
СОДЕРЖАНИЕ

<i>Шалдырван В. А., Васильев Т. А.</i> Аналитическое решение смешанной задачи деформирования короткого трансформного цилиндра	7
<i>Кит Г. С., Сушко О. П.</i> Термоупругое состояние тела с теплоактивным тонким жестким дисковым включением	15
<i>Гачкевич А. Р., Солодяк М. Т., Ивасько Р. А., Тарлаковский Д. В.</i> Силовые факторы взаимодействия электромагнитного поля с ферромагнитным телом	23
<i>Терлецкий Р. Ф., Турий О. П., Брухаль М. Б.</i> Задачи термомеханики для облучаемых тел	30
<i>Кирилюк В. С., Левчук О. И.</i> Контактная задача Герца с учетом выделения тепла при трении скольжения двух трансверсально-изотропных упругих тел	38
<i>Богачев И. В., Ватульян А. О., Дударев В. В., Явруян О. В.</i> Об определении свойств неоднородных электроупругих тел	46
<i>Хорошун Л. П., Назаренко Л. В.</i> Нелинейные деформативные свойства композитных материалов с ортотропными компонентами	53
<i>Сенченков И. К., Оксенчук Н. Д.</i> Исследование влияния микроструктуры на остаточное НДС вязкопластического полупространства при импульсном термомеханическом нагружении	61
<i>Курпа Л. В., Будников Н. А.</i> Исследование вынужденных нелинейных колебаний многослойных жестко заземленных пластин со сложной формой плана	70
<i>Каминский А. А., Селиванов М. Ф., Черноиван Ю. А.</i> Определение длин зон предразрушения у фронта двух коллинеарных трещин неравной длины	78
<i>Кипнис Л. А., Хазин Г. А., Полищук Т. В.</i> О начальном этапе процесса расслаивания кусочно-однородного упругого тела вблизи угловой точки	85

<i>Мартыняк Р. М., Середницкая Х. И.</i> Термоупругость кусочно-однородного тела с межфазной теплопроницаемой трещиной	91
<i>Вьон А. С., Лобода В. В.</i> Модель полос электрического насыщения для пьезоэлектрического тела с трещиной	99
<i>Жук Я. А., Васильева Л. Я.</i> Анализ особенностей волн напряжения, генерируемых тепловым импульсом в центре диска и обусловленных микроструктурными превращениями	106
<i>Калоеров С. А.</i> Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит	113
<i>Карнаухов В. Г., Карпенюк А. С.</i> Потеря функциональной способности вязкоупругой прямоугольной пластины с шарнирным опиранием торцов из-за температуры диссипативного разогрева.....	133
<i>Кубенко В. Д., Янчевский И. В.</i> Исследование нестационарного неосесимметричного деформирования круглой пластины с пьезокерамическим слоем при электрическом возбуждении.....	137
<i>Хома И. Ю., Дашко О. Г.</i> О напряженном состоянии пологой трансверсально-изотропной сферической оболочки с эллиптическим отверстием	145
<i>Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л., Соколова Л. В.</i> Влияние характера изменения толщины цилиндрической оболочки на спектр частот свободных колебаний	152
<i>Кушнир Р. М., Соляр Т. Я.</i> О методике определения динамических напряжений в теле с трещинами при антиплоской деформации	160
<i>Сулим Г. Т., Пастернак Я. М., Олиарник Н. Р.</i> Антиплоская деформация конечных анизотропных тел с тонкими неоднородностями.....	167
<i>Киричок И. Ф., Шевченко А. Ю.</i> Резонансные колебания и виброразогрев гибкой вязкоупругой балки с пьезоэлектрическими сенсорами.....	175
<i>Zozulya V. V.</i> New high order theory for functionally graded shells.....	184

З М І С Т

<i>Шалдирван В. А., Васильєв Т. А.</i> Аналітичний розв'язок змішаної задачі деформування короткого трансропного циліндру...	7
<i>Кім Г. С., Сушко О. П.</i> Термопружний стан тіла з теплоактивним тонким жорстким дисковим включенням.....	15
<i>Гачкевич О. Р., Солодяк М. Т., Івасько Р. О., Тарлаковський Д. В.</i> Силкові фактори взаємодії електромагнітного поля з феромагнітним тілом	23
<i>Терлецький Р. Ф., Турій О. П., Брухаль М. Б.</i> Задачі термомеханіки для опромінюваних тіл.....	30
<i>Кириллюк В. С., Левчук О. І.</i> Контактна задача Герца з врахуванням виділення тепла при терті проковзування двох трансверсально-ізотропних пружних тіл	38
<i>Богацьов І. В., Ватульян О. О., Дударьєв В. В., Явруян О. В.</i> Про визначення властивостей неоднорідних електропружних тіл	46
<i>Хорошун Л. П., Назаренко Л. В.</i> Нелінійні деформативні властивості композитних матеріалів з ортотропними компонентами	53
<i>Сенченков І. К., Оксенчук Н. Д.</i> Дослідження впливу мікроструктури на залишковий НДС в'язкопластичного півпростору при імпульсному термомеханічному навантаженні	61
<i>Курпа Л. В., Будніков М. А.</i> Дослідження вимушених нелінійних коливань багатошарових жорстко закріплених пластин зі складною формою плану	70
<i>Камінський А. О., Селіванов М. Ф., Чорноіван Ю. О.</i> Визначення довжин зон передруйнування поблизу фронту двох колінеарних тріщин нерівної довжини.....	78
<i>Кіпніс Л. А., Хазін Г. А., Поліщук Т. В.</i> Про початковий етап процесу розширювання кусково-однорідного пружного тіла біля кутової точки.....	85

<i>Мартиняк Х. І., Мартиняк Р. М.</i> Термопружність кусково-однорідного тіла з міжфазною теплопроникною тріщиною	91
<i>В'юн О. С., Лобода В. В.</i> Модель смуг електричного насичення для п'єзоелектричного тіла з тріщиною	99
<i>Жук Я. О., Васильєва Л. Я.</i> Аналіз особливостей хвиль напруження, згенерованих тепловим імпульсом у центрі диску і обумовлених мікроструктурними перетвореннями	106
<i>Калоєров С. О.</i> Комплексні потенціали теорії вигину багатозв'язних анізотропних плит.....	113
<i>Карнаухов В. Г., Карпенюк О. С.</i> Втрата функціональної здатності в'язкопружної прямокутної пластини з шарнірним опиранням торців із-за температури диссипативного розігріву	133
<i>Кубенко В. Д., Янчевський І. В.</i> Дослідження нестационарного невісесиметричного деформування круглої пластини с п'єзокерамічним шаром при електричному збудженні	137
<i>Хома І. Ю., Дашко О. Г.</i> Про напружений стан пологої трансверсально ізотропної сферичної оболонки з еліптичним отвором	145
<i>Григоренко О. Я., Єфімова Т. Л., Соколова Л. В.</i> Вплив характеру зміни товщини циліндричної оболонки на спектр частот вільних коливань	152
<i>Кушнір Р. М., Соляр Т. Я.</i> Про методику визначення динамічних напружень в тілі з тріщинами за антиплоскої деформації.....	160
<i>Сулим Г. Т., Пастернак Я. М., Оліярник Н. Р.</i> Антиплоска деформація скінченних анізотропних тіл із тонкими неоднорідностями	167
<i>Киричок І. Ф., Шевченко О. Ю.</i> Резонансні коливання та вібророзігрів гнучкої в'язкопружної балки з п'єзоелектричними сенсорами	175
<i>Зозуля В. В.</i> Нова теорія вищого порядку для функціонально градієнтних оболонок	184

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

Scientific journal
№ 4 (50)

Founded in 1970
Donetsk 2012

CONTENTS

<i>Shaldyrvan V. A., Vasiliev T. A.</i> The analytical solution for mixed boundary value problem of deformation of transtropic short length cylinder.....	7
<i>Kit H. S., Sushko O. P.</i> Thermoelastic state of the body with heat-active thin rigid disc inclusion	15
<i>Hachkevych O. R., Solodyak M. T., Ivas'ko R. O., Tarlakovskii D. V.</i> The power factors of interaction of electromagnetic field with a ferromagnetic body	23
<i>Terletskii R. F., Turii O. P., Brukhal M. B.</i> Thermomechanical problems for solids subjected to thermal radiation.....	30
<i>Kirilyuk V. S., Levchuk O. I.</i> Contact problem by Hertz with accounting of heat generation under sliding friction of two transversally-isotropic elastic bodies	38
<i>Bogachov I. V., Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Yavruyan O. V.</i> About definition of properties for inhomogeneous electroelastic bodies	46
<i>Khoroshun L. P., Nazarenko L. V.</i> Nonlinear deformative properties of composite materials with orthotropic components.....	53
<i>Senchenkov I. K., Oksenchuk N. D.</i> Investigation of microstructure influence on the residual stress-strain state of viscoplastic half-space under pulse thermomechanical loading	61
<i>Kurpa L. V., Budnikov N. A.</i> Investigation of the forced nonlinear vibrations of the laminated fully clamped plates with complex planform	70
<i>Kaminsky A. A., Selivanov M. F., Chornoivan Y. O.</i> Process zone length determination for two co-linear cracks of non-equal lengths	78
<i>Kipnis L. A., Khazin G. A., Polischuk T. V.</i> On the initial stage of process of delamination of piece-homogeneous elastic body near the corner point.....	85

<i>Martynyak R.M., Serednytska K. I.</i> Thermoelasticity of piecewise-homogeneous solid with heat-permeable interfacial crack.....	91
<i>Vjun A. S., Loboda V. V.</i> Electric saturation strips model for a piezoelectric body with a crack	99
<i>Zhuk Ya. A., Vasilieva L. Ya.</i> Analysis of features of the stress waves generated by thermal irradiation of a disk center and caused by microstructural transformations	106
<i>Kaloerov S. A.</i> Complex potentials of the theory of bending for multiply connected anisotropic plates	113
<i>Karnaukhov V. G., Karpenyuk A. S.</i> Performance loss of simply supported viscoelastic rectangular plate as result of dissipative heating.....	133
<i>Kubenko V. D., Yanchevskiy I. V.</i> Investigation of nonstationary asymmetric deformations of round plate with piezoceramic layer under electric excitation.....	137
<i>Khoma I. Yu., Dashko O. G.</i> A stress-state problem for a shallow transversely isotropic spherical shell with an elliptical hole	145
<i>Grigorenko A. Ya., Efimova T. L., Sokolova L. V.</i> Influence of the thickness change types of cylindrical shell on the frequencies spectrum of the natural vibration	152
<i>Kushnir R. M., Solyar T. Ya.</i> On the method of determination the dynamic stresses in the body with cracks under anti-plane deformation	160
<i>Sulym H. T., Pasternak Ia. M., Oliyarnyk N. R.</i> Antiplane shear of finite anisotropic solids with thin inhomogeneities	167
<i>Kirichok I. F., Shevchenko A. U.</i> Resonant vibrations and vibro-heating of flexible viscoelastic beam with piezoelectric sensors	175
<i>Zozulya V. V.</i> New high order theory for functionally graded shells	184

УДК 539.3

В. А. ШАЛДЫРВАН, д-р физ.-мат. наук,
Т. А. ВАСИЛЬЕВ, канд. физ.-мат. наук

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОРОТКОГО ТРАНСТРОПНОГО ЦИЛИНДРА

С использованием однородных решений типа Лурье-Воровича построено решение смешанной задачи об изгибе толстой транструпной плиты и короткого цилиндра. Описаны результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: транструпный, упругий цилиндр, смешанная граничная задача, сингулярные напряжения

Решение смешанных задач теории упругости для изотропных цилиндрических тел конечных размеров сопряжено с необходимостью изучения сходимости рядов (с помощью которых они представляются) из-за наличия интегрируемых особенностей компонент тензора напряжений на линиях излома граничной поверхности [1, 9]. Методика преодоления возникающих при этом трудностей изложена в работах [2–4, 7]. Для транструпного тела смешанные задачи изгиба рассматривались в работах [5, 8], в которых содержатся результаты исследований напряженно-деформированного состояния (НДС) короткого транструпного цилиндрического тела с использованием однородных решений типа Лурье-Воровича. При этом проверить достоверность получаемых результатов вблизи линии излома граничной поверхности не представилось возможным. Для изучения НДС в указанной области необходимо провести асимптотический анализ решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, установить характер особенности напряжений, использовать методы улучшения сходимости рядов. Этим вопросам и посвящена данная статья.

Основные соотношения. Рассмотрим транструпное цилиндрическое тело, отнесенное к цилиндрическим координатам \tilde{r} , φ , \tilde{z} : $0 \leq \tilde{r} \leq \tilde{R}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\tilde{H} \leq \tilde{z} \leq \tilde{H}$. Пусть плоскость изотропии совпадает со срединной плоскостью $\tilde{z} = 0$ и ось \tilde{z} направлена вниз. Необходимо найти функции $u(r, z)$ и $w(r, z)$, удовлетворяющие уравнениям равновесия в перемещениях [8] в области V , занятой телом, а на его поверхности ∂V – граничным условиям

$$\sigma_{zz}(r, \pm 1) = \pm Q, \quad \sigma_{rz}(r, \pm 1) = 0; \quad (1)$$

$$u(1, z) = 0, \quad w(1, z) = 0. \quad (2)$$

Здесь

$$r = \tilde{r}/\tilde{R}, \quad z = \tilde{z}/\tilde{H} = \tilde{z}/h\tilde{R}, \quad h = \tilde{H}/\tilde{R}, \quad u = \tilde{u}/\tilde{R}, \quad w = \tilde{w}/\tilde{R}, \quad \sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij}/2\tilde{G};$$

$$\sigma_{zz} = \mu_1 v_z (u_{,r} + u/r) + \mu_2 w_{,z}/2h, \quad \sigma_{rz} = (u_{,z}/h + w_{,r})/2s_0^2,$$

$$\begin{aligned} v_2 &= v_z E/E_z, \quad s_0^2 = G/G_z, \quad \mu_0 = 1 - v - 2v_2 v_z, \\ \mu_1 &= (1 + v)/\mu_0, \quad \mu_2 = 2\mu_1(1 - v)v_z/v_2. \end{aligned}$$

Решение задачи имеет вид [8]

$$\begin{aligned} u/Q &= u^H + 2az + 2 \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} N_p(z) A_p P_0^+(\gamma_p^* r) I_0(\gamma_p^* r) / I_0(\gamma_p^*), \\ w/Q &= w^H - \frac{ar^2}{h} + 4h\mu_5 (2s_0^2 - v_2 z^2) a + 2 \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} Q_p(z) A_p I_0(\gamma_p^* r) / I_0(\gamma_p^*), \end{aligned} \quad (3)$$

где γ_p – корни уравнения $\beta \sin 2\alpha \gamma_p - \alpha sh 2\beta \gamma_p = 0$, асимптотическая формула для которых имеет вид [6]

$$\gamma_p \approx \frac{1}{s_2} \left[\pi(p - 3/4) - i \ln \sqrt{\operatorname{tg} \theta} \right];$$

$$N_p(z) = \sin \gamma_p s_2 \sin \gamma_p s_1 z - s_3 \sin \gamma_p s_1 \sin \gamma_p s_2 z, \quad \mu_3 = 2\mu_1 v_z + s_0^{-2},$$

$$Q_p(z) = -S_1 \gamma_p^* \sin \gamma_p s_2 \cos \gamma_p s_1 z + s_3 S_2 \gamma_p^* \sin \gamma_p s_1 \cos \gamma_p s_2 z,$$

$$S_{1,2} = \mu_3 s_0^2 s_{1,2} / \left(1 - \mu_2 s_0^2 s_{1,2}^2 \right), \quad P_0^+(\gamma_p^* r) = \gamma_p^* r I_1(\gamma_p^* r) / I_0(\gamma_p^*),$$

$$s_{1,2} = \sqrt{\left(s_0^2 - v_2 \right) \left(1 \pm \sqrt{1 + v_2 (1 - v) (1 - v_2 v_z)} / \left(v_z (1 + v) (s_0^2 - v_2)^2 \right) \right)} / (1 - v),$$

$$s_3 = \left[(1 - v) s_1^2 + v_2 \right] \left(1 - \mu_2 s_0^2 s_2^2 \right) / \left[(1 - v) s_2^2 + v_2 \right] \left(1 - \mu_2 s_0^2 s_1^2 \right),$$

$$\alpha = \operatorname{Re} s_1, \quad \beta = \operatorname{Im} s_1, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}, \quad \gamma_p^* = \frac{\gamma_p}{h};$$

u^H , w^H – частное решение системы уравнений равновесия, удовлетворяющее условиям (1). Для равномерно распределенной загрузки эти функции имеют вид [8]

$$u^H = P_3(r)z + P_1(r)z^3, \quad w^H = P_4(r) + P_2(r)z^2 + P_0(r)z^4. \quad (4)$$

Неизвестные коэффициенты A_p , входящие в (3), определяются из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений [8]

$$\begin{aligned} a + \operatorname{Re} \sum_p n_{mp} P_0^+(\gamma_p^*) A_p &= -(-1)^m \delta_m^2 \int_{-1}^1 u^H(1, z) \sin \delta_m z dz / 2, \\ \omega_m a + 2 \operatorname{Re} \sum_p q_{mp} A_p &= (-1)^m \delta_m \int_{-1}^1 w^H(1, z) \cos \delta_m z dz / 2, \quad m, p = \overline{1, \infty}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$\omega_m = -1/h - 4h\mu_5 \left(v_2 \left(1 - 2/\delta_m^2 \right) - 2s_0^2 \right),$$

$$N_{mp} = \delta_m^2 \left[s_3 \gamma_p s_2 \frac{\sin(\gamma_p s_1) \cos(\gamma_p s_2)}{(\gamma_p s_2)^2 - \delta_m^2} - \gamma_p s_1 \frac{\sin(\gamma_p s_2) \cos(\gamma_p s_1)}{(\gamma_p s_1)^2 - \delta_m^2} \right],$$

$$Q_{mp} = -\delta_m^2 \gamma_p^* \left[s_3 S_2 \frac{\sin(\gamma_p s_1) \cos(\gamma_p s_2)}{(\gamma_p s_2)^2 - \delta_m^2} - S_1 \frac{\sin(\gamma_p s_2) \cos(\gamma_p s_1)}{(\gamma_p s_1)^2 - \delta_m^2} \right].$$

Анализ бесконечной системы. Можно предположить, что в смешанной задаче для транстропного цилиндра компоненты тензора напряжений (как и для изотропного цилиндра [1, 9]) на линии излома граничной поверхности имеют степенную особенность. Воспользуемся подходом, изложенным в [2, 3]. А именно, рассмотрим напряжения

$$\frac{\sigma_{rr}}{Q} = \sigma_{rr}^H + 2az(\mu_6 + \mu_7) + 2 \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} A_p \left\{ L_p(z) - P_0^+(\gamma_p^* r) \frac{N_p(z)}{r} \right\} \frac{I_0(\gamma_p^* r)}{I_0(\gamma_p^* r)}$$

в локальной системе координат $\eta = 1 - z$, $\xi = (1 - r)/h$. Поскольку $\frac{\gamma_p N_p(z; \gamma_p)}{L_p(z; \gamma_p)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$, тогда

$$L_p(\eta; \gamma_p) \approx \gamma_p^2 e^{\beta(2-\eta)\gamma_p} \left[D_1 e^{i\alpha\eta\gamma_p} - s_3 D_2 e^{-i\alpha\eta\gamma_p} \right] - \gamma_p^2 e^{-i\alpha(2-\eta)\gamma_p} \left[D_1 e^{-\beta\eta\gamma_p} - s_3 D_2 e^{\beta\eta\gamma_p} \right],$$

где

$$D_{1,2} = (1 + A_{12} + S_{1,2} A_{13}) / 4h^2, \quad A_{12} = (v + v_2 v_z) / \mu_0, \quad A_{13} = (1 - v_2 v_z) / \mu_0.$$

Используя асимптотическое представление функций Бесселя, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} \approx & 2 \operatorname{Re} \sum_p A_p \gamma_p^2 e^{2\gamma_p \beta} e^{-\gamma_p(\xi + \beta\eta)} \left[D_1 e^{i\alpha\eta\gamma_p} - s_3 D_2 e^{-i\alpha\eta\gamma_p} \right] + \\ & + 2 \operatorname{Re} \sum_p A_p \gamma_p^2 e^{-2i\gamma_p \alpha} e^{-\gamma_p(\xi - i\alpha\eta)} \left[D_1 e^{-\beta\eta\gamma_p} - s_3 D_2 e^{\beta\eta\gamma_p} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим ряд Дирихле вида

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \sum_p A \gamma_p^q e^{-\gamma_p(\xi + \beta\eta)} \left[D_1 e^{i\alpha\eta\gamma_p} - s_3 D_2 e^{-i\alpha\eta\gamma_p} \right] + \\ & - 2 \operatorname{Re} \sum_p A \gamma_p^q e^{-\gamma_p(\xi - i\alpha\eta)} \left[D_1 e^{-\beta\eta\gamma_p} - s_3 D_2 e^{\beta\eta\gamma_p} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Суммой этого ряда будет функция

$$\operatorname{Re} A \Gamma(q+1) \left(D_1 \left[\zeta_1^{-q-1} - \zeta_2^{-q-1} \right] - s_3 D_2 \left[\zeta_1^{-q-1} - \bar{\zeta}_2^{-q-1} \right] \right) \quad (8)$$

где $\varsigma_1 = \xi + \beta\eta + i\alpha\eta$ и $\varsigma_2 = \xi + \alpha\eta + i\beta\eta$. Если предположить, что для главной части коэффициентов разложения имеет место представления

$$A_p \approx \frac{A\gamma_p^{q-2}h}{2\alpha\beta(\cosh 2\beta\gamma_p - \cos 2\alpha\gamma_p)}, \quad (9)$$

то (6) будет рядом вида (7) с суммой (8).

Итак, получена асимптотика коэффициентов и ее можно использовать для анализа бесконечной системы. Поскольку $(\alpha \sinh 2\beta\gamma_p - \beta \sin 2\alpha\gamma_p)' = 2\alpha\beta(\cosh 2\beta\gamma_p - \cos 2\alpha\gamma_p)$, а коэффициенты N_{mp} и Q_{mp} содержат элементы $\cos s_{1,2}\gamma_p/(\gamma_p^2 - \delta_m^2/s_{1,2}^2)$, являющиеся мероморфными функциями, то по теореме о вычетах в системе (5) можно осуществить переход от рядов к контурным интегралам

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{A}{2\pi i} \left(\frac{1}{s_1} \int_{\Gamma} z^q K(z, s_1, s_2, \delta_m^2) dz - \frac{s_3}{s_2} \int_{\Gamma} z^q K(z, s_2, s_1, \delta_m^2) dz \right) &= \tilde{c}_{1m} \\ \operatorname{Re} \frac{A}{2\pi i} \left(\frac{S_1}{s_1^2} \int_{\Gamma} z^{q-1} K(z, s_1, s_2, \delta_m^2) dz - \frac{s_3 S_2}{s_2^2} \int_{\Gamma} z^{q-1} K(z, s_2, s_1, \delta_m^2) dz \right) &= \tilde{c}_{2m}, \end{aligned}$$

в которых $K(z, t, s, \delta_m^2) = \frac{\sin sz \cos tz}{(z^2 - \delta_m^2/t^2)(\alpha \sinh 2\beta z - \beta \sin 2\alpha z)}$. В результате

вычисления главных частей последних для определения $A = A' + iA''$ приходим к системе двух однородных уравнений

$$\begin{aligned} A' \Phi(q-1) \cos \frac{\pi q}{2} \cos \theta + A'' \left[\Phi(q-1) \cos \frac{\pi q}{2} \sin \theta - \Phi(q) \sin \frac{\pi q}{2} \right] &= 0, \\ A' \Psi(q-1) \sin \frac{\pi q}{2} \cos \theta + A'' \left[\Psi(q-1) \sin \frac{\pi q}{2} \sin \theta + \Psi(q) \cos \frac{\pi q}{2} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(q) &= (1-\nu)\rho^2 \sin(q+2)\theta + \nu_2 \sin q\theta; \quad \rho = |s_{1,2}|; \\ \Phi(q) &= (1-\nu)\rho^2 \sin(q+3)\theta + (\nu_2 - (1-\nu)\mu_2 s_0^2 \rho^4) \sin(q+1)\theta - \\ &\quad - \nu_2 \mu_2 s_0^2 \rho^2 \sin(q-1)\theta. \end{aligned}$$

Из условия существования нетривиального решения однородной линейной системы (10), для определения показателя степени q получается трансцендентное уравнение

$$\Psi(q)\Phi(q-1)\cos^2(\pi q/2) + \Psi(q-1)\Phi(q)\sin^2(\pi q/2) = 0. \quad (11)$$

Согласно (10), для отношения вещественной и мнимой частей коэффициентов A_p выполняется асимптотическое соотношение

$$\frac{A'}{A''} = -\operatorname{tg} \theta - \frac{\Psi(q)}{\Psi(q-1)} \operatorname{ctg} \frac{\pi q}{2} \sec \theta = -\operatorname{tg} \theta + \frac{\Phi(q)}{\Phi(q-1)} \operatorname{tg} \frac{\pi q}{2} \sec \theta. \quad (12)$$

Упругие свойства и показатель q для трех транстропных материалов даны в табл. 1. Исследования показали, что для транстропных материалов рассматриваемой группы $q \in (-1; -0,5)$.

Первые пять коэффициентов для тех же материалов даны в табл. 2. При этом $a = \operatorname{Re} A_0$,

$b = \operatorname{Im} A_0$. Из данных табл. 2 следует, что, чем ближе q к границам интервала $(-1; -0,5)$, тем медленнее $\operatorname{Re} A_p$ и $\operatorname{Im} A_p$ стремятся к константе.

Таблица 1

Материал	ν	ν_z	ν_2	s_0^2	q
CoNi	0,693	1,950	0,225	0,294	-0,5110
TiB ₂	0,163	0,292	0,189	0,560	-0,7672
Гранит	0,200	0,040	0,049	0,926	-0,9211

Таблица 2

Материал	CoNi		TiB ₂		Гранит	
	$\operatorname{Re} A_p$	$\operatorname{Im} A_p$	$\operatorname{Re} A_p$	$\operatorname{Im} A_p$	$\operatorname{Re} A_p$	$\operatorname{Im} A_p$
0	0,025	-0,137	-0,009	-0,290	-0,065	-0,673
1	-1,778	-0,059	-0,173	0,759	1,836	2,750
2	-0,375	-0,304	-0,229	0,713	1,265	3,080
3	-0,004	-0,230	-0,245	0,694	1,010	3,200
4	0,111	-0,165	-0,252	0,684	0,857	3,241
...
8	0,102	-0,057	-0,263	0,666	0,572	3,423
9	0,082	-0,047	-0,264	0,665	0,532	3,425

Исследование сходимости рядов. Полученная асимптотика коэффициентов A_p позволяет исследовать сходимость рядов. Подстановка (9) в (3) приводит в конечном итоге к следующим оценкам:

$$w \sim K_w(z) \sum_{p=1}^{\infty} p^{q-1} e^{-\alpha p^{-2} p(1-r)/h}, \quad u \sim K_u(z) \sum_{p=1}^{\infty} p^{q-1} e^{-\alpha p^{-2} p(1-r)/h}. \quad (13)$$

Здесь $|K_u(z)| < K_1$ и $|K_w(z)| < K_1$, $K_1 = \text{const}$. Выражения самих функций $K_u(z)$ и $K_w(z)$, в виду их громоздкости, не приводим.

Таким образом, сходящийся числовой ряд $K_1 \sum_{p=1}^{+\infty} p^{q-1}$ является мажорирующим для функциональных рядов (13), входящих в перемещение (3). Следовательно, последние сходятся всюду равномерно.

Для компонент тензора напряжений аналогичным образом получаем

$$\sigma_{ij} \sim \Phi_{ij}(z) \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} \sin \pi z \left(p - \frac{3}{4} \right) p^q e^{-\alpha p^{-2} p(1-r)/h} +$$

$$+ \Psi_{ij}(z) \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} \cos \pi z \left(p - \frac{3}{4} \right) p^q e^{-\alpha p^{-2} p(1-r)/h} \quad i, j = r, \theta, z. \quad (14)$$

Здесь $\Psi_{ij}(0)=0$, $|\Phi_{ij}(z)| < K_2$, $|\Psi_{ij}(z)| < K_2$, $K_2 = const$. Внутри цилиндра и на его торцах ряды в (14) мажорируются бесконечно убывающей геометрической прогрессией. Значит, при $r \neq 1$ ряды, входящие в компоненты тензора напряжений σ_{ij} , сходятся равномерно. На боковой поверхности согласно признаку Абеля-Дирихле эти ряды сходятся условно везде, за исключением линии излома граничной поверхности. Заметим, что такой результат в случае изотропных тел не имеет места [4].

Численные исследования НДС. В табл. 3–4 для цилиндрических тел, изготовленных соответственно из первых двух материалов табл. 1, приведены значения величин осевых перемещений w/Q в случае кубообразного цилиндра. В первых строчках приведены результаты вычислений пере-

Таблица 3

z	r				
	0	0,2	0,4	0,6	0,8
0	0,237	0,229	0,205	0,169	0,115
	0,231	0,222	0,199	0,164	0,111
0,2	0,232	0,223	0,198	0,160	0,105
	0,225	0,217	0,192	0,155	0,102
0,4	0,215	0,205	0,178	0,135	0,079
	0,209	0,200	0,173	0,131	0,076
0,6	0,185	0,176	0,147	0,100	0,043
	0,181	0,172	0,144	0,098	0,041
0,8	0,143	0,134	0,107	0,063	0,011
	0,140	0,131	0,105	0,062	0,010
1,0	0,083	0,076	0,055	0,024	-
	0,083	0,076	0,055	0,025	0,007

Таблица 4

z	r				
	0	0,2	0,4	0,6	0,8
0,0	0,259	0,245	0,205	0,145	0,075
	0,264	0,250	0,209	0,149	0,077
0,2	0,274	0,260	0,217	0,154	0,079
	0,280	0,265	0,222	0,157	0,081
0,4	0,319	0,303	0,255	0,181	0,091
	0,325	0,308	0,260	0,185	0,093
0,6	0,388	0,370	0,317	0,230	0,115
	0,393	0,375	0,323	0,235	0,119
0,8	0,468	0,451	0,397	0,304	0,163
	0,473	0,456	0,402	0,310	0,171
1,0	0,547	0,530	0,479	0,390	0,251
	0,551	0,535	0,484	0,395	0,261

мещений по коэффициентам, установленным из редуцированной системы (5), во вторых – по коэффициентам, помещенным в табл. 2. В обоих случаях количество пар неизвестных коэффициентов $N=5$. Выбор значения для N осуществлен на основании численных экспериментов.

На рис. 1 изображены результаты проверки граничных условий на боковой поверхности гранитного кубообразного цилиндра. Линия 1 построена для решения, соответствующего коэффициентам, помещенным в табл. 2. Кривые 2–5 соответствуют случаям, когда в решении редуцированной системы (5) оставляется соответственно 5 ($N=5$), 10 ($N=10$), 20 ($N=20$) и 40 ($N=40$) коэффициентов. Из описанных данных следует, что выделение особенностей позволяет при минимальных вычислительных затратах определять характеристики НДС достаточно точно. При этом нужно использовать решение конечной системы с 8 неизвестными. Аналогичные резуль-

таты для перемещений можно получить и без выделения особенности, но

при этом необходимо рассматривать системы с 40 и более неизвестными. Можно также заметить, что для некоторых материалов эффект затухания перемещений в глубине кубообразных и коротких цилиндров слабо выражен. Достаточно пронаблюдать за прогибами цилиндра, изготовленного из CoNi.

На рис. 2, 3 представлены изолинии напряжений σ_{rr}/Q , возникающих в цилиндрическом теле, изготовленном из материалов $BaTiO_3$ ($\nu=0,364$, $\nu_z=0,288$, $\nu_2=0,238$, $s_0^2=0,82$) (рис. 2) и $InSe$ ($\nu=0,042$, $\nu_z=0,3$, $\nu_2=0,799$, $s_0^2=1,917$) (рис. 3). Вычисления проводились для кубообразного цилиндра (рис. 2,а и 3,а) и для толстой плиты с $h=0,25$ (рис. 2,б, 3,б). Из рис. 2, 3 видно, что с ростом толщины наблюдается эф-

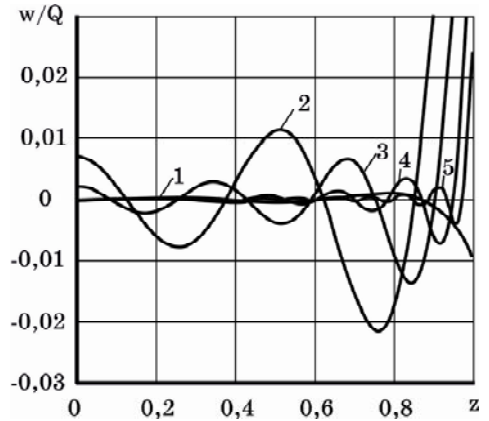


Рис. 1

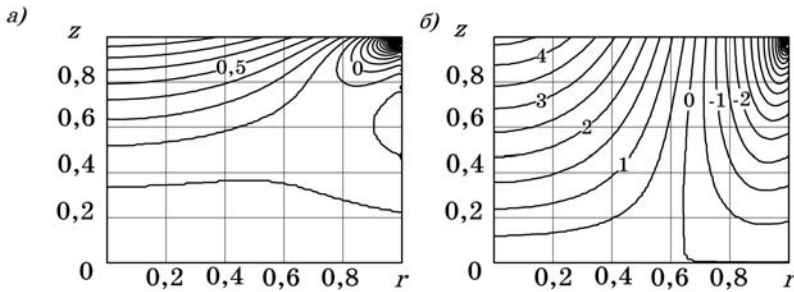


Рис. 2

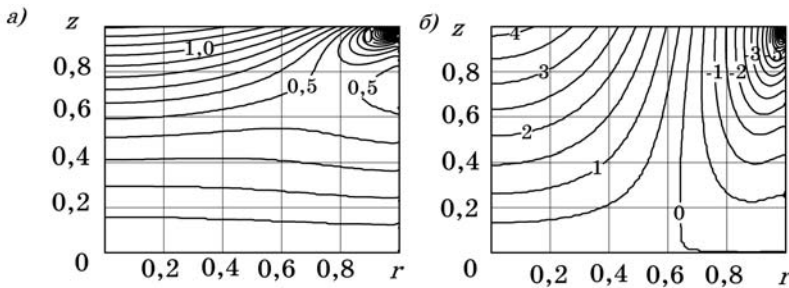


Рис. 3

фект разгрузки срединной поверхности. Этот эффект тем меньше, чем больше разброс упругих модулей по значениям. Для коротких цилиндров увеличение модулей в плоскости изотропии приводит к увеличению на-

пряжений в несколько раз. Для всех материалов в кубообразном цилиндре у боковой поверхности области характерно появление положительных напряжений.

РЕЗЮМЕ. З використанням методу однорідних розв'язків типу Лур'є-Воровича побудовано розв'язок змішаної задачі згину товстої транстропної плити та короткого циліндру. Описано результати чисельних експериментів.

Ключові слова: транстропний, кубоподібний циліндр, змішана гранична задача, сингулярні напруження.

SUMMARY. By use of the Lur'e-Vorovitch homogeneous solutions the solution for mixed problem of transtropic cylindrical thick plate bending and short cylinder bending was built. The results of numerical experiments were given.

Keywords: transtropic, cubical cylinder, mixed boundary value problem, singular stresses.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Аксентян О. К.* Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 31, № 1. – С. 178–186.
2. *Буланов Г. С., Шалдырван В. А.* К улучшению сходимости метода однородных решений // Прикладная математика и механика. – 1980. – Т. 44, № 5. – С. 957–960.
3. *Буланов Г. С., Шалдырван В. А.* О методе однородных решений в задачах со смешанными граничными условиями // Прикладная механика. – 1989. – Т. 25, № 9. – С. 57–61.
4. *Васильев Т. А.* Вдосконалені алгоритми застосування однорідних розв'язків шиффа-прокоповав задачах деформування коротких циліндрів // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2009. – Вип. 7. – С. 191–203.
5. *Васильев Т. А.* Изгиб транстропных цилиндрических тел с шарнирно закрепленной боковой поверхностью // Вісн. Донец. ун-ту, Сер. А: Природн. науки. – 2005. – Вип. 2, ч. 1. – С. 43–47.
6. *Космодамианский А. С., Шалдырван В. А.* Толстые многосвязные пластины. – К.: Наук. думка, 1980. – 240 с.
7. *Шалдырван В. А., Васильев Т. А.* Исследование смешанных задач изгиба кругового цилиндра с помощью решений Лурье-Воровича // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – № 2. – С. 49–62.
8. *Шалдырван В. А., Васильев Т. А.* О некоторых смешанных задачах изгиба транстропных цилиндрических тел // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 8. – С. 58–64.
9. *Sinclair G. B.* Stress singularities in classical elasticity – II: Asimptotic identification // Appl. Mech. Rev. – 2004. – Vol. 57, № 5. – P. 385–439.

Донецкий национальный университет

Поступила 16.02.2012

УДК 539.3

Г. С. КИТ, д-р физ.-мат. наук,
О. П. СУШКО, канд. физ.-мат. наук

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛА С ТЕПЛОАКТИВНЫМ ТОНКИМ ЖЕСТКИМ ДИСКОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Решена задача термоупругости для тела с абсолютно жестким теплоактивным (тепловыделяющим) включением в форме тонкого диска. На включении задана температура или тепловой поток и при нагреве оно не деформируется. Задача сведена к решению двух сингулярных интегральных уравнений с полярными и гиперсингулярными ядрами, из которых определяются действующие на тело со стороны включения усилия. Для кругового включения указана методика точного решения уравнений, правая часть которых есть полином. Приведен пример, когда на включении задано линейное распределение температуры.

Ключевые слова: тонкое жесткое включение, тепловыделение, теплопроводность, термоупругость.

Наряду с трещинами тонкие инородные включения являются объектами сосредоточения напряжений, для которых введены актуальные с точки зрения механики разрушения понятия коэффициентов их интенсивности. Такие включения являются концентраторами напряжений и в окрестности их острия начинаются процессы разрушения из-за образования полос скольжения и микротрещин, а поле напряжений имеет сингулярность типа квадратного корня.

Исследованию плоских задач теории упругости для тела с жесткими линейными включениями посвящено много работ [1, 7]. Значительно меньше имеется работ в области пространственных задач для тела с плоскими жесткими включениями. Отметим работу [9], в которой с использованием двумерных сингулярных интегральных уравнений решается задача для трансверсально-изотропного тела с абсолютно жестким эллиптическим включением.

В данной работе решаются задачи стационарной теплопроводности и термоупругости для тела с теплоактивным жестким тонким включением, на котором задана температура или тепловой поток.

Постановка и интегральные уравнения задачи. Рассмотрим упругое изотропное тело с тонким абсолютно жестким плоским включением Ω , из которого осуществляется тепловыделение. Включение при нагревании не расширяется и на границе его соединения с телом имеют место условия идеального теплового и механического контактов. Вследствие малой толщины диска граничные условия из его поверхности перенесем на срединную область S . Выберем в центре этой области систему декартовых координат $Ox_1x_2x_3$ с осью Ox_3 , перпендикулярной к плоскости S ($x_3=0$).

Обусловленное тепловыделением стационарное температурное поле представим через ньютоновский потенциал простого слоя с плотностью

$w(x_1, x_2)$ в виде [3, 5]

$$T(x^*) = \frac{1}{4\pi\lambda} \iint_S \frac{w(\xi)}{R(x^*, \xi)} d_\xi S, \quad x^* = (x_1, x_2, x_3), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2), \quad (1)$$

$$R(x^*, \xi) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2}, \quad (2)$$

где λ – коэффициент теплопроводности; $w(\xi)$ – интенсивность тепловых источников в области S . По представлению (1), задавая различные выражения для функции $w(x_1, x_2)$, можно найти значения температуры в произвольной точке тела.

Перемещения в теле с включением представим в виде суммы

$$u_i(x^*) = u_i^T(x^*) + u_i^P(x^*) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3)$$

в которой $u_i^T(x^*)$ – перемещения в теле без включения, обусловленные тепловыделением; $u_i^P(x^*)$ – перемещения, обусловленные наличием включения.

Перемещения $u_i^T(x^*)$ в произвольной точке тела, вызванные расположенными в области S источниками тепла интенсивности $w(\xi)$, представим выражениями [6]

$$u_i^T(x^*) = \frac{m}{8\pi\lambda} \iint_S \frac{w(\xi)(x_i - \xi_i)}{R(x^*, \xi)} d_\xi S \quad (i = 1, 2, 3), \quad m = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_t, \quad (4)$$

где α_t , ν – коэффициенты линейного теплового расширения и Пуассона. Соотношения (4) с учетом выражения (1) запишем еще в виде

$$u_i^T(x^*) = \frac{mx_i}{2} T(x^*) - \frac{m}{8\pi\lambda} \iint_S \frac{\xi_i w(\xi)}{R(x^*, \xi)} d_\xi S. \quad (5)$$

Перемещения $u_{ij}^P(x^*)$ ($i=1, 2, 3$), вызванные усилиями $p_j(\xi)$ ($j=1, 2$), действующими на тело со стороны включения в направлении осей x_j и приложенными в точке $\xi = (\xi_1, \xi_2, 0)$, с использованием тензора перемещений Грина и формул Сомильяны можно записать в виде [6]

$$u_{ij}^P(x^*) = \frac{1}{8\pi G} \left\{ \iint_S \frac{\delta_{ij} p_j(\xi)}{R(x^*, \xi)} d_\xi S - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^2 \iint_S p_j(\xi) \frac{\partial R(x^*, \xi)}{\partial x_j} d_\xi S \right\}, \quad (6)$$

в котором G – модуль сдвига.

Распределения температуры и перемещений $u_i^T(x)$ и $u_i^P(x)$ в плоскости области S определяются соответственно формулами (1), (5) и (6) при $x_3 = 0$:

$$T(x) = \frac{1}{4\pi\lambda} \iint_S \frac{w(\xi)}{R(x, \xi)} d_\xi S, \quad x = x(x_1, x_2, 0)^*, \quad (7)$$

$$u_i^T(x) = \frac{mx_i}{2} T(x) - \frac{m}{8\pi\lambda} \iint_S \frac{\xi_i w(\xi)}{R(x, \xi)} d_\xi S, \quad (8)$$

$$u_i^P(x) = \frac{1}{8\pi G} \left\{ \iint_S \frac{p_i(\xi)}{R(x, \xi)} d_\xi S - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_S \left[p_1(\xi) \frac{x_1 - \xi_1}{R(x, \xi)} + p_2(\xi) \frac{x_2 - \xi_2}{R(x, \xi)} \right] d_\xi S \right\} \quad (i = 1, 2). \quad (9)$$

Если в области тепловыделения известна температура $T(x)$, то выражение (7) служит для определения обуславливающих ее источников тепла.

На включении при $x_3 = 0$ суммарные перемещения $u_i(x) = 0$, поэтому с учетом выражений (3) и (9) приходим к сингулярным интегральным уравнениям для определения усилий $p_1(\xi)$ и $p_2(\xi)$:

$$\iint_S \frac{p_i(\xi)}{R(x, \xi)} d_\xi S - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_S \left[p_1(\xi) \frac{x_1 - \xi_1}{R(x, \xi)} + p_2(\xi) \frac{x_2 - \xi_2}{R(x, \xi)} \right] d_\xi S = -8\pi G u_i^T(x) \quad (i = 1, 2), \quad x \in S. \quad (10)$$

Эти уравнения совпадают с приведенными в работе [8].

Решение интегральных уравнений. Для решения системы интегральных уравнений (10) после определения мощности источников тепла $w(\xi)$ по формулам (7) сначала необходимо найти перемещения $u_i^T(x)$. Ниже ограничимся поиском решений для кругового включения, когда правая часть уравнений является полиномом.

Запишем решение интегрального уравнения (7) в виде [2]

$$w(\xi) = \frac{\psi(\xi)}{\sqrt{L(\xi)}}, \quad L(\xi) = a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2. \quad (11)$$

Рассмотрим случай, когда функции $T(x)$ и $\psi(\xi)$ представляются полиномами второй степени:

$$T(x) = \sum_{i,j=0}^2 t_{ij} x_1^i x_2^j, \quad \psi(\xi) = \frac{4\lambda}{\pi} \sum_{i,j=0}^2 c_{ij} \xi_1^i \xi_2^j, \quad i + j \leq 2. \quad (12)$$

Подставив выражения (11), (12) в формулы (7) и вычислив интегралы

$$I_{ij}(x) = \frac{1}{\pi^2} \iint_S \frac{\xi_1^i \xi_2^j}{\sqrt{L(\xi)} R(x, \xi)} d_\xi S \quad (i, j = 0, 1, 2), \quad (13)$$

найдем

$$\begin{aligned} I_{00}(x) &= 1, & I_{10}(x) &= \frac{x_1}{2}, & I_{20}(x) &= \frac{4a^2 + 5x_1^2 - x_2^2}{16}, \\ I_{01}(x) &= \frac{x_2}{2}, & I_{11}(x) &= \frac{3x_1x_2}{8}, & I_{02}(x) &= \frac{4a^2 - x_1^2 + 5x_2^2}{16}. \end{aligned} \quad (14)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x_1 и x_2 , найдем систему алгебраических уравнений, после решения которой получим

$$\begin{aligned} c_{00} &= t_{00} - a^2(t_{20} + t_{02}), & c_{10} &= 2t_{10}, & c_{20} &= \frac{2}{3}(5t_{20} + t_{02}), \\ c_{01} &= 2t_{01}, & c_{11} &= \frac{8}{3}t_{11}, & c_{02} &= \frac{2}{3}(t_{20} + 5t_{02}). \end{aligned} \quad (15)$$

Для определения в области S перемещений $u_i^T(x)$ ($i = 1, 2$) необходимо вычислить интегралы вида

$$I_{12}(x) = \frac{2a^2x_1 - x_1^3 + 9x_1x_2^2}{32}, \quad I_{30}(x) = \frac{6a^2x_1 + 7x_1^3 - 3x_1x_2^2}{32}. \quad (16)$$

Выражения для $I_{21}(x)$ и $I_{03}(x)$ получаем из приведенных выше заменой $x_1 \leftrightarrow x_2$. Тогда

$$u_i^T(x) = \frac{mx_i}{2} T(x) - \frac{m}{2} I_i(x) \quad (i = 1, 2), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \frac{1}{2}c_{00}x_1 + \frac{4a^2 + 5x_1^2 - x_2^2}{16}c_{10} + \frac{3}{8}x_1x_2c_{01} + \frac{2a^2x_2 - x_2^3 + 9x_1^2x_2}{32}c_{11} + \\ &+ \frac{6a^2x_1 + 7x_1^3 - 3x_1x_2^2}{32}c_{20} + \frac{2a^2x_1 - x_1^3 + 9x_1x_2^2}{32}c_{02}. \end{aligned}$$

Выражения для $I_2(x)$ получаем из $I_1(x)$ также заменой $x_1 \leftrightarrow x_2$, $c_{ij} \leftrightarrow c_{ji}$.

Подставив первое выражения (12) и (15) в соотношение (17), получим формулы для перемещений

$$\begin{aligned} u_1^T(x) &= \frac{m}{4} \left\{ -a^2t_{10} + \left[t_{00} - \frac{a^2}{3}(t_{20} - t_{02}) \right] x_1 - \frac{a^2}{3}t_{11}x_2 + \frac{1}{2}t_{01}x_1x_2 + \right. \\ &+ \frac{3}{4}t_{10}x_1^2 + \frac{1}{4}t_{10}x_2^2 + \frac{1}{4}(t_{20} + t_{02})x_1x_2^2 + \frac{1}{2}t_{11}x_1^2x_2 + \\ &\left. + \frac{1}{12}(7t_{20} - t_{02})x_1^3 + \frac{1}{6}t_{11}x_2^3 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2^\top(x) = \frac{m}{4} & \left\{ -a^2 t_{01} - \frac{a^2}{3} t_{11} x_1 + \left[t_{00} + \frac{a^2}{3} (t_{20} - t_{02}) \right] x_2 + \frac{1}{2} t_{10} x_1 x_2 + \right. \\
& + \frac{1}{4} t_{01} x_1^2 + \frac{3}{4} t_{01} x_2^2 + \frac{1}{2} t_{11} x_1 x_2^2 + \frac{1}{4} (t_{20} + t_{02}) x_1^2 x_2 + \\
& \left. + \frac{1}{6} t_{11} x_1^3 - \frac{1}{12} (t_{20} - 7t_{02}) x_2^3 \right\}. \tag{18}
\end{aligned}$$

Решение сингулярных интегральных уравнений (10) ищем в виде

$$\rho_i(\xi) = \frac{8G}{\pi} \frac{\varphi_i(\xi)}{\sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}} \quad (i = 1, 2). \tag{19}$$

Рассмотрим случай, когда $u_i^\top(x)$ и $\varphi_i(\xi)$ ($i = 1, 2$) представлены полиномами второй степени

$$u_1^\top(x) = \sum_{i,j=0}^2 d_{ij} x_1^i x_2^j, \quad u_2^\top(x) = \sum_{i,j=0}^2 g_{ij} x_1^i x_2^j, \quad i + j \leq 2, \tag{20}$$

$$\varphi_1(\xi) = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij} \xi_1^i \xi_2^j, \quad \varphi_2(\xi) = \sum_{i,j=0}^2 b_{ij} \xi_1^i \xi_2^j. \tag{21}$$

Подставим соотношения (19)–(21) в систему уравнений (10), используем формулы для интегралов (14), (16) и продифференцируем полученные выражения. Тогда для определения неизвестных коэффициентов a_{ij} и b_{ij} имеем систему линейных алгебраических уравнений, решением которой получаем

$$a_{00} = -\frac{4(1-\nu)}{7-8\nu} \left[d_{00} - \frac{a^2(11-12\nu)}{3(3-4\nu)} d_{20} \right] + \frac{2a^2(5-6\nu)}{3(7-8\nu)} d_{02} + \frac{a^2}{3(3-4\nu)} g_{11},$$

$$a_{10} = -\frac{2(1-\nu)}{(3-4\nu)(7-8\nu)} [(13-16\nu)d_{10} + g_{01}],$$

$$a_{01} = -\frac{1}{2(7-8\nu)} [(15-16\nu)d_{01} + g_{10}],$$

$$a_{11} = -\frac{1}{3(7-8\nu)} \left[\frac{(97-224\nu+128\nu^2)}{3-4\nu} d_{11} + 2g_{20} + \frac{8(1-\nu)}{3-4\nu} g_{02} \right],$$

$$a_{20} = -\frac{1}{3(7-8\nu)} \left[\frac{8(17-20\nu)(1-\nu)}{3-4\nu} d_{20} + 2(3-4\nu)d_{02} + \frac{11-12\nu}{3-4\nu} g_{11} \right],$$

$$a_{02} = -\frac{2}{3(7-8\nu)} \left[\frac{16(1-\nu)^2}{3-4\nu} d_{20} + 2(9-10\nu)d_{02} + \frac{(5-6\nu)}{3-4\nu} g_{11} \right],$$

$$\begin{aligned}
b_{00} &= -\frac{4(1-v)}{7-8v} \left[g_{00} - \frac{a^2(11-12v)}{3(3-4v)} g_{02} \right] + \frac{2a^2(5-6v)}{3(7-8v)} g_{20} + \frac{a^2}{3(3-4v)} d_{11}, \\
b_{10} &= -\frac{1}{2(7-8v)} [(15-16v)g_{10} + d_{01}], \\
b_{01} &= -\frac{2(1-v)}{(3-4v)(7-8v)} [(13-16v)g_{01} + d_{10}], \\
b_{11} &= -\frac{1}{3(7-8v)} \left[\frac{97-224v+128v^2}{3-4v} g_{11} + 2d_{02} + \frac{8(1-v)}{3-4v} d_{20} \right], \\
b_{20} &= -\frac{2}{3(7-8v)} \left[\frac{16(1-v)^2}{3-4v} g_{02} + 2(9-10v)g_{20} + \frac{(5-6v)}{3-4v} d_{11} \right], \\
b_{02} &= -\frac{1}{3(7-8v)} \left[\frac{8(1-v)(17-20v)}{3-4v} g_{02} + 2(3-4v)g_{20} + \frac{11-12v}{3-4v} d_{11} \right]. \quad (22)
\end{aligned}$$

По формулам (19), (21) и (22) находим выражения для усилий $p_i(\xi)$.

Для произвольной правой части решение интегральных уравнений (10) можно получить численно-аналитически путем регуляризации этих уравнений и построения их дискретного аналога [4].

Анализ результатов исследований. Зададим на включении линейное распределение температуры

$$T(x) = t_{00} + t_{10}x_1 + t_{01}x_2. \quad (23)$$

Тогда перемещения $u_i^T(x)$, вызванные расположенными в области S источниками тепла, с учетом формул (18) запишем так:

$$\begin{aligned}
u_1^T(x) &= \frac{m}{4} \left\{ -a^2 t_{10} + t_{00} x_1 + \frac{1}{2} t_{01} x_1 x_2 + \frac{3}{4} t_{10} x_1^2 + \frac{1}{4} t_{10} x_2^2 \right\}, \\
u_2^T(x) &= \frac{m}{4} \left\{ -a^2 t_{01} + t_{00} x_2 + \frac{1}{2} t_{10} x_1 x_2 + \frac{1}{4} t_{01} x_1^2 + \frac{3}{4} t_{01} x_2^2 \right\}. \quad (24)
\end{aligned}$$

На основании формул (19), (21), (22) определяем касательные усилия

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= \frac{8mG}{3\pi\sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2}} \frac{(1-v)}{(3-4v)} \left[Aa^2 t_{10} - 3t_{00} x_1 - \right. \\
&\quad \left. - 2t_{01} x_1 x_2 - 4t_{10} x_1^2 - 2t_{10} x_2^2 \right], \quad A = \frac{4(5-6v)}{7-8v}, \\
p_2(x) &= \frac{8mG}{3\pi\sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2}} \frac{(1-v)}{(3-4v)} \left[Aa^2 t_{01} - 3t_{00} x_2 - \right. \\
&\quad \left. - 2t_{10} x_1 x_2 - 2t_{01} x_1^2 - 4t_{01} x_2^2 \right]. \quad (25)
\end{aligned}$$

Для механики разрушения особый интерес представляют коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) поперечного K_2 и продольного K_3 сдвига в окрестности включения, которые, как функции угловой координаты θ точки его контура, даются формулами

$$\begin{aligned} K_2(\theta) &= \frac{8G}{\sqrt{\pi a}} [\varphi_1(\theta) \cos \theta + \varphi_2(\theta) \sin \theta], \\ K_3(\theta) &= \frac{8G}{\sqrt{\pi a}} [\varphi_1(\theta) \sin \theta - \varphi_2(\theta) \cos \theta]. \end{aligned} \quad (26)$$

Из формул (26) с учетом выражений (21), (24) и (22) после перехода к безразмерным величинам находим

$$\begin{aligned} K_2(\theta) &= -D \sqrt{\frac{a}{\pi}} [3t_{00} - (A - 4)(t_{10} \cos \theta + t_{01} \sin \theta)], \\ K_3(\theta) &= -D(A - 2) \sqrt{\frac{a}{\pi}} (t_{01} \cos \theta - t_{10} \sin \theta), \\ D &= \frac{8G\alpha_t(1 + \nu)}{3(3 - 4\nu)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Из соотношений (27) следует, что при нагреве включения постоянной температурой t_{00} КИН K_2 не зависит от угла θ . Если $t_{10} = t_{01}$, то

$$\text{КИН } K_2 = 0 \text{ при } \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \text{ а КИН } K_3 = 0 \text{ при } \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}.$$

РЕЗЮМЕ. Розв'язана задача термопружності для тіла з абсолютно жорстким теплоактивним (тепловидільним) включенням в формі тонкого диска. На включенні задана температура або тепловий потік і при нагріві воно не деформується. Задача зведена до розв'язування двох сингулярних інтегральних рівнянь з полярними і гіперсингулярними ядрами, з яких визначаються зусилля, що діють на тіло зі сторони включення. Для кругового включення вказана методика точного розв'язку рівнянь, права частина яких є поліном. Наведено приклад, коли на включенні задано лінійний розподіл температури.

Ключові слова: тонке жорстке включення, тепловиділення, теплопровідність, термопружність.

SUMMARY. The thermoelasticity problem for a body with perfectly rigid heat-active (heat-generating) inclusion of thin disc shape has been solved. The temperature or heat flow are given on the inclusion and it does not deform in the process of heating. The problem is reduced to solving of two singular integral equations with polar and hyper-singular kernels from which the forces acting on the body from the inclusion side have been determined. For a circular inclusion the procedure of exact solution of the equations, the right-hand part of which is a polynomial, has been proposed. The example for the case when the temperature linear distribution on the inclusion has been given.

Key words: thin rigid inclusion, heat release, heat conductivity, thermoelasticity.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бережницький Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. – К.: Наук. думка, 1983. – 288 с.
2. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1953. – 264 с.

3. *Kit G. S.* Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тепловиділенням на круговій області (тріщині) // *Мат. мет. і фіз.-мех. поля.* – 2008. – N 51, № 4. – С. 120–128.

4. *Kit G. S., Михаськів В. В., Хай О. М.* Анализ установившихся колебаний плоского абсолютно жесткого включения в трехмерном упругом теле методом граничных элементов // *Прикладная математика и механика.* – 2002. – Т. 66, вып. 6. – С. 855–863.

5. *Kit G. S., Хай М. В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1989. – 284 с.

6. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

7. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.

8. *Хай М. В.* Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения. – К.: Наук. думка, 1993. – 253 с.

9. *Rahman M.* Some problems of a rigid elliptical disk-inclusion bonded inside a transversely isotropic space // *Trans. ASME.* – 1999. – Vol. 66. – P. 612–630.

*Ин-т прикладных проблем механики
и математики НАН Украины, г. Львов*

Поступила 09.04.2012

УДК 539.3

А. Р. ГАЧКЕВИЧ, д-р физ.-мат. наук,
 М. Т. СОЛОДЯК, канд. физ.-мат. наук,
 Р. А. ИВАСЬКО, канд. физ.-мат. наук,
 Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук

СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ С ФЕРРОМАГНИТНЫМ ТЕЛОМ

С использованием статистического подхода и формализма введения эквивалентных натяжений получены выражения для плотностей пондеромоторных (объемных) и поверхностных сил и моментов сил. Показано, что при исследовании механических явлений наличие объемного момента сил может быть учтено несимметричным тензором напряжений.

Ключевые слова: электромагнитное поле, пондеромоторная сила, момент сил, тензор натяжений Максвелла, несимметричный тензор напряжений

Силовое воздействие электромагнитного поля (ЭМП) на ферромагнитное тело при параллельности векторов смещения \mathbf{B} и напряженности \mathbf{H} магнитного поля сводят к пондеромоторной силе \mathbf{F} [1–3, 5, 8, 9, 11]. При работе различных электротехнических устройств могут возникать ЭМП, приводящие к неизотропности (относительно электромагнитных свойств) изначально изотропных материалов. В частности, при изучении ферромагнитного резонанса или магнитостатических колебаний и волн векторы \mathbf{B} и \mathbf{H} часто рассматривают связанными уравнением движения вектора намагничивания $\mathbf{M} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{H}$ (уравнением гиромагнитных колебаний в форме Гильберта) [5]

$$\dot{\mathbf{M}} = -\gamma_s \mathbf{M} \times \mathbf{H} + \alpha_s \mathbf{M} \times \dot{\mathbf{M}}/M, \quad (1)$$

где $\gamma_s = g_0 \mu_0 e_e / 2m_e$ – магнитомеханическое (гиромагнитное) отношение; g – фактор Ланде; e_e и m_e – соответственно заряд и масса электрона; α_s – параметр потерь. В этом случае, а также при рассмотрении анизотропии намагничивания, векторы \mathbf{B} и \mathbf{H} уже нельзя считать параллельными, что приводит к наличию дополнительных факторов воздействия: поверхностных \mathbf{N}^Σ и объемных \mathbf{N} моментов и поверхностных сил \mathbf{f}^Σ .

В литературе широко используют статистическую модель электро-механического взаимодействия поля с поляризуемой и намагничиваемой средой [1]. В ней предполагают, что материальный континуум состоит из устойчивых групп электрически заряженных движущихся микроскопических частиц – носителей заряда (электронов, ионов и т.п.). Влияние поля этих частиц в границах каждой устойчивой группы представляют электрическими и магнитными мультиполями. Макроскопические поля в материальной среде определяют путем статистического усреднения мик-

роскопических полей, созданных этими группами носителей заряда. Результатом такого подхода является следующее выражение для пондеромоторной силы, действующей на единицу объема среды [1, 9–11]

$$\mathbf{F} = \Omega \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + (\nabla \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P} + (\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{M} \equiv \Omega \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{P} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{B}). \quad (2)$$

Здесь \mathbf{E} – напряженность электрического поля, \mathbf{P} – поляризация, Ω и \mathbf{J} – объемные плотности электрических заряда и тока соответственно.

Из уравнений Максвелла получают соотношение

$$\dot{\mathbf{G}} = - [\mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H})] - \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{G} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} - \quad (4)$$

плотность импульса ЭМП в среде, \mathbf{D} – смещение электрического поля. Точкой обозначена производная по времени.

Уравнение (3) записывают в виде [11]

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{T}} = \mathbf{F} + \dot{\mathbf{G}}, \quad (5)$$

в котором $\hat{\mathbf{T}}$ – тензор натяжений Максвелла, соответствующий пондеромоторной силе \mathbf{F} .

В случае пондеромоторной силы в форме (2) для тензора натяжений Максвелла будем иметь

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{E} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{H} \otimes \mathbf{B} + W \hat{\mathbf{I}}. \quad (6)$$

Здесь

$$W \equiv \mathbf{B}^2 / (2\mu_0) - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} - 1/2 \varepsilon_0 \mathbf{E}^2, \quad (7)$$

ε_0 и μ_0 – соответственно электрическая и магнитная постоянные, а символом \otimes обозначена операция диадного произведения. Для вакуума ($\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$) из соотношений (6) и (7) получим

$$\hat{\mathbf{T}}^{(0)} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - W^{(0)} \hat{\mathbf{I}}, \quad (8)$$

где $W^{(0)} \equiv 1/2 (\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2)$ – плотность энергии ЭМП в вакууме.

Рассмотрим теперь поверхностную силу. Сначала выведем общее соотношение. Для этого проинтегрируем уравнение (5) по объему тела V . Тогда, используя теорему Остроградского-Гаусса, будем иметь интегральное представление

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{T}_n d\Sigma = \int_V (\mathbf{F} + \dot{\mathbf{G}}) dV, \quad (9)$$

описывающее равновесие равнодействующих поверхностных и объемных (пондеромоторных) электромагнитных сил. Здесь Σ – замкнутая поверхность, ограничивающая объем V ; \mathbf{T}_n – сила, действующая на единицу

поверхности, внешняя нормаль к которой направлена вдоль \mathbf{n} .

Для получения связи между компонентами тензора натяжений Максвелла $\hat{\mathbf{T}}$ и составляющими силы \mathbf{T}_n рассмотрим бесконечно малый элемент объема сплошной среды, образованный тремя координатными плоскостями, определенными базисными векторами \mathbf{e}_k ($k = 1, 3$), и произвольно ориентированной единичной площадкой с внешней нормалью \mathbf{n} , проходящей через некоторую точку M среды. Тогда силу \mathbf{T}_n можно представить через вектор \mathbf{T}_k ($k = 1, 3$) на фиксированных площадках, проходящих через эту же точку M параллельно к координатным плоскостям ортогональной декартовой системы координат, посредством соотношения [8, 12]

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{T}_x \cos(\mathbf{n}, x) + \mathbf{T}_y \cos(\mathbf{n}, y) + \mathbf{T}_z \cos(\mathbf{n}, z), \quad (10)$$

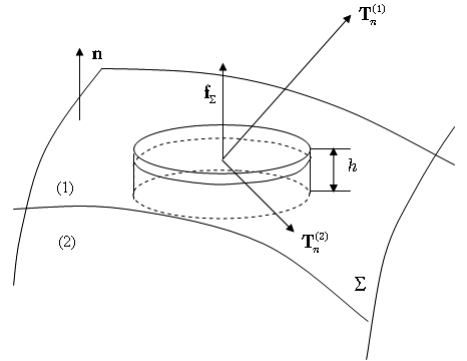
где $\cos(\mathbf{n}, k)$, $k = x, y, z$ – косинусы углов между вектором \mathbf{n} и осями x, y, z .

Выразив векторы \mathbf{T}_k ($k = x, y, z$) через векторы базиса, получим

$$\mathbf{T}_k = T_{kj} \mathbf{e}_j \quad j = x, y, z. \quad (11)$$

Здесь T_{kj} – j -ая составляющая силы \mathbf{T}_k , действующей на единичную площадку, внешняя нормаль к которой направлена вдоль оси k . Девять величин T_{kj} полностью определяют силы в рассматриваемой точке пространства, т.е. тензор натяжений $\hat{\mathbf{T}} = \{T_{kj}\}$ определяет силу \mathbf{T}_n , действующую на произвольную площадку с нормалью \mathbf{n} , при помощи соотношения $\mathbf{T}_n = \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{T}}$.

Исходя из интегрального соотношения (9), запишем условия, которым удовлетворяют функции \mathbf{T}_n , \mathbf{F} и $\dot{\mathbf{G}}$ на границе раздела сред (границе тела) Σ . Применим подход, используемый в электродинамике для получения условий сопряжения векторов ЭМП на границе раздела [12]. В качестве объема V выберем бесконечно малый цилиндр с основанием Σ_0 и высотой h , верхний и нижний торцы которого лежат, соответственно, в средах 1 и 2 (рисунок). Поскольку цилиндр мал и можно принять, что величины на соответствующих поверхностях и плоскостях имеют постоянные значения, то балансовое соотношение (9), при наличии поверхностной силы плотностью \mathbf{f}^Σ на границе раздела, принимает вид



$$\begin{aligned} \mathbf{T}_n^{(1)} \Sigma_0 - \mathbf{T}_n^{(2)} \Sigma_0 + \langle \mathbf{T}_n^{(1)} \rangle lh/2 + \langle \mathbf{T}_n^{(2)} \rangle lh/2 = \\ = (\mathbf{F}^{(1)} + \dot{\mathbf{G}}^{(1)}) \Sigma_0 h/2 + (\mathbf{F}^{(2)} + \dot{\mathbf{G}}^{(2)}) \Sigma_0 h/2 + \mathbf{f}^\Sigma \Sigma_0, \end{aligned} \quad (12)$$

где \mathbf{n} – нормаль к поверхности раздела; l – длина окружности основания; $\langle \mathbf{T}_n^{(1)} \rangle$ и $\langle \mathbf{T}_n^{(2)} \rangle$ – усредненные (постоянные) значения \mathbf{T}_n на боковой поверхности (соответственно в первой и второй среде); \mathbf{f}^Σ – плотность поверхностной силы на границе раздела сред. При этом в соотношении (12) учтено, что правая часть является равнодействующей всех электромагнитных сил, действующих в объеме выбранного цилиндра.

Устремим $h \rightarrow 0$ при фиксированном Σ_0 и при вычислении границ составляющих в (12) учтем, что значения векторов сил $\mathbf{F}^{(1)}$, $\mathbf{F}^{(2)}$ и $\dot{\mathbf{G}}^{(1)}$, $\dot{\mathbf{G}}^{(2)}$ ограничены. Тогда $\lim_{h \rightarrow 0} (\mathbf{F}^{(j)} + \dot{\mathbf{G}}^{(j)}) \Sigma_0 h/2 = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \langle \mathbf{T}_n^{(j)} \rangle lh/2 = 0$ ($j = 1, 2$) и контактное условие получим в виде

$$\mathbf{T}_n^{(1)} - \mathbf{T}_n^{(2)} = \mathbf{f}^\Sigma. \quad (13)$$

Отметим, что при известном тензоре натяжений Максвелла в среде соотношение (13) определяет выражение поверхностной силы. Запишем это выражение для тензора натяжений вида (6). Учитывая соотношение $\mathbf{T}_n = \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{T}}$, связывающее тензор натяжений $\hat{\mathbf{T}}$ с силой \mathbf{T}_n , получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_n)_i &= n_j T_{ij} = n_j (E_i D_j + H_i B_j) + W n_j \delta_{ij} = \\ &= E_i (n_j D_j) + H_i (n_j B_j) + W n_i. \end{aligned} \quad (14)$$

Поэтому

$$\mathbf{T}_n = D_n \mathbf{E} + B_n \mathbf{H} + W \mathbf{n}, \quad (15)$$

где $D_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}$ и $B_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}$ – нормальные составляющие векторов \mathbf{D} и \mathbf{B} . Тогда по формуле (13) для поверхностной силы найдем

$$\mathbf{f}^\Sigma = D_n^{(1)} \mathbf{E}^{(1)} - D_n^{(2)} \mathbf{E}^{(2)} + B_n^{(1)} \mathbf{H}^{(1)} - B_n^{(2)} \mathbf{H}^{(2)} + (W^{(1)} - W^{(2)}) \mathbf{n}. \quad (16)$$

Разложим векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} на нормальную и тангенциальную компоненты, т.е.

$$\mathbf{E} = E_n \mathbf{n} + E_\tau \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{H} = H_n \mathbf{n} + H_\tau \boldsymbol{\tau}. \quad (17)$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}$ – соответствующий орт в касательной плоскости. Тогда для векторов поверхностных натяжений \mathbf{T}_n и силы \mathbf{f}^Σ будем иметь

$$\mathbf{T}_n = (D_n E_n + B_n H_n + W) \mathbf{n} + (D_n E_\tau + B_n H_\tau) \boldsymbol{\tau}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^\Sigma &= (D_n^{(1)} E_n^{(1)} - D_n^{(2)} E_n^{(2)} + B_n^{(1)} H_n^{(1)} - B_n^{(2)} H_n^{(2)} + \Delta W) \mathbf{n} + \\ &+ (D_n^{(1)} E_\tau^{(1)} - D_n^{(2)} E_\tau^{(2)} + B_n^{(1)} H_\tau^{(1)} - B_n^{(2)} H_\tau^{(2)}) \boldsymbol{\tau}, \end{aligned} \quad (19)$$

причем

$$\begin{aligned} \Delta W \equiv W^{(1)} - W^{(2)} = & \left((B_n^{(1)})^2 - (B_n^{(2)})^2 + (B_\tau^{(1)})^2 - (B_\tau^{(2)})^2 \right) / (2\mu_0) - \\ & - (B_n^{(1)} H_n^{(1)} - B_n^{(2)} H_n^{(2)} + B_\tau^{(1)} H_\tau^{(1)} - B_\tau^{(2)} H_\tau^{(2)}) - \\ & - \left((E_n^{(1)})^2 - (E_n^{(2)})^2 + (E_\tau^{(1)})^2 - (E_\tau^{(2)})^2 \right) \varepsilon_0 / 2. \end{aligned} \quad (20)$$

Из уравнений Максвелла при пренебрежении поверхностными плотностями электрических заряда и тока для неподвижных сред получают такие условия на границе раздела двух сред [3, 4]

$$D_n^{(1)} = D_n^{(2)}, \quad B_n^{(1)} = B_n^{(2)}, \quad E_\tau^{(1)} = E_\tau^{(2)}, \quad H_\tau^{(1)} = H_\tau^{(2)}. \quad (21)$$

С учетом условий (21) непрерывности соответствующих нормальных и касательных составляющих векторов напряженностей и смещений электрического и магнитного полей выражение (19) для поверхностной силы будет иметь вид

$$\mathbf{f}^\Sigma = \left[D_n^{(1)} (E_n^{(1)} - E_n^{(2)}) + B_n^{(1)} (H_n^{(1)} - H_n^{(2)}) + \Delta W \right] \mathbf{n}, \quad (22)$$

в котором

$$\begin{aligned} \Delta W = & \left((B_\tau^{(1)})^2 - (B_\tau^{(2)})^2 \right) / (2\mu_0) - \left[B_n^{(1)} (H_n^{(1)} - H_n^{(2)}) + \right. \\ & \left. + H_\tau^{(1)} (B_\tau^{(1)} - B_\tau^{(2)}) \right] - \left((E_n^{(1)})^2 - (E_n^{(2)})^2 \right) \varepsilon_0 / 2. \end{aligned} \quad (23)$$

Для линейно поляризующихся и (или) намагничивающихся сред, т.е. в случае, когда зависимости между смещениями и напряженностями полей описываются формулами $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$ (где ε и μ – относительные соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости), выражением для поверхностной силы будет

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^\Sigma = & 1/2 \left[\varepsilon_0 / \varepsilon_2^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) (2\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) (E_n^{(1)})^2 + \right. \\ & \left. + \mu_0 (\mu_1 - \mu_2) (\mu_1 + \mu_2 - 2) (H_\tau^{(1)})^2 \right] \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (24)$$

Для изотропных (когда векторы $\mathbf{D} \parallel \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} \parallel \mathbf{H}$) нелинейных материалов выражение для поверхностной силы имеет вид (24), в котором ε_j и μ_j ($j = 1, 2$) необходимо заменить на $\varepsilon_j(E^{(j)})$ и $\mu_j(H^{(j)})$.

Отметим, что на границе контакта двух неполяризуемых немагнитных тел или неполяризуемого немагнитного тела и вакуума (когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$) получим $\mathbf{f}^\Sigma \equiv 0$.

Как указано выше, силовое воздействие ЭМП на тело характеризуется не только пондеромоторной (объемной) \mathbf{F} и поверхностной \mathbf{f}^Σ сила-

ми, но и моментом сил \mathbf{N} .

Из определения (6) вытекает, что тензор натяжений Максвелла является несимметричным, т.е. $\hat{\mathbf{T}} \neq \hat{\mathbf{T}}^T$ (индекс T вверху обозначает операцию транспонирования). Антисимметричная часть тензора натяжений выражается через механический момент силы \mathbf{N} (внешний фактор) так [2, 6]:

$$\mathbf{N} = 1/2 \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} : (\hat{\mathbf{T}} - \hat{\mathbf{T}}^T), \quad (25)$$

где $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – тензор Леви-Чивиты; $\hat{\mathbf{a}} : \hat{\mathbf{b}} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 a_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}$ – свертка тензоров $\hat{\mathbf{a}}$ и $\hat{\mathbf{b}}$.

Подставив в соотношение (25) выражение (6), получим

$$\mathbf{N} = \mathbf{D} \times \mathbf{E} + \mathbf{B} \times \mathbf{H}. \quad (26)$$

Это выражение хорошо согласуется с результатами экспериментальных исследований [2, 6, 7].

Учитывая известные зависимости между смещениями и соответствующими напряженностями электрического и магнитного полей, момент силы \mathbf{N} можно представить так:

$$\mathbf{N} = \mathbf{P} \times \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}. \quad (27)$$

Отметим, что для изотропных материалов (когда векторы $\mathbf{D} \parallel \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} \parallel \mathbf{H}$), как следствие, получим $\mathbf{N} = 0$.

Уравнение движения механики сплошной среды при наличии моментного действия имеет вид [3, 8]

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \hat{\mathbf{t}} + \mathbf{F}, \quad (28)$$

в котором \mathbf{u} – вектор перемещений; $\hat{\mathbf{t}}$ – несимметричный тензор напряжений. В теории упругости, как правило, используют симметричный тензор напряжений $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ ($\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^T$), связанный с тензором $\hat{\mathbf{t}}$ так:

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} - 1/2 \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{N}, \quad (29)$$

где \mathbf{N} выражается зависимостью (27). Подставляя выражение (29) в формулу (28) и учитывая соотношение (5), уравнение движение запишем в виде

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot (\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \hat{\mathbf{T}}^S) - \dot{\mathbf{G}}, \quad (30)$$

причем $\hat{\mathbf{T}}^S = (\hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}}^T)/2$ – симметричная часть тензора натяжений Максвелла.

Отметим, что уравнения движения (28) и (30) эквивалентны. Это является следствием представления силы \mathbf{F} в форме (5) и очевидного соотношения $\hat{\mathbf{t}} + \hat{\mathbf{T}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \hat{\mathbf{T}}^S$.

Таким образом, задачу об определении параметров напряженного состояния электропроводного поляризуемого и (или) намагничиваемого деформируемого твердого тела можно сформулировать как относительно симметричного (как в классической теории упругости), так и несиммет-

ричного тензора напряжений. При этом учет моментного фактора силового воздействия ЭМП на среду при формулировании задачи относительно симметричного тензора напряжений приводит к возникновению дополнительных членов в уравнении движения и граничных условиях.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект Ф40.7/023, № государственной регистрации 0111U008211).

РЕЗЮМЕ. З використанням статистичного підходу та формалізму введення еквівалентних натягів отримано вирази для густин пондеромоторних (об'ємних) і поверхневих сил та моментів сил. Показано, що при дослідженні механічних явищ наявність об'ємного моменту сил може бути врахована несиметричним тензором напружень.

Ключові слова: електромагнітне поле, пондеромоторна сила, момент сил, тензор натягів Максвелла, несиметричний тензор напружень

SUMMARY. By using the statistical approach and the formalism of equivalent tensions, the expressions for the densities of ponderomotive (bulk) and surface forces and moments of forces are received. It's shown that in the study of mechanical phenomena the presence of bulk moment of forces can be considered by nonsymmetrical stress tensor.

Key words: electromagnetic field, ponderomotive force, moment of forces, Maxwell tensions tensor, nonsymmetrical stress tensor

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гроот С.Р. де, Сатторп Л.Г. Электродинамика. – М.: Наука, 1982. – 560 с.
2. Кудрявцев Б.А., Партон В.З. Магнитотермоупругость // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. – М.: ВИНТИ, 1981. – Т. 14. – С. 3–59.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 624 с.
4. Максвелл Дж.К. Избранные сочинения по теории ЭМП. – М.: Гостехиздат, 1954. – 688 с.
5. Моделювання механічних систем за дії електромагнітних навантажень / О. Гачкевич, М. Солодяк, Р. Івасько, С. Шимура // Машинознавство. – 2001. – № 12(54). – С. 8–14.
6. Поливанов К.М. Вращающий момент в электромагнитных системах и тензор механических напряжений // Изв. вузов. Электромеханика. – 1975. – Т. 1. – С. 3–10.
7. Поливанов К.М. Электродинамика движущихся тел. – М.: Энергоиздат, 1982. – 192 с.
8. Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2 т. – М.: Наука, 1983. – Т. 1. – 528 с.; 1984. – Т. 2. – 560 с.
9. Eringen A.C., Maugin G.A. Electrodynamics of continua. – New York: Springer-Verlag, 1989. – Vol. 1. – 454 p.; 1989. – Vol. 2. – 363 p.
10. Hutter K. Wave propagation and attenuation in para- or soft ferromagnetic materials – II. The influence of the direction of the magnetic field // Int. J. Eng. Sci. – 1976. – Vol. 14, № 10-A. – P. 883–894.
11. Hutter K., Ven A.A.F. van de and Ursescu A. Electromagnetic Field-Matter Interactions in Thermoelastic Solids and Viscous Fluids / Lect. Notes Phys. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. – Vol. 710. – 403 p.
12. Рава Н. Elektryczność i magnetyzm w technice. – Warszawa: PWN, 1994. – 436 s.

*Ин-т прикладных проблем механики и математики НАН Украины, г. Львов
Политехника Опольская (Польша)
Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)*

Поступила 03.04.2012

УДК 539.3

Р. Ф. ТЕРЛЕЦКИЙ, д-р физ.-мат. наук,
О. П. ТУРИЙ, канд. физ.-мат. наук, *М.Б. БРУХАЛЬ*

ЗАДАЧИ ТЕРМОМЕХАНИКИ ДЛЯ ОБЛУЧАЕМЫХ ТЕЛ

Рассмотрены особенности постановки задач термомеханики при тепловом облучении однородных и слоистых термочувствительных тел различной прозрачности.

Ключевые слова: *термомеханика, тепловое излучение, частично прозрачные и непрозрачные однородные тела, слоистые тела, термочувствительность.*

Тепловое излучение находит широкое применение в современных технологиях обработки изделий благодаря простоте его реализации и возможности получения равномерного по интенсивности поля облучения на определенной части или на всей поверхности. Элементы конструкций и приборов, особенно в космической и авиационной технике, ядерной и химической энергетике, могут находиться в условиях интенсивных тепловых нагрузений, вызванных тепловым облучением или высокотемпературным нагревом. Для сохранения их несущей способности и сплошности конструкций в целом в этих условиях необходим анализ механического поведения, обусловленного конкретным тепловым нагружением. Изучение термомеханического поведения рассматриваемых элементов при таких нагружениях невозможно без адекватного описания процессов переноса теплового излучения (как внешнего, так и собственного, обусловленного тепловым излучением материала тела), которые существенно зависят от структуры тела (в частности, его слоистости) и радиационных свойств, а также особенностей теплообмена излучением с окружающей средой. Вместе с тем, эффекты, связанные с поглощением и излучением тепловой энергии, должны быть учтены при постановке краевых задач термоупругости. Этим обусловлена необходимость постановки задач радиационной термомеханики (нового класса задач термомеханики) [6, 14].

Несмотря на электромагнитную природу теплового излучения (включает область спектра от ультрафиолетовой до дальней инфракрасной, длины волн $0,4 \div 1000$ мкм), использование для построения моделей радиационной термомеханики деформируемых твердых тел теорий взаимодействия, базирующихся на классической теории электромагнитного поля [3, 18], связано со значительными трудностями, возникающими как при описании электромагнитных свойств материалов, так и при исследовании распространения излучения пр таких длинах волн [3]. Поэтому при исследовании распространения теплового излучения и моделировании его влияния на термомеханические процессы в среде исходят из менее сложной феноменологической теории излучения (лучевой), базирующейся на законах Планка и Бугера [7, 19]. На этой теории основана методика описания теплообмена излучением в сплошной среде [14], с помощью которой исследуют тепловое состояние тел различной прозрачно-

ти при учете процессов поглощения и излучения ими тепловой энергии. При этом для непрозрачных тел, для которых полное поглощение энергии излучения происходит в тонком приповерхностном слое (порядка 100 – 1000 ангстрем), эти процессы считают поверхностными и учитывают в балансе тепловых потоков на поверхности тела (при формулировании тепловых граничных условий). В частично прозрачных телах (излучение поглощается на расстояниях от долей миллиметра до нескольких метров) распространение излучения (в частности, с учетом рассеивания и собственного излучения) описывают уравнением переноса, а его поглощение и излучение связывают с объемными тепловыделениями, которые, как источники тепла, учитывают в уравнении теплопроводности. Достаточно полный обзор литературы по исследованию теплопередачи в частично прозрачных телах при учете особенностей возникновения и распространения в них теплового излучения выполнен в [21]. На основе подходов теории теплообмена излучением предложены варианты термомеханики непрозрачных тел в условиях сложного (конвективно-лучевого) теплообмена [2, 9, 13] и частично прозрачных тел при тепловом облучении [6]. Последний основан на едином подходе (с использованием приближения геометрической оптики) к определению факторов влияния электромагнитного излучения на тело (тепловыделений и пондеромоторных сил) в радио- и световом (на который в основном приходится тепловое излучение) частотных диапазонах и феноменологической теории излучения. В рамках этих вариантов сформулировано и получено решения ряда конкретных задач об исследовании термомеханического поведения тел (в частности, термочувствительных, с примесями) различной прозрачности с учетом влияния теплового излучения.

Следует отметить, что в литературе до сих пор не выработан единый подход к учету эффектов излучения при исследовании нагрева или охлаждения тел различной прозрачности, о чем свидетельствуют публикации, в которых числовые расчеты сравниваются с результатами экспериментальных измерений (например [20]). Такая неоднозначность связана как с проблемами учета термочувствительности теплофизических и определения радиационных характеристик материалов, так и способами моделирования процессов теплопереноса. От этих факторов существенно зависит дальнейшая оценка напряженного состояния тел, проведенного на основе соотношений моделей радиационной термомеханики. Кроме того, известные в литературе модели термоупругости слоистых тел не рассматривают ряд важных особенностей взаимодействия таких тел с внешним тепловым излучением и контактного взаимодействия, связанных с учетом реальных радиационных свойств составляющих. В тоже время модели радиационной термомеханики не развиты на случай слоистых сред.

В моделях радиационной термомеханики при описании термонапряженного состояния тел с учетом влияния излучения используют соотношения динамической или квазистатической линейной несвязанной задачи термоупругости [8, 11]. Они включают уравнения, описывающие механические поля – уравнения движения (равновесия)

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где σ_{ij} , u_i , F_i – компоненты тензора напряжений, вектора перемещений и объемной силы, t – время, ρ – плотность, соотношения Дюгамеля-Неймана

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1-2\nu} \left[\frac{\nu}{1+\nu} u_{i,i} - \phi(T, T_0) \right] \delta_{ij} + \frac{E}{1+\nu} u_{i,j}, \quad (2)$$

связывающие компоненты тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} при известном распределении температуры T в теле, и соотношения Коши $\varepsilon_{ij} = u_{i,j}$. Здесь ν , E – коэффициент Пуассона и модуль Юнга;

$\phi(T, T_0) = \int_{T_0}^T \alpha_t(T_*) dT_*$; T_0 – начальная температура; α_t – коэффициент

линейного температурного расширения; x_i – декартовы координаты точек тела, причем запятая перед индексом означает дифференцирование по соответствующим координатам, повторяющиеся индексы – суммирование; δ_{ij} – символ Кронекера.

Для несвязанной задачи температуру в теле находят из уравнения теплопроводности [10, 14]

$$\left(\kappa T_{,i} \right)_{,i} + Q = \rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3)$$

где κ , c_ε – коэффициент теплопроводности и удельная теплоемкость. Для термочувствительных тел учитывают зависимость величин ν , E , α_t , κ , c_ε , ρ от температуры. Заметим, что объемные силы F_i в (1) и тепловые источники Q в (3) для частично прозрачного тела являются тепловыделениями вследствие поглощения и излучения тепловой энергии при переносе излучения (источником которого могут быть как окружающие нагретые тела, так и само исследуемое тело) и пондеромоторными силами воздействия излучения на такое тело.

Описание эффектов теплообмена излучением зависит от характера поглощения и излучения телом тепловой энергии – объемного (частично прозрачные тела) или приповерхностного (непрозрачные). При объемном распространении излучения в каждом направлении (\vec{g}_0 – орт в направлении луча) процесс описывают квазистационарным уравнением переноса относительно спектральной интенсивности излучения $I_\lambda(\vec{x}, \vec{g}_0)$, в котором учтено и собственное тепловое излучение тела [7]. Его решение записывают в виде [7, 21]

$$I_\lambda(\theta_\lambda, \vec{g}_0) = I_\lambda^{ef}(\vec{x}, \vec{g}_0) \exp(-\theta_\lambda) + \int_0^{\theta_\lambda} I_{m\lambda}(\lambda, T) \exp\left[-(\theta_\lambda - \theta_\lambda^*)\right] d\theta_\lambda^*, \quad (4)$$

в котором λ – длина волны излучения; \vec{x} – радиус-вектор для точек те-

ла; $\theta_\lambda(\bar{x}) = \int_0^{g(x_i)} a_\lambda(g^*) dg^*$ – оптическая толщина пути; $g(x_i)$ – расстояние от поверхности до точки \bar{x} в направлении луча; $a_\lambda(\bar{x})$ – спектральный коэффициент поглощения; $I_{m\lambda}(\lambda, T) = n_\lambda^2 I_{\lambda b}(\lambda, T)$ – спектральная интенсивность собственного излучения, которая выражается через спектральные показатель преломления n_λ и интенсивность излучения абсолютно черного тела $I_{\lambda b}(\lambda, T)$ при температуре T ($I_{\lambda b}(\lambda, T) = 2\pi c_1 / [\lambda^5 \exp(c_2/\lambda T - 1)]$; c_1, c_2 – известные постоянные [7]). Эффективная интенсивность I_λ^{ef} излучения на поверхности тела находится из граничного условия, устанавливающего связь спектральной интенсивности излучения в нем с известной падающего излучения (при определенных экспериментально спектральных коэффициентах отражения и преломления) с учетом баланса всех потоков излучения, подводимых к поверхности (в том числе и переотраженных внутри тела) [12, 14]. Такое условие сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода [14]. Заметим, что для облучаемых от реального источника тел внешнее тепловое излучение можно задавать как излучение нагретого тела со спектральной интенсивностью $I_{\lambda s}(\bar{x}, t, \bar{g}_0)$. Эта интенсивность может быть принята пропорциональной интенсивности $I_{\lambda b}(\lambda, T)$ при температуре T_s источника [2, 6], т.е. $I_{\lambda s}(\bar{x}, t, \bar{g}_0) = k_\lambda(\bar{x}, \bar{g}_0) I_{\lambda b}(\lambda, T)$, где $k_\lambda(\bar{x}, \bar{g}_0)$ – заданная функция. Ее вид устанавливают в зависимости от характеристик источника и его расположения относительно тела.

По интенсивностям эффективного I_λ^{ef} и собственного $I_{m\lambda}$ излучения объемные тепловыделения Q вычисляются по формуле [4, 5]

$$Q = Q_{ef} + Q_{ir}^{(a)} - Q_{ir}, \text{ где}$$

$$Q_{ef} = \int_{\lambda=0}^{\infty} \left[a_\lambda(\bar{x}) \int_{\Gamma=4\pi} I_\lambda^{ef}(\bar{x}, \bar{g}_0) \exp(-\theta_\lambda) d\Gamma_{\bar{g}_0} \right] d\lambda,$$

$$Q_{ir}^{(a)} = \int_{\lambda=0}^{\infty} \left\{ a_\lambda(\bar{x}) \int_{\Gamma=4\pi} \left[\int_0^{\theta_\lambda} I_{m\lambda}(\lambda, T) \exp(-(\theta_\lambda - \theta_\lambda^*)) d\theta_\lambda^* \right] d\Gamma_{\bar{g}_0} \right\} d\lambda,$$

$$Q_{ir} = 4\pi \int_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda(\bar{x}) I_{m\lambda}(\lambda, T) d\lambda. \quad (5)$$

Здесь интегрирование проводится по телесному углу Γ , $d\Gamma_{\bar{g}_0}$ – элемент этого угла. Составляющая Q_{ir} тепловыделений (5) связана с излучением каждой точкой тела тепловой энергии, составляющая $Q_{ir}^{(a)}$ – с поглощением этой энергии, Q_{ef} – как с поглощением энергии внешнего излуче-

ния, так и переотраженного поверхностью собственного.

Тепловое граничное условие формулируется, как принято, на основе условия непрерывности нормальных составляющих векторов потоков тепла на поверхности тела. В частности, если тело находится в условиях конвективного теплообмена с окружающей средой, температура $T^{\text{ext}}(t)$, изменяется во времени, такой обмен теплом описывается по закону Ньютона [10] и граничное условие имеет вид

$$(\kappa T_{,i})n_i = q_c, \quad q_c = \alpha(\bar{x}) [T(\bar{x}, t) - T^{\text{ext}}(t)], \quad (6)$$

где $\alpha(\bar{x})$ – коэффициент теплоотдачи с поверхности тела; $\bar{n} = n_k i_k$ – внешняя нормаль к поверхности, i_k ($i = 1, 3$) – орты.

В сильно поглощающих телах (непрозрачных) поглощенная и излученная энергии учитываются в условиях баланса потоков тепла на поверхности [7, 10, 19] и тепловое граничное условие можно свести к одному условию вида

$$(\kappa T_{,i})n_i = q + q_c, \quad (7)$$

в котором $q = q^{(a)} - q^{(b)}$; $q^{(a)}$ – поток поглощенной энергии внешнего излучения; $q^{(b)}$ – поток излученной телом энергии во внешнюю среду с показателем преломления $n_\lambda^{(e)}$. Этот поток задается соотношением [7, 14]

$$q^{(b)} = \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\Gamma=2\pi} (n_\lambda^{(e)})^2 \varepsilon_\lambda(\bar{x}, \bar{g}_0) I_{\lambda b}(\lambda, T) d\Gamma_{\bar{g}_0} d\lambda, \quad (8)$$

где $\varepsilon_\lambda(\bar{x}, \bar{g}_0)$ – степень черноты поверхности [7, 19]. Если степень черноты и показатель преломления принять независимыми от направления \bar{g}_0 и длины волны λ (в частности, равными средне интегральным в реальном спектральном диапазоне: $\varepsilon_\lambda = \varepsilon$, $n_\lambda^{(e)} = n^{(e)}$), то $q^{(b)} = \varepsilon(n^{(e)})^2 \sigma T^4(\bar{x}, t)$. Тогда (7) имеет вид условия Стефана-Больцмана. Распределение температуры в непрозрачном теле описывает уравнение вида (3) при $Q=0$. Что касается силового воздействия теплового излучения на непрозрачное тело, то оно сводится к поверхностному световому давлению [6, 14], которое может быть учтено при формулировании механических граничных условий.

Проведенные в [2, 6] оценки влияния силовых факторов (пондеромоторных сил и светового давления) на напряженное состояние частично прозрачных и непрозрачных тел показали, что ими можно пренебречь при реальных температурах источника теплового излучения ($T_s < 5000 \text{ K}$).

При постановке задач радиационной термомеханики для облучаемых слоистых тел, содержащих слои различной прозрачности, граница контакта слоев моделируется поверхностью с заданными на обеих ее сторонах радиационными характеристиками материала слоев, а условия их теплового и механического контакта принимаются идеальными. Распространение теплового излучения в частично-прозрачных областях описы-

ваются как в частично прозрачном теле. При этом для определения эффективных интенсивностей на поверхностях получаются одно (внутренний слой в замкнутом теле без полости), система двух или $2m$ (m – количество контактирующих частично прозрачных слоев) интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Тепловое состояние слоистого тела определяется из системы уравнений теплопереноса вида (3) для слоев, при соответствующих граничных и контактных условиях. Как в незамкнутых телах, так и в замкнутых без полостей, граничные условия для внешних слоев в зависимости от их прозрачности записываются в виде (6) или (7) с учетом облучаемости. В телах с газонаполненной полостью ее можно рассматривать как частично прозрачный слой. При этом уравнение теплопроводности в нем должно учитывать особенности конвекции в полости [10]. Контактные условия на границе раздела слоев различной прозрачности состоят из условия баланса тепловых потоков и условия локального теплового равновесия между слоями (равенство их температур), т.е

$$\left(\kappa_0 T_{(0),i}\right) n_i + q^{(b)} - q^{(a)} = \left(\kappa_s T_{(s),i}\right) n_i, \quad T_0 = T_s. \quad (9)$$

Здесь индексы $s, 0$ относятся соответственно к частично прозрачному и непрозрачному слоям; $q^{(b)}$ – поток излученной непрозрачным слоем тепловой энергии в частично прозрачный с показателем преломления n_λ , определяемый согласно (8); $q^{(a)}$ – поток энергии поглощенной поверхностью непрозрачного слоя, определяемый через интенсивность эффективного излучения при известных радиационных характеристиках. Условие (9) определяет идеальный тепловой контакт при учете влияния излучения. Контактные условия на границе раздела слоев одинаковой прозрачности имеют вид известных условий идеального теплового контакта [10] и следуют из (9) при $q^{(b)} = q^{(a)} = 0$.

Заметим, что сформулированные выше краевые и контактно-краевые задачи об определении температуры при учете эффектов излучения являются нелинейные.

В работах [4, 5] рассмотрены особенности учета термочувствительности теплофизических и радиационных характеристик при постановке задач термомеханики для облучаемых тел различной прозрачности. Проанализированы известные подходы (в частности, приближенные) к описанию процессов излучения и поглощения тепловой энергии в телах с различными радиационными свойствами. На примере модельной задачи для облучаемого слоя исследовано влияние эффектов излучения и переноса тепловой энергии на температуру и напряжения в частично прозрачных и непрозрачных телах. На основе теоретических и экспериментальных исследований процесса охлаждения частично прозрачной пластины и непрозрачного цилиндра определены границы применимости разных подходов при постановке задач теплопереноса, в частности, приближения неизлучающего материала (при котором $I_{m\lambda} = 0$) и модели с полосой непрозрачности. Для последнего случая значение коэффициента поглощения a_λ в дальней инфракрасной области спектра ($\lambda_{\max} < \lambda < 50$ мкм, где λ_{\max} –

верхняя практическая граница диапазона измерения) принимается достаточно большое, что позволяет сводить излучение и поглощение частично прозрачным телом тепловой энергии к поверхностному и учитывать их в этом диапазоне и вне его, как для непрозрачного тела в граничном условии (7). Установлено, что при использовании упомянутых приближенных подходов получают заниженные уровни температурных напряжений в частично прозрачном теле при его охлаждении.

В работах [15–17] исследовано тепловое и термонапряженное состояние двухслойных пластин со слоями с различными радиационными свойствами, а в [1] – в системе плоскопараллельных слоев различной прозрачности при тепловом облучении от нагретой до температуры T_s параллельной слоям поверхности. В частности получено:

– для пластины с частично-прозрачными слоями (стеклянными) в отличие от однородной облучаемой пластины, в которой максимальные уровни растягивающих и сжимающих напряжений возрастают с понижением температуры T_s источника, в слоистой они могут достигаться при определенной температуре; размещение зон растягивающих и сжимающих напряжений зависит от поглощательных свойств составляющих и их толщин;

– для пластины со слоями различной прозрачности (металлический толщиной h_1 и стеклянный – h_2) при облучении со стороны непрозрачного слоя влияние излучения тепловой энергии металлическим слоем на расчетную температуру в пластине имеет место при температурах выше 530 К; при фиксированной толщине стеклянного слоя максимальные растягивающие напряжения достигаются (при $h_1 \leq h_2$) в металлическом, уровень максимальных растягивающих напряжений в стеклянном слое возрастает с увеличением толщины металлического; при фиксированной толщине металлического слоя с изменением толщины стеклянного (при $h_2 \leq h_1$) максимальные растягивающие напряжения локализуются в стекле в зоне контакта;

– для пластины со слоями различной прозрачности при облучении со стороны частично прозрачного слоя максимальные уровни растягивающих напряжений достигаются в зависимости от толщины стеклянного слоя возле поверхности контакта в нем или на поверхности металлического, а сжимающих – возле поверхности контакта в металлическом или на поверхности стеклянного.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто особливості постановки задач термомеханіки за теплового опромінення однорідних і шаруватих термочутливих тіл різної прозорості.

Ключові слова: термомеханіка, теплове випромінювання, частково прозорі і непрозорі однорідні тіла, шаруваті тіла, термочутливість.

SUMMARY. Peculiarities of a thermomechanical problems formulation for homogeneous and composite solids of various transparency subjected to thermal radiation are considered.

Key words: thermomechanics, thermal radiation, semitransparent and opaque solids, composite solids, thermosensitivity.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Брухаль М., Терлецький Р., Фундак О. Методика числового розв'язування нелінійних задач теплоперенесення в тілах різної прозорості для теплового випромінювання // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математики та інформатики. – 2007. – Вип. 13. – С. 59–71.
2. Гачкевич А.Р. Термомеханіка електропровідних тел при впливі квазіустановившихся електромагнітних полів. – К.: Наук. думка, 1992. – 192 с.
3. Гачкевич О.Р., Терлецький Р. Ф. Моделі термомеханіки намагнетовних і поляризованих електропровідних деформованих твердих тіл // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – Т. 40, № 3. – С. 19–37.
4. Гачкевич О.Р., Терлецький Р.Ф., Брухаль М.Б. Деякі проблеми математичного моделювання в термомеханіці тіл різної прозорості за теплового опромінення // Мат. мет. і фіз.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 3. – С. 202–219.
5. Гачкевич О.Р., Терлецький Р.Ф., Сосновий Ю.Р., Брухаль М.Б. Термонапружений стан охолоджуваних тіл за врахування випромінювання теплової енергії // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – Т. 46, № 1. – С. 42–50.
6. Гачкевич О. Р., Терлецький Р.Ф., Курницький Т.Л. Механотермодифузія в частково прозорих тілах. – Львів: СПОЛЮМ, 2007. – 184 с. (Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл: В 3 т. Т. 2).
7. Зигель Р., Хауэлл Д. Теплообмен излучением. – М.: Мир, 1975. – 935 с.
8. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – К.: Наук. думка, 1970. – 307 с.
9. Кушнір Р.М., Попович В.С. Термопружність термочутливих тіл. – Львів: СПОЛЮМ, 2009. – 412 с. (Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл: В 3 т. Т. 3).
10. Лыков А.В. Теплообмен. Справочник. – М.: Энергия, 1978. – 480 с.
11. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. – М.: Мир, 1970. – 256 с.
12. Петров В.А., Марченко Н.В. Перенос энергии в частично прозрачных твердых материалах. – М.: Наука, 1985. – 192 с.
13. Постольник Ю.С., Огурицов А.П. Нелінійна прикладна термомеханіка. – К.: НМЦ ВО МОНУ, 2000. – 280 с.
14. Рубцов Н.А. Теплообмен излучением в сплошных средах. – Новосибирск: Наука, 1984. – 277 с.
15. Терлецький Р.Ф., Турій О.П. Термонапружений стан кусково-однорідного частково-прозорого шару при теплового опроміненні // Мат. мет. та фіз.-мех. поля. – 2006. – 43, № 1. – С. 161–172.
16. Терлецький Р.Ф., Турій О.П. Термомеханічна поведінка шаруватої пластини зі складовими різної прозорості під тепловими променями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 18–26.
17. Турій О.П. Нелінійна контактнo-крайова задача термомеханіки для опромінюваної двошарової пластини, з'єднаної проміжковим шаром // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2009. – Вип. 9 – С. 118–132.
18. Hutter K., van de Ven A.A. Field-matter interaction in thermoelastic solids. – Lecture Notes in Physics. – 88. – Berlin: Springer-Verlag, 1978. – 234 p.
19. Modest M.F. Radiative Heat Transfer. – San Diego: Acad. Press, 2003. – 822 p.
20. Siedow N., Grosan T. Application of a new method for heat transfer to flat glass tempering // J. Am. Ceram. Soc. – 2005. – Vol. 88, № 8. – P. 2181–2187.
21. Siegel R. Transient effects of radiative transfer in semitransparent materials // Int. J. Eng. Sci. – 1998. – Vol. 36. – P. 1701–1739.

*Ин-т прикладных проблем механики
и математики НАН Украины, г. Львов*

Поступила 04.04.2012

УДК 539.3

В. С. КИРИЛЮК, д-р. физ.-мат. наук,
О. И. ЛЕВЧУК, канд. физ.-мат. наук

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ГЕРЦА С УЧЕТОМ ВЫДЕЛЕНИЯ ТЕПЛА ПРИ ТРЕНИИ СКОЛЬЖЕНИЯ ДВУХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

Решена задача Герца о контактном взаимодействии двух трансверсально-изотропных упругих тел с учетом тепловыделения при трении скольжения. В явном виде получены соотношения для определения неизвестных полуосей площадки контакта эллиптической формы и выражение для контактного давления. Исследовано влияние тепловыделения на параметры контактного взаимодействия. Как частный рассмотрен случай контактного взаимодействия двух изотропных упругих тел при трении скольжения.

Ключевые слова: термоупругость, трансверсально-изотропное тело, контактная задача, трение при скольжении, тепловыделение, контактное давление, область контакта.

Изучению контактного взаимодействия упругих изотропных тел посвящены работы многих авторов, среди которых важные результаты исследований содержат монографии [2, 4, 9] и статьи [8, 11]. Тепловыделение на поверхностях контактирующих тел, возникающее при трении тел (при вращении, скольжении и других видах взаимодействия), а также внешние температурные воздействия могут привести к значительному нагреву контактирующих тел, перераспределению контактного давления и изменению областей контакта тел. Проблемы контактной механики, учитывающие температурные воздействия, для упругих изотропных материалов рассмотрены в работах [1, 3, 8], среди которых задача Герца в трехмерной постановке, учитывающая тепловыделение при трении скольжения [1]. Контактное взаимодействие упругих трансверсально-изотропных тел при температурных воздействиях исследовано в статьях [5, 10], а для электроупругих трансверсально-изотропных тел – в [6, 7, 12]. В работах [5, 7] изучено влияние тепловыделения на контактное взаимодействие трансверсально-изотропных и электроупругих тел в предположении известности распределения температурного поля в области контакта.

В настоящей работе дается решение пространственной контактной задачи с учетом тепловыделения для двух трансверсально-изотропных тел, находящихся в скользящем контакте.

Постановка задачи. Рассмотрим задачи о контакте двух трансверсально-изотропных тел с учетом тепловыделения. Как и в [1], предположим, что на площадке контакта сумма интенсивности тепловых потоков, направленных в каждое из контактирующих тел, равна интенсивности тепловыделения за счет трения, а на свободных поверхностях контактирующих тел тепловые потоки отсутствуют, на площадке контакта равны друг другу значения температур тел. Пусть тела являются трансверсаль-

но-изотропными, ограниченными выпуклыми поверхностями, соприкасающимися в точке O , оси $z_1^{(1)}$, $z_2^{(2)}$ перпендикулярны касательной плоскости, проведенной через общую точку касания вглубь тел и являются осями симметрии тел. Согласно подходу Герца при решении задачи заменим тела трансверсально-изотропными полупространствами и неизвестную площадку контакта будем разыскивать в виде эллиптической области, т.е. области, лежащей внутри эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Рассмотрим вначале задачу теплопроводности, для которой граничные условия имеют вид

$$k_{33}^{(1)} \frac{\partial T_1}{\partial z_1^{(1)}} + k_{33}^{(2)} \frac{\partial T_2}{\partial z_2^{(2)}} = -\frac{vfp}{J}, \quad T_1 = T_2 \quad (x, y) \in \Omega; \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial z_1^{(1)}} = \frac{\partial T_2}{\partial z_2^{(2)}} = 0 \quad (x, y) \notin \Omega, \quad (2)$$

где T_1 , T_2 – значения температуры; v – скорость относительного скольжения; f – коэффициент трения; J – механический эквивалент тепла; p – давление на площадке контакта. Если тепловыделение отсутствует, то из приведенных граничных условий получаем условия идеального теплового контакта. Уравнение стационарной теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + n_4 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (3)$$

где $n_4 = \lambda_{33}/\lambda_{11}$ – отношение коэффициента теплопроводности в направлении Oz к коэффициенту теплопроводности в направлении Ox (или Oy). Температура является гармонической функцией в системе координат (x, y, z_4) , где $z_4 = z/n_4^{1/2}$. Граничные условия (1), (2) в соответствующих координатах могут быть переписаны в виде

$$\frac{\lambda_{33}^{(1)}}{\sqrt{n_4^{(1)}}} \frac{\partial T_1}{\partial z_4^{(1)}} + \frac{\lambda_{33}^{(2)}}{\sqrt{n_4^{(2)}}} \frac{\partial T_2}{\partial z_4^{(2)}} = -\frac{vfp}{J}, \quad T_1 = T_2 \quad (x, y) \in \Omega; \quad (4)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial z_4^{(1)}} = \frac{\partial T_2}{\partial z_4^{(2)}} = 0 \quad (x, y) \notin \Omega, \quad (5)$$

Представим выраженную через контактное давление температуру в каждом из полупространств в виде потенциалов простого слоя

$$T_i(x, y, z_4^{(i)}) = \frac{vf}{2\pi \left(\lambda_{33}^{(1)}/\sqrt{n_4^{(1)}} + \lambda_{33}^{(2)}/\sqrt{n_4^{(2)}} \right) J} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z_4^{(i)})^2}}. \quad (6)$$

Непосредственной проверкой, воспользовавшись свойствами потенциала простого слоя, можно убедиться, что температура, определяемая в каждом из полупространств по формулам (6), удовлетворяют уравнениям теплопроводности и граничным условиям (1), (2).

В задаче термоупругости для трансверсально-изотропного полупространства, например $z \leq 0$, имеем граничные условия

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0, \quad z=0; \quad \sigma_{zz} = 0 \quad (x, y) \notin \Omega; \\ u_z(x, y, 0) = u_z(x, y) \quad (x, y) \in \Omega, \end{aligned} \quad (7)$$

в которых Ω – площадка контакта, на которой

$$\sigma_{zz}(x, y, 0) = -p(x, y) \quad (x, y) \in \Omega,$$

$p(x, y)$ – контактное давление, которое определяется в процессе решения задачи. Давление при трении скольжения связано с температурным полем согласно формуле (6). Также имеет место уравнение равновесия

$$P = \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy.$$

Условие для перемещений при контакте трансверсально-изотропных полупространств принимает вид

$$u_z(x, y) = u_z^{(1)}(x, y, 0) + u_z^{(2)}(x, y, 0) = \delta - \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y) \quad (x, y) \in \Omega,$$

где δ – сближение упругих тел, определяемое в процессе решения задачи, $\varphi_i(x, y)$ – уравнения поверхностей тел.

Основные уравнения и соотношения. Уравнения стационарной термоупругости для трансверсально-изотропной среды при отсутствии массовых сил и источников тепла можно записать так:

$$\begin{aligned} c_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial u_y}{\partial y} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = \beta \frac{\partial T}{\partial x}; \\ \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + c_{11} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial u_x}{\partial x} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = \beta \frac{\partial T}{\partial y}; \\ c_{44} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) + c_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = \beta_1 \frac{\partial T}{\partial z}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь c_{ij} – упругие постоянные;

$$\beta = (c_{11} + c_{12})\alpha + c_{13}\alpha_1, \quad \beta_1 = 2c_{13}\alpha + c_{33}\alpha_1,$$

α , α_1 – коэффициенты линейного теплового расширения материала в направлении Ox (или Oy) и Oz .

Решение системы уравнений (8) можно представить через четыре потен-

циальные функции Φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_4}{\partial x}, & u_y &= \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_3}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_4}{\partial y}, \\ u_z &= m_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} + m_2 \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} + m_4 \frac{\partial\Phi_4}{\partial z}, \end{aligned} \quad (9)$$

где Φ_1, Φ_2, Φ_3 – функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + n_j \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi_j = 0, \quad (10)$$

а также $n_3 = 2c_{44}/(c_{11} - c_{12})$; n_1, n_2 – корни квадратного уравнения

$$c_{11}c_{44}n^2 - [c_{44}^2 + c_{33}c_{11} - (c_{13} + c_{44})^2]n + c_{33}c_{44} = 0; \quad (11)$$

$$m_j = \frac{c_{11}n_j - c_{44}}{c_{13} + c_{44}} = \frac{n_j(c_{13} + c_{44})}{c_{33} - n_jc_{44}} \quad (j = 1, 2) \quad (12)$$

Функция Φ_4 удовлетворяет одновременно двум уравнениям

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + n_4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi_4 = 0; \quad \frac{\partial^2\Phi_4}{\partial z^2} = m_3 T. \quad (13)$$

Если ввести обозначения, ($j = 1, 2, 3, 4$), $z_j = zn_j^{-1/2}$, то $\Phi_1(x, y, z_1)$, $\Phi_2(x, y, z_2)$, $\Phi_3(x, y, z_3)$, $\Phi_4(x, y, z_4)$ будут гармоническими функциями в соответствующей системе координат. Постоянные m_3, m_4 , входящие в (13), зависят от упругих и теплофизических свойств тела.

Метод решения. Для каждого из полупространств воспользуемся суперпозицией состояний, для первого из которых функцию Φ_4 возьмем в виде одного из потенциалов Буссинеска:

$$\begin{aligned} \Phi_4^{(1,i)}(x, y, z_4^{(i)}) &= F(x, y, z_4^{(i)}) = \\ &= \frac{\nu f m_3^{(i)} n_4^{(i)}}{2\pi \left(\lambda_{33}^{(1)}/\sqrt{n_4^{(1)}} + \lambda_{33}^{(2)}/\sqrt{n_4^{(2)}} \right) J} \left[\iint_S p(\xi, \eta) \left[z_4^{(i)} \ln(r_4^{(i)} + z_4^{(i)}) - r_4^{(i)} \right] d\xi d\eta \right], \end{aligned}$$

Здесь $r_4^{(i)} = \sqrt{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z_4^{(i)})^2]}$. Также для первого состояния положим $\Phi_1^{(1)}(x, y, z_1) = a_1 F(x, y, z_1)$, $\Phi_2^{(1)}(x, y, z_2) = a_2 F(x, y, z_2)$, $\Phi_3^{(1)} = 0$, где a_1, a_2 – постоянные, которые определим из условий

$$c_{44}(1 + m_1)m_3 n_4 a_1 + c_{44}(1 + m_2)m_3 n_4 a_2 + [m_3(c_{33}m_4 - n_4 c_{13}) - \beta'] = 0;$$

$$a_1 \frac{1+m_1}{n_1^{1/2}} + a_2 \frac{1+m_2}{n_2^{1/2}} + \frac{1+m_4}{n_4^{1/2}} = 0. \quad (14)$$

Для второго состояния суперпозиции потенциальные функции выберем следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(2)}(x, y, z_1) &= \frac{1}{2\pi} \frac{-n_1^{1/2}}{c_{44}(1+m_1)(n_1^{1/2}-n_2^{1/2})} \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \ln(r_1+z_1) d\xi d\eta; \\ \Phi_2^{(2)}(x, y, z_2) &= \frac{1}{2\pi} \frac{-n_2^{1/2}}{c_{44}(1+m_2)(n_1^{1/2}-n_2^{1/2})} \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \ln(r_2+z_2) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (15)$$

где $r_i = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z_i^2}$ ($i=1, 2$). Для второго состояния также примем $\Phi_4^{(2)} = \Phi_3^{(2)} = 0$. В результате суперпозиции двух состояний получаем

$$\begin{aligned} \delta - \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y) &= \frac{\beta_1^* + \beta_2^*}{2\pi} \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \ln R d\xi d\eta + \\ &+ \frac{A_1^{\text{Trans}} + A_2^{\text{Trans}}}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R} \quad (x, y) \in \Omega, \end{aligned} \quad (16)$$

причем $R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, При этом величина A^{Trans} зависит от упругих постоянных материала таким образом:

$$\begin{aligned} A^{\text{Trans}} &= \frac{c_{11} (n_1^{1/2} + n_2^{1/2})(c_{13} + c_{44})}{c_{44} (c_{11}n_1 + c_{13})(c_{11}n_2 + c_{13})}; \\ \beta^* &= \frac{\nu f}{\left(\lambda_{33}^{(1)}/\sqrt{n_4^{(1)}} + \lambda_{33}^{(2)}/\sqrt{n_4^{(2)}} \right) J} \gamma^{\text{Trans}}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\gamma^{\text{Trans}} = m_3 n_4 \left[m_1 a_1 / n_1^{1/2} + m_2 a_2 / n_2^{1/2} + m_4 / n_4^{1/2} \right].$$

При переходе к изотропному материалу получаем

$$A^{\text{Trans}} \rightarrow \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} = \frac{1-\nu}{\mu}, \quad \gamma^{\text{Trans}} \rightarrow (1+\nu)\alpha.$$

Ограничиваясь лишь локальными эффектами, в области контакта имеем

$$\begin{aligned} \delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} &= \frac{A_1^{\text{Trans}} + A_2^{\text{Trans}}}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R} + \\ &+ \frac{\beta_1^* + \beta_2^*}{2\pi} \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \ln R d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (18)$$

Далее воспользуемся схемой решения задачи [1].

Заметим, что нахождение замкнутого решения задачи становится возможным в предположении, что областью контакта является площадка эллиптической формы, ограниченная эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad a \geq b \quad b = \sqrt{a(1 - e^2)},$$

где a , b – полуоси эллипса, определяемые в процессе решения задачи, e – его эксцентриситет.

Для контактного давления в рассматриваемой задаче, найденное, как и в классическом случае, из уравнения равновесия, находим

$$p_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab}; \quad p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (x, y) \in \Omega. \quad (19)$$

После подстановки выражения контактного давления в интегральное уравнение (18) и выполнения интегрирования имеем

$$\delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} = \frac{A_1^{\text{Trans}} + A_2^{\text{Trans}}}{2} p_0 (I_0 - I_1 x^2 - I_2 y^2) + (\beta_1^* + \beta_2^*) \left[A + \frac{1}{3} p_0 \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right]. \quad (20)$$

Здесь $I_0 = bK(e)$; $I_1 = b[K(e) - E(e)]/(e^2 a^2)$; $I_2 = b[a^2/b^2 E(e) - K(e)]/(e^2 a^2)$; $K(e)$, $E(e)$ – полные интегралы первого и второго рода.

Для нахождения геометрических размеров площадки контакта получаем систему уравнений, которая для задачи с тепловыделением существенно отличается от системы для классической задачи Герца:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= (A_1^{\text{Trans}} + A_2^{\text{Trans}}) p_0 I_1 - \frac{2}{3} (\beta_1^* + \beta_2^*) p_0 \frac{b^2}{a^2 + b^2}; \\ \frac{1}{R_2} &= (A_1^{\text{Trans}} + A_2^{\text{Trans}}) p_0 I_2 - \frac{2}{3} (\beta_1^* + \beta_2^*) p_0 \frac{a^2}{a^2 + b^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

После введения обозначения $\gamma^* = (\beta_1^* + \beta_2^*) / (A_1^{\text{Trans}} + A_2^{\text{Trans}})$ для определения геометрических размеров площадки контакта имеем

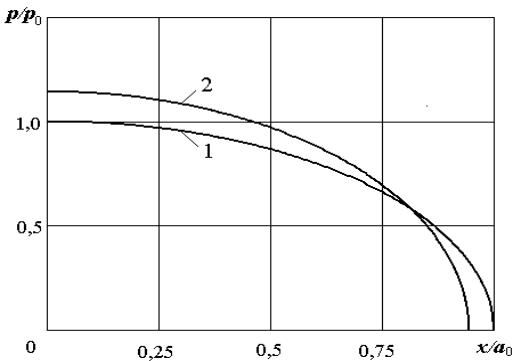
$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{(K(e) - E(e)) - \gamma^* a \varepsilon (1 - e^2)}{(E(e)/(1 - e^2) - K(e)) - \gamma^* a \varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{2}{3} \frac{e^2}{(2 - e^2) \sqrt{1 - e^2}}; \quad (22)$$

$$a = \left[P (A_1^{\text{Trans}} + A_2^{\text{Trans}})^{1/3} \right] \alpha_a; \quad (23)$$

$$\alpha_a = \left\{ \frac{3}{2\pi} \left[\frac{1}{e^2} (K(e) - E(e)) - \frac{2}{3} \gamma^* a \frac{\sqrt{1-e^2}}{2-e^2} \right] \right\}^{1/3}. \quad (24)$$

Нахождение площадки контакта по формулам (22)–(24) можно проводить как в случае контакта изотропных тел. Для этого по формулам (22) нужно вначале определить эксцентриситет эллипса e , затем с помощью (23), (24) вычислить большую полуось площадки контакта a . Как и при контакте изотропных тел с тепловыделением при трении скольжения [1], нахождение значений e и a можно проводить методом итераций. Как частный случай из (22)–(24) следуют результаты работы [1].

Анализ результатов численных исследований. Численные исследования проведены для случая трения проскальзывания. Считалось, что $R_1/R_2 = 0,68$, $\gamma^* a_0 = 0$ (т.е. тепловыделение при проскальзывании не учитывается). В результате вычислений (используя таблицу работы [1]) получаем $e_0^2 = 0,4$ и $\alpha_0 = 0,767$. При том же отношении главных кривизн тел $R_1/R_2 = 0,68$ учтем выделение тепла при проскальзывании, положив значение $\gamma^* a_0 = 0,5$. Используя геометрию площадки контакта без тепло-



выделения (как начальное приближение для задачи с тепловыделением), после вычислений находим распределение контактного давления и размеры площадки контакта для задачи с учетом тепловыделения при трении скольжения. На рисунке кривая 1 отвечает случаю контактного взаимодействия трансверсально-изотропных упругих тел без учета тепловыделения, кривая 2 – контакту с учетом тепловыделения при трении скольжения. Видно, что тепловыделение влияет на геометрию площадки контакта (изменяется отношение полуосей эллипса) и ее размеры (при тепловыделении они уменьшаются), а также на распределение контактного давления, значение которого в центре площадки контакта увеличивается.

РЕЗЮМЕ. Розв'язано задачу Герца про контактну взаємодію двох трансверсально-ізоотропних пружних тіл з врахуванням тепловиділення при терті проковзування. У явному вигляді отримано співвідношення для визначення невідомих півосей площадки контакту еліптичної форми і вираз для контактного тиску. Досліджено вплив тепловиділення на параметри контактної взаємодії. Як частинний розглянуто випадок контактної взаємодії двох ізоотропних пружних тіл при терті проковзування.

Ключові слова: термопружність, трансверсально-ізоотропне тіло, контактна задача, тертя при проковзуванні, тепловиділення, контактний тиск, область контакту.

SUMMARY. Hertz's problems on the contact interaction of two transversally- isotropic elastic bodies with accounting of heat generation under sliding friction was solved. The relations for determination of unknown of half-axes of contact region of elliptical shape and the expression of contact pressure were found in explicit form. There was researched the

influence of heat generation on parameters of contact interaction. As a particular case, the contact interaction of two isotropic elastic bodies under sliding friction was considered.

Key words: thermoelasticity, transversally-isotropic body, contact problem, sliding friction, heat generation, contact pressure, contact region.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бородачев Н. М., Тариков Г. П.* Задача Герца с учетом тепловыделения при трении скольжения // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 6. – С. 45–52.
2. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
3. *Грилицкий Д. В., Краснюк П. П.* Стационарный термоупругий контакт двух цилиндров с фрикционным теплообразованием // Трение и износ. – 1996. – Т. 17, № 3. – С. 312–319.
4. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 509 с.
5. *Кирилук В. С., Левчук О. И.* Контактная задача для двух трансверсально-изотропных упругих тел с учетом тепловыделения // Теорет. и прикладная механика. – 2011. – Вып. 2(48). – С. 13–21.
6. *Кирилук В. С.* О влиянии температурного поля на контактное взаимодействие нагретого плоского эллиптического штампа с пьезокерамическим полупространством // Теор. и прикл. мех. – 2009. – Вып. 46. – С. 29–35.
7. *Кирилук В. С., Левчук О. И.* Трехмерная контактная задача для двух пьезокерамических тел с учетом тепловыделения // Теорет. и прикладная механика. – 2011. – Вып. 3(49). – С. 28–37.
8. *Коровчинский М. В.* Плоская контактная задача термоупругости при стационарном тепловыделении на поверхностях соприкосновения // Контактная прочность машиностроительных материалов. – М.: Наука, 1964. – С. 5–24.
9. *Лурье А. И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
10. *Подильчук Ю. Н., Ткаченко В. Ф., Соколовский Я. И.* Термоупругая контактная задача о вдавлении нагретого эллиптического в плане штампа в трансверсально-изотропное полупространство // Прикладная механика. – 1996. – Т. 32, № 11. – С. 38–45.
11. *Babich S. Yu., Guz A. N., Rudnitskii V. B.* Contact Problems for Prestressed Elastic Bodies and Rigid and Elastic Punches // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 40, № 7. – P. 744–765.
12. *Podil'chuk Yu. N.* Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelastic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems // Int. Appl. Mech. – 2003. – Vol. 39, № 2. – P. 132–170.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 06.03.2012

УДК 539.3, 519.6

И. В. БОГАЧЕВ, А. О. ВАТУЛЬЯН, д-р физ.-мат. наук,
В. В. ДУДАРЕВ, О. В. ЯВРУЯН, канд. физ.-мат. наук,

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СВОЙСТВ НЕОДНОРОДНЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ТЕЛ

Предложен способ решения обратных коэффициентных задач о восстановлении свойств неоднородных электроупругих тел по измеренным механическим или электрическим граничным характеристикам. Сформулирована слабая постановка задачи идентификации, получено интегральное уравнение Фредгольма 1-го относительно восстанавливаемых функций. Предложенный подход применен к задаче об определении закона изменения модуля податливости электроупругого стержня из анализа данных АЧХ нагружаемого торца стержня при продольных колебаниях с закороченными торцевыми электродами. Исследована задача о восстановлении упругих модулей и пьезомодуля для прямоугольной области из анализа граничных полей смещений и по амплитудно-частотной зависимости тока в цепи, возбуждаемых разностью потенциалов на электродах или механическим нагружением. Представлены результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: электроупругость, пьезокерамика, неоднородность, идентификация, стержень, прямоугольная область, слабая постановка, интегральные уравнения, итерационный процесс

В настоящее время наиболее эффективным способом регулирования и согласования электромеханической связи в приборах различного назначения является использование пьезоэффекта. Подобный способ обеспечивает достаточную точность работы прибора и обладает компактностью. В качестве его недостатков отметим выбор оптимального расположения пьезодатчиков, установка и обслуживание ответственных элементов цепи и наличие ограничений по изготовлению пьезоэлементов произвольной формы. Отметим, что задача по определению теоретической точности работы пьезоэлемента напрямую зависит от точности задания его электромеханических свойств. Это наиболее актуально при проектировании и организации высокотехнологического оборудования, где даже малейшие отклонения ведут к существенным погрешностям. Подобные отклонения в свойствах пьезоэлементов в первую очередь появляются по причине несовершенства организации технологического процесса (продолжительная термообработка) и в результате эксплуатационных нагрузок. Разработка неразрушающих методов по определению истинных электромеханических характеристик пьезокерамики не только существенно упростит упомянутую выше задачу, но и позволит моделировать поведение пьезоэлементов с существенно неоднородными свойствами, которые активно используются в последние годы. Заметим, что одним из наиболее эффективных и хорошо зарекомендовавших себя способов по решению аналогичных задач об определении неоднородных характеристик упругих и вязкоупругих материалов является акустический метод.

Общая постановка задач. Рассмотрим установившиеся колебания

электроупругого тела, занимающего объем V с кусочно-гладкой границей $S = S_u \cup S_\sigma$, $S = S_\pm \cup S_H$. Общие уравнения движения, определяющие соотношения и граничные условия имеют вид [4]:

$$\sigma_{ij,j} + \rho \omega^2 u_i = 0, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l} + e_{kij} \varphi_{,k} \quad (1)$$

$$D_{j,j} = 0, \quad D_i = e_{ikl} u_{k,l} - \varepsilon_{kl} \varphi_{,k} \quad (2)$$

$$D_n |_{S_H} = 0, \quad \varphi |_{S_\pm} = \pm \varphi_0, \quad u_i |_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j |_{S_\sigma} = p_i, \quad (3)$$

где σ_{ij} и u_i – компоненты тензора напряжений и вектора перемещения; C_{ijkl} , ε_{kl} и e_{kij} – компоненты тензоров упругих постоянных, диэлектрических постоянных и пьезоэлектрических постоянных; ρ – плотность; D_i – компоненты вектора электрической индукции, φ – потенциал электрического поля; n_j – компоненты единичного вектора внешней нормали к S , p_i – компоненты активной нагрузки, приложенной к телу. Части поверхности S_\pm электродированы, а часть S_H – неэлектродирована.

Сформулируем слабую постановку задачи. Следуя стандартным построениям, умножим уравнения движения на пробные функции v_i и ψ , удовлетворяющие главным граничным условиям $v_i |_{S_u} = 0$, $\psi |_{S_\pm} = \pm \varphi_0$ и воспользуемся определяющими соотношениями. Проинтегрируем полученные выражения по объему V , а результаты сложим. Используя формулу Гаусса-Остроградского и граничные условия, получим соотношение

$$\int_V L(u_i, v_i, C_{ijkl}, e_{kij}, \varphi, \psi, \varepsilon_{ij}, \rho) dV = F(v_i), \quad (4)$$

где $L = C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} + e_{kij} (\varphi_{,k} v_{i,j} + \psi_{,k} u_{i,j}) - \varepsilon_{ij} \varphi_{,i} \psi_{,j} - \rho \omega^2 u_i v_i$ – трилинейная форма; $F(v_i) = \int_{S_\sigma} p_i v_i ds + \int_{S_+} D_n \varphi_0 ds - \int_{S_-} D_n \varphi_0 ds$ – линейный функционал.

В рамках рассматриваемой проблемы общую обратную задачу можно рассматривать как задачу об отыскании неизвестных функций электро-механических свойств тела, удовлетворяющих равенству (4) для любых пробных функций ψ и v_i при соответствующих значениях компонент поля смещения u_i . Отметим, что при рассмотрении подобной постановки задачи считается заданной некоторая дополнительная информация, например, известно смещение на части границы области $u_i(x, \omega) = g_i(x, \omega)$, $x \in S_\sigma$, $\omega \in [\omega^-, \omega^+]$. Для упрощения поиска неизвестных функций также предполагается известной некоторая априорная информация о характере их изменения (положительность, монотонность, ограниченность и т.п.).

Отметим, что представленная задача является существенной нелинейной и некорректной. С другой стороны, использование свойства трилинейности формы L позволяет осуществить построение последовательности слабых постановок и интегральных уравнений первого рода с глад-

кими ядрами, которые позволяют организовать итерационную процедуру построения решения обратной задачи. Далее эта процедура будет более подробно описана для конкретных задач.

Постановка и решение прямой задачи для стержня. Рассмотрим установившиеся колебания электроупругого стержня длины $2l$, в котором модуль податливости S есть некоторая положительная функция продольной координаты x . Уравнения движения, граничные условия и определяющие соотношения имеют вид:

$$\sigma' + \rho\omega^2 u = 0, \quad u' = s\sigma - d\varphi'; \quad (5)$$

$$D' = 0, \quad D = d\sigma - y\varphi'; \quad (6)$$

$$\sigma(l) = p, \quad u(-l) = 0, \quad \varphi(\pm l) = 0; \quad (7)$$

где σ , u , D – компонента тензора напряжений, продольного перемещения и вектора электрической индукции; d – пьезомодуль; φ – потенциал электрического поля; y – диэлектрическая постоянная. Граничные условия (7) соответствуют задаче о колебаниях электроупругого стержня, консольно заземленного на левом конце с закороченными электродами. Колебания вызываются периодической во времени нагрузкой с амплитудой p , величины p , d , y – постоянные и считаются известными.

Решение прямой задачи о нахождении смещения $u(x)$ сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с непрерывным ядром путем обращения соответствующих дифференциальных операторов. Рассматриваемая задача безразмерна, введена новая переменная $\xi \in [0, 1]$, $x = l(2\xi - 1) \in [-l, l]$ и обозначения $s = s_0 f(\xi)$, $k_0^2 = d^2/s_0 y$, $k^2 = s_0 k_0^2 \rho \omega^2 4l^2$, где $f(\xi)$ – безразмерная функция, характеризующая закон изменения модуля податливости, k_0^2 – параметр, характеризующий коэффициент электромеханической связи [3], k – спектральный параметр, прямо пропорциональный частоте колебаний ω .

$$u(\xi) = \int_0^1 u(\chi) K(\chi, \xi) d\chi + b(\xi), \quad (8)$$

где $K(\chi, \xi) = k^2 \left[\int_0^{\min(\chi, \xi)} (k_0^{-2} f(s) - 1) ds + \xi\chi \right]$ – ядро интегрального оператора,

$b(\xi) = 2s_0 p \int_0^\xi f(s) ds$. Решение уравнения (8) построено численно на основе

метода коллокаций с использованием квадратурной формулы трапеций.

Обратная задача для стержня. Рассмотрим обратную задачу об отыскании закона изменения модуля податливости по некоторой дополнительной информации. В качестве такой информации приняты данные об АЧХ нагружаемого торца стержня.

Слабая постановка для этой задачи может быть легко получена на основе общего соотношения (4)

$$\int_{-1}^1 L(c, d_1, d_2, \rho, u, v, \varphi, \psi) dx = F, \quad (9)$$

где $L = cu'v' + d_1(u'\psi' + v'\varphi') + d_2\varphi'\psi' - \rho\omega^2 uv$, $F = v(l)\rho$, $d_1 = cd$, $d_2 = cd^2 - y$, $n = 1/s$, $y = \varepsilon + cd^2$. Отметим, что форма L имеет симметричную структуру относительно переменных $(u, \varphi) \leftrightarrow (v, \psi)$. Проведем линейризацию (9), положив $c = c_0 + \varepsilon c_1$, $u = u_0 + \varepsilon u_1$, $\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1$, $d_1 = d_{10} + \varepsilon d_{11}$, $d_2 = d_{20} + \varepsilon d_{21}$, где ε – формальный параметр. Полагая $v = u_0$, $\psi = \varphi_0$, получим

$$\int_{-1}^1 (c_1 u_0'^2 + 2d_{11} u_0' \varphi_0' + d_{21} \varphi_0'^2) dx + \rho (w(\omega) - u_0(l, \omega)) = 0 \quad \omega \in [\omega^-, \omega^+]. \quad (10)$$

В рамках представленной проблемы требуется определить закон изменения только модуля податливости, параметры d , ρ , y считаются постоянными, тогда из (10) получим интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода относительно функции поправки $f_1(\xi)$ закона изменения модуля податливости $f(\xi)$

$$\int_0^1 f_1(\xi) \left(k_0^{-2} k^2 \int_{\xi}^1 u_0 d\xi + 2s_0 \rho \right) d\xi = 2s_0 \rho (w(k) - u(1, k)) \quad k \in [k^-, k^+]. \quad (11)$$

Отыскание решения обратной задачи по восстановлению функции $f(\xi)$ организовано численно в ходе реализации итерационного процесса [1]. При этом начальное приближение $f_0(\xi)$ определялось из условия ми-

нимума функционала невязки $J = \int_{k^-}^{k^+} (u(1, k) - w(k))^2 dk$ в классе линейных

функций на компакте, построенном по априорной информации об ограниченности и положительности функции $f(\xi)$. В конкретных вычислительных экспериментах численное решение (11) реализовано на основе метода регуляризации А.Н. Тихонова с автоматическим выбором параметра регуляризации [5], а частотный диапазон выбирался между первой и второй резонансными частотами.

Анализ вычислительных экспериментов показал, что наиболее точно восстанавливаются монотонные функции (погрешность восстановления не более 3%), существенно немонотонные зависимости восстанавливаются хуже (погрешность 5 – 7%). При этом информация об АЧХ $w(k)$ для конечного числа частот из $k \in [k^-, k^+]$ считалось заданной без погрешности [2].

Решение обратной коэффициентной задачи для прямоугольной области. Используя идеологию слабой постановки, описанную выше, исследована также обратная коэффициентная задача об определении свойств поляризованной вдоль координаты x_3 электроупругой прямоугольной

области $S = \{x_1 \in [-l, l], x_3 \in [0, h]\}$. Нижняя и верхняя границы области электродированы, на верхней границе приложены механические нагрузки, определяемые двухкомпонентным вектором $pe^{-i\omega t}$, где $p = (p_1, 0, p_3)$. Торцы рассматриваемой области свободны от нагрузок.

Уравнения движения и определяющие соотношения имеют вид (1)–(2) при $i, j = 1, 3$. Рассмотрены два варианта граничных условий, в первом случае колебания возбуждаются только механической нагрузкой, при этом электроды закорочены

$$x_3 = 0: u_1 = 0, \phi = 0; \quad x_3 = h: \sigma_{i3} = p_i, \phi = 0; \quad x_1 = \pm l: \sigma_{11} = 0, D_1 = 0 \quad (12)$$

Второй вариант определяется отсутствием механического воздействия на рассматриваемую область, а колебания возбуждаются разностью потенциалов на электродах

$$x_3 = 0: u_1 = 0, \phi = 0; \quad x_3 = h: \sigma_{i3} = 0, \phi = \phi_0; \quad x_1 = \pm l: \sigma_{11} = 0, D_1 = 0: \quad (13)$$

Обратная задача состоит в восстановлении неизвестных функций $N_j(x_3)$, $e_{ij}(x_3)$, $\varepsilon_{ij}(x_3)$ $i, j = 1, 3$ по дополнительной информации о полях смещений, измеренных на верхней границе области при частотном зондировании, в случае граничных условий (12) или по амплитудно-частотной зависимости тока в цепи в случае граничных условий (13).

После применения к краевым задачам процедуры осреднения по координате x_1 и несложных упрощений получим три задачи относительно усредненных характеристик полей смещений $U_1(x_3)$, $U_3(x_3)$ и потенциала $\Psi(x_3)$, которые разделены относительно характеристик среды и соответствующих решений. Для обезразмеривания полученных задач введены следующие обозначения: $x_3 = hx$, $U_1 = hw$, $U_3 = hu$, $V_3 = hv$, $\Phi = \Phi(0)\phi$, $e_{33} = e_{33}(0)\tilde{e}_{33}$, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}(0)\tilde{\varepsilon}_{33}$, $\kappa^2 = \rho\omega^2 h^2 / C_{33}(0)$, $\lambda^2 = \varepsilon_{33}(0)C_{33}(0) / e_{33}^2(0)$, $C_{33} = C_{33}(0)\tilde{C}_{33}$, $C_{44} = C_{44}(0)\tilde{C}_{44}$ тогда задачи примут вид (знак волны далее опускаем).

$$\begin{aligned} \text{Задача 1. } (N_{44} w)' + \kappa^2 w = 0, \quad w(0) = 0, \quad N_{44}(1) w(1) = P_1, \\ w(h, \kappa) = t_1(\kappa) \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]. \end{aligned} \quad (14)$$

Полученная обратная коэффициентная задача (14) аналогична задаче о восстановлении неоднородных свойств упругого стержня при продольных колебаниях, которая была исследована ранее в [2].

$$\begin{aligned} \text{Задача 2. } (N_{33} u + e_{33} \psi)' + \kappa^2 u = 0, \quad (e_{33} u' - \lambda^2 \varepsilon_{33} \psi)' = 0, \\ u(0) = \psi(0) = 0, \quad N_{33}(1) u(1) + e_{33}(1) \psi'(1) = P_3, \quad \psi(1) = 0, \quad (15) \\ u(1, \kappa) = t_3(\kappa) \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]. \quad (16) \end{aligned}$$

$$\text{Задача 3. } (N_{33} v + e_{33} \phi)' + \kappa^2 v = 0, \quad (e_{33} v' - \lambda^2 \varepsilon_{33} \phi)' = 0$$

$$v(0) = \phi(0) = 0, \quad N_{33}(1)v(1) + e_{33}(1)\phi'(1) = 0, \quad \phi(1) = F_0. \quad (17)$$

$$D_3(1, \kappa) = D_{30}(\kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]. \quad (18)$$

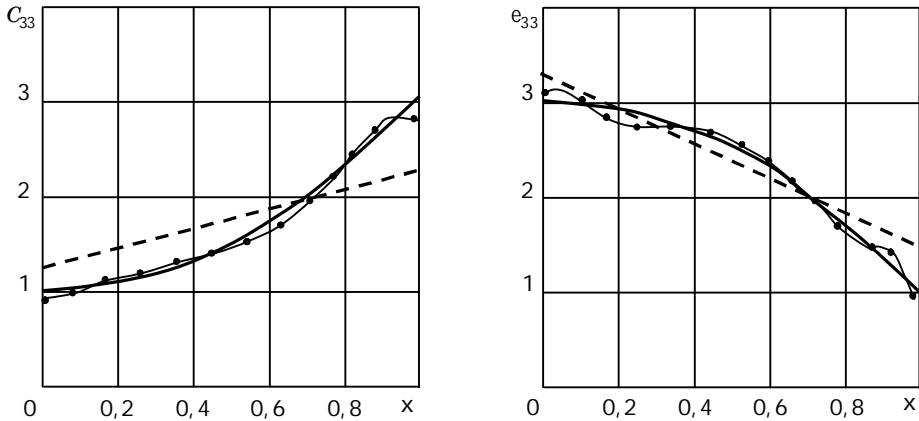
Проведя процедуру линеаризации в задачах (15)–(18), получим систему интегральных уравнений Фредгольма 1-ого рода с непрерывными ядрами относительно поправок к восстанавливаемым функциям

$$\int_0^1 \left[N_{33}^{-1} (u^{0'})^2 + 2e_{33}^{-1} u^{0'} \psi^{0'} - \lambda^2 \varepsilon_{33}^{-1} (\psi^{0'})^2 \right] dx = -P_3 \left(\frac{1}{3}(\kappa) - u^0(1, \kappa) \right),$$

$$\int_0^1 \left[N_{33}^{-1} (v^{0'})^2 + 2e_{33}^{-1} v^{0'} \phi^{0'} - \lambda^2 \varepsilon_{33}^{-1} (\phi^{0'})^2 \right] dx = F_0 \left(D_{30}(\kappa) - D_3^0(1, \kappa) \right). \quad (19)$$

Численно решена обратная задачи об определении характеристик среды с привлечением итерационного процесса [1], на каждом этапе которого решается система (19) для определения поправок восстанавливаемых функций относительно начальных приближений $N_{33}^0, e_{33}^0, \varepsilon_{33}^0$. Функции u^0, v^0, ϕ^0, ψ^0 определялись из решения прямых задач (15), (17) для заданных начальных приближений функций.

Вычислительные эксперименты. На рисунке приведены результаты восстановления функций, моделирующих законы изменения обезразмеренных характеристик $N_{33}(x)$ и $e_{33}(x)$. Функция $\varepsilon_{33}(x)$, характеризующая диэлектрическую проницаемость, считалась известной. Для построения



регуляризованного решения системы (19) использован метод Тихонова [5]. В качестве начальных приближений в численных расчетах выбирались линейные функции, определяемые из условия минимума функционала невязки на построенном из априорной информации компактном множестве. На рисунках сплошной линией показан график исходной функции, пунктиром – начального приближения, точками – восстановленной. Для восстанавливаемых функций $N_{33}(x) = 1 + 2x^2, e_{33}(x) = 3 - 2x^2$, начальное приближение найдено в виде $N_{33}^0(x) = 1,25 + x, e_{33}^0(x) = 3,25 - 1,75x$. По

рассчитанным АЧХ выбран частотный диапазон $\kappa \in [3,8; 8,4]$. Для достижения точности 10^{-4} при минимизации функционала невязки потребовалось 5 итераций. Погрешность восстановления в равномерной метрике не превосходит 8%.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 10-01-00194), в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П596) и гранта Президента РФ (№ МК-6213.2012.1).

РЕЗЮМЕ. Запропоновано спосіб розв'язання зворотних коефіцієнтних задач про відновлення властивостей неоднорідних електропружних тіл за вимірними механічними або електричними граничними характеристиками. Сформульовано слабку постановку задачі ідентифікації, отримано інтегральне рівняння Фредгольма 1-го відносно відновлюваних функцій. Запропонований підхід застосований до задачі про визначення закону зміни модуля податливості електропружного стержня з аналізу даних АЧХ навантажувального торця стержня при подовжніх коливаннях із закороченими торцевими електродами. Досліджено задачу про відновлення пружних модулів та п'езомодуля для прямокутної області з аналізу граничних полів зміщень і по амплітудно-частотній залежності струму в ланцюзі, збуджуваних різницею потенціалів на електродах або механічним вантаженням. Представлено результати обчислювальних експериментів.

Ключові слова: електропружність, пьезокераміка, неоднорідність, ідентифікація, стрижень, прямокутна область, слабка постановка, інтегральні рівняння, ітераційний процес.

SUMMARY. The method of solution for inverse coefficient problems for properties identification of inhomogeneous electroelastic bodies on the measured mechanical or electric boundary characteristics is offered. Weak statement of identification problem is formulated, integral Fredholm's equation of 1st kind concerning restored functions is received. The offered approach is applied to a problem about definition for the law of the pliability module in electroelastic core from the analysis of data AFC of a loaded end face of a core at longitudinal oscillations with the short-circuited face electrodes. The problem about restoration elastic modules and pezo module in rectangular area from the analysis of boundary fields of displacement and an amplitude-frequency dependence of the current in the circuit, raised by a potential difference on electrodes or mechanical loads is investigated. Results of computing experiments are presented.

Key words: electroelasticity, piezoceramic, heterogeneous, identification, rod, layer, rectangular area, the weak formulation, integral equations, iterative process.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бакушинский А. Б., Гончарский А. В. Итеративные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1989. – 128 с.
2. Бочарова О. В., Ватульян А. О. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акустический журнал. – 2009. – Т. 55, № 3. – С. 275–282.
3. Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2008. – 176 с.
4. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 288 с.

*Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
Южный математический институт, г. Владикавказ*

Поступила 26.02.2012

УДК 539.3

Л.П. ХОРОШУН, д-р. физ.-мат. наук,
Л. В. НАЗАРЕНКО, д-р. физ.-мат. наук

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДЕФОРМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ С ОРТОТРОПНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

Модель деформирования композитных материалов с физически нелинейными компонентами обобщается на случай материалов, представляющих собой матрицу, армированную однонаправленными эллипсоидальными включениями. Предполагается, что матрица является изотропной и деформируется нелинейно, а включения являются линейно-упругими и имеют ортотропную симметрию физико-механических свойств. Исходными являются стохастические дифференциальные уравнения физически нелинейной теории упругости. Преобразование их к интегральным уравнениям и применение метода условных моментов приводит задачу к системе нелинейных алгебраических уравнений, решение которой строится методом простых итераций. Построены алгоритмы вычисления эффективных деформативных свойств композитов с ортотропными компонентами, где нелинейность обусловлена нелинейным деформированием матрицы. Исследованы зависимости коэффициентов Пуассона от макродеформации и диаграммы макродеформирования для различной объемной концентрации компонентов и параметра, характеризующего форму включений.

Ключевые слова: дискретно-волоконистый композитный материал, стохастическая структура, напряженно-деформированное состояние, ортотропные свойства, эффективные характеристики, физическая нелинейность.

С увеличением нагрузки многие материалы, в том числе и композитные, проявляют нелинейный характер деформирования. Нелинейность их деформирования может быть обусловлена как физической нелинейностью деформирования компонентов [1, 5], так и микроразрушениями в компонентах [1, 3, 6–9], проявляющимися при деформировании в виде образования микропор или микротрещин. Большой интерес представляют исследования деформативных свойств композитных материалов на основе металлической матрицы, а также на основе полимерных материалов при повышенных температурах. В работе [5] на основе моделей и методов механики стохастически неоднородных сред изучены эффективные деформативные свойства и дисперсно-упрочненных композитов с изотропными компонентами, которые следуют нелинейному закону связи между напряжениями и деформациями. В данной работе эти результаты обобщаются на случай, когда компоненты композитного материала имеют ортотропную симметрию физико-механических свойств. Получены алгоритмы вычисления эффективных деформативных свойств, исследованы диаграммы макродеформирования в зависимости от объемной концентрации компонентов и параметров, характеризующих форму включений.

Постановка задачи. Рассмотрим представительный объем композитного материала стохастической структуры, компоненты которого следуют физически нелинейному закону деформирования.

Если макрообъем композита находится в условиях однородных макронапряжений $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформаций $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$, то напряжения $\sigma_{ij}(x)$ и деформации $\varepsilon_{ij}(x)$ будут статистически однородными случайными функциями, удовлетворяют свойству эргодичности, т.е. осреднение случайных полей по объему совпадает со статистическим осреднением по ансамблю реализаций. В этом случае макронапряжения $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформации $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ композита связаны соотношениями

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \lambda_{ijkl}^* (\langle \varepsilon_{mn} \rangle) \langle \varepsilon_{kl} \rangle \quad (i, j, k, l = 1, 2). \quad (1)$$

Здесь $\lambda_{ijkl}^* (\langle \varepsilon_{mn} \rangle)$ – тензор эффективных упругих модулей, зависящий от макродеформаций. Для его определения необходимо решить задачу о напряженно-деформированном состоянии композитного материала в микроточке, которая сводится к уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j}(x) = 0, \quad (2)$$

зависимостям между напряжениями и деформациями:

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijkl} (\varepsilon_{mn}) \varepsilon_{kl}, \quad (3)$$

и соотношениям Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (4)$$

где u_i – неизвестные перемещения, причем тензор модулей упругости $\lambda_{ijkl}(\varepsilon_{mn})$, детерминировано зависящий от деформаций ε_{mn} , является случайной статистически однородной функцией координат.

Подставляя выражения (3) в уравнение равновесия (2) и учитывая соотношение Коши (4), можно получить систему физически и статистически нелинейных дифференциальных уравнений в перемещениях [5]. Представив случайные поля напряжений, деформаций и перемещений в виде суммы математических ожиданий и флуктуаций, полученную систему можно преобразовать в систему дифференциальных уравнений относительно флуктуаций перемещений $u_i^0 = u_i - \langle u_i \rangle$ с нулевыми граничными условиями на бесконечно удаленной границе области

$$\lambda_{ijkl}^c u_{k,lj}^0 + \left[(\lambda_{ijkl}(\varepsilon_{mn}) - \lambda_{ijkl}^c) \varepsilon_{kl} \right]_{,j} = 0, \quad (5)$$

$$u_i^0|_s = 0, \quad (6)$$

причем λ_{ijmn}^c – некоторый тензор модулей упругости с независимыми от координат компонентами.

С помощью тензорной функции Грина, удовлетворяющей уравнению

$$\begin{aligned} \lambda_{ijmn}^c G_{mk,jn} (x-y) + \delta(x-y) \delta_{ik} &= 0, \\ G_{mk} (x-y)|_{\infty} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

краевую задачу (5), (6) можно привести к интегральному уравнению относительно деформаций

$$\varepsilon_{ij} (x) = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + K_{ijkl} (x-y) * \left[\left(\lambda_{klmn} (\varepsilon_{pq} (y)) - \lambda_{klmn}^c (y) \right) \varepsilon_{mn} (y) \right], \quad (8)$$

в котором оператор $K_{ijkl} (x-y)$ действует в соответствии с правилом

$$K_{ijkl} (x-y) * \psi (y) = \int_V G_{(ik,jl)} (x-y) (\psi (y) - \langle \psi \rangle) d^3y. \quad (9)$$

Нелинейная зависимость между напряжениями и деформациями (3) относится к произвольной точке тела, которая может находиться в одном из компонентов. Если точка находится в k -компоненте, то

$$\sigma_{ij}^k = \lambda_{ijmn}^k (\varepsilon_{pq}^k) \varepsilon_{mn}^k \quad (k = 1, 2). \quad (10)$$

Пренебрегая флуктуациями деформаций в пределах компонента нелинейный закон (10) можно записать в виде

$$\langle \sigma_{ij}^k \rangle = \lambda_{ijmn}^k \left(\langle \varepsilon_{pq}^k \rangle \right) \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle. \quad (11)$$

Усредняя (11) по макрообъему, для макронапряжений получим

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sum_{k=1}^2 c_k \lambda_{ijmn}^k \left(\langle \varepsilon_{pq}^k \rangle \right) \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle. \quad (12)$$

Применяя к уравнению (8), (9) аппарат условного усреднения и пренебрегая флуктуациями деформаций в пределах компонентов, получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \sum_{k=1}^N K_{ijpq}^{vk} \left[\lambda_{pqmn}^k \left(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^k \rangle \right) - \lambda_{pqmn}^c \right] \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle \quad (k, v=1, 2). \quad (13)$$

где

$$K_{ijpq}^{vk} = K_{ijpq} (x-y) p_{vk} (x-y); \quad (14)$$

$\lambda_{pqmn}^k \left(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^k \rangle \right)$ – значение элементов тензора модулей упругости в k -компоненте, $p_{vk} (x-y)$ – вероятность перехода из v -компоненты в точке x в k -компоненту в точке y .

Таким образом, для определения тензора эффективных упругих модулей $\lambda_{ijkl}^* \left(\langle \varepsilon_{mn} \rangle \right)$ необходимо решить систему нелинейных алгебраических уравнений (13) относительно средних деформаций в компонентах и подставив их в (12), найти нелинейную связь между макронапряжениями

и макродеформациями (1).

Метод решения. Рассмотрим композитный материал, представляющий собой матрицу, армированную случайно расположенными однонаправленными эллипсоидальными включениями. Будем считать, что включения имеют ортотропную симметрию физико-механических свойств (9 независимых постоянных тензора модулей упругости $\lambda_{11}^1, \lambda_{12}^1, \lambda_{13}^1, \lambda_{22}^1, \lambda_{23}^1, \lambda_{33}^1, \lambda_{44}^1, \lambda_{55}^1, \lambda_{66}^1$), а матрица является изотропной (2 независимые постоянные тензора модулей упругости λ_2 и μ_2), включения являются линейно-упругими (не зависят от деформаций), матрица следует закону нелинейной связи между напряжениями и деформациями; для матрицы объемные деформации и напряжения связаны линейно, т.е. модуль объемного сжатия $K_2 = \lambda_2 + 2/3\mu_2$ не зависит от деформаций, а девиаторы напряжений $\langle \sigma_{ij}^2 \rangle'$ и деформаций $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle'$ связаны нелинейным законом:

$$\langle \sigma_{ij}^2 \rangle' = 2\mu_2 (J_2) \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle', \quad J_2 = \left(\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle', \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle' \right)^{1/2}. \quad (15)$$

Тензор λ_{ij}^* эффективных модулей упругости рассматриваемого композита можно определить как функцию модулей упругости компонентов $\lambda_{11}^1, \lambda_{12}^1, \lambda_{13}^1, \lambda_{22}^1, \lambda_{23}^1, \lambda_{33}^1, \lambda_{44}^1, \lambda_{55}^1, \lambda_{66}^1, \lambda_2(J_2), \mu_2(J_2)$, объёмного содержания включений c_1 в матрице и параметров формы включений \bar{t}_2, \bar{t}_3 :

$$\lambda_{ij}^* = \lambda_{ij}^* \left(\lambda_{11}^1, \lambda_{12}^1, \lambda_{13}^1, \lambda_{22}^1, \lambda_{23}^1, \lambda_{33}^1, \lambda_{44}^1, \lambda_{55}^1, \lambda_{66}^1, \lambda_2(J_2), \mu_2(J_2), c_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3 \right), \quad \bar{t}_2 = \frac{t_2}{t_1}, \quad \bar{t}_3 = \frac{t_3}{t_1}, \quad (16)$$

где t_1, t_2, t_3 размеры полуосей эллипсоидальных включений в направлениях координатных осей соответственно.

Диаграмму деформирования матрицы будем описывать законом с линейным упрочнением, т.е.

$$\mu_2(J_2) = \begin{cases} \mu_2^0, & J_2 < \frac{k_2}{2\mu_2^0} \\ \mu_2^0 + \left(1 - \frac{\mu_2^0}{\mu_2^0} \right) \frac{k_2}{2J_2}, & J_2 \geq \frac{k_2}{2\mu_2^0} \end{cases}, \quad (17)$$

причем $\mu_2^0, \mu_2^0, k_2 = \sqrt{2/3}\sigma_{2T}$ – постоянные материала (σ_{2T} – предел текучести материала матрицы), а

$$\lambda_2(J_2) = K_2 - \frac{2}{3}\mu_2(J_2). \quad (18)$$

Решение рассматриваемой нелинейной задачи будем находить мето-

дом последовательных приближений, где в качестве нулевого приближения возьмем решение линейной задачи: $\lambda_2^{(0)} = \lambda_2(0)$, $\mu_2^{(0)} = \mu_2(0)$.

Для композитного материала стохастической структуры с ортотропными компонентами и эллипсоидальными включениями решение линейной задачи получено в работе [4]. На основании аналитических выражений может быть определен тензор эффективных упругих модулей композитного материала в нулевом приближении $\lambda_{ij}^{*(0)}$ как функции модулей упругости компонентов в нулевом приближении $\lambda_{11}^1, \lambda_{12}^1, \lambda_{13}^1, \lambda_{22}^1, \lambda_{23}^1, \lambda_{33}^1, \lambda_{44}^1, \lambda_{55}^1, \lambda_{66}^1$, $\lambda_2^{(0)}(J_2)$, $\mu_2^{(0)}(J_2)$, объемной концентрации включений c_1 и параметров \bar{t}_2, \bar{t}_3 , характеризующих форму включений

$$\lambda_{ij}^{*(0)} = \lambda_{ij}^{*(0)} \left(\lambda_{11}^1, \lambda_{12}^1, \lambda_{13}^1, \lambda_{22}^1, \lambda_{23}^1, \lambda_{33}^1, \lambda_{44}^1, \lambda_{55}^1, \lambda_{66}^1, \lambda_2^{(0)}(J_2), \mu_2^{(0)}(J_2), c_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3 \right). \quad (19)$$

Если задан тензор макродеформаций $\langle \varepsilon_{pq} \rangle$, то зная эффективные упругие модули композитного материала, можно вычислить средние деформации в компонентах в нулевом приближении. Средние деформации в матрице в нулевом приближении можно вычислить на основе соотношений [4]:

$$\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle^{(0)} = \left(I_{klpq} + c_2 \left(\langle \lambda_{klmn} \rangle^{(0)} - \lambda_{klmn}^{*(0)} \right) \left(\lambda_{mnpq}^{[3](0)} \right)^{-1} \right) \langle \varepsilon_{pq} \rangle. \quad (20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \langle \lambda_{klmn} \rangle^{(0)} &= c_1 \lambda_{klmn}^1 + c_2 \lambda_{klmn}^{2(0)}, \\ \lambda_{mnpq}^{[3](0)} &= \lambda_{mnpq}^1 - \lambda_{mnpq}^{2(0)}, \quad c_1 + c_2 = 1; \\ \lambda_{ijkl}^{2(0)} &= \lambda_2^{(0)}(J_2) \delta_{ij} \delta_{mn} + 2\mu_2^{(0)}(J_2) I_{ijmn}. \end{aligned} \quad (21)$$

Алгоритм последовательных приближений для вычисления нелинейных эффективных деформативных характеристик композитного материала при нелинейном деформировании его матрицы можно представить следующим образом: средние деформации в матрице в n -ом приближении связаны с эффективными модулями в $(n-1)$ -ом приближении и макродеформациями

$$\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle^{(n)} = \left(I_{klpq} + c_2 \left(\langle \lambda_{klmn} \rangle^{(n-1)} - \lambda_{klmn}^{*(n-1)} \right) \left(\lambda_{mnpq}^{[3](n-1)} \right)^{-1} \right) \langle \varepsilon_{pq} \rangle. \quad (22)$$

Эффективные деформативные характеристики в $(n-1)$ -ом приближении связаны со средними деформациями в $(n-1)$ -ом приближении

$$\lambda_{ij}^{*(n-1)} = \lambda_{ij}^{*(n-1)} \left(\lambda_{11}^1, \lambda_{12}^1, \lambda_{13}^1, \lambda_{22}^1, \lambda_{23}^1, \lambda_{33}^1, \lambda_{44}^1, \lambda_{55}^1, \lambda_{66}^1, \right.$$

$$\lambda_2^{(n-1)}(J_2), \mu_2^{(n-1)}(J_2), c_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3, \quad (23)$$

где

$$\mu_2^{(n-1)}(J_2) = \begin{cases} \mu_2^0, & J_2^{(n-1)} < \frac{k_2}{2\mu_2^0} \\ \mu_2^0 + \left(1 - \frac{\mu_2^0}{\mu_2}\right) \frac{k_2}{2J_2^{(n-1)}}, & J_2^{(n-1)} \geq \frac{k_2}{2\mu_2^0} \end{cases},$$

$$\lambda_2^{(n-1)}(J_2) = K_2 - \frac{2}{3} \mu_2^{(n-1)}(J_2); \quad (24)$$

$$J_2^{(n-1)} = \left(\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle^{(n-1)}, \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle^{(n-1)} \right)^{1/2}. \quad (25)$$

Таким образом, уравнения (19)–(25) позволяют определять эффективные модули композитного материала с трансверсально-изотропными компонентами с учетом физической нелинейности матрицы как функцию макродеформаций:

$$\lambda_{ijkl}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{ijkl}^{*(n)}(\langle \varepsilon_{mn} \rangle). \quad (26)$$

Анализ результатов численных исследований. Используя изложенную методику на основе соотношений (18)–(26) можно определить деформативные свойства дискретно-волокнутого композита с ортотропными включениями и напряженно-деформированное состояние при заданных макродеформациях $\langle \varepsilon_{mn} \rangle$.

Вычисления были проведены для композитного материала с ортотропными эллипсоидальными включениями, когда

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^1 &= 287 \text{ ГПа}, & \lambda_{22}^1 &= 365 \text{ ГПа}, & \lambda_{33}^1 &= 300 \text{ ГПа}, \\ \lambda_{23}^1 &= 90 \text{ ГПа}, & \lambda_{13}^1 &= 85 \text{ ГПа}, & \lambda_{12}^1 &= 128 \text{ ГПа}, \\ \lambda_{44}^1 &= 110 \text{ ГПа}, & \lambda_{55}^1 &= 135 \text{ ГПа}, & \lambda_{66}^1 &= 133 \text{ ГПа}; \end{aligned}$$

алюминиевая матрица имеет характеристики

$$\begin{aligned} K_2 &= 70,3 \text{ ГПа}, & \mu_2^0 &= 26,09 \text{ ГПа}, \\ \mu_2^1 &= 10 \text{ ГПа}, & \sigma_T &= 0,45 \text{ ГПа}, \end{aligned}$$

а объёмная концентрация включений c_1 принимает значения 0; 0,25; 0,5; 0,75. Параметры, характеризующие форму эллипсоидальных включений, принимали значения $\bar{t}_2 = 3$, $\bar{t}_3 = 6$.

На рис. 1 и 2 представлены зависимости коэффициентов Пуассона ν_{12}^* и ν_{13}^* от макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ для различного объёмного содержания включений c_1 . На рис. 3 показаны кривые зависимостей макро-

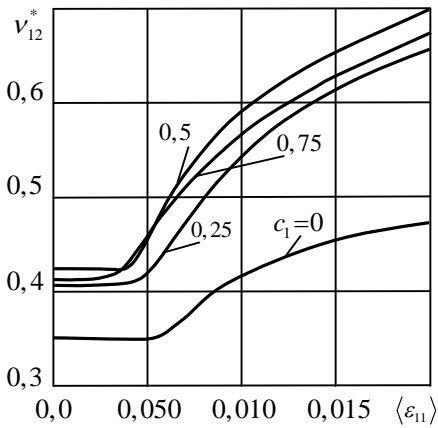


Рис. 1

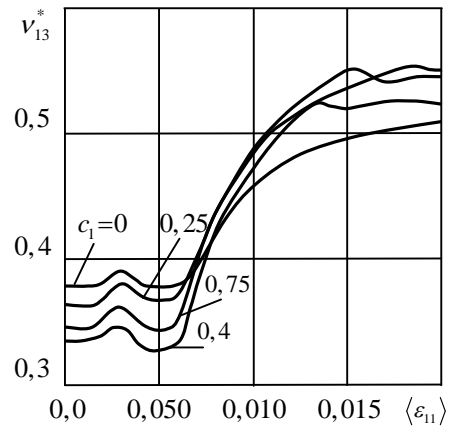


Рис. 2

напряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$ от макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ для различного объемного содержания включений c_1 . Из приведенных графиков виден характер влияния объемного содержания волокон на эффективные деформативные свойства композита. Увеличение объемного содержания волокон приводит к увеличению жесткости и предела текучести композита, а также уменьшению коэффициента Пуассона v_{13}^* .

Коэффициент Пуассона v_{12}^* увеличивается с увеличением объемного содержания волокон. А при высоком объемном содержании волокон наблюдается более сложная зависимость, что обусловлено влиянием анизотропии волокон.

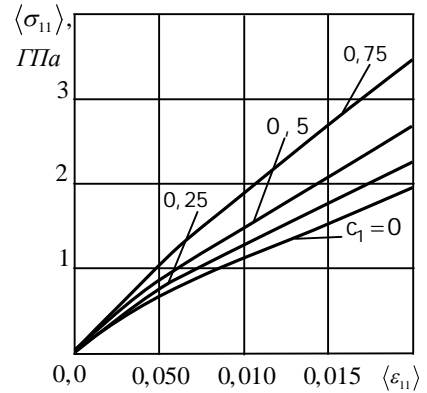


Рис. 3

РЕЗЮМЕ. Модель деформування композитних матеріалів з фізично-нелінійними компонентами узагальнюється на випадок матеріалів, які є матрицею, армованою односпрямованими еліпсоїдальними включеннями. Вважається, що матриця являється ізотропною і деформується нелінійно, а включення – лінійно-пружними і мають ортотропну симетрію фізико-механічних властивостей. Базовими являються стохастичні диференціальні рівняння фізично нелінійної теорії пружності. Зведення їх к інтегральним рівнянням і застосування методу умовних моментів приводить задачу до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, рішення якої будується методом простих ітерацій. Побудовано алгоритми обчислення ефективних деформативних властивостей композитів з ортотропними компонентами, де нелінійність обумовлена нелінійним деформуванням матриці. Досліджено залежності коефіцієнтів Пуассона від макродеформацій і діаграми макродеформування для різного об'ємного вмісту компонентів і параметрів, які характеризують форму включень.

Ключові слова: дискретно-волокнистий композитний матеріал, стохастична структура, напружено-деформований стан, ортотропні властивості, ефективні характеристики, фізична нелінійність

SUMMARY. The model of deformation of composite materials with physically nonlinear components is developed for cases of materials, which are a matrix strengthen by

unidirectional ellipsoidal inclusions. It is assumed that matrix is deformed in according with nonlinear law and inclusions are linear-elastic and have orthotropic symmetry of physical and mechanical properties. Stochastic differential equations of physically nonlinear elasticity theory are basic equations. Transformation of these equations into integral equations and application of the method of conditional moments allow us to reduce the problem to the system of nonlinear algebraic equations. Solution is constructed by the method of simple iteration. The algorithm for determination of the nonlinear deformative properties of such a material is constructed. The nonlinearity of composite deformations is caused by the nonlinearity of the matrix deformations. The dependences of Poisson coefficients on macrodeformations and the nonlinear stress-strain diagrams for such a composite are investigated for different volume concentrations and parameters characterizing the shape of inclusions.

Key words: discrete-fibers composite material, stochastic structure, stress-strain state, orthotropic properties, effective characteristics, physical nonlinearity

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. – М: Изд-во иностр. лит., 1961. – 777 с.
2. *Назаренко Л.В.* Деформирование и кратковременная повреждаемость материала армированного бесконечными ортотропными волокнами // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 29–38.
3. *Тамуж В.П., Куксенко В.С.* Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
4. *Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Шикуча Е.Н., Назаренко Л.В.* Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – К.: Наук. думка, 1993. – 390 с. – (Механика композитов: В 12 т., т. 3).
5. *Хорошун Л.П., Шикуча Е.Н.* Нелинейные деформативные свойства дисперсно-упрочненных материалов // Механика композитных материалов, – 2002. – Т. 38, № 4. – С. 473–486.
6. Khoroshun L. P. Principles of the micromechanics of material damage. 1. Short-term damage // Int. Appl. Mech. – 1998. – Vol. 34, № 10. – P. 120–127.
7. Khoroshun L. P., Nazarenko L. V. Deformation and microdamaging of discretely-fibrous composites with transversally-isotropic components // Int. Appl. Mech. – 2003. – Vol. 39, № 6. – P. 696–703.
8. Khoroshun L.P., Nazarenko L.V. Coupled Processes of Deformation and Damageability of Composites with Orthotropic Inclusions under Unlimited Function of Long-term Microstrength. // Int. Appl. Mech. – 2009. – Vol. 45, № 3. – P. 59–72.
9. Nazarenko L.V. Deformative Properties of granular-fiber composites under matrix microdamaging // Appl. Probl. of Math. and Mech. – 2008. – Vol. 6. – P. 146–153.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 26.01.2012

УДК 539.3

И. К. СЕНЧЕНКОВ, д-р физ.-мат. наук, Н. Д. ОКСЕНЧУК

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МИКРОСТРУКТУРЫ НА ОСТАТОЧНОЕ НДС ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Рассматривается динамическая задача об импульсном термомеханическом нагружении полупространства из вязкопластического материала. Учитываются микроструктурные превращения как результат распада переохлажденного аустенита в мартенсит, которые сопровождаются изменением объема и пластических свойств материала. Используется унифицированная модель течения Боднера-Партома, обобщенная на случай мультифазового состава материала. Задача решается численно с использованием метода конечных элементов. Проводится исследование остаточного напряженно-деформированного состояния полупространства.

Ключевые слова: микроструктурные превращения, модель Боднера-Партома, правило смесей, импульсное термомеханическое нагружение

Детали машин и элементы металлических конструкций часто подвергаются импульсной термомеханической обработке. Остывание материала после импульсного нагружения может сопровождаться микроструктурными превращениями (МСП). К таким превращениям относится распад переохлажденного аустенита в фазы феррита, перлита, бейнита, мартенсита и др. При МСП происходит изменение объема материала, которое вызывает большие внутренние напряжения и деформирование материала. Текущее и остаточное напряженно-деформированные состояния (НДС) цилиндрических тел с учетом только объемного эффекта при МСП исследованы в работах [5, 6].

В данной статье исследуются остаточные напряженно-деформированное и микроструктурное состояния полупространства, которые формируются под действием термического, механического и комбинированного термомеханического импульсного нагружения. Используется унифицированная модель течения Боднера-Партома [9, 12, 15], которая обобщена на случай мультифазового состава материала. Параметры модели течения, которые отвечают за предел текучести и временное сопротивление материала, для отдельных фаз определяются с помощью линейного правила смесей на основе экспериментальных данных, представленных в работах [1, 8, 10].

Постановка задачи. Математическая постановка динамической осесимметричной задачи включает:

– соотношения Коши

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right); \quad (1)$$

– уравнения движения

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= \rho \ddot{u}_r, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \ddot{u}_z;\end{aligned}\quad (2)$$

– уравнение теплопроводности

$$c_V \dot{\theta} + 3\alpha\theta K_V (\dot{\varepsilon}_{kk} - 3\alpha\dot{\theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - D' = r_s. \quad (3)$$

Здесь u_r и u_z – компоненты вектора перемещений; ε_{rr} , ε_{zz} , ε_{rz} и $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ – компоненты тензора деформации; σ_{rr} , σ_{zz} , σ_{rz} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ – компоненты тензора напряжений; ρ – плотность материала, θ – абсолютная температура; c_V и k – коэффициенты теплоемкости при постоянном объеме и теплопроводности; K_V – модуль объемного сжатия; $\dot{\varepsilon}_{kk} = \dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{zz} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}$; r_s – объемный источник тепла; D' – скорость диссипации; $\varepsilon_{ij}^{\theta ph}$ – термофазовая деформация, которая учитывает изменение объема материала при фазовых превращениях и определяется через удельные объемы и концентрации фаз [5, 6, 11], $\varepsilon_{ij}^{\theta ph} = \varepsilon^{\theta ph} \delta_{ij}$.

Постановка задачи включает также

– начальные условия

$$u_r = \dot{u}_r = 0; \quad u_z = \dot{u}_z = 0; \quad \theta = \theta_0, \quad t = 0; \quad (4)$$

– тепловые граничные условия

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial z} = \begin{cases} q_0 \sin \frac{\pi}{t_p} t, & t \leq t_p, \\ 0, & t > t_p; \end{cases} \quad (5)$$

– механические граничные условия

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} -p_0 \sin \frac{\pi}{t_\sigma} t, & t \leq t_\sigma, \\ 0, & t > t_\sigma; \end{cases} \quad (6)$$

где θ_0 – начальная температура; q_0 и p_0 – заданные параметры нагружения; t_p , t_σ – времена действия импульсов, между которыми принимается соотношение $t_\sigma = 2t_p$.

Рассматривается полупространство $z > 0$, $0 < r < \infty$. Как и в работах [2, 3, 16] предполагается, что от нуля отлична только компонента перемещения u_z , причем $u_z = u_z(z, t)$, а также $\theta = \theta(z, t)$. При этих допущениях задача для полупространства эквивалентна задаче для стержня

$0 < r < R$, $z > 0$, на боковой поверхности которого реализуются условия жесткого гладкого контакта и теплоизоляции

$$u_r = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, \quad r = R, \quad z > 0; \quad (7)$$

с условиями (5) – (6) на торце $z = 0$.

Термомеханическое поведение материала описывается моделью течения Боднера–Партома, которая включает

– уравнение аддитивности деформации

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^{0ph} \quad i, j = r, z, \varphi; \quad (8)$$

– закон Гука, записанный для девиаторной и шаровой составляющих тензоров,

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^p), \quad \sigma_{kk} = 3K_V(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{0ph}); \quad (9)$$

– закон течения Прандтля-Рейса с условием неупругой несжимаемости

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = D_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(\bar{K}_0 + K)^2}{3J_2} \right]^n \right\} \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \quad \dot{\varepsilon}_{kk}^p = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p(0) = 0; \quad (10)$$

– уравнение эволюции параметра изотропного упрочнения

$$\dot{K} = m_1(\bar{K}_1 - K)\dot{W}^p, \quad K(0) = 0. \quad (11)$$

При этом G – модуль сдвига; s_{ij} , e_{ij} – девиаторы тензоров напряжений и деформации соответственно, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}/3$, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk}\delta_{ij}/3$; δ_{ij} – символ Кронекера; J_2 – второй инвариант девиатора тензора напряжений, $J_2 = s_{ij}s_{ij}/2$; \dot{W}^p – пластическая мощность, $\dot{W}^p = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p$; ε_{ij}^p , ε_{ij}^e – неупругая и упругая составляющие деформации; D_0 – предельное значение скорости неупругой деформации при сдвиге, $D_0 = 10^8 \text{ c}^{-1}$; n , m_1 , K_0 , K_1 – параметры модели.

Для мультифазового состава материала параметры модели K_0 , K_1 переопределяются с помощью линейного правила смесей

$$K_0 \rightarrow \bar{K}_0 = K_0^{(\xi)}y_\xi, \quad K_1 \rightarrow \bar{K}_1 = K_1^{(\xi)}y_\xi; \quad (12)$$

где y_ξ – объемные концентрации микроструктурных фаз, $\xi = f, p, b, m$, соответственно, феррита, перлита, бейнита и мартенсита; $K_1^{(\xi)}$, $K_0^{(\xi)}$ – параметры модели для соответствующих фаз.

Метод решения задачи. Задача (1)–(12) является нелинейной и решается численно с использованием неявных временных схем Кранка–

Николсона и Эйлера с автоматическим выбором шага, итерационного метода на каждом временном шаге и метода конечных элементов для решения линеаризованной краевой задачи на каждой итерации. Данный подход описан в работе [4].

Расчет концентрации фаз распада переохлажденного аустенита проводится с помощью термокинетической диаграммы (ТКД) [8] и соотношений для удельных объемов фаз [11, 14]. Накопление концентрации фаз вдоль кривых охлаждения в области аустенит-мартенситного превращения рассчитывается с помощью уравнения Коистинена-Марбургера [13].

Результаты расчетов и выводы. ТКД диаграмма для стали 35ХМА показана на рис. 1 [10]. Начальной структурой материала считается $a = 0$, $b = 0,79$, $f + p = 0,11$, $m = 0,10$. Расчеты проводились для стержня радиусом $R = 10^{-4}$ м, длиной $L = 5 \cdot 10^{-3}$ м. При исследовании принималось: $p_0 = 8$ ГПа, $q_0 = 2 \cdot 10^{11}$ кВт/м², $t_p = 1 \cdot 10^{-8}$ с, $\Delta t = 0.2 \cdot 10^{-10}$ с, где Δt – начальный шаг по времени. Начальная температура стержня θ_0 равна 20°C.

На рис. 1 тонкими линиями показаны экспериментальные траектории охлаждения образцов (ТКД – траектории), а сплошные жирные линии ограничивают области превращения аустенита соответственно в фер-

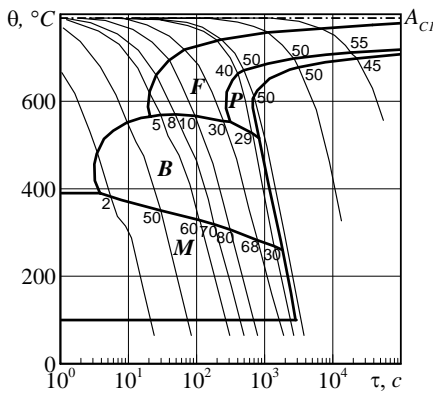


Рис. 1

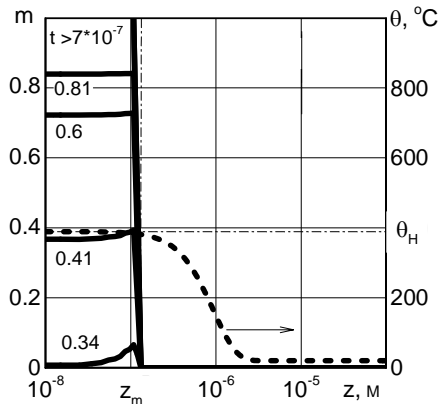


Рис. 2

рит (F), перлит (P), бейнит (B) и мартенсит (M); $A_{c1} \approx 790^\circ\text{C}$ – температура начала распада аустенита. На нижних границах областей преобразования цифрами показано процентный состав накопленной фазы. Вследствие быстрого охлаждения в рассматриваемых процессах происходит только мартенситное превращение.

На рис. 2 показано накопление концентрации мартенситной фазы при охлаждении. Распад аустенита в мартенсит начинается при температуре $\theta = \theta_H \approx 390^\circ\text{C}$, причем $t_m \approx 0.34 \cdot 10^{-7}$ с – время начала распада. Объем мартенситной фазы в сравнении с аустенитной увеличивается в области $0 < z \leq z_m$, где $z_m = 1.27 \cdot 10^{-7}$ м (пунктирная вертикальная линия на рис. 2). Поскольку распределение температуры $\theta = \theta(z, t_m)$ (штриховая

линия на рис. 2) при подходе к температуре θ_H является платоподобным, то накопление концентрации фазы мартенсита происходит равномерно в области $0 < z \leq z_m$, вследствие чего остаточное распределение $m(z)$ по z имеет фронтальный характер.

На рис. 3–11 представлены результаты расчетов, которые иллюстрируют распределения остаточных величин при выше указанных типах нагружения. За время формирования остаточного состояния принимается $t = 5 \cdot 10^{-7} c$. Для удобства введем следующие обозначения: q – только те-

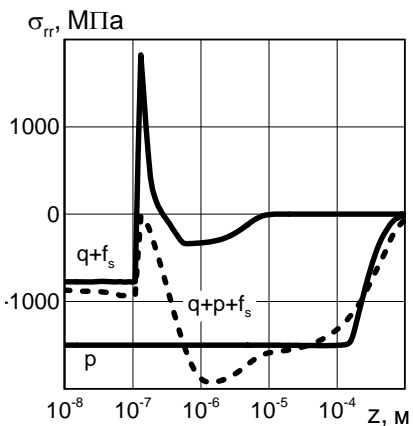


Рис. 3

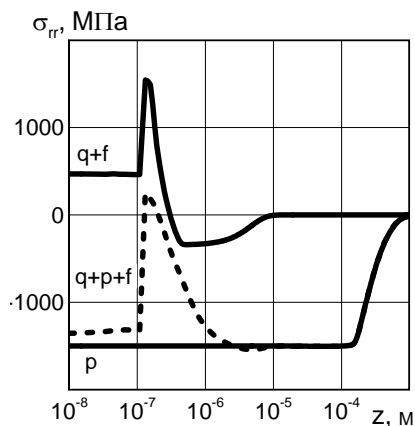


Рис. 4

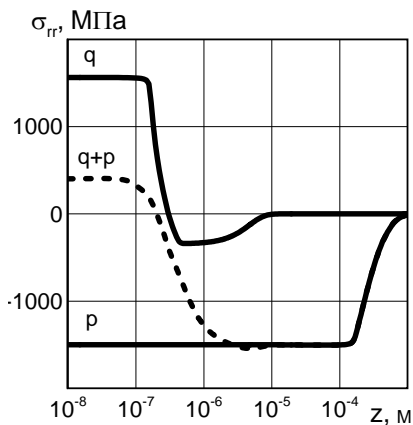


Рис. 5

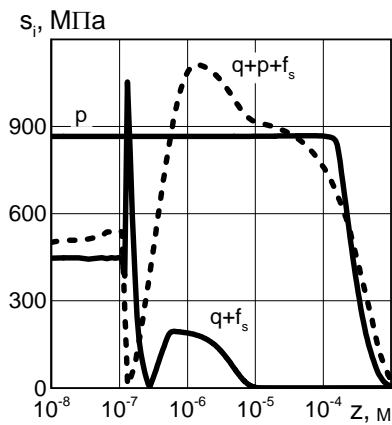


Рис. 6

пловое нагружение без учета МСП ($q_0 \neq 0$); $q + f$ – только тепловое нагружение с учетом зависимости трансформационных изменений объема от МСП ($q_0 \neq 0$); $q + f_s$ – только тепловое нагружение с учетом зависимости пластических характеристик и трансформационных изменений объема от МСП ($q_0 \neq 0$); p – только силовое нагружение ($p_0 \neq 0$); $q + p$ – комбинарованное термомеханическое нагружение без учета МСП ($q_0 \neq 0, p_0 \neq 0$);

$q + p + f$ – комбинированное термомеханическое нагружение с учетом за-

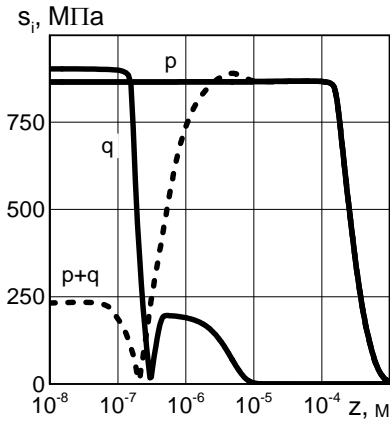


Рис. 7

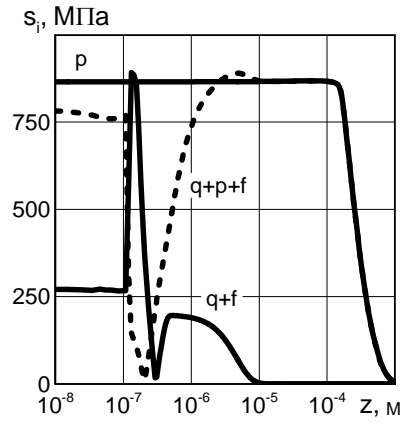


Рис. 8

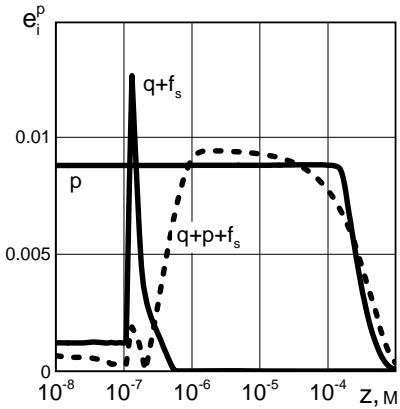


Рис. 9

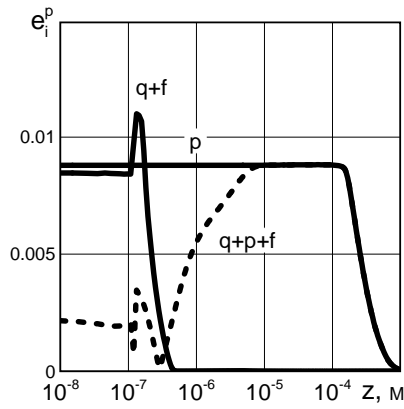


Рис. 10

висимости объемных изменений от МСП ($q_0 \neq 0, p_0 \neq 0$); $q + p + f_s$ – комбинированное термомеханическое нагружение с учетом зависимости пластических характеристик и трансформационных изменений объема от МСП ($q_0 \neq 0, p_0 \neq 0$).

С этими обозначениями глубинные распределения радиального напряжения $\sigma_{rr}(z)$ приведены на рис. 3–5; интенсивности напряжений $s_i(z)$ – на рис. 6–8; интенсивности неупругих (пластических) деформаций $e_i^p(z)$ – на рис. 9–11.

Из приведенных данных следует, что

1. При тепловом нагружении (кри-

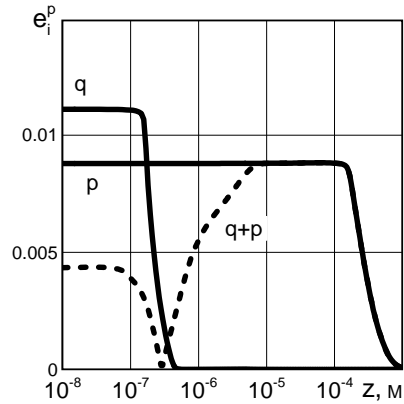


Рис. 11

вые q) микроструктурные превращения (кривая $q + f$ на рис. 4) существенно уменьшают растягивающие напряжения в приповерхностном слое $z < z_m \approx 10^{-7} \text{ м}$ за счет увеличения объема материала в мартенситной фазе. Отметим, что суммарный эффект МСП (кривая $q + f_s$ на рис. 3) приводит к остаточным сжимающим напряжениям вместо растягивающих напряжений (кривая $q + f$ на рис. 4, кривая q на рис. 5). Этот эффект имеет качественный характер. Пластические деформации также уменьшаются при учете МСП. Причем уровень пластических деформаций при суммарном эффекте МСП (кривая $q + f_s$ на рис. 9) меньше за уровень пластических деформаций при эффекте МСП, который учитывает только трансформационные изменения объема (кривая $q + f$ на рис. 4). В целом зона термического влияния z_q при термическом нагружении не превышает 10^{-6} м ($z_q \leq 10^{-6} \text{ м}$) (кривые q на рис. 5, 7, 11).

2. Чисто механическое нагружение (кривые p) формирует сжимающие напряжения на уровне динамической границы течения $s_i \sim 900 \text{ МПа}$ в слое $z_p < 10^{-3} \text{ м}$ при уровне пластической деформации $e_i^p \sim 0,009$. При комбинированном термомеханическом нагружении (кривые $q + p$) в приповерхностном слое $0 < z \leq 10^{-6} \text{ м}$ взаимодействуют термическая и механическая составляющие нагружения. В области $10^{-6} \text{ м} \leq z \leq 7 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ доминирует состояние, сформированное под действием механического нагружения. При значениях $z \geq 7 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ остаточные напряжения отсутствуют. В глубине тела формируется большая почти на три порядка область сжимающих напряжений, уровень которых определяется механическим фактором нагружения.

3. Область пластического деформирования и упрочнения (наклепа) без МСП имеет двухуровневую структуру: первый уровень – $z \leq 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$, $e_{i \max}^p \sim 0,004$ формируется взаимодействием термического и механического нагружения; второй – $5 \cdot 10^{-7} \text{ м} < z < 7 \cdot 10^{-4} \text{ м}$, $e_{i \max}^p \sim 0,009$ формируется импульсным механическим нагружением.

4. При комбинированном термомеханическом состоянии в следствии МСП (кривая $q + p + f$ на рис. 4, 8, 10; кривая $q + p + f_s$ на рис. 3, 6, 9) формируется трехзонная область термофазомеханического влияния. Зона влияния МСП $z_f \leq 10^{-7} \text{ м}$, зона термомеханического влияния $10^{-7} \text{ м} < z_{pq} < 10^{-6} \text{ м}$ и зона чисто механического влияния $z_p < 10^{-3} \text{ м}$. В области $z < z_f$ МСП приводят к появлению сжимающих напряжений (кривая $q + p + f_s$ на рис. 3, кривая $q + p + f$ на рис. 4) вместо растягивающих напряжений (кривые $q + p$ на рис. 5). В области $z_f < z < z_q$ формируется «зуб» напряжений. Это обусловлено тем, что области термиче-

ского влияния z_q и термофазового z_{q+f} не совпадают. МСП уменьшают уровень пластического деформирования. Отметим, что при суммарном эффекте МСП (кривая $q + p + f_s$ на рис. 9) интенсивность пластической деформации имеет уровень меньше, чем уровень интенсивности пластической деформации при эффекте МСП, который учитывает только трансформационные изменения объема (кривая $q + p + f$ на рис. 10).

5. МСП вместе с механическим импульсом являются существенным фактором формирования сжимающих напряжений на поверхности тел из мартенситных сталей, которые увеличивают прочность и усталостную долговечность деталей конструкций.

РЕЗЮМЕ. Розглядається динамічна задача про імпульсне термомеханічне навантаження півпростору з в'язкопластичного матеріалу. Враховуються мікроструктурні перетворення як наслідок розпаду переохолодженого аустеніту в мартенсит, які супроводжуються зміною об'єму та пластичних характеристик матеріалу. Використовується уніфікована модель течії Боднера-Партома, яка узагальнена на випадок мультифазового складу матеріалу. Задача розв'язується чисельно із застосуванням методу скінченних елементів. Проведено дослідження залишкового напружено-деформованого стану півпростору.

Ключові слова: мікроструктурні перетворення, модель Боднера-Партома, правило сумішей, імпульсне термомеханічне навантаження.

SUMMARY. The dynamic problem of the pulse thermomechanical loading of viscoplastic half-space is considered. The microstructure transformation as a result of decomposition of supercooled austenite is taken into account by changes of volume and plastic properties of material. Bodner-Partom model unified in case of multiphase material state is utilized. The problem is solved numerically by the finite element method. The investigation of residual stress-strain state of half-space is carried out.

Keywords: microstructure transformations, Bodner-Partom model, mixture rule, pulse thermomechanical loading.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гольденблат И. И., Безухов Н. И., Бажанов И. И. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. – М.: Машиностроение, 1965. – 568 с.
2. Даниловская В. И. Об одной задаче термоупругости // Прикладная математика и механика. – 1952. – Т. 16, № 3. – С. 341–344.
3. Даниловская В. И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы // Прикладная математика и механика. – 1950. – Т. 14, № 3. – С. 316–318.
4. Осесимметричная динамическая связанная задача термовязкопластичности / Я. А. Жук, И. К. Сенченко, В. И. Козлов, Г. А. Табиева // Прикладная механика. – 2001. – Т. 37, № 10. – С. 83–89.
5. Жук Я. А., Червинко О. П., Васильева Л. Я. Структурные превращения в цилиндре из стали, инициируемые импульсным термическим воздействием // Теорет. и прикладная механика. – 2006. – Вып. 42. – С. 73–78.
6. Жук Я. А., Червинко О. П., Васильева Л. Я. Уточнена модель структурних перетворень в тонкому сталевому циліндрі при тепловому опроміненні торця // Доп. НАН України. – 2007. – № 4. – С. 53–58.
7. Коваленко В. С. Микро- и нанообработка сверхмощными лазерными импульсами // Оборудование и эксперимент для профессионалов. – 2003. – № 4. – С. 4–14.
8. Попов А. А., Попова А. Е. Справочник термиста. Изотермические и термокинетические диаграммы распада переохлажденного аустенита. – М.: Машгиз, 1961. – 430 с.

9. Сенченков И. К., Жук Я. А., Табиева Г. А. Термодинамически согласованные модификации обобщенных моделей термовязкопластичности // Прикладная механика. – 1998. – Т. 34, № 4. – С. 53–60.

10. Шоршоров М. Х., Белов В. В. Фазовые превращения и изменения свойств стали при сварке. Атлас. – М.: Наука, 1972. – 220 с.

11. Юрьев С. Ф. Удельные объемы фаз в мартенситном превращении аустенита. – М.: Металлургиздат, 1950. – 48 с.

12. Bodner S. R. Unified Plasticity – An Engineering Approach (Final Report). Faculty of Mechanical Engineering, Technion-Israel Institute of Technology. Haifa 32000, Israel, 2000. – 106 p.

13. Koistinen D. P., Marburger R. E. A general equation prescribing the extent of the austenite-martensite transformation in pure iron-carbon alloys and carbon steels // Acta Metall. – 1959. – Vol. 7. – P. 59–60.

14. Leblond J.B., Mottet G., Devaux J.C. A theoretical and numerical approach to the plastic behavior of steel during phase transformation. – I. Derivation of general relations // J. Mech. Phys. Solids. – 1986. – Vol. 34, № 4. – P. 395–409.

15. Moreno V., Jordan E. H. Prediction of material thermomechanical response with a unified viscoplastic constitutive model // Int. J. of Plast. – 1986. – Vol. 2. – P. 223–245.

16. Sternberg E., Chakravorty J.G. On inertial effects in a transient thermoelastic problem // ASME. J. Appl. Mech. – 1959. – Vol. 26, № 4. – P. 503–509.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 28.03.2012

УДК 539.3

Л. В. КУРПА, д-р тех. наук, Н. А. БУДНИКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННЫХ ПЛАСТИН СО СЛОЖНОЙ ФОРМОЙ ПЛАНА

Предложен метод исследования геометрически нелинейных вынужденных колебаний многослойных пластин симметричного и несимметричного строения. Метод базируется на применении теории R-функций, что позволяет учитывать сложную геометрию пластины и различные виды граничных условий. Проведено сравнение результатов с известными в литературе. Получены новые результаты для двухслойных жестко защемленных пластин сложной формы.

Ключевые слова: теория R-функций, вариационные методы, нелинейные вынужденные колебания, многослойные пластины, сложная геометрия.

Нелинейные колебания многослойных пластин и оболочек исследовались в работах многих авторов [7–12]. Обзор литературы за последние годы выполнен, например, в публикациях [11, 13]. Одним из наиболее распространенных методов решения данного класса задач является метод конечных элементов (МКЭ) [11, 12]. В настоящей работе использован альтернативный подход, который является развитием метода, предложенного в работах [3, 4] и базирующегося на применении вариационных методов и теории R-функций (RFM) [5]. В отличие от упомянутых работ, здесь рассматриваются вынужденные колебания многослойных пластин как симметричного, так и несимметричного строения.

Постановка задачи. Рассмотрим многослойную пластину постоянной толщины $h = \sum_{i=1}^n h_i$, состоящую из n слоев, в предположении отсутствия их проскальзывания. Для описания динамического поведения пластины используем классическую теорию, основанную на гипотезах Кирхгоффа-Лява, принятых для всего пакета в целом [1]. Пусть пластина находится под действием поперечной периодической нагрузки $F(t) = P_0 \cos \Omega t$.

Система уравнений движения пластины имеет вид

$$\begin{aligned} L_{11}(C_{ij})u + L_{12}(C_{ij})v + L_{13}(K_{ij})w &= -Nl_1(w) + m_1 u_{tt}'' , \\ L_{21}(C_{ij})u + L_{22}(C_{ij})v + L_{23}(K_{ij})w &= -Nl_2(w) + m_1 v_{tt}'' , \\ L_{31}(K_{ij})u + L_{32}(K_{ij})v + L_{33}(D_{ij})w &= -Nl_3(u, v, w) + F(t) + m_1 w_{tt}'' , \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$L_{11} = C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} ,$$

$$\begin{aligned}
L_{12} = L_{21} &= C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\
L_{22} &= C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\
L_{13} = -L_{31} &= -K_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3K_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - K_{26} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\
L_{23} = -L_{32} &= -K_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - 3K_{26} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - K_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\
L_{33} &= -D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} - D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \\
Nl_1(w) &= \frac{\partial}{\partial x} N_{11}^{(N)}(w) + \frac{\partial}{\partial y} N_{12}^{(N)}(w), \quad Nl_2(w) = \frac{\partial}{\partial x} N_{12}^{(N)}(w) + \frac{\partial}{\partial y} N_{22}^{(N)}(w), \\
Nl_3(u, v, w) &= N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};
\end{aligned}$$

$$\left\{ N_{11}^{(N)}(w); N_{22}^{(N)}(w); N_{12}^{(N)}(w) \right\}^T = [C] \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ K_{12} & K_{22} & K_{26} \\ K_{16} & K_{26} & K_{66} \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix};$$

$$(C_{ij}, K_{ij}, D_{ij}) = \sum_{s=1}^n \int_{h_{s-1}}^{h_s} B_{ij}^{(s)}(1, z, z^2) dz, \quad (i, j = 11, 22, 12, 16, 26, 66) -$$

приведенные жесткостные характеристики [1]; $B_{ij}^{(s)}$ – упругие постоянные s -го слоя.

Заметим, что для пластин симметричного строения система (1) существенно упрощается благодаря тому, что коэффициенты $K_{ij} = 0$, и дифференциальные операторы L_{13} , L_{31} , L_{23} , L_{32} обращаются в нулевые.

Система уравнений движения (1) дополняется граничными условиями, определяемыми способом закрепления, в частности, в случае жестко защемлённой пластины следующими граничными условиями:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \partial w / \partial n = 0. \quad (2)$$

Начальные условия принимаются в виде

$$w|_{t=0} = w_{\max}, \quad \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Метод решения задачи. Для исследования вынужденных нелинейных колебаний по аналогии с [4] прежде всего необходимо решить ли-

нейную задачу о свободных колебаниях. Применение теории R-функций позволяет это сделать для пластин практически произвольной формы. При решении нелинейной задачи будем игнорировать силами инерции в плоскости пластины. Тогда функции u , v , w можно представить в виде:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= y_1(t) \cdot u_1^{(c)}(x, y) + y_1^2(t) \cdot u_2(x, y), \\ v(x, y, t) &= y_1(t) \cdot v_1^{(c)}(x, y) + y_1^2(t) \cdot v_2(x, y), \\ w(x, y, t) &= y_1(t) \cdot w_1^{(c)}(x, y), \end{aligned} \quad (4)$$

где $u_1^{(c)}(x, y)$, $v_1^{(c)}(x, y)$, $w_1^{(c)}(x, y)$ – собственные функции линейных колебаний пластины [3]; $u_2(x, y)$ и $v_2(x, y)$ – функции, которые являются решениями системы

$$\begin{aligned} L_{11}(C_{ij})u_2 + L_{12}(C_{ij})v_2 &= -NL_1^{(2)}(w_1^{(c)}, w_1^{(c)}), \\ L_{12}(C_{ij})u_2 + L_{22}(C_{ij})v_2 &= -NL_2^{(2)}(w_1^{(c)}, w_1^{(c)}); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} NL_1^{(2)}(w_1^{(c)}) &= \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial x} \left(C_{11} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial y^2} \right) + \\ &+ \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial y} \left(C_{16} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial y^2} \right), \\ NL_2^{(2)}(w_1^{(c)}) &= \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial x} \left(C_{16} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial y^2} \right) + \\ &+ \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial y} \left(C_{66} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

Систему (5) дополним граничными условиями (2). Решение этой задачи, как и предыдущей, выполняется с помощью вариационного метода Ритца и RFM [4]. В результате, согласно такому выбору функций $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$, первые два уравнения системы (1) удовлетворяются тождественно. С учетом соотношений (4), применяя процедуру Бубнова-Галёркина к третьему уравнению системы (1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка вида

$$y''(t) + \omega_L^2 y_1(t) + y_1^2(t)\beta + y_1^3(t)\gamma = \tilde{F}(t), \quad (6)$$

где:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{-1}{m_1 \|w_1^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 M_{11}^{(NL)}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}^{(NL)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}^{(NL)}}{\partial y^2} \right) + \right. \\ &\left. + \left(N_{11}^{(L)} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x^2} + 2N_{12}^{(L)} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x \partial y} + N_{22}^{(L)} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial y^2} \right) \right] w_1^{(c)} d\Omega, \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{-1}{m_1 \|w_1^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} \left[N_{11}^{(NL)} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x^2} + 2N_{12}^{(NL)} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x \partial y} + N_{22}^{(NL)} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial y^2} \right] w_1^{(c)} d\Omega,$$

$$\tilde{F}(t) = P_1 \cos \Omega t;$$

$$P_1 = \frac{P_0}{m_1 \|w_1^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} w_1^{(c)} d\Omega,$$

$$N^{(L)} = \{N_{11}^{(L)}; N_{22}^{(L)}; N_{12}^{(L)}\}^T = [C] \{\varepsilon^{(L)}\} + [K] \{\chi\},$$

$$N^{(NL)} = \{N_{11}^{(NL)}; N_{22}^{(NL)}; N_{12}^{(NL)}\}^T = [C] \{\varepsilon^{(NL)}\},$$

$$M^{(NL)} = \{M_{11}^{(NL)}; M_{22}^{(NL)}; M_{12}^{(NL)}\}^T = [K] \{\varepsilon^{(NL)}\},$$

$$\{\varepsilon^{(L)}\} = \{\varepsilon_{11}^{(L)}; \varepsilon_{22}^{(L)}; \varepsilon_{12}^{(L)}\}^T = \left\{ \frac{\partial u_1^{(c)}}{\partial x}; \frac{\partial v_1^{(c)}}{\partial y}; \left(\frac{\partial u_1^{(c)}}{\partial y} + \frac{\partial v_1^{(c)}}{\partial x} \right) \right\}^T,$$

$$\begin{aligned} \{\varepsilon^{(NL)}\} &= \{\varepsilon_{11}^{(NL)}; \varepsilon_{22}^{(NL)}; \varepsilon_{12}^{(NL)}\}^T = \\ &= \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial x} \right)^2; \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial y} \right)^2; \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial x} \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial y} \right\}^T \end{aligned}$$

$$\{\chi\} = \{\chi_{11}; \chi_{22}; \chi_{12}\}^T = \left\{ -\frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x^2}; -\frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial y^2}; -2 \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x \partial y} \right\}^T.$$

Для пластин симметричного строения $\beta \equiv 0$.

Для решения уравнения (6) с начальными условиями (3) используем метод Бубнова-Галёркина. Тогда для зависимости отношения Ω/ω_L от амплитуды $A = w_{\max}/h$ колебаний пластины при действии поперечной периодической нагрузки $\tilde{F}(t) = P_1 \cos \Omega t$, имеет место формула [2]

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_L} \right)^2 = 1 + \frac{8}{3\pi} \beta A + \frac{3}{4} \gamma A^2 \pm \frac{P_1}{A}. \quad (7)$$

В случае свободных колебаний пластины (при отсутствии нагрузки) отношение ω_{NL}/ω_L определяется с помощью формулы

$$\left(\frac{\omega_{NL}}{\omega_L} \right)^2 = 1 + \frac{8}{3\pi} \beta A + \frac{3}{4} \gamma A^2. \quad (8)$$

Численные результаты. Разработанный подход был программно реализован в рамках системы POLE-RL [5] и протестирован на многочисленных примерах для прямоугольных многослойных пластин с различными

способами укладки слоев. Расхождение результатов с известными [6, 7] не превосходит 5%. Для иллюстрации данного подхода рассмотрим двухслойную жестко защемленную пластину ($a/b = 1$, $a/h = 1$), представленную на рис. 1. Механические свойства материалов приведены в табл. 1.

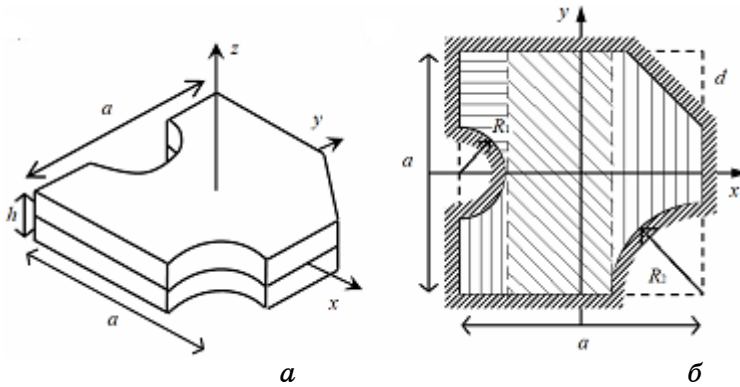


Рис.1

Структура решения принималась в виде

$$u = \omega Q_1, \quad w = \omega^2 Q_3, \quad v = \omega Q_2, \quad (9)$$

где $\omega(x, y) = 0$ – нормализованное уравнение границы области; Q_1 , Q_2 , Q_3 – неопределенные компоненты структуры решения [3]. В данном случае функция $\omega(x, y)$ может быть представлена в виде

$$\omega = (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 (f_3 \wedge_0 f_4 \wedge_0 f_5).$$

Символом \wedge_0 обозначена R-

конъюнкция [5]. Для функций f_i имеем:

$f_1 = \{\sigma_1 = ((a/2)^2 - x^2)/a \geq 0\}$ – вертикальная полоса между прямыми $x = \pm a/2$;

$f_2 = \{\sigma_2 = ((a/2)^2 - y^2)/a \geq 0\}$ – горизонтальная полоса между прямыми $y = \pm a/2$;

$f_3 = \{\sigma_3 = (a - d - x - y)/\sqrt{2} \geq 0\}$ – полуплоскость, лежащая ниже прямой $x + y - a + d = 0$;

$f_4 = \left\{ \sigma_4 = \frac{1}{2R_1} \left(\left(x + \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 - R_1^2 \right) \geq 0 \right\}$ – внешняя часть окружности с

центром в точке $(-a/2; 0)$ и радиусом R_1 ;

$$f_5 = \left\{ \sigma_5 = \frac{1}{2R_2} \left(\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{a}{2} \right)^2 - R_2^2 \right) \geq 0 \right\} - \text{внешняя часть окружно-}$$

сти с центром в точке $(a/2; -a/2)$ и радиусом R_2 .

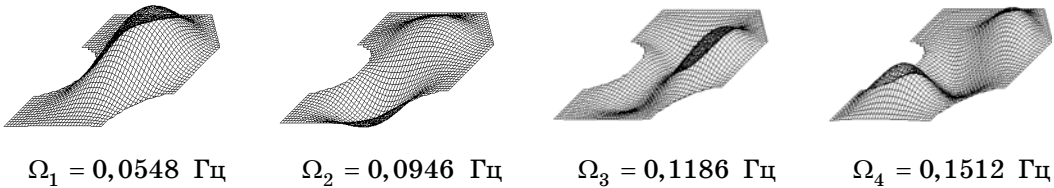
Для аппроксимации неопределенных компонент структур решения выберем степенные полиномы в виде:

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3 \dots \quad (10)$$

Вычислительный эксперимент показал, что сходимость собственных частот до 3-го знака наблюдается при 36 координатных функциях для u и v , что соответствует сохранению членов ряда (10) до 7 степени, и 45 координатных функциях для w , что соответствует сохранению членов этого ряда до 8 степени. Для вычисления интегралов матрицы Ритца исходная область была разбита на 4 подобласти (рис. 1,б), в каждой из которых были использованы 8-точечные квадратурные формулы Гаусса.

В табл. 2 приведены линейные частоты и формы колебаний рассматриваемой пластины ($0^\circ/90^\circ$), изготовленной из Graphite/эпоху.

Таблица 2



В табл. 3 представлены результаты проведенных исследований о влиянии материала и способа укладки слоев на значения отношения ω_{NL}/ω_L при различных значениях вырезов: А) $d = R_1 = R_2 = 0$ (квадратный план); В) $d = R_1 = R_2 = 0,01a$ (маленькие вырезы); С) $d = 0,3a$, $R_1 = 0,2a$, $R_2 = 0,3a$ (большие вырезы).

Таблица 3

Материал	$\frac{w_{\max}}{h}$	(45°/-45°)			(0°/90°)		
		А	В	С	А	В	С
Glass/ эпоху	0,5	1,0496	1,0495	1,0462	1,0536	1,0509	1,0577
	1,0	1,1861	1,1858	1,1749	1,2004	1,1947	1,2034
	1,5	1,3839	1,3834	1,3630	1,4113	1,4031	1,4100
	2,0	1,6208	1,6200	1,5895	1,6623	1,6519	1,6549
Boron/ эпоху	0,5	1,0734	1,0735	1,0666	1,0907	1,0838	1,0966
	1,0	1,2683	1,2688	1,2477	1,3261	1,3133	1,3151
	1,5	1,5392	1,5401	1,5025	1,6453	1,6281	1,6065
	2,0	1,8531	1,8544	1,7998	2,0086	1,9880	1,9382
Graphite/ эпоху	0,5	1,1079	1,1083	1,0957	1,1386	1,1291	1,1460
	1,0	1,3822	1,3833	1,3456	1,4785	1,4615	1,4573
	1,5	1,7460	1,7479	1,6823	1,9152	1,8930	1,8524
	2,0	2,1545	2,1573	2,0638	2,3965	2,3701	2,2883

На рис. 2 представлены амплитудно-частотные зависимости для свободных и вынужденных колебаний двухслойных ортогонально армированных пластин (0/90, вариант С): а) изотропный материал; б) glass-эроху;

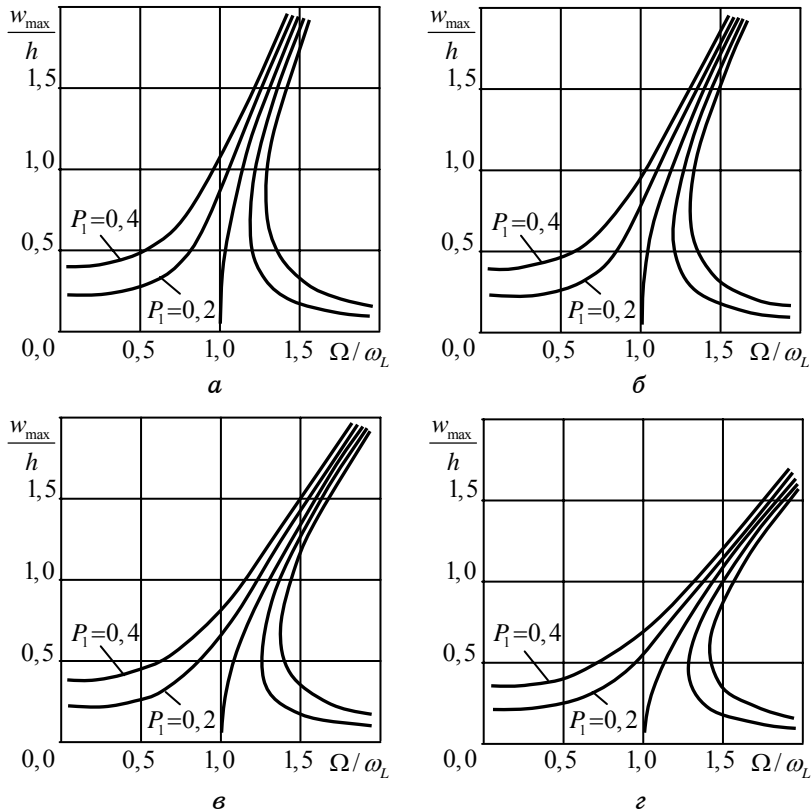


Рис.2

в) boron-эроху; г) graphite-эроху. Анализ результатов, представленных в табл. 3 и на рис. 2 показывает, что в случае жестко заземленной пластины характер поведения скелетных и резонансных кривых такой же, как и для квадратных пластин.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано метод дослідження геометрично нелінійних вимушених коливань багат шарових пластин симетричної та несиметричної структури. Метод базується на застосуванні теорії R-функцій, що дозволяє враховувати складну геометрію пластини та різні види граничних умов. Проведено порівняння результатів з відомими та отримані нові результати для двошарових жорстко закріплених пластин складної форми.

Ключові слова: теорія R-функцій, варіаційні методи, нелінійні вимушені коливання, багат шарові пластини, складна геометрія

SUMMARY. A method for studying the geometrically nonlinear forced vibrations of multilayered plates with symmetrical and antisymmetrical structures is proposed. The method is based on the R-functions theory, which allows to consider the complex geometry of the plates and various types of boundary conditions. A comparison of the results with well-known in the literature is completed and new results for two-layered fully clamped plates with complex shape are obtained.

Key words: R-functions theory, variational methods, nonlinear forced vibrations, laminated plates, complex geometry

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
2. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
3. Курна Л. В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пластин и пологих оболочек. – Харьков: НТУ “ХПИ”, 2009. – 408 с.
4. Курна Л. В., Тимченко Г. Н. Исследование нелинейных колебаний композитных пластин с помощью теории R-функций // Проблемы прочности. – 2007. – №5. – С. 101–112.
5. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
6. Kadiri M. El, Benamar R. Improvement of the semi-analytical method, based on Hamilton’s principle and spectral analysis, for determination of the geometrically non-linear response of thin straight structures. Part III: steady state periodic forced response of rectangular plates // Journ. Sound Vibration. – 2003. – Vol. 264, Issue 1. – P. 1–35.
7. Manoj T., Ayappan M., Krishnan K. S., Nageswara Rao B. Nonlinear Vibration Analysis of Thin Laminated Rectangular Plates on Elastic Foundations // Z. Angew. Math. Mech. – 2000. – Vol. 80, Issue 3. – P. 183–192.
8. Nageswara Rao. Application of hybrid Galerkin method to non-linear free vibrations of laminated thin plates // Journ. Sound Vibration – 1992 – Vol. 154, Issue 3. – P. 573–576.
9. Singh A. V. Linear and Geometrically nonlinear vibrations of fiber reinforced laminated plates and shells // Computers and Structures. – 2000. – Vol. 76. – P. 277–285.
10. Singh Gajbir, Raju K. Kanaka, Venkateswara Rao G., Iyengar N. G. R. Non-linear vibrations of simply supported rectangular cross-ply plates // Journ. Sound Vibration. – 1990. – Vol. 142, Issue 2. – P. 213–226.
11. Singha M. K., Daripa R. Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of composite plates // Journ. Sound Vibration. – 2009. – Vol. 328. – P. 541–554.
12. Singha M. K., Daripa R. Nonlinear vibration of symmetrically laminated composite skew plates by finite element method // Int. Journ. Non-Linear Mechanics. – 2007. – Vol. 42. – P. 1144–1152.
13. Zhang Y. X., Yang C. H. Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates // Composite Structures. – 2009. – Vol. 88. – P. 147–157.

Национальный технический университет «ХПИ», г. Харьков

Поступила 27.01.2012

УДК 539.376

А. А. КАМИНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук,
 М. Ф. СЕЛИВАНОВ, канд. физ.-мат. наук,
 Ю. А. ЧЕРНОИВАН, канд. физ.-мат. наук

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИН ЗОН ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ У ФРОНТА ДВУХ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТРЕЩИН НЕРАВНОЙ ДЛИНЫ

На основе модели Леонова-Панасюка исследована задача о граничном равновесии упругого изотропного бесконечного тела с двумя коллинеарными трещинами неравной длины. Получены определяющие уравнения для длин зон предразрушения в вершинах каждой из трещин. На основе полученных результатов приведен пример расчета зависимостей длин зон предразрушения от взаимного расположения трещин.

Ключевые слова: коллинеарные трещины, зоны предразрушения, нелинейная механика разрушения

Изучению напряженно-деформированного состояния тела, ослабленного системой двух коллинеарных трещин различной длины посвящено много публикаций, среди которых работы [4–6]. Практически отсутствуют работы, в которых эта задача решается при помощи модели Леонова-Панасюка, учитывающей зоны нелинейного поведения материала в окрестностях вершин трещин (зоны предразрушения). В работе [1] аналогичная задача решена для трещин одинаковой длины. Полученное решение легло в основу исследования докритического роста трещин в вязкоупругом теле, результаты которого изложены в работе [2].

В настоящей статье предлагается решение задачи о нахождении длин зон предразрушения как граничной задачи для плоскости с прямолинейными разрезами, метод решения которой получен в работе [3]. Ввиду сложностей, возникающих при определении функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$, при помощи которых записывается решение задачи, общее решение однородной задачи линейного сопряжения представляется полиномом на отрезках, соответствующих зонам предразрушения.

Постановка задачи. Пусть в бесконечном упругом изотропном теле вдоль прямой расположена система двух трещин различной длины. К телу на бесконечности приложены растягивающие усилия p , направления

которых совпадает с направлением нормали к линии расположения трещин. Введем ортогональную декартову систему координат, ось x которой направим вдоль линии трещин (рис. 1).

Согласно модели Леонова-Панасюка, области нелинейного поведения материала в окрестности вершин трещин можно заменить разрезами, к берегам которого приложены сжимающие напряжения интенсивно-

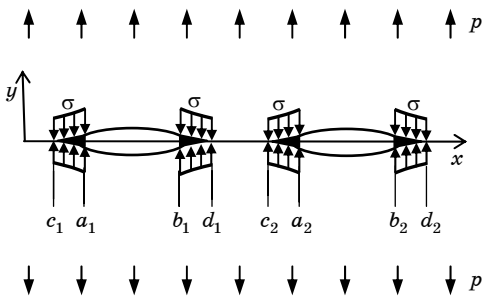


Рис. 1

сти σ . Соответствующее обозначение приведено на рис. 1. Таким образом, приходим к задаче теории упругости о растяжении упругой пластинки с разрезами вдоль отрезков (c_k, d_k) при следующих контурных условиях:

$$\tau_{xy}(t) = 0, \quad t \in L; \quad \sigma_y(t) = \begin{cases} 0, & t \in L' \\ \sigma, & t \in L'' \end{cases},$$

где

$$L = \bigcup_{k=1}^2 (c_k, d_k), \quad L' = \bigcup_{k=1}^2 (a_k, b_k), \quad L'' = L - L'.$$

Концы разрезов c_k и d_k следует определять так, чтобы в них выполнялось условие конечности напряжений.

Общее решение задачи для плоскости с прямолинейными разрезами в работе [3] дается двумя комплексными функциями $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$:

$$\Phi(z) = \Phi_0 + \frac{P_2(z)}{X(z)} - \frac{p}{4}, \quad \Omega(z) = \Phi_0 + \frac{P_2(z)}{X(z)} + \frac{p}{4},$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= \frac{\sigma}{2\pi i X(z)} \int_{L''} \frac{X^+(t)}{t-z} dt; \\ X(z) &= \sqrt{(z-c_1)(z-d_1)(z-c_2)(z-d_2)}; \\ P_2(z) &= C_0 z^2 + C_1 z + C_2; \quad C_0 = p/2. \end{aligned}$$

Коэффициенты C_1, C_2 определяются из условия однозначности смещений:

$$2 \int_{L_k} \frac{C_0 \tau^2 + C_1 \tau + C_2}{X^+(\tau)} d\tau + \int_{L_k} [\Phi_0^+(\tau) - \Phi_0^-(\tau)] d\tau = 0 \quad k = 1, 2.$$

На краях первого разреза L_1 $X^+(\tau) = -i\widehat{X}(\tau)$, $X^-(\tau) = i\widehat{X}(\tau)$, на краях второго — $X^+(\tau) = i\widehat{X}(\tau)$, $X^-(\tau) = -i\widehat{X}(\tau)$, $\widehat{X}(\tau) = \sqrt{|(\tau-c_1)(\tau-d_1)(\tau-c_2)(\tau-d_2)|}$. Тогда

$$\Phi_0(z) = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{G(z)}{X(z)}, \quad G(z) = \int_{L_1} \frac{\widehat{X}(t)}{t-z} dt - \int_{L_2} \frac{\widehat{X}(t)}{t-z} dt.$$

Обозначим $J_k = \int_{L_k} [\Phi_0^+(\tau) - \Phi_0^-(\tau)] d\tau$, тогда

$$J_1 = -\frac{\sigma}{\pi i} \int_{c_1}^{d_1} \frac{G(\tau)}{\widehat{X}(\tau)} d\tau, \quad J_2 = \frac{\sigma}{\pi i} \int_{c_2}^{d_2} \frac{G(\tau)}{\widehat{X}(\tau)} d\tau, \quad (1)$$

где $G(\tau)$ может быть представлена в виде

$$G(\tau) = -F_{c_1}(\tau - c_1) + F_{d_1}(d_1 - \tau) + F_{c_2}(\tau - c_2) - F_{d_2}(d_2 - \tau);$$

$$F_{c_k}(\tau - c_k) = \int_{c_k}^{a_k} \frac{\widehat{X}(t)}{t - \tau} dt, \quad F_{d_k}(d_k - \tau) = \int_{b_k}^{d_k} \frac{\widehat{X}(t)}{t - \tau} dt.$$

Проведя в последних интегралах соответственно замены $y = t - c_k$ и $y = d_k - t$, получаем

$$F_{c_k}(\tau - c_k) = \int_0^{y_{c_k}} \frac{\widehat{X}(c_k + y)}{y - (\tau - c_k)} dy,$$

$$F_{d_k}(d_k - \tau) = \int_0^{y_{d_k}} \frac{\widehat{X}(d_k - y)}{y - (d_k - \tau)} dy.$$

Проиллюстрируем ход определения первой из функций:

$$F_{c_1}(\delta) = \int_0^{y_{c_1}} \frac{\widehat{X}(c_1 + y)}{y - \delta} dy, \quad y_{c_1} = a_1 - c_1, \quad (2)$$

причем

$$\widehat{X}(c_1 + y) = \sqrt{y \sum_{i=0}^3 q_i y^i}, \quad (3)$$

Из-за трудностей, возникающих при аналитическом вычислении интегралов $F_{c_k}(\delta)$, $F_{d_k}(\delta)$, представим функцию \widehat{X} полиномом на каждом из отрезков $(0, y'_{c_k})$, $(0, y'_{d_k})$, для которых $y'_{c_k} = \varkappa y_{c_k}$, $y'_{d_k} = \varkappa y_{d_k}$, а параметр \varkappa немногим больше единицы. Так, на отрезке $(0, y'_{c_1})$ имеем

$$\widehat{X}(c_1 + y) \approx \sqrt{y} \sum_{k=0}^n g_k \left(\frac{y}{y'_{c_1}} \right)^k,$$

где n определяется точность представления. Представление в виде полинома можно искать при помощи разложения в ряд Тейлора функции $(\sum q_i y^i)^{1/2}$ в (3). Однако, вследствие медленной сходимости биномиального ряда приходится удерживать значительное число членов в разложении. Гораздо оптимальнее при вычислениях оказалась полиномиальная аппроксимация с минимальной для заданной точности вычислений Чебышевской нормой.

Проведя в интеграле (2) замену $y = y_{c_1} x^2$, получим

$$F_{c_1}(\delta) \approx 2\sqrt{y_{c_1}} \int_0^1 \sum_{k=0}^n h_k \frac{x^{2k+2} dx}{x^2 - \delta/y_{c_1}}, \quad h_k = g_k \left(\frac{y}{y'_{c_1}} \right)^k = g_k \varkappa^{-k}.$$

После почленного интегрирования находим

$$F_{c1}(\delta) \approx 2\sqrt{y_{c1}} \sum_{k=0}^n h_k \zeta_k \left(\frac{\delta}{y_{c1}} \right), \quad \zeta_k(\delta) = \int_0^1 \frac{x^{2k+2}}{x^2 - \delta} dx.$$

При $|\delta| > 1$ получим

$$\zeta_k(\delta) = -\delta^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta^{-m}}{2(n+m+1)+1}$$

при $|\delta| < 1$ можно воспользоваться рекуррентной формулой

$$\zeta_k(\delta) = \frac{1}{2k+1} + \delta \zeta_{k-1}(\delta), \quad \zeta_{-1}(\delta) = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - \delta} \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\zeta_k(\delta) = \sum_{m=0}^k \frac{\delta^m}{2(k-m)+1} + \delta^{k+1} \zeta_{-1}(\delta),$$

$$\sum_{k=0}^n h_k \zeta_k(\delta) = V(\delta) + \delta \zeta_{-1}(\delta) H(\delta),$$

где

$$V(\delta) = \sum_{k=0}^n v_k \delta^k, \quad H(\delta) = \sum_{k=0}^n h_k \delta^k, \quad v_k = \sum_{m=k}^n \frac{h_m}{2(m-k)+1}.$$

Таким образом,

$$F_{c1}(\delta) \approx 2\sqrt{y_{c1}} \left[V \left(\frac{\delta}{y_{c1}} \right) + \frac{\delta}{y_{c1}} \zeta_{-1} \left(\frac{\delta}{y_{c1}} \right) H \left(\frac{\delta}{y_{c1}} \right) \right].$$

Для заданных параметров модели c_k , a_k , b_k и d_k мы получили представление функций F_{ck} и F_{dk} в виде

$$F_{ck}(\delta) \approx 2\sqrt{y_{ck}} \left[V_{ck} \left(\frac{\delta}{y_{ck}} \right) + \frac{\delta}{y_{ck}} \zeta_{-1} \left(\frac{\delta}{y_{ck}} \right) H_{ck} \left(\frac{\delta}{y_{ck}} \right) \right],$$

$$F_{dk}(\delta) \approx 2\sqrt{y_{dk}} \left[V_{dk} \left(\frac{\delta}{y_{dk}} \right) + \frac{\delta}{y_{dk}} \zeta_{-1} \left(\frac{\delta}{y_{dk}} \right) H_{dk} \left(\frac{\delta}{y_{dk}} \right) \right],$$

в котором каждая величина задается своим набором коэффициентов $h_{(ck)m}$, $v_{(ck)m}$ ($m=0, 1, \dots, n_{ck}$) для полиномов H_{ck} и V_{ck} и $h_{(dk)m}$, $v_{(dk)m}$ ($m=0, 1, \dots, n_{dk}$) для полиномов H_{dk} и V_{dk} .

Вычислим интегралы $\int_{c_k}^{d_k} \frac{G(\tau)}{\bar{X}(\tau)} d\tau$ ($k=1, 2$) в выражениях (1). Разде-

лим интервал интегрирования на три части:

$(c_k, d_k) = (c_k, a'_k) \cup (a'_k, b'_k) \cup (b'_k, d_k)$. Тогда $\int_{c_m}^{d_m} \frac{G(\tau)}{\widehat{X}(\tau)} d\tau = I_{cm} + I_{abm} + I_{dm}$.

Из четырех функций $F_{c_k}(\tau - c_k)$, $F_{d_k}(d_k - \tau)$ на интервале (c_m, a'_m) имеет особенность функция $F_{cm}(\tau - c_m)$, а на интервале (b'_m, d_m) — функция $F_{dm}(d_m - \tau)$. Для первого интеграла с особенностью имеем

$$I_{c1} = -\int_{c_1}^{a'_1} \frac{F_{c1}(\tau - c_1)}{\widehat{X}(\tau)} d\tau + \int_{c_1}^{a'_1} \frac{F_{d1}(d_1 - \tau) + F_{c2}(\tau - c_2) - F_{d2}(d_2 - \tau)}{\widehat{X}(\tau)} d\tau.$$

Выполним замену $\tau = c_1 + y_{c1}x^2$:

$$I_{c1} = -4y_{c1} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{V(x^2) + x^2 \zeta_{-1}(x^2) H(x^2)}{H(x^2)} dx + \\ + \int_0^{\sqrt{x}} \frac{F_{d1}(d_1 - c_1 - y_{c1}x^2) + F_{c2}(c_1 - c_2 + y_{c1}x^2) - F_{d2}(d_2 - c_1 - y_{c1}x^2)}{H(x^2)} dx.$$

Подынтегральная функция во втором интеграле не имеет особенностей в области интегрирования, а первый интеграл находим в виде

$$4y_{c1} \int_0^{\sqrt{x}} \left[\frac{V(x^2)}{H(x^2)} + \frac{x}{2} \ln \frac{|1-x|}{1+x} \right] dx = \\ = y_{c1} \left[4 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{V(x^2)}{H(x^2)} dx + (x-1) \ln \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - 2\sqrt{x} \right].$$

Теперь подынтегральная функция особенностей не имеет. Обозначим

$$I_{k,m} = \int_{c_k}^{d_k} \frac{\tau^m d\tau}{\widehat{X}(\tau)}.$$

Условие однозначности смещений, которое во введенных обозначениях принимает вид

$$I_{1,1} C_1 + I_{1,0} C_2 = \frac{\sigma}{2\pi} J_1 - I_{1,2} C_0,$$

$$I_{2,1} C_1 + I_{2,0} C_2 = -\frac{\sigma}{2\pi} J_2 - I_{2,2} C_0,$$

позволяет определить коэффициенты C_1 , C_2 из системы двух линейных алгебраических уравнений. Отметим, что в этой системе

$$I_{2,0} = I_{1,0}, \quad I_{2,1} = I_{1,1} + \pi, \quad I_{2,2} = I_{1,2} + \frac{\pi}{2}(c_1 + d_1 + c_2 + d_2).$$

Таким образом, найдена функция $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = \frac{1}{X(z)} \left(\frac{\sigma}{2\pi} G(z) + C_0 z^2 + C_1 z + C_2 \right) - \frac{p}{4},$$

причем функция $G(z)$ является функцией лишь геометрических параметров.

Границы разрезов c_1, d_1, c_2, d_2 найдем из условия конечности $\Phi(\tau)$ в этих точках, являющегося следствием условия конечности напряжений в окрестности вершин трещин:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{2\pi} G(c_k) + C_0 c_k^2 + C_1 c_k + C_2 &= 0, \\ \frac{\sigma}{2\pi} G(d_k) + C_0 d_k^2 + C_1 d_k + C_2 &= 0 \quad k=1, 2. \end{aligned}$$

Последние равенства составляют систему четырех нелинейных уравнений. Значение функции $G(\tau)$ в точках $\tau = c_k, \tau = d_k$, также как и коэффициенты C_1, C_2 , следует рассматривать функциями границ разрезом c_k, d_k .

Результаты численных исследований. Совместим правую границу первой физической трещины b_1 с началом координат. Левую границу первой физической трещины a_1 положим равной единице (левая трещина для всех приведенных решений имеет единичную длину). При таком выборе b_1 значение параметра, описывающего положение левого конца второй физической трещины a_2 , будет соответствовать расстоянию между трещинами. На рис. 2 приведены зависимости размеров зон предразрушения для отмеченных длин правой физической трещины. При переходе от

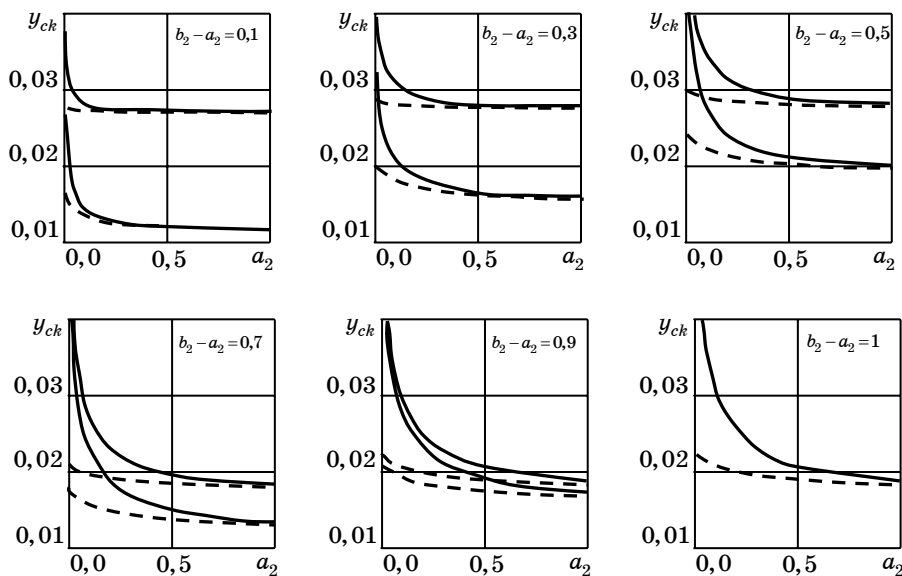


Рис. 2

блока к блоку длина правой трещины увеличивается, оставаясь меньше длины левой трещины, последний блок соответствует равным длинам трещин. Сплошные кривые на рисунке соответствуют длинам внутренних зон предразрушения. Длина внутренней зоны всегда больше для трещины большего размера. Такая же закономерность и для внешних зон (они изображены на блоках пунктирными линиями). Рис. 2 иллюстрирует взаимное влияние трещин. При сближении трещин происходит увеличение длин внутренних зон, по сравнению с которым увеличение внешних зон является менее значительным.

Полученные результаты удобны для использования при анализе многоочагового разрушения в упругих телах. Кроме того, использование упруго-вязкоупругой аналогии в совокупности с подходами, изложенными в работе [2], позволяет в дальнейшем выполнить исследование развития системы двух коллинеарных трещин в элементах конструкций, изготовленных из вязкоупругих материалов.

РЕЗЮМЕ. На основі моделі Леонова-Панасюка досліджено задачу про граничну рівновагу пружного ізотропного нескінченного тіла з двома колінеарними тріщинами нерівної довжини. Отримано визначальні рівняння для довжин зон передруйнування у вершинах кожної із тріщин. На основі отриманих результатів наведено приклад розрахунку залежностей довжин зон передруйнування від взаємного розташування тріщин.

Ключові слова: колінеарні тріщини, зони передруйнування, нелінійна механіка руйнування

SUMMARY. Basing on Leonov-Panasyuk model, the problem of limiting equilibrium of elastic isotropic infinite body with two co-linear cracks of unequal lengths is studied. Equations for determination of process zone lengths in the tips of both cracks are obtained. An example is given for the calculation of process zone length dependencies on the cracks mutual positions.

Keywords: co-linear cracks, process zone, non-linear fracture mechanics

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Витвицкий П. М.* Полосы скольжения при растяжении тонких пластин с прямолинейными разрезами // Концентрация напряжений. – К.: Наук. думка, 1965. – С. 77–85.
2. *Каминский А. А., Селиванов М. Ф., Черноиван Ю. А.* Докритический рост двух коллинеарных трещин в вязкоупругом теле // Теорет. и прикладная механика. – 2011. – Вып. 48 (2). – С. 40–50.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
4. *Collins, R. A., Cartwright D. J.* An analytical solution for two equal-length collinear strip yield cracks // Eng. Fract. Mech. – 2001. – Vol. 68. – P. 915–924.
5. *Nishimura T.* Strip yield analysis of two collinear unequal cracks in an infinite sheet // Eng. Fract. Mech. – 2002. – Vol. 69. – P. 1173–1191.
6. *Theocaris P. S.* Dugdale models for two collinear unequal cracks // Engng Fract. Mech. – 1983. – 18. – P. 545–559.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 24.02.2012

УДК 539.375

Л. А. КИПНИС, д-р физ.-мат. наук,
Г. А. ХАЗИН, канд. физ.-мат. наук, Т. В. ПОЛИЩУК

О НАЧАЛЬНОМ ЭТАПЕ ПРОЦЕССА РАССЛАИВАНИЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО УПРУГОГО ТЕЛА ВБЛИЗИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ

Решена задача о развитии межфазных зон ослабленных связей из угловой точки границы раздела сред. Развитие этих зон представляет собой начальный этап процесса расслаивания кусочно-однородного изотропного упругого тела вблизи угловой точки. Решение соответствующей задачи линейной теории упругости построено методом Винера–Хопфа.

Ключевые слова: граница раздела сред, угловая точка, расслаивание, метод Винера–Хопфа.

Большинство работ, посвященных задачам о расчете узких зон предразрушения вблизи остроконечных концентраторов напряжений, относятся к случаям, когда такими концентраторами являются концы трещин и угловые точки границы тела [1, 2, 6, 8, 11]. Подобных работ, в которых рассматриваются угловые точки границы раздела сред, значительно меньше. В работе [5] выполнен расчет межфазной пластической зоны предразрушения в угловой точке границы раздела изотропных сред. Для кусочно-однородного изотропного упругого и упругопластического тела задачи о расчете начальных узких зон предразрушения, развивающихся из угловой точки границы раздела сред в одной из его частей, решены в работах [3,4]. В данной статье решена задача о развитии межфазных зон ослабленных связей из угловой точки границы раздела сред, которое представляет собой начальный этап процесса расслаивания кусочно-однородного изотропного упругого тела вблизи нее.

Постановка задачи. В условиях плоской деформации в рамках статической симметричной задачи рассмотрим кусочно-однородное тело с границей раздела сред в форме сторон угла, составленное из изотропных линейно-упругих частей, соединенных между собой тонким упругим связующим слоем (охрупчившийся клей).

В соответствующей задаче линейной теории упругости в силу общих положений о поведении напряжений вблизи угловых точек упругих тел [9] угловая точка границы раздела сред представляет собой остроконечный концентратор напряжений со степенной особенностью. При этом справедлива формула

$$\sigma_{\theta}(r, 0) = C g r^{\lambda} + o(r^{\lambda}), \quad r \rightarrow 0,$$

в которой

$$g = g_1 \cos \lambda \alpha + g_2 \cos (\lambda + 2) \alpha,$$

$$\begin{aligned}
g_1 &= [(\lambda + 2)e - \lambda - 2][(\lambda + 2)\cos\lambda(\pi - \alpha)\sin(\lambda + 2)(\pi - \alpha) - \\
&\quad - \lambda\sin\lambda(\pi - \alpha)\cos(\lambda + 2)(\pi - \alpha)]\cos(\lambda + 2)\alpha\cos(\lambda + 2)(\pi - \alpha) + \\
&\quad + (1 + \alpha_1)(\lambda + 2)[\cos(\lambda + 2)\alpha\sin(\lambda + 2)(\pi - \alpha) + \\
&\quad + \sin(\lambda + 2)\alpha\cos(\lambda + 2)(\pi - \alpha)]\cos\lambda(\pi - \alpha)\cos(\lambda + 2)(\pi - \alpha), \\
g_2 &= [(\alpha_2 - \lambda - 1)e + \lambda + 2][(\lambda + 2)\cos\lambda(\pi - \alpha)\sin(\lambda + 2)(\pi - \alpha) - \\
&\quad - \lambda\sin\lambda(\pi - \alpha)\cos(\lambda + 2)(\pi - \alpha)]\cos\lambda\alpha\cos(\lambda + 2)(\pi - \alpha) - \\
&\quad - (1 + \alpha_1)[(\lambda + 2)\cos\lambda\alpha\sin(\lambda + 2)(\pi - \alpha) + \lambda\sin\lambda\alpha\cos(\lambda + 2)(\pi - \alpha)] \times \\
&\quad \times \cos\lambda(\pi - \alpha)\cos(\lambda + 2)(\pi - \alpha), \\
e &= \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1}e_0, \quad e_0 = \frac{E_1}{E_2}, \quad \alpha_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2};
\end{aligned}$$

$E_1, E_2, (E_1 > E_2)$ – модули Юнга; ν_1, ν_2 – коэффициенты Пуассона; 2α – угол между линиями границы раздела сред, которому соответствует материал 2. Показатель степени сингулярности напряжений λ представляет собой единственный в интервале $(-1; 0)$ корень уравнения

$$\begin{aligned}
\Delta(-x - 1) &= 0, \quad \Delta(z) = \sigma_0(z) + \sigma_1(z)e + \sigma_2(z)e^2, \\
\sigma_0(z) &= (\sin 2z\alpha + z\sin 2\alpha)[\alpha_1\sin 2z(\pi - \alpha) + z\sin 2\alpha], \\
\sigma_1(z) &= (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)\sin^2 z\pi - (\sin 2z\alpha + z\sin 2\alpha) \times \\
&\quad \times [\alpha_1\sin 2z(\pi - \alpha) + z\sin 2\alpha] - [\sin 2z(\pi - \alpha) - z\sin 2\alpha] \times \\
&\quad \times (\alpha_2\sin 2z\alpha - z\sin 2\alpha), \\
\sigma_2(z) &= [\sin 2z(\pi - \alpha) - z\sin 2\alpha](\alpha_2\sin 2z\alpha - z\sin 2\alpha).
\end{aligned}$$

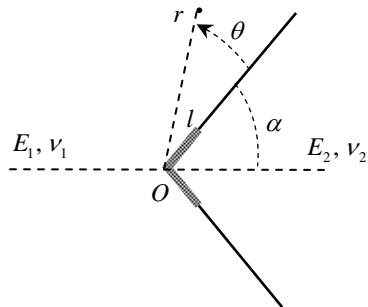
Постоянная C должна определяться из решения каждой конкретной задачи линейной теории упругости, в которой фигурирует граница раздела сред в форме сторон угла.

Результаты расчетов показывают, что $g(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (0; \alpha_1) \cup (\pi/2; \alpha_2)$, $g(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (\alpha_1; \pi/2) \cup (\alpha_2; \pi)$; $g(0) = g(\alpha_1) = g(\pi/2) = g(\alpha_2) = g(\pi) = 0$. Если e_0 увеличивается, то α_1, α_2 уменьшаются. При $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ значениям e_0 , равным 2; 3; 5; 10, соответствуют значения $180\alpha_1/\pi$, равные 38,2; 34,4; 29,3; 21,7, и значения $180\alpha_2/\pi$, равные 134,2; 133,4; 133,1; 131,3.

Будем считать, что $Cg > 0$. Тогда $\sigma_\theta(r; 0) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow 0$, поэтому на границе раздела сред вблизи угловой точки нормальные напряжения являются растягивающими. В этом случае вследствие высокой концентрации напряжений в угловой точке возможно начало процесса расслаивания кусочно-однородного изотропного упругого тела вблизи нее, т. е. возникновение и развитие из нее межфазных зон ослабленных связей,

размер которых в значительной степени меньше размеров тела. Ставится задача определения длины зон ослабленных связей.

Поскольку преимущественные деформации в зоне ослабленных связей развиваются по механизму отрыва, будем моделировать ее линией разрыва нормального смещения, на которой нормальное напряжение равно заданной постоянной материала тонкого упругого связующего слоя σ (сопротивление отрыву). Учитывая малость зоны ослабленных связей, приходим к плоской статической симметричной задаче линейной теории упругости для кусочно-однородной изотропной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, содержащей разрезы конечной длины, исходящие из угловой точки и расположенные на этой границе (рисунок). На бесконечности реализуется асимптотика, представляющая собой решение аналогичной задачи без разрезов (задача К), порождаемое единственным в интервале $(-1; 0)$ корнем ее характеристического уравнения $\Delta(-x-1)=0$. Произвольная постоянная C , входящая в указанное решение, считается заданной. Она характеризует интенсивность внешнего поля и должна определяться из решения внешней задачи. Граничные условия задачи имеет следующий вид:



$$\begin{aligned} \theta = \pi - \alpha : \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0, \\ \theta = -\alpha : \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0, \\ \theta = 0 : \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_r \rangle = 0; \\ \theta = 0, r < l : \sigma_\theta = \sigma, \\ \theta = 0, r > l : \langle u_\theta \rangle = 0; \\ \theta = 0, r \rightarrow \infty : \sigma_\theta = Cgr^\lambda + o(1/r). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $-\alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha$; $\langle a \rangle$ – скачок a .

Решения сформулированной задачи линейной теории упругости представляет собой сумму решений следующих двух задач. Первая отличается от нее тем, что вместо первого из условий (2) имеем

$$\theta = 0, r < l : \sigma_\theta = \sigma - Cgr^\lambda, \quad (4)$$

а на бесконечности напряжения затухают как $o(1/r)$ (в выражении (3) отсутствует первое слагаемое). Вторая задача – задача К. Поскольку решение второй задачи известно, достаточно построить решение первой.

Для построения решения первой задачи будем использовать метод Винера–Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина [5, 7, 10].

Решения уравнения Винера–Хопфа. Применяя преобразование Меллина к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука, условиям (1) и учитывая второе из условий (2) и условие (4), приходим к следующему функциональному уравнению Винера–Хопфа:

$$\begin{aligned}
\Phi^+(p) + \frac{\sigma}{p+1} + \frac{\sigma_1}{p+\lambda+1} &= A \operatorname{ctg} p \pi G(p) \Phi^-(p), \\
A &= \frac{(1+\varkappa_1)[1+\varkappa_1+(1+\varkappa_2)e]}{2[\varkappa_1+(1+\varkappa_1\varkappa_2)e+\varkappa_2e^2]}, \quad G(p) = \frac{G_1(p)}{G_2(p)}, \\
G_1(p) &= [\varkappa_1+(1+\varkappa_1\varkappa_2)e+\varkappa_2e^2][a_0(p)+a_1(p)e] \sin p\pi, \\
G_2(p) &= [1+\varkappa_1+(1+\varkappa_2)e][b_0(p)+b_1(p)e+b_2(p)e^2] \cos p\pi, \\
a_0(p) &= (1+\varkappa_1)[\cos 2p(\pi-\alpha)+\cos 2\alpha](\sin 2p\alpha+p \sin 2\alpha), \\
a_1(p) &= (1+\varkappa_2)(\cos 2p\alpha+\cos 2\alpha)[\sin 2p(\pi-\alpha)-p \sin 2\alpha], \\
b_0(p) &= (\sin 2p\alpha+p \sin 2\alpha)[\varkappa_1 \sin 2p(\pi-\alpha)+p \sin 2\alpha], \\
b_1(p) &= (1+\varkappa_1)(1+\varkappa_2) \sin^2 p\pi - (\sin 2p\alpha+p \sin 2\alpha)[\varkappa_1 \sin 2p(\pi-\alpha)+ \\
&\quad +p \sin 2\alpha] - s[\sin 2p(\pi-\alpha)-p \sin 2\alpha](\varkappa_2 \sin 2p\alpha-p \sin 2\alpha), \\
b_2(p) &= [\sin 2p(\pi-\alpha)-p \sin 2\alpha](\varkappa_2 \sin 2p\alpha-p \sin 2\alpha), \quad \sigma_1 = -Cgl^\lambda, \\
\Phi^+(p) &= \int_1^\infty \sigma_\theta(\rho l, 0) \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1-v_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial U_\theta}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\theta=0}^{r=\rho l} \rho^p d\rho \quad (5)
\end{aligned}$$

Здесь $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$; $\varepsilon_{1,2}$ – достаточно малые положительные числа.

Подобные уравнения решены, например, в [5, 10].

Решение уравнения (5) имеет вид

$$\begin{aligned}
\Phi^+(p) &= K^+(p) G^+(p) \left\{ \frac{\sigma}{p+1} \left[\frac{1}{K^+(-1)G^+(-1)} - \frac{1}{K^+(p)G^+(p)} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma_1}{p+\lambda+1} \left[\frac{1}{K^+(-\lambda-1)G^+(-\lambda-1)} - \frac{1}{K^+(p)G^+(p)} \right] \right\} \quad (\operatorname{Re} p < 0), \\
\Phi^-(p) &= \frac{pG^-(p)}{AK^-(p)} \left[\frac{\sigma}{(p+1)K^+(-1)G^+(-1)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma_1}{(p+\lambda+1)K^+(-\lambda-1)G^+(-\lambda-1)} \right] \quad (\operatorname{Re} p > 0), \\
\exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] &= \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0 \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0 \end{cases}, \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} \mp p\right)}, \quad (6)
\end{aligned}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Определение длины зон ослабленных связей. С помощью (6) получаем выражение для коэффициента интенсивности напряжений в конце разреза

$$k_I = \frac{2\sqrt{2}(x_1 + e)}{1 + x_1 + (1 + x_2)e} \sqrt{l} \left[\frac{g\Gamma(\lambda + 3/2)}{\Gamma(\lambda + 2)G^+(-\lambda - 1)} Cl^\lambda - \frac{\sqrt{\pi}}{2G^+(-1)} \sigma \right]. \quad (7)$$

Длина зоны ослабленных связей определяется из условия ограниченности напряжений вблизи конца линии разрыва нормального смещения, т.е. из условия равенства нулю коэффициента k_I . Приравнявая к нулю правую часть (7), получаем следующую формулу для определения длины l зон ослабленных связей:

$$l = L \left(\frac{|C|}{\sigma} \right)^{-1/\lambda}, \quad L = \left[\frac{2|g|\Gamma(\lambda + 3/2)G^+(-1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda + 2)G^+(-\lambda - 1)} \right]^{-1/\lambda}. \quad (8)$$

Формула (8) устанавливает закон развития начальных межфазных зон ослабленных связей из угловой точки границы раздела сред в кусочно-однородном изотропном упругом теле.

В таблице приведены некоторые значения $-\lambda$ (числитель) и L (знаменатель) при $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ($\tilde{\alpha} = 180\alpha / \pi$).

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы. С ростом модуля параметра нагружения C длина зон ослабленных связей возрастает по степенному закону. Чем больше постоянная материала связующего слоя σ , тем меньше длина зон ослабленных связей. Если $C > 0$ ($C < 0$), то чем больше отличаются друг от друга материалы, тем шире (уже) область значений угла α , при которых возможно начало процесса расслаивания кусочно-однородного изотропного упругого тела вблизи угловой точки.

Если $(|C|/\sigma)^{-1/\lambda}$ с изменениями α , e_0 , ν_1 , ν_2 слабо изменяется, то в каждом из интервалов $(0; \alpha_1)$, $(\alpha_1; \pi/2)$,

$(\pi/2; \alpha_2)$, $(\alpha_2; \pi)$ с ростом угла α длина зон ослабленных связей сначала увеличивается, а затем уменьшается. При этом в случае $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ максимальным значением длины зон ослабленных связей соответствует значения $180\alpha / \pi$, равные 18,4; 56,8; 123,1; 163,9 ($e_0 = 2$), 14,1; 47,6; 119,3; 158,2 ($e_0 = 3$), 4,3; 40,2; 118,4; 155,4 ($e_0 = 5$), 2,1; 32,4; 115,2; 151,7 ($e_0 = 10$). Чем больше отличаются друг от друга материалы, тем

$\tilde{\alpha}$	e_0			
	2	3	5	10
140	0,101	0,146	0,190	0,229
	$4,1 \cdot 10^{-5}$	0,115	0,597	1,318
145	0,110	0,161	0,211	0,254
	0,017	10,848	16,498	32,055
1500	0,117	0,173	0,228	0,278
	0,331	20,165	36,524	86,081
155	0,120	0,180	0,241	0,298
	1,187	22,443	44,086	92,543
160	0,116	0,179	0,247	0,313
	2,278	22,648	35,708	38,691
165	0,104	0,168	0,241	0,318
	1,466	19,896	29,203	34,502
170	0,082	0,140	0,215	0,305
	0,133	11,787	23,935	27,314
175	0,047	0,087	0,150	0,246
	$4,6 \cdot 10^{-7}$	0,352	12,921	15,093

меньше угол α , при котором длина зон ослабленных связей является наибольшей, и тем больше эта максимальная длина.

При некотором значении возрастающей внешней нагрузки возможны разрыв сплошности вдоль зон ослабленных связей и образование трещин – расслоений, исходящих из угловой точки.

РЕЗЮМЕ. Розв'язано задачу про розвиток міжфазних зон ослаблених зв'язків з кутової точки межі поділу середовищ. Розвиток цих зон являє собою початковий етап процесу розшаровування кусково-однорідного ізотропного пружного тіла біля кутової точки. Розв'язок відповідної задачі лінійної теорії пружності побудовано методом Вінера–Хопфа.

Ключові слова: межа поділу середовищ, кутова точка, розшаровування, метод Вінера–Хопфа.

SUMMARY. The problem on development of interfacial zones of hyposthenic connections from the corner point of the media-separating boundary is solved. The development of these zones is the initial stage of process of delamination of piece-homogeneous isotropic elastic body near the corner point. The solution of corresponding problem of linear theory of elasticity is constructed by the Wiener-Hopf method.

Keywords: media-separating boundary, corner point, delamination, Wiener-Hopf method.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дундурс Дж., Комниноу М. Обзор и перспектива исследования межфазной трещины // Механика композитных материалов. – 1979. – № 3. – С. 387–396.
2. Каминський А.А., Кипнис Л.А., Хазин Г.А. Расчет пластической зоны в угловой точке в рамках модели «трезубец» // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38, № 5. – С. 110–116.
3. Каминський А.А., Кипнис Л.А., Хазин Г.А., Красильников А.Е. Анализ поведения напряжений вблизи угловой точки границы раздела упругих сред при наличии зоны предразрушения // Теорет. и прикладная механика. – 2010. – № 1(47). – С. 20–26.
4. Каминский А.А., Кипнис Л.А., Хазин Г.А., Полищук Т.В. О развитии начальных пластических полос от негладкой границы раздела изотропных сред // Теорет. и прикладная механика. – 2011. – № 3(49). – С. 70–75.
5. Кипнис Л.А., Полищук Т.В. О расчете пластической зоны предразрушения в угловой точке границы раздела сред // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 2. – С. 59–69.
6. Лобода В.В., Шевелева А.Е. Определение зон предразрушения у края трещины между двумя упругими ортотропными телами // Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 5. – С. 76–82.
7. Нобл Б. Применения метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
8. Панасюк В.В., Саврук М.П. Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – Т. 28, № 1. – С. 49–68.
9. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
10. Kaminsky A.A., Kipnis L.A., Khazin G.A. A Criterion for the Onset for Growth of Two Shear Cracks in an Elastic Body under Plane-stain Condition // Int. Appl. Mech. – 2006. – Vol. 42, № 4. – P. 439–446.
11. Lablond J.B., Frelat J. Crack kinking from an interface crack with initial contact between the crack lips // Europ. J. Mech. A/Solids. – 2001. – Vol. 20. – P. 937–951.

Уманський державний педагогічний університет

Поступила 28.02.2012

УДК 539.3

Р. М. МАРТЫНЯК, д-р физ.-мат. наук, *Х. И. СЕРЕДНИЦКАЯ***ТЕРМОУПРУГОСТЬ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ТЕЛА С
МЕЖФАЗНОЙ ТЕПЛОПРОНИЦАЕМОЙ ТРЕЩИНОЙ**

Задача термоупругости для кусочно-однородного тела с заполненной теплопроницаемой средой межфазной трещиной, поверхности которой покрыты тонкими пленками, сведена к системе нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, для решения которой применен метод последовательных приближений. Проанализированы зависимости раскрытия трещины, скачка температуры между ее берегами и коэффициентов интенсивности межфазных напряжений от теплопроводности заполнителя дефекта, термосопротивления пленок и направления теплового потока.

Ключевые слова: кусочно-однородное тело, межфазная трещина, поверхностные пленки, теплопроницаемый заполнитель.

В работе [7] впервые была рассмотрена задача термоупругости для тела с теплопроводящей трещиной. Результаты дальнейших исследований отражены в монографии [1] и в статье [2]. Изучено [3, 5] термомеханическое поведение биматериала с межфазной теплоизолированной трещиной и трещиной с термосопротивлением, не изменяющимся при нагружении тела. Решены задачи термоупругости для кусочно-однородных тел с межфазной раскрытой трещиной, заполненной теплопроницаемой средой [6], и с закрытой трещиной, термосопротивление которой зависит от контактного давления берегов дефекта вследствие их шероховатости [4].

В данной статье исследовано термонапряженное состояние биматериала с межфазной трещиной, термосопротивление которой обусловлено теплопроницаемым заполнителем и поверхностными пленками на ее берегах.

Моделирование теплопередачи через межфазную трещину. Рассмотрим кусочно-однородное тело с межфазной трещиной (дефектом), берега которой покрыты тонкими поверхностными пленками. Раскрываясь под действием приложенных к телу нагрузок, трещина заполняется теплопроводной средой (жидкостью или газом). При теплопередаче через межфазную поверхность композита поверхностные пленки и заполнитель дефекта могут существенно влиять на распределение температуры и термических напряжений в окрестности трещины. Однако определение температурного поля в такой структуре сопряжено со значительными трудностями математического характера, обусловленными необходимостью решения задачи теплопроводности для пяти областей (двух компонент составного тела, двух поверхностных пленок и заполнителя трещины) и удовлетворения условий идеального теплового контакта на поверхностях разграничения этих областей.

Примем модель теплопроницаемой межфазной трещины, которая базируется на следующих предположениях: а) толщина пленок $h_{01}(x)$ и $h_{02}(x)$ на берегах трещины и ее раскрытие (высота) $h(x)$ значительно

меньше длины трещины $2a$: $h_{01}(x) \ll 2a$, $h_{02}(x) \ll 2a$, $h(x) \ll 2a$; б) коэффициенты теплопроводности пленок λ_{01} , λ_{02} и заполнителя трещины λ_c меньше коэффициентов теплопроводности компонент биматериала λ_1 , λ_2

$$\lambda_{01} < \min\{\lambda_1, \lambda_2\}, \quad \lambda_{02} < \min\{\lambda_1, \lambda_2\}, \quad \lambda_c < \min\{\lambda_1, \lambda_2\}.$$

При выполнении этих условий теплопередача через пленки и заполнитель трещины осуществляется в основном в направлении, нормальном к их границам, а теплопередачей в продольном направлении можно пренебречь. Это дает основание исключить из рассмотрения задачу теплопроводности для пленок и заполнителя, а их наличие учитывать контактным термическим сопротивлением:

$$r_{01}(x) = h_{01}(x)/\lambda_{01}, \quad r_{02}(x) = h_{02}(x)/\lambda_{02}, \quad r(x) = h(x)/\lambda_c.$$

Согласно правилу суммирования последовательно соединенных сопротивлений результирующее термосопротивление $R(x)$ пленок и заполнителя равно их сумме:

$$R(x) = r_{01}(x) + r_{02}(x) + r(x).$$

Следовательно, моделируя влияние трещины на температурное поле композита термосопротивлением $R(x)$ на отрезке $x \in [-a, a]$ межфазной линии, задачу теплопроводности для рассмотренной структуры сводим к задаче теплопроводности для биматериала с такими условиями несовершенного теплового контакта его компонент на участке дефекта:

$$q_y^+(x, 0) = q_y^-(x, 0),$$

$$T^-(x, 0) - T^+(x, 0) = R(x)q_y^+(x, 0). \quad (1)$$

Здесь q_y – компонента вектора теплового потока; T – температура.

Постановка задачи. Исследуем влияние межфазной теплопроницаемой трещины на температурное поле и напряженно-деформированное состояние составленного из полуплоскостей D_1 и D_2 композита (рис. 1) при условии, что в нем реализуется плоская деформация. Материалы полуплоскостей имеют разные коэффициенты теплопроводности ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) и линейного теплового расширения ($\alpha_1 \neq \alpha_2$), а их механические свойства одинаковы ($G_1 = G_2 = G$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$). На бесконечности в направлении, перпендикулярном межфазной линии, на тело действуют однородные растягивающие напряжения $\sigma_y = p$ и

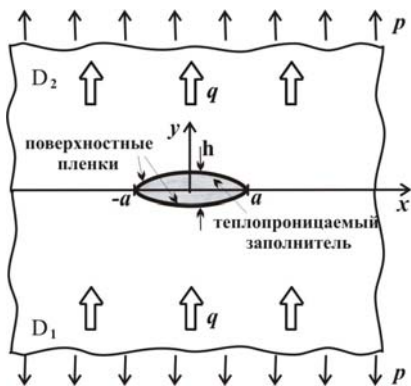


Рис. 1

и однородный стационарный тепловой поток $q_y = q$. Кроме того, к каждой

из полуплоскостей D_1 и D_2 на бесконечности приложены линейно распределенные по координате y напряжения, устраняющие глобальное искривление границ полуплоскостей, которое обусловлено тепловым потоком q .

На межфазной линии вне трещины выполняются условия идеального теплового и механического контакта полуплоскостей. Условия теплового контакта берегов трещины имеют вид (1). Пренебрегая механическим влиянием заполнителя трещины, считаем ее берега свободными от напряжений.

Запишем гранично-контактные условия сформулированной задачи: на межфазной линии вне трещины ($y = 0, |x| \geq a$):

$$\begin{aligned} \sigma_y^+ &= \sigma_y^-, & \tau_{xy}^+ &= \tau_{xy}^-, \\ u^+ &= u^-, & v^+ &= v^-, \\ T^+ &= T^-, & q_y^+ &= q_y^-; \end{aligned} \quad (2)$$

на участке трещины ($y = 0, |x| < a$):

$$\begin{aligned} \sigma_y^- &= 0, & \sigma_y^+ &= \sigma_y^-, & \tau_{xy}^- &= 0, & \tau_{xy}^+ &= \tau_{xy}^-, \\ q_y^+ &= q_y^-, & T^- - T^+ &= R(x)q_y^+; \end{aligned} \quad (3)$$

на бесконечности в каждой из полуплоскостей D_n ($n=1, 2$):

$$\sigma_y = p, \quad \sigma_x = \frac{2G\eta_n q y}{\lambda_n(1-\nu)} p, \quad \tau_{xy} = 0, \quad q_x = 0, \quad q_y = q. \quad (4)$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты тензора напряжений; u, v – компоненты вектора перемещений; q_x, q_y – компоненты вектора теплового потока, $\eta_n = \alpha_n(1+\nu)/\lambda_n$ ($n=1, 2$). Параметр η называют термической дистортивностью (ТД) материала и он характеризует искривление линейного элемента, обусловленное перпендикулярным к нему тепловым потоком единичной интенсивности.

Система сингулярных интегро-дифференциальных уравнений задачи. С использованием метода комплексных потенциалов температура, компоненты векторов теплового потока, перемещений и тензора напряжений представлены через три заранее неизвестные функции: скачки температуры $\gamma(x) = T^-(x, 0) - T^+(x, 0)$, касательных перемещений $U(x) = u^-(x, 0) - u^+(x, 0)$ на берегах трещины и раскрытие трещины $h(x) = v^+(x, 0) - v^-(x, 0)$. Эти представления построены таким образом, что они удовлетворяют всем граничным условиям (2)–(4), кроме первого, третьего и шестого из (3). Используя формулы (6) работы [3], определим температуру, тепловой поток и напряжения на поверхностях трещины:

$$\begin{aligned}
T^\pm &= \mp \frac{\lambda}{2\lambda_2} \gamma(x), \quad q_y^\pm = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t) dt}{t-x} + q, \\
\sigma_y^\pm &= \frac{\lambda\eta^-}{K} \gamma(x) + \frac{2}{\pi K} \int_{-a}^a \frac{h'(t)}{t-x} dt + p, \\
\tau_{xy}^\pm &= \frac{\lambda\eta^+}{K\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma(t)}{t-x} dt - \frac{2}{K\pi} \int_{-a}^a \frac{U'(t)}{t-x} dt.
\end{aligned} \tag{5}$$

Удовлетворяя с помощью (5) первому, третьему и шестому условиям из (3), приходим к системе нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений относительно функций $\gamma(x)$, $U(x)$, $h(x)$:

$$\frac{\gamma(x)}{h(x)/\lambda_c + r_{01}(x) + r_{02}(x)} - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t)}{t-x} dt = q, \quad |x| < a, \tag{6}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'(t)}{t-x} dt + \frac{\lambda\eta^-}{2} \gamma(x) = -\frac{Kp}{2}, \quad |x| < a, \tag{7}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{U'(t) dt}{t-x} - \frac{\lambda\eta^+}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma(t) dt}{t-x} = 0, \quad |x| < a, \tag{8}$$

где $\lambda = 2\lambda_1\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$; $K = 4(1-\nu)/G$; $\eta^\pm = \eta_2 \pm \eta_1$. Нелинейность этой системы обусловлена тем, что термосопротивление трещины пропорционально ее раскрытию, которое зависит от силовой и тепловой нагрузки.

Искомые функции должны удовлетворять условиям

$$\gamma(\pm a) = 0, \quad h(\pm a) = 0, \quad U(\pm a) = 0. \tag{9}$$

Из уравнения (8), учитывая третье условие (9), определяем производную от скачка касательных перемещений берегов дефекта через скачек температуры:

$$U'(x) = \frac{\lambda\eta^+}{2} \left[\gamma(x) - \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \gamma(x) dx \right]. \tag{10}$$

Следовательно, решение задачи полностью определяется скачком температуры $\gamma(x)$ и раскрытием трещины $h(x)$, которые находятся из системы двух нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (6), (7).

Для решения системы уравнений (6), (7) разработан итерационный алгоритм, базирующийся на методе последовательных приближений. На каждом шаге итерации численно решаются линейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'_i(t) dt}{t-x} = -\frac{\lambda\eta^-}{2} \gamma_{i-1}(x) - \frac{Kp}{2}, \quad |x| < a,$$

$$\frac{\gamma_i(x)}{h_i(x)/\lambda_c + r_{01}(x) + r_{02}(x)} - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma'_i(t)}{t-x} dt = q, \quad |x| < a \quad i = 1, 2, \dots,$$

при условии, что $\gamma_0(x) = 0$.

Итерационный процесс завершается, если одновременно выполняются условия

$$\begin{aligned} [\gamma_i(x) - \gamma_{i-1}(x)]/\gamma_i(x) &\leq 10^{-5}, \\ [h_i(x) - h_{i-1}(x)]/h_i(x) &\leq 10^{-5}. \end{aligned}$$

Анализ численных результатов. Рассмотрен случай, когда термосопротивление пленок на берегах трещины задано функциями $r_{01}(x) = r_1 \sqrt{1 - (x/a)^2}$, $r_{02}(x) = r_2 \sqrt{1 - (x/a)^2}$. Для проведения численных расчетов введены безразмерные величины: высота зазора $\bar{h} = h/a$, скачек температуры $\bar{\gamma} = \gamma \lambda \eta^-$, растягивающие напряжения $\bar{p} = pK$, тепловой поток $\bar{q} = qa\eta^-$, теплопроводность заполнителя трещины $\bar{\lambda}_c = \lambda_c/\lambda$, результирующее термосопротивление пленок в центре трещины $\bar{r}_0 = (r_1 + r_2)\lambda/a$, коэффициенты интенсивности нормальных и касательных межфазных напряжений $\bar{K}_I = K_I K/\sqrt{a}$ и $\bar{K}_{II} = K_{II} K/\sqrt{a}$, координата $\bar{x} = x/a$.

Заметим, что $\bar{q} > 0$, если тепловой поток направлен от материала с меньшей ТД (термической дистортивностью) к материалу с большей ТД (т.е. при $q(\eta_2 - \eta_1) > 0$), и $\bar{q} < 0$, если тепловой поток имеет противоположное направление (т.е. при $q(\eta_2 - \eta_1) < 0$).

На рис. 2–7 представлены графики, иллюстрирующие зависимость модуля скачка температуры $|\bar{\gamma}|$, раскрытия трещины $h(x)$, коэффициентов интенсивности напряжений \bar{K}_I и \bar{K}_{II} от коэффициента теплопроводности заполнителя трещины $\bar{\lambda}_c$ и суммарного термосопротивления пленок на берегах трещины \bar{r}_0 для теплового потока, направленного к материалу с большей ТД ($\bar{q} = 0,009$, штриховые кривые) и к материалу с меньшей ТД ($\bar{q} = -0,009$, сплошные кривые).

Распределение вдоль трещины модуля скачка температуры между ее берегами $|\bar{\gamma}(\bar{x})|$ и раскрытия трещины $\bar{h}(\bar{x})$ при фиксированном термосопротивлении пленок $\bar{r}_0 = 0,01$ и разных коэффициентах теплопроводности заполнителя $\bar{\lambda}_c$ показано на рис. 2 и рис. 3 соответственно. При тепловом потоке, направленном к материалу с большей ТД (при $\bar{q} > 0$), и $|\bar{\gamma}|$ и \bar{h} всегда больше, чем при потоке, направленном к материалу с меньшей ТД (при $\bar{q} < 0$), причем эта разница увеличивается при уменьшении $\bar{\lambda}_c$. Однако, с уменьшением коэффициента теплопроводности заполнителя $\bar{\lambda}_c$

раскрытие трещины \bar{h} возрастает при $\bar{q} > 0$ и спадает при $\bar{q} < 0$, тогда как модуль скачка температуры $|\bar{\gamma}|$ возрастает для обоих направлений теплового потока.

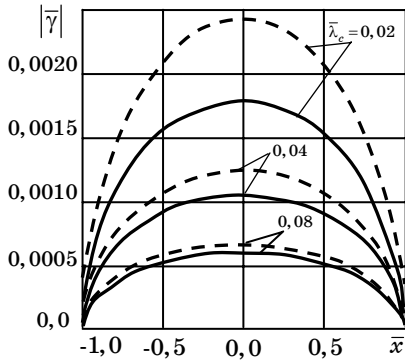


Рис. 2

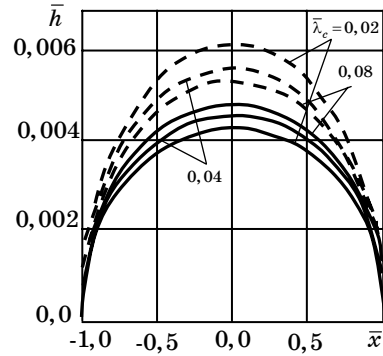


Рис. 3

При фиксированном коэффициенте теплопроводности заполнителя ($\bar{\lambda}_c = 0,02$) с увеличением термосопротивления пленок \bar{r}_0 модуль скачка температуры $|\bar{\gamma}|$ увеличивается для обоих направлений теплового потока (рис. 4), но при этом уменьшается разница между $|\bar{\gamma}|$ для противоположных направлений потока. Раскрытие трещины \bar{h} с увеличением \bar{r}_0 увеличивается при тепловом потоке, направленном к материалу с большей ТД, и уменьшается при тепловом потоке, направленном к материалу с меньшей ТД (рис. 5). В последнем случае при $\bar{r}_0 = 2$ в центре трещины возникает локальный минимум ее раскрытия, а при $\bar{r}_0 = 4$ оно становится отрицательным на некотором участке. Это свидетельствует о том, что

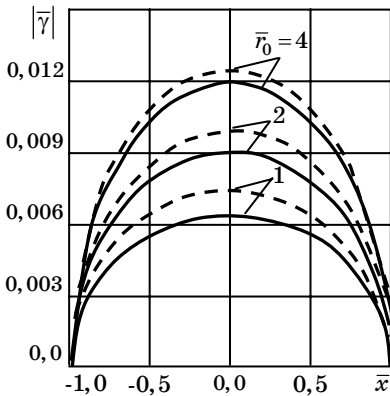


Рис. 4

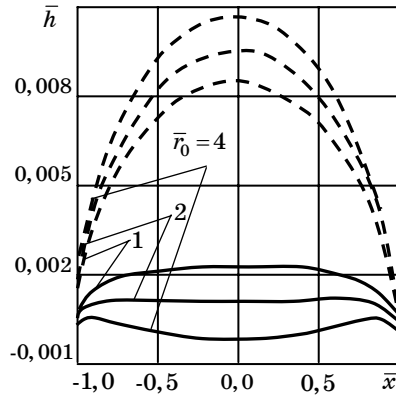


Рис. 5

для теплового потока, направленного в сторону материала с меньшей ТД, увеличение термосопротивления пленок на берегах трещины может привести к их частичному контакту. Заметим, что такой эффект не наблюдался для трещины, содержащей теплопроницаемый заполнитель, в слу-

чае отсутствия пленок на ее берегах [6].

Коэффициент интенсивности нормальных межфазных напряжений \bar{K}_I увеличивается с убыванием термосопротивления пленок \bar{r}_0 и с возрастанием коэффициента теплопроводности $\bar{\lambda}_c$ заполнителя трещины в случае теплового потока, направленного к материалу с меньшей ТД, и имеет противоположную тенденцию в случае потока, направленного к материалу с большей ТД (рис. 6). Увеличение $\bar{\lambda}_c$ приводит к убыванию модуля коэффициента интенсивности касательных межфазных напряжений $|\bar{K}_{II}|$,

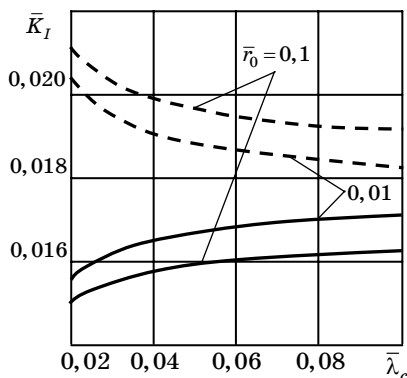


Рис. 6

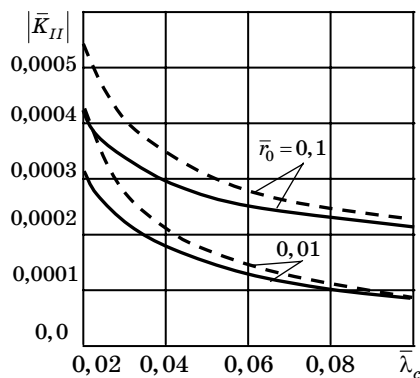


Рис. 7

а увеличение \bar{r}_0 – к возрастанию $|\bar{K}_{II}|$ (рис. 7). При этом $|\bar{K}_{II}|$ всегда выше в случае теплового потока, направленного к материалу с большей ТД.

РЕЗЮМЕ. Задача термопружності для кусково-однорідного тіла із заповненою теплопроникним середовищем міжфазною тріщиною, поверхні якої покриті тонкими плівками, зведена до системи нелінійних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь, що розв'язується методом послідовних наближень. Проаналізовано залежності розкриття тріщини, стрибка температури між її берегами і коефіцієнтів інтенсивності міжфазних напружень від теплопровідності заповнювача дефекту, термоопору поверхневих плівок і напрямку теплового потоку.

Ключові слова: кусково-однорідне тіло, міжфазна тріщина, поверхневі плівки, теплопроникний заповнювач.

SUMMARY. The thermoelastic problem for a piecewise-homogeneous solid with an interfacial thin-film-covered crack filled with a heat-permeable medium is reduced to the set of nonlinear singular integrodifferential equations. The method of successive approximations is applied for solving the set. The dependences of the crack opening, temperature jump between crack faces and stress intensity factors on the thermal conductivity of the crack filler, thermal resistance of surface films and direction of heat flow are analysed.

Key words: piecewise-homogeneous solid, interfacial crack, surface films, heat-permeable filler.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1983. – 278 с.

2. Кит Г. С., Мартиняк Р. М. Термопружність структур з теплопровідними тріщинами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – Т. 46, № 1. – С. 11–20.
3. Кит Г. С., Мартыняк Р. М., Нагалка С. П., Гончар Х. И. Задача термоупругости для биматериала с межфазной трещиной, берега которой контактируют на центральном участке // Теорет. и прикладная механика. – 2002. – Вып. 36. С. 83–90.
4. Мартиняк Р. М. Термонапружений стан біматеріалу із закритою міжфазною тріщиною з шорсткими поверхнями // Мат. мет. та фіз.-мех. поля. – 2010. – Т. 53, № 1. – С. 71–79.
5. Мартиняк Р. М., Гончар Х. И., Нагалка С. П. Моделювання термомеханічного закриття початково розкритої міжфазної тріщини, наділеної термоопором // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – Т. 39, № 5. – С. 59–66.
6. Мартыняк Р. М., Гончар Х. И. Термоупругое деформирование биматериала с межфазным дефектом, заполненным теплопроводной средой // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 58–62.
7. Подстригач Я. С., Кит Г. С. Определение температурных полей и напряжений в окрестности теплопроводящих трещин // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1967. – Вып. 7. – С. 194–201.

*Ин-т прикладных проблем механики
и математики НАН Украины, г. Львов*

Поступила 23.03.2012

УДК 539.3

А. С. ВЬЮН, В. В. ЛОБОДА, д-р физ.-мат. наук

МОДЕЛЬ ПОЛОС ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО НАСЫЩЕНИЯ ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТЕЛА С ТРЕЩИНОЙ

Изучена зона электрического насыщения для неограниченного тела с прямолинейной центральной трещиной. Установлено согласование получаемых результатов с данными конечно-элементного решения соответствующей задачи для тела конечных размеров. Приведен численный анализ принятой модели для тела конечных размеров при различных соотношениях размеров трещины и тела.

Ключевые слова: трещина, зона электрического насыщения, задача линейного сопряжения, конечно-элементное решение.

Основы механики разрушения пьезоэлектрических материалов описаны в монографиях [2, 6]. При этом в рамках рассмотрения трещины Гриффитса основное внимание уделено вопросам нахождения коэффициентов интенсивности напряжений и электрической индукции. В работах [4, 9] предложена другая модель трещины, которая позволила устранить особенность нормального напряжения в окрестности ее вершины. Для межфазной трещины эта модель получила развитие в [3], а для тел конечных размеров в [1]. Применительно к пьезоэлектрическим материалам аналог модели [4, 9] был предложен в [7, 8] и получил развитие в [10, 11]. Последняя модель предполагает введение полос электрического насыщения на продолжении трещины и устранение таким образом особенностей электрической индукции в ее вершине. В данной статье эта модель развивается на случай тел конечных размеров и произвольного распределения электрической индукции на продолжении трещины.

Постановка задачи. Рассмотрим плоскую деформацию в плоскости x_1Ox_3 пьезоэлектрического пространства с трещиной длины $2a$. Предположим, что в бесконечно удаленных точках области прикладывается равномерно распределенное растягивающее напряжение σ^∞ , направленное перпендикулярно к линии расположения трещины, и электрическое смещение d^∞ . Выберем систему декартовых координат так, чтобы трещина располагалась вдоль оси Ox_1 на отрезке $|x_1| < a$ (рис. 1).

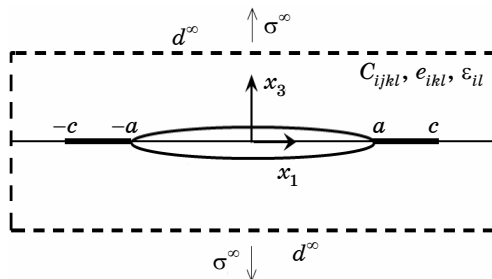


Рис. 1

Согласно модели полос электрического насыщения [7], для устранения особенности в электрическом смещении $D_{33}(x_1, 0)$, на продолжениях трещины $a \leq |x_1| \leq c$ прикладывается электрическое смещение $d(x_1)$. Зна-

чение параметра c заранее неизвестно, а в качестве функции $d(x_1)$ чаще всего выбирается постоянная, равная предельному электрическому насыщению материала D_S .

В рамках принятой модели граничные условия запишутся в виде

$$\sigma_{33}(x_1, x_3) \Big|_{x_1^2+x_3^2 \rightarrow \infty} = \sigma^\infty, \quad D_3(x_1, x_3) \Big|_{x_1^2+x_3^2 \rightarrow \infty} = d^\infty; \quad (1)$$

$$D_{33}(x_1, 0) = \begin{cases} 0, & |x_1| < a, \\ d(x_1), & a < |x_1| < c; \end{cases}$$

$$\sigma_{13}(x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{33}(x_1, 0) = 0, \quad |x_1| < a. \quad (2)$$

Аналитический анализ. В работе [10] получены соотношения, которые для случая однородного материала можно записать в виде

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{G} \{ \mathbf{W}^+(x_1) + \mathbf{W}^-(x_1) \};$$

$$[\mathbf{V}'(x_1, 0)] = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad (3)$$

где $[\mathbf{V}'(x_1, 0)] = \mathbf{V}'^{(1)}(x_1, 0) - \mathbf{V}'^{(2)}(x_1, 0)$ – скачок функции при переходе че-

рез ось x ; $\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{W}(x_1 + i0)$, $\mathbf{W}^-(x_1) = \mathbf{W}(x_1 - i0)$, $\mathbf{W}(z) = \begin{pmatrix} W_3(z) \\ W_4(z) \end{pmatrix}$ – подлежащая определению вектор-функция, аналитическая всюду за исключением области трещины, $\mathbf{V}' = \begin{pmatrix} u'_3 \\ \phi' \end{pmatrix}$, $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \sigma_{33} \\ D_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{33} & G_{34} \\ G_{43} & G_{44} \end{bmatrix}$. При этом компоненты \mathbf{G} определяются физическими свойствами материала.

Используя (3) в развернутом виде и удовлетворяя граничным условиям (2), получаем

$$G_{33} [W_3^+(x_1) + W_3^-(x_1)] + G_{34} [W_4^+(x_1) + W_4^-(x_1)] = 0, \quad |x_1| < a; \quad (4)$$

$$G_{43} [W_3^+(x_1) + W_3^-(x_1)] + G_{44} [W_4^+(x_1) + W_4^-(x_1)] =$$

$$= \begin{cases} 0, & |x_1| < a, \\ d(x_1), & a < |x_1| < c. \end{cases} \quad (5)$$

Из соотношений (4), (5) следует

$$W_3^+(x_1) + W_3^-(x_1) = 0, \quad |x_1| < a, \quad (6)$$

а условие на бесконечности для $W_3(x_1)$ на основании (3) записывается в

виде $W_3(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^\infty G_{44} - d^\infty G_{34}}{G_{33} G_{44} - G_{43} G_{34}}$. С учетом последнего условия решение задачи (6) будет иметь вид [5]

$$W_3(z) = \frac{1}{2} \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \frac{\sigma^\infty G_{44} - d^\infty G_{34}}{G_{33}G_{44} - G_{43}G_{34}}. \quad (7)$$

Из (4), (5) получаем следующую задачу линейного сопряжения:

$$W_4^+(x_1) + W_4^-(x_1) = \begin{cases} 0, & a < |x_1|, \\ \frac{d(x_1)}{G_{44}} - \frac{G_{43}}{G_{44}} [W_3^+(x_1) + W_3^-(x_1)], & a < |x_1| < c \end{cases} \quad (8)$$

с условием на бесконечности $W_4(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \frac{1}{2} \frac{-\sigma^\infty G_{43} + G_{33}d^\infty}{G_{33}G_{44} - G_{43}G_{34}}$. На основании

[5] решением этой задачи будет функция

$$W_4(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{z^2 - c^2}} \frac{1}{G_{44}} \int_L \frac{\sqrt{t^2 - c^2}}{t - z} d(t) dt - \frac{G_{43}}{G_{44}} W_3(z) + \frac{z}{2\sqrt{z^2 - c^2}} \frac{-\sigma^\infty G_{43} + G_{33}d^\infty}{G_{33}G_{44} - G_{43}G_{34}}, \quad (9)$$

где L – отрезок от $-c$ до $-a$ и от a до c .

Учитывая (7), при $|x_1| < c$ получаем выражения

$$\sigma_{33}(x_1, 0) = G_{33} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} \frac{\sigma^\infty G_{44} - d^\infty G_{34}}{G_{33}G_{44} - G_{43}G_{34}} + 2G_{34} W_4(x_1); \quad (10)$$

$$D_3(x_1, 0) = G_{43} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} \frac{\sigma^\infty G_{44} - d^\infty G_{34}}{G_{33}G_{44} - G_{43}G_{34}} + 2G_{44} W_4(x_1). \quad (11)$$

Механическое напряжение $\sigma_{33}(x_1, 0)$ на отрезках $a \leq |x_1| \leq c$ на основании (3), (7), (9) определяется формулой

$$\sigma_{33}(x_1, 0) = \frac{G_{34}}{G_{44}} d(x_1) + \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} \frac{\sigma^\infty G_{44} - d^\infty G_{34}}{G_{44}}. \quad (12)$$

Из формулы (12) видно, что напряжения $\sigma_{33}(x_1, 0)$ останутся сингулярным при $x_1 \rightarrow a + 0$. Соответствующий коэффициент интенсивности

$K_1 = \frac{\sigma^\infty G_{44} - d^\infty G_{34}}{G_{44}} \sqrt{\pi a}$. Как видно из последней формулы, K_1 не зависит

от электрического смещения $d(x_1)$, а зависит от характеристик пьезоэлектрического материала, внешних нагрузок (как механической σ^∞ так и электрической d^∞) и начального размера трещины a .

Конкретизация граничного условия для электрического смещения в зоне предразрушения. Нагрузка, распределенная по линейному закону.

Для последующего анализа полученного решения конкретизируем вид функции $d(x_1)$ для $a \leq |x_1| \leq c$. Предположим, что $d(x_1)$ в граничном условии (2) меняется линейно, т.е.

$$d(x_1) = \frac{|x_1| - a}{c - a} d_0 (l - k) + k d_0, \quad a \leq |x_1| \leq c, \quad (13)$$

где k и l – параметры, изменяющиеся от 0 до 1; d_0 – константа. Подставляя (13) в (9), учитывая (7) и выполняя интегрирование, получаем

$$\begin{aligned} W_4(x_1) = & \frac{1}{2\pi i \sqrt{x_1^2 - c^2}} \frac{1}{G_{44}} \left\{ \frac{d_0(l-k)}{c-a} i x_1 \left\langle -2\sqrt{c^2 - a^2} - \sqrt{x_1^2 - c^2} R(x_1) \right\rangle + \right. \\ & \left. + P(x_1) \right\} + \frac{1}{2} \frac{d^\infty}{G_{44}} - \frac{G_{43}}{G_{44}} \frac{1}{2} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} \frac{\sigma^\infty G_{44} - d^\infty G_{34}}{G_{33} G_{44} - G_{43} G_{34}}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$P(x_1) = i \left[\frac{a}{c-a} d_0 (l-k) - k d_0 \right] \left\langle 2x_1 \arccos \frac{a}{c} - \sqrt{x_1^2 - c^2} [\pi + \Gamma(x_1)] \right\rangle + i \pi d^\infty \left[x_1 - \sqrt{x_1^2 - c^2} \right],$$

$$R(x_1) = \arcsin \frac{x_1 a - c^2}{x_1 c - c a} - \arcsin \frac{x_1 a + c^2}{x_1 c + a c},$$

$$T(x_1) = -\arcsin \frac{x_1 a - c^2}{x_1 c - c a} - \arcsin \frac{x_1 a + c^2}{x_1 c + a c}.$$

Подставляя выражение (14) в (11), определим электрическое смещение $D_3(x_1, 0)$, для $|x_1| > c$ в виде

$$D_3(x_1, 0) = d^\infty + \frac{1}{\pi i \sqrt{x_1^2 - c^2}} \left\{ \frac{d_0(l-k)}{c-a} i x_1 \left\langle -2\sqrt{c^2 - a^2} - \sqrt{x_1^2 - c^2} R(x_1) \right\rangle + P(x_1) \right\}. \quad (15)$$

Таким образом, электрическое смещение для $|x_1| > a$ полностью определяется формулами (2) и (15).

Положение точки c определяется из условия конечности электрического смещения при $x_1 \rightarrow c + 0$. На основании (15) получаем следующее уравнение для определения положения точки c :

$$\left[\frac{a}{c-a} (l-k) - k \right] \arccos \frac{a}{c} = \sqrt{\frac{c+a}{c-a}} (l-k) - \frac{\pi}{2} \frac{d^\infty}{d_0}. \quad (16)$$

С учетом последнего уравнения выражения для $D_3(x_1, 0)$ и $\sigma_{33}(x_1, 0)$ на $|x_1| > c$ принимают вид

$$D_3(x_1, 0) = d^\infty + \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{d_0(l-k)}{c-a} x_1 R(x_1) + P_1(x_1) \right\}. \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(x_1, 0) = & -\frac{1}{\pi} \frac{G_{34}}{G_{44}} \left\{ \frac{d_0(l-k)}{c-a} x_1 R(x_1) + P_1(x_1) \right\} + \frac{G_{34}}{G_{44}} d^\infty + \\ & + \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} \frac{\sigma^\infty G_{44} - d^\infty G_{34}}{G_{44}}, \quad |x_1| > c, \end{aligned} \quad (18)$$

где $P_1(x_1) = d_0 \left[\frac{a}{c-a} (l-k) - k \right] [\pi + T(x_1)] + \pi d^\infty$.

Наиболее важный частный случай соответствует постоянному $d(x_1)$, равному пределу электрического насыщения D_S . В этом случае $k=1$, $l=1$ и уравнение (16) принимает вид $\arccos \frac{a}{c} = \frac{\pi d^\infty}{2 D_S}$, а выражения для $D_3(x_1, 0)$ и $\sigma_{33}(x_1, 0)$ на $|x_1| > c$ записываются в форме

$$\begin{aligned} D_3(x_1, 0) &= \frac{1}{\pi} D_S [\pi + T(x_1)], \\ \sigma_{33}(x_1, 0) &= \frac{1}{\pi} \frac{G_{34}}{G_{44}} D_S [\pi + T(x_1)] + \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} \frac{\sigma^\infty G_{44} - d^\infty G_{34}}{G_{44}}. \end{aligned}$$

Численная реализация поставленной задачи для тел конечных размеров. В случае, если тело с трещиной имеет конечные размеры, то решение находится методом конечных элементов (МКЭ). Вначале, с целью сравнения численных и аналитических результатов будем считать, что размер области h существенно превосходит размер трещины a . В силу симметрии задачи будем рассматривать только 1/4 часть пластины.

Так как положение точки c предварительно не известно, то будем считать, что это положение найдено верно, если при подходе к этой точке c справа $D_3(x_1, 0)$ близко к $d(c)$. Последнее имеет место, если происходит смена знака электрического потенциала в ближайшей узловой точке к точке c слева.

Рассмотрим случай, когда электрическое смещение в зоне электрического насыщения постоянно, то есть $k=l=1$,

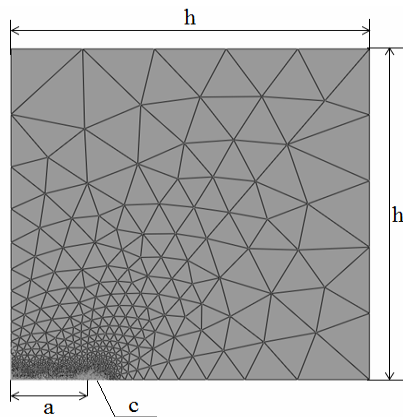


Рис. 2

$d(x_1) = d_0 = D_S$, для $a \leq |x_1| \leq c$. Считаем, что внешняя механическая нагрузка отсутствует $\sigma^\infty = 0$, $a = 2$ мм и $d^\infty = 0,001 \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$. Конечно-элементная сетка для четверти области приведена на рис. 2.

Сравнение длины зоны электрического насыщения, полученных МКЭ, для $h/a = 20$ с аналитическими при $k = l = 1$, показывает, что при аналитическом подходе $(c - a)/a = 0,236$, а в случае МКЭ $(c - a)/a = 0,240$,

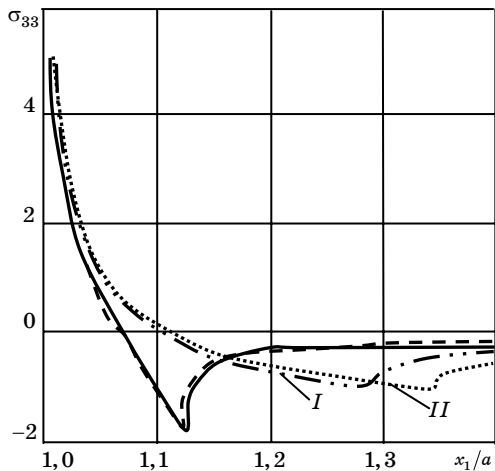


Рис. 3

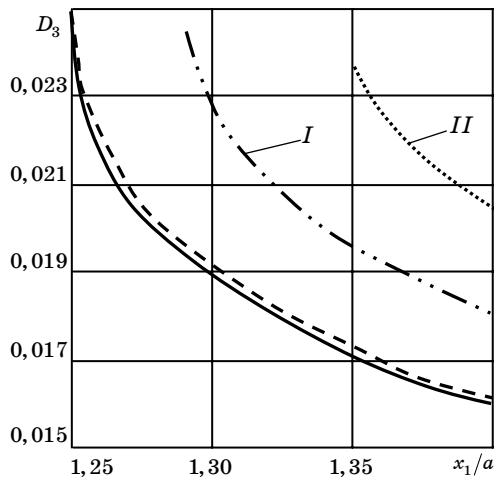


Рис. 4

т.е. погрешность составляет 1,7%.

Анализ полученных результатов. На рис. 3, 4 приведены графики изменения нормальных напряжений $\sigma_{33}(x_1, 0)$ и электрического смещения $D_3(x_1, 0)$, полученные на основании аналитического решения (штриховые линии), эти же графики, полученные МКЭ (сплошные линии) при

$\sigma^\infty = 0$, $a = 2$ мм и $d^\infty = 0,001 \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$. Для

сравнения кривыми I, II показаны значения этих же величин, полученные с помощью МКЭ для области, соизмеримой с длиной трещины при $h/a = 2,5$ и $h/a = 2$ соответственно. Видно хорошее согласование аналитических и численных результатов, что свидетельствует об адекватности обоих подходов. Кроме того видно, что соотношение размеров области и длины трещины существенно влияет на значения электрического смещения на продолжении трещины.

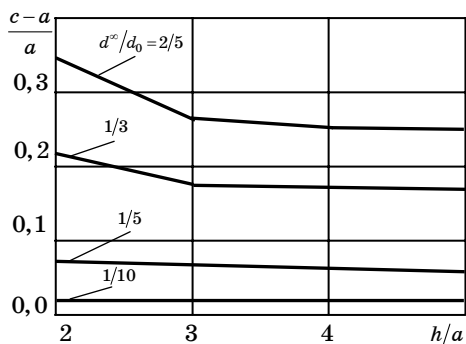


Рис. 5

График зависимости длины зоны электрического насыщения от отношения характерного размера области к длине трещины для некоторых значений d^∞/d_0 приведен на рис. 5. Видно, что при уменьшении размера

области по отношению к длине трещины зона электрического насыщения увеличивается.

РЕЗЮМЕ. Вивчена зона електричного насичення для необмеженого тіла з прямолінійною центральною тріщиною. Встановлено узгодженість отриманих результатів з даними кінцево-елементного розв'язку відповідної задачі для тіла кінцевих розмірів. Наведено чисельний аналіз прийнятої моделі для тіла кінцевих розмірів при різних співвідношеннях розмірів тріщини і тіла.

Ключові слова: тріщина, зона електричного насичення, задача лійного спряження, скінчено-елементний розв'язок.

SUMMARY. The electric saturation model for an infinite body with a straight central crack is studied. A good agreement of the obtained results with the results of the finite element solution of the associated problem for the finite sized body is found. A numerical analysis of the model for a finite sized body with different ratios of the crack length and the body size is presented.

Key words: crack, electric saturation zone, problem of linear relationship, finite element solution.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вьюн А. С., Смирнов С. А., Лобода В. В. О развитии δ_k -модели на случай трещины в изотропном теле конечных размеров // Вісн. Дніпропетр у-ту. Сер. Механіка. – 2010. – Т. 2, № 14. – С. 38–45.
2. Калоеров С. А., Баева А. И., Бороненко О. П. Двумерная задача электро- и магнитоупругости для многосвязных сред. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 268 с.
3. Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А. О модели Дагдейла для трещины на границе раздела различных сред // Прикладная механика. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 63–68.
4. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикладная механика. – 1959. – Т. 5, № 4. – С. 391–401.
5. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
6. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электроупругость пьезокерамических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
7. Gao H., Barnett D. M. An invariance property of local energy release rate in a strip saturation model of piezoelectric fracture // Int. J. Fracture. – 1996. – Vol. 79. – P. R25–R29.
8. Gao H., Zhang T. Y., Tong P. Local and global energy release rates for an electrically yielded crack in a piezoelectric ceramic // J. Mech. and Phys. Solids. – 1997. – Vol. 45. – P. 491–510.
9. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – Vol. 8. – P. 100–108.
10. Loboda V., Lapusta Y., Govorukha V. Mechanical and electrical yielding for an electrically insulated crack in an interlayer between piezoelectric materials // Int. J. Eng. Sci. – 2008. – Vol. 46. – P. 260–272.
11. Wang T. C. Analysis of strip electric saturation model of crack problem in piezoelectric materials // Int. J. Solids Struct. – 2000. – Vol. 37. – P. 6031–6049.

Днепропетровский национальный университет

Поступила 28.03.2012

УДК 539.3

Я. А. ЖУК, д-р физ.-мат. наук; *Л. Я. ВАСИЛЬЕВА***АНАЛИЗ ОСОБЕННОСТЕЙ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЯ,
ГЕНЕРИРУЕМЫХ ТЕПЛОМ ИМПУЛЬСОМ В
ЦЕНТРЕ ДИСКА И ОБУСЛОВЛЕННЫХ
МИКРОСТРУКТУРНЫМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ**

В рамках постановки связанной задачи термомеханики с использованием модифицированной термодинамически согласованной теории неупругого поведения материала исследуется процесс возбуждения и распространения волн напряжения, вызванных воздействием теплового импульса на круговую область в центре поверхности тонкого стального диска и микроструктурными превращениями при остывании зоны облучения. Показано, что импульс напряжений, вызванный мартенситным превращением имеет больший размах, но образуется позже чем термоупругий импульс.

Ключевые слова: микроструктурные превращения, тепловой импульс, термовязкопластическое поведение

Тепловая импульсная обработка поверхностей металлических изделий используется главным образом для повышения прочности, износостойчивости и усталостной долговечности элементов конструкций посредством создания областей остаточных, сжимающих напряжений в приповерхностной зоне материала [6–8]. Еще одним важным технологическим применением облучения поверхностей интенсивными тепловыми источниками выступает генерация коротких зондирующих импульсов, распространяющихся внутрь металлических образцов. В соответствии с этим подходом можно оценить структуру и механические свойства элементов конструкций в рамках классической методики акустической дефектоскопии. Кроме того, возникающий импульс напряжения может содержать информацию о металлургических и других физико-механических процессах, происходящих синхронно с процессом генерации в приповерхностной зоне. Сущность явления состоит в создании зоны быстрого нагрева с большим градиентом температуры на поверхности либо в приповерхностной зоне посредством кратковременного облучения поверхности источником энергии высокой плотности (лазерный импульс, пучок заряженных частиц и т.п.). В этой области, помимо формирования тепловых напряжений, как динамический эффект образуется фронт ударной волны. Вопросы генерации термоупругих импульсов напряжения обсуждались в работах [2, 5]. Важной особенностью, учитываемой недостаточно полно, выступают микроструктурные превращения, сопровождающие процесс остывания и распада переохлажденного аустенита. Действительно, если охлаждение образца происходит достаточно быстро, то наряду с импульсом напряжения, вызванным динамическими термоупругими эффектами, возникнет импульс напряжения, обусловленный микроструктурными превращениями, поскольку удельные объемы фаз различны. В статье [2] рассматривалось данное явление для случая, когда облу-

чается полностью одна из поверхностей тела. Эффекты, возникающие при облучении лишь части поверхности остались неизученными.

В данной статье в рамках динамической постановки связанной задачи термомеханики исследуется осесимметричная задача про действие теплового импульса, распределенного по пятну, в центре стального диска. Считается, что термомеханическое воздействие на материал не сопровождается изменением агрегатного состояния, однако учитываются микроструктурные превращения, обусловленные изменением температуры. Задача решается при помощи метода конечных элементов, модифицированного для исследования связанного термомеханического поведения физически нелинейных материалов. Изучается влияние микроструктурных превращений, сопровождающих разогрев вследствие облучения и последующее охлаждение, на общие закономерности связанного термомеханического и динамического поведения диска.

Постановка задачи. Рассматривается диск радиуса R и толщины h , изготовленный из мартенситной стали 35ХМ. Его геометрия в цилиндрической системе координат $Ogz\varphi$ с началом в центре диска задается следующим образом: $|r| \leq R$, $0 \leq |z| \leq h$. На торце $z=0$ действует кратковременный одноразовый тепловой импульс длительности t_p , распределенный по круговой области (пятну облучения) $0 \leq r \leq r_p$. По окончании действия импульса происходит охлаждение облученной зоны, осуществляемое по механизму конвективного теплообмена с нормальным или высоким коэффициентом теплоотдачи, соответствующим принудительному. Вся остальная поверхность стержня, включая торцы, считается теплоизолированной и свободной от напряжений.

Постановка осесимметричной связанной задачи термомеханики с учетом микроструктурных превращений, основанная на термомехано-металлургической модели [3, 4], включает в себя [2, 5] соотношения Коши для осесимметричного случая, уравнения движения и уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = \rho \ddot{u}_r, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \ddot{u}_z, \quad (1)$$

$$c_v \dot{\theta} + 3\alpha \theta K_V (\dot{\varepsilon}_{kk} - 3\alpha \dot{\theta}) - D' - k \Delta \theta = \Gamma_s, \quad (2)$$

где $\Delta = \partial^2(\cdot)/\partial r^2 + \partial(\cdot)/r \partial z^2$; u_r и u_z – компоненты перемещения; ε_{ij} и σ_{ij} , $i, j \leftrightarrow r, z, \varphi$ – компоненты тензоров деформаций и напряжений; ρ – плотность материала; θ – температура; c_v и k – коэффициенты объемной теплоемкости и теплопроводности; K_V – модуль объемного сжатия; D' – скорость диссипации механической энергии; Γ_s – внутренние источники тепла.

Физически нелинейно зависящее от температуры и микроструктуры поведение материала характеризуется в рамках обобщенной унифицированной модели неупругого поведения [1, 4]. В рамках этой модели полная деформация представляется в виде суммы упругой, неупругой и термо-структурной [1, 3–5]:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{in} + \varepsilon_{ij}^{oph} . \quad (3)$$

Напряжения и неупругая деформация определяются законом Гука и следующими эволюционными уравнениями для собственно неупругой деформации и параметра изотропного упрочнения K

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{in} - \varepsilon_{ij}^{oph}) + \lambda(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{oph})\delta_{ij} , \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^{in} &= D_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(\bar{K}_0 + K)^2}{3J_2} \right]^n \right\} s_{ij} / J_2^{1/2} , \quad \varepsilon_{ij}^{in}(0) = 0 , \\ \dot{K} &= m_1 (\bar{K}_1 - K) \dot{w}^p , \quad K(0) = 0 , \end{aligned} \quad (4)$$

где $\bar{K}_0 = C^\xi K_0^\xi$, $\bar{K}_1 = C^\xi K_1^\xi$; λ , μ – параметры Ляме; C^ξ – объемные концентрации фаз феррита, перлита, бейнита и мартенсита ($\xi = f, p, b, m$); K_0^ξ , K_1^ξ , m_1 , n , D_0 – параметры модели; $s_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3 \sigma_{kk} \delta_{ij}$ – девиатор тензора напряжений; \dot{w}^p – пластическая мощность, $J_2 = 1/2 s_{ij} s_{ij}$ – второй инвариант тензора напряжений $\dot{w}^p = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{in}$.

Термоструктурная деформация определяется через удельные объемы фаз V_ξ по формуле

$$\varepsilon_{ij}^{oph}(\theta, \theta_r, C^\xi) = \frac{V_\xi(\theta) C^\xi(\theta) - V_\xi(\theta_r) C^\xi(\theta_r)}{3V_\xi(\theta_r) C^\xi(\theta_r)} . \quad (5)$$

Здесь θ – текущая температура, θ_r – отсчетная температура; суммирование производится по повторяющемуся индексу ξ .

Температурные зависимости удельных объемов $V_\xi(\theta)$ в м³/кг, отнесенные к $\theta=20^\circ\text{C}$, принимаются в виде [3, 5]

$$V_a(\theta, C_p) \cdot 10^3 = 0,12282 + 8,56 \cdot 10^{-6} (\theta - 20) + 2,15 \cdot 10^{-3} C_p ; \quad (6)$$

$$V_{f,p,b}(\theta, 20^\circ, C_p) \cdot 10^3 = 0,12708 + 5,528 \cdot 10^{-6} (\theta - 20) ; \quad (7)$$

$$V_m(\theta, 20^\circ, C_p) \cdot 10^3 = 0,12708 + 4,448 \cdot 10^{-6} (\theta - 20) + 2,79 \cdot 10^{-3} C_p , \quad (8)$$

где C_p – концентрация углерода в процентах.

С помощью соотношений для удельных объемов фаз (6)–(8) и термодинамической диаграммы [3, 5] проводится расчет концентрации микроструктурных фаз распада переохлажденного аустенита. Процент новой фазы ρ_ξ определяется по формуле

$$\rho_\xi = \rho_{as} Y_\xi ,$$

в которой p_{as} – процент аустенита при входе кривой охлаждения в область фазового превращения (ОФП), y_ξ – текущее значение относительной фазы. Значение y_ξ определяется по соответствующим траекториям на термокинетических диаграммах, причем закон набора относительной фазы аппроксимируется выражением

$$y_\xi = \left[1 - \exp\left(-k \frac{\theta_s - \theta}{\theta_s - \theta_e}\right) \right] y_{\xi e},$$

где $y_{\xi e}$ – процент новой фазы при выходе из ОФП, отнесенный к проценту нераспавшегося аустенита при входе в нее.

Начальные условия имеют вид

$$u_r = \dot{u}_r = 0; \quad u_z = \dot{u}_z = 0; \quad \theta = \theta_0, \quad t = 0; \quad \sigma_{ij} = 0 \text{ на } S,$$

Вся поверхность стержня считается свободной от нагрузок.

Тепловые граничные условия задаются таким образом, чтобы смоделировать условия облучения. Круговая область $0 \leq r \leq r_p$ в центре поверхности $z = 0$ облучается одноразовым тепловым импульсом, который моделируется тепловым потоком q_s через границу диска [1]. Тепловой поток изменяется по закону

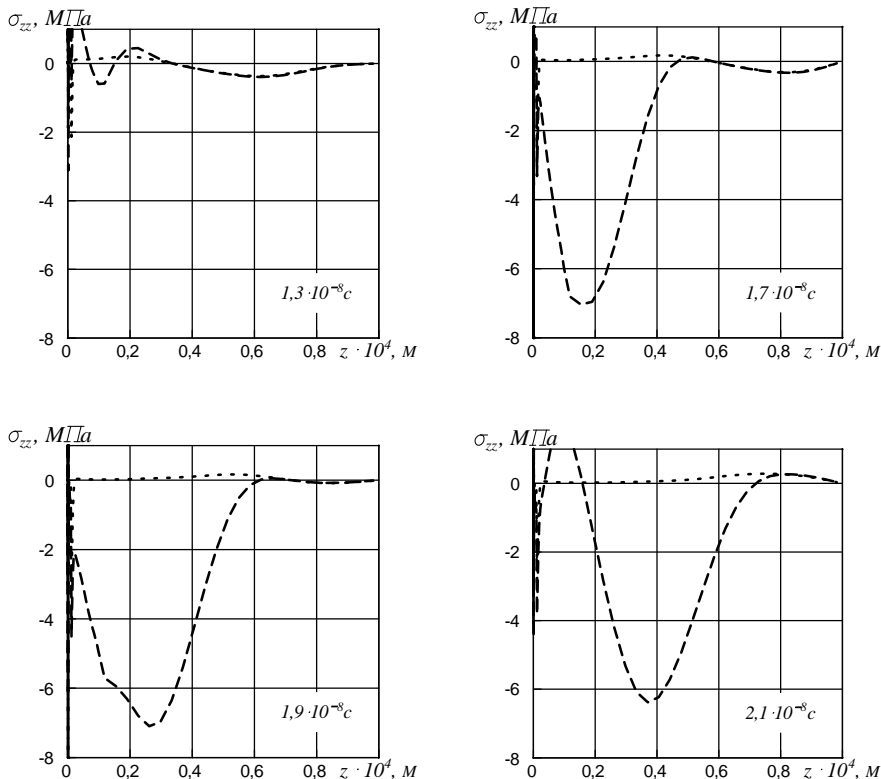
$$q_s = \begin{cases} q_0 \cos \frac{\pi r}{2r_p} \sin \frac{\pi t}{t_p}; & r \leq r_p, \quad t \leq t_p, \\ 0; & r > r_p, \quad t > t_p, \end{cases} \quad (9)$$

Здесь q_0 – параметр теплового потока.

После окончания действия импульса на облученной части поверхности происходит теплообмен с внешней средой по конвективному механизму. При этом коэффициент теплоотдачи выбирается достаточно большим, $\alpha_T = 10^5$ кВт/м²·К. Таким путем моделируется быстрое принудительное охлаждение поверхности объекта при помощи душа, обдувания холодным газом и т.п. В дальнейшем всякий теплоотвод в окружающую среду прекращается, когда температура в центре пятна облучения становится меньшей 50 °С. Вся остальная поверхность диска считается теплоизолированной с самого начала процесса.

Метод решения задачи. При проведении расчетов для стали 35ХМ выбирались известные параметры модели Боднера-Партома [2]. Считалось, что для диска $R = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $h = 10^{-4}$ м. Длительность теплового импульса изменялась от 10^{-8} до 10^{-7} с, параметр теплового потока q_0 от $6 \cdot 10^7$ до $2 \cdot 10^8$ кВт/м². Начальная температура диска θ_0 равна 20 °С. Исходной структурой стали считался бейнит. Из-за существенной нелинейности задачи она решалась численно с использованием временной схемы Крэнка-Никольсона, итерационного метода и метода конечных элементов.

Результаты расчетов и выводы. Как инерционный эффект при быстром термоупругом деформировании в диске генерируется импульс напряжений – динамическая составляющая поля напряжений. Квазистатические составляющие поля значительно больше, но они сосредоточены в очень узкой приповерхностной области и не распространяются существенно вглубь диска за промежутки времени, рассматриваемые в задаче. Детально этот эффект изучен в работах [1–3]. Поскольку метод лазерного облучения достаточно широко используется в акустических технологиях оценки структуры среды для генерации сканирующего импульса напряжения, детальная информация об этом импульсе чрезвычайно важна. Учет микроструктурных превращений существенно уточняет данные об импульсе и позволяет улучшить саму технологию. Действительно, при быстром принудительном охлаждении процесс образования новой микроструктурной фазы в переохлажденном аустените происходит очень быстро – со скоростью звука в материале. Значит, в микроскопическом объеме мартенсит образуется практически мгновенно. Поскольку из всех микроструктурных фаз удельный объем мартенсита наибольший, то вследствие этого генерируется импульс сжатия, несущий в том числе и информацию о структуре материала и процессах, происходящих в приповерхностной облученной зоне. Этот импульс напряжения в десятки раз превышает величину импульса сжатия, который генерируется вследствие термоупругих инерционных эффектов. Результаты сравнения таких процессов для некоторых моментов времени представлены на рисунке, где указаны и эти моменты времени. Штриховые линии рисунка соответствует случаю



учета микроструктурных превращений в условиях принудительного охлаждения, пунктирная – случаю пренебрежения превращениями (данные взяты из работы [3] при $t_p = 10^{-8}$ с, $q_0 = 2 \cdot 10^8$ кВт/м² и таких же геометрических размерах диска). Видно, что импульс напряжения, вызванный микроструктурным превращением аустенит–мартенсит, существенно превышает термоупругий импульс, но возникает несколько позже, что обусловлено зависимостью мартенситного превращения полностью от особенностей температурного поля индуцированного импульсом. Скорость распространения обоих импульсов одинакова и равна скорости звука в материале. Следует отметить, что этот эффект наиболее выразительно проявляется для импульса напряжения σ_{zz} , распространяющегося по толщине диска, поскольку значительная часть материала в центре области облучения изменяет свое микроструктурное состояние одновременно (аналогичная задача для стержня рассмотрена в [2]). Для радиального напряжения картина оказывается очень сложной и размытой вследствие пространственных особенностей превращения: из-за колоколоподобной формы теплового импульса мартенсит сначала образуется в области контура пятна, а затем – быстро «прорастает» к центру диска.

Заметим, что разработанная методика численного решения связанной задачи с учетом микроструктуры материала позволяет точнее описать процесс генерации и форму импульса напряжения, возникающего при тепловом импульсном облучении стальных элементов конструкций. Микроструктурные превращения в сталях необходимо учитывать при применении методов акустической диагностики и разработке их новых вариантов при лазерном или пучковом генерировании зондирующего импульса напряжения.

РЕЗЮМЕ. В рамках постановки зв'язаної задачі термомеханіки з використанням модифікованої термодинамічно узгодженої теорії непружної поведінки матеріалу досліджується процес збудження і поширення хвилі напруження, викликаних дією теплового імпульсу на кругову область в центрі поверхні тонкого сталевого диску і микроструктурними перетвореннями при охолодженні зони опромінення. Показано, що імпульс напруження, викликаний мартенситним перетворенням має більший розмах, але утворюється пізніше за термопружний імпульс.

Ключові слова: микроструктурні перетворення, тепловий імпульс, термов'язкопластична поведінка

SUMMARY. Processes of generation and propagation of stress wave caused by the thermal impact acting upon the circular region at the face of thin steel disk accounting for microstructural transformation in the irradiated region under subsequent cooling are investigated in the frame of the coupled thermomechanics with the use of modified thermodynamically consistent theory of inelastic material behavior. It is shown that the stress pulse initiated by the martensitic transformation possesses larger magnitude than the pulse caused by the thermoelastic effect but is generated later in time.

Key words: microstructural transformations, thermal pulse, thermo-viscoelastic response

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Жук Я.О., Сенченков І.К., Васильєва Л.Я. Вплив микроструктурних перетворень на напружено-деформований стан локально опроміненого сталевого диска // Мат. мет. та фіз.-мех. поля. – 2011. –Т. 54, № 1. – С. 101–115.

2. Жук Я.А., Сенченков И.К., Бойчук Е.В. Волны напряжений в цилиндре, возбуждаемые тепловым импульсом на одном из торцов // Теорет. и прикладная механика. – 2006. – Вып. 42. – С. 136–141.
3. Жук Я.А., Червинко О.П., Васильева Л.Я. Структурные превращения в цилиндре из стали, инициируемые импульсным термическим воздействием // Теорет. и прикладная механика. – 2006. – Вып. 42. – С. 73–78.
4. Сенченков И.К. Термомеханическая модель растущих цилиндрических тел из физически нелинейных материалов // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 118–126.
5. Особенности генерации упругих волн при тепловом облучении стального образца и учете аустенитно-мартенситного преобразования / Л. Я. Васильева, Я. А. Жук, И. К. Сенченков, О. П. Червинко // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 98–103.
6. Dickey F.M., Holsuade S.C. Laser beam shaping. Theory and techniques. – Marcel Dekker: New York, Basel, 2000. – 428 p.
7. Chen H., Kysar J., and Yao Y.L. Characterization of plastic deformation induced by microscale laser shock peening // J. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 71. – P. 713–723.
8. Nikitin B., Scholtes B., Maier H.J. and Altenberger I. High temperature fatigue behavior and residual stress stability of laser shock peened and deep rolled austenitic steel AISI 304 // Scripta Mater. – 2004. – Vol. 50. – P. 1345–1350.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев
Николаевский национальный университет*

Поступила 04.04.2012

УДК 539.3

С. А. КАЛОЕРОВ, д-р физ.-мат. наук

**КОМПЛЕКСНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ТЕОРИИ ИЗГИБА
МНОГОСВЯЗНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛИТ**

Получены и исследованы общие представления комплексных потенциалов теории изгиба конечных и бесконечных многосвязных анизотропных плит. даны решения задач для эллиптической (круговой) плиты под действием равномерно распределенных усилий или сосредоточенной силы.

Ключевые слова: многосвязная плита, анизотропия, комплексные потенциалы.

Несмотря на большую практическую потребность изучения напряженно-деформированного состояния многосвязных пластин, находящихся в условиях изгиба, до сих пор в этом направлении выполнено очень мало исследований. Хотя основы прикладной теории изгиба анизотропных плит были разработаны еще в середине XIX века в работах Геринга [13] и Буссенеска [12], а несколько позже Губером [14–16] предложены приближенные теории изгиба, но фундаментальные результаты с привлечением функций комплексного переменного были получены лишь в 30-е годы XX века Лехницким С. Г. [5, 6]. Для многосвязных плит (как анизотропных, так и изотропных) некоторые подходы решения задач получены в работах Космодамианского А. С. [2], Космодамианского А. С., Иванова Г. М. [3], Меглинского В. В. [8]. Однако комплексные потенциалы даже для изотропных плит не были исследованы в полной мере, что не позволило до настоящего времени построить решения многих классов задач. Правда этому способствовало и необоснованно отрицательное отношение к прикладной теории изгиба плит некоторых ученых во второй половине XX века.

В данной статье получены общие представления комплексных потенциалов для многосвязных анизотропных плит, даны решения задач для эллиптической (круговой) плиты под действием равномерно распределенных усилий по верхнему основанию или сосредоточенной силы.

1. Краевая задача изгиба анизотропной плиты. Рассмотрим тонкую анизотропную плиту постоянной толщины $2h$, имеющую в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости. Отнесем плиту к прямоугольной системе координат $Oxyz$, плоскость Oxy которой совместим со срединной плоскостью. Плита находится под действием внешних сил, приложенных к боковой поверхности и нормальных усилий $q(x, y)$, распределенных по верхнему основанию. Срединная поверхность плиты занимает область S , ограниченную гладкими контурами.

Определение напряженно-деформированного состояния плиты при использовании гипотез прикладной теории изгиба сводится к решению дифференциального уравнения в частных производных [5, 6, 15]

$$\begin{aligned}
D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \\
4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y).
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где w – прогиб срединной поверхности плиты; $D_{ij} = B_{ij}D_0$ – жесткости материала плиты, в которых

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \frac{1}{\Delta} (a_{22}a_{66} - a_{26}^2), & B_{12} &= \frac{1}{\Delta} (a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66}), \\
B_{16} &= \frac{1}{\Delta} (a_{12}a_{26} - a_{16}a_{22}), & B_{22} &= \frac{1}{\Delta} (a_{11}a_{66} - a_{16}^2), \\
B_{26} &= \frac{1}{\Delta} (a_{12}a_{26} - a_{26}a_{11}), & B_{66} &= \frac{1}{\Delta} (a_{11}a_{22} - a_{12}^2), \\
\Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix}; & D_0 &= 2h^3/3;
\end{aligned} \tag{1.2}$$

a_{ij} – коэффициенты деформации материала в уравнениях закона Гука

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy}, \\
\varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy}, \\
\gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Дифференциальное уравнение (1.1) нужно решать при соответствующих граничных условиях на контурах области S . После решения этого уравнения функция прогиба будет известна и по ней можно найти изгибающие и скручивающие моменты и перерезывающие силы

$$\begin{aligned}
M_x &= - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\
M_y &= - \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \\
H_{xy} &= - \left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right); \\
N_x &= - \left(D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right), \\
N_y &= - \left(D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right),
\end{aligned} \tag{1.4}$$

а также напряжения на основных площадках

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{3M_x}{2h^3} z, & \sigma_y &= \frac{3M_y}{2h^3} z, & \tau_{xy} &= \frac{3H_{xy}}{2h^3} z, \\ \tau_{xz} &= \frac{3N_x}{4h^3} (h^2 - z^2), & \tau_{yz} &= \frac{3N_y}{4h^3} (h^2 - z^2).\end{aligned}\quad (1.5)$$

Граничные условия для решения уравнения (1.1) зависят от условий загрузки и закрепления края плиты. В случае загруженного края они принимают вид [5–7]

$$\begin{aligned}M_x \cos nx + (H_{xy} - I) \cos ny &= m \cos nx - (f + c) \cos ny, \\ (H_{xy} + I) \cos nx + M_y \cos ny &= m \cos ny + (f + c) \cos nx,\end{aligned}\quad (1.6)$$

в котором

$$I = \int_0^s N_n ds, \quad f(s) = \int_0^s p(s) ds, \quad N_n = N_x \cos nx + N_y \cos ny; \quad (1.7)$$

$m(s)$, $p(s)$ – заданные на краю распределенные изгибающие моменты и поперечные силы; c – вещественная постоянная. В случае незагруженного края в этих условиях $m(s) = p(s) = f(s) = 0$.

Если на краю плиты заданы прогиб и угол наклона изогнутой срединной поверхности к плоскости Oxy (нормальная производная от прогиба), то граничные условия приводятся к виду

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \left(\frac{dw}{dn} \right)^* \cos nx + \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos^2 ny - \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos nx \cos ny, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \left(\frac{dw}{dn} \right)^* \cos ny - \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos nx \cos ny + \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos^2 nx,\end{aligned}\quad (1.8)$$

где $w^*(s)$, $\left(\frac{dw}{dn} \right)^*$ – заданные на границе значения прогиба и ее производной по нормали. Для случая жёсткого заземления края $w^* = 0$, $\left(\frac{dw}{dn} \right)^* = 0$ и из (1.8) следует, что $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$.

Если же край плиты жестко подкреплен, и он при деформации может поворачиваться как жесткое целое, то точки контура будут находиться в одной плоскости, т.е. функция прогиба на краю должна удовлетворять условию $w = c_1 x + c_2 y + c_0$, откуда следует, что

$$\frac{\partial w}{\partial x} = c_1, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = c_2. \quad (1.9)$$

Здесь c_1 и c_2 – вещественные постоянные, характеризующие углы поворота жесткого края относительно осей x и y соответственно.

В случае опертого края, нагруженного изгибающими моментами $m(s)$, условия на границе записываются в виде

$$w = 0, \quad M_x \cos^2 nx + M_y \cos^2 ny + 2H_{xy} \cos nx \cos ny = m(s). \quad (1.10)$$

причем в случае свободно опертого (незагруженного) края $m(s) = 0$.

Наконец, если имеет место идеальный контакт плиты с областью S и упругого включения с областью S^l , то точки контакта перемещаются совместно и поэтому в этих точках равны друг другу прогибы w , w^l плиты и включения, а углы поворотов по нормальям, нормальные изгибающие моменты и обобщенные перерезывающие силы равны по значению и противоположны по знаку:

$$w = w^l, \quad \frac{dw}{dn} = -\frac{dw^l}{dn^l}, \quad M_n = -M_n^l, \quad N_n + \frac{\partial H_{ns}}{\partial s} = -N_n^l - \frac{\partial H_{ns}^l}{\partial s^l},$$

причем величины с индексом l вверху относятся к включению S^l , без такого индекса – к включению. Из этих условий получаем

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w^l}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w^l}{\partial y},$$

$$M_x \cos nx + (H_{xy} - I) \cos ny + M_x^l \cos nx + (H_{xy}^l - I^l) \cos ny = -c \cos ny,$$

$$(H_{xy} + I) \cos nx + M_y \cos ny + (H_{xy}^l + I^l) \cos nx + M_y^l \cos ny = c \cos nx \quad (1.11)$$

Таким образом, решение задачи об изгибе плиты сводится к решению дифференциального уравнения (1.1) при соответствующих граничных условиях (1.6) – (1.11).

Для изотропной пластинки [1, 10]

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{E}, \quad a_{12} = -\frac{\nu}{E}, \quad a_{66} = \frac{2(1+\nu)}{E}, \dots D_{11} = D_{22} = D = \frac{E}{1-\nu^2} D_0,$$

$$D_{12} = \frac{E\nu}{1-\nu^2} D_0, \quad D_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)} D_0, \quad 2D_{12} + D_{66} = \frac{E}{1-\nu^2} D_0;$$

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$H_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad N_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \quad N_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w.$$

Из остальных формул изменится только дифференциальное уравнение (1.1), которое примет вид

$$\nabla^2 \nabla^2 w = q(x, y)/D. \quad (1.12)$$

2. Комплексные потенциалы. Общее решение однородного дифференциального уравнения (1.1) выберем в виде функции $W(x + \mu y)$ от ли-

нейной формы $z_k = x + \mu_k y$. Подставляя эту функцию в уравнение (1.1) и учитывая, что производная $W^{IV}(x + \mu y)$ не может равняться нулю при произвольных x и y , приходим к выводу, что коэффициент в получаемом равенстве равен нулю:

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0. \quad (2.1)$$

Это, так называемое характеристическое уравнение для изгиба анизотропной плиты, не может иметь вещественных корней [5, 6], а имеет комплексные, следовательно, комплексно сопряженные корни, которые обозначим через $\mu_1, \mu_2, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$. Будем рассматривать наиболее общий случай, когда эти корни являются неравными. Тогда решением однородного уравнения (1.1) будет сумма решений для всех $\mu_1, \mu_2, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$, а общее решение этого неоднородного уравнения представляется в виде

$$w = w_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 W_k(z_k), \quad (2.2)$$

где $w_0(x, y)$ – частное решение неоднородного уравнения (1.1);

$$z_k = x + \mu_k y \quad (2.3)$$

обобщенная комплексная переменная; $W_k(z_k)$ – произвольные аналитические функции переменных z_k , определенных в областях S_k , получаемых из области S аффинными преобразованиями (2.3).

Подставив функцию (2.2) в формулы (1.4), получим следующие выражения для моментов и перерезывающих сил:

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = (M_x^0, M_y^0, H_{xy}^0) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k) W_k''(z_k); \quad (2.4)$$

$$(N_x, N_y) = (N_x^0, N_y^0) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (\mu_k s_k, -s_k) W_k'''(z_k). \quad (2.5)$$

Здесь $M_x^0, M_y^0, H_{xy}^0, N_x^0, N_y^0$ – моменты и перерезывающие силы от частного решения, для которых имеют место формулы (1.4), в которых w нужно заменять на частное решение w_0 ;

$$\begin{aligned} p_k &= D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2, \\ q_k &= D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2, \\ r_k &= D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2, \\ s_k &= -D_{16} - (D_{12} + 2D_{66})\mu_k - 3D_{26}\mu_k^2 - D_{22}\mu_k^3 = \\ &= \frac{D_{11}}{\mu_k} + 3D_{16} + (D_{12} + 2D_{66})\mu_k + D_{26}\mu_k^2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

причем, как видно,

$$s_k - r_k = p_k / \mu_k, \quad s_k + r_k = -q_k \mu_k. \quad (2.7)$$

Дифференцируя (2.2) по x и y , получим также выражения

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1, \mu_k) W_k'(z_k) \quad (2.8)$$

Учитывая, что на контуре плиты имеют место соотношения

$$\cos nx = \pm \frac{dy}{ds}, \quad \cos ny = \mp \frac{dx}{ds}, \quad (2.9)$$

где верхние знаки выбираются для внешнего контура (положительный обход области S), нижние – для контуров отверстий (отрицательный обход области S), и принимая во внимание (1.7), (2.5), также получим полезные для дальнейшего формулы

$$N_n = N_n^0 - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 s_k W_k'''(z_k) \frac{dz_k}{ds}, \quad I = I_0 - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 s_k W_k''(z_k), \quad (2.10)$$

где

$$N_n^0 = N_x^0 \cos nx + N_y^0 \cos ny, \quad I_0 = \int_0^s N_n^0 ds, \quad dz_k = dx + \mu_k dy.$$

Комплексные потенциалы $W_k(z_k)$ должны удовлетворять определенным граничным условиям, следующим из условий (1.6) – (1.11).

Если контур L_l загружен изгибающими моментами $m(s)$ и поперечными силами $p(s)$, то на нем должны выполняться граничные условия (1.6), из которых следуют равенства

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{p_k}{\mu_k} W_k''(z_k) dz_k &= f_{01}(s) ds - m dy - (f + c_l) dx, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 q_k W_k''(z_k) dz_k &= f_{02}(s) ds + m dx - (f + c_l) dy, \end{aligned} \quad (2.11)$$

в которых c_l – вещественные постоянные;

$$\begin{aligned} f_{01}(s) ds &= M_x^0 dy + (I_0 - H_{xy}^0) dx, \\ f_{02}(s) ds &= (I_0 + H_{xy}^0) dy - M_y^0 dx. \end{aligned}$$

После интегрирования граничные условия (2.11) примут вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{p_k}{\mu_k} W_k'(z_k) = \int_0^s (f_{01} ds - m dy - f dx) - c_l x + c_{l1},$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 q_k W_k'(z_k) = - \int_0^s (f_{02} ds + m dx - f dy) + c_{l1} y + c_{l2}. \quad (2.12)$$

Здесь c_{l1} , c_{l2} – произвольные постоянные. Для незагруженного края нужно принять $m(s) = p(s) = 0$.

Если на краю плиты заданы прогиб и угол поворота по нормали, то должны выполняться граничные условия (1.8), из которых следует, что

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 W_k'(z_k) &= - \frac{\partial w_0}{\partial x} + \left(\frac{dw}{dn} \right)^* \cos nx + \\ &+ \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos^2 ny - \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos nx \cos ny, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k W_k'(z_k) &= - \frac{\partial w_0}{\partial y} + \left(\frac{dw}{dn} \right)^* \cos ny - \\ &- \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos nx \cos ny + \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos^2 nx, \end{aligned} \quad (2.13)$$

причем в случае жесткого защемления края в (2.13) $w^* = 0$, $\left(\frac{dw}{dn} \right)^* = 0$.

Для жесткого же подкрепления контура из (1.9) будем иметь

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 W_k'(z_k) &= - \frac{\partial w_0}{\partial x} + c_{l1}, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k W_k'(z_k) &= - \frac{\partial w_0}{\partial y} + c_{l2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

c_{l1} , c_{l2} – вещественные постоянные.

Если контур плиты оперт и загружен нормальными моментами $m(s)$, то из граничных условий (1.10), подставив в первое из них функцию (2.2), во второе выражения (2.4), найдем

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 W_k(z_k) &= -w_0, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left[p_k \cos^2 nx + q_k \cos^2 ny + 2r_k \cos nx \cos ny \right] W_k''(z_k) &= \\ &= f_0(s) - m(s), \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $f_0(s) = M_x^0 \cos^2 nx + M_y^0 \cos^2 ny + 2H_{xy}^0 \cos nx \cos ny$, причем, если край плиты свободно оперт, то в (2.15) нужно принять $m(s) = 0$.

В случае идеального контакта плиты с упругим включением из условий (1.11) находим

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(W_k'(z_k) - W_k^{rl}(z_k) \right) &= \frac{\partial w_0^l}{\partial x} - \frac{\partial w_0^1}{\partial x}, \\
2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(\mu_k W_k'(z_k) - \mu_k^l W_k^{rl}(z_k) \right) &= \frac{\partial w_0^l}{\partial y} - \frac{\partial w_0^1}{\partial y}, \\
2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(\frac{p_k}{\mu_k} W_k'(z_k) - \frac{p_k^l}{\mu_k^l} W_k^{rl}(z_k) \right) &= -c_l x + c_{1l} + \int_0^s f_{01}(s) ds - \int_0^s f_{01}^l(s) ds, \\
2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(q_k W_k'(z_k) - q_k^l W_k^{rl}(z_k) \right) &= c_l y + c_{2l} + \int_0^s f_{02} ds + \int_0^s f_{02}^l ds. \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Здесь c_l – вещественные постоянные, c_{1l} , c_{2l} – комплексные постоянные. Эти постоянные для одного контура являются произвольными и их можно положить равными нулю, для остальных контуров их нужно определять из граничных условий.

Главный вектор и главный момент внутренних сил вдоль дуги в области. Выберем в области S , занимаемой срединной плоскостью плиты, дугу AB , целиком лежащую в S (рис. 1), и вычислим главный вектор и главный момент внутренних сил, действующих вдоль этой дуги. Из соотношений Коши

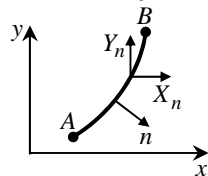


Рис. 1

$$\begin{aligned}
\sigma_x \cos(nx) + \tau_{xy} \cos(ny) + \tau_{xz} \cos(nz) &= X_n, \\
\tau_{xy} \cos(nx) + \sigma_y \cos(ny) + \tau_{yz} \cos(nz) &= Y_n, \\
\tau_{xz} \cos(nx) + \tau_{yz} \cos(ny) + \sigma_z \cos(nz) &= Z_n.
\end{aligned}$$

на площадках, перпендикулярных срединной плоскости, для которых $\cos nz = 0$, учитывая (1.5) и составляя выражения моментов, найдем следующие формулы для внутренних усилий и их моментов относительно осей координат вдоль дуги AB

$$\begin{aligned}
X_n &= \frac{3}{2h^3} z (M_x \cos nx + H_{xy} \cos ny), \\
Y_n &= \frac{3}{2h^3} z (H_{xy} \cos nx + M_y \cos ny), \\
Z_n &= \frac{3}{4h^3} (h^2 - z^2) (N_x \cos nx + N_y \cos ny), \\
M_{xn} &= yZ_n - zY_n, \quad M_{yn} = zX_n - xZ_n, \quad M_{zn} = xY_n - yX_n. \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Проинтегрировав эти выражения по толщине плиты, из первого, второго и шестого соотношений, как и следовало ожидать, получим, что суммарные усилия X_n , Y_n и момент M_{zn} относительно оси Oz равны нулю, а из остальных найдем поперечную силу (суммарную по толщине) и моменты относительно осей Ox , Oy :

$$\begin{aligned}
P_n &= N_x \cos(nx) + N_y \cos(ny), \\
M_{xn} &= (yN_x - H_{xy}) \cos(nx) + (yN_y - M_y) \cos(ny), \\
M_{yn} &= (-xN_x + M_x) \cos(nx) + (-xN_y + H_{xy}) \cos(ny).
\end{aligned}$$

Учитывая формулы (2.9), из последних выражений для положительного обхода по дуге AB найдем

$$\begin{aligned}
P_n &= -\left(N_y \frac{dx}{ds} - N_x \frac{dy}{ds} \right), \\
M_{xn} &= -(yN_y - M_y) \frac{dx}{ds} + (yN_x - H_{xy}) \frac{dy}{ds}, \\
M_{yn} &= -(-xN_y + H_{xy}) \frac{dx}{ds} + (-xN_x + M_x) \frac{dy}{ds}.
\end{aligned}$$

Подставив в эти формулы выражения (2.4), (2.5), найдем

$$\begin{aligned}
P_n &= P_{n0} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 s_k W_k'''(z_k) \frac{dz_k}{ds} \\
M_{xn} &= M_{xn0} + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left[q_k W_k'(z_k) + y s_k W_k''(z_k) \right] \frac{dz_k}{ds}, \\
M_{yn} &= M_{yn0} + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left[\frac{p_k}{\mu_k} W_k'(z_k) - x s_k W_k''(z_k) \right] \frac{dz_k}{ds}, \tag{2.18}
\end{aligned}$$

где P_{n0} , M_{xn0} , M_{yn0} – поперечная сила и моменты относительно осей Ox , Oy , соответствующие частному решению $w_0(x, y)$.

Вычислив приращения величин (2.18) при переходе из точки A в точку B , получим выражения главного вектора внутренних сил и их моментов относительно осей координат Ox , Oy :

$$\begin{aligned}
P_{AB} &= P_{0AB} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left[s_k W_k''(z_k) \right]_{AB} \\
M_{xAB} &= M_{0xAB} + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left[q_k W_k'(z_k) + y s_k W_k''(z_k) \right]_{AB}, \\
M_{yAB} &= M_{0yAB} + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left[\frac{p_k}{\mu_k} W_k'(z_k) - x s_k W_k''(z_k) \right]_{AB}. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Здесь под $[R]_{AB}$ понимается приращение R при переходе из A в B .

Общие представления комплексных потенциалов для многосвязных областей. Рассмотрим плиту, срединная плоскость которой занимает многосвязную область S , ограниченную внешним контуром L_0 и контурами отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) (рис. 2). В этой многосвязной области, как функ-

ции двух переменных x, y , определены все основные характеристики изгиба: прогиб, углы поворотов относительно осей координат, моменты, перерезывающие силы, напряжения. По своей физической сути все эти величины являются непрерывными и однозначными. Эти характеристики выражаются через функции $w_0(x, y)$, $W_k(z_k)$ и их производные. Функция $w_0(x, y)$, как функция двух переменных x, y , и ее производные определены, непрерывны и однозначны в той же многосвязной области S . Что же касается функций $W_k(z_k)$ они определены в многосвязных областях S_k , получаемых из области S аффинными преобразованиями (2.3) и ограниченных контурами L_{kl} , соответствующими

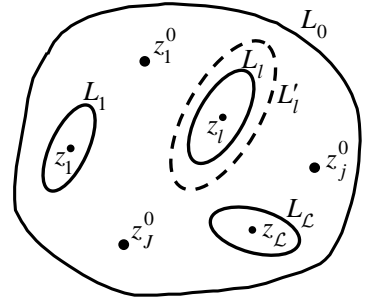


Рис. 2

контурам L_l при аффинных преобразованиях. Из непрерывности основных характеристик изгиба следует непрерывность в многосвязных областях S_k вплоть до границы функций $W_k(z_k)$ и их производных. В то же время из однозначности основных характеристик не следует однозначность этих функций и их производных. В общем случае они могут быть многозначными, но характер их многозначности не может быть произвольным.

Рассмотрим в области S произвольный замкнутый контур L_l' , охватывающий только контур одного отверстия L_l . Обозначим приращения функций $W_k(z_k)$, $W_k'(z_k)$, $W_k''(z_k)$, $W_k'''(z_k)$ при полном обходе по контуру L_l' соответственно через Δ_{kl} , Δ'_{kl} , Δ''_{kl} , Δ'''_{kl} . Такие же приращения получает функция (2.2) и ее производные. Учитывая это, из условий однозначности прогиба (2.2), углов поворотов (2.8), моментов (2.4) и перерезывающих сил (2.5) получим

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \Delta_{kl} = 0; \quad (2.20)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1, \mu_k) \Delta'_{kl} = 0; \quad (2.21)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k) \Delta''_{kl} = 0; \quad (2.22)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (\mu_k s_k, s_k) \Delta'''_{kl} = 0. \quad (2.23)$$

Подставив в (2.22) значения постоянных (2.6) и решив получив-

шующая однородную относительно $2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \Delta''_{kl}$, $2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \Delta''_{kl}$, $2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k^2 \Delta''_{kl}$ систему уравнений, найдем ее тривиальное решение, т. е.

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2 \right) \Delta''_{kl} = 0, \quad (2.24)$$

Дополним полученные выше равенства условиями равновесия кольца $L_l L'_l$, с контурами L_l и L'_l . На это кольцо действуют распределенные по контуру отверстия L_l заданные внешние усилия с главным вектором P_l и моментами M_{xl} , M_{yl} относительно осей Ox , Oy , а также внутренние усилия, распределенные по контуру L'_l . Вычислив главный вектор и моменты последних усилий по формулам (2.19) при полном обходе по контуру L'_l и приравняв их с противоположным знаком величинам P_l , M_{xl} , M_{yl} (условия равновесия кольца $L_l L'_l$), получим

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left[s_k W_k''(z_k) \right]_{L'_l} &= P_l, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left[q_k W_k'(z_k) + y s_k W_k''(z_k) \right]_{L'_l} &= -M_{xl}, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left[\frac{p_k}{\mu_k} W_k'(z_k) - x s_k W_k''(z_k) \right]_{L'_l} &= -M_{yl}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Здесь учтено, что величины, относящиеся к частному решению $w_0(x, y)$, однозначны и не могут получать приращений.

Вычислив приращения функций при обходе по L'_l , из (2.25) найдем

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 s_k \Delta''_{kl} &= P_l, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (q_k \Delta'_{kl} + y s_k \Delta''_{kl}) &= -M_{xl}, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(\frac{p_k}{\mu_k} \Delta'_{kl} - x s_k \Delta''_{kl} \right) &= -M_{yl}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Заменив в (2.26) s_k , p_k , q_k соответствующими выражениями (2.6), с учетом (2.20) и (2.21) получим

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\mu_k} \Delta''_{kl} &= \frac{P_l}{D_{11}}, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(\mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) \Delta'_{kl} &= \left(-\frac{M_{xl}}{D_{22}} - y \frac{P_l}{D_{22}}, -\frac{M_{yl}}{D_{11}} + x \frac{P_l}{D_{11}} \right). \end{aligned}$$

Эти уравнения дополняют системы (2.21), (2.22) для определения Δ''_{kl} , Δ'_{kl} . Полные системы получаются такими:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) \Delta''_{kl} = \left(0, 0, 0, \frac{P_l}{D_{11}} \right); \quad (2.27)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) \Delta'_{kl} = \left(0, 0, -\frac{M_{xl}}{D_{22}} - y \frac{P_l}{D_{22}}, -\frac{M_{yl}}{D_{11}} + x \frac{P_l}{D_{11}} \right). \quad (2.28)$$

Из системы (2.27) видно, что приращения Δ''_{kl} функций $W_k''(z_k)$ при полном обходе по контуру L'_l являются постоянными. Среди элементарных функций только $\ln(z_k - z_{kl})$, когда z_{kl} принадлежит внутренности контура L_{kl} , при полном обходе по контуру L'_l получает постоянное приращение, равное $2\pi i$, а, следовательно, функция $W_k''(z_k)$ содержит $A_{kl} \ln(z_k - z_{kl})$ с неизвестным коэффициентом A_{kl} и ее приращение $\Delta''_{kl} = 2\pi i A_{kl}$. Таким же образом, учитывая все отверстия многосвязной области, для функций $W_k''(z_k)$ окончательно найдем представления

$$W_k''(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + W_{k0}''(z_k), \quad (2.29)$$

где W_{k0}'' – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k .

Подставив выражение $\Delta''_{kl} = 2\pi i A_{kl}$ в уравнения (2.27), для определения A_{kl} получим систему

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kl} = \left(0, 0, 0, \frac{P_l}{2\pi D_{11}} \right). \quad (2.30)$$

Интегрируя (2.29), найдем

$$W_k'(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + W_{k0}'(z_k), \quad (2.31)$$

где $W_{k0}'(z_k)$ – функции, однозначные в областях S_k ; B_{kl} – комплексные постоянные. Для приращения функции (2.31) найдем

$$\Delta'_{kl} = 2\pi i (A_{kl} z_k + B_{kl}) \quad (2.32)$$

Подставив выражение (2.32) в уравнения (2.28), получим систему уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i (A_{kl} z_k + B_{kl}) =$$

$$= \left(0, 0, -\frac{M_{xl}}{2\pi D_{22}} - y \frac{P_l}{2\pi D_{22}}, -\frac{M_{yl}}{2\pi D_{11}} + x \frac{P_l}{2\pi D_{11}} \right). \quad (2.33)$$

Сравнивая в (2.33) справа и слева коэффициенты при x , y и свободные члены, придем к трем системам уравнений, две из которых на основе (2.30) и характеристического уравнения (2.1) удовлетворяются тождественно, а третья имеет вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i B_{kl} = \left(0, 0, -\frac{M_{xl}}{2\pi D_{22}}, -\frac{M_{yl}}{2\pi D_{11}} \right) \quad (2.34)$$

и служит для определения B_{kl} .

Представления (2.31) можно распространять и на случай действия сосредоточенных сил во внутренних точках плиты. Сосредоточенную силу P_j^0 в точке z_j^0 можно рассматривать как предельный для случая плиты с круговым отверстием, к контуру которого приложены равномерно распределенные поперечные усилия, когда радиус отверстия стремится к нулю при постоянном сохранении значения равнодействующей P_j^0 . При таком подходе функции $W_k'(z_k)$ должны содержать логарифмические слагаемые, аналогичные представлениям (2.31). Окончательно для случая действия в конечном числе точек $z_j^0(x_j^0, y_j^0)$ ($j = \overline{1, J}$) сосредоточенных сил P_j^0 , исходя из представления (2.31), получаем общий вид комплексных потенциалов:

$$W_k'(z_k) = \sum_{l=1}^L (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{j=1}^J (A_{kj}^0 z_k + B_{kj}^0) \ln(z_k - z_{kj}^0) + W_{k0}'(z_k), \quad (2.35)$$

в котором A_{kj}^0 , B_{kj}^0 — постоянные, вычисляемые путем решения систем (2.30), (2.34), в которых нужно заменять A_{kj} , B_{kj} , P_l , M_{xl} , M_{yl} на A_{kj}^0 , B_{kj}^0 , P_j^0 , M_{xj}^0 , M_{yj}^0 , причем $M_{xj}^0 = y_j^0 P_j^0$, $M_{yj}^0 = -x_j^0 P_j^0$ — моменты сосредоточенной силы P_j^0 в точках z_j^0 относительно осей Ox , Oy .

Интегрируя (2.35), также найдем

$$W_k(z_k) = \sum_{l=1}^L \left(\frac{A_{kl}}{2} z_k^2 + B_{kl} z_k + C_{kl} \right) \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{j=1}^J \left(\frac{A_{kj}^0}{2} z_k^2 + B_{kj}^0 z_k + C_{kj}^0 \right) \ln(z_k - z_{kj}^0) + W_{k0}(z_k), \quad (2.36)$$

где

$$C_{kl} = \frac{1}{2} A_{kl} z_{kl}^2 + B_{kl} z_{kl} + b_{kl}^{(-1)}, \quad C_{kj}^0 = \frac{1}{2} A_{kj}^0 (z_{kj}^0)^2 + B_{kj}^0 z_{kj}^0, \quad (2.37)$$

$b_{kl}^{(-1)}$ – вычет функции $W'_{kl}(z_k)$ в точке z_{kl} ; $W_{k0}(z_k)$ – функции, однозначные в областях S_k . Для приращения функции (2.36)

$\Delta_{kl} = 2\pi i (A_{kl} z_k^2/2 + B_{kl} z_k + C_{kl})$ на основании (2.20) будем иметь

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i C_{kl} = 0. \quad (2.38)$$

Равенства (2.38) служат дополнительным условием для определения постоянных c_l в граничных условиях (2.12) для загруженных контуров

Заметим, что, как видно из (2.31), производные $W_k'''(z_k)$ при обходе по контурам L_{kl} не получают приращений, т.е. $\Delta''' = 0$, и соотношения (2.23) удовлетворяются тождественно.

В случае бесконечной плиты, когда L_0 уходит в бесконечность полностью, вид функций (2.35) сохранится. Но в этом случае функция $W'_{k0}(z_k)$ является голоморфной всюду в областях S_k за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки, которая в силу ограниченности моментов может быть полюсом первого порядка. Поэтому в общем случае бесконечной многосвязной плиты комплексные потенциалы имеют вид

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{j=1}^J (A_{kj}^0 z_k + B_{kj}^0) \ln(z_k - z_{kj}^0) + W'_{k0}(z_k), \quad (2.39)$$

где Γ_k – постоянные, $W'_{k0}(z_k)$ – функции, ограниченные в бесконечно удаленной точке. Для определения Γ_k исследуем поведение комплексных потенциалов в окрестности бесконечно удаленной точки. В окрестности этой точки

$$\begin{aligned} \ln(z_k - z_{kl}) &= \ln z_k + O(1/z_k), \\ \ln(z_k - z_{kj}^0) &= \ln z_k + O(1/z_k), \\ W'_k(z_k) &= \Gamma_k z_k + (A_{k0} z_k + B_{k0}) \ln z_k + O(1/z_k), \\ W''_k(z_k) &= \Gamma_k + A_{k0} \ln z_k + O(1/z_k), \end{aligned} \quad (2.40)$$

где

$$A_{k0} = \sum_{l=1}^L A_{kl} + \sum_{j=1}^J A_{kj}^0, \quad B_{k0} = \sum_{l=1}^L B_{kl} + \sum_{j=1}^J B_{kj}^0, \quad (2.41)$$

$O(1/z_k)$ – ограниченная величина.

Выберем в области S окружность L_R с центром в начале координат и радиусом R , таким, чтобы внутри этой окружности оказались контуры всех отверстий и точки приложения сосредоточенных сил. Применяя к этому контуру ранее полученные условия однозначности моментов при полном обходе по контуру L_R и условия равенства (с противоположным знаком) главного вектора и моментов относительно осей координат всех воздействий внутри L_R главному вектору и моментам внутренних усилий вдоль L_R , на основе (2.30) и (2.34) найдем

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) iA_{k0} = \left(0, 0, 0, \frac{P_0}{2\pi D_{11}} \right), \quad (2.42)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) iB_{k0} = \left(0, 0, -\frac{M_{x0}}{2\pi D_{22}}, -\frac{M_{y0}}{2\pi D_{11}} \right), \quad (2.43)$$

где P_0 – главный вектор всех сил, приложенных к конечной части плиты (к контрам отверстий и сосредоточенных сил во внутренних точках); M_{x0} , M_{y0} – моменты этих всех воздействий относительно осей Ox , Oy .

Из ограниченности изгибающих моментов в бесконечно удаленной точке следует ограниченность в этой точке функций $W_k'''(z_k)$ по формулам (2.40), т.е. равенство нулю коэффициентов A_{k0} , что в свою очередь на основе (2.42) требует равенства нулю главного вектора P_0 всех сил приложенных к конечной части плиты. Учитывая это, подставляя функции (2.40) в выражения моментов (2.4) на бесконечности и приравняв в полученных равенствах коэффициенты при логарифмах и свободные члены, получаем, что коэффициенты при логарифмах будут тождественно равны нулю, а из сравнения свободных членов найдем равенства

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(D_{11} + 2D_{16} \mu_k + D_{12} \mu_k^2 \right) \Gamma_k &= -M_x^\infty, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(D_{12} + 2D_{26} \mu_k + D_{22} \mu_k^2 \right) \Gamma_k &= -M_y^\infty, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(D_{16} + 2D_{66} \mu_k + D_{26} \mu_k^2 \right) \Gamma_k &= -H_{xy}^\infty. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Эту систему дополним еще одним уравнением. Такое уравнение можно составить, задавая на бесконечности некоторую величину. Можно, например, в качестве дополняющего эту систему взять задание на бесконечности интегральной характеристики от $N_x + iN_y$, и воспользоваться выражением типа первого равенства системы (2.25), что приведет к уравнению

$$\sum_{k=1}^2 \left[\frac{D_{11}}{\mu_k} + 3D_{16} + (D_{12} + 2D_{66})\mu_k + D_{26}\mu_k^2 \right] \Gamma_k = 0. \quad (2.45)$$

Теперь система уравнений (2.44) и (2.45) является полной и из нее можно найти Γ_k .

Заметим, что эту систему можно записать несколько в другом виде. Рассматривая (2.44) как систему трех уравнений относительно неизвестных $2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \Gamma_k$, $2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \Gamma_k$, $2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k^2 \Gamma_k$ и подставляя найденные значения в (2.45) будем иметь

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \Gamma_k &= A_{11} M_x^\infty + A_{21} M_y^\infty + A_{31} H_{xy}^\infty, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \Gamma_k &= A_{12} M_x^\infty + A_{22} M_y^\infty + A_{32} H_{xy}^\infty, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k^2 \Gamma_k &= A_{13} M_x^\infty + A_{23} M_y^\infty + A_{33} H_{xy}^\infty, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k &= -3D_{16} A_1 M_x^\infty - (D_{12} + 2D_{22}) A_2 M_y^\infty - D_{26} A_3 H_{xy}^\infty. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{11} &= (2D_{22}D_{66} - 2D_{26}^2)/\Delta, & A_{21} &= (2D_{16}D_{26} - 2D_{12}D_{66})/\Delta, \\ A_{31} &= (2D_{12}D_{26} - 2D_{12}D_{22})/\Delta, & A_{12} &= (D_{12}D_{26} - D_{16}D_{22})/\Delta, \\ A_{22} &= (D_{12}D_{16} - D_{11}D_{26})/\Delta, & A_{32} &= (D_{11}D_{22} - D_{12}^2)/\Delta, \\ A_{13} &= (2D_{16}D_{26} - 2D_{12}D_{66})/\Delta, & A_{23} &= (2D_{11}D_{66} - 2D_{16}^2)/\Delta, \\ A_{33} &= (2D_{12}D_{16} - 2D_{11}D_{26})/\Delta, \\ \Delta &= \begin{vmatrix} D_{11} & 2D_{16} & D_{12} \\ D_{12} & 2D_{26} & D_{22} \\ D_{16} & 2D_{66} & D_{26} \end{vmatrix}, & A_i &= \sum_{j=1}^3 A_{ij} / D_{11}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Таким образом, в самом общем случае функция $W'_k(z_k)$ имеет вид

$$\begin{aligned} W'_k(z_k) &= \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \\ &+ \sum_{j=1}^J (A_{kj}^0 z_k + B_{kj}^0) \ln(z_k - z_{kj}^0) + W'_{k0}(z_k), \end{aligned} \quad (2.48)$$

где Γ_k – постоянные, определяемые из системы уравнений (2.46); A_{kl} , B_{kl} – постоянные, определяемые из систем уравнений (2.30) и (2.34). Рас-

смотрим частные случаи.

Если верхнее основание плиты не загружено, то $q(x, y) = 0$ и в во всем решении нужно принять $w_0(x, y) = 0$. Если плита конечная, то нужно принять $\Gamma_k = 0$, а $W'_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в областях S_k , ограниченных всеми контурами, включая L_{k0} . Если нет сосредоточенных сил, то $A_{kj}^0 = B_{kj}^0 = 0$. Если на контуре отверстия L_l главный вектор заданных сил и главный момент равны нулю, то $A_{kl} = B_{kl} = 0$.

В случае изотропной плиты для комплексных потенциалов получаются представления, аналогичные их структуре в случае плоской задачи [9].

3. Изгиб эллиптической (круговой) плиты сосредоточенной силой.

Рассмотрим анизотропную эллиптическую плиту (рис. 3) с контуром L_0 и полуосями a , b , жестко закрепленную по контуру L_0 и находящуюся под действием нормальной к верхнему основанию сосредоточенной силы P в центре эллипса. В данном случае комплексные потенциалы (2.48) имеют вид

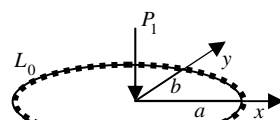


Рис. 3

$$W'_k(z_k) = A_{k1}^0 z_k \ln z_k + W'_{k0}(z_k), \quad (3.1)$$

где A_{k1}^0 – постоянные, определяемые из решения систем уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{k1}^0 = \left(0, 0, 0, \frac{P}{2\pi i D_{11}} \right); \quad (3.2)$$

$W'_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в односвязных областях S_k , ограниченных контурами L_{k0} , соответствующими контуру L_0 при аффинных преобразованиях (2.3). В этих областях функции можно разложить в ряды по полиномам Фабера [4]

$$W'_{k0}(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} P_n, \quad (3.3)$$

$P_n(z_k)$ – полиномы Фабера, для которых имеют место равенства

$$P_0 = 1, \quad P_n(z_k) = \zeta_k^n + \frac{m_k^n}{\zeta_k^n}; \quad (3.4)$$

ζ_k – переменные, определяемые из конформных отображений внешность единичного круга $|\zeta_k| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{k0} :

$$z_k = R_k \left(\zeta_k + \frac{m_k}{\zeta_k} \right); \quad (3.5)$$

$$R_k = \frac{a - i\mu_k b}{2}, \quad m_k = \frac{a + i\mu_k b}{a - i\mu_k b}.$$

На контуре эллипса

$$z_k \ln z_k = A_{k1}^0 R_k \zeta_k \ln \zeta_k + A_{k1}^0 R_k m_k \frac{1}{\zeta_k} \ln \zeta_k + \alpha_{k0} \zeta_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{kn}}{\zeta_k^{2n-1}}, \quad (3.6)$$

где

$$\alpha_{k0} = A_{k1}^0 R_k \ln R_k, \quad \alpha_{k1} = A_{k1}^0 R_k m_k (\ln R_k + 1),$$

$$\alpha_{kn} = \frac{(-1)^n A_{k1}^0 R_k m_k^n}{n(n-1)} \text{ при } n = 2, 3, \dots$$

Подставляя функции (3.1) в граничные условия (2.14) и применяя метод рядов, приходим к системе уравнений

$$\sum_{k=1}^2 \left(a_{k,2n-1} m_k^{2n-1} + \bar{a}_{k,2n-1} \right) = \beta_{kn},$$

$$\sum_{k=1}^2 \left(\mu_k a_{k,2n-1} m_k^{2n-1} + \bar{\mu}_k \bar{a}_{k,2n-1} \right) = \gamma_{kn}, \quad (3.7)$$

в которой

$$\beta_{kn} = - \sum_{k=1}^2 \left[\left(A_{k1}^0 R_k m_k \ln R_k + \bar{\alpha}_{k0} + A_{k1}^0 R_k m_k \right) \delta_n^1 + \left(1 - \delta_n^1 \right) \alpha_{kn} \right],$$

$$\gamma_{kn} = - \sum_{k=1}^2 \left[\left(\mu_k A_{k1}^0 R_k m_k \ln R_k + \bar{\mu}_k \bar{\alpha}_{k0} + \mu_k A_{k1}^0 R_k m_k \right) \delta_n^1 + \left(1 - \delta_n^1 \right) \mu_k \alpha_{kn} \right].$$

Функции (3.1) примут вид

$$W_k'(z_k) = A_{k1}^0 z_k \ln z_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,2n-1} P_{2n-1}(z_k). \quad (3.8)$$

Продифференцировав эти функции по переменной z_k , найдем

$$W_k''(z_k) = A_{k1}^0 \ln z_k + A_{k1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,2n-1} P'_{2n-1}(z_k), \quad (3.9)$$

причем $P'_{2n-1}(z_k)$ получаются по рекуррентным формулам для производных полиномов Фабера

$$P_1'(z_k) = \frac{1}{R_k}, \quad P_2'(z_k) = \frac{2z_k}{R_k^2},$$

$$P'_{2n+1}(z_k) = \frac{2n+1}{2n} \frac{z_k}{R_k} P'_{2n}(z_k) - \frac{2n+1}{2n-1} m_k P'_{2n-1}(z_k),$$

$$P'_{2n+2}(z_k) = \frac{2n+2}{2n+1} \frac{z_k}{R_k} P'_{2n+1}(z_k) - \frac{2n+2}{2n} m_k P'_{2n}(z_k) \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.10)$$

Определив функции $W_k''(z_k)$, изгибающие моменты найдем по известным формулам (2.4).

Для ортотропного материала, когда $\mu_k = i\beta_k$, из системы (3.2) остаются два уравнения

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(\beta_k, -\frac{1}{\beta_k} \right) A_{k1}^0 = \left(0, -\frac{P}{2\pi D_{11}} \right),$$

из которых видно, что A_{k1}^0 являются вещественными. Для этого же случая находим

$$R_k = \frac{a + \beta_k b}{2}, \quad m_k = \frac{a - \beta_k b}{a + \beta_k b},$$

$$\beta_{kn} = -\sum_{k=1}^2 \left[A_{k1}^0 R_k (m_k \ln R_k + m_k + \ln R_k) \delta_n^1 + (1 - \delta_n^1) \alpha_{kn} \right],$$

$$\gamma_{kn} = -\sum_{k=1}^2 i \left[\beta_k A_{k1}^0 R_k (m_k \ln R_k + m_k - \ln R_k) \delta_n^1 + (1 - \delta_n^1) \beta_k \alpha_{kn} \right].$$

Система (3.7) примет вид

$$\left(m_k^{2n-1} + 1 \right) a_{k,2n-1} + \left(m_{k+1}^{2n-1} + 1 \right) a_{k+1,2n-1} = \beta_{kn},$$

$$\left(m_k^{2n-1} - 1 \right) \beta_k a_{k,2n-1} + \left(m_{k+1}^{2n-1} - 1 \right) \beta_{k+1} a_{k+1,2n-1} = \gamma_{kn}^*, \quad (3.11)$$

где $\gamma_{kn} = i \gamma_{kn}^*$. Тогда неизвестные коэффициенты $a_{k,2n-1}$ определяются по формулам

$$a_{k,2n-1} = \frac{\beta_{k+1} \left(m_{k+1}^{2n-1} - 1 \right) \beta_{kn} - \left(m_{k+1}^{2n-1} + 1 \right) \gamma_{kn}^*}{\beta_{k+1} \left(m_{k+1}^{2n-1} - 1 \right) \left(m_k^{2n-1} + 1 \right) - \beta_k \left(m_{k+1}^{2n-1} + 1 \right) \left(m_k^{2n-1} - 1 \right)}. \quad (3.12)$$

Вычисление $W_k'(z_k)$, $W_k''(z_k)$ опять осуществляется по формулам (3.8), (3.9).

Приведенная здесь задача для изотропной круглой плиты была рассмотрена в работе [11].

РЕЗЮМЕ. Получены и исследованы общие представления комплексных потенциалов теории изгиба конечных и бесконечных многосвязных анизотропных плит. даны решения задач для эллиптической (круговой) плиты под действием равномерно распределенных усилий или сосредоточенной силы.

Ключевые слова: многосвязная плита, анизотропия, комплексные потенциалы.

РЕЗЮМЕ. Получены и исследованы общие представления комплексных потенциалов теории изгиба конечных и бесконечных многосвязных анизотропных плит. даны решения задач для эллиптической (круговой) плиты под действием равномерно распределенных усилий или сосредоточенной силы.

Ключевые слова: многосвязная плита, анизотропия, комплексные потенциалы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галеркин Б. Г. Упругие тонкие плиты. – М.: Госстройиздат, 1933.
2. Космодамианский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. – К., Донецк: Вища шк., 1976. – 200 с.
3. Космодамианский А. С., Иванов Г. М. Изгиб тонких многосвязных плит. – Донецк, 1973. – 256 с.
4. Космодамианский А. С., Калоеров С. А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках. – К., Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.
5. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
6. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит // Прикладная математика и механика. – 1938. – Т. 2, вып. 2. – С. 181–209.
7. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.-Л.: ОНТИ, 1935. – 674 с.
8. Меглинский В. В. Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. – 1967. – Вып. 3. – С. 97–127.
9. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
10. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963. – 635 с.
11. Фридман М. М. Изгиб круглой плиты сосредоточенными силами // Прикладная математика и механика. – 1951. – Т. 15, вып. 2. – С. 258–260.
12. Boussinesque M. J. Compliments a une etude sur la theorie de lequilibre et du mouvement des solides elastiques // J. Math, pures et appl., ser. 3, vol. 5, 1879. – P. 163-194 and 329-344.
13. Gehring F. De Aequationibus Differentialibus, quibus aequilibrium et motus laminae crystallinae definiuntur. Ph.D. dissertation, Berlin, 1860.
14. Huber M. T. Teoria plyt prostokatnie-ryznokierunkowych. – Lwow, 1921.
15. Huber M. T. Einige Anwendungen der Biegung Theorie orthotroper Platten // Zeitschr. f. Angew. Math. und Mech. – 1926, b. 6, h. 3.
16. Huber M. T. Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten. – Warszawa, 1929.

Донецкий национальный университет

Поступила 10.03.2012

УДК 539.3

В. Г. КАРНАУХОВ, д-р физ.-мат. наук, *А. С. КАРПЕНЮК***ПОТЕРЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ СПОСОБНОСТИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С ШАРНИРНЫМ ОПИРАНИЕМ ТОРЦОВ ИЗ-ЗА ТЕМПЕРАТУРЫ ДИССИПАТИВНОГО РАЗОГРЕВА**

Дана постановка задачи о тепловом разрушении вязкоупругой пластины с шарнирным опиранием торцов при действии на нее гармонического во времени поверхностного давления. В случае независимых от температуры механических свойств материала найдена критическая механическая нагрузка. Исследовано влияние коэффициента теплообмена на критическую нагрузку. Обсуждается возможность построения кривой типа Веллера – зависимости закритической нагрузки от времени до теплового разрушения пластины.

Ключевые слова: вязкоупругая пластина, диссипативный разогрев, тепловое разрушение.

Элементы конструкций из полимерных материалов и композитов широко используются в различных областях современной техники. Часто на них действует гармоническое во времени механическое нагружение. Указанные материалы при таком типе нагружения проявляют вязкоупругие свойства, в результате чего имеет место рассеяние механической энергии в тепловую и наблюдается повышение температуры. При определенном уровне механического нагружения она может достичь критических значений, например, точек плавления или размягчения материала, в результате чего элемент конструкции теряет свое функциональное назначение. Для определения указанных критических значений температуры возникает необходимость в решении связанных квазистатических или динамических задач вязкоупругости, при постановке которых необходимо учитывать взаимодействие механических и температурных полей. При моногармоническом механическом нагружении для описания термомеханического поведения элемента конструкции использована так называемая концепция комплексных характеристик [1, 4, 5].

В данной статье представлено аналитическое решение связанной задачи для прямоугольной пластины с шарнирным опиранием торцов при действии на нее гармонического во времени нормального поверхностного давления. Для максимальной температуры найдено критическое значение амплитуды механического нагружения. Обсуждается возможность построения кривой Веллера при действии нагрузки, превышающей критическую.

Постановка и аналитическое решение задачи. Для случая независимых от температуры свойств материала задача о колебаниях и диссипативном разогреве шарнирно опертой прямоугольной пластины с размерами $a \times b$ сводится к решению системы дифференциальных уравнений [2, 3]

$$D\Delta\Delta w - (h\rho)\omega^2 w + p_0(x, y) = 0 ; \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{2\alpha}{(\lambda h)}(T - T_c) + \frac{\omega E'' h^3}{24(1-\nu^2)(\lambda h)} \times \left\{ \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \\
& + \left(\frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w''}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} = 0. \quad (2)
\end{aligned}$$

Для основной моды колебаний, которой отвечает одна полуволна в продольном и поперечном направлениях, прогиб представляется в виде

$$w = A \sin k_1 x \sin p_1 y, \quad k_1 = \pi/a, \quad p_1 = \pi/b. \quad (3)$$

При этом резонансная частота и комплексная амплитуда перемещения на этой частоте определяются формулами

$$\begin{aligned}
\omega_{11} &= \sqrt{D' / (\rho h)} \cdot (k_1^2 + p_1^2), \\
A = w_{11} &= -i 16 q_0 b^4 / \left\{ \pi^6 D'' \left[1 + (a/b)^2 \right]^2 \right\}, \quad (4)
\end{aligned}$$

а диссипативная функция – выражением

$$\begin{aligned}
W &= \frac{\omega}{2} D'' |A|^2 \left\{ \left[(\pi/a)^4 + (\pi/b)^4 + 2\nu\pi^4 / (a^2 b^2) \right] \sin^2 k_1 x \cdot \sin^2 p_1 y + \right. \\
& \left. + 2(1-\nu) k_1^2 p_1^2 \cos^2 k_1 x \cdot \cos^2 p_1 y \right\},
\end{aligned}$$

или

$$W = W_0^2 \left\{ a_0 - a_1 (\cos k_1 x + \cos p_1 y) + a_2 \cos k_1 x \cdot \cos p_1 y \right\}, \quad (5)$$

где p_0 – амплитуда равномерного давления,

$$\begin{aligned}
W_0^2 &= \frac{16 q_0^2 a^4}{\pi^8 D'' \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^2}, \quad q_0 = \frac{16 p_0}{\pi^2}, \\
a_0 = a_2 &= \frac{1}{4} \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^2, \quad a_1 = \frac{1}{4} \left\{ \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^2 + 4\nu \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Уравнение энергии при предположении о постоянстве температуры по толщине пластины имеет вид

$$\nabla^2 \theta - \frac{2\alpha}{(\lambda h)} \theta + \frac{W}{(\lambda h)} = 0. \quad (6)$$

и его решением будет функция

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 \cos 2k_1 x + \theta_2 \cos 2p_1 y + \theta_3 \cos 2k_1 x \cdot \cos 2p_1 y, \quad (7)$$

причем из уравнения (6) с учетом (5) имеем

$$\theta_0 = \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{2\alpha} \right) a_0 W_0^2, \quad \theta_1 = -\frac{\omega}{2(\lambda h)} W_0^2 \frac{a_1}{\left(\frac{2\alpha}{\lambda h} \right) + \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2},$$

$$\theta_2 = -\frac{\omega}{2(\lambda h)} W_0^2 \frac{a_1}{\left(\frac{2\alpha}{\lambda h} \right) + \left(\frac{2\pi}{b} \right)^2}, \quad \theta_3 = \frac{\omega}{2(\lambda h)} W_0^2 \frac{a_2}{\left[\left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{b} \right)^2 \right] + \left(\frac{2\alpha}{\lambda h} \right)}. \quad (8)$$

Максимальная температура диссипативного разогрева достигается в центре пластины и равна

$$\theta_{\max} = \theta_0 - \theta_1 - \theta_2 + \theta_3. \quad (9)$$

В качестве критерия потери функциональной способности пластины выбираем достижение температурой критической точки θ_K . Полагая

$$\theta_0 = \theta_K, \quad (10)$$

из (9) найдем критическое значение параметра нагружения.

Введем параметр механического нагружения и критерий Био

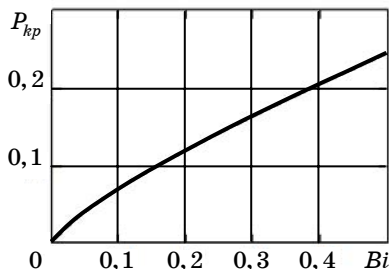
$$P = \frac{\lambda}{h} \frac{16^2 q_0^2 a^4}{4\pi^8 D''} \frac{\omega_p}{\theta_{nl}}, \quad Bi = \frac{\alpha h}{\lambda}. \quad (11)$$

Тогда критическое значение параметра нагружения $P_{кр}$ в зависимости от критерия Био определяется по формуле

$$P_{кр} = \frac{Bi}{1 + \frac{2\nu Bi}{Bi + 2\pi^2 \left(\frac{h}{a} \right)^2} + \frac{Bi}{Bi + 4\pi^2 \left(\frac{h}{a} \right)^2}}. \quad (12)$$

Как видно, при $Bi \rightarrow 0$ критическое нагружение $P_{кр} \rightarrow 0$, а при $Bi \rightarrow \infty$ параметр $P_{кр} \rightarrow \infty$. График зависимости

$P_{кр}$ от критерия Био Bi для $\nu = 0,3$, $h/a = 1/10$ представлен на рисунке. Как видно из этого графика и анализа формулы (12), зависимость критического значения параметра нагружения вначале изменяется по параболическому закону, а потом с увеличением Bi стремится к бесконечности по линейному закону.



Аналогичные результаты получены и для других типов механических граничных условий, а также для случая зависимости комплексных механических характеристик от температуры и амплитуд деформаций.

РЕЗЮМЕ. Подана постановка задачі про теплове руйнування в'язкопружної пластини з шарнірним обпиранням торців при дії на неї гармонічного за часом поверхневого тиску. Для випадку незалежних від температури механічних властивостей знайдено критичне механічне навантаження. Досліджено вплив коефіцієнта теплообміну на критичне навантаження. Обговорюється можливість побудови кривої типу Веллера – залежності закритичного навантаження від часу до теплового руйнування пластини.

Ключові слова: в'язкопружна пластинка, дисипативний розігрів, теплове руйнування.

SUMMARY. The problem of thermal failure of the viscoelastic plate with simply supported ends under the action of time-harmonic surface pressure is formulated. For the temperature-independent mechanical material the critical mechanical load is obtained. The effect of the heat-transfer coefficient on the critical load is investigated. The possibility of constructing a Weller type curve (dependence of post-critical load on the failure time) is discussed.

Key words: viscoelastic plate, dissipative heating, thermal failure.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
2. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – К.: Наук. думка, 1986. – 222 с.
3. *Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т. В.* Тепловое разрушение неупругой шарнирно опертой прямоугольной пластины с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами при вынужденных резонансных изгибных колебаниях // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка – 2011. – Вип. 15, т. 2, № 5. – С. 110–116.
4. *Карнаухов В.Г., Михайленко В.В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир, 2005. – 428 с.
5. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 340 с.

*Институт механики НАНУ, г. Киев
Николаевский национальный университет*

Поступила 29.03.2012

УДК 539.3

В. Д. КУБЕНКО, д-р. физ.-мат. наук,
И. В. ЯНЧЕВСКИЙ, канд. техн. наук

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО НЕОСЕСИММЕТРИЧНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ С ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИМ СЛОЕМ ПРИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Представлено численно-аналитическое решение задачи о нестационарных колебаниях изгиба электрически нагруженной круглой пластины, составленной из электроупругого с разрезными токопроводящими покрытиями и упругого слоев. Динамические процессы моделируются уравнениями линейной теории тонких оболочек, основанных на обобщенных гипотезах Кирхгофа-Лява. Для пластины металл-пьезокерамика выполнены расчеты прогибов при действии ступенчатой нагрузки, которые сравнены с результатами конечно-элементного анализа.

Ключевые слова: электроупругая пластина, нестационарные неосесимметричные колебания, электрическое возбуждение, интегральное преобразование Лапласа

Актуальность исследований динамического поведения круглых в плане пластин, содержащих слои из поляризованной по толщине пьезокерамики, определяется широкой номенклатурой их практических приложений. Большая часть полученных к настоящему времени результатов соответствует случаю осесимметричного деформирования таких пластин [4, 6–8]. Вместе с тем, особый интерес для практики, в частности, в области адаптивной оптики [3], представляют задачи об неосесимметричных колебаниях изгиба круглых пластин, составленных из тонких электроупругого с разрезными токопроводящими покрытиями и упругого слоев. Исследованиям деформированного состояния пластин указанного конструктивного исполнения при импульсном электрическом возбуждении и посвящена данная работа.

Постановка задачи. Рассматривается круглая пластина радиуса R_0 , состоящая из двух тонких склеенных между собой упругого (металлического) и электроупругого (пьезокерамического) слоев с толщинами h_m и h_p . На внутреннюю поверхность поляризованного по толщине пьезокерамического слоя нанесено сплошное токопроводящее покрытие, а покрытие на его внешней поверхности имеет N диаметральных разрезов, которые делят его на $2N$ равных областей. Толщина электродов, как и клеявого соединения, бесконечно мала, поэтому их влиянием на жесткостные характеристики преобразователя можно пренебречь. Колебания пластины возбуждаются нестационарным электрическим потенциалом $V_0(t)$ (t – время), подводимым с чередующимся знаком ($\pm V_0$) к электродам секционированного покрытия, причем внутренний электрод заземлен. Начальные

условия – нулевые (при $t = 0$ пластина находится в состоянии покоя). Граничные условия соответствуют условиям шарнирного закрепления.

Математическая модель. Будем считать, что для рассматриваемой структуры оправдано использование механических гипотез Кирхгофа-Лява, дополненных адекватными им гипотезами относительно характеристик электрического поля. На основании этих допущений пространственная задача сводится к двумерной о колебаниях поверхности приведения [6], положение которой выбирается из условия наиболее простой записи определяющих соотношений, связывающих моменты с деформациями пластины и разностью потенциалов между электродами электроупругого слоя.

Дифференциальное уравнение колебаний рассматриваемой асимметричной биморфной пластины по форме совпадает с классическим уравнением изгиба тонких упругих пластин:

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q + \nabla^2 V, \quad (1)$$

где $w(r, \theta, t)$ – прогиб пластины; $q(r, \theta, t)$ – нормальная к поверхности приведения механическая нагрузка (в сформулированной постановке задачи $q = 0$); $V(r, \theta, t)$ – электрический потенциал на внешнем электроде;

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ – оператор Лапласа; r, θ – полярные радиус и угол.

Механические граничные условия на контуре пластины ($r = R_0 = 1$) при шарнирном ее закреплении задаются в виде [6]

$$w|_{r=R_0} = 0; \quad M_r|_{r=R_0} = \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \bar{\nu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + V \right) \Big|_{r=R_0} = 0. \quad (2)$$

Входящие в (1) и (2) переменные обезразмерены: w, r, R_0 и h_j отнесены к R_0 ; t – к $\sqrt{R_0^2 \rho_h / \bar{D}}$; q – к \bar{D} ; V – к $-\bar{D} R_0 / e_1 a_p$; M_r – к $\bar{D} R_0^2$. При этом постоянные коэффициенты с учетом приближенного равенства коэффициентов Пуассона материалов ($\nu = \nu_p \approx \nu_m$) определяются формулами

$$\begin{aligned} \rho_h &= \rho_p h_p + \rho_m h_m; \quad \bar{D} = D + \Delta D; \quad \bar{\nu} = \frac{\nu D + \Delta D}{D}; \quad a_p = z_0 - \frac{h_p}{2}; \\ z_0 &= \frac{c_1^p h_p^2 - c_1^m h_m^2}{2(c_1^p h_p + c_1^m h_m)}; \quad D = c_1^p \frac{z_0^3 - (z_0 - h_p)^3}{3} + c_1^m \frac{(z_0 + h_m)^3 - z_0^3}{3}; \\ c_1^j &= \frac{1}{s_{11}^j (1 - \nu^2)} \quad (j = m, p); \quad \Delta D = \frac{e_1^2 h_p^3}{\varepsilon_3 3}; \quad e_1 = d_{31} c_1^p (1 + \nu); \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}^T - 2d_{31} e_1. \end{aligned}$$

Здесь ρ_j, s_{11}^j – плотности и упругие податливости материалов; $d_{31}, \varepsilon_{33}^T$ – пьезомодуль и диэлектрическая проницаемость пьезокерамики.

Решение задачи. Задачу будем решать с использованием интеграль-

ного преобразования Лапласа по времени t (s – комплексный параметр преобразования). Решение трансформированного в пространство изображений уравнения (1) при нулевых начальных условиях представим в виде суммы

$$w^L = \tilde{w}^L + \bar{w}^L, \quad (3)$$

где L – индекс для соответствующих трансформант ($f^L(s) = L\{f(t)\}$); \tilde{w} – частное решение уравнения (1), которое будем искать по виду правой части $V(r, \theta, t) = V_0(t) \cdot \text{sign}(\sin(N\theta))$, разложенной в двойной ряд:

$$V(r, \theta, t) = V_0(t) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{k,n} J_{kN}(\lambda_{k,n} r) \sin(kN\theta);$$

$\lambda_{k,n}$ – корни уравнения $J_{kN}(\lambda_{k,n} R_0) = 0$; $v_{k,n}$ – коэффициенты, которые определяются на основании свойств ортогональности тригонометрических функций и ортогональности функции Бесселя:

$$v_{k,n} = \frac{2(1 - \cos(k\pi))}{k\pi} \frac{2\Psi_{k,n}(R_0)}{J_{kN+1}^2(\lambda_{k,n} R_0)};$$

$$\Psi_{k,n}(x) = \int_0^x r J_{kN}(\lambda_{k,n} r) dr = \sum_{m=0}^{\infty} h_m(k, n) \cdot x^{2m+kN+2}; \quad (4)$$

$$h_0(k, n) = \frac{\lambda_{k,n}^{kN}}{2^{kN} (kN+2) \Gamma(kN+1)};$$

$$h_{m+1}(k, n) = \frac{-h_m(k, n) \cdot \lambda_{k,n}^2 \cdot (2m+kN+2)}{2^2 (m+1)(m+kN+1)(2m+kN+4)};$$

Γ – гамма-функция. В результате выражение для \tilde{w}^L запишется в виде

$$\tilde{w}^L(r, \theta, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n}^L(s) J_{kN}(\lambda_{k,n} r) \sin(kN\theta), \quad (5)$$

в котором $a_{k,n}^L(s) = -\lambda_{k,n}^2 v_{k,n} \frac{V_0^L(s)}{s^2 + \lambda_{k,n}^4}$.

Последующее построение оригиналов функций $a_{k,n}^L(s)$, а следовательно и составляющей \tilde{w}^L (3), на основании теорем о свертке и линейности интегрального преобразования не вызывает затруднений [2]:

$$a_{k,n}(t) = -v_{k,n} \int_0^t V_0(\tau) \sin(\lambda_{k,n}^2(t-\tau)) d\tau. \quad (6)$$

Общее решение \bar{w}^L изображающего (1) однородного уравнения

$$\nabla^2 \nabla^2 \bar{w}^L + s^2 \bar{w}^L = 0$$

с учетом конечности прогиба в центре пластины ($r=0$) запишем в удобном для последующего построения оригиналов виде

$$\bar{w}^L = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{s} A_k^{(1)}(s) e^{-i\sqrt{is}r} F_k^{(1)}(r, s) + \frac{1}{s} A_k^{(2)}(s) e^{-\sqrt{is}(R_0-r)} F_k^{(2)}(r, s) \right] \sin(kN\theta), \quad (7)$$

где

$$i = \sqrt{-1}; \quad F_k^{(1)}(r, s) = i^{kN/2} \frac{e^{i\sqrt{is}r}}{s^{(kN+1)/2}} J_{kN}(\sqrt{is}r);$$

$$F_k^{(2)}(r, s) = i^{kN/2} \frac{e^{-\sqrt{is}r}}{s^{(kN+1)/2}} I_{kN}(\sqrt{is}r);$$

I_{kN} – модифицированная функция Бесселя 1-го рода kN -го порядка.

Для определения неизвестных функций $A_k^{(j)}(s)$ ($j=1, 2$), фигурирующих в (7), необходимо принять в рассмотрение справедливость представления $F_k^{(j)}(r, s)$ ($j=1, 2$) в виде сумм действительной и мнимой частей:

$$F_k^{(1)}(r, s) = i^{kN} \left(G_k^{(1)L}(r, s) + i G_k^{(2)L}(r, s) \right);$$

$$F_k^{(2)}(r, s) = i^{kN} \left(G_k^{(1)L}(r, s) - i G_k^{(2)L}(r, s) \right) \quad (8)$$

оригиналы которых, с использованием преобразования Эфроса [2], могут быть записаны в виде интегралов

$$G_k^{(1)}(r, t) = \frac{(2r)^{kN}}{\pi \Gamma(kN + 1/2)} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^1 [\tau(1-\tau)]^{kN-1/2} \cos\left(\frac{\tau^2 r^2}{t}\right) d\tau;$$

$$G_k^{(2)}(r, t) = \frac{(2r)^{kN}}{\pi \Gamma(kN + 1/2)} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^1 [\tau(1-\tau)]^{kN-1/2} \sin\left(\frac{\tau^2 r^2}{t}\right) d\tau \quad (9)$$

После подстановки соотношений (3), (5), (7) с учетом (8) в трансформированную в пространство изображений по Лапласу систему граничных условий (2) и введения переменных

$$B_k^{(1)}(r, s) = \left(A_k^{(1)}(s) e^{-i\sqrt{is}r} + A_k^{(2)}(s) e^{-\sqrt{is}(R_0-r)} \right) i^{kN},$$

$$B_k^{(2)}(r, s) = \left(A_k^{(1)}(s) e^{-i\sqrt{is}r} - A_k^{(2)}(s) e^{-\sqrt{is}(R_0-r)} \right) i^{kN+1}, \quad (10)$$

расчетные зависимости будут избавлены от комплексных переменных:

$$B_k^{(1)L}(R_0, s) G_k^{(1)L}(R_0, s) + B_k^{(2)L}(R_0, s) G_k^{(2)L}(R_0, s) = 0;$$

$$B_k^{(1)L}(R_0, s) \left[G_k^{(2)L}(R_0, s) + \frac{\bar{v}-1}{R_0} G_{k+1}^{(2)L}(R_0, s) \right] - B_k^{(2)L}(R_0, s) \left[G_k^{(1)L}(R_0, s) + \frac{\bar{v}-1}{R_0} G_{k+1}^{(1)L}(R_0, s) \right] = \frac{\bar{v}-1}{R_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n}^L(s) \lambda_{k,n} J_{kN+1}(\lambda_{k,n} R_0).$$

При решении полученной системы в явном виде оригиналы выражений, определяющих функции $B_k^{(1)}(R_0, t)$ и $B_k^{(2)}(R_0, t)$, не удается получить аналитически. Поэтому в настоящей работе на основании изложенного в [5] подхода непосредственно выполняется ее инверсия, в результате чего задача сводится к системе интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода:

$$\begin{aligned} & \int_0^t B_k^{(1)}(R_0, \tau) G_k^{(1)}(R_0, t-\tau) d\tau + \int_0^t B_k^{(2)}(R_0, \tau) G_k^{(2)}(R_0, t-\tau) d\tau = 0; \\ & \int_0^t B_k^{(1)}(R_0, \tau) H_k^{(1)}(R_0, t-\tau) d\tau + \int_0^t B_k^{(2)}(R_0, \tau) H_k^{(2)}(R_0, t-\tau) d\tau = \\ & = \frac{\bar{\nu}-1}{R_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n}(t) \lambda_{k,n} J_{kN+1}(\lambda_{k,n} R_0), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} H_k^{(1)}(r, t) &= G_k^{(2)}(r, t) + (\bar{\nu}-1) G_{k+1}^{(2)}(r, t)/r; \\ H_k^{(2)}(r, t) &= -G_k^{(1)}(r, t) - (\bar{\nu}-1) G_{k+1}^{(1)}(r, t)/r. \end{aligned}$$

Система (11) решалась численно, для чего путем аппроксимации искомых функций кусочно-постоянными функциями и с помощью метода квадратур строился ее конечномерный аналог, представляющий собой систему линейных алгебраических уравнений с матрицей блочной структуры (входящие в нее 2×2 блока являются нижними треугольными матрицами). Для построения устойчивого к вычислительным погрешностям ее решения использовались регуляризирующие методы [1].

Зная числовые значения функций $B_k^{(j)}(R_0, t)$ ($j = 1, 2$), можно определить все представляющие интерес физические характеристики переходного процесса. Так, для расчета прогибов пластины перепишем формулу (7) через новые переменные (10) с учетом равенств (8):

$$\bar{w}^L = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{s} B_k^{(1)}(r, s) G_k^{(1)L}(r, s) + \frac{1}{s} B_k^{(2)}(r, s) G_k^{(2)L}(r, s) \right] \sin(kN\theta), \quad (12)$$

причем функции $B_k^{(j)}(r, s)$ с использованием формул Эйлера и Муавра могут быть выражены через изображения известных функций $B_k^{(j)}(R_0, t)$:

$$\begin{aligned} B_k^{(1)}(r, s) &= B_k^{(1)L}(R_0, s) e^{-\alpha\sqrt{s}} \cos(\alpha\sqrt{s}) + B_k^{(2)L}(R_0, s) e^{-\alpha\sqrt{s}} \sin(\alpha\sqrt{s}); \\ B_k^{(2)}(r, s) &= B_k^{(2)L}(R_0, s) e^{-\alpha\sqrt{s}} \cos(\alpha\sqrt{s}) - B_k^{(1)L}(R_0, s) e^{-\alpha\sqrt{s}} \sin(\alpha\sqrt{s}), \end{aligned}$$

где $\alpha(r) = \sqrt{2}(R_0 - r)/2$. В результате последующей перекомпоновки составляющих запись (12) примет вид:

$$\bar{w}^L = \sum_{k=1}^{\infty} \left[B_k^{(1)L}(R_0, s) \Psi_k^{(1)L}(r, s) + B_k^{(2)L}(R_0, s) \Psi_k^{(2)L}(r, s) \right] \sin(kN\theta), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}\Psi_k^{(1)L}(r, s) &= G_k^{(1)L}(r, s) \Psi_c^L(r, s) - G_k^{(2)L}(r, s) \Psi_s^L(r, s); \\ \Psi_k^{(2)L}(r, s) &= G_k^{(1)L}(r, s) \Psi_s^L(r, s) + G_k^{(2)L}(r, s) \Psi_c^L(r, s).\end{aligned}$$

Трансформанты $\Psi_k^{(j)L}(r, s)$ ($j=1, 2$) выражения (13) содержат функции $\Psi_c^L(r, s) = \frac{1}{s} e^{-\alpha\sqrt{s}} \cos(\alpha\sqrt{s})$ и $\Psi_s^L(r, s) = \frac{1}{s} e^{-\alpha\sqrt{s}} \sin(\alpha\sqrt{s})$, оригиналы которых находятся аналитически с использованием таблиц операционного исчисления [2]

$$\begin{aligned}\Psi_c(r, t) &= 1 - C \frac{(R_0 - r)^2}{4t} - S \frac{(R_0 - r)^2}{4t}; \\ \Psi_s(r, t) &= C \frac{(R_0 - r)^2}{4t} - S \frac{(R_0 - r)^2}{4t}.\end{aligned}$$

Здесь C и S – интегралы Френеля:

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi \quad \text{и} \quad S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi.$$

Последующая инверсия по Лапласу равенств (5) и (13) позволяет найти функции w (3), определяющей форму изогнутой поверхности приведения рассматриваемой асимметричной биморфной пластины:

$$\begin{aligned}w(r, \theta, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^t B_k^{(1)}(R_0, \tau) \Psi_k^{(1)}(r, t-\tau) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t B_k^{(2)}(R_0, \tau) \Psi_k^{(2)}(r, t-\tau) d\tau \right] \sin(kN\theta) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n}(t) J_{kN}(\lambda_{k,n} r) \sin(kN\theta),\end{aligned}\tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}\Psi_k^{(1)}(r, t) &= \int_0^t G_k^{(1)}(r, \tau) \Psi_c(r, t-\tau) d\tau - \int_0^t G_k^{(2)}(r, \tau) \Psi_s(r, t-\tau) d\tau; \\ \Psi_k^{(2)}(r, t) &= \int_0^t G_k^{(1)}(r, \tau) \Psi_s(r, t-\tau) d\tau + \int_0^t G_k^{(2)}(r, \tau) \Psi_c(r, t-\tau) d\tau,\end{aligned}\tag{15}$$

Отметим, что интегралы, входящие в (6), (9), (14) и (15), вычислялись с применением формул средних прямоугольников.

Числовые результаты. Приведем результаты исследования нестационарного деформирования биморфной пластины с геометрическими параметрами $h_p=0,04$, $h_m=0,02$ ($R_0=1,0$). Для материалов слоев принимались материальные характеристики, соответствующие пьезокерамике марки

PZT-5 и титановому сплаву ВТ-6:

$$\rho_p = 7600 \text{ кг/м}^3, s_{11}^p = 15,4 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}, \nu = 0,33,$$

$$d_{31} = -178 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/Н}, \varepsilon_{33}^T = 15,5 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м};$$

$$\rho_m = 4450 \text{ кг/м}^3, s_{11}^m = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}.$$

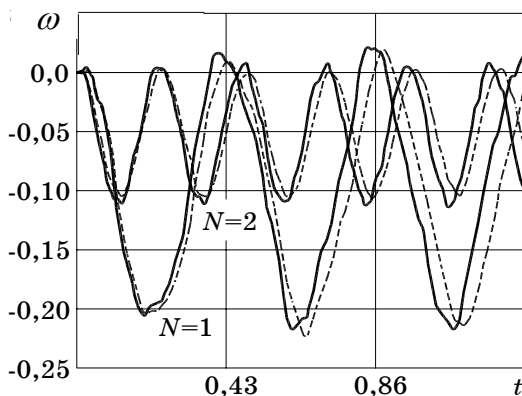
Электрическая нагрузка задавалась функцией Хевисайда – $V_0(t) = H(t)$. Результаты вычисления прогибов пластин w , как функции времени в точке $(R_0/2; \pi/2N)$ при одном ($N=1$) и двух ($N=2$) диаметральных разрезах токопроводящего покрытия представлены на рисунке соответствующими сплошными кривыми. Точность расчетов контролировалась варьированием количества удерживаемых членов в рядах (4) и (14), а также длиной отрезков разбиения временного интервала для реализации метода квадратурных формул. Указанные кривые получены при удержании первых 10 членов рядов и шаге по времени $0,43/60$ ($0,43 \sim 2\pi/\lambda_{1,1}^2$ – период наиболее энергоемкой (1; 1)-ой моды собственных колебаний пластины).

Из анализа кривых следует, что для принятой конфигурации электрического сигнала пластина совершает колебания относительно статического деформированного состояния с частотой, близкой к $2\pi/0,43$. Проведенные численные эксперименты показали также, что при шарнирном закреплении пластины слагаемым \bar{w} в решении (3) можно пренебречь (различие между максимальными значениями перемещений не превышает 1%). В результате, прогибы пластины рассматриваемого конструктивного исполнения при ее электрическом возбуждении с достаточной степенью точности могут быть описаны формулой

$$w(r, \theta, t) = \int_0^t V_0(\tau) S(r, \theta, t - \tau) d\tau,$$

где $S(r, \theta, t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{k,n} J_{kN}(\lambda_{k,n} r) \sin(\lambda_{k,n}^2 t) \sin(kN\theta)$.

Кроме изложенного численно-аналитического подхода аналогичная задача была решена численно с помощью специализированного конечно-элементного программного комплекса. Результаты этого расчета изображены штриховыми кривыми на рисунке. Из сопоставления сплошных и штриховых кривых можно сделать вывод об эффективности разработанного метода решения задачи, а используемая прикладная теория хорошо аппроксимирует перемещения, вычисленные по методу конечного элемента. Достоинством подхода является простота численной реализации и возможность эффекти-



вного слежения за точностью результатов.

В заключение отметим, что представленная методика может быть обобщена на случай как диаметрального, так и кольцевого секционирования токопроводящих покрытий.

РЕЗЮМЕ. Представлено чисельно-аналітичне розв'язання задачі про нестационарні коливання згину електрично навантаженої круглої пластини, складеної з електропружного з розрізними струмопровідними покриттями та пружного шарів. Динамічні процеси моделюються рівняннями лінійної теорії тонких оболонок, що базуються на узагальнених гіпотезах Кірхгофа-Лява. Для пластини метал-п'єзокераміка виконані розрахунки прогинів при дії ступінчастого навантаження, які порівняні з результатами скінченно-елементного аналізу.

Ключові слова: електропружна пластина, нестационарні невісесиметричні коливання, електричне збудження, інтегральне перетворення Лапласа

SUMMARY. The numerically-analytical solution of the problem of nonstationary vibration of electrically loaded round plate composed from electroelastic layer with sectioned current-carrying coverings and elastic layer is presented. Dynamic processes are modelled by equations of linear theory of thin plates based on Kirchhoff-Love generalized hypotheses. For plate "metal-piezoceramic" calculations of deflections are executed at the action of step load which are compared with the results of finite element analysis.

Key words: electroelastic plate, nonstationary asymmetric vibration, electric excitation, Laplace integral transform

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 199 с.
2. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 524 с.
3. Канев Ф.Ю., Лукин В.П. Адаптивная оптика. Численные и экспериментальные исследования. – Томск: Изд-во Ин-та оптики атмосферы СО РАН, 2005. – 250 с.
4. Карнаухова В.Г., Карнаухова Т.В. Демпфирование резонансных изгибных колебаний гибкой шарнирно-опертой вязкоупругой круглой пластины при совместном использовании сенсоров и актуаторов // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 125–131.
5. Гузь А.Н., Кубенко В.Д. Методы расчета оболочек. Т. 5. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. – К.: Наук. думка, 1982. – 400 с.
6. Янчевский И.В. Нестационарные колебания круглого асимметричного биморфа при электрическом нагружении // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2010. – Вып. 2. – С. 101–105.
7. Saleh N. R., Bahrami M.N., KargarNovin M.H. Vibration analysis of a variable thickness isotropic Kirchhoff annular plate covered with piezoelectric layers using modified wave method // Austr. J. Basic Appl. Sci. – 2011. – Vol. 5 (8), Iss. 4. – P. 1172–1184.
8. Wang L., Qin L., Wang G., Dong T. Analyses for radial vibration of piezoceramic disc stack // Ferroelectrics. – 2011. – Vol. 413. – P. 443–451.

Институт механики НАНУ, г. Киев

Поступила 30.03.2012

УДК 539.3

И. Ю. ХОМА, д-р физ.-мат. наук,
О. Г. ДАШКО, канд. физ.-мат. наук

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ПОЛОГОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

Дано решение задачи о напряженном состоянии пологой трансверсально изотропной сферической оболочки с эллиптическим цилиндрическим отверстием, на поверхности которого заданы поперечные касательные напряжения. В основу решения задачи положен метод разложения в ряд по полиномам Лежандра от координаты толщины в сочетании с методом возмущения формы границы.

Ключевые слова: трансверсально изотропная сферическая оболочка, эллиптическое цилиндрическое отверстие, концентрация напряжений.

Для определения напряженно-деформированного состояния нетонких трансверсально изотропных сферических оболочек с криволинейными отверстиями в работах [3,4] предложено использовать совместно апробированные два известных метода – метод разложения по толщине с применением полиномов Лежандра [1] и метод возмущения формы границы [2]. Приведены соответствующие уравнения и рекуррентные соотношения, необходимые для решения поставленных задач в произвольном приближении. На основании полученных равенств в данной работе рассматривается задача о напряженном состоянии пологой трансверсально изотропной сферической оболочки с отверстием в форме эллиптического цилиндра, на поверхности которого заданы поперечные касательные напряжения.

Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим трансверсально изотропную сферическую оболочку постоянной толщины $2h$ ($h = const$) с радиусом срединной поверхности S равным R . Предположим, что оболочка отнесена к ортогональной криволинейной системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$), нормально связанной с поверхностью S . При этом будем считать, что x_α ($\alpha = 1, 2$) образуют на S изометрическую систему координат, а x_3 изменяется на отрезке $[-h, h]$. Оболочка находится под действием постоянного внутреннего давления интенсивности q ($q = const$).

Представим, следуя [1], компоненты вектора перемещений u_j и тензора напряжений σ_{ij} в виде конечного ряда Фурье по полиномам Лежандра $P_k(\xi)$, т.е.

$$\{u_j(x_1, x_2, x_3), \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)\} = \sum_{k=0}^N \{u_j^{(k)}(x), \sigma_{ij}^{(k)}(x)\} P_k(\xi), \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2) \in S$, $\xi = x_3/h$, $u_j^{(k)}(x)$, $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$ – коэффициенты разложе-

ний, именуемые ниже моментами (номер момента соответствует порядку полинома Лежандра), N – натуральное число, которое примем четным, $N = 2n$ ($n = 0, 1, \dots < \infty$).

Относительно коэффициентов разложений, как функций двух независимых переменных, получаем систему дифференциальных уравнений, общее решение которой выражается формулами [6]

$$\begin{aligned} c_{66}u_+^{(k)} &= h \sum_{m=1}^{2(2n+1)} a_m^{(k)} \partial_{\bar{z}} V_m + 2h \sum_{s=1}^{2n+1} b_s^{(k)} \partial_{\bar{z}} W_s; \\ c_{66}u_3^{(k)} &= \eta_3^{(k)} p h + \sum_{m=1}^{2(2n+1)} c_m^{(k)} V_m \quad (k = \overline{0, N}). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $2\partial_{\bar{z}} = \partial/\partial x_1 + \partial/\partial x_2$, $p = qR/2$, $\eta_3^{(k)}$, $a_m^{(k)}$, $c_m^{(k)}$, $b_s^{(k)}$ – постоянные, V_m и W_s – метагармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\Delta V_m - k_m h^{-2} V_m = 0, \quad \Delta W_s - \lambda_s h^{-2} W_s = 0; \quad (3)$$

Δ – двумерный оператор Лапласа; k_m и λ_s – параметры, определяемые корнями соответствующих характеристических уравнений.

Введем в области S полярную систему координат (r, θ) и воспользуемся формулами преобразования компонент тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(k)}$. Тогда соотношения упругости [6] с учетом формул (2) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(k)} - 2i\sigma_{r\theta}^{(k)} &= 4he^{2i\theta} \left(\sum_{m=1}^{2(2n+1)} a_m^{(k)} \partial_z^2 V_m - i \sum_{s=1}^{2n+1} b_s^{(k)} \partial_z^2 W_s \right); \\ \sigma_{rr}^{(k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(k)} &= \gamma_k p + 2h^{-1} \sum_{m=1}^{2(2n+1)} d_m^{(k)} V_m \quad (k = \overline{0, N}); \\ \sigma_{r3}^{(k)} - i\sigma_{\theta 3}^{(k)} &= 2e^{i\theta} \left(\sum_{m=1}^{2(2n+1)} p_m^{(k)} \partial_z V_m - i \sum_{s=1}^{2n+1} q_s^{(k)} \partial_z W_s \right), \end{aligned} \quad (4)$$

в котором γ_k , $d_m^{(k)}$, $p_m^{(k)}$, $q_s^{(k)}$ – безразмерные константы. Если в (4) заменить операторы дифференцирования $2\partial_z = e^{-i\theta} (\partial/\partial r - ir^{-1} \partial/\partial \theta)$ и разделить вещественную и мнимую части, то получим явные выражения для моментов напряжений в координатной форме. Отсюда на контуре L_0 кругового отверстия радиуса r_0 получаем следующие граничные условия

$$\sigma_{rj}^{(k)} \Big|_{r=r_0} = \tilde{\sigma}_{rj}^{(k)} \quad (j = r, \theta, 3; \quad k = \overline{0, N}), \quad (5)$$

где $\tilde{\sigma}_{rj}^{(k)}$ – моменты заданных на L_0 функций и определяются по формуле

$$\tilde{\sigma}_{rj}^{(k)} = \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{h} \int_{-h}^h \tilde{\sigma}_{rj} P_k(\xi) dx_3. \quad (6)$$

Аналитическая структура метагармонических функций V_m зависит от значений корней k_m характеристического уравнения, которые могут быть: вещественными отрицательными

$$V_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(1)} Y_n(\rho x_1) e^{in\theta} \quad (m = 1), \quad (7)$$

вещественными положительными

$$V_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(m)} K_n(\rho x_m) e^{in\theta} \quad (m \in [2, 2(p+1)]) \quad (8)$$

и комплексно-сопряженными

$$V_{2m+1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(2m+1)} H_n^{(1)}(\rho x_{2m+1}) e^{in\theta},$$

$$V_{2m+2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n^{(2m+1)} H_n^{(2)}(\rho x_{2m+2}) e^{in\theta} \quad (m \in [p+1, 2n]). \quad (9)$$

Здесь $Y_n(\rho x_1)$, $K_n(\rho x_m)$, $H_n^{(1)}(\rho x_{2m+1})$, $H_n^{(2)}(\rho x_{2m+2})$ – цилиндрические функции Бесселя и Ханкеля первого и второго рода, $\rho = r/r_0$, $x_1 = r_0 h^{-1} \sqrt{-k_1}$, $x_m = r_0 h^{-1} \sqrt{k_m}$ ($m \in [2, 2(p+1)]$), $x_{2m+1} = r_0 h^{-1} \sqrt{-k_{2m+1}}$, $x_{2m+2} = \bar{x}_{2m+1}$ ($m \in [p+1, 2n]$), $A_n^{(1)}$, $B_n^{(m)}$, $C_n^{(2m+1)}$, $D_n^{(2m+1)}$ – постоянные.

Что касается характеристического уравнения для метагармонических функций W_s , то оно имеет вещественные положительные и отрицательные корни, поэтому

$$W_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_n^{(1)} Y_n(\rho y_1) e^{in\theta};$$

$$W_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{B}_n^{(s)} K_n(\rho y_s) e^{in\theta} \quad (s \in [2, 2n+1]), \quad (10)$$

где $y_1 = r_0 h^{-1} \sqrt{-\lambda_1}$, $y_s = r_0 h^{-1} \sqrt{\lambda_s}$.

С использованием приведенного решения рассмотрим задачу о напряженном состоянии полой трансверсально-изотропной сферической оболочки с некруговым отверстием, контур L которого на срединной поверхности S незначительно отличается от кругового контура L_0 радиуса r_0 . Воспользуемся приближенным методом возмущения формы границы, предложенным в работе [2] применительно к определению концентрации напряжений около криволинейных отверстий в тонких оболочках. Будем считать, что гладкий криволинейный контур L описывается уравнением

$$x = \rho \cos \vartheta + \varepsilon \rho^{-m} \cos m\vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta - \varepsilon \rho^{-m} \sin m\vartheta. \quad (11)$$

Здесь $x = x_1/r_0$, $y = x_2/r_0$ – безразмерные декартовы координаты; ρ , ϑ – ортогональные криволинейные координаты; ε и m – параметры, характеризующие форму отверстия.

Уравнение (11) в комплексной форме записывается таким образом

$$x + iy = \omega(\zeta) = \zeta + \varepsilon f(\zeta) = re^{i\theta}, \quad (12)$$

где $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$, $f(\zeta) = \zeta^{-m}$. Для эллиптического отверстия функция $f(\zeta)$ и параметры принимают вид [5]

$$f(\zeta) = \zeta^{-1}, \quad r_0 = \frac{a+b}{2}, \quad \varepsilon = \frac{a-b}{a+b}. \quad (13)$$

Здесь a и b – полуоси эллипса.

Поскольку система координат (ρ, ϑ, ξ) повернута на угол β относительно (r, θ, x_3) вокруг общей оси $\xi = h^{-1}x_3$ и в обеих системах имеют место разложения (1), то по известным формулам преобразования компонент тензора напряжений в области S будем иметь соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(k)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(k)} - 2i\sigma_{\rho\vartheta}^{(k)} &= e^{2i\beta} \left(\sigma_{rr}^{(k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(k)} - 2i\sigma_{r\theta}^{(k)} \right), \\ \sigma_{\rho\rho}^{(k)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(k)} &= \sigma_{rr}^{(k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(k)} \quad (k = \overline{0, N}), \\ \sigma_{\rho\xi}^{(k)} - i\sigma_{\vartheta\xi}^{(k)} &= e^{i\beta} \left(\sigma_{r3}^{(k)} - i\sigma_{\theta3}^{(k)} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

в которых $\sigma_{i'j'}^{(k)} = \sigma_{i'j'}^{(k)}(\rho, \vartheta)$ ($i', j' = \rho, \vartheta, \xi$), $\sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)}(r, \theta)$ ($i, j = r, \theta, 3$). Связь между переменными r, θ, x_3 и ρ, ϑ, ξ , согласно (11), осуществляется по формулам

$$r = |\omega(\zeta)|, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \omega(\zeta)}{\operatorname{Re} \omega(\zeta)}, \quad e^{i\beta} = \frac{\zeta}{|\zeta|} \cdot \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} \cdot \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{|\omega(\zeta)|}. \quad (15)$$

В криволинейной системе координат (ρ, ϑ, ξ) на основании аналогичных (4) соотношений формулируются (как и для кругового отверстия) граничные условия. При заданных на контуре L ($\rho = 1$) моментах напряжений $\tilde{\sigma}_{pj'}^{(k)}$ ($j' = \rho, \vartheta, \xi$) имеем

$$\sigma_{pj'}^{(k)}(\rho, \vartheta) \Big|_{\rho=1} = \tilde{\sigma}_{pj'}^{(k)}(\vartheta) \quad (j' = \rho, \vartheta, \xi). \quad (16)$$

Как следует из выражений (15), основные уравнения (3) в переменных ρ, ϑ являются достаточно сложными, и получить их точное аналитическое решение не представляется возможным. Поэтому предлагается искать решение задачи в виде рядов по положительным степеням малого параметра ε , т.е.

$$u_{j'}^{(k)}(\rho, \vartheta) = \sum_{(\tau)} \varepsilon^\tau u_{j'}^{(k, \tau)}(\rho, \vartheta), \quad \sigma_{i'j'}^{(k)}(\rho, \vartheta) = \sum_{(\tau)} \varepsilon^\tau \sigma_{i'j'}^{(k, \tau)}(\rho, \vartheta). \quad (17)$$

Согласно (15), экспоненты $e^{i\beta}$ и $e^{2i\beta}$ определяются формулами

$$\begin{aligned} e^{i\beta} &= 1 + i\varepsilon q_1(\rho, \vartheta) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[-q_1^2(\rho, \vartheta) + 2iq_2(\rho, \vartheta) \right] + \dots \\ e^{2i\beta} &= 1 + 2i\varepsilon q_1(\rho, \vartheta) + 2\varepsilon^2 \left[-q_1^2(\rho, \vartheta) + 2iq_2(\rho, \vartheta) \right] + \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

а произвольная скалярная функция $\phi^{(k)}(r, \theta)$ представляется таким образом

$$\phi^{(k)}(r, \theta) = \sum_{(p)} \varepsilon^p \frac{1}{p!} L_p \phi^{(k)}(\rho, \vartheta), \quad (19)$$

где L_p – операторы вида

$$\begin{aligned} L_0 &= 1, \quad L_1 = \frac{\cos(m+1)\vartheta}{\rho^m} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin(m+1)\vartheta}{\rho^{m+1}} \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \\ L_2 &= \frac{1}{2\rho^{2m}} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \cos 2(m+1)\vartheta \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) - \sin 2(m+1)\vartheta \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

Функции $q_1(\rho, \vartheta)$ и $q_2(\rho, \vartheta)$ имеют вид

$$\begin{aligned} q_1(\rho, \vartheta) &= \frac{m+1}{\rho^{m+1}} \sin(m+1)\vartheta, \\ q_2(\rho, \vartheta) &= \frac{m^2-1}{2\rho^{2(m+1)}} \sin 2(m+1)\vartheta. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставим соответствующие ряды (17), (19), совместно с разложением (18), в формулы преобразования (14) и, приравнявая выражения при одинаковых степенях параметра ε , получим для определения компонентов $(k, 1)$ -го приближения следующие соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(k,1)} &= \sigma_{rr}^{(k,1)} + L_1 \sigma_{rr}^{(k,0)} + 2q_1 \sigma_{r\theta}^{(k,0)}, \\ \sigma_{\rho\xi}^{(k,1)} &= \sigma_{r3}^{(k,1)} + L_1 \sigma_{r3}^{(k,0)} + q_1 \sigma_{\theta3}^{(k,0)}, \\ \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(k,1)} &= \sigma_{\theta\theta}^{(k,1)} + L_1 \sigma_{\theta\theta}^{(k,0)} - 2q_1 \sigma_{r\theta}^{(k,0)}, \\ \sigma_{\vartheta\xi}^{(k,1)} &= \sigma_{\theta3}^{(k,1)} + L_1 \sigma_{\theta3}^{(k,0)} - q_1 \sigma_{r3}^{(k,0)}, \\ \sigma_{\rho\vartheta}^{(k,1)} &= \sigma_{r\theta}^{(k,1)} + L_1 \sigma_{r\theta}^{(k,0)} - q_1 \left(\sigma_{r\theta}^{(k,0)} - \sigma_{\theta\theta}^{(k,0)} \right), \\ \sigma_{\xi\xi}^{(k,1)} &= \sigma_{33}^{(k,1)} + L_1 \sigma_{33}^{(k,0)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Согласно представлению (19), компоненты напряжений, фигурирующие в

правых частях соотношений (22), записываются на основании их аналогичных выражений (4) в переменных r, θ формальной заменой последних на переменные ρ, ϑ . Аналогичным способом определяются выражения для напряжений в последующих (k, τ) приближениях, где $\tau > 1$.

Результаты численных исследований. Численные исследования были проведены для пологой трансверсально изотропной сферической оболочки с эллиптическим цилиндрическим отверстием при действии постоянного внутреннего давления интенсивности q , которое передает на контур закрытого отверстия действие перерезывающей силы [5]. Расчеты проведены для двух приближений по малому параметру ε .

Граничные условия (5) в нулевом приближении имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(k,0)}(r)\Big|_{r=r_0} &= -\gamma_k p_0 \quad (k = \overline{0, N}), \\ \sigma_{r3}^{(0,0)}(r)\Big|_{r=r_0} &= -\frac{p_0 h r_0}{R}, \\ \sigma_{r3}^{(k,0)}(r)\Big|_{r=r_0} &= 0 \quad (k = \overline{1, N}),\end{aligned}\tag{23}$$

где $p_0 = qR/2h$. В первом приближении, согласно равенствам (22), они записываются таким образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho}^{(k,1)}(\rho, \vartheta)\Big|_{\rho=1} &= 0, \\ \sigma_{\rho\vartheta}^{(k,1)}(\rho, \vartheta)\Big|_{\rho=1} &= 0 \quad (k = \overline{0, N}), \\ \sigma_{\rho\xi}^{(0,1)}(\rho, \vartheta)\Big|_{\rho=1} &= \frac{2p_0 h r_0}{R} \cos 2\vartheta, \\ \sigma_{\rho\xi}^{(k,1)}(\rho, \vartheta)\Big|_{\rho=1} &= 0 \quad (k = \overline{1, N}).\end{aligned}\tag{24}$$

Исследования проведены для композитной оболочки с коэффициентами Пуассона $\nu = 0,25$, $\nu' = 0,25$ соответственно в плоскости изотропии и нормальной к ней плоскости при отношении модуля упругости к поперечному модулю сдвига $E/G' = 7,5$ и $h/R = 0,05$. В таблице приведены значения коэффициентов концентрации напряжений σ_{99}/p_0 для двух

Напряжения	a/b	b/h					
		2	3	4	2	3	4
σ_{99}/p_0		$E/E' = 0,75$			$E/E' = 1,25$		
	1,0	1,9995	2,5909	3,1627	2,0104	2,6064	3,1823
	1,1	2,8549	3,3129	3,9007	3,2119	3,4170	3,9324
	1,2	3,5618	3,9691	4,5846	4,0286	4,3380	4,6245
	1,3	4,1670	4,5709	5,2220	4,6561	4,8508	5,2676
	1,4	4,7007	5,1289	5,8208	5,1713	5,3147	5,8705
	1,5	5,1795	5,6490	6,3851	5,6297	5,7375	6,4379

значений E/E' в зависимости от отношения a/b полуосей эллипса и отношения b/h . Как и в прикладной теории [5], с увеличением a/b значения коэффициента концентрации возрастают.

РЕЗЮМЕ. Викладено розв'язок задачі про напружений стан пологої трансверсально ізотропної сферичної оболонки з еліптичним циліндричним отвором, на поверхні якого задано поперечні дотичні напруження. В основу розв'язку задачі покладено метод розкладу в ряд за поліномами Лежандра від координати товщини у поєднанні з методом збурення форми границі.

Ключові слова: трансверсально ізотропна сферична оболонка, еліптичний циліндричний отвір, концентрація напружень.

SUMMARY. The solution of a stress-state problem for a shallow transversely isotropic spherical shell with an elliptical cylindrical hole, surface of which is subjected to transverse tangential stresses, is presented. The solution is based on the method of expanding into series of Legendre polynomials through the thickness coordinate together with the boundary-shape perturbation method.

Key words: transversely isotropic spherical shell, elliptical cylindrical hole, stress concentration.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Векуа И.Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины // Тр. Тбилис. матем. ин-та. – 1965. – Вып. 30. – С. 3–103.
2. Гузь О.М. Про наближений метод визначення концентрації напружень навколо криволінійних отворів в оболонках // Прикладная механика. – 1962. – Т. 8, № 6. – С. 605–612.
3. Нemiш Ю.Н., Хома И.Ю. Определение напряженно-деформированного состояния нетонких трансверсально-изотропных сферических оболочек с криволинейными отверстиями // Прикладная механика. – 1998. – Т. 34, № 6. – С. 54–63.
4. Нemiш Ю.Н., Хома И.Ю., Чернопиский Д.И. Определение напряженно-деформированного состояния нетонких трансверсально-изотропных сферических оболочек с упруго подкрепленными криволинейными отверстиями // Прикладная механика. – 1999. – Т. 35, № 8. – С. 18–28.
5. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов В.Н. и др. – К. Наук. думка, 1980. – 686 с. (Методы расчета оболочек: В 5 т. Т. 1).
6. Хома И.Ю., Стрыгина О.А. Напряженное состояние пологой сферической оболочки с круговым отверстием, на поверхности которого заданы касательные напряжения // Теорет. и прикладная механика. – 2010. – № 1(47). – С. 62–68.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 27.03.2012

УДК 539.3:534.6

А. Я. ГРИГОРЕНКО, д-р физ.-мат. наук,
Т. Л. ЕФИМОВА, канд. физ.-мат. наук, Л. В. СОКОЛОВА

ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРА ИЗМЕНЕНИЯ ТОЛЩИНЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НА СПЕКТР ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

В рамках уточненной теории Миндлина дано численно-аналитическое решение задачи о свободных колебаниях цилиндрических оболочек переменной в окружном направлении толщины при различных граничных условиях. Для решения задачи предложен метод сплайн-коллокации совместно с методом дискретной ортогонализации. Описаны результаты расчетов для различных граничных условий на торцах и разных видов изменения толщины изотропных оболочек.

Ключевые слова: цилиндрические оболочки, переменная толщина, уточненная теория, задача на собственные значения, метод сплайн-коллокации, метод дискретной ортогонализации

Изучение динамических характеристик цилиндрических оболочек переменной толщины является важной научно-технической задачей. Однако число работ, посвященных ее решению незначительно [6-8].

В данном сообщении приводится решение задачи о свободных колебаниях цилиндрических оболочек с переменной толщиной в окружном направлении в рамках уточненной теории Тимошенко-Миндлина. Предложены несколько законов изменения толщины круговых цилиндрических оболочек в окружном направлении, удовлетворяющие требованию сохранения массы оболочки. Описаны результаты исследования спектра частот свободных колебаний незамкнутых оболочек, толщина которых изменяется по предложенным законам при шарнирном опирании и жестком закреплении торцов.

Постановка задачи. Рассматривается задача о свободных колебаниях незамкнутой цилиндрической оболочки переменной толщины. Для ее решения используется уточненная теория Тимошенко-Миндлина, которая базируется на гипотезе прямой линии. Суть этой гипотезы состоит в том, что прямолинейный элемент нормали исходной координатной поверхности при малых деформациях сохраняет свою длину и прямолинейность, но не остается перпендикулярным деформированной координатной поверхности. Согласно принятой гипотезе в системе координат $\theta\gamma z$ (γ – координата в направлении нормали срединной поверхности), связанной со срединной поверхностью оболочки, малые перемещения оболочки можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z) &= w(\theta, z), \\ u_\theta(r, \theta, z) &= v(\theta, z) + \gamma\Psi_\theta(\theta, z), \\ u_z(r, \theta, z) &= u(\theta, z) + \gamma\Psi_z(\theta, z), \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(z, \theta)$, $v(z, \theta)$, $w(z, \theta)$ – перемещения точек срединной поверхности,

$\Psi_z(z, \theta)$, $\Psi_\theta(z, \theta)$ – функции, характеризующие полный поворот нормали.

Геометрические соотношения будут такими:

$$\begin{aligned}
 e_\theta(r, \theta, z) &= \varepsilon_\theta(\theta, z) + \gamma\kappa_\theta(\theta, z), \\
 e_z(r, \theta, z) &= \varepsilon_z(\theta, z) + \gamma\kappa_z(\theta, z), \\
 e_{\theta z}(r, \theta, z) &= \varepsilon_{\theta z}(\theta, z) + 2\gamma\kappa_{\theta z}(\theta, z), \\
 e_{\gamma\theta}(r, \theta, z) &= \gamma_\theta(\theta, z), \quad e_{\gamma z}(r, \theta, z) = \gamma_z(\theta, z); \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}; \\
 \kappa_z &= \frac{\partial \Psi_z}{\partial z}, \quad \kappa_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R} w \right), \\
 2\kappa_{\theta z} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial z} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}; \\
 \gamma_\theta &= \Psi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{R} v, \quad \gamma_z = \Psi_z + \frac{\partial w}{\partial z},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где ε_θ , ε_z , $\varepsilon_{\theta z}$ – тангенциальные деформации срединной поверхности; κ_θ , κ_z , $\kappa_{\theta z}$ – компоненты изгибной деформации; γ_θ , γ_z – углы поворота нормали, обусловленные поперечными сдвигами.

Соотношения упругости для изотропных цилиндрических оболочек переменной толщины имеют вид

$$\begin{aligned}
 N_z &= C_{11}\varepsilon_z + C_{12}\varepsilon_\theta, \quad N_\theta = C_{12}\varepsilon_z + C_{22}\varepsilon_\theta, \\
 N_{z\theta} &= C_{66}\varepsilon_{\theta z} + 2D_{66} \frac{1}{R} \kappa_{\theta z}, \quad M_z = D_{11}\kappa_z + D_{12}\kappa_\theta, \\
 M_\theta &= D_{12}\kappa_z + D_{22}\kappa_\theta, \quad M_{\theta z} = M_{z\theta} = 2D_{66}\kappa_{\theta z}, \\
 Q_\theta &= K_2\gamma_\theta, \quad Q_z = K_1\gamma_z, \quad N_{\theta z} = C_{66}\varepsilon_{\theta z},
 \end{aligned} \tag{3}$$

в котором

$$\begin{aligned}
 K_1 &= 5h(\theta, z)G_{13}/6, \quad K_2 = 5h(\theta, z)G_{23}/6, \\
 B_{11} &= B_{22} = E / (1 - \nu^2), \quad B_{66} = E / 2(1 + \nu), \quad B_{12} = \nu E / (1 - \nu^2), \\
 C_{ij} &= B_{ij}h(\theta, z), \quad D_{ij} = B_{ij}h^3(\theta, z)/12;
 \end{aligned}$$

G_{13} , G_{23} – модули поперечных сдвигов; E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Уравнения движения элемента срединной поверхности будут такими:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{R} Q_\theta = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\
 \frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R} N_\theta &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta z}}{\partial \theta} - Q_z = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial t^2},
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial z} - Q_\theta = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial t^2}, \quad N_{z\theta} - \frac{1}{R} M_{\theta z} - N_{\theta z} = 0. \quad (4)$$

Здесь N_z , N_θ , $N_{z\theta}$, $N_{\theta z}$ и Q_z , Q_θ – тангенциальные и перерезывающие усилия; M_z , M_θ , $M_{z\theta}$, $M_{\theta z}$ – изгибающие и крутящие моменты; ρ и $h = h(\theta, z)$ – плотность материала и толщина оболочки.

Предполагая, что все точки оболочки совершают гармонические колебания с круговой частотой ω , учитывая представления

$$u(\theta, z, t) = \tilde{u}(\theta, z) e^{i\omega t}, \quad v(\theta, z, t) = \tilde{v}(\theta, z) e^{i\omega t},$$

$$w(\theta, z, t) = \tilde{w}(\theta, z) e^{i\omega t},$$

$$\Psi_\theta(\theta, z, t) = \tilde{\Psi}_\theta(\theta, z) e^{i\omega t}, \quad \Psi_z(\theta, z, t) = \tilde{\Psi}_z(\theta, z) e^{i\omega t}$$

(далее знак \sim опускается), уравнения движения можно переписать так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} + \rho h \omega^2 u &= 0, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{R} Q_\theta + \rho h \omega^2 v &= 0, \\ \frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R} N_\theta + \rho h \omega^2 w &= 0, \\ \frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta z}}{\partial \theta} - Q_z + \rho \omega^2 \frac{h^3}{12} \Psi_z &= 0, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial z} - Q_\theta + \rho \omega^2 \frac{h^3}{12} \Psi_\theta &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя соотношения (2)–(3) в (5), получаем разрешающую систему дифференциальных уравнений относительно функций $u(z, \theta)$, $v(z, \theta)$, $w(z, \theta)$, $\Psi_z(z, \theta)$, $\Psi_\theta(z, \theta)$ и их производных

$$\begin{aligned} L_i \left(u, \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \theta}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z}, \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial z}, v, \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial^2 v}{\partial^2 \theta}, \frac{\partial^2 v}{\partial^2 z}, \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial z}, \right. \\ \left. w, \frac{\partial w}{\partial \theta}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial^2 w}{\partial^2 \theta}, \frac{\partial^2 w}{\partial^2 z}, \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial z}, \Psi_\theta, \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta}, \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial z}, \frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial^2 \theta}, \frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial^2 z}, \right. \\ \left. \frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial \theta \partial z}, \Psi_z, \frac{\partial \Psi_z}{\partial \theta}, \frac{\partial \Psi_z}{\partial z}, \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial^2 \theta}, \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial^2 z}, \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial \theta \partial z}, \omega^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где L_i ($i = \overline{1, 5}$) – линейные операторы.

Добавляя к системе (6) граничные условия на контурах оболочки, получаем двумерную краевую задачу.

Методика решения. Для решения поставленной задачи используется и развивается численно-аналитическая методика, основанная на сведениях двумерной краевой задачи к одномерной методом сплайн-коллокации и

последующим ее решением методом дискретной ортогонализации с применением метода пошагового поиска [1-5].

Решение системы (6) будем искать в виде

$$\begin{aligned} u(z; \theta) &= \sum_{i=0}^N u_i(\theta) \varphi_{1i}(z), & v(z; \theta) &= \sum_{i=0}^N v_i(\theta) \varphi_{2i}(z), \\ w(z; \theta) &= \sum_{i=0}^N w_i(\theta) \varphi_{3i}(z), & \Psi_z(z; \theta) &= \sum_{i=0}^N \Psi_{zi}(\theta) \varphi_{4i}(z), \\ \Psi_\theta(z; \theta) &= \sum_{i=0}^N \Psi_{\theta i}(\theta) \varphi_{5i}(z), \end{aligned} \quad (7)$$

где $u_i(\theta)$, $v_i(\theta)$, $w_i(\theta)$, $\Psi_{\theta i}(\theta)$, $\Psi_{zi}(\theta)$ – функции переменной θ , $\varphi_{ji}(z)$ ($j=1, \dots, 5$, $i=0, \dots, N$) – линейные комбинации B -сплайнов третьей степени на равномерной сетке $\{\Delta: 0=z_0 < z_1 < \dots < z_N=L\}$ с учетом граничных условий при $z=0$ и $z=L$.

Систему дифференциальных уравнений (6) можно привести к виду

$$\bar{Y}' = A(\theta, \omega) \bar{Y}, \quad (8)$$

где $\bar{Y} = \{\bar{u}, \bar{u}', \bar{v}, \bar{v}', \bar{w}, \bar{w}', \bar{\Psi}_z, \bar{\Psi}'_z, \bar{\Psi}_\theta, \bar{\Psi}'_\theta\}^T$, $A(\theta, \omega)$ – квадратная матрица порядка $10(N+1) \times 10(N+1)$. Граничные условия запишутся так:

$$B_1 \bar{Y}(0) = \bar{0}, \quad B_2 \bar{Y}(\pi) = \bar{0}, \quad (9)$$

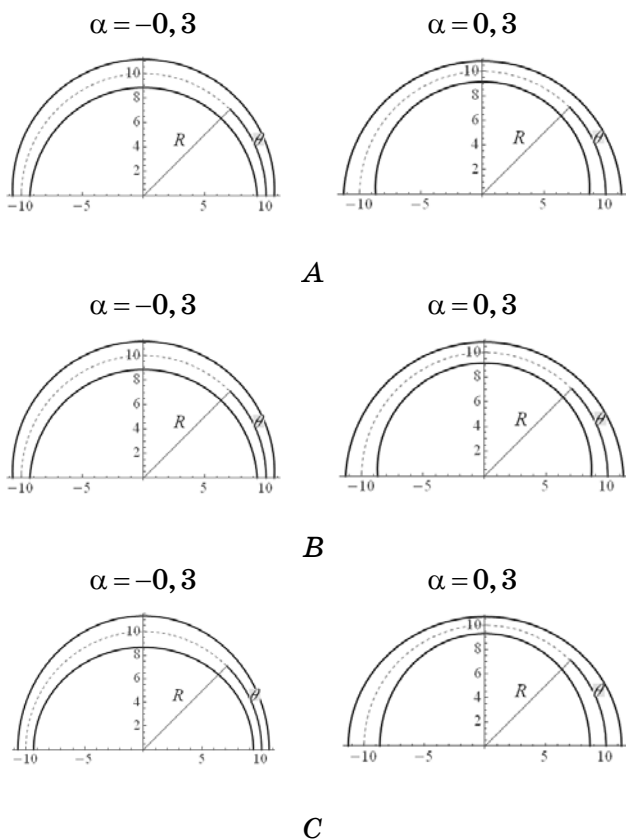
Здесь B_1 и B_2 – прямоугольные матрицы порядка $5(N+1) \times 10(N+1)$.

Краевая задача (8)–(9) на собственные значения решалась методом дискретной ортогонализации совместно с методом пошагового поиска.

Анализ результатов. При проведении исследований рассматривались оболочки, толщина которых изменяется по закону $H(\theta) = H_0(1 + \alpha \Phi(\theta))$ при различных $\Phi(\theta)$, обеспечивающих сохранение массы оболочки. На рисунке для $\alpha = -0,3$, $\alpha = 0,3$ представлены поперечные сечения оболочки для некоторых законов изменения толщины, а именно, когда $\Phi(\theta) = (\theta - \pi/2)/\pi$ (рис. А, линейный закон), $\Phi(\theta) = (6\theta^2/\pi^2 - 6\theta/\pi + 1)$ (рис. В, квадратичный закон), $\Phi(\theta) = \cos 2\theta$ (рис. С, тригонометрический закон).

Для оценки достоверности получаемых результатов проводилось их сравнение с данными вычислений частот колебаний по трехмерной теории, с возможным в данном случае представлением перемещений в виде $u_r = \bar{u}_r(r) \cos n\theta \sin k\pi z/L$, $u_z = \bar{u}_z(r) \cos n\theta \cos k\pi z/L$, $u_\theta = \bar{u}_\theta(r) \sin n\theta \sin k\pi z/L$ и последующим применением метода дискретной ортогонализации и пошагового поиска.

Рассматривалась замкнутая изотропная оболочка с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$ и геометрическими параметрами: длиной $L = 20$, радиусом $R = 10$ и постоянной толщиной $H_0 = 2$. Полученные значения безраз-



мерного параметра $\Omega_m = \omega_m H \sqrt{\rho/G}$ (m – номер частоты) представлены в табл. 1 (N – число точек коллокации).

Результаты вычислений имеют хорошее совпадение, что говорит о возможности применения представленной методики для решения задач данного класса.

Задача данного исследования состоит в изучении влияния характера изменения толщины оболочки в окружном направлении на спектр частот ее свободных колебаний при различных граничных условиях.

Для проведения расчетов рассматри-

валась незамкнутая изотропная оболочка с переменной толщиной, изменяющейся по законам $H(\theta) = H_0(1 + \alpha\Phi(\theta))$ при различных $\Phi(\theta)$, задающих, соответственно, линейный (А), квадратичный (В) и тригонометрический (С) законы изменения толщины. Геометрические параметры оболочки выбраны такими: длина $L=20$, радиус $R=10$ и $H_0=2$ при $0 \leq \theta \leq \pi$. Коэффициент Пуассона $\nu=0,3$. Вычислялись значения безразмерного

Таблица 1

Частота	Волнообразование	N				Трехмерная теория
		10	14	18	22	
Уточненная теория						
Ω_1	$n = 2, k = 1$	0,0708	0,0707	0,0707	0,0707	0,06964
Ω_2	$n = 3, k = 1$	0,0939	0,0939	0,0938	0,0938	0,09142
Ω_3	$n = 1, k = 1$	0,0987	0,0987	0,0987	0,0986	0,09899
Ω_4	$n = 1, k = 0$	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000	0,10017

параметра $\Omega_m = \omega_m H \sqrt{\rho/G}$ (m – номер частоты). Расчеты проводились при $N=18$, где N – число точек коллокации.

Задавались следующие граничные условия на криволинейных контурах $z = const$, $\theta = const$:

I. При $z=0$ и $z=L$ контур шарнирно опертый $\frac{\partial u}{\partial z} = v = w = \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} = \Psi_\theta = 0$, при $\theta=0$ и $\theta=\pi$ контур шарнирно опертый $u = \frac{\partial v}{\partial \theta} = w = \Psi_z = \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} = 0$.

II. При $z=0$ и $z=L$ контур жестко закреплен $u = v = w = \Psi_\theta = \Psi_z = 0$, при $\theta=0$ и $\theta=\pi$ контур жестко закреплен $u = v = w = \Psi_\theta = \Psi_z = 0$.

Здесь $u(z, \theta)$, $v(z, \theta)$, $w(z, \theta)$ – перемещения срединной поверхности оболочки, $\Psi_z(z, \theta)$, $\Psi_\theta(z, \theta)$ – функции, характеризующие полный поворот нормали.

В табл. 2 представлены значения первых частот колебаний рассмотренной оболочки при граничных условиях I, различных $\Phi(\theta)$ и значениях параметра $\alpha = 0, 3$. Приведено процентное отношение изменения полу-

Таблица 2

Частота	A			B		C	
	$\alpha = 0$	$\alpha = 0,3$	$\Delta, \%$	$\alpha = 0,3$	$\Delta, \%$	$\alpha = 0,3$	$\Delta, \%$
Ω_1	0,0707	0,0705	0,28%	0,0707	0,00%	0,0701	0,85%
Ω_2	0,0939	0,0935	0,43%	0,0929	1,06%	0,0918	2,25%
Ω_3	0,0987	0,0984	0,30%	0,1016	2,94%	0,1044	5,78%
Ω_4	0,1000	0,0999	0,10%	0,1091	9,22%	0,1159	15,9%

ченных частот к соответствующим частотам колебаний оболочки постоянной толщины.

В табл. 3 представлены результаты расчета свободных колебаний оболочки с аналогичными параметрами при $\alpha = -0, 3$

Таблица 3

Частота	A			B		C	
	$\alpha = 0$	$\alpha = 0,3$	$\Delta, \%$	$\alpha = 0,3$	$\Delta, \%$	$\alpha = 0,3$	$\Delta, \%$
Ω_1	0,0707	0,0705	0,28%	0,0702	0,70%	0,0701	0,85%
Ω_2	0,0939	0,0935	0,43%	0,0906	3,51%	0,0852	9,27%
Ω_3	0,0987	0,0984	0,30%	0,0930	5,78%	0,0905	8,31%
Ω_4	0,1000	0,0999	0,10%	0,0956	4,40%	0,0955	4,50%

В табл. 4, 5 представлены значения первых частот колебаний рассмотренной оболочки при граничных условиях II, различных $\Phi(\theta)$ и значениях параметра $\alpha = 0, 3$ и $\alpha = -0, 3$ соответственно.

Анализ данных, представленных в табл. 2–5 показывает, что влияние линейного закона (A) изменения толщины на частоты свободных ко-

Таблица 4

Частота	A			B		C	
	$\alpha = 0$	$\alpha = -0,3$	$\Delta, \%$	$\alpha = -0,3$	$\Delta, \%$	$\alpha = -0,3$	$\Delta, \%$
Ω_1	0,1087	0,1085	0,18%	0,1058	2,67%	0,1058	2,67%
Ω_2	0,1177	0,1173	0,34%	0,1188	0,93%	0,1196	1,61%
Ω_3	0,1684	0,1673	0,65%	0,1697	0,77%	0,1676	0,48%
Ω_4	0,1764	0,1758	0,34%	0,1780	0,91%	0,1749	0,85%

Таблица 5

Частота	A			B		C	
	$\alpha = 0$	$\alpha = -0,3$	$\Delta, \%$	$\alpha = -0,3$	$\Delta, \%$	$\alpha = -0,3$	$\Delta, \%$
Ω_1	0,1087	0,1085	0,18%	0,1090	0,28%	0,1098	1,01%
Ω_2	0,1177	0,1173	0,34%	0,1154	1,95%	0,1144	2,80%
Ω_3	0,1684	0,1673	0,65%	0,1615	4,10%	0,1664	1,19%
Ω_4	0,1764	0,1758	0,34%	0,1721	2,44%	0,1723	2,32%

значительно по сравнению с оболочками постоянной толщины независимо от граничных условий (максимальное уменьшение частот составляет 0,65% при жестком закреплении и $\alpha = 0,3$). Изменение параметра α с 0,3 на -0,3 не изменяет соответствующих частот.

Квадратичный закон (B) оказывает более существенное влияние на спектр частот свободных колебаний изотропных оболочек по сравнению с линейным законом (A). Так, для шарнирного опирания торцов при $\alpha = 0,3$ четвертая частота увеличивается на 9,22%, в то время как соответствующая частота при линейном законе практически не изменяется. При $\alpha = 0,3$ частоты в основном увеличиваются, а при $\alpha = -0,3$ уменьшаются по сравнению с соответствующими частотами колебаний оболочек постоянной толщины.

Влияние тригонометрического закона (C) на спектр частот колебаний изотропных оболочек самое значительное по сравнению с линейным и квадратичным законами при шарнирном опирании торцов. Четвертая частота увеличивается на 15,9% по сравнению с постоянной толщиной при граничных условиях I и $\alpha = 0,3$.

При жестком закреплении торцов (граничные условия II) изменения частот собственных колебаний мало отличаются для всех законов изменения толщины.

РЕЗЮМЕ. В рамках уточненої теорії Міндіна проведено чисельно-аналітичне розв'язання задачі про вільні коливання циліндричних оболонок змінної в круговому напрямку товщиною при різних граничних умовах. Для розв'язання задачі запропоновано метод сплайн-колокації в поєднанні з методом дискретної ортогоналізації. Представлено результати розрахунків для різних граничних умов на торцях та різних видів зміни товщини ізотропних оболонок.

Ключові слова: циліндричні оболонки, змінна товщина, уточнена теорія, задача на

власні значення, метод сплайн-колокації, метод дискретної ортогоналізації.

SUMMARY. Based on the Mindlin shell theory, this paper presents numerical solutions for the vibration of cylindrical shells with circumferentially varying thickness and the different boundary conditions. The approach is based on spline-approximation method and the method of discrete orthogonalization was proposed. The calculation results for different kinds of boundary conditions on the end-faces and variants shapes of cylinder thickness for isotropic cylindrical shells are presented.

Key words: cylindrical shells, variable thickness, refined formulation, eigenvalue problem, spline-collocation method, discrete orthogonalization method.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л. Применение метода сплайн-аппроксимации для решения задач об осесимметричных свободных колебаниях толстостенных ортотропных цилиндров // Прикладная механика. – 2008. – Т. 46, № 10. – С. 74–85.

2. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л., Соколова Л.В. Об одном подходе к исследованию свободных колебаний цилиндрических оболочек переменной в круговом направлении толщины в уточненной постановке // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2009. – Т. 52, № 3. – С. 103–115.

3. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л., Соколова Л.В. Свободные колебания круговых цилиндрических оболочек переменной толщины в уточненной постановке // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 111–117.

4. Григоренко О.Я., Ефимова Т.Л., Пузырьов С.В. Дослідження вільних коливань прямокутних ортотропних пластин лінійно змінної товщини // Мат. мет. та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49, № 3. – С. 153–161.

5. Grigorenko A.Ya., Efimova T.L. Spline-Approximation Method Applied to Solve Natural Vibration Problems for Rectangular Plates of Varying Thickness // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41, № 10. – P. 1161–1169.

6. Qatu M. S. Recent research advances in the dynamic behavior of shells: 1989-2000, Part 2: Homogeneous shells / M. S. Qatu // Appl. Mech. Rev. – 2002. – Vol. 55. – P. 415-434

7. Suzuki K., Leissa A.W., Exact solutions for the free vibration of open cylindrical shells with circumferentially varying curvature and thickness // J. Sound Vibration. – 1986. – Vol. 107, № 1. – P. 1–15.

8. Zhang L., Xiang Y., Exact solutions for vibration of stepped circular cylindrical shells, // J. Sound Vibration. – 2007. – Vol. 299. – P. 948–964.

*Институт механики НАН Украины, г.Киев,
Киевский национальный университет строительства
и архитектуры.*

Поступила 21.02.2012

УДК 539.3

Р. М. КУШНИР, д-р. физ.-мат. наук,
Т. Я. СОЛЯР, канд. физ.-мат. наук.

О МЕТОДИКЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ТЕЛЕ С ТРЕЩИНАМИ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Предложена методика определения переходных и установившихся напряжений, возникающих при распространении волн в теле с трещинами при продольном сдвиге. Методика базируется на использовании интегрального преобразования Лапласа, модифицированной формулы обращения Прудникова и метода граничных интегральных уравнений.

Ключевые слова: динамические напряжения, антиплоская деформация, система трещин, интегральное преобразование Лапласа, метод интегральных уравнений

В настоящее время наиболее полно разработаны методы исследования напряженно-деформированного состояния упругих тел с трещинами, которые применимы после некоторого промежутка времени прохождения волны через область их размещения. Менее исследованными остаются переходные напряжения, которые возникают в момент прохождения волны. Это связано с тем, что решение динамических задач теории упругости для тел с трещинами, как правило, проводится численными методами, а их применение к быстроизменяющимся во времени процессам усложнено.

Ниже предложена методика исследования динамических коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) при продольном сдвиге в теле, ослабленном системой прямолинейных трещин, к берегам которых приложены изменяющиеся со временем усилия, и находящимся под воздействием разного типа волн. Методика базируется на применении интегрального преобразования Лапласа и метода интегральных уравнений. Оригиналы напряжений определяются с помощью адаптированной к решению динамических задач формулы обращения Прудникова [2], которая дает возможность с высокой точностью определять динамические коэффициенты интенсивности напряжений. Заметим, что в [6] приведен алгоритм определения коэффициентов интенсивности напряжений для трещин, к берегам которых приложены изменяющиеся со временем напряжения. Другие подходы к решению динамических задач теории упругости рассмотрены в [3–5, 7–10].

Интегральные уравнения задачи и их решения. Отнесем цилиндрическое тело к декартовой системе координат так, чтобы ось Oz была параллельна к образующей. Будем считать, что тело ослаблено трещинами, которые в сечении $z=0$ размещены вдоль кривых L_j , $j=1, \dots, J$. Предположим, что на тело с положительного направления оси Oy под углом φ к оси Ox распространяется волна, которая определяется

перемещениями $w_i = v(y_\varphi + c_2\tau)$, где τ – время, c_2 – скорость распространения поперечной волны, $y_\varphi = x \cos \varphi + y \sin \varphi$, v – известная функция. Считаем также, что к трещинам приложены изменяющиеся со временем сдвигающие усилия S , которые одинаковы на противоположных берегах.

Представим перемещения в теле в виде $w = w_i + w_e$, где w_e – функция, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta w_e - \frac{\partial^2 w_e}{\partial t^2} = 0; \quad (1)$$

Δ – оператор Лапласа, $t = c_2\tau$. Граничное условие для этой функции на берегах трещины имеет вид

$$\frac{\partial w_e}{\partial n} = [S(x, y, t) - T_i(x, y, t)]/G \quad (x, y) \in L, \quad L = L_1 + L_2 + \dots + L_J, \quad (2)$$

в котором n – нормаль к трещине, $T_i = \cos(\varphi - \gamma)T(y_\varphi + t)H(y_\varphi + t)$, γ – угол между нормалью к кривой L и осью Ox , $H(x)$ – функция Хевисайда, G – модуль сдвига. При этом $T(x)H(x) = Gv'(x)$.

Кроме того, для задачи (1), (2) принимаются нулевые начальные условия для перемещений и напряжений.

Применим к уравнению (1) и условию (2) преобразование Лапласа по переменной t . В результате для определения трансформанты Лапласа функции w_e , которую обозначим через W , получим уравнение

$$(\Delta - s^2)W = 0, \quad (3)$$

при следующем условии на берегах трещины:

$$\frac{\partial W^+}{\partial n} = \frac{\partial W^-}{\partial n} = (\tilde{S} - \tilde{T}_i)/G \quad (x, y) \in L, \quad (4)$$

где $W = \int_0^\infty w_e e^{-st} dt$, \tilde{S} и \tilde{T}_i – трансформанты Лапласа функций S и T_i ,

причем $\tilde{T}_i = \cos(\varphi - \gamma) \exp(y_\varphi s) \tilde{T}(s)$.

Следуя [1], общее решение уравнения (3) запишем в виде

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L f \frac{\partial K_0(sr)}{\partial n_0} ds_0, \quad (5)$$

где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$; $f = -(W^+ - W^-)$; $K_0(sr)$ – функция Макдональда; $\frac{\partial}{\partial n_0}$ – производная вдоль нормали к L в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Используя соотношение (5), найдем трансформанты Лапласа напря-

жений на левом берегу трещины, относительно ее обхода, и приравняем их к заданным. В результате получаем интегральное уравнение относительно неизвестной функции f вида

$$\int_L f \frac{\partial^2 K_0(sr)}{\partial n_M \partial n_0} ds_0 = p(x, y) \quad (x, y) \in L, \quad (6)$$

где $p = 2\pi(\tilde{S} - \tilde{T}_i)/G$, $\frac{\partial}{\partial n_M}$ – производная вдоль нормали к контуру L в точке $M(x, y)$. Здесь учтено, что нормальная производная от потенциала двойного слоя непрерывна при переходе через контур интегрирования [1].

Поскольку уравнение (6) гиперсингулярное (его ядром является производная от ядра Коши), то при непосредственном его решении возникают трудности. Поэтому сведем это уравнение к сингулярному. С этой целью, используя результаты [1], запишем

$$\frac{\partial^2 K_0(sr)}{\partial n_M \partial n_0} = \frac{\partial A(x, y, x_0, y_0)}{\partial s_0} + B(x, y, x_0, y_0),$$

где $A = s \frac{dr}{ds_M} [K_1(sr) + srK_0(sr)]$, $B = s^3 r K_1(sr) \frac{dr}{ds_M} \frac{dr}{ds_0}$, причем функция

$A(x, y, x_0, y_0)$ состоит из суммы ядра Коши и непрерывной функции, а $B(x, y, x_0, y_0)$ – непрерывная функция.

Интегрируя по частям уравнение (6), получаем уравнение

$$\int_L (-f'A + fB) ds_0 = p(x, y), \quad (7)$$

в котором $f' = df/ds_0$.

Численный алгоритм решения этого уравнения изложим более подробно для одной трещины. Используем для нее параметрическое представление $x + iy = \varphi(\xi)$, $-1 < \xi < 1$. Тогда уравнение (7) примет вид

$$\int_{-1}^1 [F'(\eta) L_1(\xi, \eta) + F(\eta) M_1(\xi, \eta)] d\eta = P(\xi),$$

где

$$F(\eta) = f|_{x_0+iy_0=\varphi(\eta)}, \quad F'(\eta) = dF/d\eta, \quad P(\xi) = p|_{x+iy=\varphi(\xi)},$$

$$L_1(\xi, \eta) = -A|_{x+iy=\varphi(\xi), x_0+iy_0=\varphi(\eta)},$$

$$M_1(\xi, \eta) = B|_{x+iy=\varphi(\xi), x_0+iy_0=\varphi(\eta)} ds_0/d\eta.$$

Интегрируя это уравнение по частям, получим

$$\int_{-1}^1 F'(\eta) L(\xi, \eta) d\eta = P(\xi).$$

Здесь $L(\xi, \eta) = L_1(\xi, \eta) - L_2(\xi, \eta)$, $L_2(\xi, \eta) = \int_{-1}^{\eta} M_1(\xi, \theta) d\theta$.

Положим $F'(\eta) = U(\eta) / \sqrt{1 - \eta^2}$, где $U(\eta)$ – неизвестная гладкая функция. Тогда с методом механических квадратур, базирующимся на квадратурных формулах Лобатто, получаем систему уравнений

$$\sum_{j=1}^N C_j L(\xi_i, \eta_j) U_j = P_i \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (8)$$

в которой $\eta_j = -\cos(\pi_N(j-1))$ ($j = 1, \dots, N$); $\pi_N = \pi/(N-1)$; $C_j = \pi_N$ при $j \neq 1$ и $j \neq N$; $C_1 = C_N = 0,5\pi_N$; N – выбранное количество узловых точек; $\xi_i = \cos(\pi_N(i-0,5))$ ($i = 1, \dots, N-1$).

Дополнительное условие (однозначности перемещений) имеет вид

$$\sum_{i=1}^N C_i U_i = 0.$$

Функцию $L_2(\xi, \eta_j)$ удобно вычислять по рекуррентным формулам

$$L_2(\xi, \eta_{j+1}) = L_2(\xi, \eta_j) + \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} M_1(\xi, \theta) d\theta,$$

в которых $j = 1, \dots, N-1$, $L_2(\xi, \eta_1) = 0$. Трансформанта выражения для КИН определяется формулой вида $k_3^\pm = \pm \frac{U(\pm 1)}{2\sqrt{|\varphi'(\pm 1)|}}$.

Предложенный алгоритм дает возможность определять трансформанту Лапласа от КИН при произвольно заданном комплексном значении параметра преобразования s . Обратное преобразование Лапласа найдем, используя численно-аналитическую формулу обращения, базирующейся на формуле Прудникова и адаптированной к решению динамических задач теории упругости. Пусть известна трансформанта Лапласа $\tilde{f}(s)$ от функции $f(t)$. Примем также, что известно значение оригинала и его производной в начальный момент времени $f(0)$, $f'(0)$. Тогда при $0 < t < l$ выполняется формула [2]

$$f(t) \cong \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{F}_n \exp(s_n t) + \frac{1}{1 - \exp(-c)} \left[f(0) + l f'(0) \left(\frac{t}{l} + \frac{1}{\exp(c) - 1} \right) \right] - R(t), \quad (9)$$

где $\tilde{F}_n = \tilde{f}(s_n) - \left(\frac{f(0)}{s_n} + \frac{f'(0)}{s_n^2} \right)$, $s_n = \frac{c + 2\pi n i}{l}$; l и c – постоянные, которые удовлетворяют условиям $l > 0$, $\text{Re}(c) > 0$; $R(t)$ – остаточный член фор-

мулы, имеющий порядок $O(e^{-c})$.

Выбор параметров c и l , которые дают возможность минимизировать погрешности формулы обращения, проводится согласно приведенным в [2] рекомендациям. Предложено также для некоторых случаев, а именно, когда известны асимптотические значения оригинала при больших значениях аргумента, учитывать остаточный член формулы. Однако для рассматриваемого случая нахождение асимптотических значений оригинала достаточно сложная задача. Поэтому в данной работе избран следующий алгоритм: определяли оригинал по формуле (9) при конкретно заданных значениях параметров c , l , обозначали полученное таким образом значение оригинала через $f_1(t)$, далее, используя формулу (9), в которой заменили значение c на $c + \pi i$, опять вычисляли его значение $f_2(t)$. Показано, что функция $f(t) = f_3(t)$, где $f_3(t) = (f_1(t) + f_2(t))/2$, определяется по формуле (9) с остаточным членом порядка $O(e^{-2c})$, т.е. при выборе постоянной $c > 3$ остаточным членом можно пренебречь. Легко показать, что функция $f_3(t)$ при $0 < t < l$ может быть вычислена непосредственно по формуле (9), в которой c и l увеличены вдвое.

Результаты расчета. Пусть тело ослаблено прямолинейной трещиной по оси Ox : $x \in [-a, a]$, на тело воздействует гармоническая волна. В этом случае функцию T запишем в виде $T(t) = \tau_S \sin(\omega t/c_2)$, где ω – частота, τ_S – заданная постоянная. Преобразование Лапласа для этой функции определяется по формуле $\tilde{T} = \tau_S \omega' / (s^2 + \omega'^2)$, где $\omega' = \omega/c_2$.

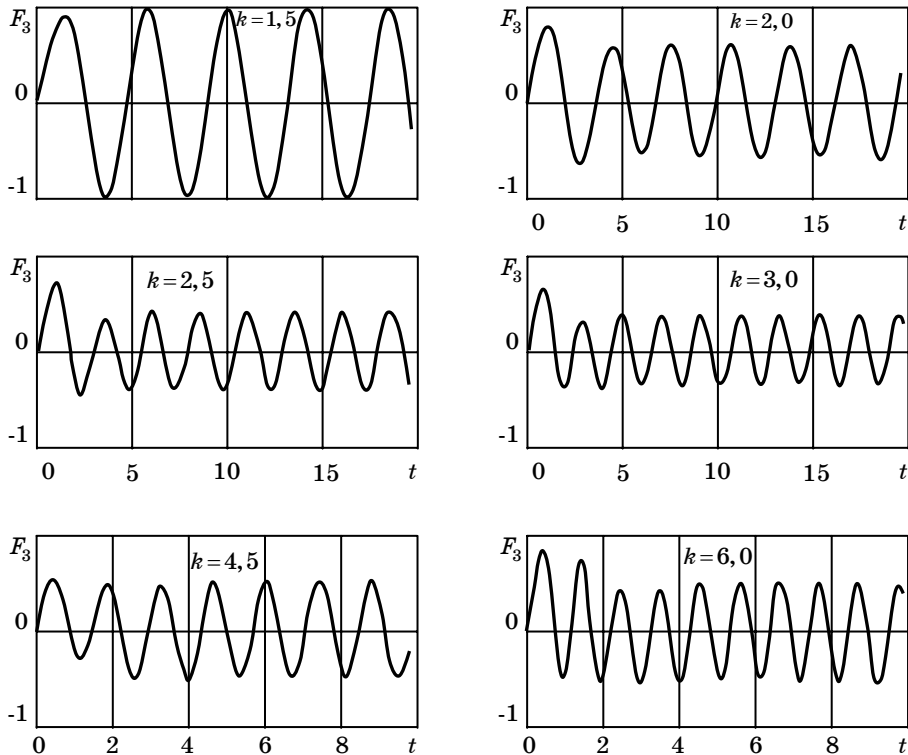
Решение сформулированной выше задачи для установившихся колебаний (при больших значениях времени) в зависимости от волнового числа $k = \omega a/c_2$, приведено в [5]. Полученные при этом значения КИН для рассматриваемого случая практически совпадают с таковыми, которые определены с использованием предложенной методики при $s = i\omega/c_2$.

Были вычислены относительные амплитуды колебаний КИН $F_3 = K_{III} / (\tau_s \sqrt{a})$ для ряда значений частоты ω при $c = 4$ и $c = 4 + \pi i$, которые обозначим через $F_3^{(1)}$ и $F_3^{(2)}$. Полученные значения и их среднее $F_3^{(3)} = (F_3^{(1)} + F_3^{(2)})/2$ при большом относительном времени (при котором процесс колебаний КИН близок к установившемуся) даны в таблице. В последнем столбце таблицы приведены значения амплитуд КИН при установившихся колебаниях.

k	Динамическая задача			Колебания
	$F_3^{(1)}$	$F_3^{(2)}$	$F_3^{(3)}$	
0,90	1,315	1,231	1,273	1,273
0,95	1,342	1,217	1,279	1,277
1,00	1,299	1,248	1,274	1,274
1,05	1,229	1,300	1,265	1,266
1,10	1,19	1,315	1,250	1,250
1,15	1,196	1,261	1,228	1,230
1,50	0,960	0,944	0,952	0,954
2,00	0,548	0,584	0,566	0,566
2,50	0,394	0,358	0,376	0,375
3,00	0,328	0,360	0,344	0,344
3,50	0,420	0,398	0,409	0,412
4,00	0,490	0,496	0,493	0,495

Из приведенных в таблице результатов следует, что непосредственное использование формулы обращения (9) при $c = 4$ и $c = 4 + \pi i$ дает возможность с достаточной для практики точностью определять КИН. Найденные средние значения $F_3^{(3)}$ практически совпадают со значениями КИН при установившихся колебаниях. Таким образом, численный алгоритм, который основывается на нахождении среднего значения с помощью формулы обращения (9), дает возможность с высокой точностью определять динамические напряжения в теле с трещиной.

Зависимости относительных КИН от временного параметра $t = c_2\tau/a$ для некоторых значений волнового числа k приведены на рисунке, где сверху указаны и значения k .



Из приведенных на рисунке графиков видно, что значения КИН достаточно быстро выходят на установившийся режим, который описывается соответствующими уравнениями для установившихся колебаний (синусоидой). При этом для относительно малых частот ω амплитуда колебаний КИН монотонно возрастает во времени. При больших частотах ($k > 2$) значения КИН возрастают от нуля до максимального, а далее, колеблясь, переходят в асимптотический режим.

Таким образом, предложенная методика определения динамических КИН при сдвиге тел, ослабленных системой прямолинейных трещин, к берегам которых приложены изменяющиеся со временем усилия, а на тело падают разного типа волны, позволяет исследовать быстроизменяющиеся со временем переходные и установившиеся колебательные про-

цессы с достаточной для практики точностью.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано методику визначення перехідних та усталених напружень, що виникають при поширенні хвиль у тілі з тріщинами за поздовжнього зсуву. Методика ґрунтується на використанні інтегрального перетворення Лапласа, модифікованої формули обернення Пруднікова та методу граничних інтегральних рівнянь.

Ключові слова: динамічні напруження, антиплоска деформація, система тріщин, інтегральне перетворення Лапласа, метод інтегральних рівнянь.

SUMMARY. The method to determination of transient and stationary stresses arising at wave propagation in the body with cracks under longitudinal shear is proposed. The method is based on utilization the Laplace integral transform, Prudnikov inverse modified formula and method of boundary integral equations.

Key words: dynamic stresses, anti-plane deformation, system of cracks, Laplace integral transform, method of integral equations

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кит Г.С., Побережный О.В. Нестационарные процессы в телах с дефектами типа трещин. – К.: Наук. думка, 1992. – 216 с.
2. Кушнір Р.М., Максимович В.М., Соляр Т.Я. Визначення нестационарних температур на основі уточнених формул обернення перетворення Лапласа // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – Т. 37, № 2. – С. 18–26.
3. Попов В. Г. Ітераційний метод визначення дифракційного поля при взаємодії хвилі поздовжнього зсуву з системою тріщин // Мат. мет. та фіз.-мех. поля. – 2011. – Т. 54, № 1. – С. 204–211.
4. Саврук М., Матвієвіч О. Динамічна задача для тіла з тріщиною за антиплоскої деформації // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій / Під заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: ФМІ НАН України, 2004. – С. 255–260.
5. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2 т. / Под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – Т. 1. – 448 с.
6. Шваб'юк В. І., Максимович О. В., Соляр Т. Я. Розрахунок динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень для тіла з криволінійною тріщиною за антиплоскої деформації // Мат. мет. та фіз.-мех. поля. – 2005. – Т. 48, № 2. – С. 106–113.
7. Chen W. and Renji T. Cauchy singular integral equation method for transient antiplane dynamic problems // Eng. Fract. Mech. – 1996. – № 54. – P. 177–187.
8. Kanninen M.F. A critical appraisal of solution techniques in dynamic fracture mechanics // Numer. Math. Fracture Mech / Edited by A.R. Luxmore and D.R.J. Owen. – Swansea, 1978. – P. 612–634
9. Ravera R. S. and Sih G. C. Transient analysis of stress waves around cracks under antiplane strain // J. Acoust. Soc. Amer. – 1970. – Vol. 47, № 3. – P. 875–881.
10. Sih G.C., Embley G.T., and Ravera R.S. Impact response of a finite crack in plane extension // Int. J. Solids and Struct. – 1972. – Vol. 8, № 7. – P. 977–993.

*Ин-т прикладных проблем механики
и математики НАН Украины, г. Львов*

Поступила 6.03.2012

УДК 539.3

Г. Т. СУЛИМ, д-р физ.-мат. наук,
Я. М. ПАСТЕРНАК, канд. физ.-мат. наук, Н. Р. ОЛИЯРНИК

АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КОНЕЧНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ С ТОНКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

На основе принципа сопряжения континуумов разной размерности задача о продольном сдвиге анизотропного тела конечных размеров, содержащего тонкое упругое ленточное включение, сведена к системе сингулярных интегральных уравнений, решение которой получено численно с использованием модифицированной схемы метода граничных элементов. Изучено влияние форм поперечного сечения тела (квадрат, прямоугольник, трапеция), размеров и ориентации включения, а также меры анизотропии материала матрицы на значения обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений.

Ключевые слова: антиплоская деформация, метод граничных элементов, тонкое включение, обобщенные коэффициенты интенсивности напряжений.

Большое количество научных работ касается определения напряженно-деформированного состояния тел с трещинами и другими тонкими неоднородностями. Обзор большинства из них содержится в монографиях [3, 6]. В частности, в работах [7, 8] с помощью метода граничных элементов (МГЭ) изучена антиплоская деформация тел с трещинами. Плоская деформация анизотропных тел с трещинами исследована с помощью МГЭ в работах [10, 12], а в статье [5] с помощью регуляризованного метода граничных элементов исследованы анизотропные тела с тонкими неоднородностями.

Сочетание метода функций скачка (в частности, его важнейшей составляющей – принципа сопряжения континуумов разной размерности) и прямого численного подхода подтвердило свою эффективность при исследовании плоских задач упругости и электроупругости для тел с тонкими включениями [2, 11, 13]. Это касается и задач антиплоского деформирования. Поскольку элементы конструкций являются конечными телами сложной геометрической формы, то их изучение удобнее всего (а зачастую и единственно возможно) осуществлять с помощью численных либо аналитически-численных методов. Задача о квадратном в плане изотропном теле с тонким включением решена в [1]. Тела другой геометрии остались практически неисследованными. Учет анизотропии материала тела, размера и ориентации включения также усложняет формулировку и решение такой задачи.

Поэтому в этой работе предложен общий аналитически-численный подход, дающий возможность исследовать антиплоскую деформацию ограниченных анизотропных тел с тонкими ленточными неоднородностями. Произведены конкретные численные расчеты для нескольких важных примеров геометрии анизотропного тела с тонким упругим включением.

Постановка и схема решения задачи. Рассмотрим находящееся в

условиях продольного сдвига упругое анизотропное цилиндрическое тело с тонким включением, образующие которого параллельны образующим тела. Между телом и включением выполняются условия идеального механического контакта.

Для определения напряженного состояния рассматриваемого тела будем использовать принцип сопряжения континуумов разной размерности [6], позволяющий

сводить исходную задачу к задаче определения неизвестных функций скачков векторов напряжений и смещений на срединной поверхности включения (рис. 1). С этой целью, используя тождества Сомильяны [6] строим соответствующую

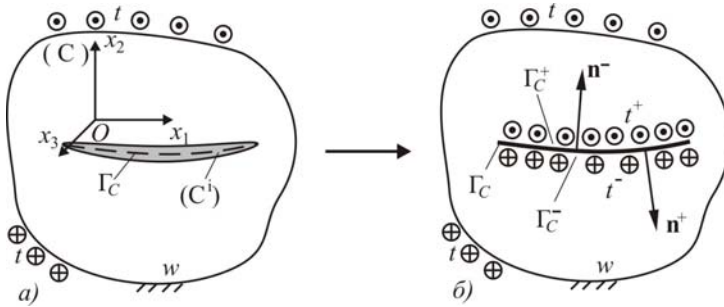


Рис. 1.

систему интегральных уравнений [11]

$$\frac{1}{2}w(y) = \text{RPV} \int_{\Gamma} W(x, y)t(x)d\Gamma(x) - \text{CPV} \int_{\Gamma} T(x, y)w(x)d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_C^+} [W(x, y)\Sigma t(x) - T(x, y)\Delta w(y)]d\Gamma(x), \quad (1)$$

когда точка коллокации y расположена на границе Γ тела, и

$$F^w(y, \Sigma t, \Delta w)/2 = \int_{\Gamma} [W(x, y)t(x) - T(x, y)w(x)]d\Gamma(x) + \text{RPV} \int_{\Gamma_C^+} W(x, y)\Sigma t d\Gamma(x) - \text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} T(x, y)\Delta w(x)d\Gamma(x),$$

$$F^t(y, \Sigma t, \Delta w)/2 = n_j^+(y) \int_{\Gamma} [D_j(x, y)t(x) - S_j(x, y)w(x)]d\Gamma(x) + n_j^+(y) \left[\text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} D_j(x, y)\Sigma t(x)d\Gamma(x) - \text{HPV} \int_{\Gamma_C^+} S_j(x, y)\Delta w(x)d\Gamma(x) \right], \quad (2)$$

когда точка коллокации y расположена на срединной поверхности Γ_C тонкой неоднородности. При этом w, t – ненулевые компоненты векторов смещений $(0, 0, w)$ и напряжений $(0, 0, t)$; $\Delta(\cdot) = (\cdot)^+ - (\cdot)^-$, $\Sigma(\cdot) = (\cdot)^+ + (\cdot)^-$, $t^{\pm} = \sigma_{3i}^{\pm} n_i^{\pm}$ (n_j^{\pm} – компоненты вектора нормалей \mathbf{n}^{\pm} к поверхностям Γ_C^{\pm}); знаками «+» и «-» обозначены величины, соответствующие поверхностям Γ_C^+ и Γ_C^- , образованным математическим разрезом

Γ_C ; обозначения RPV означает величину несвойственного интеграла; CPV – главное значение интеграла; HPV – конечная часть гиперсингулярного интеграла. Ядра W , T , D_j и S_j интегральных уравнений для антиплоской задачи получены с помощью формализма Стро [14] и описаны в [9]; $\Sigma w = F^w(\mathbf{y}, \Sigma t, \Delta w)$ и $\Delta t = F^t(\mathbf{y}, \Sigma t, \Delta w)$ – уравнения модели тонкого включения, связывающие между собой вектора напряжений и смещений на противоположных берегах ленточного включения (рис. 1).

Полученная система интегральных уравнений решалась модифицированным методом граничных элементов [2, 11] с использованием разрывных квадратичных элементов. Для этого граница тела Γ и срединная поверхность неоднородности Γ_C аппроксимировались соответственно n и n_C прямолинейными отрезками – граничными элементами Γ_q . На каждом элементе выбирались по 3 узловые точки: одна в центре, две другие – на расстоянии $1/3$ длины элемента с обеих сторон от центральной (разрывный граничный элемент). Краевые функции t , w , Σt и Δw аппроксимировались на каждом элементе по их узловым значениям. Для описания концов включения использовались специальные функции [9], учитывающие корневую особенность напряжений в вершинах неоднородности. Эти функции дают возможность высокоточного вычисления обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений (ОКИН) по формулам [11]:

$$K_{31} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} L \Delta w(s), \quad K_{32} = -\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \Sigma t(s), \quad (3)$$

где $L = -2\sqrt{-1}B^2$ – действительное число (B^2 – мнимое), которое соответствует тензору Барнет-Лоте \mathbf{L} в случае плоской анизотропии.

Таким образом, система сингулярных интегральных уравнений (1), (2) сведена к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых значений краевых функций t , w , Σt и Δw .

Численные результаты и их анализ. Рассмотрим квадратное в плане тело (неограниченный брус квадратного сечения) со стороной $2b$ при наличии в нем центрально расположенной тонкой неоднородности длиной $2a$. Отношение длины неоднородности к длине стороны квадрата обозначим $\varepsilon = a/b$ (рис. 2). Мэру анизотропии материала определим отношением $c = c_{44}/c_{55}$. Относительную жесткость неоднородности опишем величиной $k = G^i/c_{55}$, где G^i – модуль сдвига материала неоднородности.

На рис. 2 для квадратного бруса при различных значениях относительной длины неоднородности $\varepsilon = a/b$ в зависимости от относительной жесткости k изображены графики изменения нормированных значений ОКИН $K_{3i}^* = K_{3i}/(\tau\sqrt{\pi a})$. Сплошные, штриховые и штрихпунктирные линии относятся к значениям c , равным 1 (изотропная матрица), 0,1 и 10. Представленные на рис. 2 результаты хорошо согласуются с соответствующими данными, полученными прямыми численными методами [5].

В предельных случаях жесткости неоднородности $k = 10^{-10}$ (практически

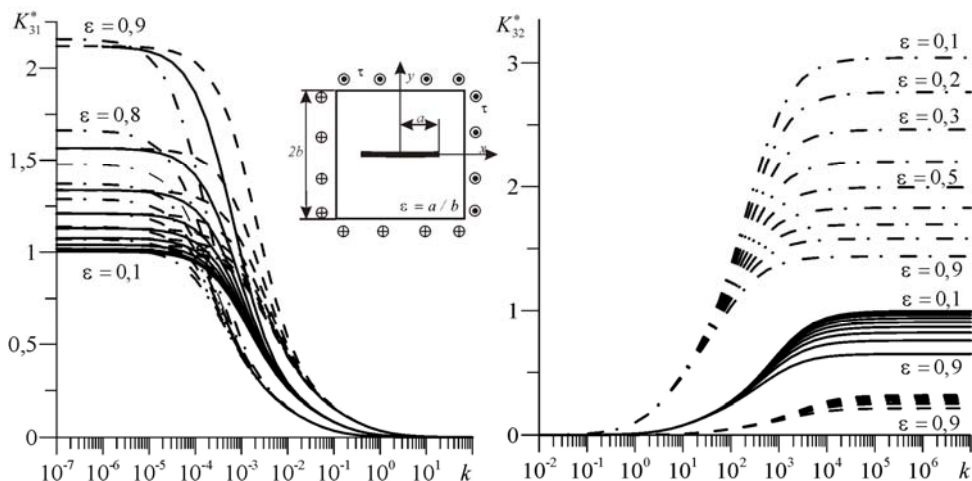


Рис. 2

полость-трещина) и $k = 10^{10}$ (абсолютно жесткое включение) ОКИН достигают своих максимальных значений, поэтому все дальнейшие расчеты проводились для этих двух случаев. В табл. 1 представлены результаты вычислений ОКИН для разных значений параметра ε с учетом влияния меры анизотропии матрицы, а также значения безразмерных ОКИН K_{31}^* , полученные методом полного прямого вырезания (МППВ) [1]. Отклонение между результатами не превышает 0,01%, что подтверждает высокую достоверность полученных данных.

Для малой сравнительно с размерами сечения тела ($\varepsilon = 0,1$) неоднородности значения ОКИН незначительно отличаются от аналитического решения для трещины или абсолютно жесткого включения (АЖВ) в неограниченной упругой среде [4]. Независимо от меры анизотропии материала с

Таблица 1

c	КИН	ε				
		0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
0,1	K_{31}^* , трещина	1,0042	1,0398	1,1283	1,3358	2,1190
	K_{32}^* , АЖВ	0,3156	0,3102	0,2978	0,2738	0,2151
1,0	K_{31}^* , трещина	1,0044	1,0411	1,1304	1,3375	2,1181
	K_{31}^* , МППВ	–	–	1,1305	1,1376	2,1181
	K_{32}^* , АЖВ	0,9960	0,9635	0,9048	0,8194	0,6476
10,0	K_{31}^* , трещина	1,0198	1,1381	1,2887	1,4791	2,1581
	K_{32}^* , АЖВ	3,0424	2,4632	1,9941	1,6950	1,4371

увеличением показателя ε происходит рост ОКИН $K_{31}^* = K_{III}$ трещины и снижение ОКИН K_{32}^* жесткого включения. Кроме того, в случае относительных длин трещины $\varepsilon=0,1$ и $\varepsilon=0,9$ значение ОКИН K_{31}^* для разных значений меры анизотропии c практически одинаковы, а для жесткого включения при изменении c от 0,1 до 10 ОКИН K_{32}^* уменьшается приблизительно в десять раз. Согласно результатам вычислений для $0,1 \leq \varepsilon \leq 0,9$ наибольшие значения ОКИН в квадратном в плане теле с трещиной достигаются при $\varepsilon=0,9$ и $c=0,1$, а в теле с жестким включением – при $\varepsilon=0,1$ и $c=0,1$.

Отдельно рассмотрен квадратный брус со свободными от нагрузки берегами при наличии в нем нагруженной равномерно распределенными усилиями трещины. Исследовано влияние угла ориентации и меры анизотропии на значение КИН K_{31}^* .

Из представленных в табл. 2 результатов следует, что независимо от длины трещины в случае увеличения угла ее наклона к оси Ox_1 значения K_{31}^* при $c > 1$ уменьшается, а при $c < 1$ – увеличивается на одинаковую величину. Минимальное значение КИН в изотропном случае достигается при $\alpha = \pi/4$.

Поворот параллельной оси Ox_1 трещины на 90° можно смоделировать соответствующим поворотом осей анизотропии, поэтому значение КИН для $\alpha=0^\circ$, $c=10$ и $\alpha=90^\circ$, $c=0,1$ будут совпадать. Этот факт подтверждают представленные в табл. 2 результаты расчетов.

Рассмотрим прямоугольное в плане тело с тонкой неоднородностью (трещиной или АЖВ). Обозначим длину прямоугольника b , ширину – c , а длину неоднородности – a .

Исследовалось влияние изменения отношения $b/c=1/4; 1/2; 1; 2; 4$ сторон

прямоугольника на нормированные значения ОКИН K_{31}^* и K_{32}^* для трех разных отношений a/b длины неоднородности к ширине прямоугольника (табл. 3).

Увеличение ширины прямоугольника вдвое или вчетверо сравнительно со случаем $b/c = 1$ (квадрат) практически не влияет на значение

Таблица 2

a/b	α	c			
		c = 1	c = 1	c = 10	c = 0,1
0,5		МППВ	МГЭ,	МГЭ	МГЭ
	0	1,1305	1,1304	1,2887	1,1283
	15	1,1266	1,1265	1,2846	1,1546
	30	1,1187	1,1187	1,2716	1,2053
	45	1,1148	1,1147	1,2466	1,2466
	60	1,1187	1,1187	1,2053	1,2716
	75	1,1266	1,1265	1,1546	1,2846
	90	1,1305	1,1304	1,1283	1,2887
	0,9	0	2,1136	2,1181	2,1581
15		1,8997	1,9009	1,9540	2,0551
30		1,5872	1,5863	1,7356	1,8942
45		1,4606	1,4593	1,7531	1,7531
60		1,5872	1,5863	1,8942	1,7356
75		1,8997	1,9009	2,0551	1,9540
90		2,1135	2,1181	2,1191	2,1581

Таблица 3

b/c	a/b					
	0,1		0,5		0,9	
	K_{31}^* , трещ.	K_{32}^* , АЖВ	K_{31}^* , трещ.	K_{32}^* , АЖВ	K_{31}^* , трещ.	K_{32}^* , АЖВ
1/2	1,0042	0,9982	1,1283	0,9419	2,1197	0,6804
1/4	1,0042	0,9981	1,1283	0,9403	2,1180	0,6790
1	1,0044	0,9960	1,1304	0,9048	2,1181	0,6476
2	1,0085	0,9843	1,1774	0,7641	2,1276	0,5415
4	1,0308	0,9417	1,3781	0,5637	2,1918	0,4113

ОКИН для трещины и АЖВ, поскольку максимальное отклонение K_{31}^* и K_{32}^* равно 0,2 % и 5,7 % соответственно. Вместе с тем увеличение его длины в четыре раза существенным образом влияет на ОКИН: K_{31}^* увеличивается максимально на 19,1 %, K_{32}^* уменьшается максимально на 41,7 %.

Результаты расчетов изменения значений ОКИН в прямоугольнике с $b/c = 2$ при разных значениях меры анизотропии ($c = 0,1$, $c = 1$, $c = 10$) представлены в табл. 4. Независимо от длины неоднородности в случае $c < 1$ ОКИН K_{31}^* и K_{32}^* для прямоугольного тела меньше соответствующих коэффициентов для бруса квадратного сечения или равны им. При

Таблица 4

a	КИН	b/c					
		2		1		1	
		c=0,1		c=1		c=10	
0,1	K_{31}^* , трещина	1,0042	1,0042	1,0085	1,0044	1,0706	1,0198
	K_{32}^* , АЖВ	0,3155	0,3156	0,9843	0,9960	2,7646	3,0424
0,5	K_{31}^* , трещина	1,1283	1,1283	1,1774	1,1304	1,6145	1,2887
	K_{32}^* , АЖВ	0,2959	0,2978	0,7641	0,9048	1,4215	1,9941
0,9	K_{31}^* , трещина	2,1178	2,1190	2,1276	2,1181	2,3259	2,1581
	K_{32}^* , АЖВ	0,2134	0,2151	0,5415	0,6476	1,0574	1,4371

$c \geq 1$ значение K_{31}^* возрастает, а значения K_{32}^* уменьшается по сравнению с ОКИН для квадрата.

Предложенный в работе подход дает возможность решения задач для объектов и более сложной формы, чем прямоугольной или квадратной. Учитывая это, рассмотрим тело с сечением в форме равнобедренной трапеции, нижняя основа и высота которой равны $2b$, верхняя основа – $2d$. Упругие характеристики тела и включения такие же, как и в предыдущем примере.

Значение ОКИН в случае трещины или АЖВ для разных значений отношений a/b и d/b для

изотропного тела представлены в табл. 5. В случае $d/b = 0,8$, т.е. с приближением формы трапеции к квадрату значения ОКИН почти совпадают, что свидетельствует о достоверности полученных данных. С дальнейшим уменьшением длины верхней основы происходит уменьшение ОКИН K_{31}^* трещины и увеличение

Таблица 5

a/d	КИН	d/b		
		0,3	0,5	0,8
0,1	K_{31}^* , трещина	1,0010	1,0020	1,0034
	K_{32}^* , АЖВ	0,9996	0,9989	0,9974
0,5	K_{31}^* , трещина	1,0245	1,0520	1,0978
	K_{32}^* , АЖВ	0,9855	0,9675	0,9326
0,9	K_{31}^* , трещина	1,0875	1,2148	1,5679
	K_{32}^* , АЖВ	0,9514	0,8900	0,7672

ОКИН K_{32}^* для дефекта типа АЖВ

Выводы. В данной работе рассмотрен продольный сдвиг анизотропного бруса с сечением в форме фигуры конечных размеров, содержащей тонкое упругое включение. Получены численные результаты для квадратного, прямоугольного и трапецеобразного в плане тела из изотропного и анизотропного материала. В предельных случаях жесткости неоднородности (трещина и абсолютно жесткое включение) ОКИН достигают своих максимальных значений, поэтому для оценки общей прочности конструкции преимущественно достаточно исследовать частные типы дефектов. Во всех примерах с увеличением длины включения увеличивается ОКИН K_{31}^* трещины и уменьшается K_{32}^* АЖВ. Результаты вычисления ОКИН для квадратного в плане бруса с ленточным включением хорошо согласуются с данными работы [1], что свидетельствует о высокой степени достоверности предложенной методики, обеспечивающей высокую точность. Подтверждено, что в практических целях целесообразнее использовать именно прямоугольную форму сечения тела с жесткой арматурой, поскольку значение ОКИН тогда меньше, чем соответствующие значения для брусков квадратного сечения. Анализ полученных для трапецевидного в плане тела численных результатов свидетельствует о легкости применения предложенного подхода к изучению напряженно-деформированного состояния и концентрации напряжений в наделенных ленточными включениями телах со сложной формой поперечного сечения.

РЕЗЮМЕ. Застосовуючи принцип спряження континуумів різної вимірності задачу антиплоского деформування анизотропного тіла скінченних розмірів, що містить тонке пружне включення, зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь. Розв'язок останньої отримано числово з використанням модифікованої схеми методу граничних елементів. Досліджено вплив форм поперечного перерізу тіла (квадрат, прямокутник, трапеція), розмірів і орієнтації включення, а також міри анізотропії матеріалу матриці на значення узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень.

Ключові слова: антиплоска деформація, метод граничних елементів, тонке включення, узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень.

SUMMARY. Using the coupling principle for continua of different dimension this

paper considers an antiplane shear of a finite anisotropic solid containing a thin elastic inclusion, and reduces the problem to a system of singular integral equations. The latter is solved numerically by the developed algorithm of the boundary element method. The paper presents numerical examples of analysis of solids of different shape (square, rectangular, trapezoid) and anisotropy containing elastic inclusion of different length and inclination. An influence of these parameters on the generalized stress intensity factors is studied.

Key words: antiplane shear, boundary element method, thin inclusion, generalized stress intensity factors.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. *Васильєв К., Пастернак Я., Сулим Г.* Антиплоска деформація квадратного в плані тіла із внутрішньою тонкою неоднорідністю // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 2010. – Вип. 70. – С. 165–177.
2. *Пастернак Я. М., Сулим Г. Т.* Дуальний метод граничних елементів у задачах теорії тонких включень // Пошкод. матер. під час експл., методи його діагност. і прогноз.: Праці конф., 21 – 24 вересня, Тернопільський державний технічний університет.– Тернопіль, 2009. – С. 137–143.
3. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
4. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2 т./ Под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – 1016 с.
5. *Сулим Г. Т., Пастернак Я. М.* Вплив розмірів анізотропних тіл зі стрічковими пружними включеннями на параметри граничного стану за антиплоскої деформації // Мет. розв'яз. прикладних задач механіки деформ. твердого тіла. – Дніпропетровськ, 2009. – Вип. 10. – С. 263–269.
6. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: НТШ, 2007. – 716 с.
7. *Ang W. T., Clements D. L., Cook T.* A hypersingular boundary integral equation for a class of antiplane multiple crack problems for inhomogeneous anisotropic elastic material // Eng. Anal. Bound. Elem. – 1999. – Vol. 23. – P. 567–572.
8. *Ang W.T.* A complex variable boundary element method for antiplane stresses analysis around a crack in some nonhomogenous bodies // J. Chin. Inst. Eng. – 1999. – Vol. 22, № 6. – P 753–761.
9. BEM approach for the antiplane shear of anisotropic solids containing thin inhomogeneities / *V. Bozhydarnyk, I. Pasternak, H. Sulym, N. Oliyarnyk* // Proc. VI Int. Symp. Mech. Mater. and Struct.: May 30 – June 2, 2011 Augustow. – Augustow, – P. 43–44.
10. *Pan E.* A general boundary element analysis of 2D linear elastic fracture mechanics // Int. J. Fract. – 1997. – Vol. 88. – P. 41–59.
11. *Pasternak Ia.* Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2011. – Vol. 35, № 4. – P. 678–690.
12. *Portela A., Aliabadi M. H., Rooke D. P.* The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1992. – Vol. 33. – P. 1269–1287.
13. *Riederer K., Duenser C., Beer G.* Simulation of linear inclusions with the BEM // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2009. – Vol. 33. – P. 959–965.
14. *Ting T. C. T.* Anisotropic elasticity: theory and applications. – New York: Oxford University Press, 1996. – 567 p.

Львовский национальный университет

Поступила 02.02.2012

УДК 539.3

И. Ф. КИРИЧОК, д-р физ.-мат. наук,
А. Ю. ШЕВЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук

РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВИБРОРАЗОГРЕВ ГИБКОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ БАЛКИ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СЕНСОРАМИ

Решена задача о вынужденных резонансных колебаниях и диссипативном разогреве вязкоупругой балки с пьезоэлектрическими сенсорами при учете геометрической нелинейности в квадратичном приближении. Вязкоупругое поведение пассивного (без пьезоэффекта) и пьезоактивного материалов описывается в терминах мгновенных и комплексных модулей. Для решения нелинейной задачи электровязкоупругости и задачи теплопроводности используется метод Ньютона в соединении с численными методами дискретной ортогонализации и конечных разностей. Исследовано влияние геометрической нелинейности на динамические характеристики, температуру диссипативного разогрева балки и электрический показатель сенсора.

Ключевые слова: резонансные колебания, диссипативный разогрев, вязкоупругая балка, сенсор

В последние годы интенсивно развиваются методы активного контроля уровня колебаний и виброзагрева вязкоупругих элементов конструкций с помощью пьезоэлектрических включений, выполняющих роль сенсоров или актуаторов [13–15]. Полученные научные результаты в исследовании проблем активного демпфирования содержатся в работах [8, 13–15]. В условиях эксплуатации тонкостенных вязкоупругих элементов при интенсивных гармонических нагрузках в задачах об их термомеханическом поведении, наряду с учетом температурных эффектов из-за диссипации в материале, необходимо учитывать эффекты физической и геометрической нелинейностей. Построение электротермомеханических моделей динамического поведения тонкостенных слоистых элементов из вязкоупругих пассивных и пьезоактивных материалов, учитывающих физическую и геометрическую нелинейности, а также решения некоторых задач содержатся в работах [3, 6, 7, 10, 11].

В данной статье решена задача о вынужденных колебаниях и диссипативном разогреве жестко заземленной гибкой вязкоупругой балки с пьезоэлектрическими сенсорами при гармоническом нагружении. Исследуется влияние геометрической нелинейности на динамические и температурные характеристики балки, а также электрические показатели пьезосенсора.

Постановка задачи. Рассмотрим трехслойную балку шириной b и длиной l . Средний слой толщиной h_0 изготовлен из пассивного изотропного материала. Внешние слои толщиной h_1 изготовлены из поляризованной вдоль толщины в противоположных направлениях пьезокерамики с одинаковыми свойствами. Балка отнесена к прямоугольной системе ко-

ординат $x y z$, так что $0 \leq x \leq l, |y| \leq b/2, |z| \leq H/2$ ($H = h_0 + 2h_1$). Материалы слоев являются вязкоупругими с независящими от температуры свойствами. Будем считать, что верхний ($z \geq h_0/2$) и нижний ($z \leq h_0/2$) пьезослои характеризуются значениями пьезомодулей $-d_{31}$ и d_{31} соответственно. Внутренние поверхности пьезослоев покрыты сплошными электродами, на которых задан электрический потенциал $\varphi(\pm h_0/2) = 0$. Внешние поверхности ($z = \pm H/2$) электродированы на выполняющих роль сенсора участках $s^\pm = b\Delta_x$ ($\Delta_x = x_1 - x_0$) и неэлектродированы вне области s^\pm . При этом выполняются такие граничные условия:

$$\iint_{s^\pm} D_z^\pm ds = 0 \quad (x_0 \leq x \leq x_1), \quad D_z^\pm = 0 \quad (0 \leq x < x_0; x_1 < x \leq l), \quad (1)$$

где D_z^\pm – нормальная составляющая электрической индукции в верхнем и нижнем пьезослоях.

На балку действует поверхностное давление $q_z = q^0 + q' \cos \omega t$ с частотой гармонической составляющей ω , близкой к резонансной. В результате на электродах сенсора s^\pm возникают электрические потенциалы $\varphi(\pm H/2) = \pm V_s$, амплитудные значения которых необходимо определить. Торцы балки жестко заземлены, а поверхности находится в условиях конвективного теплообмена с внешней средой.

При моделировании электромеханического поведения трехслойной гибкой балки примем, что по всему пакету слоев справедливы гипотезы плоских сечений для механических величин и адекватные предположения относительно электрических переменных [5], из которых следует, что $D_z = C = \text{const}$ является постоянной по толщине слоя. Температуру по толщине пакета будем считать постоянной. Пусть деформации малы, но прогибы балки таковы, что в кинематических соотношениях необходимо учитывать квадраты углов поворота. При этом уравнения движения являются также нелинейными. Вязкоупругие свойства пассивного и пьезоактивного материалов описываются интегральными операторами линейной вязкоупругости [4], которые для гармонических процессов деформирования сводятся к операции умножения комплексных величин [5]

$$B * f = (B' + iB'')(f' + if''). \quad (2)$$

На основании принятых гипотез трехмерные соотношения вязкоупругой поляризованной вдоль оси z пьезокерамики [5] для нижнего слоя имеют вид

$$\sigma_x = c_{11}^E * e_x - b_{31} * E_z, \quad D_z = b_{31} * e_x + b_{33} * E_z, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (3)$$

Здесь $c_{11}^E = 1/s_{11}^E$, $b_{31} = d_{31}/s_{11}^E$, $b_{33} = \varepsilon_{33}^T - d_{31}^2/s_{11}^E$; s_{11}^E , d_{31} , ε_{33}^T – соответственно изотермические операторы податливости, пьезомодуля и диэлектрической проницаемости пьезоматериала. Для верхнего пьезослоя в (3)

d_{31} необходимо заменить на $-d_{31}$. Поведение пассивного изотропного материала описывается первой зависимостью из (3), в которой $c_{11}^E = E$, $b_{31} = 0$ (E – вязкоупругий модуль Юнга). В дальнейшем знак * формулы (2) будем опускать.

Связь деформации e_x с продольным u и нормальным w перемещениями записывается так:

$$e_x = \varepsilon_x + z \kappa_x, \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \vartheta_x^2, \quad \kappa_x = \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x}, \quad \vartheta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}. \quad (4)$$

На основании зависимостей (3), (4) получаем выражения для напряжения σ_x и электрического потенциала φ , которые для верхнего пьезослоя имеют вид

$$\sigma_x = \left(c_{11}^E + \frac{b_{31}^2}{b_{33}} \right) (\varepsilon_x + z \kappa_x) - \frac{b_{31}}{b_{33}} D_z^+; \quad (5)$$

$$\varphi = -\frac{D_z^+}{b_{33}} z + \frac{b_{31}}{b_{33}} \left(\varepsilon_x z + \frac{1}{2} \kappa_x z^2 \right) + C_1 \quad (6)$$

Учитывая условия $\varphi(H/2) = V_s$, $\varphi(h_0/2) = 0$, из выражения (6) для внешнего пьезослоя находим значение электрической индукции

$$D_z^+ = -b_{33} \frac{V_s}{h_1} - b_{31} \left(\varepsilon_x + \frac{h_0 + h_1}{2} \kappa_x \right) \quad (7)$$

Удовлетворяя (7) интегральному условию (1) на поверхности s^+ сенсора, получим

$$V_s = -\frac{b_{31} h_1}{b_{33} \Delta x} \int_{x_0}^{x_1} \left(\varepsilon_x + \frac{h_0 + h_1}{2} \kappa_x \right) dx. \quad (8)$$

Подстановка (8) в соотношение (7), а затем в (5) приводит к интегродифференциальному выражению для σ_x , что значительно усложняет построение соотношений, связывающих усилие и изгибающий момент с деформационными параметрами балки.

Ниже, следуя [10], при выводе указанных соотношений в зависимости (5) для пьезослоев принимаем второе условие из (1), выполняющееся на s^+ приближенно. Вводя вместо механических напряжений интегральные величины усилия $N_x = b \int \sigma_x dz$ и момента $M_x = b \int \sigma_x z dz$ по пакету слоев с учетом зависимостей (5), (7) и направления поляризации в пьезослоях, имеем соотношения

$$N_x = C_{11} * \varepsilon_x, \quad M_x = D_{11} * \kappa_x, \quad (9)$$

в которых

$$C_{11} = bh_0 \left[E + 2\delta \left(c_{11}^E + \gamma_{33} \right) \right], \quad D_{11} = \frac{bh_0^3}{12} \left[E + 2\delta_0^3 \left(c_{11}^E + \gamma_{33} \right) \right],$$

$$\delta = h_1/h_0, \quad \delta_0^3 = 3\delta + 6\delta^2 + 4\delta^3, \quad \gamma_{33} = b_{31}^2/b_{33}. \quad (10)$$

Уравнения нелинейных колебаний гибкой балки записываются так [2, 12]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} = \rho \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q_z F, \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} = \bar{Q}_x + N_x \vartheta_x. \quad (11)$$

В уравнениях (11) $\bar{Q}_x = Q_x - N_x \vartheta_x$, $F = bH$ – площадь поперечного сечения балки; Q_x – перерезывающее усилие; $\rho = bh_0(\rho_0 + 2\rho_1\delta)$, ρ_0 , ρ_1 – удельные плотности пассивного и пьезоактивного материалов.

При жестком закреплении балки механические граничные условия имеют вид

$$u = 0, \quad w = 0, \quad \vartheta_x = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = l. \quad (12)$$

Усредненное за период колебаний и в плоскости поперечного сечения уравнение энергии рассматриваемой балки запишем так:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2\alpha_z (b + H)}{\lambda F} (T - T_c) + \langle W \rangle, \quad (13)$$

где

$$\langle W \rangle = \frac{\omega b}{\lambda F} \int_{-H/2}^{H/2} (\sigma_x' e_x' - \sigma_x'' e_x'') dz \quad (14)$$

– усредненная скорость диссипации; $\alpha_z = (\alpha_+ + \alpha_-)/2$, α_+ , $\alpha_- [0, 1]$ – коэффициенты теплообмена на поверхностях $z = \pm H/2$, λ , a – усредненные коэффициенты теплопроводности и температуропроводности; T_c – температура внешней среды.

Начальное и граничные тепловые условия на краях балки таковы:

$$T = T_0 \quad (t = 0), \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \pm \alpha_{0,l} (T - T_c) \quad (x = 0, l). \quad (15)$$

Здесь $\alpha_{0,l}$ – коэффициенты теплообмена; T_0 – начальная температура.

Построение решения задачи. При построении решения поставленной задачи разрешающие уравнения электровязкоупругости (4), (9), (10), (11) представим относительно искомых величин u , w , ϑ_x , N_x , \bar{Q}_x , M_x , записав соотношения (4), (9) в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = J_c * N_x - \frac{1}{2} \vartheta_x^2, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\vartheta_x, \quad \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} = -J_D * M_x, \quad (16)$$

где

$$J_c = 1/C_{11}, \quad J_D = 1/D_{11}. \quad (17)$$

При нагрузках

$$q_z = q^0(x) + q'(x) \cos \omega t - q''(x) \sin \omega t \quad (q'' = 0), \quad (18)$$

пренебрегая переходными процессами, приближенное решение нелинейных уравнений (11), (16) построим в виде гармонического ряда во времени [5]. Ограничимся построением решения в одночастотном приближении для переменных $A = \{w, \vartheta_x, \bar{Q}_x, M_x\}$, характеризующих изгиб балки, и при удержании членов до второй гармоники включительно в рядах для переменных $B = \{u, N_x, \varepsilon_x\}$ плоского деформирования балки, так что

$$A = A^0 + A^1 \cos \omega t - A^2 \sin \omega t, \quad B = B^0 + \sum_{k=1}^2 \left(B^k \cos k\omega t - B''^k \sin k\omega t \right) \quad (19)$$

Применяя изложенный в работе [11] подход, из уравнений (11), (16) – (18) и условий (12) относительно коэффициентов представления (19) получаем систему нелинейных дифференциальных уравнений порядка $N = 22$. Линеаризуя полученную систему методом Ньютона [5], приходим к последовательности решений линейных краевых задач вида

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Y}^{n+1}}{dx} &= A(J(k\omega), \bar{Y}^n) \bar{Y}^{n+1} + \bar{F}(q, M_E, \bar{Y}^n), \\ B_1 \bar{Y}^{n+1}(0) &= 0, \quad B_2 \bar{Y}^{n+1}(l) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь

$$\bar{Y} = \left\{ \begin{array}{l} \overset{1}{u}', \overset{1}{u}'', \overset{2}{u}', \overset{2}{u}'', \overset{1}{w}', \overset{1}{w}'', \overset{1}{\vartheta}'_x, \overset{1}{\vartheta}''_x, \overset{1}{N}'_x, \overset{1}{N}''_x, \overset{2}{N}'_x, \overset{2}{N}''_x, \overset{1}{Q}'_x, \\ \overset{1}{Q}''_x, \overset{1}{M}'_x, \overset{1}{M}''_x, u, w, N_x, \vartheta_x, \bar{Q}_x, M_x \end{array} \right\}^T -$$

вектор-столбец искомых функций; A и \bar{F} – квадратичная матрица порядка N системы дифференциальных уравнений и вектор-столбец ее правых частей, элементы которых из-за громоздкости не выписываются; B_1, B_2 – прямоугольные матрицы, которые определяются из условий (12).

Диссипативная функция (14) в терминах искомых величин определяется выражением

$$\langle W \rangle = \frac{\omega}{2\lambda F} \left\{ \overset{1}{N}''_x \overset{1}{\varepsilon}'_x - \overset{1}{N}'_x \overset{1}{\varepsilon}''_x + 2 \left(\overset{2}{N}''_x \overset{2}{\varepsilon}'_x - \overset{2}{N}'_x \overset{2}{\varepsilon}''_x \right) + \overset{1}{M}''_x \overset{1}{\kappa}'_x - \overset{1}{M}'_x \overset{1}{\kappa}''_x \right\} \quad (21)$$

При решении задачи (20) использовалась типовая программа для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений [2]. Задача

теплопроводности (13), (15) с учетом (21) решается методом конечных разностей с использованием явной схемы.

Результаты расчетов и их анализ. Численные расчеты проведено для частот нагружения, близких к первой резонансной частоте изгибных колебаний балки с размерами $l=0,4$ м, $h_0=0,01$ м, $b=H=(h_0+2h_1)$. Пассивный слой выполнен из полиметилметакрилата [12] с такими характеристиками:

$$E = E' + i E'', \quad E' = E \cdot (k\omega)^p, \quad E'' = E' \beta (k\omega)^q \quad (k = 1, 2);$$

$$E = 0,308 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad \nu'' = 0, \quad \beta = 0,16, \quad q = -0,145,$$

$$p = 0,076, \quad \nu' = 0,35, \quad \rho_0 = 2770 \text{ кг/м}^3, \quad \lambda = 0,45 \text{ Вт/(м}^0\text{С)}$$

Пьезослой изготовлены из вязкоупругой пьезокерамики ЦТСтБС-2 [1] с материальными параметрами

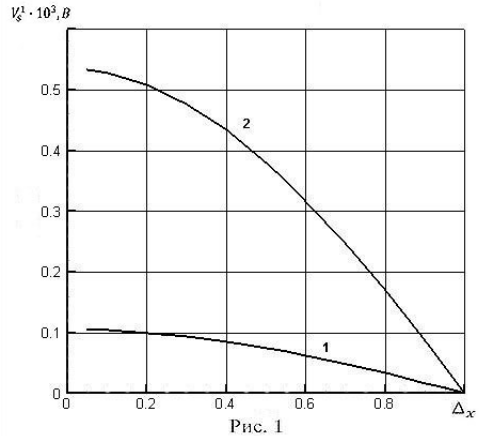
$$s_{11}^E = (12,5 - 0,02i) \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}, \quad d_{31}^* = (-1,6 + 0,0064i) \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м},$$

$$\nu'_E = 0,37, \quad \nu''_E = 0, \quad T_0 = T_c = 20^0\text{С}, \quad \rho_1 = 7520 \text{ кг/м}^3,$$

$$\lambda = 0,47 \text{ Вт/(м}^0\text{С)}, \quad \varepsilon_{33}^T = (21 - 0,735i) \cdot 10^2 \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}.$$

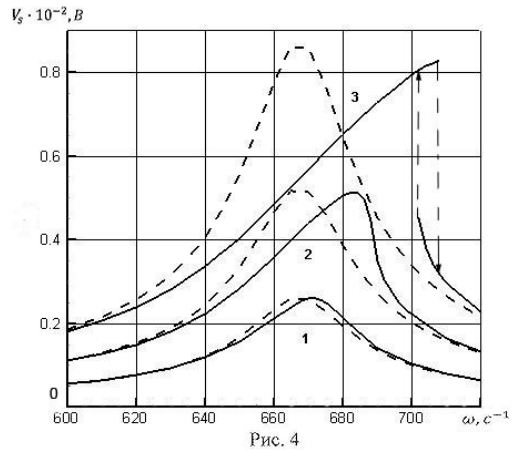
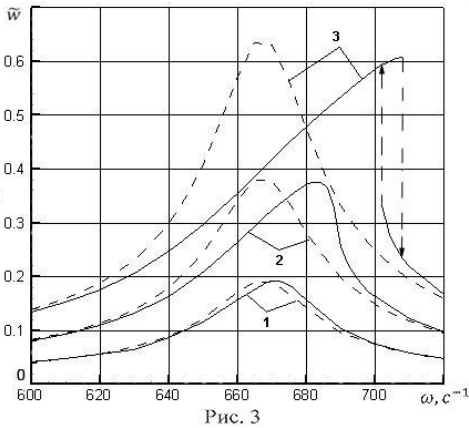
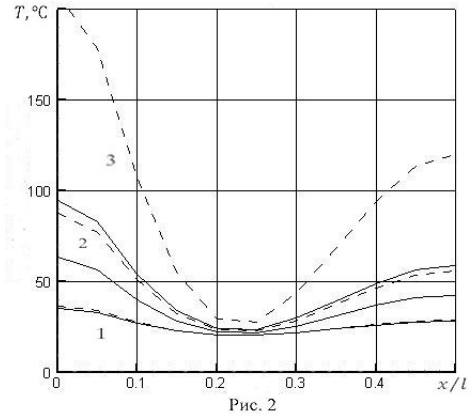
Для рассматриваемого способа нагружения и конструктивной симметрии в балке реализуются преимущественно изгибные колебания. Поэтому расчеты проводились для частот нагружения, близких к наиболее энергоемкой первой резонансной частоте изгибной моды колебаний.

На рис. 1 в зависимости от параметра $\Delta = \Delta_x/l$ изображены кривые распределения эталонного электрического показателя сенсора V_s^1 , вычисленного по формуле (8) при $q'(x) = q_0 = 1 \text{ Па}$ ($q^0 = 0$). Кривые 1 относятся к пьезослою с толщиной $h_1 = 0,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ на частоте линейного резонанса $\omega_p = 568 \text{ с}^{-1}$, кривые 2 – к пьезослою с толщиной $h_1 = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ и на частоте $\omega_p = 667 \text{ с}^{-1}$. Координаты параметра Δ выбирались так, чтобы его середина совпадала с точкой максимальных прогибов балки $x = 0,5l$. Видно, что показатель V_s^1 возрастает с увеличением толщины пьезослоев и уменьшается при увеличении площади сенсора.

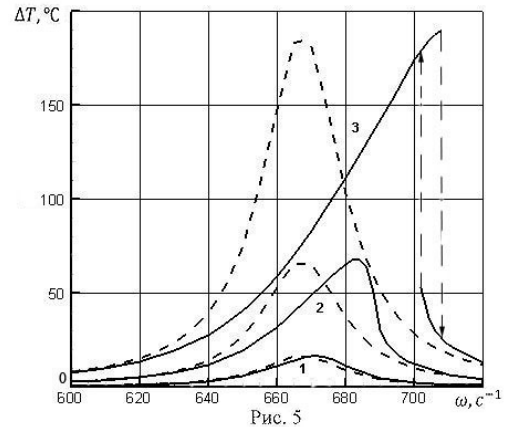


Ниже представлены расчеты для балки с параметрами сенсора $h_1 = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$, $\Delta = 0,55$ ($x_0 = 0,225l$, $x_1 = 0,775l$),

$\alpha_{\pm} = \alpha_{0,l} = \alpha = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ град})$. Штриховые кривые относятся к решению линейной задачи, сплошные – к решению при учете геометрической нелинейности. На рис. 2 показаны кривые распределенной симметрично относительно середины балки температуры виброразогрева, рассчитанные на частоте $\omega = 667 \text{ с}^{-1}$. Кривые 1, 2, 3 относятся к значениям параметра q_0 , равным $0,75 \cdot 10^5 \text{ Па}$; $0,15 \cdot 10^6 \text{ Па}$; $0,25 \cdot 10^6 \text{ Па}$. При указанных геометрических размерах балки и амплитудах нагружения частотные зависимости амплитуды максимального прогиба $\tilde{w} = |w(0,5l)|/l$, показателя сенсора V_s и приращения установившейся максимальной температуры $\Delta T = T(0) - T_0$ показаны на рис. 3, рис. 4, рис. 5, соответственно.



Анализ представленных результатов показывает, что при расчете термомеханического поведения пьезоактивной гибкой балки учетом геометрической нелинейности можно пренебречь для нагрузок, при которых максимальные относительные прогибы $\tilde{w} \leq 0,2$ (кривые 1). Учет геометрической нелинейности с ростом амплитуды нагрузки приводит к увеличению резонансной частоты изгибных колебаний балки и превращению частотных характеристик системы в характеристики жесткого типа. Отметим, что максимальные зна-



чения амплитуд прогибов \tilde{w} , показателей сенсора V_s и температуры виброзагрева на частотах линейного ($\omega = 667\text{с.}^{-1}$) и нелинейного ($\omega = 708\text{с.}^{-1}$) резонансов различаются между собой незначительно, что указывает на слабое влияние учета геометрической нелинейности на эти параметры.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів жорстко защемленої в'язкопружної балки з п'єзоелектричними сенсорами при врахуванні геометричної нелінійності в квадратичному наближенні. В'язкопружна поведінка пасивного (без п'єзоєфекту) і п'єзоактивного матеріалів описується в термінах тривалих і комплексних модулів. Для розв'язку нелінійної задачі електров'язкопружності і теплопровідності використовується метод Ньютона в поєднанні з чисельними методами дискретної ортогоналізації і кінцевих різниць. Досліджено вплив геометричної нелінійності і умов жорсткого закріплення на динамічні характеристики, температуру дисипативного розігріву балки та електричні показники сенсора.

Ключові слова: резонансні коливання, дисипативний розігрів, в'язкопружна балка, сенсор.

SUMMARY. The problem of forced resonance vibration and dissipative heating of viscoelastic beam with piezoelectric sensors with rigidly clamped edges with accounting of geometrical nonlinearity in quadratical approximation is considered. Viscoelastic behavior of passive and piezoactive materials are described in terms of instantaneous and complex moduli. The method quazilinearization coupled with discrete orthogonalization numerical method and method of finite differenced is used to solve the nonlinear problem of electroviscoelasticity and heat conduction. An influence of geometrical nonlinearity, conditions rigidly clamped edges and heat exchange on dynamical characteristics, temperature of vibration heating of beam with piezosensors is studied.

Keywords: resonance vibrations, dissipative heating, viscoelastic beam, sensors.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Болкисев А. М., Карлаш В. Л., Шутьга Н. А. О зависимости свойств пьезокерамических материалов от температуры // Прикладная механика. – 1984. – Т. 20, № 7. – С. 70–74.
2. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – К.: Академперіодика. – 2006 – 472 с.
3. Жук Я. А., Сенченко И. К. Моделирование стационарных колебаний и диссипативного разогрева тонкостенных неупругих элементов, содержащих пьезоактивные слои // Прикладная механика. – 2004. – Т. 40, № 5. – С. 80–91.
4. Ильюшин А. А., Победра Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
5. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – К.: Наук. думка. – 1986. – 222 с.
6. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф., Козлов В. И. Электромеханические колебания тонкостенных элементов с пьезоэффектом. – К.: АСК, 2006. – С. 185–217 (Успехи механики: В 6 т. Т. 2).
7. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф., Козлов В. И. Влияние температуры диссипативного разогрева на активное демпфирование вынужденных колебаний неупругих тонких пластин при помощи пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов // Актуальні аспекти фізико-механічних досліджень. Акустика і хвилі. – К.: Наук. думка. 2007. – С. 127–152.
8. Карнаухов В. Г., Михайленко В. В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир, 2005. – 428 с.
9. Киричок И. Ф. Резонансные колебания и разогрев электромеханически нагруженных кольцевых пластин с пьезоактуаторами при учете деформации сдвига // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 2. – С. 124–132.

10. *Киричок И. Ф.* Осесимметричные резонансные колебания и разогрев оболочек вращения и их контроль пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами // Прикладная механика. – 2010. – Т. 46, № 8. – С. 42–57.

11. *Сенченков И. К., Киричок И. Ф.* Вынужденные нелинейные колебания и диссипативный разогрев вязкоупругой балки // Прикладная механика. – 1987. – Т. 23, № 1. – С. 91–97.

12. *Стивенс К.* Поперечные колебания вязкоупругого стержня с начальной кривизной под действием периодической осевой силы // Прикладная механика, сер. Е. Тр. Амер. об-ва инженеров-механиков. – М.: Мир, 1969. – №. 4. – С. 168–173.

13. *Gabbert U., Tzou H. S.* Smart structures and structronic systems. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001. – 384 p.

14. *Tzou H. S., Anderson G. L. (Eds.)* Intelligent structural Systems. – Dordrecht – Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1992. – 453 p.

15. *Tzou H. S.* Piezoelectric Shells (Distributed Sensing and Control of Continua). – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 400 p.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 16.02.2012

УДК 539.375

V. V. ZOZULYA, doctor of physical and mathematical sciences

NEW HIGH ORDER THEORY FOR FUNCTIONALLY GRADED SHELLS

New theory for functionally graded (FG) shell based on expansion of the equations of elasticity for functionally graded materials (GFMs) into Legendre polynomials series has been developed. Stress and strain tensors, vectors of displacements, traction and body forces have been expanded into Legendre polynomials series in a thickness coordinate. In the same way functions that describe functionally graded relations has been also expanded. Thereby all equations of elasticity including Hook's law have been transformed to corresponding equations for Fourier coefficients. Then system of differential equations in term of displacements and boundary conditions for Fourier coefficients has been obtained. Cases of the first and second approximations have been considered in more details. For obtained boundary-value problems solution finite element (FE) has been used. Numerical calculations have been done with Comsol Multi-physics and Matlab.

Keywords: shell, FEM, FGM, Legendre polynomial.

The FG thin-walled structures have numerous applications, especially in reactor vessels, turbines and many other applications in aerospace engineering [4–6]. Laminated composite materials are commonly used in many kinds of engineering structures. In conventional laminated composite structures, homogeneous elastic laminas are bonded together to obtain enhanced mechanical properties. However, the abrupt change in material properties across the interface between different materials can result in large interlaminar stresses leading to delamination. One way to overcome these adverse effects is to use FGMs in which material properties vary continuously by gradually changing the volume fraction of the constituent materials. This eliminates interface problems of composite materials and thus the stress distributions are smooth.

In this paper we are developing new theory for FG shells based on expansion of the equations of elasticity for GFMs into Legendre polynomials series [1, 2, 7]. We explored such an approach in our previous publications for solution thermoelastic contact problems [8–12]. More specifically, here we expanded functions that describe functionally graded relations into Legendre polynomials series and find Hooke's law that related Fourier coefficients for expansions of stress and strain. Numerical examples are presented.

1. 3-D formulation. Let a linear elastic body occupy an open in 3-D Euclidian space simply connected bounded domain $V \in \mathbf{R}^3$ with a smooth boundary ∂V . We assume that elastic body is inhomogeneous isotropic shell of arbitrary geometry with $2h$ thickness. The domain is $V = \Omega \times [-h, h]$ and it is embedded in in Euclidean space. Boundary of the shell can be presented in the form $\partial V = S \cup \Omega^+ \cup \Omega^-$. Here Ω is the middle surface of the shell, $\partial\Omega$ is its

boundary, Ω^+ and Ω^- are the outer sides and $S = \Omega \times [-h, h]$ is a shear side.

Stress-strain state of the elastic body is defined by stress σ^{ij} and ε_{ij} strain tensors and displacements u_i , traction p_i , and body forces b_i vectors. These quantities are not independent, they are related by equations of elasticity.

For convenience we transform above equations of elasticity taking into account that the radius vector $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ of any point in domain V , occupied by material points of shell may be presented as

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(\mathbf{x}_\alpha) + x_3 \mathbf{n}(\mathbf{x}_\alpha) \quad (1.1)$$

where $\mathbf{r}(\mathbf{x}_\alpha)$ is the radius vector of the points located on the middle surface of shell, $\mathbf{n}(\mathbf{x}_\alpha)$ is a unit vector normal to the middle surface.

Let us consider that $\mathbf{x}_\alpha = (x^1, x^2)$ are curvilinear coordinates associated with main curvatures of the middle surface of the shell. In order to simplify 3-D equations of elasticity we introduce orthogonal system of coordinates related to main curvatures of the middle surface of the shell. Such coordinates are widely used in the shell theory. In this case the equations of equilibrium have the form

$$\begin{aligned} \frac{\partial(A_2 \sigma_{11})}{\partial x_1} + \frac{\partial(A_1 \sigma_{12})}{\partial x_2} + A_1 A_2 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \sigma_{12} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} + \sigma_{13} A_1 A_2 k_1 - \sigma_{22} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} + A_1 A_2 b_1 &= 0, \\ \frac{\partial(A_2 \sigma_{21})}{\partial x_1} + \frac{\partial(A_1 \sigma_{22})}{\partial x_2} + A_1 A_2 \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \sigma_{21} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} + \sigma_{23} A_1 A_2 k_2 - \sigma_{11} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} + A_1 A_2 b_2 &= 0, \\ \frac{\partial(A_2 \sigma_{31})}{\partial x_1} + \frac{\partial(A_1 \sigma_{32})}{\partial x_2} + \frac{\partial(A_1 A_2 \sigma_{33})}{\partial x_3} - \sigma_{11} A_1 A_2 k_1 - \sigma_{22} A_1 A_2 k_2 + A_1 A_2 b_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Cauchy relations have the form

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} u_2 + k_1 u_3, & \varepsilon_{22} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{A_2 A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} u_1 + k_2 u_3, \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} u_2 \right) + \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} u_1 \right), \\ \varepsilon_{13} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - k_1 u_1 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, & \varepsilon_{23} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - k_2 u_2 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Here $A_\alpha(x_1, x_2) = \sqrt{\mathbf{r}(x_1, x_2) \mathbf{r}(x_1, x_2)}$ are coefficients of the first quadratic form of the middle surface of the shell, $k_\alpha(x_1, x_2)$ are it main curvatures.

In the case if inhomogeneous of the shell consists of graduation of the elastic modulus in the x_3 direction generalized Hook's law for FG elastic shell we represent in the form

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = c_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}), \quad c_{ijkl}(x) = E(x) c_{ijkl}^0, \quad (1.4)$$

where for isotropic shell

$$c_{ijkl}^0 = \lambda^0 \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu^0 \delta_{il} \delta_{jk}, \quad \mu^0 = 1/(2(1+\nu)), \quad \lambda^0 = 2\nu\mu^0/(1-2\nu). \quad (1.5)$$

Substituting Cauchy relations (1.3) in Hook's law (1.4) and then Hook's law into equations of equilibrium (1.2) we obtain differential equations of equilibrium in the form of displacements

$$A_{ij}(x)u_j(x) + b_i(x) = 0. \quad (1.6)$$

Here

$$A_{ij}(x) = E(x)c_{ijkl}^0 \partial_k \partial_l = E(x)A_{ij}^0, \quad (1.7)$$

where A_{ij}^0 is a differential operator that correspond to the case of homogeneous equations of elasticity. These equations will be used for elaboration of the 2-D equations for FG shells.

2. 2-D formulation. Let us expand the parameters, that describe stress-strain of the cylindrical shell in the Legendre polynomials series along the coordinate x_3 .

$$\begin{aligned} u_i(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_i^k(x_\alpha) P_k(\omega), & u_i^k(x_\alpha) &= \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h u_i(x_\alpha, x_3) P_k(\omega) dx_3, \\ \sigma_{ij}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{ij}^k(x_\alpha) P_k(\omega), & \sigma_{ij}^k(x_\alpha) &= \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{ij}(x_\alpha, x_3) P_k(\omega) dx_3, \\ \varepsilon_{ij}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{ij}^k(x_\alpha) P_k(\omega), & \varepsilon_{ij}^k(x_\alpha) &= \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h \varepsilon_{ij}(x_\alpha, x_3) P_k(\omega) dx_3, \\ p_i(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_i^k(x_\alpha) P_k(\omega), & p_i^k(x_\alpha) &= \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h p_i(x_\alpha, x_3) P_k(\omega) dx_3, \\ b_i(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_i^k(x_\alpha) P_k(\omega), & b_i^k(x_\alpha) &= \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h b_i(x_\alpha, x_3) P_k(\omega) dx_3. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Substituting these expansions in equations (1.2) – (1.3) we obtain corresponding relations for Legendre polynomials series coefficients. Equations of equilibrium have the form

$$\begin{aligned} \frac{\partial(A_2 \sigma_{11}^k)}{\partial x_1} + \frac{\partial(A_1 \sigma_{12}^k)}{\partial x_2} + \sigma_{12}^k \frac{\partial A_1}{\partial x_2} + \sigma_{13}^k A_1 A_2 k_1 - \sigma_{22}^k \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \underline{\sigma_{13}^k} + A_1 A_2 f_1^k &= 0, \\ \frac{\partial(A_2 \sigma_{21}^k)}{\partial x_1} + \frac{\partial(A_1 \sigma_{22}^k)}{\partial x_2} + \sigma_{12}^k \frac{\partial A_2}{\partial x_1} + \sigma_{23}^k A_1 A_2 k_2 - \sigma_{11}^k \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \underline{\sigma_{23}^k} + A_1 A_2 f_2^k &= 0, \\ \frac{\partial(A_2 \sigma_{31}^k)}{\partial x_1} + \frac{\partial(A_1 \sigma_{32}^k)}{\partial x_2} - \sigma_{11}^k A_1 A_2 k_1 - \sigma_{22}^k A_1 A_2 k_2 - \underline{\sigma_{33}^k} + A_1 A_2 f_3^k &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

where

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}_{i3}^k(\mathbf{x}_\alpha) &= A_1 A_2 \frac{2k+1}{h} \left(\sigma_{i3}^{k-1}(\mathbf{x}_\alpha) + \sigma_{i3}^{k-3}(\mathbf{x}_\alpha) + \dots \right), \\ f_i^k(\mathbf{x}_\alpha) &= b_i^k(\mathbf{x}_\alpha) + \frac{2k+1}{h} \left(\sigma_{i3}^+(\mathbf{x}_\alpha) - (-1)^k \sigma_{i3}^-(\mathbf{x}_\alpha) \right).\end{aligned}\quad (2.3)$$

Cauchy relations have the form

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^k &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1^k}{\partial x_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} u_2^k + k_1 u_3^k, & \varepsilon_{22}^k &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2^k}{\partial x_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} u_1^k + k_2 u_3^k, \\ \varepsilon_{12}^k &= \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial u_1^k}{\partial x_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} u_2^k \right) + \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial u_2^k}{\partial x_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} u_1^k \right), \\ \varepsilon_{13}^k &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3^k}{\partial x_1} - k_1 u_1^k + \underline{u}_1^k, & \varepsilon_{13}^k &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3^k}{\partial x_1} - k_1 u_1^k + \underline{u}_1^k, & \varepsilon_{33} &= \underline{u}_3^k,\end{aligned}\quad (2.4)$$

where

$$\underline{u}_i^k(\mathbf{x}_\alpha) = \frac{2k+1}{h} \left(u_i^{k+1}(\mathbf{x}_\alpha) + u_i^{k+3}(\mathbf{x}_\alpha) + \dots \right). \quad (2.5)$$

In order to transform Hook's law in 1-D form we expand Young's $E(\mathbf{x})$ in Legendre polynomials series

$$E(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^{\infty} E^r(\mathbf{x}_\alpha) P_r(x_3), \quad E^k(\mathbf{x}_\alpha) = \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h E(\mathbf{x}_\alpha, x_3) P_k(x_3) dx_3. \quad (2.6)$$

Substituting this expansion and expansions for stress and strain tensors in Hook's law we obtain 1-D Hook's law for Legendre polynomials series coefficients

$$\sigma_{ij}^n(\mathbf{x}_\alpha) = c_{ijkl}^0 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_m \in^{nrm} E^r(\mathbf{x}_\alpha) \varepsilon_{kl}^m(\mathbf{x}_\alpha), \quad (2.7)$$

where

$$\in^{nrm} = \int_{-1}^1 P_n(x_3) P_r(x_3) P_m(x_3) dx_3. \quad (2.8)$$

Substituting Cauchy relations (2.4) and Hook's law (2.7) in equations of equilibrium (2.2) we obtain differential equations in displacements. This system of equations contains infinite number of equations which are 2-D, they can be written in the form

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\tilde{C}_{ij}(x_1) \frac{\partial u_j^k(x_1)}{\partial x_1} \right] + \tilde{B}_{ij}(x_1) \frac{\partial u_j^k(x_1)}{\partial x_1} + \tilde{A}_{ij}(x_1) u_j^k(x_1) = f_i^k(x_1). \quad (2.9)$$

Here infinite dimensional matrixes have the form $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{C}$, $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ and $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$;

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} C_{ij} & 0 & \dots \\ 0 & C_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} B_{ij}^{00} & B_{ij}^{01} & \dots \\ B_{ij}^{10} & B_{ij}^{11} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{vmatrix} A_{ij}^{00} & A_{ij}^{01} & \dots \\ A_{ij}^{10} & A_{ij}^{11} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{vmatrix} u_j^0 \\ u_j^1 \\ \vdots \end{vmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{vmatrix} f_j^0 \\ f_j^1 \\ \vdots \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

Matrixes \mathbf{C} , \mathbf{B} and \mathbf{A} correspond to the case of homogeneous elastic shells, matrix \mathbf{E} characterized inhomogeneous properties of the shell.

$$\mathbf{E} = \begin{vmatrix} E_{ij}^{00} & E_{ij}^{01} & \dots \\ E_{ij}^{10} & E_{ij}^{11} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}, \quad E_{ij}^{nm} = \begin{vmatrix} E^{nm} & 0 \\ 0 & E^{nm} \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

where $E^{nm} = \epsilon^{nrm} E^r$. Now instead of one 3-D system of the differential equations in displacements (1.6) we have of 2-D infinite differential equations for coefficients of the Legendre's polynomial series expansion. In order to simplify the problem approximate theory has to be developed and only finite set of members have to be taken into account in the expansion (2.1). Order of the system of equations depends on assumption regarding thickness distribution of the stress-strain parameters of the shell.

3. Results and discussion. We consider here the case of relatively thick axisymmetric cylindrical shells. Therefore we will keep three members in polynomial expansion (2.1). In this case we will get the second order approximation equations for functionally graded shells. In this case the stress-strain parameters, which describe the state of the shell, can be presented in the form

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) &= \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}_\alpha) P_0(\omega) + \sigma_{ij}^1(\mathbf{x}_\alpha) P_1(\omega) + \sigma_{ij}^2(\mathbf{x}_\alpha) P_2(\omega), \\ \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) &= \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{x}_\alpha) P_0(\omega) + \varepsilon_{ij}^1(\mathbf{x}_\alpha) P_1(\omega) + \varepsilon_{ij}^2(\mathbf{x}_\alpha) P_2(\omega), \\ u_i(\mathbf{x}) &= u_i^0(\mathbf{x}_\alpha) P_0(\omega) + u_i^1(\mathbf{x}_\alpha) P_1(\omega) + u_i^2(\mathbf{x}_\alpha) P_2(\omega), \\ p_i(\mathbf{x}) &= p_i^0(\mathbf{x}_\alpha) P_0(\omega) + p_i^1(\mathbf{x}_\alpha) P_1(\omega) + p_i^2(\mathbf{x}_\alpha) P_2(\omega), \\ b_i(\mathbf{x}) &= b_i^0(\mathbf{x}_\alpha) P_0(\omega) + b_i^1(\omega) P_1(\omega) + b_i^2(\mathbf{x}_\alpha) P_2(\omega). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Taking into account formulae (2.8) for the coefficients ϵ^{nrm} Hook's law for coefficients of the Legendre polynomials series expansion(2.7) has the form

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^0 &= c_{ijkl}^0 \left(2E^0 \varepsilon_{kl}^0 + \frac{2}{3} E^1 \varepsilon_{kl}^1 + \frac{2}{5} E^2 \varepsilon_{kl}^2 \right), \\ \sigma_{ij}^1 &= c_{ijkl}^0 \left(\frac{2}{3} E^1 \varepsilon_{kl}^0 + \left(\frac{2}{3} E^0 + \frac{4}{15} E^2 \right) \varepsilon_{kl}^1 + \frac{4}{15} E^1 \varepsilon_{kl}^2 \right), \\ \sigma_{ij}^2 &= c_{ijkl}^0 \left(\frac{2}{5} E^2 \varepsilon_{kl}^0 + \frac{4}{15} E^1 \varepsilon_{kl}^1 + \left(\frac{2}{5} E^0 + \frac{4}{35} E^2 \right) \varepsilon_{kl}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Now system of equations for displacements has the same form as (2.9), but it contains only four equations and corresponding matrixes and vector have the form

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2E^0 & 0 & \frac{2}{3}E^1 & 0 & \frac{2}{5}E^2 & 0 \\ 0 & 2E^0 & 0 & \frac{2}{3}E^1 & 0 & \frac{2}{5}E^2 \\ \frac{2}{3}E^1 & 0 & \frac{2}{3}E^0 + \frac{4}{15}E^2 & 0 & \frac{4}{15}E^1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}E^1 & 0 & \frac{2}{3}E^0 + \frac{4}{15}E^2 & 0 & \frac{4}{15}E^1 \\ \frac{2}{5}E^2 & 0 & \frac{4}{15}E^1 & 0 & \frac{2}{5}E^0 + \frac{4}{35}E^2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}E^2 & 0 & \frac{4}{15}E^1 & 0 & \frac{2}{5}E^0 + \frac{4}{35}E^2 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda}{R} & 0 & \frac{\lambda}{h} & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{R} & 0 & \frac{\mu}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3\mu}{h} & 0 & \frac{\lambda}{R} & 0 & \frac{3\lambda}{h} \\ -\frac{3\lambda}{h} & 0 & -\frac{\lambda}{R} & 0 & \frac{3\mu}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5\mu}{h} & 0 & \frac{\lambda}{R} \\ 0 & 0 & -\frac{5\lambda}{h} & 0 & -\frac{\lambda}{R} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_3^0 \\ u_1^1 \\ u_3^1 \\ u_1^2 \\ u_3^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1^0 \\ f_3^0 \\ f_1^1 \\ f_3^1 \\ f_1^2 \\ f_3^2 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda+2\mu}{R^2} & 0 & -\frac{\lambda}{Rh} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3\mu}{h^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3\lambda}{Rh} & 0 & -(\lambda+2\mu)\left(\frac{1}{R^2} + \frac{3}{h^2}\right) & 0 & -\frac{3\lambda}{Rh} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{15\mu}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5\lambda}{Rh} & 0 & 0 & -(\lambda+2\mu)\left(\frac{1}{R^2} + \frac{15}{h^2}\right) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$C = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Substituting these matrices into (2.9) we obtain system of differential equations which together with corresponding boundary conditions can be used for the stress-strain calculation for the second approximation shell theory.

Material properties of an FGM are the functions of volume fractions and they are managed by a volume fraction. When the shell is considered to consist of two materials with Young's modulus E_1 and E_2 respectively, the effective Young's modulus $E(x_3)$ given by the following power-law expression

$$E(x_3) = (E_2 - E_1) \left(\frac{x_3 + h}{2h} \right)^n + E_1 \quad (n \geq 0). \quad (3.7)$$

Substituting function (3.7) into equation (2.6) we obtain expressions for the Legendre polynomials coefficients for the effective Young's modulus

$$E^1 = \frac{(E_2 + E_1)n}{1+n}, \quad E^2 = \frac{(E_2 - E_1)nh}{2+3n+n^2}, \quad E^3 = -\frac{5(E_2 - E_1)(n-1)nh^2}{(1+n)(2+n)(3+n)}. \quad (3.8)$$

For simplicity in this study we consider dimensionless coordinates $\xi_1 = x_1/L$ and $\xi_3 = x_3/h$ have been introduced. Calculations have been done for Young's modulus equal to $E_1 = 1 \text{ Pa}$ and $E_1/E_2 = 2$ and for Poisson ratio

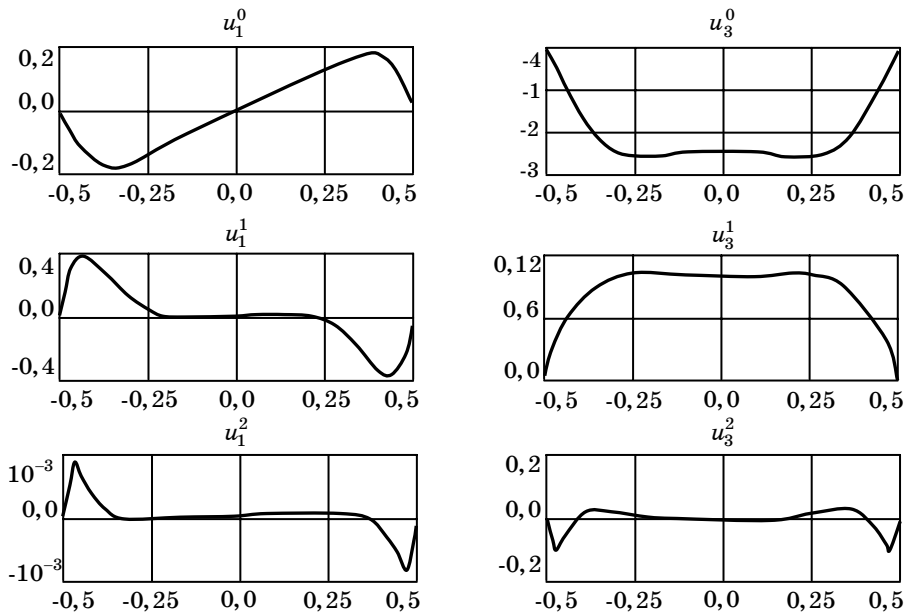


Fig.1

$\nu=0.3$ respectively, other parameters are $R=0.25L$, $h=0.25R$ and $n=0.2$. Numerical calculations have been done using commercial software Comsol Multiphysics and Matlab. Results of calculations are presented on Fig. 1–3.

Fig. 1 shows the Legendre polynomials coefficients for the displace-

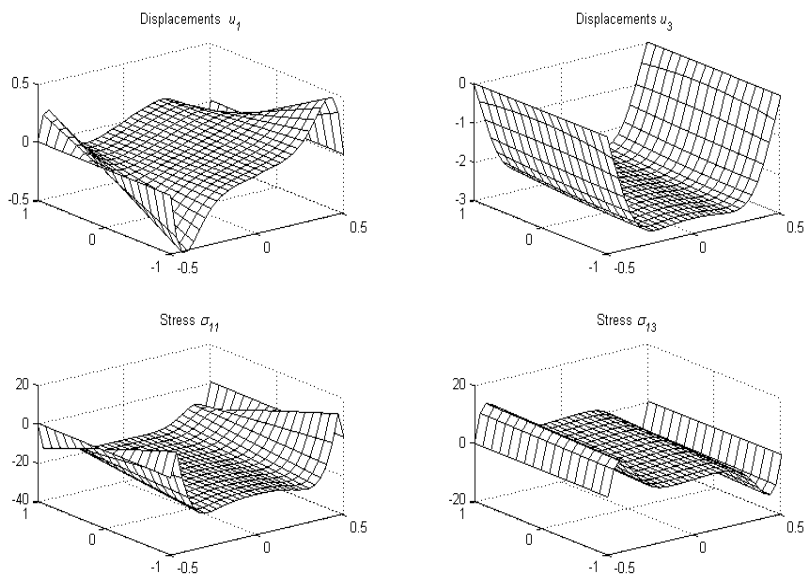


Fig.2

ments distribution versus the normalized length for the second approximation theory. These coefficients are FEM solutions of the systems of differential equations (2.9) with matrix operators (3.3)–(3.4). Fig. 2 shows displacements and stresses distribution versus normalized length and thickness for second approximation theory.

РЕЗЮМЕ. Розроблена нова теорія для функціонально градієнтних (неоднорідних по товщині) оболонок, заснована на розкладанні тривірних рівнянь теорії пружності для неоднорідного тіла в ряди по поліномах Лежандра. Більш докладно розглянуті випадки першого і другого наближень. Чітко сформульовані всі необхідні рівняння для коефіцієнтів Фур'є вказаного розкладання, а також відповідні крайові задачі. Для численного рішення сформульованої проблеми застосовано метод кінцевих елементів (МКЕ) і використано комерційне програмне забезпечення COMSOL Multiphysics і Matlab. Для перевірки запропонованої теорії і отриманих рівнянь здійснено порівняння з результатами, отриманими за допомогою рівнянь теорії пружності з використанням експоненціального закону зміни властивостей матеріалу по товщині для випадку осесиметричної циліндричної оболонки. Вивчено вплив різних параметрів на напружено-деформоване стані осесиметричної циліндричної оболонки.

Ключевые слова: оболочка, МКЭ, МФГ, полиномы Лежандра.

РЕЗЮМЕ. Розроблено нову теорію для функціонально градієнтних (неоднорідних по товщині) оболонок, яка заснована на розкладанні тривірних рівнянь теорії пружності для неоднорідного тіла в ряди по поліномах Лежандра. Більш докладно розглянуті випадки першого і другого наближень. Чітко сформульовані всі необхідні рівняння для коефіцієнтів Фур'є вказаного розкладання, а також відповідні крайові задачі. Для чи-

сельного рішення сформульованої проблеми застосовувався метод кінцевих елементів (МКЕ) і використалось комерційне програмне забезпечення COMSOL Multiphysics і Matlab. Для перевірки запропонованої теорії та отриманих рівнянь робилось порівняння з результатами, отриманими за допомогою рівнянь теорії пружності з використанням експоненційного закону зміни властивостей матеріала по товщині. Вивчено вплив різних параметрів на напружено-деформований стан осесиметричної циліндричної оболонки.

Ключові слова: оболонка, МСЕ, МФГ, поліноми Лежандра.

REFERENCES

1. *Gulyaev V. I., Bazhenov V. A., Lizunov P. P.* The Nonclassical Theory of Shells and Its Application to the Solution of Engineering Problems. – L'vov: Vyshcha Shkola, 1978. – 190 p.
2. *Pelekh B. L., Suhorolskiy M. A.* Contact problems of the theory of elastic anisotropic shells. – Kiev: Naukova dumka, 1980. – 216 p.
3. *Reddy J. N., Praveen G. N.* Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates // *Int. J. Sol. Struct.* – 1998. – Vol. 35. – P. 4457–4476.
4. *Reddy J. N.* Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. Second ed. – CRC Press LLC, 2004. – 855 p.
5. *Shen H-S.* Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells. – CRC Press, Taylor & Francis Group, 2009.
6. *Shiota I, Miyamoto Y.* Functionally Graded Materials 1996. In: *Prosiding of 4th International Symposium on Functionally Graded Materials.* – Tokyo, Japan.: Elsevier, 1997. – 803 p.
7. *Vekua I. N.* Some General Methods for Constructing Various Versions of the Theory of Shells. – Moscow: Nayka, 1982. – 288 p.
8. *Zozulya V. V.* The combines problem of thermoelastic contact between two plates though a heat conducting layer // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* – 1989. – Vol. 53, № 5. – P. 622–627.
9. *Zozulya V. V.* Contact cylindrical shell with a rigid body though the heat-conducting layer in transitional temperature field // *Mechanics of Solids.* – 1991. – Vol. 2, – P. 160–165.
10. *Zozulya V. V.* Nonperfect contact of laminated shells with considering debonding between laminas in temperature field // *Theoretical and Applied mechanics.* – 2006. – Vol. 42, – P. 92–97.
11. *Zozulya V. V.* Laminated shells with debonding between laminas in temperature field // *International Applied Mechanics.* – 2006. – Vol. 42, № 7, – P. 842–848.
12. *Zozulya V. V.* Mathematical Modeling of Pencil-Thin Nuclear Fuel Rods. In: *Gupta A., ed. Structural Mechanics in Reactor Technology.* – Toronto, Canada, 2007. – P. C04–C12.

*Centro de Investigacion Cientifica de Yucatan, A.C.,
Merida, Yucatan, Mexico.*

Поступила 09.03.2012

Вниманию авторов статей

1. В журнале публикуются статьи, содержащие новые результаты теоретических и экспериментальных исследований в области двумерной и трехмерной механики деформируемого твердого тела, теории упругости и пластичности, механики разрушения, а также гидромеханики.

2. Статья, подготовленная в текстовом редакторе Word, направляется по e-mail: journaltam@matfak.dongu.donetsk.ua, kaloerov@mail.ru

3. При подготовке статьи необходимо соблюдать структуру изложения: в начале приводится УДК, авторы (с указанием научной степени) и название статьи, затем аннотация и ключевые слова, потом введение (история вопроса и место данной работы), постановка задачи (физическая, математическая), метод и построение решения (без анализа результатов других работ), анализ полученных теоретических и числовых результатов с выводами. В конце статьи приводится список литературы, а также на украинском и английском языках – резюме и ключевые слова (переводы аннотации в начале статьи). Статья должна быть научно и литературно обработана. Особое внимание нужно уделять правильному использованию общепринятой терминологии. Авторам нужно учитывать правильное использование понятий «величина» и «значение» и не допускать стилистических и терминологических погрешностей. Все числовые значения используемых величин должны приводиться в системе СИ. В десятичных дробях целая часть должна отделяться от дробной запятой (а не точкой).

4. Текст статьи в редакторе Word набирается шрифтом UkrainianSchoolBook (размером 11), аннотация, ключевые слова, резюме и список литературы, табличный материал – тем же шрифтом размером 9. Формулы набираются с использованием Microsoft Equation или MathType шрифтом UkrainianSchoolBook и Symbol: Full – 11 pt, subscript /superscript – 70 %, sub-subscript/ superscript – 60 %, symbol – 150 %, sub-symbol – 100 %; текст и переменные – курсивом. Указанным способом набираются также все буквы латинского и греческого алфавитов, встречающиеся в тексте. Межстрочный интервал – одинарный. Каждая формула отделяется от основного текста интервалом в 5 пунктов. Параметры страницы: формат – В5 (176×250 мм), поля зеркальные; сверху – 1,7 см, снизу – 2,2 см, внутри – 1,8 см, снаружи – 1,5 см, абзацный отступ 1 см

5. Группы формул отделяются друг от друга знаком точки с запятой, внутри группы формулы отделяются друг от друга знаком запятой. Каждая строка формул набирается отдельным объектом Microsoft Equation. Во всех случаях после знаков препинания ставится один (в объектах Microsoft Equation – два) пробел. Если в строке за формулой в скобках приведены расшифровки величин, то перед скобкой знак запятой или точки с запятой не ставится, но ставятся один пробел. В тех случаях, когда скобки или знаки арифметических действий внутри формул сливаются с соседними символами, нужно ставить пробелы внутри объекта Microsoft Equation. Номер формулы или группы формул ставится в конце последней строки формул. Если подряд приводятся несколько групп формул, то они отделяются друг от друга знаком точки с запятой.

6. Рисунки изготавливаются с использованием графического редактора и представляются в электронном виде в двух экземплярах: «немой» (в формате jpg, bmp и т. д., без подписей), для редактирования при необходимости, и с обозначениями. Сканированные рисунки не принимаются. На рисунки наносятся негустые равномерные сетки, основные линии выполняются толще, чем линии сетки и осей координат; буквенные обозначения набираются размером 9.

7. К статье прилагаются на отдельном листе данные об авторе (авторах) – фамилия, имя, отчество, адрес, телефон, а также на украинском и английском языках фамилии и инициалы авторов и название статьи.