предельном пролете. Для определения величины максимального опорного давления, а также места расположения зоны разгрузки пласта впереди лавы, необходимо рассчитывать предельный пролет кровли (шаг посадки).

Величину предельного пролета группы слоев кровли будем определять из условия равенства освобожденной упругой энергии слоя при образовании трещины длиной  $\Delta l$  и затраченной энергии на ее образование:

$$-\Delta W = \Delta \Gamma \quad (1)$$

где  $-\Delta W$  – освобожденная упругая энергия при образовании трещины длиной  $\Delta a$ ;

$\Delta \Gamma$  – энергия, которую необходимо затратить на образование трещины длиной  $\Delta a$ .

Условие для образования трещины [5] записывается:

$$\frac{2\pi\sigma^2 l_T}{E} \Delta l_T = 4\Gamma \Delta l_T \quad \text{или} \quad \sigma = \sqrt{\frac{2E\Gamma}{\pi l_T}}, \text{ МПа} \quad (2)$$

где  $\sigma$  – действующее напряжение, МПа;

$l_T$  – критическая длина трещины, м;

$E$  – модуль упругости, МПа;

$\Gamma$  – поверхностная энергия тела, Дж/м<sup>2</sup>.

Учитывая нарушенность вмещающего массива, разрушение породного слоя при изгибе начнется с роста существующей трещины, критическая длина которой определится из выражения:

$$l_{кр} = \frac{2EG_c}{\pi\sigma_p^2}, \text{ м} \quad (3)$$

где  $G_c$  – эффективная поверхностная энергия, Дж/м<sup>2</sup>;

$\sigma_p$  – предел прочности породы на растяжение, МПа.

Величина горизонтальных напряжений в породном слое может быть определена, как изогнутой балки, при ее жестком защемлении с двух сторон на опорах [6]

$$\sigma_\rho = \frac{ql_{np}^2}{2h^2}, \text{ МПа} \quad (4)$$

при изгибе консольной балки с жестким защемлением

$$\sigma_\rho = \frac{3ql_{np}^2}{h^2}, \text{ МПа} \quad (5)$$

где  $q$  – распределенная нагрузка на породный слой,  $\text{Мн}/\text{м}^2$ ;  
 $L_{\text{пр}}$  – предельный пролет слоя перед обрушением, м;  
 $h$  – мощность несущего породного слоя, м.

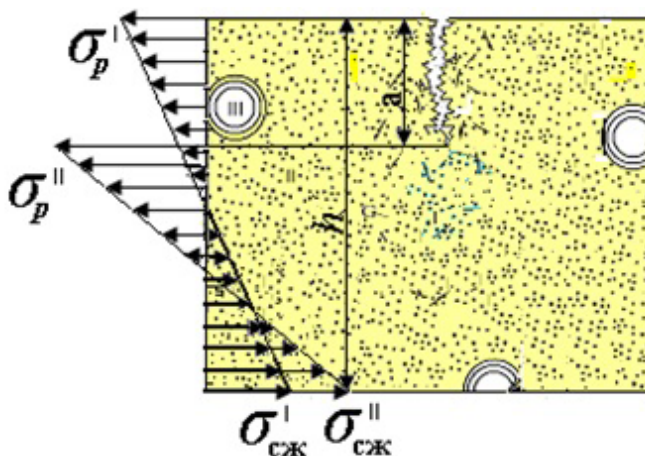


Рис. 8. Модель образования и развития трещины в породном слое: а – длина трещины.

Величина распределенной нагрузки, образованная весом одного слоя

$$q_i = \gamma h, \text{ Мн}/\text{м}^2 \quad (6)$$

где  $\gamma$  – объемный вес породы,  $\text{Мн}/\text{м}^3$ ;

величина распределенной нагрузки, образованной весом группы слоев

$$q = \sum_{i=1}^n \gamma_i h_i, \text{ Мн}/\text{м}^2 \quad (7)$$

где  $\sum q$  – суммарная нагрузка группы слоев,  $\text{Мн}/\text{м}^2$ ;  $n$  – количество слоев в группе.

Подставляя значения действующих напряжений (4,5,6,7) в (3) получаем выражения для определения предельного пролета кровли над выработанным пространством.

При первичном обрушении породного слоя:

$$l_{\text{пр}^2} = \frac{2h_c}{\gamma_c} \sqrt{\frac{2EG_c}{\pi l_{\text{кр}}}}, \text{ м}^2 \quad (8)$$

где  $l_{\text{пр}}$  – предельный пролет породного слоя перед первичной посадкой, м;

$h_c$  – мощность рассчитываемого слоя, м;

$\gamma_c$  – объемная масса породы,  $\text{Н}/\text{м}^3$ ;

$l_{\text{кр}}$  – критическая длина трещины в слое, м.

При первичном обрушении группы слоев:

$$l_{np^2} = \frac{2h_c^2}{\sum_{i=1}^n \gamma_c h_c} \sqrt{\frac{2EG_c}{\pi l_{кр}}}, \text{ м}^2 \quad (9)$$

где  $\sum_{i=1}^n \gamma_c h_c$  – распределенная нагрузка группы слоев, МН/м<sup>2</sup>.

При вторичном обрушении породного слоя:

$$l_{np^2} = \frac{h_c}{3\gamma_c} \sqrt{\frac{2EG_c}{\pi l_{кр}}}, \text{ м}^2 \quad (10)$$

При вторичном обрушении группы слоев:

$$l_{np^2} = \frac{h_c^2}{3 \sum_{i=1}^n \gamma_c h_c} \sqrt{\frac{2EG_c}{\pi l_{кр}}}, \text{ м}^2 \quad (11)$$

Определив значения предельного пролета кровли, величину максимального давления можно определить, как давление жестко защемленной балки на опору:

При первичном обрушении породного слоя:

$$l_{np^2} = \frac{2h_c}{\gamma_c} \sqrt{\frac{2EG_c}{\pi l_{кр}}}, \text{ м}^2 \quad (12)$$

где  $l_{np}$  – предельный пролет породного слоя перед первичной посадкой, м;

$h_c$  – мощность рассчитываемого слоя, м;

$\gamma_c$  – объёмная масса породы, Н/м<sup>3</sup>;

$l_{кр}$  – критическая длина трещины в слое, м.

При первичном обрушении группы слоев:

$$l_{np^2} = \frac{2h_c^2}{\sum_{i=1}^n \gamma_c h_c} \sqrt{\frac{2EG_c}{\pi l_{кр}}}, \text{ м}^2 \quad (13)$$

где  $\sum_{i=1}^n \gamma_c h_c$  – распределенная нагрузка группы слоев, МН/м<sup>2</sup>.

При вторичном обрушении породного слоя:

$$l_{np^2} = \frac{h_c}{3\gamma_c} \sqrt{\frac{2EG_c}{\pi l_{кр}}}, \text{ м}^2 \quad (14)$$

При вторичном обрушении группы слоев:

$$l_{np^2} = \frac{h_c^2}{3 \sum_{i=1}^n \gamma_c h_c} \sqrt{\frac{2EG_c}{\pi l_{кр}}}, \text{ м}^2 \quad (15)$$

Величину максимального опорного давления можно определить как давление жестко защемленной балки на опору.

$$P_i = \frac{1}{2} \gamma \cdot h \cdot l_{np}, \text{ МН} \quad (16)$$

где  $P_i$  – давление, передаваемое слоём на опору, МН;

$\gamma$  – объёмный вес породы, МН/м<sup>3</sup>;

$h$  – мощность слоя, м;

$l_{np}$  – пролет слоя, м.

Опорное давление, формируемое группой слоёв:

$$P_{on} = \frac{\sum P_i^{\max}}{S} + \gamma h \quad (17)$$

где  $P_i^{\max}$  – максимальное давление слоя на опору, кН;

$S$  – единичная площадка, м<sup>2</sup>.

### Выводы.

1. По своему строению породные массивы делятся на три основные группы. Каждая группа строения породного массива характеристикой породных слоёв ее составляющих.

2. Породные слои в массиве делятся на группы слоёв по несущей способности каждого слоя, входящего в группу.

3. При достижении мощным и прочным породным слоём, залегающим над пластом предельного пролета и при изгибе слоя над выработанным пространством, впереди лавы образуется область разгрузки пласта

1. *Клочко И.И.* Особенности изменения напряженного состояния впереди лавы в процессе выемки угля / И.И. Клочко, Н.И. Лобков // Вісті Донецького гірничого інституту. – 2011. – №2. – С. 135–141.
2. *Лобков Н.И.* Исследование сдвижения породных слоёв над очистными выработками пологих пластов / Н.И. Лобков. // Сб. трудов международной научно-техн. конференции "Проблемы механики горно-металлургического комплекса". – Днепропетровск: НТУ, 2002. – С. 175-176.
3. *Канлыбаева Ж.М.* Закономерности сдвижения горных пород в массиве / Ж.М. Канлыбаева. – Алма-Ата: Наука, 1968. – 108 с.
4. *Лобков Н.И.* Моделирование характера поведения породного массива над выработанным пространством лав / Н.И. Лобков, А.И. Сергиенко, Л.Г. Сергиенко // Зб. Наукових праць НГУ. – Дніпропетровськ: РВК НГУ, 2006. – №26. – Том 1. – С. 56-65
5. *Griffiths A.* The phenomenon of rupture and flow in solids / A. Griffiths // Phil. Trans, Roy. Soc., 1920, – V. 220. – P. 150-160.
6. *Варданян Г.С.* Сопrotивление материалов с основами теории упругости и пластичности. Учебник под. Ред Г.С. Варданяна / Г.С. Варданян – М.: Издательство АСВ, 1995. – 568 с.

**N.I. Lobkov, A.A. Lobkov, L.A. Dragan, V.S. Mayevsky**

**Specific features of support pressure formation in front of cleaning face.**

The results of a study of the movement of the mountain massif are presented. It is established that the reference pressure is formed by the bending of the rock layers that enter the area of intense displacement above the developed space. Forward and lava formation discharge zone is formed.

Н.И. Лобков, А.А. Лобков, Л.А. Драган, В.С. Маевский

**Keywords:** *cleaning face, lava, developed space, support pressure, roof layers, direct roof, main roof, collapse, ultimate strength.*

Республиканский академический научно-исследовательский и  
проектно-конструкторский институт горной геологии,  
геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ),  
Донецк  
*ranimi@ranimi.org*

*Получено 29.04.2020*