

---

---

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Хома И. Ю., Дашко О. Г.</i> , Равномерное всестороннее растяжение неограниченной трансверсально-изотропной пластины с криволинейным отверстием . . . . .	3
<i>Шалдырван В. А., Ержаков Г. В.</i> Напряженное состояние транслопной плиты с двумя круговыми полостями . . . . .	11
<i>Кириллюк В. С., Левчук О. И.</i> Контактное взаимодействие двух жестких плоских эллиптических штампов с электрорупругим полупространством (с неселектродированной поверхностью) . . . . .	19
<i>Оксенчук Н. Д., Сенченков И. К., Червинко О. П.</i> Микроструктурные превращения в полупространстве под действием теплового импульса . . . . .	26
<i>Селиванов М. Ф.</i> Определение распределений сил сцепления трещины смешанного режима разрушения . . . . .	33
<i>Бондаренко Н. С., Гольцев А. С.</i> Исследование влияния внешней среды на термоупругое состояние изотропной пластины с теплоизолированным разрезом при одностороннем теплообмене . . . . .	42
<i>Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т. В.</i> Об эквивалентности метода КБМ и метода комплексных характеристик при исследовании нелинейных колебаний неупругих тел . . . . .	53
<i>Курпа Л. В., Шматко Т. В.</i> Применение метода R-функций к исследованию нелинейных колебаний функционально-градиентных пологих оболочек . . . . .	59
<i>Глухов И. А., Сторожев В. И.</i> Локализованные P-SV волны в транслопном слое между транслопными полупространствами при условиях скользящего контакта. . . . .	71
<i>Пачева М. Н., Сторожев В. И.</i> Рассеяние нормальных сдвиговых волн у наклонной торцевой поверхности свободного полуслоя . . . . .	82
<i>Шпак В. А.</i> Классификация топологии ветвей краевых стоячих упругих волн в полных дисперсионных спектрах для анизотропных пластин орторомбической системы . . . . .	91

<i>Калоеров С.А., Занько А.И., Кошкин А.А.</i> Решения задач об изгибе тонких плит для канонических областей. . . . .	99
<i>Моисеенко И.А.</i> Спектры нормальных упругих волн кручения в экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах . . . . .	139

УДК 539.3

И. Ю. ХОМА, д-р физ.-мат. наук,  
О. Г. ДАШКО, канд. физ.-мат. наук,

### РАВНОМЕРНОЕ ВСЕСТОРОННЕЕ РАСТЯЖЕНИЕ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

*Получено решение задачи о напряженном состоянии неограниченной трансверсально-изотропной пластины, ослабленной криволинейным отверстием. Пластина находится под действием равномерного всестороннего растяжения на бесконечности, а на контуре отверстия выполняются однородные условия линейной комбинации составляющих внешних напряжений и составляющей касательного смещения. Исследовано влияние упругих свойств материала и геометрических параметров на распределение напряжений в окрестности отверстия.*

*Ключевые слова:* трансверсально-изотропная пластина, криволинейное отверстие, напряженное состояние.

В работах [4, 5] изложена методика решения задач о напряженном состоянии нетонких трансверсально-изотропных пластин с криволинейными (некруговыми) отверстиями. В основу положен метод разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра [1, 8] и метод возмущения формы границы [2]. Изложенным способом в статьях [6, 7] найдено решение задачи о напряженном состоянии около эллиптического отверстия в пластине, находящейся под действием постоянных растягивающих и сдвигающих усилий. В данной работе этим же способом рассматривается задача об определении напряженного состояния неограниченной трансверсально-изотропной пластины, ослабленной квадратным отверстием. Пластина находится под действием постоянного всестороннего растяжения, а на контуре выполняются однородные условия линейной комбинации составляющих внешних напряжений и составляющей касательного смещения.

**Постановка задачи и метод решения.** Рассмотрим неограниченную трансверсально-изотропную пластину постоянной толщины  $2h$ . Отнесем ее к декартовой системе координат  $x_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) и будем считать, что  $x_1, x_2$  принадлежат срединной плоскости  $S$ , совпадающей с плоскостью изотропии пластины, а  $x_3 \in [-h, h]$ . Пластина ослаблена некруговой цилиндрической полостью  $L \times [-h, h]$ , кривая  $L$  которой незначительно отличается от круга радиуса  $R$ . На поверхности полости имеют место однородные условия линейной комбинации составляющих внешних напряжений и составляющей касательного смещения, а на бесконечности пластина находится под действием равномерного всестороннего растяжения.

Для решения задачи воспользуемся методом разложения искомых функций компонент вектора перемещений  $u_j(x_1, x_2, x_3)$  и тензора на-

пряжений  $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$  в ряды Фурье по полиномам Лежандра  $P_k(\xi)$  координаты толщины  $\xi = h^{-1}x_3$  и методом возмущения формы границы. Относительно коэффициентов разложения  $u_j^{(m)}(x_1, x_2)$ ,  $\sigma_{ij}^{(m)}(x_1, x_2)$  как функций двух независимых переменных получаем систему дифференциальных уравнений и естественные граничные условия. При симметричном относительно плоскости  $S$  деформировании пластины общее аналитическое решение системы уравнений имеет вид [8]

$$\begin{aligned}
 c_{66}u_+^{(0)} &= \kappa^* \varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + h \sum_{l=1}^N a_l^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_l, \\
 c_{66}u_+^{(2)} &= \kappa_2^* h^2 \overline{\varphi''(z)} + h \sum_{l=1}^N a_l^{(2)} \partial_{\bar{z}} V_l + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2)} \partial_{\bar{z}} W_s, \\
 c_{66}u_+^{(2k)} &= h \sum_{l=1}^N a_l^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_l + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}} W_s \quad (k = \overline{2, n}), \\
 c_{66}u_3^{(1)} &= -\kappa_1^* h \left[ \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + \sum_{l=1}^N c_l^{(1)} V_l, \\
 c_{66}u_3^{(2k+1)} &= \sum_{l=1}^N c_l^{(2k-1)} V_l \quad (k = \overline{2, n}),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $u_+^{(2k)} = u_1^{(2k)} + iu_2^{(2k)}$ ,  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  – произвольные голоморфные функции комплексной переменной  $z = x + iy$ ;  $V_l$  и  $W_s$  – метагармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\Delta V_l - k_l h^{-2} V_l = 0 \quad (l = \overline{1, N}), \quad \Delta W_s - \lambda_s h^{-2} W_s = 0 \quad (s = \overline{1, n}), \tag{2}$$

в которых параметрами  $k_l$  и  $\lambda_s$  служат корни соответствующих характеристических уравнений;  $a_l^{(2k)}$ ,  $b_s^{(2k)}$ ,  $c_l^{(2k-1)}$  – безразмерные константы;

$$\kappa^* = 1 + 2c_{66}/c_1 c_{11}, \quad \kappa_1^* = 2c_{13} c_{66}/c_1 c_{11} c_{33}, \quad \kappa_2^* = 4c_{13} c_{66}/3c_1 c_{11} c_{33};$$

$c_1 = c - c_{66}/c_{11}$ ,  $c = 1 - c_{13}^2/c_{11} c_{33}$ ,  $c_{11}, c_{12} \dots c_{66}$  – упругие постоянные, определяемые формулами

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= (1 - e v^2) E/d, \quad c_{12} = (v + e v^2) E/d, \quad c_{13} = v'(1 + v) E/d, \\
 c_{33} &= (1 - v^2) E/ed, \quad c_{44} = G', \quad c_{66} = E/2(1 + v), \\
 d &= (1 + v)(1 - v - 2e v^2);
 \end{aligned}$$

$e = E/E'$ ,  $v$ ,  $v'$  и  $E$ ,  $E'$  – коэффициенты Пуассона и модули упругости соответственно в плоскости изотропии и нормальной к ней плоскости,  $G'$  – поперечный модуль сдвига,  $N = 2n$  ( $n = 0, 1, \dots < \infty$ ).

Моменты напряжений  $\sigma_{ij}^{(m)}$  в комплексной форме представляются таким образом:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{22}^{(0)} &= 4 \left[ \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + 2h^{-1} \sum_{l=1}^N d_l^{(0)} \mathcal{V}_l, & \sigma_{33}^{(0)} &= h^{-1} \sum_{l=1}^N d_{3l}^{(0)} \mathcal{V}_l, \\
\sigma_{11}^{(0)} - \sigma_{22}^{(0)} + 2i \sigma_{12}^{(0)} &= 4 \left[ -z \overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)} + h \sum_{l=1}^N a_l^{(0)} \partial_{\bar{z}}^2 \mathcal{V}_l \right], \\
\sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} &= 2h^{-1} \sum_{l=1}^N d_l^{(2k)} \mathcal{V}_l, & \sigma_{33}^{(2k)} &= h^{-1} \sum_{l=1}^N d_{3l}^{(2k)} \mathcal{V}_l \quad (k = \overline{1, n}), \\
\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i \sigma_{12}^{(2k)} &= 4 \left( \mu_*^{(2k)} h^2 \overline{\varphi'''(z)} + h \sum_{l=1}^N a_l^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 \mathcal{V}_l + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 \mathcal{W}_s \right), \\
\sigma_+^{(2k+1)} &= 2 \left( \sum_{l=1}^N p_l^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} \mathcal{V}_l + i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} \mathcal{W}_s \right) \quad (k = \overline{1, n}), \tag{3}
\end{aligned}$$

где  $\sigma_+^{(2k-1)} = \sigma_{13}^{(2k-1)} + i \sigma_{23}^{(2k-1)}$ ,  $\mu_*^{(2)} = \kappa_2^*$ ,  $\mu_*^{(2k)} = 0$  ( $k > 1$ );  $d_l^{(2k)}$ ,  $d_{3l}^{(2k)}$ ,  $p_l^{(2k-1)}$ ,  $q_s^{(2k-1)}$  – константы.

Введем полярную систему координат  $r$ ,  $\theta$  и воспользуемся формулами преобразования

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} + 2i \sigma_{r\theta}^{(2k)} &= e^{-2i\theta} \left( \sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i \sigma_{12}^{(2k)} \right), \\
\sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} &= \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)}, & \sigma_{r3}^{(2k-1)} + i \sigma_{\theta 3}^{(2k-1)} &= e^{-i\theta} \sigma_+^{(2k-1)}, \\
u_r^{(2k)} + u_\theta^{(2k)} &= e^{-i\theta} u_+^{(2k)} \quad (k = \overline{0, N}), \tag{4}
\end{aligned}$$

Отсюда получим необходимые выражения для граничных условий соответствующих краевых задач. В частности, имеем такие равенства:

$$\begin{aligned}
2\sigma_{rr}^{(2k)} &= \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} + \operatorname{Re} \left[ e^{-2i\theta} \left( \sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i \sigma_{12}^{(2k)} \right) \right], \\
\sigma_{r3}^{(2k-1)} &= \operatorname{Re} \left( \sigma_+^{(2k-1)} e^{-i\theta} \right), & c_{66} u_\theta^{(2k)} &= \operatorname{Im} \left( c_{66} u_+^{(2k)} e^{-i\theta} \right). \tag{5}
\end{aligned}$$

Для бесконечной области  $S$ , ограниченной кривой  $L$ , голоморфные функции  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  примем в виде

$$\varphi(z) = \Gamma z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad \psi(z) = \Gamma' z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}, \tag{6}$$

в котором  $a_n$ ,  $b_n$  – произвольные постоянные,  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  – константы, определяемые напряжениями, заданными на бесконечности, т.е.

$$\Gamma + \bar{\Gamma} = \frac{1}{4} \left( \sigma_{11}^{(0)\infty} + \sigma_{22}^{(0)\infty} \right), \quad \Gamma' = \frac{1}{4} \left( \sigma_{22}^{(0)\infty} - \sigma_{11}^{(0)\infty} + 2i \sigma_{12}^{(0)\infty} \right).$$

При всестороннем растяжении пластины  $\sigma_{11}^{(0)\infty} = \sigma_{22}^{(0)\infty} = p$ ,  $\sigma_{12}^{(0)\infty} = 0$  и, следовательно,  $\Gamma + \bar{\Gamma} = p/2$ ,  $\Gamma' = 0$ . Метагармонические функции потенциального решения  $V_l$  представим таким образом:

$$\begin{aligned} V_l &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(l)} K_n(rR^{-1}x_l) e^{in\theta}, \quad l \in [1, 2n_1], \\ V_{2l+1} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(l)} H_n^{(1)}(rR^{-1}x_{2l+1}) e^{in\theta}, \quad l \in [n_1, n-1], \\ V_{2l+1} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n^{(l)} H_n^{(2)}(rR^{-1}x_{2l+2}) e^{in\theta}, \quad n_1 \leq n, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $K_n(rR^{-1}x_l)$  – модифицированные функции Бесселя,  $H_n^{(1)}(rR^{-1}x_{2l+1})$  и  $H_n^{(2)}(rR^{-1}x_{2l+2})$  – цилиндрические функции Ханкеля первого и второго рода;  $x_l = Rh^{-1}\sqrt{k_l}$ ,  $x_{2l+1} = Rh^{-1}\sqrt{-k_{2l+1}}$ ,  $x_{2l+2} = \bar{x}_{2l+1}$ ;  $B_n^{(l)}$ ,  $C_n^{(l)}$ ,  $D_n^{(l)}$  – произвольные постоянные.

Корни характеристического уравнения вихревой части решения являются вещественными положительными, поэтому

$$W_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{B}_n^{(s)} K_n(rh^{-1}\sqrt{\lambda_s}) e^{in\theta}. \quad (8)$$

Для однородных граничных условий следует, что

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(2k)}(r, \theta) \Big|_{r=R} &= 0 \quad l \in [n_1, n-1], \\ u_{\theta}^{(2k)}(r, \theta) \Big|_{r=R} &= 0 \quad (k = \overline{0, N}), \\ \sigma_{r3}^{(2k-1)}(r, \theta) \Big|_{r=R} &= 0 \quad (k = \overline{1, N}), \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда, учитывая формулы (1), (3), (5) и значения функций (6)–(8), получаем систему алгебраических уравнений для определения неизвестных констант.

Пусть пластина ослаблена некруговой цилиндрической полостью, контур  $L$  которой в плоскости  $S$  незначительно отличается от кругового контура радиуса  $R$  и описывается уравнениями [3]

$$x_1 = R(\cos \vartheta + \varepsilon \cos m\vartheta), \quad x_2 = R(\sin \vartheta - \varepsilon \sin m\vartheta), \quad (10)$$

где  $m$  – целое положительное число,  $\varepsilon$  – малый параметр. При определенных значениях  $m$  и  $\varepsilon$  получаем соответствующие формы отверстий: эллиптическое, квадратное и треугольное с закругленными углами. Функция, конформно отображающая внешнюю область единичного круга на бесконечную область, ограниченную кривой (10), задается формулой

$$z = x + iy = R^{-1}\omega(\zeta) = \zeta + \varepsilon f(\zeta), \quad (11)$$

в которой  $x = x_1/R$ ,  $y = x_2/R$ ,  $z = re^{i\theta}$ ,  $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$ ,  $f(\zeta) = \zeta^{-m}$ ,  $x$ ,  $y$  – безразмерные декартовы координаты,  $\rho$ ,  $\vartheta$  – ортогональные криволинейные координаты.

Поскольку криволинейная система координат  $(\rho, \vartheta, \xi)$  повернута на некоторый угол  $\beta$  относительно полярной  $(r, \theta, x_3)$  вокруг общей оси  $\xi = h^{-1}x_3$ , то по формулам преобразования имеем соотношения

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho}^{(2k)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} - 2i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k)} &= e^{2i\beta} \left( \sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} - 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)} \right), \\ \sigma_{\rho\rho}^{(2k)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} &= \sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k)}, \quad \sigma_{\xi\xi}^{(2k)} = \sigma_{33}^{(2k)} \quad (k = \overline{0, n}), \\ \sigma_{\rho\xi}^{(2k-1)} - i\sigma_{\vartheta\xi}^{(2k-1)} &= e^{i\beta} \left( \sigma_{r3}^{(2k-1)} - i\sigma_{\theta3}^{(2k-1)} \right) \quad (k = \overline{1, n}), \\ u_{\rho}^{(2k)} - iu_{\vartheta}^{(2k)} &= e^{i\beta} \left( u_r^{(2k)} - iu_{\theta}^{(2k)} \right) \quad (k = \overline{0, n}).\end{aligned}\quad (12)$$

Здесь  $\sigma_{i'j'}^{(m)} = \sigma_{i'j'}^{(k)}(\rho, \vartheta)$  ( $i', j' = \rho, \vartheta, \xi$ ),  $\sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)}(r, \theta)$  ( $i, j = r, \theta, 3$ ).

Краевые условия в криволинейной системе координат записываются таким же способом, как и на контуре кругового отверстия. Следовательно

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho}^{(2k)}(\rho, \vartheta)\Big|_{\rho=1} &= 0, \quad u_{\vartheta}^{(2k)}(\rho, \vartheta)\Big|_{\rho=1} = 0 \quad (k = \overline{0, n}), \\ \sigma_{\rho\xi}^{(2k-1)}(\rho, \vartheta)\Big|_{\rho=1} &= 0.\end{aligned}\quad (13)$$

Основные уравнения (2) в переменных  $\rho$ ,  $\vartheta$  будут достаточно сложными и найти их точное решение не представляется возможным. Поэтому, следуя [2, 3], решение поставленной задачи будем искать в виде рядов по положительным степеням малого параметра  $\varepsilon$ , т.е.

$$\sigma_{i'j'}^{(m)}(\rho, \vartheta) = \sum_{(\tau)} \varepsilon^{\tau} \sigma_{i'j'}^{(m,\tau)}(\rho, \vartheta), \quad u_{j'}^{(m)}(\rho, \vartheta) = \sum_{(\tau)} \varepsilon^{\tau} u_{j'}^{(m,\tau)}(\rho, \vartheta). \quad (14)$$

Пользуясь равенствами (12), представим и правые части в виде рядов по степеням параметра  $\varepsilon$ . Получаем такие соотношения

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2k,l)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k,l)} - 2i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k,l)} = \sum_{j=0}^l \Lambda_2^{(l-j)} \left( \sigma_{rr}^{(2k,j)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k,j)} - 2i\sigma_{r\theta}^{(2k,j)} \right),$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2k,l)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k,l)} = \sum_{j=0}^l \Lambda_1^{(l-j)} \left( \sigma_{rr}^{(2k,j)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k,j)} \right),$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2k,l)} = \sum_{j=0}^l \Lambda_1^{(l-j)} \sigma_{33}^{(2k,j)},$$

$$\sigma_{\rho\xi}^{(2k-1,l)} - i\sigma_{\vartheta\xi}^{(2k-1,l)} = \sum_{j=0}^l \Lambda_3^{(l-j)} \left( \sigma_{r3}^{(2k-1,j)} - i\sigma_{\theta3}^{(2k-1,j)} \right) \quad (k = \overline{1, n}),$$

$$u_p^{(2k,l)} - iu_9^{(2k,l)} = \sum_{j=0}^l \Lambda_3^{(l-j)} \left( u_r^{(2k,j)} - iu_\theta^{(2k,j)} \right), \quad (15)$$

где  $\Lambda_p^{(j)}$  – операторы вида

$$\Lambda_p^{(0)} = 1 \quad (p=1, 2, 3),$$

$$\Lambda_1^{(1)} = L_1, \quad \Lambda_2^{(1)} = L_1 + 2iq_1, \quad \Lambda_3^{(1)} = L_1 + iq_1, \quad \Lambda_1^{(2)} = \frac{1}{2}L_2,$$

$$\Lambda_2^{(2)} = \frac{1}{2}L_2 - 2q_1^2 + 2i(q_1L_1 + q_2), \quad \Lambda_3^{(2)} = \frac{1}{2}L_2 - q_1^2 + i(q_1L_1 + q_2),$$

причем

$$q_1 = \frac{m+1}{\rho^{m+1}} \sin(m+1)\vartheta, \quad q_2 = \frac{m^2-1}{2\rho^{2(m+1)}} \sin 2(m+1)\vartheta,$$

$$L_1 = \frac{\cos(m+1)\vartheta}{\rho^m} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin(m+1)\vartheta}{\rho^m} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \vartheta}.$$

Напряжения, фигурирующие в правых частях равенств (15), представляются аналогичными (3) формулами, в которых проведена замена переменных  $z, \bar{z}$  на переменные  $\zeta, \bar{\zeta}$  (или же замена переменных  $r/R, \theta$  на  $\rho, \vartheta$ ). Таким образом, в каждом из приближений приходим к решению задачи для кругового отверстия.

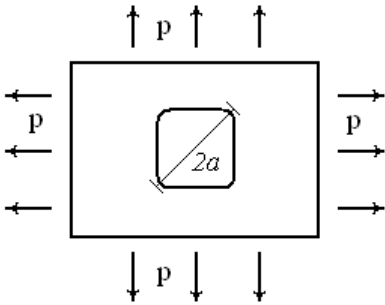


Рис. 1

#### Результаты численных исследований.

Численные расчеты выполнены для квадратного отверстия с закругленными углами, параметры которого имеют значения [3]:  $m=3, \varepsilon=1/9, R=0,9a$ , где  $2a$  – диагональ квадрата (рис. 1).

Найдены выражения для компонент тензора напряжений. Так, в частности, кольцевое напряжение  $\sigma_{99}/p$  с точностью до  $\varepsilon^2$  определяется формулой

$$\frac{\sigma_{99}}{p} = 1 + \frac{1}{\rho^2} - \sum_{k=0}^n \left\{ \varepsilon t_{99}^{(2k,1)}(\rho) \cos 4\vartheta + \varepsilon^2 \left[ t_{99}^{(2k,0)}(\rho) + t_{99}^{(2k,2)}(\rho) \cos 8\vartheta \right] \right\} P_{2k}(\xi),$$

где  $t_{99}^{(2k,j)}(\rho)$  – составляющие, содержащие цилиндрические функции.

Расчеты проведены для пластины с коэффициентами Пуассона  $\nu=0,3, \nu'=0,25$  и отношениями модулей упругости  $E/E'=1,5, E/G'=2,5$ . На рис. 2 и 3 представлены кривые изменения окружных  $\sigma_{99}/p$  и нормальных поперечных  $\sigma_{33}/p$  напряжений на контуре отверстия  $\rho=1$  в точке  $\vartheta=\pi/4, \xi=0$  в зависимости от относительной толщины пластины  $a/h$ . Линия, обозначенная индексом ноль, соответствует круго-



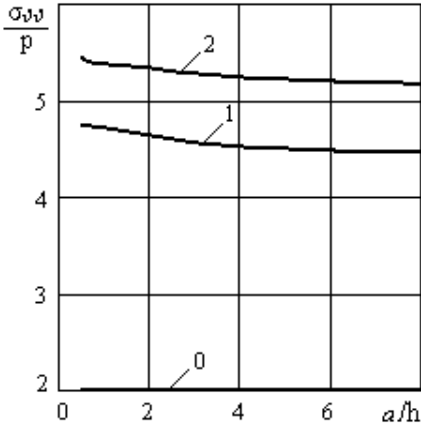


Рис. 2

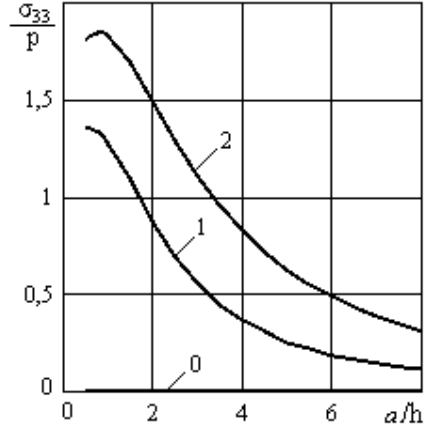


Рис. 3

вому отверстию, а кривые 1 и 2 относятся к квадратному отверстию соответственно в первом и во втором приближениях.

Кривые на рис. 4 характеризуют изменение нормальных напряжений  $\sigma_{33}/p$  по толщине пластины в сечении  $\rho = 1,06$ ,  $\vartheta = \pi/4$  при  $a/h = 1$  и значениях коэффициента Пуассона  $\nu' = 0,15$  (кривая 1),  $\nu' = 0,2$  (кривая 2) и  $\nu' = 0,25$  (кривая 3). Как видно из графика, наибольшего значения напряжения  $\sigma_{33}/p$  достигают на срединной плоскости  $\xi = 0$  и существенно зависят от величины поперечного коэффициента  $\nu'$ .

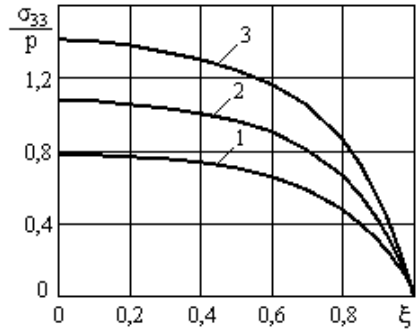


Рис. 4

На рис. 5 и 6 приведены кривые

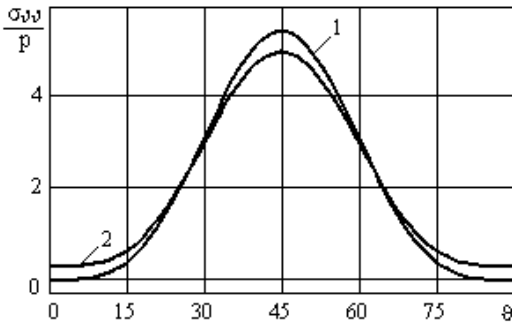


Рис. 5

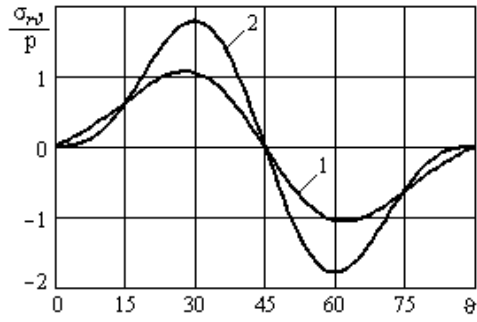


Рис. 6

изменения окружных  $\sigma_{\vartheta\vartheta}/p$  и касательных  $\sigma_{r\vartheta}/p$  напряжений по контуру отверстия ( $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ ) на срединной (кривая 1) и граничной (кривая 2) плоскостях пластины.

**РЕЗЮМЕ.** Знайдено розв'язок задачі про напружений стан необмеженої трансверсально-ізотропної пластини, послабленої криволінійним отвором. Пластина знаходиться під дією рівномірного всебічного розтягу на нескінченності, а на контурі отвору виконуються однорідні умови лінійної комбінації складових зовнішній напружень и складової дотичного зміщення. Досліджено вплив пружних властивостей матеріалу та геометричних параметрів на розподіл напружень в околі отвору.

**Ключові слова:** трансверсально-ізотропна пластина, криволінійний отвір, напружений стан.

**SUMMARY.** A stress-strain problem for an unbounded transversely isotropic plate weakened by a curvilinear hole is solved. The plate is subjected to an action of uniform tension at infinity and homogeneous conditions of a linear combination of an external stress components and a tangential displacement component. An effect of elastic properties of the material and geometrics on the stress distribution in the vicinity of the hole is studied.

**Key words:** transversely isotropic plate, curvilinear hole, stress state.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ:

1. *Векуа И.Н.* Теория тонких пологих оболочек переменной толщины // Тр. Тбилис. матем. ин-та. – 1965. – № 30. – С. 3–103.
2. *Гузь О.М.* Про наближений метод визначення концентрації напружень навколо криволінійних отворів в оболонках // Прикладна механіка. – 1962. – Т. 8, № 6. – С. 605–612.
3. *Гузь А.Н., Немиш Ю.Н.* Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. – К.: Вища шк., 1989. – 352 с.
4. *Немиш Ю.Н., Хома И.Ю.* Об изгибе нетонких трансверсально-изотропных пластин с криволинейными отверстиями // Прикладная механика. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 64–73.
5. *Хома И.Ю.* О растяжении нетонкой трансверсально-изотропной пластины с некруговой цилиндрической полостью // Прикладная механика. – 2006. – Т. 42, № 11. – С. 101–113.
6. *Хома І., Дашко О.* Дослідження напруженого стану біля еліптичного отвору в нетонкій трансверсально ізотропній пластині при одноосному розтягу // Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian Transactions. – Warsaw, May 2013. – Vol. 21. – P. 291–298.
7. *Хома И.Ю., Дашко О.Г.* Исследование напряженного состояния трансверсально изотропной пластины с эллиптическим отверстием при заданных сдвигающих усилиях // Теорет. и прикладная механика. – 2012. – № 5 (51). – С. 81–90.
8. *Khoma I.Yu.* Representation of the Solution of the Equilibrium Equations for Non-Thin Transversely Isotropic Plates // J. Math. Sci. – 2000. – V. 1001, № 6. – P. 3577–3584.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев*

*Поступила 11.10.2014*

УДК 539.3

В. А. ШАЛДЫРВАН, д-р физ.-мат. наук  
Г. В. ЕРЖАКОВ

## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРАНСТРОПНОЙ ПЛИТЫ С ДВУМЯ КРУГОВЫМИ ПОЛОСТЯМИ

*Рассматривается задача теории упругости для плиты из низкомодульного трансверсально изотропного (транстропного) материала с двумя одинаковыми круговыми полостями. Напряженное состояние возникает в результате действия на плиту равномерно распределенных растягивающих усилий, действующих на бесконечности вдоль линии центров полостей. При построении решения использованы элементарные решения уравнений Ламе для трансверсально изотропных материалов со свободными от напряжений торцами. Проведены численные исследования и анализ возникающих напряжений.*

*Ключевые слова:* транстропная плита, однородные решения, бесконечная система линейных алгебраических уравнений

Интерес к транстропным материалам резко возрос в середине 80-х годов прошлого столетия. Это связано с разработкой новых методов и созданием новых материалов с улучшенными прочностными характеристиками. Оказалось, что их возможно аппроксимировать некоторыми транстропными материалами. Развитие методов и результаты исследований деформированного состояния пластин из таких материалов частично отражены в обзоре [8]. О современном состоянии проблемы можно судить по результатам, представленным в фундаментальной монографии [10], посвященной исследованию напряженного состояния транстропных тел. В 80-е годы для решения задач теории тонких пластин был предложен асимптотический метод [6], который апробировался задачей типа Кирша для транстропных материалов [7]. В это же время для исследования существенно трехмерных задач был применен другой вариант, обобщающий метод Лурье-Воровича [2, 3], и проведены исследования концентраций напряжений в ряде задач [4, 9]. Решение трехмерного аналога задачи Кирша для изотропных материалов было получено независимо друг от друга разными методами в [9, 1], совпадение результатов явилось лучшим доказательством достоверности полученных решений. В [2] получено решение для задачи растяжения изотропной бесконечной плиты с двумя одинаковыми полостями. Задачи теории упругости для многосвязных транстропных тел не ставились и не решались. Данная работа посвящена разработке методики решения таких задач и исследованию на этой основе напряженного состояния многосвязных сред.

**Постановка задачи и решение.** Рассмотрим равновесие пластины толщины  $2H$  из низкомодульного транстропного материала (константы  $b_1$ ,  $b_2$  удовлетворяют соотношению  $b_1^2 - b_2 < 0$ ,  $b_1 > 0$  [5]), плоскость изотропии которой параллельна срединной плоскости. Для описания упругих

свойств материала используются технические постоянные: модули Юнга  $E$ ,  $E_z$ , коэффициенты Пуассона  $\nu$ ,  $\nu_z$  и модуль сдвига  $G_z$  в направлении перпендикулярном плоскости изотропии. Пластина ослаблена двумя одинаковыми цилиндрическими полостями кругового сечения радиусов  $R$ , центры которых расположены на расстоянии  $2l$  друг от друга. Отнесем рассматриваемое тело к декартовой системе координат так, чтобы плоскость  $\tilde{x}O\tilde{y}$  лежала в срединной плоскости, а ось  $O\tilde{x}$  совпадала с линией центров полостей. Начало координат поместим равноудаленно от боковых поверхностей  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2$ ). Будем считать, что торцы свободны от напряжений, а деформация осуществляется растягивающими усилиями  $p$ , действующими на бесконечности. Для удобства с центром каждой из полостей дополнительно свяжем локальные цилиндрические системы координат  $(r_j, \theta_j, z)$ . Далее будем использовать безразмерные координаты  $x = \tilde{x} / R$ ,  $y = \tilde{y} / R$ ,  $z = \tilde{z} / hR$  и характеристики напряженно деформированного состояния  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}) / R$ ,  $\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = \tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{r}) / 2G$ ,  $i, j = x, y, z$ , где  $h = H / R$  – относительная толщина,  $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$ ,  $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ .

Данная задача описывается уравнениями равновесия Ламе для трансропных материалов

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2 s_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + D^2 u + \mu_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\mu_3}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0, \quad u \rightleftharpoons v, \quad x \rightleftharpoons y, \\ \frac{\mu_2}{h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{s_0^2} D^2 w + \frac{\mu_3}{h} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$

и граничными условиями

$$\sigma_{xz}(x, y, \pm 1) = \sigma_{yz}(x, y, \pm 1) = \sigma_{zz}(x, y, \pm 1) = 0; \quad (1)$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0 \text{ при } r_i = 1, \quad i = 1, 2;$$

$$\sigma_{xx} = P, \quad \sigma_{ij} = 0, \text{ если } i \neq x \text{ и } j \neq x \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Однородные решения уравнений Ламе, удовлетворяющие граничным условиям (1) имеют вид [9, 5]:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(z; \mu, h) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial y} + \sum_{p=1}^{\infty} n_p(z; \bar{\nu}^*) \frac{\partial \Psi_p(x, y)}{\partial x} - \\ - \partial_1 \left[ F + \lambda^2 \mu_8 \left( \frac{1}{3} - z^2 \right) D^2 F - \Phi_0^* \right], \\ v(\mathbf{r}) = - \sum_{k=1}^{\infty} p_k(z; \mu, h) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial x} + \sum_{p=1}^{\infty} n_p(z; \bar{\nu}^*) \frac{\partial \Psi_p(x, y)}{\partial y} - \\ - \partial_2 \left[ F + \lambda^2 \mu_8 \left( \frac{1}{3} - z^2 \right) D^2 F + \Phi_0^* \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w(\mathbf{r}) &= \sum_{p=1}^{\infty} q_p(z; \bar{v}^*) \Psi_p(x, y) - 2\lambda\mu_8 z D^2 F, \\
\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} &= L_{10}F + h^2\mu_8 \left(\frac{1}{3} - z^2\right) L_{10}^* F + \sum_1^{\infty} p_k(z; \mu, h) L_8 \Phi_k + \\
&\quad + \sum_1^{\infty} \left[ s_p(z; \bar{v}^*, h) L_0 + n_p(z; \bar{v}^*) L_9 \right] \Psi_p, \\
\sigma_{\theta\theta} &= L_3 F + h^2\mu_8 \left(\frac{1}{3} - z^2\right) L_3^* F - \sum_1^{\infty} p_k(z; \mu, h) L_5 \Phi_k + \\
&\quad + \sum_1^{\infty} \left[ s_p(z; \bar{v}^*, h) L_0 + n_p(z; \bar{v}^*) L_4 \right] \Psi_p, \\
\sigma_{rz} + i\sigma_{\theta z} &= i \sum_1^{\infty} g_k(z; \mu, h) L_7 \Phi_k + \sum_1^{\infty} r_p(z; \bar{v}^*, h) L_7 \Psi_p, \\
\sigma_{zz} &= \sum_1^{\infty} t_p(z; \bar{v}^*, h) L_0 \Psi_p, \tag{3}
\end{aligned}$$

где  $\bar{v}^* = \{v_2; v_z; s_0\}$ ,  $v_2 = v_z E/E_z$ ,  $s_0^2 = G/G_z$ ; функции  $\Phi$  и  $\Psi$  удовлетворяют уравнениям

$$D^2 \Phi_k(x, y) = (\delta_k/h)^2 \Phi(x, y), \quad D^2 \Psi_p(x, y) = (\gamma_p/h)^2 \Psi(x, y),$$

а остальные обозначения совпадают с введенными в монографии [5].

Возникающие в плите напряжения  $\sigma_{ij}^*$  будем искать в виде суммы основного  $\sigma_{ij}^0$  и возмущенного  $\sigma_{ij}$  состояний:

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}. \tag{4}$$

Под основным состоянием будем понимать напряженное состояние сплошной плиты с граничными условиями (1), (2). Его компоненты в цилиндрической системе записываются так:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(0)i} + i\sigma_{r\theta}^{(0)i} &= p(1 + \sigma_i^{-2})/2, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)i} + \sigma_{rr}^{(0)i} = p; \\
\sigma_{rz}^{(0)i} &= \sigma_{\theta z}^{(0)i} = \sigma_{zz}^{(0)i} = 0, \quad \sigma_i = \cos \theta_i + i \sin \theta_i.
\end{aligned}$$

Под возмущенным состоянием будем понимать напряженное состояние, возникающее в плите, у которой на торцах и на бесконечности напряжения отсутствуют, а на боковых поверхностях приложены усилия

$$\sigma_{rr} \Big|_{r_i=1} + i\sigma_{r\theta} \Big|_{r_i=1} = -p(1 + \sigma_i^{-2})/2, \quad \sigma_{rz} \Big|_{r_i=1} = 0. \tag{5}$$

Граничные условия (5) сводятся к системе

$$\varphi(t_1) + t_1 \overline{\varphi'(t_1)} + \overline{\psi(t_1)} + \Lambda_{1\Omega_1}(\Phi_0, \Psi_p) = f_{1,0}/2,$$

$$-\frac{8\lambda^2\mu_8}{(\delta_m s_0)^2} \overline{\varphi''(t_1)} + \Lambda_{1\Omega_1}(\Phi_m, \Psi_p) = f_{1,m}/2,$$

$$\Lambda_{2\Omega_1}(\Phi_m, \Psi_p) = f_{2,m}, \quad \Phi_0 = 0, \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (6)$$

где

$$f_{1,0} = -p(\sigma_1 - 1/\sigma_1), \quad f_{1,m} = f_{2,m} = 0 \quad (\forall m \neq 0); \quad t_1 = l + \sigma_1.$$

Здесь введены в рассмотрение операторы вида [3, 5]:

$$\Lambda_{1\Omega_j}(\Phi_m, \Psi_p) = \int_0^{s_j} \left[ \mu\lambda(-1)^m L_{8\Omega_j} \Phi_m + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} [s_{mp} L_{0\Omega_j} + n_{mp} L_{9\Omega_j}] \Psi_p \right] R_j d\sigma_j,$$

$$\Lambda_{2\Omega_j}(\Phi_m, \Psi_p) = -\mu\delta_m s_0 (-1)^m L_{2\Omega_j} \Phi_m + 2 \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} r_{mp} L_{1\Omega_j} \Psi_p, \quad \Phi_0 = 0.$$

Комплексные потенциалы  $\varphi(\zeta)$ ,  $\psi(\zeta)$  ( $\zeta = x + iy$ ) являются аналитическими на всей комплексной плоскости, за исключением круговых отверстий, поэтому представимы в виде рядов Лорана. Учитывая геометрическую и физическую симметрии задачи относительно плоскостей  $xOz$  и  $yOz$ , в точках  $(x, y, z)$  и  $(x, -y, z)$ , а также  $(x, y, z)$  и  $(-x, -y, z)$  напряжения одинаковы. Это позволяет представить комплексные потенциалы и метагармонические функции  $\Phi$ ,  $\Psi$  в виде

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sigma_1^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sigma_1^n,$$

$$A_n = \sum_{t=1}^{\infty} \gamma_{nt}^{(1)} a_t, \quad \gamma_{nt}^{(1)} = -\left(\frac{-1}{2l}\right)^{t+n} \frac{(n+t-1)!}{n!(t-1)!};$$

$$\psi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sigma_1^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sigma_1^n, \quad B_n = \sum_{t=1}^{\infty} \gamma_{nt}^{(1)} b_t; \quad (7)$$

$$\Psi_p = \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta_1 \left\{ c_{np}^* K_n(\gamma_p^* r_1) + I_n(\gamma_p^* r_1) \sum_{t=0}^{\infty} R_{nt}^p c_{tp}^* \right\},$$

$$R_{nt}^p = \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0t}\right) \left[ K_{n-t}(2l\gamma_p^*) + K_{n+t}(2l\gamma_p^*) \right],$$

$$\Phi_k = \sum_{n=0}^{\infty} \sin n\theta_1 \left\{ b_{nk}^* K_n(\delta_k^* r_1) + I_n(\delta_k^* r_1) \sum_{t=1}^{\infty} Q_{nt}^k b_{tk}^* \right\},$$

$$Q_{nt}^k = K_{n-t}(2l\delta_k^*) - K_{n+t}(2l\delta_k^*), \quad (8)$$

а также удовлетворять граничным условиям (6) только на одной полости.

В результате подстановки (7), (8) в граничные условия, и приравнивания коэффициентов в левой и правой частях равенств при одинаковых степенях  $\sigma_1$ , получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
& (1 + \delta_{n,1})A_n + l(1 - n)a_{n-1} + (2 - n)\delta_{n \geq 3}a_{n-2} + b_n + \\
& \quad + (1 + \delta_{n,1}) \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \Pi_{n-1}^{0p}(\dots)c_{n-1p} + \sum_{t=0}^{\infty} \Pi_{n-1,t}^{0p}(\dots)c_{tp} \right\} = -\frac{1}{2} \delta_{n,1}, \\
& a_n + l(n + 1)A_{n+1} + (n + 2)A_{n+2} + B_n + \\
& \quad + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ O_{n+1}^{0p}(\dots)c_{n+1p} + \sum_{t=0}^{\infty} O_{n+1,t}^{0p}(\dots)c_{tp} \right\} = \frac{1}{2} \delta_{n,1}, \\
& T_n^m b_{nm} + \sum_{t=1}^{\infty} T_{n,t}^m b_{t,m} + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \left( T_n^{mp}(\dots)c_{np} + \sum_{t=0}^{\infty} T_{nt}^{mp}(\dots)c_{tp} \right) = 0, \\
& -\frac{8\lambda^2 \mu_8}{(\delta_m s_0)^2} (n + 1)(n + 2)A_{n+2} + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ O_{n+1}^{mp}(\dots)c_{n+1,p} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{t=0}^{\infty} O_{n+1,t}^{mp}(\dots)c_{t,p} \right\} + O_{n+1}^m b_{n+1,m} + \sum_{t=1}^{\infty} O_{n+1,t}^m b_{t,m} = 0, \\
& \frac{-8\lambda^2 \mu_8}{(\delta_m s_0)^2} (n - 1)(n - 2)a_{n-2} + (1 + \delta_{n,1}) \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \Pi_{n-1}^{mp} c_{n-1,p} + \sum_{t=0}^{\infty} \Pi_{n-1,t}^{mp} c_{t,p} \right\} + \\
& \quad + \delta_{n \geq 2} \left( \Pi_{n-1}^m b_{n-1,m} + \sum_{t=1}^{\infty} \Pi_{n-1,t}^m b_{t,m} \right) = 0. \tag{9}
\end{aligned}$$

Для компактной записи здесь введены обозначения  $T_n^m$ ,  $T_{nt}^m$ ,  $T_n^{mp}(\bar{v}^*, h)$ ,  $T_{nt}^{mp}(\bar{v}^*, h)$ ,  $\Pi_n^{mp(+)}(\bar{v}^*, h)$ ,  $\Pi_{nt}^{mp}(\bar{v}^*, h)$ ,  $r_{nt}^p$ ,  $O_{nt}^{mp}(\bar{v}^*, h)$ ,  $O_n^{mp(+)}(\bar{v}^*, h)$ ,  $\Pi_{nt}^m$ ,  $q_{nt}^k$ ,  $\Pi_n^{mp}(\bar{v}^*, h)$ ,  $O_n^{mp}(\bar{v}^*, h)$ ,  $O_{nt}^m$ ,  $\Pi_n^m$ ,  $\Pi_n^{m(+)}$ ,  $O_n^m$ ,  $O_n^{m(+)}$  [5].

После определения неизвестных  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_{np}$ ,  $b_{nm}$  из системы (9), функции  $\varphi(\zeta)$ ,  $\psi(\zeta)$  и  $\Phi$ ,  $\Psi$  вычисляются по формулам (7), (8), а напряжения по формулам (4) с учетом (3).

**Результаты численных исследований.** Численные исследования проведены для плит, полости которых удалены друг от друга на достаточно большое расстояние так, что они практически не влияют друг на друга. Технические постоянные материалов [10, 11], для которых приводятся результаты, и их безразмерные аналоги  $v$ ,  $v_z$ ,  $v_2$ ,  $s_0^2$  помещены в табл. 1. Среди напряжений особый интерес вызывают напряжения  $\sigma_{\theta\theta}$  и  $\sigma_{zz}$ , поскольку остальные близки к нулю при любых допустимых значе-

Таблица 1

Материал	$E$ , ГПа	$E_z$ , ГПа	$G$ , ГПа	$G_z$ , ГПа	$v$	$v_z$	$v_2$	$s_0^2$
Бериллий	2,960	3,41	1,357	1,66	0,091	0,034	0,030	0,817
InSe	47,917	18	23	12	0,042	0,3	0,799	1,917

ниях  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$ . На рис. 1 приведены эпюры распределения напряжения  $\sigma_{\theta\theta}$  от  $z$  на полости при  $\theta = \pi/2$  для пластин из InSe при различных

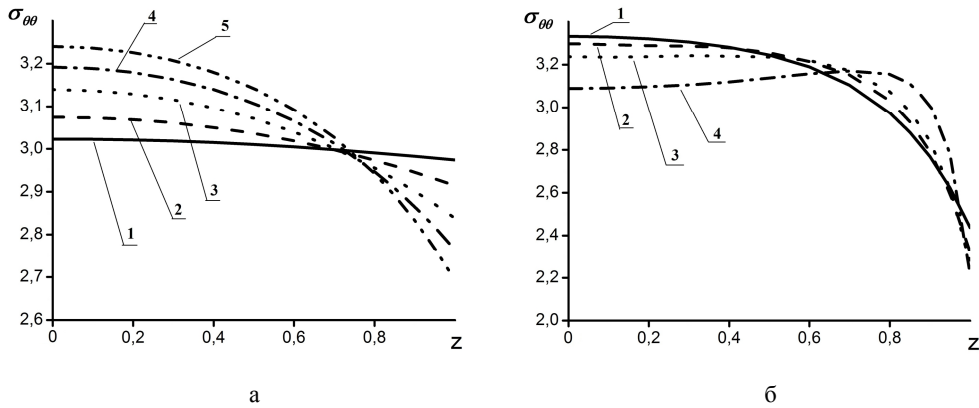


Рис. 1

значений  $h$ : на рис. 1, а: 1- $h = 0,1$ ; 2- $h = 0,2$ ; 3- $h = 0,3$ ; 4- $h = 0,4$ ; 5- $h = 0,5$ ; на рис. 1, б: 1- $h = 1$ ; 2- $h = 1,5$ ; 3- $h = 2$ ; 4- $h = 4$ . В табл. 2 помещены значения напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  на полости при  $\theta = \pi/2$  для пластины из бериллия.

Таблица 2

$z/h$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1,0	1,5	2,0	4,0
0,0	3,001	3,002	3,003	3,005	3,006	3,009	3,009	3,007	3,003
0,2	3,000	3,002	3,003	3,004	3,006	3,008	3,008	3,007	3,004
0,4	3,000	3,001	3,002	3,003	3,004	3,007	3,007	3,007	3,004
0,6	3,000	3,000	3,000	3,000	3,000	3,003	3,004	3,005	3,004
0,8	3,000	2,999	2,997	2,996	2,995	2,993	2,994	2,996	3,002
1,0	2,999	2,996	2,993	2,989	2,985	2,970	2,962	2,957	2,952

Из приведенных графиков видно, что при малых  $h$  напряжения монотонно убывают и при увеличении  $h$  максимальные напряжения (на срединной плоскости) увеличиваются, а минимальные (на торце) уменьшаются. При больших значениях  $h$  картина качественно меняется: после некоторого значения  $h_0$  значения напряжения  $\sigma_{\theta\theta}$  на срединной плоскости начинают уменьшаться, максимальные напряжения перемещаются к торцам пластины и также уменьшаются.

На рис. 2, 3 изображены графики зависимости  $\sigma_{zz}$  от высоты для материалов из бериллия и InSe соответственно, номера кривых соответствуют тем же значениям  $h$ . Напряжения  $\sigma_{zz}$  при малых  $h$  почти нулевые по всей толщине пластины. При увеличении относительной толщины эти напряжения увеличиваются, имея максимум на срединной плоскости и монотонно уменьшаются до 0 на торце.

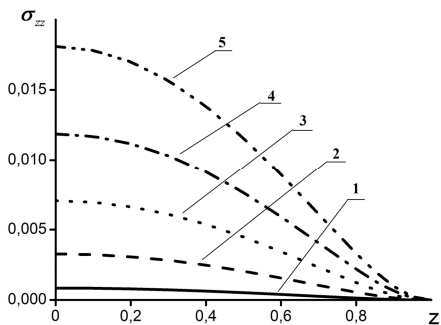
Возникающие в плите напряжения быстро убывают при удалении от по-



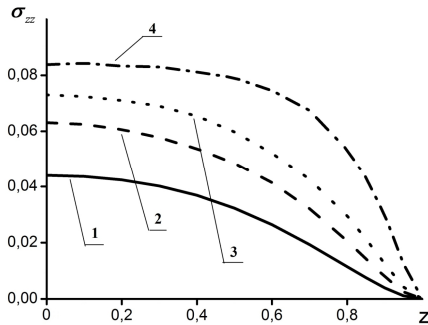
верхностей полостей. Это иллюстрирует рис. 4, на котором указаны линии напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  (а) и  $\sigma_{zz}$  (б) при  $h = 1.0$  для пластины из InSe.

Приведенные данные, а также данные для ряда других материалов, для которых проводились расчеты, позволяют сделать вывод, что диапазон изменения напряжений становится тем шире, чем больше коэффициент Пуассона  $\nu_z$ .

Точность решения контролировалась проверкой граничных условий

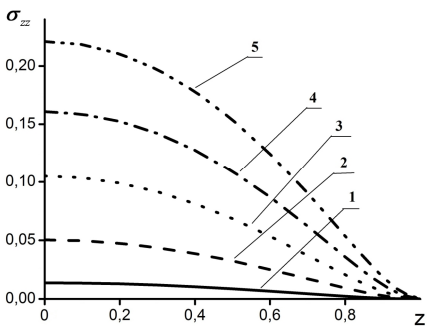


а

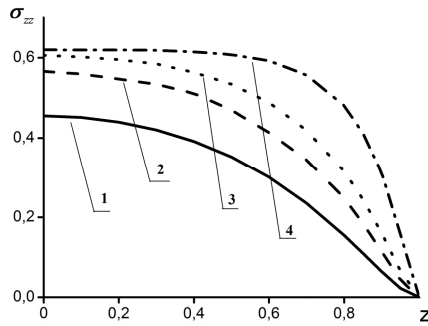


б

Рис. 2

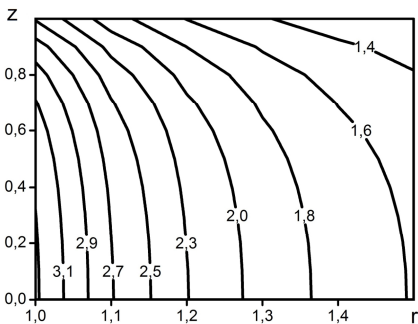


а

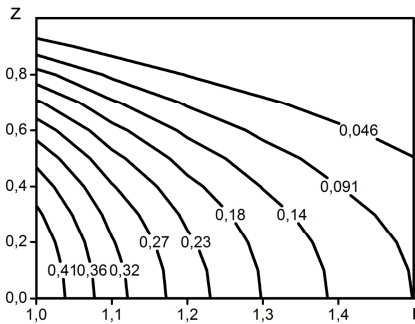


б

Рис. 3



а



б

Рис. 4

на поверхности полости. При расчетах максимальные отклонения напряжения  $\sigma_{rr}$  от нуля имели порядок  $10^{-5}$ , при этом для малых  $h$  в системе сохранялось 50 неизвестных, для больших  $h$  система была гораздо больше, например, при  $h = 4$  оставлялось 400 неизвестных.

**РЕЗЮМЕ.** Розглядається задача теорії пружності для плити з низькомодульного трансропного матеріалу з двома однаковими коловими порожнинами, що знаходиться під дією рівномірно розподілених розтягуючих зусиль, що діють на нескінченності у напрямку лінії центрів порожнин. При побудові рішення використані елементарні рішення рівнянь Ламе для трансверсально ізотропних матеріалів з вільними від напруг торцями. Проведені чисельні дослідження і аналіз виникаючих напружень.

*Ключові слова:* трансропна плита, однорідні рішення, нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь.

**SUMMARY.** The problem of elasticity is considering for the plate made from low-modulus transversely isotropic material with two identical circular cavities which stretched by uniformly distributed efforts which acting at the infinity in the direction of the line center cavities. For constructing the solutions used the elementary solutions of Lamé equations for transversely isotropic materials with stress-free ends. The numerical study and analysis of the stresses are carry out.

*Keywords:* transtropic plate, homogeneous solutions, infinite system of linear algebraic equations.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Точное решение задачи Кирша // Прикладная механика.– 1970.– Т. 6., № 5.– С. 10–17.
2. Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Концентрация напряжений в толстой плите с двумя круговыми отверстиями // Прикладная механика.– 1970.– Т. 6, № 10.– С. 3–8.
3. Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Определение напряженного состояния многосвязных трансропных пластин // Прикладная математика и механика.– 1975.– Т. 39, № 5.– С. 909–917.
4. Космодамианский А.С., Милишенский И.Х., Шалдырван В.А. О концентрации напряжений в трансропной пластине с цилиндрической полостью // Прикладная математика и механика.– 1977.– Т. 41, № 5.– С. 957–960.
5. Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Толстые многосвязные пластины.– К.: Наук. думка, 1978.– 240 с.
6. Роменская Г.И., Шленев М.А. Асимптотический метод решения задачи теории упругости о толстой трансверсально-изотропной плите // Пластины и оболочки.– Ростов-на-Дону, 1971.– С. 8–19.
7. Роменская Г.И., Шленев М.А. Решение трехмерной задачи Кирша для трансверсально изотропной плиты // X Всероссийская конференция по теории оболочек и пластин: Тр. науч. конф., Кутаиси, 22-29 сентября 1975г.– Кутаиси, 1975.– Т. 1.– С. 260–267.
8. Шалдырван В.А. Некоторые результаты и проблемы теории пластин (обзор) // Прикладная механика.– 2007.– Т. 43, № 2.– С. 45–69.
9. Шалдырван В.А. Пространственная задача Кирша для трансропной пластины // Прикладная математика и механика.– 1980.– Т. 44, № 6.– С. 1066–1070.
10. Ding H., Chen W., Zhang L. Elasticity of transversely isotropic materials.– Dordrecht: Springer, 2006.– 454 p.
11. Huntington H.B. The elastic constants of crystals.– New York; London: Academic Press, 1958.– 139 p.

*Донецкий национальный университет*

*Поступила 10.10.2014*

УДК 539.3

*В. С. КИРИЛЮК*, д-р физ.-мат. наук  
*О. И. ЛЕВЧУК*, канд. физ.-мат. наук

### КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ЖЕСТКИХ ПЛОСКИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ШТАМПОВ С ЭЛЕКТРОУПРУГИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ (С НЕЭЛЕКТРОДИРОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ)

*Получено аналитическое приближенное решение задачи контактного взаимодействия двух жестких плоских штампов эллиптического сечения с электроупругим полупространством. Контактная задача сведена к решению задачи теории потенциала. В явном виде получены выражения для нахождения контактных давлений под эллиптическими штампами. Выявлено влияние связанности силовых и электрических полей на параметры контакта штампов с пьезоэлектрическим полупространством.*

**Ключевые слова:** *электроупругое полупространство, контактное взаимодействие, два плоских эллиптических штампа, гладкий контакт*

Исследованиям трехмерных контактных задач теории упругости посвящен ряд статей и монографий [1, 3, 4, 7, 8]. В то же время, контактное взаимодействие пьезоэлектрических тел со штампами изучено значительно с меньшей полнотой, что вызвано, в первую очередь, существенными математическими трудностями при исследованиях проблем электроупругости, поскольку система дифференциальных уравнений для пьезоэлектрических тел является связанной относительно силовых и электрических полей. Решения отдельных задач контактного взаимодействия для электроупругих тел получены в работах [5, 6, 9]. Однако контактное взаимодействие двух плоских жестких штампов эллиптического сечения с электроупругим полупространством не исследовалось.

В настоящей работе найдено приближенное аналитическое решение контактной задачи электроупругости о вдавливании двух плоских эллиптических штампов в электроупругое полупространство, в явном виде получены выражения для распределения контактного давления под плоскими штампами эллиптического сечения. Исследовано влияние свойств пьезоэлектрического материала на параметры контакта полупространства с эллиптическими штампами.

**Постановка задачи.** Пусть два жестких плоских штампа эллиптического сечения вдавливаются без трения в электроупругое полупространство  $z \leq 0$ . Считалось, что ось  $Oz$  совпадает с осью симметрии (поляризации) пьезоэлектрического тела, поверхность полупространства не содержит электродного покрытия, т.е. является неэлектродированной. Граничные условия в случае гладкого контакта (без трения) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0, \quad D_z(x, y) = 0 \quad \text{при } z = 0; \\ \sigma_{zz} = 0 \quad \text{при } (x, y) \notin \Omega; \end{aligned}$$

$$\sigma_{zz} = -p(x, y) \text{ при } (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

где  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  – область контакта эллиптических штампов с полупространством;  $p(x, y)$  – распределение контактного давления под штампами;  $D_z$  – нормальная компонента вектора электрической индукции. Перемещения  $u_z$  точек основания штампов имеют вид

$$u_z^{(i)}(x_i, y_i, 0) = \delta_i - \beta_{y_i}^{(i)} x_i + \beta_{x_i}^{(i)} y_i \text{ при } (x_i, y_i) \in \Omega_i, \quad (2)$$

в котором  $\delta_i$  – поступательное перемещение каждого штампа вдоль оси  $Oz$ ;  $\beta_{x_i}^{(i)}, \beta_{y_i}^{(i)}$  – проекции вектора поворота на оси  $Ox_i$  и  $Oy_i$ ;  $\Omega_i = \{x_i^2 / a_i^2 + y_i^2 / b_i^2 \leq 1\}$ .

**Основные уравнения и соотношения.** Система уравнений статики электроупругости для связанных силовых и электрических полей в случае трансверсально-изотропных тел (при отсутствии объемных сил и электрических зарядов), записанная с помощью компонент перемещений  $u_x, u_y, u_z$  и электрического потенциала  $\Psi$ , согласно [9] принимает вид

$$\begin{aligned} c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{y,xy} + \\ + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,xz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,xz} = 0; \\ c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{x,xy} + \\ + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,yz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,yz} = 0; \\ (c_{13}^E + c_{44}^E)(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + \\ + e_{15}(\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33} \Psi_{,zz} = 0; \\ (e_{31} + e_{15})(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + e_{15}(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + e_{33} u_{z,zz} - \\ - \varepsilon_{11}^S (\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) - \varepsilon_{33}^S \Psi_{,zz} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$  – модули упругости;  $e_{31}, e_{15}, e_{33}$  – пьезомодули;  $\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$  – диэлектрические проницаемости.

На основе результатов [9] компоненты перемещений и электрический потенциал представим в виде

$$\begin{aligned} u_x = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,x} + \Phi_{4,y}; \quad u_y = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,y} - \Phi_{4,x}; \\ u_z = \sum_{j=1}^3 k_j \Phi_{j,z}; \quad \Psi = \sum_{j=1}^3 l_j \Phi_{j,z}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $k_j, l_j$  – некоторые постоянные. Функции  $\Phi_j$  при этом удовлетворя-

ют уравнениям

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + v_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j = \overline{1, 4}), \quad (5)$$

где  $v_4 = 2c_{44}^E / (c_{11}^E - c_{12}^E)$ . Остальные значения  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) являются корнями алгебраического уравнения третьего порядка. Значения  $k_j, l_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) связаны с корнями уравнения  $v_j$  такими соотношениями:

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{e_{33} k_j - \varepsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = v_j \quad (j = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Здесь

$$a_j = c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j; \quad d_j = e_{15} (1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j \quad (j = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Далее имеем

$$k_j = \frac{[(v_j c_{11}^E - c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33}) + v_j (c_{44}^E + c_{13}^E)(e_{31} + e_{15})]}{[(c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33}) - (c_{44}^E v_j - c_{33}^E)(e_{31} + e_{15})]};$$

$$l_j = \frac{[(v_j c_{11}^E - c_{44}^E)(v_j c_{44}^E - c_{33}^E) + v_j (c_{44}^E + c_{13}^E)^2]}{[(v_j c_{44}^E - c_{33}^E)(e_{31} + e_{15}) - (c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33})]} \quad (j = 1, 2, 3). \quad (8)$$

Отметим, что  $\Phi_j$  в выражениях (4) являются гармоническими функциями в системах координат  $(x, y, z_j)$ , где  $z_j = v_j^{-1/2} z$ .

**Метод решения и основные результаты.** При рассмотрении задачи о контактном взаимодействии электроупругого полупространства с двумя плоскими штампами выберем потенциальные функции в виде

$$\Phi_i(x, y, z_1) = \frac{1}{2\pi} \alpha_i^* \iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} p(\xi, \eta) \ln(\rho_i + z_i) d\xi d\eta \quad (i = 1, 2, 3), \quad (9)$$

в котором  $\Omega_i = \{x_i^2 / a_i^2 + y_i^2 / b_i^2 \leq 1\}$ ,  $\rho_i = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z_i^2}$ ;  $\alpha_i^*$  – постоянные, определяемые из следующей системы трех линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j^* (c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j) = 1;$$

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j^* (c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j) / \sqrt{v_j} = 0;$$

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j^* (e_{15} (1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j) = 0. \quad (10)$$

Также положим  $\Phi_4^{(2)} = \Phi_5^{(2)} = 0$ . На основе такого выбора потенциальных

функций контактную задачу электроупругости о вдавливании двух жестких штампов эллиптического сечения в пьезоэлектрическое полупространство приводим к нахождению неизвестной плотности потенциала простого слоя по области  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ . При этом нормальные компоненты перемещения под штампами связаны со значениями контактного давления следующим образом:

$$u_z(x, y, 0) = \frac{A_1^{Piezo}}{2\pi} \iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}. \quad (11)$$

Значение  $A_1^{Piezo}$  определяем согласно выражению

$$A_1^{Piezo} = \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* k_j / \sqrt{v_j}, \quad (12)$$

где  $\alpha_j^*$  находим из системы (10).

Таким образом, на основе указанных потенциальных функций  $\Phi_j$  контактная задача о вдавливании двух плоских эллиптических штампов в пьезоэлектрическое полупространство (с неэлектропроводной поверхностью), как и классическая контактная задача теории упругости для изотропного полупространства, может быть сведена к нахождению плотности гармонического потенциала простого слоя в областях контакта штампов эллиптической формы. Это позволяет на основе параметров контакта двух плоских жестких эллиптических штампов с упругим изотропным полупространством определить контактное давление эллиптических штампов и осадку при их контактном взаимодействии с пьезоэлектрическим полупространством, оценить эффект связанности силовых и электрических полей на параметры контакта. Рассмотрим задачи.

*Задача 1.* Рассмотрим задачу о вдавливании двух одинаковых (по размерам и ориентации) плоских эллиптических штампов в электроупругое полупространство, поверхность которого не содержит электродного покрытия (является неэлектропроводной). Считаем при рассмотрении задачи, что большие оси оснований штампов размещены на оси  $Ox$ , координаты их центров равны  $(0, 0)$  и  $(h, 0)$ , а глубина вдавливания каждого штампа равна  $\delta$ . Воспользуемся сведением задачи электроупругости, как и в случае контактной задачи упругости [1], к решению задачи теории потенциала. Радиус-вектор контура штампа с координатами центра  $(0, 0)$  запишем согласно [1] в виде

$$R(\beta) = a + \frac{1}{2} a e^2 \cos \beta + o(e^4), \quad (13)$$

где  $a$  – малая полуось эллипса,  $e$  – его эксцентриситет. Следуя решению упругой контактной задачи, выражение для распределения контактного давления под плоским эллиптическим штампом (с центром  $(0, 0)$ ) получаем в виде

$$\begin{aligned}
p(r, \beta) = & \frac{2\delta}{\pi A_1^{Piezo} \sqrt{R^2(\beta) - r^2}} \left[ 1 + \frac{e^2}{4} (2 \cos^2 \beta - 1) - \right. \\
& - \frac{2\varepsilon}{\pi} \left( 1 + \frac{2r \cos \beta}{h} + \frac{3r^2 \cos^2 \beta}{h^2} - \frac{r^2 \sin^2 \beta}{h^2} \right) + \\
& \left. + \frac{4\varepsilon^2}{\pi^2} \left( 1 + \frac{2r \cos \beta}{h} \right) + \frac{8\varepsilon^3}{\pi^3} \left( \frac{\pi^2}{12} - 1 \right) + o(e^4, \varepsilon^4, e^2\varepsilon) \right], \quad (14)
\end{aligned}$$

причем  $\varepsilon = a/h$ , а значение  $A_1^{Piezo}$  находим согласно формулам (10), (12).

**Задача 2.** При различных размерах и ориентации плоских эллиптических штампов (рис. 1) задача о контактном взаимодействии жестких плоских штампов с электростроупругим полупространством (с неэлектропроводной поверхностью) значительно усложняется. Однако, выбор потенциальных функций на основе выражений (9), (10), (12)

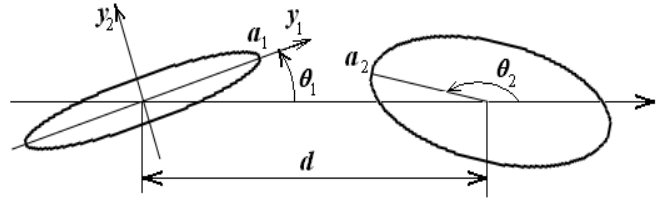


Рис. 1

позволяет и в этом случае получить распределение контактного давления под эллиптическими штампами в виде, подобном случаю взаимодействия плоских штампов с упругим полупространством. С помощью полученных результатов и данных работы [2] для двух плоских разного размера и ориентации эллиптических штампов имеем

$$\begin{aligned}
P(y_1, y_2) \cong & \frac{\delta_0}{A_1^{Piezo} a_1 \sqrt{1 - e_1^2}} \left( 1 - \frac{y_1^2}{a_1^2} - \frac{y_2^2}{a_1^2 (1 - e_1^2)} \right) \left\{ \frac{1}{K(e_1)} - \right. \\
& - \frac{c_2}{K(e_1)d} + \frac{c_1 c_2}{K(e_1)d^2} - \frac{c_2 y_1 \cos \theta_1}{D(e_1)d^2} + \frac{c_2 y_2 \sin \theta_1}{B(e_1)d^2} - \\
& \left. - \left( \frac{c_1 c_2^2}{d^3} + \frac{a_2^3}{6K(e_2)d^3} [1 + e_2^2 (1 - 3 \sin^2 \theta_2)] \right) \frac{1}{K(e_1)} - \right. \\
& - \frac{c_2 a_1^2}{6d^3} [1 + e_1^2 (1 - 3 \sin^2 \theta_1)] \frac{1}{K(e_1)} + \\
& + \frac{c_1 c_2}{d^3} \left( \frac{y_1 \cos \theta_1}{D(e_1)} - \frac{y_2 \sin \theta_1}{B(e_1)} \right) + \frac{3c_2 y_1 y_2 \sin 2\theta_1}{2(D(e_1) - C(e_1))d^3} - \\
& \left. - \frac{3c_2}{2d^3} [\cos 2\theta_1 + \sigma_1^{(1)} (3 \sin^2 \theta_1 - 1)] C_1(e_1) (y_1^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{y_2^2}{1 - 3\sigma_2^{(1)}} - \sigma_1^{(1)} a_1^2 \Big) - \frac{3c_2}{2d^3} [\cos 2\theta_1 + \\
& + \sigma_2^{(1)} (3 \sin^2 \theta_1 - 1)] C_2(e_1) \left( y_1^2 + \frac{y_2^2}{1 - 3\sigma_1^{(1)}} - \sigma_2^{(1)} a_1^2 \right) \Big\}. \quad (15)
\end{aligned}$$

При этом

$$D(e) = \frac{1}{e^2} [K(e) - E(e)], \quad C(e) = \frac{1}{e^2} [2D(e) - K(e)]; \quad B(e) = K(e) - D(e),$$

где  $e_i$  – эксцентриситет эллипса; ограничивающего поверхность соответствующего штампа,  $K(e)$ ,  $E(e)$  – полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Значения других коэффициентов и выражений, входящих в (15), совпадают с приведенными в [2] данными.

Таким образом, на основе формул (14), (15) определяем распределения контактных давлений при вдавливании двух плоских жестких эллиптических штампов в пьезоэлектрическое полупространство, поверхность которого не содержит электродного покрытия.

**Анализ результатов численных исследований.** При вдавливании двух плоских эллиптических штампов в пьезоэлектрическое полупространство распределения контактного давления связаны с перемещениями штампов  $\delta$  и электроупругими свойствами материала полупространства (входят через значение  $A^{Piezo}$ ) согласно выражениям (14), (15). Из упомянутых формул следует, при заданном перемещении  $\delta$  плоских штампов контактное давление под ними обратно пропорциональны значению  $A^{Piezo}$ , что позволяет провести оценку влияния связанности силовых и электрических полей на параметры контактного взаимодействия. Для сравнения со случаем вдавливания плоских штампов в чисто упругое трансверсально-изотропное полупространство (с теми же упругими свойствами, что и исходный пьезоэлектрик) вычислим также значение  $A^{Trans}$ , которое найдем из  $A^{Piezo}$ , полагая близкими нулю пьезомодули и диэлектрические проницаемости для соответствующего пьезоэлектрического материала. В результате вычислений для пьезокерамических материалов ВаТiО<sub>3</sub>, PZT-5Н, PZT-7А и Р-7 имеем  $A^{Piezo} / A^{Trans} = 0,854, 0,784, 0,737$  и  $0,711$  соответственно. Это означает, что при одинаковом перемещении штампов  $\delta$  в электроупругое полупространство и трансверсально-изотропное упругое полупространство (с упругими свойствами, соответствующими пьезоэлектрическому материалу) контактное давление под штампами, действующими на пьезоэлектрическое полупространство для материалов ВаТiО<sub>3</sub>, PZT-5Н, PZT-7А и Р-7 превышает контактное давление на соответствующий упругий материал в 1,171, 1,276, 1,357, 1,406 раз соответственно. Или же, чтобы достичь таких же перемещений под штампами, как и в чисто упругом случае, для материалов ВаТiО<sub>3</sub>, PZT-5Н, PZT-7А и Р-7 необходимо соответственно увеличить силу вдавливания  $P$  в 1,171, 1,276, 1,357, 1,406 раз (по сравнению со случаем контак-



та с упругим полупространством).

Таким образом, в работе получены аналитические решения новых контактных задач статики электроупругости о вдавливании двух плоских эллиптических штампов в пьезоэлектрическое полупространство (с неэлектропроводной поверхностью). Найдены выражения для распределенных контактных давлений под штампами для двух штампов одинакового размера и ориентации, а также для двух отличающихся друг от друга по размерам и ориентации эллиптических штампов. Для ряда пьезоэлектрических материалов выявлено влияние связанности силовых и электрических полей на параметры контакта двух плоских эллиптических штампов с электроупругим полупространством (с неэлектропроводной поверхностью).

**РЕЗЮМЕ.** Отримано аналітичний наближений розв'язок задачі контактної взаємодії двох жорстких плоских штампів еліптичного перерізу з електропружним півпростором. Контактну задачу зведено до розв'язку задачі теорії потенціалу. У явному вигляді отримано вирази для знаходження контактних тисків під еліптичними штампами. Виявлено вплив зв'язаності силових та електричних полів на параметри контакту штампів з п'єзоелектричним півпростором.

**Ключові слова:** електропружний півпростір, контактна взаємодія, два плоских еліптичних штампа, гладкий контакт

**SUMMARY.** The analytical approximate solution of contact interaction problem of two rigid plane of elliptical section with electroelastic half-space was obtained. The contacts problem was reduced to the solving of the potential theory problem. The expressions for the finding of contact pressures under the elliptical punches were obtained in the explicit form. The influence of connectedness of force and electric fields on the contact parameters of punches with piezoelectric half-space was studied.

**Key words:** electroelastic half-space, contact interaction, two plane elliptical punches, smooth contact

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Андрейкив А.Е.* Вдавливание в упругое полупространство системы штампов // Изв. АН СССР. МТТ.– 1975.– № 2.– С. 125–131.
2. *Аргатов И.И.* Взаимодействие штампов на упругом полупространстве // Изв РАН. МТТ.– 1999.– № 4.– С. 56–63.
3. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.– М.: Наука, 1980.– 304 с.
4. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия.– М.: Мир, 1989.– 509 с.
5. *Кирилюк В.С.* О влиянии температурного поля на контактное взаимодействие нагретого плоского эллиптического штампа с пьезокерамическим полупространством // Теорет. и прикладная механика.– 2009.– Вып.46.– С. 29–35.
6. *Кирилюк В.С., Левчук О.И.* Контактная задача термоэлектроупругости с учетом выделения тепла при трении скольжения двух пьезоэлектрических тел // Теорет. и прикладная механика.– 2013.– Вып. 7(53).– С. 73–82.
7. *Лурье А.И.* Теория упругости.– М.: Наука, 1970.– 939 с.
8. *Babich S.Yu., Guz A.N., Rudnitskii V.B.* Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches // Int. Appl. Mech.– 2004.– Vol. 40, № 7.– P. 744–765.
9. *Podil'chuk Yu.N.* Exact analytical solutions of static electroelastic and thermoelectroelastic problems for a transversely isotropic body in curvilinear coordinate systems // Int. Appl. Mech.– 2003.– Vol. 39, № 2.– P. 132–170.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев*

*Поступила 10.10.2014*

УДК 539.3

*Н. Д. ОКСЕНЧУК,  
И. К. СЕНЧЕНКОВ, д-р физ.-мат. наук,  
О. П. ЧЕРВИНКО, канд. физ.-мат. наук,*

### МИКРОСТРУКТУРНЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕПЛООВОГО ИМПУЛЬСА

*Рассматривается полупространство, облученное тепловым импульсом. Нелинейное поведение материала описывается моделью течения Боднера-Партома, которая обобщена на случай многофазового состава материала. Задача решается численно методом пошагового интегрирования по времени и МКЭ. Исследуется влияние параметров импульса на глубину мартенситных превращений.*

*Ключевые слова:* импульсное тепловое нагружение, мартенситное превращение, модель течения

Интенсивное развитие технологий поверхностного упрочнения элементов конструкций с помощью лазерного термического импульсного воздействия стимулирует разработку моделей термомеханических и микроструктурных процессов в поверхностных слоях металла [3, 14, 17]. В работах [3, 10] установлено, что микроструктурные превращения мартенситного типа в процессе охлаждения поверхностных слоев могут быть основным механизмом упрочнения вследствие более высокого предела прочности и временного сопротивления материала в мартенситной фазе по сравнению с исходной фазой материала [11]. Полученные результаты касались короткоимпульсных воздействий длительностью  $\sim 10^{-8}$  с и сформированных мартенситных структур толщиной  $10^{-7} \div 10^{-6}$  м. При таких параметрах результаты, полученные в рамках континуальных моделей, могут быть чувствительными к морфологическим особенностям структуры материала.

В настоящей работе проводится исследование зависимости толщины мартенситного слоя от длительности теплового импульса и выяснение ограничений континуального подхода к описанию термомеханических процессов в поверхностных слоях материала.

**Постановка задачи.** Рассмотрим облученное тепловым импульсом полупространство  $z > 0$ ,  $0 < r < \infty$ . Используется термомеханическая модель Боднера-Партома [8, 13], обобщенная на случай зависимости ее параметров, которые отвечают за предел текучести и временное сопротивление материала, от фазового состава [5, 9]. Модель включает – уравнение аддитивности деформации

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{in} + \varepsilon_{ij}^{\theta ph} \quad (i, j = r, z, \varphi); \quad (1)$$

– уравнения закона Гука, записанные для девиаторной и шаровой составляющих тензоров,

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^{in}), \quad \sigma_{kk} = 3K_V(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{0ph}); \quad (2)$$

– закон течения Прандтля-Рейса с условием неупругой несжимаемости

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = D_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{(\bar{K}_0 + K)^2}{3J_2} \right]^n \right\} \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{in}(0) = 0; \quad \varepsilon_{ii}^{in}(0) = 0; \quad (3)$$

– уравнение эволюции параметра изотропного упрочнения

$$\dot{K}' = m_1(\bar{K}_1 - K')\dot{W}^{in}, \quad K'(0) = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\varepsilon_{ij}^{in}$  и  $\varepsilon_{ij}^e$  – неупругая и упругая составляющие деформации;  $\varepsilon_{ij}^{0ph}$  – объемная термотрансформационная деформация, которая описывает температурный и трансформационный эффекты изменения объема [4];  $G$  – модуль сдвига;  $K_V$  – модуль объемного сжатия;  $s_{ij}$ ,  $e_{ij}$  – девиаторы тензоров напряжений и деформации соответственно;  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}/3$ ,  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_{kk}/3$ ;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $J_2$  – второй инвариант девиатора тензора напряжений;  $J_2 = s_{ij}s_{ij}/2$ ;  $\dot{W}^{in} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}$  – неупругая мощность;  $D_0 = 10^8 c^{-1}$  – предельное значение скорости неупругой деформации при сдвиге;  $D_0$ ,  $n$ ,  $m_1$ ,  $\bar{K}_0$ ,  $\bar{K}_1$  – параметры модели, причем  $\bar{K}_0$ ,  $\bar{K}_1$  для многофазового состава материала определяются с помощью линейного правила смесей [9].

Микроструктурные превращения (МСП) при охлаждении стали характеризуются термотрансформационной деформацией и зависимостью неупругих свойств от фазового состава материала. Термотрансформационная деформация вычисляется с помощью концентрации фаз и соотношений для удельных объемов [12]. Распад переохлажденного аустенита описывается с помощью термокинетической диаграммы [6]. Накопление концентрации фаз вдоль кривых охлаждения в области мартенситного превращения рассчитывается с помощью уравнения Коистинена-Марбургера [15].

Кроме указанных уравнений модели течения и кинетики МСП, постановка динамической связанной задачи термомеханики в цилиндрической системе координат  $orz\varphi$  для цилиндра  $0 < r < R$ ,  $0 < z < L$  включает соотношения Коши для осесимметричного случая (5); уравнения движения (6); уравнение теплопроводности (7), а также граничные и начальные условия (8)–(10)

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right); \quad (5)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = \rho \ddot{u}_r, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \ddot{u}; \quad (6)$$

$$\bar{c}_v \dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \bar{k} r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{k} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - T \dot{\sigma}_{kk} \bar{\alpha} + \rho \Delta i_{\xi} \dot{C}^{\xi} + D', \quad (7)$$

где  $\xi = a, b, p, f, m$ ;

$$\bar{c}_v = \alpha_v^{\xi} C^{\xi}, \quad \bar{k} = k^{\xi} C^{\xi}, \quad V_0^{\xi} = V^{\xi}(\theta_r), \quad \bar{\alpha} = \sum_{\xi} V_0^{\xi} C^{\xi} \alpha_{\xi} / \sum_{\xi} V_0^{\xi} C^{\xi},$$

$$\alpha_{\xi} = (V^{\xi} - V_0^{\xi}) / 3(\theta - \theta_0) V_0^{\xi}, \quad \sum_{\xi} C^{\xi} = C^a + C^b + C^f + C^p + C^m = 1.$$

В уравнениях (5)–(7) приняты следующие обозначения:  $u_r, u_z$  – компоненты вектора перемещений;  $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{\varphi\varphi}$  – компоненты тензора деформации;  $\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}, \sigma_{\varphi\varphi}$  – компоненты тензора напряжений;  $\rho$  – плотность материала;  $\theta$  – температура;  $\theta_r$  – отсчетная температура;  $\dot{\theta} = \partial\theta/\partial t$ ;  $\bar{c}_v, \bar{k}$  – объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности смесей фаз;  $\bar{\alpha}$  – обобщенный коэффициент объемного расширения;  $\dot{\sigma}_{kk} = \dot{\sigma}_{rr} + \dot{\sigma}_{zz} + \dot{\sigma}_{rz} + \dot{\sigma}_{\varphi\varphi}$ ;  $\Delta i_{\xi}$  – латентная теплота МСП;  $D'$  – скорость внутренней диссипации;  $V^{\xi}(\theta)$  – свободный объем фазы  $\xi$  при температуре  $\theta$ ;  $C^{\xi}$  – объемная концентрация фазы  $\xi$  в долях единицы;  $\xi = a, f, p, b, m$ , где  $a$  – аустенит,  $f$  – феррит,  $p$  – перлит,  $b$  – бейнит,  $m$  – мартенсит; по повторяющемуся индексу проводится суммирование.

На поверхности полупространства  $z = 0$  задаются граничные условия импульсного термического нагружения и свободной границы

$$q_z = \begin{cases} q_0 \sin \frac{\pi}{t_q} t, & t \leq t_p, \\ 0, & t > t_p; \end{cases} \quad (8)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0 \quad (9)$$

Здесь  $q_0$  – параметр теплового потока;  $t_q$  – время действия импульса. Начальные условия принимаются в виде

$$u_z = 0, \quad \dot{u}_z(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad t = 0; \quad (10)$$

Как и в задаче В. И. Даниловской [2] принимается

$$u_z = u_z(z, t), \quad u_r = 0, \quad \theta = \theta(r, z). \quad (11)$$

В качестве материала используется сталь 35ХМА.

**Метод решения задачи.** Задача является нелинейной и решается численно методом пошагового интегрирования по времени, итерационным методом и методом конечных элементов. Алгоритм решения задачи изложен в работе [4].

**Результаты расчетов.** Эволюция температуры и концентраций фаз

для параметров задачи  $q_0 = 7 \cdot 10^9 \text{ Вт/м}^2$ ,  $t_q = 1 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ ,  $\theta_0 = 20^\circ \text{C}$  показана на рис. 1. Видно, что исходный бейнит-мартенситный фазовый состав при  $\theta > A_{c1}$  трансформируется в аустенитную фазу, которая в свою очередь при охлаждении  $\theta < \theta_H = 390^\circ \text{C}$  распадается в мартенситную фазу. Толщинные распределения этой фазы для различных моментов времени показаны на рис. 2. Параметр  $z_m$  обозначает толщину слоя, в котором произошли мартенситные превращения.

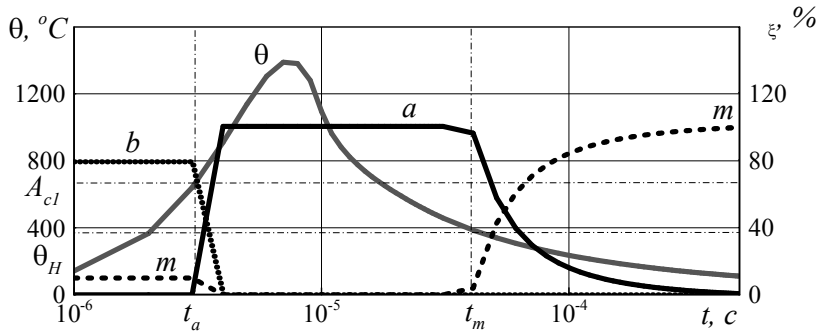


Рис. 1

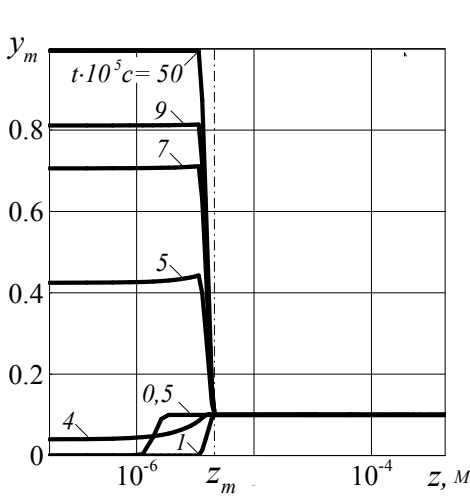


Рис. 2

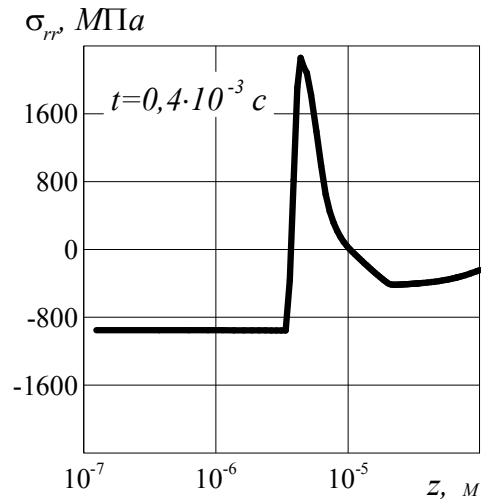


Рис. 3

Поскольку объем материала в мартенситной фазе максимальный, то, соответственно, остаточные напряжения в области  $0 < z < z_m$ , где  $z_m = 4,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ , будут сжимающими (рис. 3).

С практической точки зрения важным является установление связи между параметрами термического нагружения  $t_q$ ,  $q_0$  с толщиной мартенситного слоя  $z_m$  (зона термического влияния). С этой целью в процессе расчетов варьировались значения параметров нагружения таким образом,

чтобы максимальная температура на поверхности полупространства сохранялась на уровне  $\theta_{\max}|_{z=0} \approx 1400^\circ\text{C}$ . При этом условии в двойных логарифмических координатах интенсивность теплового потока  $q_0$  линейно зависит от длительности импульса  $t_q$  (рис. 4).

Зависимость толщины мартенситного слоя от длительности импульса иллюстрируется на рис. 5 почти линейной функцией в двойных логарифмических координатах.

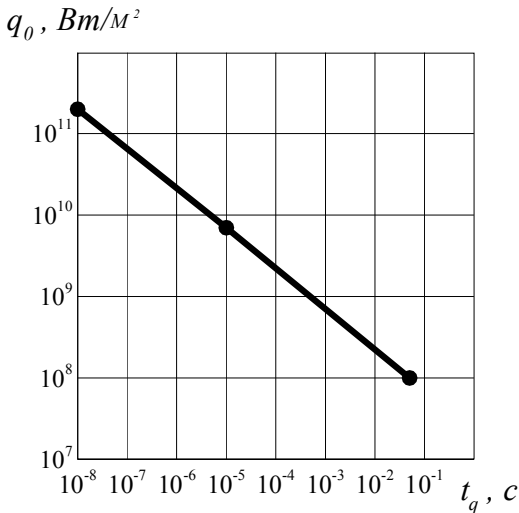


Рис. 4

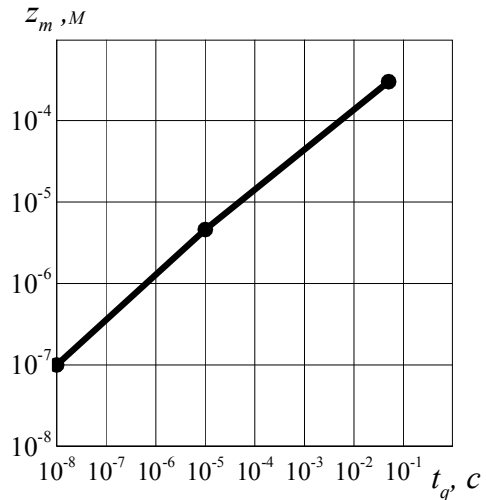


Рис. 5

В технологических приложениях удобно оценивались размер зоны термического влияния в зависимости от параметра теплового воздействия

$$Q = \int_0^{t_q} q_z dt \quad [\text{Дж} / \text{м}^2].$$

Эти данные представлены на рис. 6.

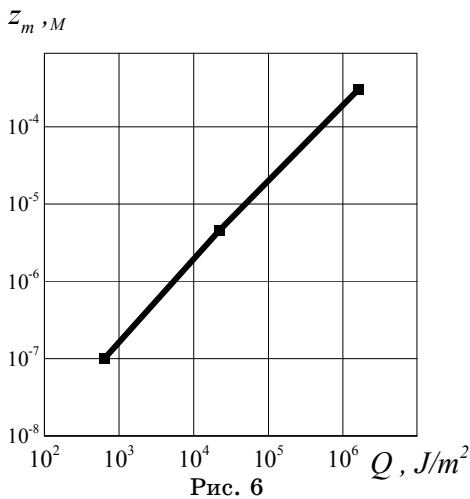


Рис. 6

Реальные металлы, в частности, стали, имеют зернистую структуру. Поэтому континуальный подход, использующий усредненные характеристики, дает более или менее надежные результаты, если область изменчивости характеристик механического и микроструктурного состояния хотя бы на порядок больше размера неоднородности (зерна)  $z_h$  [7]. В рассматриваемой задаче условием эффективной гомогенизации является соотношение  $z_m \geq 10z_h$ . Размер зерна  $z_h$  характеризуется номером (баллом) и изменяется в пределах

$z_h = 10^{-4}$  м (балл 1) и  $z_h = 10^{-5}$  м (балл 8) [1].

Если условие гомогенизации выполняется, то результаты, полученные в рамках континуального подхода, можно принять в качестве количественной оценки, в противном случае их следует рассматривать как качественную оценку.

Данные, представлены на рис. 5 и 6 позволяют провести анализ степени достоверности полученных результатов на основе известных морфологических особенностей структуры конкретного материала.

**РЕЗЮМЕ.** Розглядається півпростір, опромінений тепловим імпульсом. Нелінійна поведінка матеріалу описується моделлю течії Боднера-Партома, яка узагальнена на випадок багатозафазового складу матеріалу. Задача розв'язується чисельно методом покрокового інтегрування по часу та МКЕ. Досліджується вплив параметрів імпульсу на глибину мартенситних перетворень.

**Ключові слова:** імпульсне теплове навантаження, мартенситне перетворення, модель течії

**SUMMARY.** The halfspace irradiated by a heat pulse is considered. Nonlinear behavior of the material is described by Bodner-Partom unified flow model generalized for the case of multiphase material state. The problem is solved numerically by the time step integration method and FEM. An influence of heat pulse parameters on depth of martensite transformations is investigated.

**Keywords:** pulse thermal loading, martensite transformations, flow model

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гуляев А. П. *Металловедение* [учебник для вузов. 6-е изд., перераб. и доп.] – Металлургия, 1986. – 544 с.
2. Даниловская В. И. Об одной задаче термоупругости // *Прикладная математика и механика*. – 1952. – Т. 16. – № 3. – С. 341–344.
3. Жук Я. А., Доля Е. В., Оксенчук Н. Д. Упрочнение цилиндра при импульсном тепловом нагружении с учетом мартенситных превращений // *Теорет. и прикладная механика*. – 2012. – № 5 (51). – С. 58–63.
4. Жук Я. О., Сенченков И. К., Васильева Л. Я. Вплив мікроструктурних перетворень на напружено-деформований стан локально опроміненого сталевго диска // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2011. – Т. 54, № 1. – С. 101–115.
5. Оксенчук Н. Д. Напружено-деформований стан сталевго циліндра при тепловому опроміненні та врахуванні мікроструктурних перетворень // *Мет. розв'язування прикладних задач механіки твердого деформівного тіла*. – 2012. № 13. – С. 301–308.
6. Попов А. А., Попова А. Е. *Справочник термиста. Изотермические и термокинетические диаграммы распада переохлажденного аустенита*. – М.: Машгиз, 1961. – 430 с.
7. Руцицкий Я. Я. *Элементы теории смесей*. – К.: Наук. думка, 1991. – 160 с.
8. Сенченков И. К., Жук Я. А., Табиева Г. А. Термодинамически согласованные модификации обобщенных моделей термовязкопластичности // *Прикладная механика*. – 1998. – Т. 34, № 4. – С. 53–60.
9. Сенченков И. К., Оксенчук Н. Д. Моделирование неизотермического течения с учетом зависимости пластических свойств от микроструктуры материала // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2012. – Т. 55, № 1. – С. 138–144.
10. Сенченков И. К., Червинко О. П., Оксенчук Н. Д. Термомеханическое импульсное нагружение диска с учетом влияния фазового состава материала на неупругие характеристики // *Теорет. и прикладная механика*. – 2012. – № 5 (51). – С. 51–57.
11. Шоршоров М. Х., Белов В. В. *Фазовые превращения и изменения свойств стали при сварке* // *Атлас*. – М.: Наука, 1972. – 220 с.
12. Юрьев С. Ф. *Удельные объемы фаз в мартенситном превращении аустенита*. – М.: Металлургиздат, 1950. – 48 с.

13. *Bodner S. R.* Unified Plasticity – An Engineering Approach (Final Report). Faculty of Mechanical Engineering, Technion-Israel Institute of Technology. Haifa 32000, Israel, 2000.– 106 p.

14. *Chen H.*, *J. Kysar* and *Y. L. Yao*. Characterization of plastic deformation induced by microscale laser shock peening // *ASME. J. Appl. Mech.*– 2004.– Vol. 71.– P. 713–723.

15. *Koistinen D. P.*, *Marburger R. E.* A general equation prescribing the extent of the austenite-martensite transformation in pure iron-carbon alloys and carbon steels // *Acta Metall.*– 1959.– Vol. 7.– P. 59–60.

16. *Yilbas B. S.*, *Hyder S. J.* Laser pulse heating and flexural wave generation during treatment of metallic surfaces // *J. Materials Processing Techn.*– 2003.– Vol. 141.– P. 1–8.

17. *Yilbas B. S.*, *Shuja S. Z.*, *Arif A.*, *Gondal M. A.* Laser-shock processing of steel // *J. Materials Processing Techn.*– 2003.– Vol. 135.– P. 6–17.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев,  
Киевский национальный университет*

*Поступила 11.10.2014*



УДК 539.421

*М. Ф. СЕЛИВАНОВ, канд. физ.-мат. наук***ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СИЛ СЦЕПЛЕНИЯ ТРЕЩИНЫ СМЕШАННОГО РЕЖИМА РАЗРУШЕНИЯ**

*Рассмотрены теоретические аспекты определения напряженно деформированного состояния в окрестности трещины сцепления при смешанном режиме разрушения. На основании асимптотических выражений для отрывов и условий конечности напряжений построены определяющие уравнения для значений сил сцепления в узлах их кусочно-линейного распределения. Для числовых решений использован построенный в работе потенциальный закон сцепления-отрыва с участком упрочнения.*

**Ключевые слова:** трещина смешанного режима разрушения, модель трещины с зоной сцепления, закон сцепления-отрыва, сложные границы зоны сцепления.

Данная работа является продолжением исследований, начатых в работе [1], посвященной определению напряженно деформированного состояния в окрестности трещины смешанного режима разрушения. При помощи модели трещины с зоной сцепления в [1] для кусочно-линейного распределения сил сцепления определены нормальные и сдвиговые отрывы; также в работе освещены основные принципы моделирования трещин сцепления, используемые в современных исследованиях. Для числовых примеров решения полученной определяющей системы уравнений использован потенциальный закон сцепления-отрыва в степенной форме разупрочнения. Такой закон допускает лишь одинаковые значения энергий разрушения нормального и сдвигового режимов.

В настоящей работе получены асимптотические выражения для отрывов и условий конечности напряжений, при помощи последних из определяющей системы уравнений выведены переменные величины длин зон приложения сил сцепления. Длины зон нормального и сдвигового сцеплений различны (принцип сложных границ зоны сцепления [2, 3]) и определяются наборами величин сил сцепления, характеризующими распределение этих сил. Это существенно упростило решение определяющей системы, которое стало возможным для достаточно большой размерности системы при помощи стандартных методов решения нелинейных систем. Также в работе получен потенциальный закон сцепления-отрыва [4] в экспоненциальной форме с участком упрочнения. Этот закон является промежуточным звеном между внутренним и внешним законом [5] и учитывает часть зависимости перемещение-сила только для ее нелинейного участка. Решение определяющей системы с предложенным законом проиллюстрировано числовыми примерами для нескольких комбинаций нормальных и сдвиговых компонент внешнего нагружения.

**Постановка задачи.** Рассмотрим сквозную трещину в бесконечной пластине, подверженной нагрузке в направлении нормали к линии трещины  $\sigma_y^\infty$  и сдвиговой компоненте нагружения  $\tau_{xy}^\infty$ . Напряжения и пере-

мещения в окрестности трещины будем искать в условиях плоского напряженного состояния. Исследование проводим при помощи модели трещины с зоной сцепления. Согласно этой модели, на продолжении линии расположения трещины вводится дополнительный разрез с приложенными к его берегам самоуравновешенными силами нормального и касательного сцеплений –  $\sigma(x)$  и  $\tau(x)$ , величины которых не превышают прочностей сцеплений  $\sigma_{\max}$  и  $\tau_{\max}$  соответственно (рис. 1).

Интервалы приложения сил сцепления имеют общую вершину (точка  $x = d$ ) и в общем случае различные хвосты ( $b \neq c$ ). Отрывы в зоне

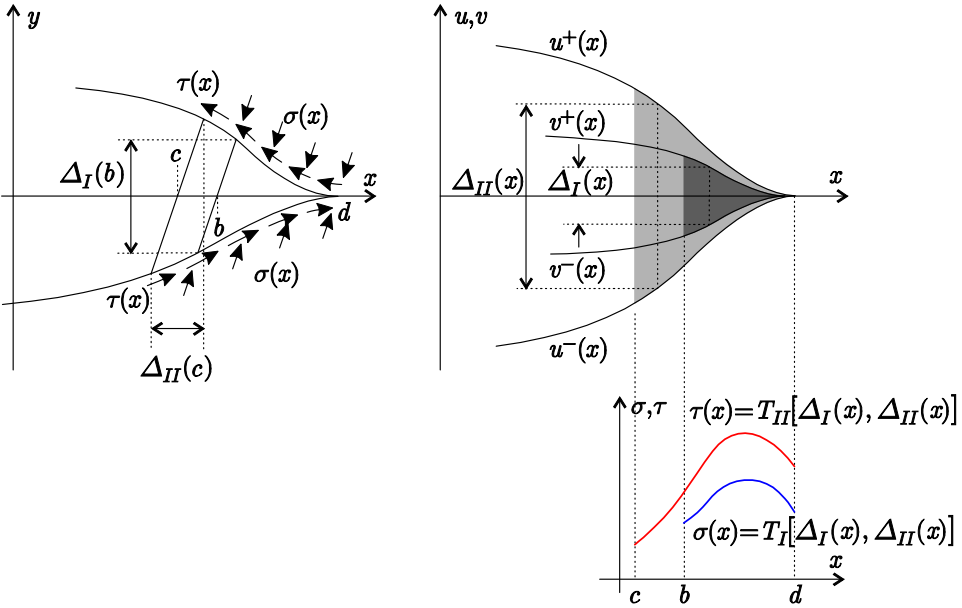


Рис. 1

сцепления  $\Delta_I(x)$  и  $\Delta_{II}(x)$  связаны с силами сцепления законом сцепления-отрыва  $\sigma(x) = T_I[\Delta_I(x), \Delta_{II}(x)]$ ,  $\tau(x) = T_{II}[\Delta_I(x), \Delta_{II}(x)]$ . В этот закон кроме величин прочности сцепления и энергий разрушения, которые считают основными параметрами трещиностойкости, входят параметры формы функций  $T_I$  и  $T_{II}$ . Параметры формы определим из трех групп граничных условий для этих функций:

$$T_I(0, 0) = \sigma_n, \quad T_{II}(0, 0) = \tau_n; \quad T_I(\Delta_I^0, 0) = \sigma_{\max},$$

$$\frac{\partial T_I(\Delta_I^0, 0)}{\partial \Delta_I} = 0, \quad T_{II}(0, \Delta_{II}^0) = \tau_{\max}, \quad \frac{\partial T_{II}(0, \Delta_{II}^0)}{\partial \Delta_{II}} = 0;$$

$$\int_0^{\Delta_I^{\max}} T_I(\Delta_I, 0) d\Delta_I = \Phi_I, \quad \int_0^{\Delta_{II}^{\max}} T_{II}(0, \Delta_{II}) d\Delta_{II} = \Phi_{II}.$$

В модели трещины с зоной сцепления нелинейный участок зависи-

мости между перемещением и силой сносится в область зоны сцепления. Вне зоны сцепления материал полагается линейно упругим. Первая группа условий использует заданные значения границ линейности для нормальных и касательных напряжений  $\sigma_n$  и  $\tau_n$ . Вторая группа условий определяет границу участка упрочнения, в конце которого силы сцепления достигают своих предельных значений  $\sigma_{\max}$  и  $\tau_{\max}$ , третья – приписывает предельному значению работы силы сцепления заданную величину энергии разрушения.

Критическое состояние трещины сцепления определяется достижением одной из величин отрывов критического значения. Отметим, что эти критические значения отрывов не являются характеристиками трещиностойкости и определяются параметрами закона сцепления-отрыва.

**Асимптотическое решение для отрывов и условий конечности напряжений.** Нормальный и сдвиговой отрывы, а также соответствующие условия конечности напряжений получены в [1] в виде

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}_I(x) &= A_I^{-1} \sum_{k=0}^n J_k(x; \mathbf{b}) \bar{\sigma}_k, & \sum_{k=0}^n N_k(n) \bar{\sigma}_k &= B_I; \\ \bar{\Delta}_{II}(x) &= A_{II}^{-1} \sum_{k=0}^r J_k(x; \mathbf{c}) \bar{\tau}_k, & \sum_{k=0}^r N_k(r) \bar{\tau}_k &= B_{II};\end{aligned}\quad (1)$$

где  $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ ,  $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_r)$  – границы интервалов, на которые разбиты  $(b, d)$  и  $(c, d)$  соответственно (на каждом из этих интервалов силы сцепления  $\sigma(x)$  и  $\tau(x)$  изменяются линейно);

$$\begin{aligned}A_I &= \frac{\pi \Delta_{I \max}}{L \sigma_{\max}}, & B_I &= \frac{\pi \sigma_y^\infty}{2 \sigma_{\max}}, \\ A_{II} &= \frac{\pi \Delta_{II \max}}{L \tau_{\max}}, & B_{II} &= \frac{\pi \tau_{xy}^\infty}{2 \tau_{\max}};\end{aligned}$$

$L = 4 / E$ ,  $E$  – модуль Юнга; геометрические характеристики  $J_k(x, \mathbf{b})$ ,  $N_k(n)$  и  $J_k(x, \mathbf{c})$ ,  $N_k(r)$  определяются подобным образом (приведем выражения только для первой группы коэффициентов):

$$J_0(x; b_0, b_1, b_n) = \frac{\Delta T_1(x)}{\Delta b_1} + (x - b_0)C(b_0, x) - (x + b_0)C(-b_0, x),$$

$$J_k(x; b_{k-1}, b_k, b_{k+1}, b_n) = \frac{\Delta T_{k+1}(x)}{\Delta b_{k+1}} - \frac{\Delta T_k(x)}{\Delta b_k} \quad (0 < k < n),$$

$$J_n(x; b_{n-1}, b_n) = \frac{T_{n-1}(x)}{\Delta b_n};$$

$$\Delta b_k = b_k - b_{k-1}, \quad \Delta T_k(x) = T_{k+1}(x) - T_k(x);$$

$$T_k(x) = \frac{1}{2} \left[ (x + b_k)^2 C(-b_k, x) + (x - b_k)^2 C(b_k, x) \right] + \hat{X}(b_k) \hat{X}(x);$$

$$C(\xi, x) = \ln \left| \frac{\tilde{X}(\xi) - \tilde{X}(x)}{\tilde{X}(\xi) + \tilde{X}(x)} \right|, \quad \hat{X} = \sqrt{b_n^2 - x^2}, \quad \tilde{X}(x) = \sqrt{\frac{x + b_n}{b_n - x}};$$

$$N_0 = \frac{\Delta R_1}{\Delta b_1} - I_0, \quad N_k = \frac{\Delta R_{k+1}}{\Delta b_{k+1}} - \frac{\Delta R_k}{\Delta b_k} \quad (0 < k < n),$$

$$N_n = I_n - \frac{\Delta R_n}{\Delta b_n}; \quad \Delta R_k = R_k - R_{k-1}, \quad R_k = b_k I_k + \hat{X}_k;$$

$$I_k = I(b_k), \quad \hat{X}_k = \hat{X}(b_k) \quad (I_n = \pi, \quad \hat{X}_n = 0);$$

$$I(x) = 2 \operatorname{arctg} \tilde{X}(x).$$

Пренебрегая в выражениях (1) величинами  $O[(\Delta b)^{3/2}]$  и  $O[(\Delta c)^{3/2}]$  ( $\Delta b = (d - b) / n$ ,  $\Delta c = (d - c) / r$ ), получим

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_I(b + \xi \Delta b) &= A_I^{-1} \Delta b \sum_{k=0}^n a_k(\xi, n) \bar{\sigma}_k, & \frac{2}{3} \sqrt{2 \frac{\Delta b}{b}} \sum_{k=0}^n s_k(n) \bar{\sigma}_k &= B_I; \\ \bar{\Delta}_{II}(c + \xi \Delta c) &= A_{II}^{-1} \Delta c \sum_{k=0}^r a_k(\xi, r) \bar{\tau}_k, & \frac{2}{3} \sqrt{2 \frac{\Delta c}{c}} \sum_{k=0}^r s_k(r) \bar{\tau}_k &= B_{II}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$a_0(\xi) = t_1(\xi) - t_0(\xi) + q(\xi);$$

$$a_k(\xi) = t_{k-1}(\xi) - 2t_k(\xi) + t_{k+1}(\xi), \quad a_n(\xi) = t_{n-1}(\xi);$$

$$q(0) = 2n, \quad q(\xi) = \xi w_0(\xi) + 2y(\xi)y_0, \quad q(n) = 0;$$

$$t_k(\xi) = \frac{1}{2}(\xi - k)^2 w_k(\xi) + (2n - k - \xi)y(\xi)y_0;$$

$$t_n(\xi) = 0, \quad t_m(m) = 2(n - m)^2;$$

$$s_0 = y_1^3 - y_0^3 + \frac{3}{2}y_0, \quad s_k = y_{k-1}^3 - 2y_k^3 + y_{k+1}^3 \quad (0 < k < n), \quad s_n = 1,$$

$$y(\xi) = \sqrt{n - \xi}, \quad w_k(\xi) = \ln \left| \frac{y_k - y(\xi)}{y_k + y(\xi)} \right|, \quad y_k = y(k).$$

При определении величин  $a_k(\xi, n)$ ,  $s_k(n)$  и  $y(\xi, n)$  аргумент  $n$  опущен.

Исключая из (2)  $\Delta b$  и  $\Delta c$ , получим

$$\bar{\Delta}_I(b + \xi \Delta b) = \frac{b P_I(\bar{\sigma}, \xi)}{D_I Q_I^2(\bar{\sigma})}, \quad \bar{\Delta}_{II}(c + \xi \Delta c) = \frac{c P_{II}(\bar{\tau}, \xi)}{D_{II} Q_{II}^2(\bar{\tau})}, \quad (3)$$

где

$$P_I(\bar{\sigma}, \xi) = \sum_{k=0}^n a_k(\xi, n) \bar{\sigma}_k, \quad Q_I(\bar{\sigma}) = \sum_{k=0}^n s_k(n) \bar{\sigma}_k,$$

$$D_I = \frac{8A_I}{9B_I^2} = \frac{32\Delta_{I\max}\sigma_{\max}}{9\pi L(\sigma_y^\infty)^2};$$

$$P_{II}(\bar{\tau}, \xi) = \sum_{k=0}^r a_k(\xi, r)\bar{\tau}_k, \quad Q_{II}(\bar{\tau}) = \sum_{k=0}^r s_k(r)\bar{\tau}_k,$$

$$D_{II} = \frac{8A_{II}}{9B_{II}^2} = \frac{32\Delta_{II\max}\tau_{\max}}{9\pi L(\tau_{xy}^\infty)^2}.$$

**Определяющие уравнения для распределения сил сцепления.** Будем удовлетворять закон сцепления отрыва только в узлах  $b_k$  и  $c_k$  кусочно-линейного распределения сил сцепления. Определяющие уравнения для относительных сил сцепления  $\bar{\sigma}_k = \sigma_k / \sigma_{\max}$  и  $\bar{\tau}_k = \tau_k / \tau_{\max}$  примут вид

$$\begin{aligned} T_I[\Delta_I(b_m), \Delta_{II}(b_m)] &= \sigma_m, \quad m = 0, 1, \dots, n-1 \\ T_{II}[\Delta_I(c_m), \Delta_{II}(c_m)] &= \tau_m, \quad m = 0, 1, \dots, r-1, \end{aligned} \quad (4)$$

причем, согласно (3),

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_I(b_m) &= \frac{bP_I[\bar{\sigma}, (b_m - b)(\Delta b)^{-1}]}{D_I Q_I^2(\bar{\sigma})}, \\ \bar{\Delta}_{II}(b_m) &= \frac{cP_{II}[\bar{\tau}, (b_m - c)(\Delta c)^{-1}]}{D_{II} Q_{II}^2(\bar{\tau})}; \\ \bar{\Delta}_I(c_m) &= \frac{bP_I[\bar{\sigma}, (c_m - b)(\Delta b)^{-1}]}{D_I Q_I^2(\bar{\sigma})}, \\ \bar{\Delta}_{II}(c_m) &= \frac{cP_{II}[\bar{\tau}, (c_m - c)(\Delta c)^{-1}]}{D_{II} Q_{II}^2(\bar{\tau})}. \end{aligned}$$

Величины  $b$ ,  $c$ ,  $\Delta b$  и  $\Delta c$  определяются при помощи  $n$ ,  $r$  и

$$\Delta \bar{b} = \frac{9B_I^2}{8Q_I^2(\bar{\sigma})}, \quad \Delta \bar{c} = \frac{9B_{II}^2}{8Q_{II}^2(\bar{\tau})}.$$

Если  $n \cdot \Delta \bar{b} \geq r \cdot \Delta \bar{c}$ , то  $c > b = l$  ( $l$  – полудлина трещины) и величины  $c$ ,  $\Delta b$  и  $\Delta c$  определяются в такой последовательности

$$\begin{aligned} \Delta b &= b \cdot \Delta \bar{b}, \quad d = b(1 + n \cdot \Delta \bar{b}), \\ c &= \frac{d}{1 + r \cdot \Delta \bar{c}}, \quad \Delta c = c \cdot \Delta \bar{c}. \end{aligned}$$

Если  $n \cdot \Delta \bar{b} < r \cdot \Delta \bar{c}$ , то  $b > c = l$  и величины  $b$ ,  $\Delta b$  и  $\Delta c$  последовательно определяются из выражений

$$\Delta c = c \cdot \Delta \bar{c}, \quad d = c(1 + r \cdot \Delta \bar{c}), \quad b = \frac{d}{1 + n \cdot \Delta \bar{b}}, \quad \Delta b = b \cdot \Delta \bar{b}.$$

При соразмерных  $B_I$  и  $B_{II}$  только после решения (4) можно определить размер какой из зон сцепления больше.

**Закон сцепления-отрыва с участком упрочнения.** Будем искать закон сцепления-отрыва в форме

$$\begin{aligned} T_I(\Delta_I, \Delta_{II}) &= (\sigma_n + \sigma_l \bar{\Delta}_I + \sigma_o \bar{\Delta}_{II}) \exp(-a_1 \bar{\Delta}_I - a_2 \bar{\Delta}_{II}); \\ T_{II}(\Delta_I, \Delta_{II}) &= (\tau_n + \tau_o \bar{\Delta}_I + \tau_l \bar{\Delta}_{II}) \exp(-a_1 \bar{\Delta}_I - a_2 \bar{\Delta}_{II}). \end{aligned} \quad (5)$$

Для потенциала

$$\Psi(\Delta_I, \Delta_{II}) = C - (C + b_1 \bar{\Delta}_I + b_2 \bar{\Delta}_{II}) \exp(-a_1 \bar{\Delta}_I - a_2 \bar{\Delta}_{II}) \quad (6)$$

определим силы сцепления:

$$\begin{aligned} T_I(\Delta_I, \Delta_{II}) &= \frac{\partial \Psi}{\partial \Delta_I} = \frac{a_1 C - b_1 + a_1 b_1 \bar{\Delta}_I + a_1 b_2 \bar{\Delta}_{II}}{\Delta_{I \max}} \exp(-a_1 \bar{\Delta}_I - a_2 \bar{\Delta}_{II}); \\ T_{II}(\Delta_I, \Delta_{II}) &= \frac{\partial \Psi}{\partial \Delta_{II}} = \frac{a_2 C - b_2 + a_2 b_1 \bar{\Delta}_I + a_2 b_2 \bar{\Delta}_{II}}{\Delta_{II \max}} \exp(-a_1 \bar{\Delta}_I - a_2 \bar{\Delta}_{II}) \end{aligned}$$

Точки экстремума функций  $T_I(\Delta_I, 0)$  и  $T_{II}(0, \Delta_{II})$ :

$$\Delta_I^0 = \frac{\sigma_l - a_1 \sigma_n}{a_1 \sigma_l} \Delta_{I \max}, \quad \Delta_{II}^0 = \frac{\tau_l - a_2 \tau_n}{a_1 \tau_l} \Delta_{II \max},$$

где введено обозначение

$$\sigma_l = a_1 b'_1, \quad \tau_l = a_2 b'_2, \quad b'_1 = \frac{b_1}{\Delta_{I \max}}, \quad b'_2 = \frac{b_2}{\Delta_{II \max}}.$$

Величину  $a_2$  полагаем заданной. Определение других параметров модели проводим в такой последовательности. Удовлетворяя вторую группу граничных условий, определяем величины  $b'_1$  и  $b'_2$ , которые являются корнями уравнений

$$b'_1 \exp\left(\frac{\sigma_n}{b'_1} - 1\right) = \sigma_{\max}, \quad b'_2 \exp\left(\frac{\tau_n}{b'_2} - 1\right) = \tau_{\max}.$$

Далее, используя третье граничное условие для энергии разрушения при сдвиге, определяем

$$\Delta_{II \max} = \frac{\varphi_{II}}{\frac{\tau_n + b'_2}{a_2} (1 - e^{-a_2}) - b'_2 e^{-a_2}},$$

$$b_2 = b_2' \Delta_{II \max}, \quad C = \frac{\tau_n + b_2'}{a_2} \Delta_{II \max}.$$

Величина  $a_1$  является корнем уравнения

$$\exp(-a_1) \left( 1 + \frac{a_1}{q} \right) = g, \quad q = \frac{\sigma_n}{b_1'} + 1, \quad g = 1 - \frac{\varphi_{II}}{C}.$$

Величина  $a_2$  будет положительной если  $g > 1$ . Если  $g < 1$ , то вычисление параметров модели нужно начинать с определения величин, которые входят в функцию  $T_I$ . Заданной, в этом случае, будет величина  $a_1$ .

Завершаем определения постоянных величин потенциала (6) вычислением

$$\Delta_{I \max} = \frac{C a_1}{\sigma_n + b_1'}, \quad b_1 = b_1' \Delta_{I \max}.$$

Для закона (5) определяем параметры  $\sigma_o = a_1 b_2 / \Delta_{I \max}$  и  $\tau_o = a_2 b_1 / \Delta_{II \max}$ .

**Числовой пример.** В первом ряду рис. 2 приведены распределения сил сцепления, полученные решением системы (4), во втором ряду – соответствующие отрывы. Числовые результаты получены для следующих параметров задачи:

а) механическая характеристика материала –  $E = 4$  ГПа;

б) параметры трещиностойкости –  $\sigma_{\max} = 30$  МПа,  $\varphi_I = 600$  Н/м,  $\tau_{\max} = 40$  МПа,  $\varphi_{II} = 900$  Н/м;

в) параметры формы закона сцепления-отрыва –  $\bar{\sigma}_n = 0.7$ ,  $\bar{\tau}_n = 0.7$ ,  $a_2 = 3$ ;

г) геометрический параметр – полудлина трещины  $l = 5$  мм, силовые параметры указаны на рисунке;

д) параметр дискретизации –  $u = 25$  ( $n = u$ ,  $r = \max\{1, [nD_I / D_{II}]\}$ , если  $c > b$ ;  $r = u$ ,  $n = \max\{1, [uD_{II} / D_I]\}$  если  $b > c$ ).

Для первой комбинации величин внешних усилий размер зоны сил сцепления сдвига больше размера зоны нормальных сил сцепления, для второй комбинации размеры этих зон равны, для третьей и четвертой большим является размер зоны нормальных сил сцепления. При дальнейшем увеличении  $\sigma_y^\infty$  при постоянном уровне  $\tau_{xy}^\infty$  будет достигнуто предельное состояние, разрушение произойдет в режиме нормального отрыва.

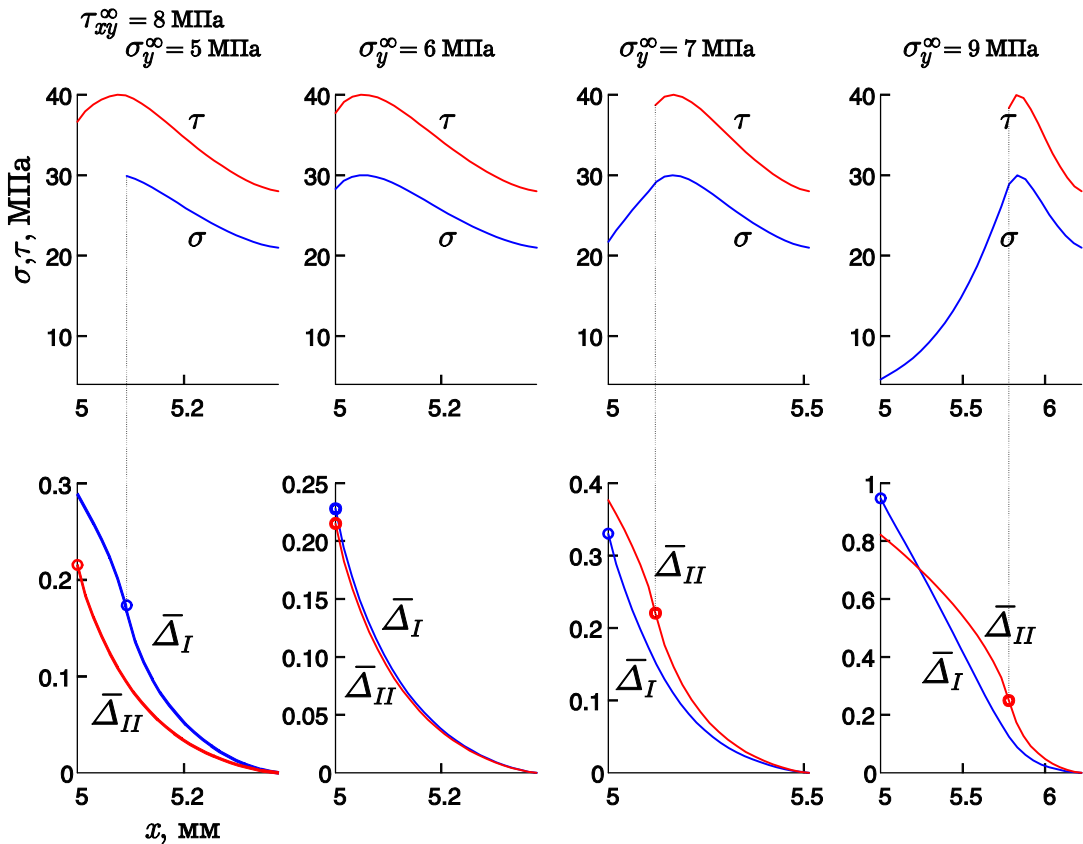


Рис. 2

Численное решение системы (4) показало эффективность предложенного метода; стандартные методы решения нелинейных систем используют небольшое число итераций, которое слабо зависит от начального приближения. Полученные численные решения для асимптотических выражений отрывов могут быть использованы как начальное приближение для нахождения решений системы, полученной без использований асимптотик.

**РЕЗЮМЕ.** Розглянуто теоретичні аспекти визначення напружено-деформованого стану в околі тріщини зчеплення при змішаному режимі руйнування. На підставі асимптотичних виразів для відривів та умов скінченності напружень побудовано визначальні рівняння для значень сил зчеплення у вузлах їхнього кусково-лінійного розподілу. Для числових розв'язків використано побудований у роботі потенціальний закон зчеплення-відриву з ділянкою зміцнення.

**Ключові слова:** тріщина змішаного режиму руйнування, модель тріщини з зоною зчеплення, закон зчеплення-відриву, складні границі зони зчеплення.

**SUMMARY.** Considered are the theoretical aspects of the stress-strain state determination near a crack with cohesive zones under the mixed mode loading. Constitutive equations for the node values of cohesive forces are derived for the multilinear cohesive relationship using asymptotic expressions for the opening displacements and the stress finiteness condition. Numerical solutions are given for the constructed in this work potential traction-relationship with hardening region.



**Keywords:** mixed-mode crack, cohesive zone model, traction-separation law, multiple cohesive zone fronts

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каминский А.А., Селиванов М.Ф. Определение параметров предельного состояния в рамках модели трещины с зоной сцепления для смешанного режима разрушения // Теорет. и прикладная механика.– 2014.– 54, № 8.– С. 18–25.

2. Hui C.Y., Ruina A., Long R., Jagota A. Cohesive zone models and fracture // J. Adhesion.– 2011.– Vol. 87.– P. 1–52.

3. Jin Z.-H., Sun C.T. Cohesive zone modeling of interface fracture in elastic bimaterials // Eng. Fract. Mech.– 2005.– Vol. 72.– P. 1805–1817.

4. Park K., Paulino G.H. Cohesive zone models: a critical review of traction-separation relationships across fracture surfaces. // Appl. Mech. Reviews.– 2011.– Vol. 64, № 6.– P. 060802 (20 pages).

5. Zhang Zh., Paulino G.H., Celes W. Extrinsic cohesive modelling of dynamic fracture and microbranching instability in brittle materials // Int. J. Numer. Meth. Engng.– 2007.– Vol. 72.– P. 893–923.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев*

*Поступила 15.10.2014*

УДК 539.3

*Н. С. БОНДАРЕНКО*, канд. физ.-мат. наук,  
*А. С. ГОЛЬЦЕВ*, д-р физ.-мат. наук

### ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ НА ТЕРМО- УПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫМ РАЗРЕЗОМ ПРИ ОДНОСТОРОННЕМ ТЕПЛООБМЕНЕ

*Решена задача термоупругости для изотропной пластины с теплоизолированным разрезом на базе обобщённой теории в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации. Рассмотрен случай верхнего одностороннего теплообмена с внешней средой. Найдены коэффициенты интенсивности напряжений для поперечного и продольного сдвига. Исследовано влияние параметра теплообмена на коэффициенты интенсивности напряжений.*

*Ключевые слова:* изотропная пластина, теплоизолированный разрез, термоупругость, обобщённая теория, односторонний теплообмен, коэффициенты интенсивности напряжений.

В связи с потребностями науки и техники к настоящему времени разработаны основы термомеханики разрушения, решены различные классы задач [4, 6, 14]. В статье [2] решена задача термоупругости для изотропной пластины с трещиной в случае симметричного теплообмена. Но классическая теория пластин и оболочек не позволяет напрямую определять коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) для поперечного и продольного сдвига. Обобщённая теория [10], основанная на разложении искоемых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра  $P_k = P_k(z/h)$  от толщинной координаты  $z$ , позволяет рассматривать не только тонкостенные элементы конструкций, но и пластины средней и большой толщины, а также явно находить КИН для поперечного и продольного сдвига.

В данной работе решена задача термоупругости для изотропной пластины, содержащей теплоизолированный разрез, с использованием обобщённой теории. Теплообмен с внешней средой имеет произвольный характер.

**Постановка задачи.** Рассмотрим изотропную пластину толщины  $2h$  в прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$ , содержащую теплоизолированный разрез  $L$ . На лицевых поверхностях пластины происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с внешней средой нулевой температуры.

В рамках  $\{1,0\}$ -аппроксимации (обобщённой теории С. П. Тимошенко) компоненты вектора перемещений имеют вид [10]

$$u_x = uP_0 + \gamma_x hP_1, \quad u_y = vP_0 + \gamma_y hP_1, \quad u_z = w_0P_0,$$

в котором  $u$ ,  $v$ ,  $w_0$ ,  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$  – обобщённые перемещения. При этом для ненулевых компонент тензора напряжений имеют место формулы [10]

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{N_x}{2h} P_0 + \frac{3M_x}{2h^2} P_1 \quad (x \rightarrow y), \\
\tau_{xy} &= \frac{S}{2h} P_0 + \frac{3H}{2h^2} P_1, \\
\tau_{xz} &= \frac{Q_{x0}}{2h} (P_0 - P_2) \quad (x \rightarrow y),
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $S$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $H$ ,  $Q_{x0}$ ,  $Q_{y0}$  – обобщённые усилия и моменты.

Температура имеет представление  $T = T_0 P_0 + T_1 P_1$ , где  $T_0$  – средняя температура,  $T_1$  – температурный момент. Система дифференциальных уравнений термоупругости {1,0}-аппроксимации, записанная в безразмерной системе координат  $x_1 = x/h$ ,  $x_2 = y/h$ ,  $x_3 = z/h$ , включает в себя [9, 10]:

– первое приближение трёхмерного уравнения теплопроводности

$$\Delta T_k + A_{k0} T_0 + A_{k1} T_1 = 0 \quad (k = 0, 1), \tag{2}$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  – оператор Лапласа;

– уравнения Дюамеля–Неймана в перемещениях

$$\begin{aligned}
N_1 &= B_0 \{ \partial_1 u + \nu \partial_2 v - \alpha(1 + \nu) T_0 \}, \\
N_2 &= B_0 \{ \nu \partial_1 u + \partial_2 v - \alpha(1 + \nu) T_0 \}, \\
S &= \frac{1 - \nu}{2} B_0 (\partial_2 u + \partial_1 v), \\
M_1 &= D_0 \{ \partial_1 \gamma_1 + \nu \partial_2 \gamma_2 - \alpha(1 + \nu) T_1 \}, \\
M_2 &= D_0 \{ \nu \partial_1 \gamma_1 + \partial_2 \gamma_2 - \alpha(1 + \nu) T_1 \}, \\
H &= \frac{1 - \nu}{2} D_0 (\partial_2 \gamma_1 + \partial_1 \gamma_2), \\
Q_{j0} &= \Lambda_0 (\gamma_j + \partial_j w_0) \quad (j = 1, 2);
\end{aligned} \tag{3}$$

– уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
\partial_1 N_1 + \partial_2 S &= 0, \\
\partial_1 S + \partial_2 N_2 &= 0, \\
\partial_1 M_1 + \partial_2 H - Q_{10} &= 0, \\
\partial_1 H + \partial_2 M_2 - Q_{20} &= 0, \\
\partial_1 Q_{10} + \partial_2 Q_{20} &= 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

При этом  $A_{kj} = A_{kj} (Bi^\pm)$  – известные коэффициенты [13];  $Bi^\pm$  – парамет-

ры теплообмена (критерии Био) на лицевых поверхностях пластины  $x_3 = \pm 1$ ;  $\nu$ ,  $\alpha$  – коэффициент Пуассона и температурный коэффициент линейного расширения соответственно;

$$B_0 = 3D_0 = \frac{2}{1-\nu^2}, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (j=1,2), \quad \Lambda_0 = \frac{5}{6(1+\nu)}.$$

Мембранные усилия и перерезывающие силы в соотношениях (3) определены с точностью до значения  $Eh$  ( $E$  – модуль Юнга), а моменты – с точностью до  $Eh^2$ . Первые три уравнения Дюамеля–Неймана и первые два уравнения равновесия описывают безмоментное термоупругое состояние. Остальные уравнения (3), (4) описывают состояние термоупругого изгиба.

Заметим, что в случае симметричного теплообмена, когда параметры теплообмена на лицевых поверхностях пластины равны ( $Bi^+ = Bi^-$ ), система уравнений термоупругости (2)–(4) распадается на две независимые системы, описывающие безмоментное термоупругое состояние и состояние термоупругого изгиба. В случае несимметричного теплообмена эти системы не являются независимыми.

Граничные условия на линии теплоизолированного разреза  $L$  с нормалью  $\vec{n} = (n_1, n_2)$  в предположении свободных берегов разреза и отсутствия контакта между ними имеют вид

$$\left. \frac{\partial T_k}{\partial n} \right|_L = 0 \quad (k=0,1) \quad (5)$$

для задачи теплопроводности (2) [3],

$$\begin{aligned} N_n|_L = 0, \quad S_{nt}|_L = 0, \quad M_n|_L = 0, \\ H_{nt}|_L = 0, \quad Q_{n0}|_L = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

для задачи термоупругости (3), (4), причем

$$\begin{aligned} N_n &= n_1^2 N_1 + 2n_1 n_2 S + n_2^2 N_2, \\ S_{nt} &= n_1 n_2 (N_1 - N_2) + (n_2^2 - n_1^2) S, \\ M_n &= n_1^2 M_1 + 2n_1 n_2 H + n_2^2 M_2, \\ H_{nt} &= n_1 n_2 (M_1 - M_2) + (n_2^2 - n_1^2) H, \\ Q_{n0} &= n_1 Q_{10} + n_2 Q_{20}. \end{aligned}$$

Компоненты термоупругого состояния пластины с разрезом  $G^*$  представляются в виде суммы [12]

$$G^* = G^o + G, \quad (7)$$

где  $G^o$  – компоненты основного термоупругого состояния, т. е. термоупругого состояния в сплошной пластине;  $G$  – компоненты возмущённого

термоупругого состояния, вызванного наличием разреза.

Основное термоупругое состояние  $G^o$  будем считать известным. Компоненты возмущённого термоупругого состояния  $G$  определяются из системы уравнений (2)–(4). граничных условий для компонент  $G$  следуют из условий (5), (6) и представлений (7) на линии разреза  $L$  и имеют вид

$$\left. \frac{\partial T_k}{\partial n} \right|_L = - \left. \frac{\partial T_k^o}{\partial n} \right|_L \quad (k = 0, 1) \quad (8)$$

для задачи теплопроводности (2);

$$\begin{aligned} N_n|_L &= -N_n^o|_L, & S_{nt}|_L &= -S_{nt}^o|_L, & M_n|_L &= -M_n^o|_L, \\ H_{nt}|_L &= -H_{nt}^o|_L, & Q_{n0}|_L &= -Q_{n0}^o|_L \end{aligned} \quad (9)$$

для задачи термоупругости (3), (4).

Будем рассматривать только такие пластины, в которых разрез  $L$  удалён от внешнего граничного контура на расстояние, значительно превышающее длину разреза. В этом случае компоненты возмущённого термоупругого состояния  $G$  не распространяются до линии внешней границы и определяются лишь условиями, заданными на линии разреза.

**Методика решения задачи.** Применим к разрешающим уравнениям системы (2)–(4) двумерное интегральное преобразование Фурье. Поскольку искомые функции на линии разреза  $L$  имеют разрывный характер, то преобразование Фурье их частных производных определяется формулой [12]:

$$F[\partial_j G] = (-i\xi_j) \tilde{G} + \frac{1}{2\pi} \int_L n_j [G] \exp\{i(\bar{\xi}, \bar{x}')\} dL \quad (j = 1, 2), \quad (10)$$

где  $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$  – координаты текущей точки в пространстве трансформант;  $[G] = G^+ - G^-$  – скачок функции  $G$  при переходе через линию  $L$  ( $G^\pm$  – граничные значения функции  $G$  в соответствии с выбранным направлением нормали  $\bar{n}$ );  $\bar{x}' = (x'_1, x'_2)$  – координаты точки на линии  $L$ . Направление интегрирования образует прямой угол с нормалью  $\bar{n}$  при вращении против часовой стрелки.

Решение задачи теплопроводности (2), (8) построено в статье [1]. Здесь дадим решение задачи термоупругости. Применяя двумерное интегральное преобразование Фурье (10) к системе (3), (4), запишем трансформанты обобщённых усилий и моментов:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_j^q &= \frac{1}{2\pi} \int_L \sum_{k=1}^{\kappa_{q,j}} \tilde{K}_{jk}^q \Psi_k^q \exp\{i(\bar{\xi}, \bar{x}')\} dL \quad (q = 0, 1); \\ \kappa_{q,j} &= \begin{cases} 3q + 4, & \text{если } q = 0, 1; j = \overline{1, 3}; \\ 5, & \text{если } q = 1; j = 4, 5; \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

$$P_j^0 = N_j, \quad P_j^1 = M_j, \quad P_{j+3}^1 = Q_{j0} \quad (j=1,2),$$

$$P_3^0 = S, \quad P_3^1 = H.$$

Здесь и в дальнейшем верхним индексом  $q = 0$  обозначаются компоненты безмоментного термоупругого состояния; верхним индексом  $q = 1$  обозначаются компоненты состояния термоупругого изгиба;  $\tilde{K}_{jk}^q$  – трансформанты ядер интегральных представлений, например:

$$\tilde{K}_{22}^1 = \frac{2}{3} \left\{ \frac{i\xi_1^3}{p^4} + \frac{3\Lambda_0 i \xi_1 \xi_2^2}{p^4 (p^2 + 2, 5)} \right\}, \quad p^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2; \quad (12)$$

$\psi_k^q = \psi_k^q(s)$  – неизвестные функции ( $s$  – длина дуги кривой  $L$ ):

$$\psi_1^0 = \frac{d[u]}{ds}, \quad \psi_2^0 = \frac{d[v]}{ds}, \quad \psi_3^0 = \psi_6^1 = [T_0], \quad \psi_4^0 = \psi_7^1 = [T_1],$$

$$\psi_j^1 = \frac{d[\gamma_j]}{ds}, \quad \psi_{j+3}^1 = [\gamma_j] \quad (j = 1, 2), \quad \psi_3^1 = \frac{d[w_0]}{ds}.$$

Методику обращения [11] покажем на примере трансформанты ядра  $\tilde{K}_{22}^1$ . Применяя формулу обращения для двумерного интегрального преобразования Фурье к выражению (12), получим

$$K_{22}^1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{1}{3} \Phi_1 + \Lambda_0 \Phi_2, \quad \bar{x}_j = x_j - x'_j \quad (j = 1, 2); \quad (13)$$

$$\Phi_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\xi_1^3 X}{p^4} d\xi_1 d\xi_2, \quad \Phi_2 = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\xi_1 \xi_2^2 X}{p^4 (p^2 + 2, 5)} d\xi_1 d\xi_2; \quad (14)$$

$$X = \sin \xi_1 \bar{x}_1 \cos \xi_2 \bar{x}_2.$$

В полярных координатах  $\bar{x}_1 = r \cos \varphi$ ,  $\bar{x}_2 = r \sin \varphi$ ,  $\xi_1 = \rho \cos \theta$ ,  $\xi_2 = \rho \sin \theta$  соотношения (14) примут вид

$$\Phi_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta \int_0^\infty X d\rho, \quad \Phi_2 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \int_0^\infty \frac{X d\rho}{\rho^2 + 2, 5}.$$

Здесь согласно разложению Якоби–Ангера [11]

$$X = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(r\rho) \cos(2n+1)\varphi \cos(2n+1)\theta,$$

где  $J_\nu(z)$  – функция Бесселя первого рода порядка  $\nu$ . Выражения для интегралов  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  переписутся так

$$\Phi_1 = \frac{3}{2} \cos \varphi \int_0^{\infty} J_1(r\rho) d\rho - \frac{1}{2} \cos 3\varphi \int_0^{\infty} J_3(r\rho) d\rho,$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \cos \varphi \int_0^{\infty} \frac{J_1(r\rho) d\rho}{\rho^2 + 2,5} + \frac{1}{2} \cos 3\varphi \int_0^{\infty} \frac{J_3(r\rho) d\rho}{\rho^2 + 2,5}.$$

Учитывая значение несобственного интеграла от функции Бесселя и интегральное представление специальной  $G$ -функции [11]

$$G_{n,\nu}(rz) = (-1)^n \left(\frac{r}{2}\right)^{\nu-n} \int_0^{\infty} \frac{\rho^{\nu-n+1} J_{\nu+n}(r\rho)}{\rho^2 + z^2} d\rho,$$

$$r > 0, \operatorname{Re} z > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < n + 1,5,$$

окончательно получим

$$\Phi_1 = \frac{\cos \varphi}{r} (3 - 2 \cos^2 \varphi),$$

$$\Phi_2 = -\frac{r}{4} \left\{ \cos \varphi G_{1,0}(\sqrt{2,5}r) - \cos 3\varphi G_{2,1}(\sqrt{2,5}r) \right\}.$$

Подставляя найденные интегралы в формулу (13), найдем

$$K_{22}^1 = \frac{\cos \varphi}{3r} (3 - 2 \cos^2 \varphi) -$$

$$-\frac{\Lambda_0 r}{4} \left\{ \cos \varphi G_{1,0}(\sqrt{2,5}r) - \cos 3\varphi G_{2,1}(\sqrt{2,5}r) \right\}.$$

Оригиналы других ядер  $\tilde{K}_{jk}^q$  в формулах (11) находятся аналогично.

Пусть  $L$  – прямолинейный теплоизолированный разрез длины  $2l$ , расположенный вдоль оси абсцисс симметрично начала координат:

$$L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq l, x_2 = 0\}. \quad (15)$$

Для разреза (15) оригиналы функций (11) имеют вид ( $x'_1 = ls$ )

$$P_j^q(x_1, x_2) = -\frac{l}{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^{k_{q,j}} K_{jk}^q(x_1 - ls, x_2) \psi_k^q ds \quad (q = 0, 1). \quad (16)$$

Подставляя интегральные представления компонент термоупругого состояния (16) в граничные условия (9), получим системы сингулярных интегральных уравнений (СИУ), описывающие

–безмоментное термоупругое состояние:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^0(s) ds}{s - \zeta} = F_j^0(\zeta) \quad (j = 1, 2), \quad (|\zeta| \leq 1); \quad (17)$$

–состояние термоупругого изгиба:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_2^1(s) ds}{s-\zeta} + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 E_{2,2}^1(\zeta-s) \psi_2^1(s) ds = F_2^1(\zeta) \quad (|\zeta| \leq 1), \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^1(s) ds}{s-\zeta} + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1,3} \int_{-1}^1 E_{j,m}^1(\zeta-s) \psi_m^1(s) ds = F_j^1(\zeta) \quad (j=1,3). \end{aligned} \quad (18)$$

Правые части систем СИУ (17), (18) имеют вид

$$\begin{aligned} F_1^q(\zeta) &= -(q+2) \left( P_3^q \right)^o \Big|_{x_2=0} + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^1 \int_{-1}^1 D_m^q(\zeta-s) [T_m] ds \quad (q=0,1), \\ F_2^q(\zeta) &= -(q+2) \left( P_2^q \right)^o \Big|_{x_2=0} \quad (q=0,1), \\ F_3^1(\zeta) &= -\frac{1}{\Lambda_0} \left( P_5^1 \right)^o \Big|_{x_2=0}, \end{aligned}$$

где разностные ядра  $D_m^q(\zeta-s)$  ( $m, q=0,1$ ) выражаются через линейные комбинации специальных  $G$ -функций и критерии Био  $Bi^\pm$ .

В системе СИУ (18) ядра  $E_{j,m}^1(\zeta-s)$  представляют собой линейные комбинации специальной  $G$ -функции и её первообразной, например,

$$\begin{aligned} E_{1,1}^1(\zeta-s) &= 1,5\Lambda_0 l^2 (\zeta-s) G_{2,0}(\sqrt{2,5l}|\zeta-s|) + 0,3\sqrt{2,5}\Lambda_0 \operatorname{sign}(\zeta-s) \times \\ & \quad \times \left\{ 5 \operatorname{IG}_{0,0}(\sqrt{2,5l}|\zeta-s|) - \operatorname{IG}_{2,2}(\sqrt{2,5l}|\zeta-s|) \right\}, \\ \operatorname{IG}_{n,\nu}(z) &= \int_0^z G_{n,\nu}(t) dt. \end{aligned}$$

Из непрерывности скачков обобщённых перемещений в вершинах разреза следуют дополнительные ограничения на искомые функции:

$$\int_{-1}^1 \psi_j^q(s) ds = 0 \quad (j=1,2 \text{ при } q=0; j=\overline{1,3} \text{ при } q=1). \quad (19)$$

Решение системы СИУ (17) при ограничениях (19) в классе функций, неограниченных на обоих концах отрезка  $[-1, 1]$  может быть получено аналитически [7]:

$$\psi_j^0(\zeta) = -\frac{1}{\pi\sqrt{1-\zeta^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-s^2}}{s-\zeta} F_j^0(s) ds \quad (j=1,2).$$

Система (18) представляет собой систему СИУ типа Коши первого рода, которая может быть решена методом механических квадратур [7]. После решения системы (18) функции  $\psi_4^1, \psi_5^1$  находятся по формулам



$$\psi_{j+3}^1(s) = \int_{-1}^s \psi_j^1(t) dt \quad (j = 1, 2),$$

а обобщённые моменты и перерезывающие силы – из представлений (16).

Особый интерес представляет термоупругое состояние в окрестностях концов разреза. Оно имеет сингулярный характер с особенностью вида  $r^{-1/2}$  [7]. Такое поведение внутренних силовых факторов обусловлено наличием ядер Коши в представлениях (16).

Пусть компоненты основного термоупругого состояния таковы, что

$$N_2^o \Big|_{x_2=0} = S^o \Big|_{x_2=0} = M_2^o \Big|_{x_2=0} = H^o \Big|_{x_2=0} = Q_{20}^o \Big|_{x_2=0} = 0, \quad (20)$$

тогда имеют место следующие представления внутренних силовых факторов на продолжениях  $L^\pm$  линии разреза (15):

$$\begin{aligned} N_x^\pm &= N_y^\pm = Eh\Psi_2^{0\pm}(x), \\ S^\pm &\approx Eh\Psi_1^{0\pm}(x), \\ M_x^\pm &\approx M_y^\pm \approx \frac{Eh^2}{3}\Psi_2^{1\pm}(x), \\ H^\pm &\approx \frac{Eh^2}{3}\Psi_1^{1\pm}(x), \\ Q_{x0}^\pm &\approx 0, \\ Q_{y0}^\pm &\approx Eh\Lambda_0\Psi_3^{1\pm}(x), \end{aligned} \quad (21)$$

где знаки «+» и «-» отвечают правому и левому концам разреза;

$$\Psi_j^q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-lh}^{lh} \frac{\psi_j^q(x') dx'}{x' - x} \quad (j=1, 2 \text{ при } q=0; j=\overline{1, 3} \text{ при } q=1). \quad (22)$$

Подставляя формулы (21) в разложения (1) и учитывая представление интегралов типа Коши (22) вблизи концов линии интегрирования [5], получим представления компонент тензора напряжений на продолжениях концов линии разреза  $L^\pm$  (приведены только ненулевые компоненты):

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^\pm &= \mp \frac{E}{4\sqrt{2hlr}} \left\{ P_0 \lim_{x' \rightarrow \pm lh} \left[ \Psi_1^0(x') \sqrt{l^2 h^2 - x'^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + P_1 \lim_{x' \rightarrow \pm lh} \left[ \Psi_1^1(x') \sqrt{l^2 h^2 - x'^2} \right] \right\}, \\ \tau_{yz}^\pm &= \mp \frac{E\Lambda_0}{4\sqrt{2hlr}} (P_0 - P_2) \lim_{x' \rightarrow \pm lh} \left[ \Psi_3^1(x') \sqrt{l^2 h^2 - x'^2} \right]. \end{aligned}$$

Сравнивая данные представления касательных напряжений с известными асимптотическими представлениями  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  [8], найдём

$$K_{II}^{\pm} = \mp \frac{\sqrt{\pi h l E}}{4} \left\{ P_0 \lim_{s \rightarrow \pm 1} \left[ \psi_1^0(s) \sqrt{1-s^2} \right] + P_1 \lim_{s \rightarrow \pm 1} \left[ \psi_1^1(s) \sqrt{1-s^2} \right] \right\},$$

$$K_{III}^{\pm} = \mp \frac{\sqrt{\pi h l E} \Lambda_0}{4} (P_0 - P_2) \lim_{s \rightarrow \pm 1} \left[ \psi_3^1(s) \sqrt{1-s^2} \right],$$

где  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  – КИН для поперечного и продольного сдвига соответственно.

Заметим, что КИН  $K_{II}^{\pm}$  достигает максимального по модулю значения  $K_{II}^{\max}$  на одной из лицевых поверхностей пластины ( $z = -h$  или  $z = h$ ), а  $K_{III}^{\pm}$  достигает максимального значения  $K_{III}^{\max}$  в срединной плоскости ( $z = 0$ ). С учётом свойств полиномов Лежандра имеем

$$K_{II}^{\max} = \frac{\sqrt{\pi h l E}}{4} \left\{ \left| \lim_{s \rightarrow 1} \left[ \psi_1^0(s) \sqrt{1-s^2} \right] \right| + \left| \lim_{s \rightarrow 1} \left[ \psi_1^1(s) \sqrt{1-s^2} \right] \right| \right\},$$

$$K_{III}^{\max} = \frac{3\sqrt{\pi h l E} \Lambda_0}{8} \left| \lim_{s \rightarrow 1} \left[ \psi_3^1(s) \sqrt{1-s^2} \right] \right|. \quad (23)$$

**Результаты численных исследований.** Были проведены численные исследования влияния параметра теплообмена на максимальные значения КИН для поперечного и продольного сдвига (23), обусловленные наличием возмущённого температурного поля. При этом коэффициент Пуассона принимался равным  $\nu = 0,3$ . Для анализа поведения КИН предполагалось отсутствие внутренних силовых факторов основного термоупругого состояния, т. е. выполнение условий (20).

Теплообмен с внешней средой на лицевых поверхностях пластины предполагался верхним односторонним ( $Bi^+ = Bi$ ,  $Bi^- = 0$ ). На линии разреза (15) длины  $2h$  ( $l = 1$ ) основное температурное поле таково, что действует лишь однородный тепловой поток, т. е.

$$\partial_2 T_0^o \Big|_{x_2=0} = q = \text{const} \neq 0,$$

$$\partial_2 T_1^o \Big|_{x_2=0} = 0 \quad (|x_1| \leq 1). \quad (24)$$

Результаты расчетов для максимальных по модулю значений КИН представлены на рис. 1, 2. Значения КИН даны с точностью до величины  $K^* = 0,25 \alpha q l \sqrt{l E} \sqrt{h}$ . На рис. 1 кривые 1 и 2 отвечают случаям верхнего одностороннего и симметричного теплообмена соответственно. Заметим, что в случае симметричного теплообмена с внешней средой  $K_{III}^{\max} = 0$ .

Из рис. 1, 2 видно, что в случае верхнего одностороннего теплообмена при действии однородного потока тепла с увеличением параметра теплообмена  $Bi$  максимальные значения КИН для поперечного и продольного сдвига возрастают. Причём  $K_{II}^{\max}$  возрастает лишь при  $\lg Bi \geq -0,5$ . Полученные результаты позволяют утверждать, что из условий безопас-

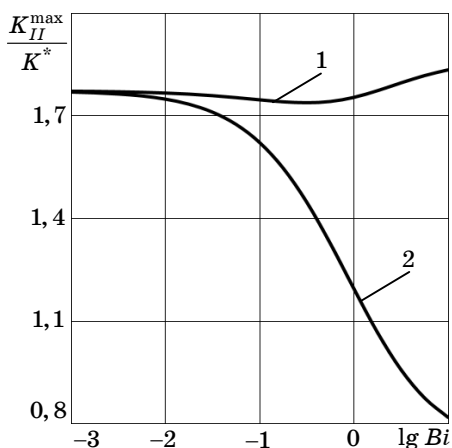


Рис. 1

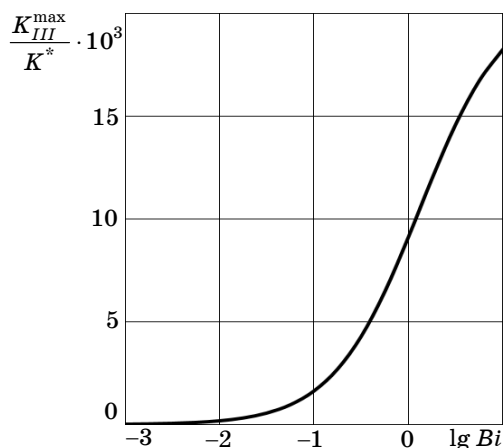


Рис. 2

ной експлуатації тонкостінних конструкцій симетричний теплообмін являється більш сприятливим режимом, ніж односторонній теплообмін.

**РЕЗЮМЕ.** Розв'язана задача термопружності для ізотропної пластини з теплоізолюваним розрізом на базі узагальненої теорії у варіанті  $\{1,0\}$ -апроксимації. Розглянуто випадок верхнього одностороннього теплообміну із зовнішнім середовищем. Знайдені коефіцієнти інтенсивності напружень для поперечного та поздовжнього зсуву. Досліджено вплив параметра теплообміну на коефіцієнти інтенсивності напружень.

**Ключові слова:** ізотропна пластинка, теплоізолюваний розріз, термопружність, узагальнена теорія, односторонній теплообмін, коефіцієнти інтенсивності напружень.

**SUMMARY.** The problem of thermoelasticity for an isotropic plate with heat-insulated cut is solved on the basis of a generalized theory in the variant  $\{1,0\}$ -approximation. The case of the upper one-sided heat exchange with the environment is considered. The stress intensity factors for transverse and longitudinal shear are found. The influence of heat exchange parameter on stress intensity factors is investigated.

**Key words:** isotropic plate, heat-insulated cut, thermoelasticity, generalized theory, one-sided heat exchange, stress intensity factors.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бондаренко Н. С., Гольцев А. С. Использование обобщенной теории в задачах теплопроводности для изотропных пластин с теплоизолированным разрезом // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А.– 2012.– № 1.– С. 26–32.
2. Бондаренко Н. С., Гольцев А. С. Коэффициенты интенсивности напряжений при термоупругом изгибе изотропных пластин с теплоизолированным разрезом в случае симметричного теплообмена // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А.– 2013.– № 2.– С. 20–26.
3. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами.– К.: Наук. думка, 1984.– 280 с.
4. Кит Г. С. Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тепловіділенням на круговій області (тріщині) // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 2008.– Т. 51, № 4.– С. 120–128.
5. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.– М.: Наука, 1968.– 512 с.
6. Опанасович В. К., Басса Н. М. Термопружний стан пластини з теплоізолюваними дуговими тріщинами уздовж кола з урахуванням повного гладкого контакту їх берегів // Прикладні пробл. механіки і математики.– 2011.– Вип. 9.– С. 164–174.

7. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.– К.: Наук. думка, 1976.– 444 с.
8. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения.– М.: Наука, 1985.– 504 с.
9. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А.* Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек.–К.: Наук. думка, 1980.– 216 с.
10. *Пелех Б. Л., Лазько В. А.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений.– К.: Наук. думка, 1982.–296 с.
11. *Хижняк В. К., Шевченко В. П.* Смешанные задачи теории пластин и оболочек : учебное пособие.– Донецк, 1980.– 128 с.
12. *Шевченко В. П., Гольцев А. С.* Задачи термоупругости тонких оболочек с разрезами: Учеб. пособие.– К., 1988.– 84 с.
13. *Bondarenko N. S., Gol'tsev A. S.* Solution of the heat conduction problem for anisotropic plates under concentrated thermal loading using legendre polynomials // J. Math. Sci.– 2011.– Vol. 174, № 3.– P. 400–414.
14. *Chudinovich I., Constanda C.* The displacement initial-boundary value problem in bending of thermoelastic plates weakened by cracks // J. Math. Anal. Appl.– 2008.– Vol. 348, № 1.– P. 286–297.

*Донецкий национальный университет*

*Поступила 13.11.2014*

УДК 539.3

В. Г. КАРНАУХОВ, д-р физ.-мат.наук,  
В. И. КОЗЛОВ, д-р физ.-мат.наук,  
Т. В. КАРНАУХОВА, канд. физ.-мат.наук

### ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МЕТОДА КБМ И МЕТОДА КОМПЛЕКСНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕУПРУГИХ ТЕЛ

*Рассматриваются задачи об установившихся резонансных колебаниях элемента конструкции из неупругого материала, механическое поведение которого описывается некоторой из известных моделей. Показано, что в первом приближении аналитические выражения для амплитудно- и фазо-частотных характеристик вынужденных нелинейных колебаний массы на неупругой пружине, полученные при помощи метода КБМ и метода комплексных характеристик, совпадают.*

**Ключевые слова:** нелинейные колебания, гистерезис, метод КБМ, комплексные характеристики

Как правило, при исследовании нелинейных гармонических колебаний неупругих тел используется следующий подход: 1) при помощи вариационных методов (например, метода Галеркина) нелинейная начально-краевая задача в частных производных сводится к нелинейным обыкновенным дифференциальным или интегро-дифференциальным уравнениям по времени [9]; 2) для решения последних используются асимптотический метод Крылова-Боголюбова-Митропольского (КБМ) [1]. Широкое применение для отыскания периодических решений нелинейных уравнений по времени получили также методов Пуанкаре и Галеркина. Вопрос об эквивалентности методов Пуанкаре и КБМ обсуждается в [6]. Эффективным методом исследования моногармонических колебаний в динамике неупругих элементов конструкций является метод, основанный на концепции комплексных характеристик [8, 9]. Суть этого метода заключается в замене при помощи методов нелинейной механики определяющих уравнений теорий вязкоупругости, пластичности или вязкопластичности комплексными тензорно-линейными алгебраическими уравнениями, которые имеют такой же вид, как и определяющие уравнения линейной вязкоупругости для гармонических процессов, но с коэффициентами, зависящими от деформаций (или напряжений). Детальное обсуждение концепции комплексных характеристик содержится в монографиях [4, 9]. Разработаны экспериментальные методы и установки для исследования зависимости действительных и мнимых составляющих комплексных характеристик от амплитуд деформаций и температуры. При использовании концепции комплексных характеристик задача построения моногармонических решений существенно упрощается. Возникает вопрос о точности полученных таким образом решений и об их связи с решениями, найденными методами Пуанкаре и КБМ. Широкий

класс задач о колебаниях элементов конструкций из материалов с нелинейным гистерезисом представлен в работах Г. С. Писаренко и его учеников [2, 5, 6]. В них получены решения многочисленных задач о свободных и вынужденных гармонических колебаниях неупругих стержней, пластин и оболочек. Для описания гистерезисных потерь в материале в этих работах использована модель Н. Н. Давиденкова. Для решения задач о резонансных колебаниях тонкостенных элементов применялся указанный выше подход, когда задача в частных производных сводилась к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка по времени, решение которого находилось методом КБМ. Как правило, при исследовании амплитудно- и фазо-частотных характеристик находилось решение в первом приближении, поскольку влияние последующих приближений на точность расчета амплитудно- и фазо-частотных характеристик незначительно. Кроме того, построение высших приближений сопряжено со значительными трудностями.

В данной статье показано, что решения, найденными в первом приближении при помощи метода КБМ, полностью совпадают с решениями, полученными на основе концепции комплексных характеристик.

**Постановка задачи.** Рассмотрим одну из задач об установившихся резонансных колебаниях элемента конструкции из неупругого материала, механическое поведение которого описывается некоторой моделью, скажем, моделью Н. Н. Давиденкова [5, 6] или нелинейными моделями вязкоупругости, упругопластичности или вязкопластичности. Следуя указанной выше процедуре, исходную нелинейную краевую задачу в частных производных сведем к задаче построения периодических решений нелинейного дифференциального либо интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + p^2 [\xi + \varepsilon\Phi(\xi, t)] = \varepsilon q \sin \omega t, \quad (1)$$

где  $p$  – собственная круговая частота колебаний системы;  $t$  – время;  $\Phi(\xi, t)$  – некоторый функционал, учитывающий рассеяние энергии в циклически деформируемом материале;  $\varepsilon$  – малый параметр;  $q$  – амплитуда внешней возмущающей силы. В работах [5, 6] этот функционал описывает контур петли гистерезиса, характеризующей гистерезисные потери. Наличие малого параметра свидетельствует о близости уравнения (1) к линейному дифференциальному уравнению свободных колебаний без затухания и возмущения. Для решения уравнения (1) в указанных работах применяется метод КБМ.

При использовании концепции комплексных характеристик поступают следующим образом [8, 9]. Пусть, например, девиатор напряжений  $\mathbf{s}(t)$  является нелинейным изотропным функционалом истории девиатора тензора деформаций  $\mathbf{e}(\tau)$ ,  $-\infty < \tau < t$ :

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}_{\tau=-\infty}^t [\mathbf{e}(\tau)]. \quad (2)$$

Считаем, что напряжения и деформации изменяются по гармоническим

законам:

$$s(t) = s' \cos \omega t - s'' \sin \omega t, \quad e(\tau) = e' \cos \omega \tau - e'' \sin \omega \tau, \quad -\infty < \tau < t. \quad (3)$$

Для аппроксимации функционала (2) на моногармонических историях деформаций (3) с использованием метода Галеркина или метода гармонической линеаризации получим следующие уравнения

$$s' = 2G'e' - 2G''e'', \quad s'' = 2G''e' + 2G'e''. \quad (4)$$

Они могут быть представлены одним комплексным уравнением

$$\tilde{s} = 2\tilde{G}\tilde{e}, \quad (5)$$

где  $\tilde{G} = G' + iG''$  – зависящий от деформаций комплексный модуль сдвига;  $\tilde{s}$  и  $\tilde{e}$  – комплексные амплитуды напряжений и деформаций:  $\tilde{s} = s' + is''$ ,  $\tilde{e} = e' + ie''$ .

Зависимость  $G'$  и  $G''$  от тензора  $e'$  и  $e''$  в изотропных функционалах реализуется через набор инвариантов [8, 9]  $e' \cdot e'$ ,  $e' \cdot e''$ ,  $e'' \cdot e''$ . В случае пропорционального (монофазного) деформирования по гармоническому закону зависимость  $G'$  и  $G''$  от  $e'$  и  $e''$  реализуется через второй инвариант тезора деформаций [9]

$$G' = G'(e_i), \quad G'' = G''(e_i). \quad (6)$$

Для повышения точности расчета напряжений  $s$  и неупругих деформаций  $\varepsilon^p$  разработана модифицированная техника определения комплексных характеристик, согласно которой комплексные характеристики определяются уравнениями [8]

$$|\tilde{G}| = \frac{s_i}{2e_i}; \quad G'' = \frac{1}{\omega e_i^2} \langle s \cdot e \rangle, \quad (7)$$

где  $s_i^2 = (s' \cdot s' + s'' \cdot s'') / 2$ .

Отметим, что описанная выше упрощенная модель может быть полностью конкретизирована на основе экспериментальных данных без обращения к каким-либо конкретным выражениям для функционала (2). Осредненная за период скорость диссипации определяется выражением

$$\langle D' \rangle = \langle \dot{W}_p \rangle = \langle s \cdot \dot{e} \rangle, \quad (8)$$

где скобки обозначают осреднение за период.

Для конкретизации зависимости комплексных характеристик от интенсивности деформаций используется одномерная задача о сдвиге (кручении).

При использовании концепции комплексных характеристик периодическое решение находится из уравнения

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + p^2 (G' + iG'') \xi = -iqe^{i\omega t}, \quad (9)$$

в котором

$$G' = 1 + \frac{A_1(\xi_a)}{\xi_a}, \quad G'' = -\frac{B_1(\xi_a)}{\xi_a}, \quad \xi_a = \sqrt{(A')^2 + (A'')^2}, \quad (10)$$

$$A_1(\xi_a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\xi_a \cos \theta) \cos \theta d\theta,$$

$$B_1(\xi_a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\xi_a \cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Таким образом, поставленная выше задача сводится к сравнению решений уравнений (1) и (9).

**Решение задачи.** Для решения дифференциального уравнения (1) может быть использован метод КБМ. Такое решение представлено, например, в работах [5, 6]. С его использованием амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристика находятся из уравнений [5, 6]

$$\left(\frac{\xi_a}{p}\right)^2 = 1 + \frac{\varepsilon A_1(\xi_a)}{\xi_a} \mp \sqrt{\left(\frac{\varepsilon q}{p^2 \xi_a}\right)^2 - \frac{\varepsilon^2 B_1^2(\xi_a)}{\xi_a^2}}; \quad (11)$$

$$tg \psi = \mp \frac{\sqrt{\varepsilon^2 q^2 - \varepsilon^2 B_1^2(\xi_a) p^4}}{\varepsilon p^2 B_1(\xi_a)}, \quad (12)$$

где

$$\theta = \omega t + \psi, \quad \xi = \xi_a \cos \theta.$$

В работах [2, 5, 6] с использованием модели Н. Н. Давиденкова приведены конкретные выражения для  $A_1(\xi_a)$ ,  $B_1(\xi_a)$  и получена формула для амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик, в которых фигурируют параметры выражения для функционала  $\Phi(\psi, t)$ . При этом в них содержится определяемый экспериментально логарифмический декремент затухания.

При использовании концепции комплексных характеристик периодическое решение уравнения (9) находится из уравнения для комплексной амплитуды  $A = A' + iA''$ :

$$-\omega^2 A + p^2(G' + iG'')A = -iq. \quad (13)$$

Разделяя уравнение (13) на действительную и мнимую составляющие, получим систему алгебраических уравнений относительно  $A'$  и  $A''$ :

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\omega}{p}\right)^2 A' + (G'A' - G''A'') &= 0, \\ -\left(\frac{\omega}{p}\right)^2 A'' + (G''A' - G'A'') &= -\left(\frac{q}{p^2}\right). \end{aligned} \quad (14)$$



После исключения действительных и мнимых составляющих из системы (14) и учета выражений для  $G'$  и  $G''$  получим уравнение для амплитуды  $\xi_a = \sqrt{(A')^2 + (A'')^2}$ , полностью совпадающее с (11).

Поскольку  $A' = |A| \cos \psi$ ,  $A'' = |A| \sin \psi$ , фазо-частотная характеристика определяется соотношением

$$tg \psi = \frac{A''}{A'}. \quad (15)$$

Решая (14) относительно  $A'$  и  $A''$  и используя уравнение (11), из (15) получим выражение для  $tg \psi$ , полностью совпадающее с (12).

Таким образом, приходим к заключению, что в первом приближении результаты, полученные методом КБМ и методом комплексных характеристик, полностью совпадают.

В работе [8] дан детальный анализ точности результатов, полученных на основе концепции комплексных характеристик. Для этого решены некоторые конкретные задачи о вынужденных гармонических колебаниях неупругих тел. Для моделирования механического неупругого поведения материала использована модель Боднера–Партома [8]. На основе решения некоторых простейших задач построены петли гистерезиса при гармонических колебаниях и определены зависимости действительной и мнимой составляющих комплексного модуля сдвига от амплитуд деформаций. Затем с использованием модели Боднера–Партома и концепции комплексных характеристик решены более сложные задачи. Представлено сравнение результатов расчетов амплитудно-частотных характеристик с использованием указанных двух моделей, свидетельствующее о хорошем согласовании этих результатов.

Таким образом, в работе представлено сравнение решений задачи о вынужденных гармонических колебаниях массы на неупругой нелинейной пружине. Неупругость характеризуется некоторым функционалом, в частности, петлей гистерезиса. Аналитические решения этих задач находятся двумя методами: 1) асимптотическим методом КБМ в первом приближении; 2) на основе концепции комплексных характеристик, действительная и мнимая составляющие которых зависят от амплитуды деформаций. Полученные этими двумя методами аналитические решения полностью совпадают, что свидетельствует об эквивалентности указанных двух подходов к решению задач о вынужденных резонансных колебаниях элементов конструкций из неупругих материалов.

**РЕЗЮМЕ.** Показано, що в першому наближенні аналітичні вирази для амплітудно-та фазо-частотних характеристик вимушених резонансних нелінійних коливань маси на непружній пружині, одержані за допомогою методу КБМ і методу комплексних характеристик, співпадають.

**Ключові слова:** нелінійні коливання, гістерезис, метод КБМ, комплексні характеристики.

**SUMMARY.** It is shown, that in first approximation the analytical expression for the amplitude- and phase-frequency characteristics of forced resonant nonlinear vibrations of

mass on a nonelastic spring obtained by KBM method and method of the complex characteristics are coinciding.

**Key words:** nonlinear vibrations, hysteresis, KBM method, complex characteristics

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
2. Матвеев В. В. Демпфирование колебаний деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1985. – 264 с.
3. Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища шк. – 1976. – 589 с.
4. Пальмов В. А. Колебания упругопластических тел. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
5. Писаренко Г. С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. – К.: Наук. думка, 1970. – 377 с.
6. Писаренко Г. С., Богинич О. Е. Колебания кинематически возбуждаемых механических систем с учетом диссипации энергии. – К.: Наук. думка, 1981. – 220 с.
7. Проскураков Л. П. Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1977. – 256 с.
8. Сенченков И. К., Жук Я. А., Карнауков В. Г. Моделирование термомеханического поведения физически нелинейных материалов при моногармоническом нагружении // Прикладная механика – 2004. – Т. 40, № 9. – С. 3–34.
9. Термомеханическая теория вязкоупругих тел // А. Ф. Булат, В. И. Дырда, В. Г. Карнауков и др. – К.: Наук. думка, 2013. – 428 с. (Прикладная механика упруго наследственных сред: В 3 т., Т. 3).

*Институт механики НАНУ, г. Киев*

*Национальный технический университет Украины “КПИ”, г. Киев*

*Поступила 17.10.2014*

УДК 539.3

Л. В. КУРПА, д-р техн. наук,  
Т. В. ШМАТКО, канд. техн. наук

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА R-ФУНКЦИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

*Рассмотрена задача о свободных колебаниях функционально-градиентных пологих оболочек и пластин с учетом их геометрически нелинейного деформирования. Используемый алгоритм базируется на предложенных ранее идеях, в основу которых положены теория R-функций, вариационные методы и метод Рунге-Кутты. Отличительной особенностью предложенного подхода является метод сведения исходной нелинейной системы уравнений движения с частными производными к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Применение теории R-функций позволяет распространить предложенный подход на оболочки с произвольной формой плана и различными видами граничных условий. Представленные численные результаты подтверждают эффективность, универсальность и достоверность разработанного метода.*

**Ключевые слова:** функционально-градиентные материалы, геометрическая нелинейность, пологие оболочки, теория R-функций, метод Рунге, теория Тимошенко.

Функционально-градиентные материалы (ФГМ), как высокопрочные композиты, сохраняющие целостность своей структуры в высокотемпературных средах, относятся к числу наиболее современных и широко используемых материалов во многих отраслях промышленности. Особую роль такие материалы играют при проектировании и изготовлении аэрокосмических объектов. Учитывая, что основные применения ФГМ связаны с работой в высокотемпературных средах, отметим, что первоначально большинство исследований были посвящены исследованию температурных напряжений и деформаций. Позже в работах [4, 5, 7–10] были подняты проблемы, связанные с исследованием механических воздействий на ФГМ. Достаточно полный обзор по нелинейному статическому и динамическому поведению пластин из ФГМ представлен в работах [4, 5, 10].

Следует заметить, что в основном для расчета ФГ пластин и оболочек используются приближенные методы, и наиболее применяемым является метод конечных элементов (МКЭ). Если же используются вариационные методы, то авторы ограничиваются прямоугольной формой плана и в основном одним типом граничных условий вдоль всей границы области (жесткое защемление или шарнирное опирание). Учитывая возможности теории R-функций, в настоящей работе предложен подход, позволяющий исследовать нелинейные колебания ФГ оболочек с практически произвольной формой плана и различными граничными условиями. При этом использован специальный подход для сведения исходной нелинейной системы дифференциальных уравнений с частными производными к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Постановка задачи.** Будем рассматривать композитные оболочки, изготовленные из смеси керамики и металла. При этом, как и в работе [2], примем степенной закон изменения объемной доли керамики:

$$V = \left( \frac{2z + h}{2h} \right)^k,$$

где  $h$  – толщина оболочки,  $k$  – показатель степени объемной доли материала, который может изменяться от 0 до бесконечности, т.е. ( $0 \leq k \leq \infty$ ). При этом если  $k = 0$ , то структура является полностью керамической, если же  $k = \infty$ , то – металлической. В общем случае материальные свойства ФГМ (модуль Юнга, коэффициент теплового расширения и др.) могут быть представлены как

$$P = \sum_{j=1} P_j V_j,$$

где  $P$  и  $V_j$  – материальные свойства и объемная доля составляющего материала, при этом сумма объемных долей составляющих материал должна быть равной 1, т.е.

$$\sum_j V_j = 1.$$

Следует заметить, что ФГ структуры используются, как правило, в высокотемпературных средах, а, следовательно, механические свойства материалов могут существенно изменяться с изменением температуры. Поэтому эта зависимость должна приниматься в расчет для получения более точного решения. Воспользуемся этими зависимостями, приведенными в работах [4, 10]

$$P_j = P_0 \left( P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3 \right),$$

где  $P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$  – коэффициенты, определяемые для каждого конкретного материала. Таблица значений этих коэффициентов для некоторых материалов представлена в работах [4, 9, 10]. Механические свойства смеси из двух составляющих определяются следующим образом:

$$P(z, T) = (P_c(T) - P_m(T)) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_m(T). \quad (1)$$

Выражение (1) представляет собой общую формулу для определения модуля упругости  $E$ , коэффициента Пуассона  $\nu$  и плотности  $\rho$  композита,  $P_c, P_m$  – соответствующие характеристики керамики и металла. Обозначим перемещения в любой точке оболочки через  $u_1, u_2, u_3$ . Согласно нелинейной теории пологих оболочек первого порядка, учитывающей деформации сдвига, перемещения  $u_1, u_2, u_3$  могут быть представлены как [9]

$$u_1 = u + z\psi_x, \quad u_2 = v + z\psi_y, \quad u_3 = w,$$

где  $u$ ,  $v$  и  $w$  – перемещения оболочки в срединной поверхности в направлении осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  соответственно,  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  – углы поворота нормали к срединной поверхности относительно осей  $Oy$  и  $Ox$ . Соотношения для деформаций выражаются с помощью следующих формул:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^L + \varepsilon_{ij}^{ND} \quad (i, j = 1, 2),$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^L &= u_{,x} + w/R_x, & \varepsilon_{22}^L &= v_{,y} + w/R_y, & \varepsilon_{12}^L &= u_{,y} + v_{,x}, \\ \varepsilon_{11}^{ND} &= \frac{1}{2}w_{,x}^2, & \varepsilon_{22}^{ND} &= \frac{1}{2}w_{,y}^2, & \varepsilon_{12}^{ND} &= w_{,x}w_{,y}, & \varepsilon_{13} &= w_{,x} + \psi_x, \\ \varepsilon_{23} &= w_{,y} + \psi_y, & \chi_{11} &= \psi_{x,x}, & \chi_{22} &= \psi_{y,y}, & \chi_{12} &= \psi_{x,y} + \psi_{y,x}. \end{aligned}$$

Усилия и моменты  $N_{ij}$ ,  $M_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ), которые вычисляются в результате интегрирования вдоль оси  $Oz$ , имеют в данном случае следующий вид:

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} = A_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_g dz, & A_{12} = A_{21} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_g \nu dz, & A_{33} &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{1+\nu} dz, \\ B_{11} = B_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_g z dz, & B_{12} = B_{21} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_g \nu z dz, & B_{33} &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E z}{1+\nu} dz, \\ D_{11} = D_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_g dz, & D_{12} = D_{21} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_g \nu dz, & D_{33} &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{1+\nu} dz. \end{aligned}$$

Здесь через  $E_g$  обозначена величина

$$E_g = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad E(z, T) = (E_c(T) - E_m(T)) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m(T).$$

Перерезывающие силы  $Q_x$ ,  $Q_y$  определяются как:

$$Q_x = K_s^2 A_{33} \varepsilon_{13}, \quad Q_y = K_s^2 A_{33} \varepsilon_{23},$$

где  $K_s^2$  – корректирующий коэффициент сдвига, который ниже принимается равным  $5/6$ . Если коэффициент Пуассона не зависит от температуры и является одинаковым для керамики и металла, т.е.  $\nu_m = \nu_c$ , то коэффициенты  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$  могут быть вычислены достаточно просто, и матрица (2) принимает следующий вид:

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu E_1 & 0 & E_2 & \nu E_2 & 0 \\ \nu E_1 & E_1 & 0 & \nu E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_1(1-\nu)}{2} & 0 & 0 & \frac{E_1(1-\nu)}{2} \\ E_2 & \nu E_2 & 0 & E_3 & \nu E_3 & 0 \\ \nu E_2 & E_2 & 0 & \nu E_3 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_2(1-\nu)}{2} & 0 & 0 & \frac{E_3(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{bmatrix},$$

где

$$E_1 = \left( E_m + \frac{E_c - E_m}{k+1} \right) h, \quad E_2 = \frac{(E_c - E_m) k h^2}{2(k+1)(k+2)},$$

$$E_3 = \left( \frac{E_m}{12} + (E_c - E_m) \left( \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+4)} \right) \right) h^3.$$

Плотность композита  $\rho$  также определяется в результате интегрирования по толщине оболочки:

$$I_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz = \left( \rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k+1} \right) h.$$

Потенциальная и кинетическая энергия определяются как

$$U = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_{11} \varepsilon_{11} + N_{22} \varepsilon_{22} + N_{12} \varepsilon_{12} + M_{11} \chi_{11} + M_{22} \chi_{22} + M_{12} \chi_{12}) d\Omega +$$

$$+ \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (Q_x (w_{,x} + \psi_x) + Q_y (w_{,y} + \psi_y)) d\Omega,$$

$$T = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} I_0 (u_{,t}^2 + v_{,t}^2 + w_{,t}^2) + 2I_1 (u_{,t} \psi_{x,t} + v_{,t} \psi_{y,t}) +$$

$$+ I_2 (\psi_{x,t}^2 + \psi_{y,t}^2) dx dy,$$

где

$$I_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz = \left( \rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k+1} \right) h,$$

$$I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z dz = \frac{(\rho_c - \rho_m) k}{2(k+1)(k+2)} h,$$

$$I_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^2 dz = \left( \frac{\rho_m}{12} + (\rho_c - \rho_m) \left( \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+4)} \right) \right) h^3.$$

Разрешающие уравнения дополняются граничными условиями, характер которых определяется способом закрепления контура оболочки.

**Метод решения.** Для решения поставленной задачи воспользуемся подходом, предложенным в работе [6]. Для реализации этого подхода применительно к ФГ положим оболочкам, прежде всего, необходимо решить линейную задачу о свободных колебаниях ФГ пологой оболочки. Алгоритм решения задачи о свободных колебаниях ФГ пологих оболочек с помощью метода R-функций (RFM) представлен в работе [2].

Для решения нелинейной задачи представим неизвестные функции в виде разложения по собственным функциям  $w_i^{(c)}(x, y)$ ,  $u_i^{(c)}(x, y)$ ,  $v_i^{(c)}(x, y)$ ,  $\psi_{xi}^{(c)}(x, y)$ ,  $\psi_{yi}^{(c)}(x, y)$  линейной задачи с коэффициентами  $y_k(t)$ , зависящими от времени:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^n y_i(t) w_i^{(c)}(x, y), \\ \psi_x &= \sum_{i=1}^n y_i(t) \psi_{xi}^{(c)}(x, y), \\ \psi_y &= \sum_{i=1}^n y_i(t) \psi_{yi}^{(c)}(x, y), \\ u &= \sum_{i=1}^n y_i(t) u_i^{(c)}(x, y) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i y_j u_{ij}, \\ v &= \sum_{i=1}^n y_i(t) v_i^{(c)}(x, y) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i y_j v_{ij}. \end{aligned} \quad (3)$$

Следует обратить внимание на то, что функции  $u_{ij}, v_{ij}$  должны быть найдены из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} L_{11}(u_{ij}) + L_{12}(v_{ij}) &= -Nl_1^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}) \\ L_{21}(u_{ij}) + L_{22}(v_{ij}) &= -Nl_2^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$Nl_1^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}) = w_i^{(c)},_x L_{11} w_j^{(c)} + w_i^{(c)},_y L_{12} w_j^{(c)},$$

$$Nl_2^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}) = w_i^{(c)},_x L_{12} w_j^{(c)} + w_i^{(c)},_y L_{22} w_j^{(c)}.$$

Операторы  $L_{11}$ ,  $L_{22}$ ,  $L_{12}$ ,  $L_{21}$  определяются как

$$L_{11} = \frac{E_1}{1-\nu^2} \left( ( )_{,xx} + \frac{1-\nu}{2} ( )_{,yy} \right),$$

$$L_{22} = \frac{E_1}{1-\nu^2} \left( \frac{1-\nu}{2} ( )_{,xx} + ( )_{,yy} \right),$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{E_1}{2(1-\nu)} ( )_{,xy}.$$

Система уравнений (4) может быть решена с помощью РФМ практически для произвольной формы плана и различных видов граничных условий. Подставляя выражения (3) для функций  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  в уравнения движения и применяя метод Бубнова-Галеркина, получим следующую систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $y_j(t)$ :

$$y_r''(t) + \omega_{Lr}^2 y_r(t) + \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij}^{(r)} y_i(t) y_j(t) + \sum_{i,j,k=1}^n \gamma_{ijk}^{(r)} y_i(t) y_j(t) y_k(t) = 0. \quad (5)$$

Выражения для коэффициентов  $\beta_{ij}^{(r)}$ ,  $\gamma_{ijk}^{(r)}$  имеют следующий вид:

$$\beta_{ij}^{(r)} = \frac{-1}{m_1 \|w_r^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} \left( N_{11}^{(L)}(w_j^{(c)})_{,xx} + N_{22}^{(L)}(w_j^{(c)})_{,yy} + \right.$$

$$\left. + 2N_{12}^{(L)}(w_j^{(c)})_{,xy} - k_1 N_{11}^{(Np)} - k_2 N_{22}^{(Np)} \right) w_r^{(c)} d\Omega,$$

$$\gamma_{ijk}^{(r)} = -\frac{1}{m_1 \|w_r^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} \left( N_{11}^{(Np)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i^{(c)} w_j^{(c)}) (w_k^{(c)})_{,xx} + \right.$$

$$\left. + N_{22}^{(Np)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i^{(c)} w_j^{(c)}) (w_k^{(c)})_{,yy} + \right.$$

$$\left. + 2N_{12}^{(Np)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i^{(c)} w_j^{(c)}) (w_k^{(c)})_{,xy} \right) w_r^{(c)} d\Omega,$$

$$N^{(L)} = \{N_{11}^{(L)}; N_{22}^{(L)}; N_{12}^{(L)}\}^T = [C] \varepsilon^{(L)},$$

$$\{N^{(Np)}\} = \{N_{11}^{(Np)}; N_{22}^{(Np)}; N_{12}^{(Np)}\}^T = [C] \{\varepsilon^{(Np)}\},$$

$$\varepsilon^{(L)} = \varepsilon^{(L)}(u_i^{(c)}, v_i^{(c)}, w_i^{(c)}) =$$



$$\begin{aligned}
&= \left\{ \left( u_i^{(c)} \right)_{,x} + k_1 w_i^{(c)} ; \left( v_i^{(c)} \right)_{,y} + k_2 w_i^{(c)} ; \left( \left( u_i^{(c)} \right)_{,y} + \left( v_i^{(c)} \right)_{,x} \right) \right\}^T, \\
\varepsilon^{(Np)} &= \varepsilon^{(Np)} \left( u_{ij}, v_{ij}, w_i^{(c)} w_j^{(c)} \right) = \\
&= \left\{ \left( u_{ij} \right)_{,x} + \frac{1}{2} \left( w_i^{(c)} \right)_{,x} \cdot \left( w_j^{(c)} \right)_{,x} ; \left( v_{ij} \right)_{,y} + \frac{1}{2} \left( w_i^{(c)} \right)_{,y} \cdot \left( w_j^{(c)} \right)_{,y}, \right. \\
&\left. \left( u_{ij} \right)_{,y} + \left( v_{ij} \right)_{,x} + \left( w_i^{(c)} \right)_{,x} \left( w_j^{(c)} \right)_{,y} \right\}^T.
\end{aligned}$$

Решение системы (5) может быть найдено с помощью различных приближенных методов. В настоящей работе был использован метод Рунге-Кутты. При этом при численной реализации мы ограничились только одной модой. Таким образом, вместо системы уравнений (5) находилось решение одного дифференциального уравнения.

**Численные результаты.** С целью проверки достоверности предложенного подхода рассмотрим решение некоторых тестовых задач.

В качестве ФГМ выберем комбинацию  $Al / Al_2O_3$ . Механические характеристики для материалов, составляющих такой сплав, представляются следующими параметрами [5, 8]:

$$Al: E_m = 70 \text{ GPa}, \quad \nu_m = 0,3, \quad \rho_m = 2707 \text{ kg} / \text{m}^3;$$

$$Al_2O_3: E_c = 380 \text{ GPa}, \quad \nu_c = 0,3, \quad \rho_c = 3800 \text{ kg} / \text{m}^3.$$

**1<sup>0</sup>. Анализ линейных колебаний.** Рассмотрим задачу о колебаниях пологих оболочек двойкой кривизны и различных значений безразмерного параметра  $a/h$ . Предполагается, что оболочка опирается на квадратный план. Граничные условия соответствуют условиям шарнирного опирания и имеют следующий вид:

$$v = w = M_x = \psi_y = N_x = 0 \quad \text{при } x = \pm \frac{a}{2},$$

$$u = w = M_y = \psi_x = N_y = 0 \quad \text{при } y = \pm \frac{a}{2}.$$

В качестве структуры решения [3] поставленной задачи выберем следующие:

$$u = f_2 \Phi_1, \quad v = f_1 \Phi_2, \quad w = \omega \Phi_3, \quad \psi_x = f_2 \Phi_4, \quad \psi_y = f_1 \Phi_5,$$

где

$$\omega(x, y) = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2},$$

$$f_1 = \frac{1}{2a} (a^2 - x^2) \geq 0,$$

$$f_2 = \frac{1}{2b} (b^2 - y^2) \geq 0;$$

$\Phi_i$  ( $i = \overline{1,5}$ ) – неопределенные компоненты, которые представляются в виде разложения в усеченные ряды по какой-либо полной системе функций:

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^{k=N_i} a_k^{(i)} \phi_k^{(i)},$$

где  $\{\phi_k^{(i)}\}$  – некоторая полная система функций. В настоящей работе в качестве такой системы выбраны степенные полиномы. После проведения вычислительного эксперимента было установлено, что сходимость ре-

Таблица 1

$b / R_y$	$a / R_x$	Метод	$k = 0$	$k = 0,5$	$k = 1$	$k = 4$	$k = 10$	$k = \infty$
0	0	RFM	0,211	0,180	0,162	0,139	0,132	0,108
		[8]	0,212	0,182	0,164	0,138	0,131	0,108
0,5	0,5	RFM	0,2297	0,196	0,177	0,150	0,141	0,117
		[8]	0,2301	0,200	0,182	0,151	0,142	0,117
1	1	RFM	0,275	0,237	0,215	0,177	0,164	0,140
		[8]	0,274	0,243	0,223	0,186	0,169	0,139
0	0,5	RFM	0,214	0,183	0,165	0,141	0,133	0,109
		[8]	0,215	0,186	0,168	0,141	0,133	0,110
0	1	RFM	0,223	0,191	0,173	0,146	0,137	0,114
		[8]	0,224	0,194	0,177	0,148	0,138	0,114
-0,5	0,5	RFM	0,205	0,175	0,158	0,135	0,128	0,04
		[8]	0,206	0,177	0,160	0,135	0,127	0,105
-1	1	RFM	0,191	0,163	0,148	0,126	0,119	0,097
		[8]	0,192	0,165	0,149	0,125	0,118	0,098

Таблица 2

0	0	RFM	0,060	0,051	0,046	0,040	0,038	0,310
		[8]	0,059	0,049	0,044	0,038	0,036	0,029
0,5	0,5	RFM	0,077	0,067	0,061	0,051	0,047	0,039
		[8]	0,075	0,066	0,060	0,050	0,046	0,038
1	1	RFM	0,111	0,098	0,089	0,073	0,066	0,057
		[8]	0,110	0,098	0,090	0,074	0,067	0,056
0	0,5	RFM	0,064	0,055	0,049	0,042	0,040	0,033
		[8]	0,062	0,054	0,048	0,041	0,040	0,032
0	1	RFM	0,075	0,065	0,059	0,050	0,046	0,038
		[8]	0,073	0,064	0,059	0,049	0,045	0,037
-0,5	0,5	RFM	0,058	0,049	0,044	0,039	0,037	0,030
		[8]	0,056	0,048	0,043	0,037	0,036	0,029
-1	1	RFM	0,054	0,046	0,041	0,036	0,034	0,027
		[8]	0,053	0,045	0,040	0,035	0,033	0,028

зультатов, по крайней мере, в третьем знаке наступает при сохранении 9-й степени для полиномов  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_4, \Phi_5$  и 10-й степени для полинома  $\Phi_3$ . Результаты, представленные ниже, были получены при сохранении именно такого количества координатных функций. В табл. 1 для случая  $a/h = 5$ , а в табл. 2 для случая  $a/h = 10$  выполнено сравнение собственных частот  $\Omega_1 = \lambda_1 h \sqrt{\rho_c/E_c}$  для пологих ФГ ( $Al/Al_2O_3$ ) оболочек двойкой кривизны с результатами работы [8].

**2<sup>о</sup>. Анализ нелинейных колебаний.** Рассмотрим нелинейные свободные колебания сферической ФГ жестко защемленной оболочки, опирающейся на эллиптический план. В работе [2] эта задача была решена только в линейной постановке и выполнено сравнение для двух сплавов:

$$\text{FG1: } Al/Al_2O_3: E_m/E_c = 70/380 \text{ GPa},$$

$$v_m = v_c = 0,3, \quad \rho_m/\rho_c = 2707/3800 \text{ kg/m}^3.$$

$$\text{FG2: } Al/ZrO_2: E_m/E_c = 70/151 \text{ GPa},$$

$$v_m = v_c = 0,3, \quad \rho_m/\rho_c = 2707/3000 \text{ kg/m}^3.$$

Геометрические параметры исследуемой оболочки были выбраны следующими:

$$R_x/R_y = 1, \quad a/b = 2, \quad h/2a = 0,1, 2a/R_x = 0,2. \quad (6)$$

На рис. 1 представлены результаты исследования геометрически нелинейных колебаний этой оболочки для смеси FG1 и двух значений параметра  $k = 0, k = 1$ . На рис. 2 представлены результаты для смеси FG2 и значений параметра  $k = 10, k = 100$ . Сравнение скелетных кривых с ре-

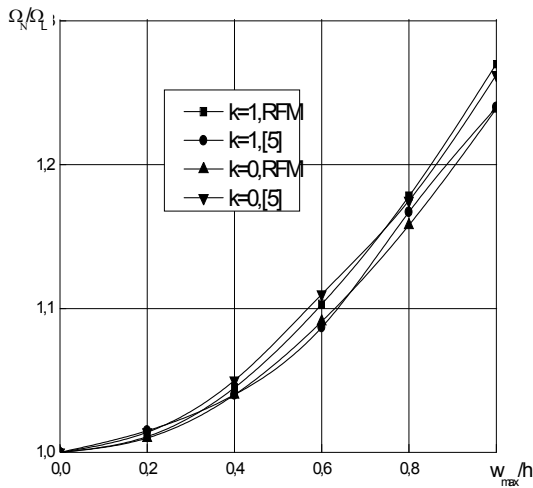


Рис.1

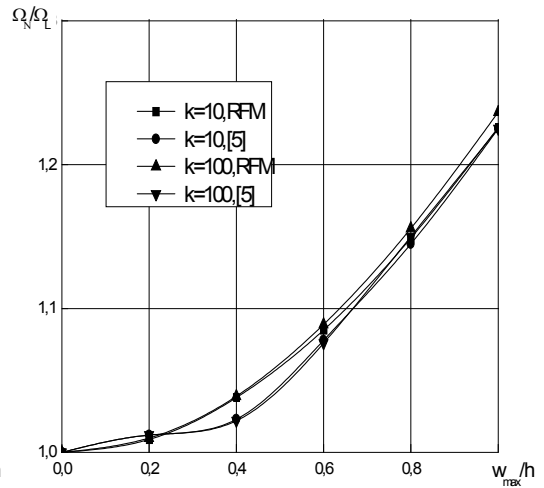


Рис.2

зультатами работы [6] подтверждает достоверность предложенного подхода. В рамках точности графика, полученные результаты практически

совпадают. Максимальное отклонение не превосходит 1.5 %.

Для иллюстрации возможностей метода, существенно использующего теорию R-функций, в работе [2] была рассмотрена задача о линейных колебаниях сферической жестко защемленной ФГ оболочки, опирающейся на план сложной формы (рис. 3). В настоящей работе для этой оболочки решена геометрически нелинейная задача. При численной реализации были использованы результаты линейной задачи, представленные в [2].

На рис. 4 изображены скелетные кривые для полой сферической жестко защемленной оболочки, изготовленной из смеси FG1 для значений показателя степени объемной доли керамики  $k_1 = 0; 1; 10$ . Геометрические параметры такие же, как и для эллиптического плана оболочки (6), при этом отношения  $b_1/2a$  и  $a_1/2a$  принято равными  $b_1/2a = 0,35$ ;  $a_1/2a = 0,2$ .

На рис. 5 представлены аналогичные зависимости для исследуемой оболочки, изготовленной из материала FG2. В обоих случаях кривые имеют жесткий характер, монотонно возрастают, что характерно для умеренно толстых жестко защемленных оболочек ( $h/2a = 0,1$ ). При проведении

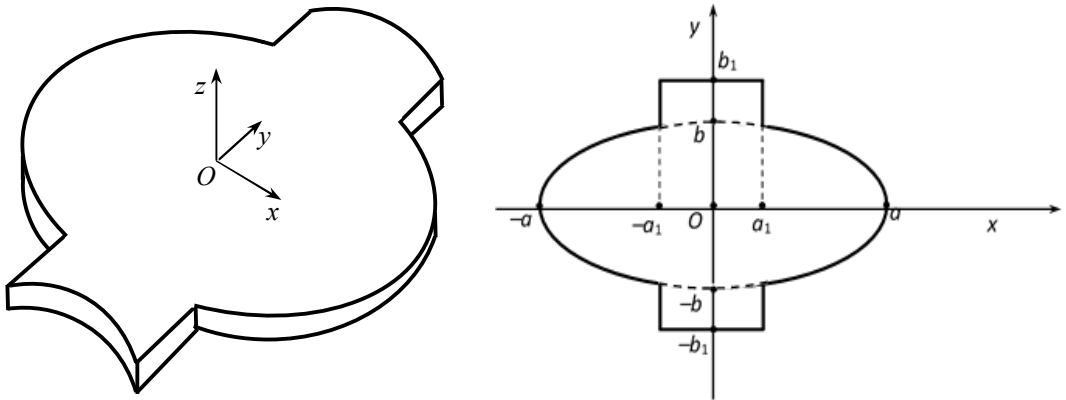


Рис.3

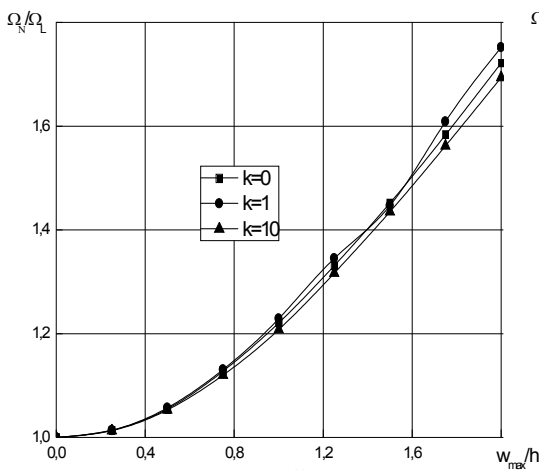


Рис.5

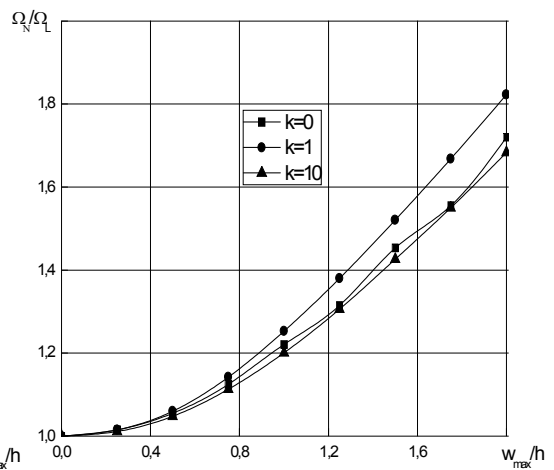


Рис.5

вычислительного эксперимента было установлено, что при стремлении отношения  $b_1 / 2a \rightarrow 0,25$ , т.е. отношение  $b_1 / b \rightarrow 1$ , скелетные кривые совпадают с соответствующими кривыми для эллиптического плана, что подтверждает достоверность полученных результатов.

Таким образом, в работе предложен метод исследования геометрически нелинейных свободных колебаний функционально-градиентных пологих оболочек со сложной формой плана, базирующийся на использовании теории R-функций, вариационном методе Ритца, процедуры Бубнова-Галеркина и методе Рунге-Кутты. Для уточненной теории пологих оболочек 1-го порядка предложенный подход реализован в рамках системы POLE-RL. Проведенное тестирование для оболочек, опирающихся на квадратный и эллиптический план, доказывает достоверность и эффективность предложенного метода, иллюстрация которого выполнена для оболочек со сложной формой плана  $a_1 / 2a = 0.2$ .

**РЕЗЮМЕ.** Показано можливість застосування теорії R-функцій для розробки алгоритму дослідження геометрично нелінійних функціонально-градієнтних (ФГ) пологих оболонок з довільною формою плану. Алгоритм розроблено для уточненої теорії ФГ пологих оболонок типу теорії С.П.Тимошенко. За допомогою розробленого програмного забезпечення розв'язано тестові задачі для ФГ пологих оболонок з квадратним та еліптичним планом. Для підтвердження ефективності та універсальності запропонованого підходу досліджено оболонки різної кривини, які мають складну форму плану.

**Ключові слова:** функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ), геометрична нелінійність, пологі оболонки, теорія R-функцій, RFM, метод Ритца, складна форма, теорія Тимошенко.

**SUMMARY.** The algorithm of investigation of geometrically nonlinear vibrations of functionally graded shallow shells with an arbitrary form is worked out. The proposed algorithm is based on the joint usage of refined shallow shell theory of the first order (Timoshenko's type), Ritz variational method, R-function theory, procedure by Bubnov-Galerkin and method by Runge-Kutta. Test problems have been solved for FG shallow shells with square and elliptical plan form. In order to confirm the advantage of the proposed approach the nonlinear vibrations of the double-curved shallow shells with complex plan form are investigated.

**Key words:** functionally-graded materials (FGM), geometrically nonlinearity, shallow shells, R-functions theory, (RFM), method by Ritz, complex form, Timoshenko's type theory.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курпа Л. В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. – 408 с.
2. Курпа Л. В., Шматко Т. В. Свободные колебания функционально-градиентных пологих оболочек со сложной формой плана. // Теорет. и прикладная механика. – 2014. – N 8(54). – С. 77–85.
3. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 551 с.
4. Alijani, F., Amabili, M., Karagiozis, K., Bakhtiari-Nejad, F. Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells // J. Sound Vibration. – 2011. – Vol. 330. – P. 1432–1454.
5. Chorfi S.M., Houmat A. Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form // Composite Structures. – 2010. – Vol. 92. – P. 2573–2581.
6. Kurpa L.V. Nonlinear free vibrations of multilayer shallow shells with a symmetric structure and with a complicated form of the plan. J. Math. Sciences, 2009 162, №1:85–98.

7. *Loy C.T, Lam K.Y, Reddy J.N.* Vibration of functionally graded cylindrical shells // Int J. Mech Sci.– 1999.–Vol. 41.– P. 309–324.
8. *Matsunaga H.* Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory// Composite Structures.– 2008.– Vol. 84.– P. 132–46.
9. *Reddy J.N.* Analysis of functionally graded plates//Int. J. Numerical methods in engineering.– 2000.– Vol. 47.– P. 663–684.
10. *Shen H.S.* Functionally Graded Materials. Nonlinear Analysis of Plates and Shells.– Florida.: CRC Press, 2009.–266 p.

*Национальный технический университет «ХПИ», г. Харьков*

*Поступила 01.12.2014*

УДК 539.3: 534.1

*И. А. ГЛУХОВ**В. И. СТОРОЖЕВ, д-р техн. наук***ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ P-SV ВОЛНЫ В ТРАНСТРОПНОМ СЛОЕ  
МЕЖДУ ТРАНСТРОПНЫМИ ПОЛУПРОСТРАНСТВАМИ  
ПРИ УСЛОВИЯХ СКОЛЬЗЯЩЕГО КОНТАКТА**

*В аналитической форме получены дисперсионные уравнения, описывающие спектры распространяющихся симметричных и антисимметричных по толщинной координате локализованных продольно-сдвиговых упругих волн вдоль трансверсально-изотропного слоя, заключенного между двумя однотипными по свойствам трансверсально-изотропными полупространствами. Слой и полупространства имеют неидеальный механический контакт с проскальзыванием. Приведены некоторые результаты качественного асимптотического анализа спектральной задачи, а также результаты расчетов ряда низших действительных ветвей дисперсионных спектров для некоторых сочетаний реальных геоматериалов слоя и полупространств. Проанализированы основные отличия в рассчитанных спектрах для сопоставляемых случаев неидеального и идеального механического контакта компонентов волновода.*

*Ключевые слова:* трансверсально-изотропный слой между трансверсально-изотропными полупространствами, неидеальный механический контакт с проскальзыванием, симметричные и антисимметричные локализованные продольно-сдвиговые упругие волны, трансцендентные дисперсионные уравнения, волноводы из реальных геоматериалов, асимптотический и численный анализ, расчеты ветвей спектров бегущих волн.

Анализ закономерностей распространения локализованных упругих волн продольно-сдвигового типа в деформируемом слое, заключенном между деформируемыми полупространствами, является одним из краеугольных элементов методологической базы геоакустических технологий и ультразвукового зондирования пластов полезных ископаемых [8, 12, 13]. Основные результаты теоретических численно-аналитических исследований по данной проблематике на сегодняшний день относятся к случаям распространения локализованных волн SH и P-SV типов с симметричными [2–6, 10–11] и антисимметричными [2, 3, 10, 11] формами колебательных движений по толщине слоя, грани которого идеально контактируют с вмещающими полупространствами. Выполнены также исследования, в которых упругий волновод в виде слоя между полупространствами рассматривается как предельный вариант трехслойной пластины с идеальным контактом и неограниченно возрастающими толщинами внешних вмещающих слоев [7]. При этом компоненты волноводной структуры являются изотропными [6, 10, 11] либо поперечно анизотропными [2–5] с ортогональными граням слоя осями симметрии механических свойств. Наконец, в работе [9] без численной реализации приведены результаты исследований по построению дисперсионного соотношения для волновода в виде заключенного между полупространствами и идеаль-

но контактирующего с ними слоя в случае, когда материалы всех составляющих принадлежат произвольному классу анизотропии.

В данной работе исследовано влияние фактора неидеального механического контакта с проскальзыванием на форму дисперсионных соотношений и результаты расчетов действительных ветвей спектров для локализованных симметричных и антисимметричных P-SV волн в трансверсально-изотропном слое, заключенном между двумя однотипными по свойствам трансверсально-изотропными полупространствами.

**Постановка задачи.** Рассматривается волновод в виде заключенного между деформируемыми полупространствами упругого слоя, занимающий область

$$V_{\Sigma} = V^{(H_+)} \cup V^{(L)} \cup V^{(H_-)} \quad (1)$$

в прямоугольных координатах  $Ox_1x_2x_3$ , где для его составных частей из трансверсально-изотропных материалов с коллинеарными  $Ox_3$  осями упругой симметрии введены обозначения

$$\begin{aligned} V^{(H_+)} &= \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 > h / 2\}, \\ V^{(H_-)} &= \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 < -h / 2\}, \\ V^{(L)} &= \{(x_1, x_2) \in R^2, -h / 2 \leq x_3 \leq h / 2\}. \end{aligned}$$

Полагается, что физико-механические свойства полупространств  $V^{(H_+)}$  и  $V^{(H_-)}$  идентичны, отличаются от физико-механических свойств слоя  $V^{(L)}$  и характеризуются отнесенными к нормирующему параметру  $c_*$  модулями упругости  $c_{ij}^{(L)}$  и  $c_{ij}^{(H)} = c_{ij}^{(H_+)} = c_{ij}^{(H_-)}$ , а также плотностями  $\rho^{(L)}$  и  $\rho^{(H)} = \rho^{(H_+)} = \rho^{(H_-)}$ .

Для волновода с описанной структурой анализируются процессы распространения симметричных и антисимметричных по толщине слоя локализованных гармонических упругих волн  $P-SV$  типа вдоль произвольно ориентированного направления в его плоскости, в качестве которого без ограничения общности выбирается координатное направление  $Ox_1$ .

Модель распространения исследуемых локализованных волн описывается спектральной краевой задачей, включающей системы уравнений волнового деформирования для всех компонентов волновода

$$L_{j1}^{(\xi)} u_1^{(\xi)}(x_1, x_3, t) + L_{j3}^{(\xi)} u_3^{(\xi)}(x_1, x_3, t) = 0 \quad (j = \overline{1, 2}; \xi = L, H_+, H_-) \quad (2)$$

и краевые условия их неидеального механического контакта с проскальзыванием

$$\begin{aligned} u_3^{(H_-)}(x_1, -h / 2, t) &= u_3^{(L)}(x_1, -h / 2, t), \\ \sigma_{33}^{(H_-)}(x_1, -h / 2, t) &= \sigma_{33}^{(L)}(x_1, -h / 2, t), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\sigma_{31}^{(H-)}(x_1, -h/2, t) &= 0, & \sigma_{31}^{(L)}(x_1, -h/2, t) &= 0, \\
u_3^{(H+)}(x_1, h/2, t) &= u_3^{(L)}(x_1, h/2, t), \\
\sigma_{33}^{(H+)}(x_1, h/2, t) &= \sigma_{33}^{(L)}(x_1, h/2, t), \\
\sigma_{31}^{(H+)}(x_1, h/2, t) &= 0, & \sigma_{31}^{(L)}(x_1, h/2, t) &= 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

в которых

$$\begin{aligned}
L_{11}^{(\xi)}(\partial_1, \partial_3, \partial_t) &= c_{11}^{(\xi)}\partial_1^2 + c_{44}^{(\xi)}\partial_3^2 + \rho^{(\xi)}\partial_t^2, \\
L_{22}^{(\xi)}(\partial_1, \partial_3, \partial_t) &= c_{44}^{(\xi)}\partial_1^2 + c_{33}^{(\xi)}\partial_3^2 + \rho^{(\xi)}\partial_t^2, \\
L_{12}^{(\xi)}(\partial_1, \partial_3, \partial_t) &= L_{21}^{(\xi)}(\partial_1, \partial_3, \partial_t) = (c_{13}^{(\xi)} + c_{44}^{(\xi)})\partial_1\partial_3 \\
\partial_s &= \partial / \partial x_s \quad (s = 1; 3), \quad \partial_t = \partial / \partial t;
\end{aligned}$$

$u_j^{(\xi)}(x_1, x_3, t)$  – компоненты комплексного вектора волновых упругих перемещений;  $\sigma_{ij}^{(\xi)}$  – компоненты тензора динамических напряжений.

**Получение основных дисперсионных соотношений.** Спектральная краевая задача (2)–(3) исследуется в безразмерных прямоугольных координатах с сохраняемыми обозначениями  $x_j$ , отнесенных к нормирующему параметру  $R_* = h$ . Она имеет альтернативные решения, описывающие спектры независимых симметричных и антисимметричных по толщине слоя волновых движений.

Для отнесенных к  $R_*$  безразмерных составляющих комплексного вектора волновых упругих перемещений  $u_j^{(\xi)}(x_1, x_3, t)$  в компонентах волновода при исследовании симметричных локализованных волн с учетом идентичности свойств вмещающих полупространств вводятся исходные представления

$$\begin{aligned}
u_1^{(H+)}(x_1, x_3, t) &= (A_{11}^{(H)} \exp(-\alpha_1^{(H)} x_3) + A_{21}^{(H)} \exp(-\alpha_2^{(H)} x_3))E(x_1, t), \\
u_3^{(H+)}(x_1, x_3, t) &= (A_{13}^{(H)} \exp(-\alpha_1^{(H)} x_3) + A_{23}^{(H)} \exp(-\alpha_2^{(H)} x_3))E(x_1, t), \\
u_1^{(L)}(x_1, x_3, t) &= (A_{11}^{(L)} \sinh(\alpha_1^{(L)} x_3) + A_{21}^{(L)} \sinh(\alpha_2^{(L)} x_3))E(x_1, t), \\
u_3^{(L)}(x_1, x_3, t) &= (A_{13}^{(L)} \cosh(\alpha_1^{(L)} x_3) + A_{23}^{(L)} \cosh(\alpha_2^{(L)} x_3))E(x_1, t), \\
u_1^{(H-)}(x_1, x_3, t) &= (A_{11}^{(H)} \exp(\alpha_1^{(H)} x_3) + A_{21}^{(H)} \exp(\alpha_2^{(H)} x_3))E(x_1, t), \\
u_3^{(H-)}(x_1, x_3, t) &= (A_{13}^{(H)} \exp(\alpha_1^{(H)} x_3) + A_{23}^{(H)} \exp(\alpha_2^{(H)} x_3))E(x_1, t); \\
E(x_1, t) &= \exp[-i(\omega t - kx_1)],
\end{aligned} \tag{4}$$

в которых  $\omega$  – круговая частота волны;  $k = \tilde{k}R_*$  – нормированное безразмерное волновое число;  $\alpha_j^{(\xi)} = (-b^{(\xi)} + (-1)^j((b^{(\xi)})^2 - 4a^{(\xi)}c^{(\xi)})^{1/2}) / (2a^{(\xi)})$  – корни характеристических полиномов

$$(\alpha^{(\xi)})^4 + (b^{(\xi)} / a^{(\xi)}) (\alpha^{(\xi)})^2 + (c^{(\xi)} / a^{(\xi)}) = 0 \quad (5)$$

с коэффициентами вида

$$\begin{aligned} a^{(\xi)} &= c_{33}^{(\xi)} c_{44}^{(\xi)}, \quad b^{(\xi)} = (c_{33}^{(\xi)} + c_{44}^{(\xi)}) (\Omega^{(\xi)})^2 + ((c_{13}^{(\xi)})^2 - 2c_{13}^{(\xi)} c_{44}^{(\xi)} - c_{11}^{(\xi)} c_{33}^{(\xi)}) k^2, \\ c^{(\xi)} &= ((\Omega^{(\xi)})^2 - c_{11}^{(\xi)} k^2) ((\Omega^{(\xi)})^2 - c_{44}^{(\xi)} k^2), \\ (\Omega^{(\xi)})^2 &= \rho^{(\xi)} \omega^2 R_*^2 / c_* = (\rho^{(\xi)} / \rho_*) \Omega^2 \quad (\xi = L; H). \end{aligned}$$

Следствием подстановки представлений (4) в дифференциальные уравнения (2) являются соотношения связи коэффициентов

$$\begin{aligned} A_{13}^{(H)} &= \delta_{13}^{(H)} A_{11}^{(H)}, \quad A_{23}^{(H)} = \delta_{23}^{(H)} A_{21}^{(H)}, \\ A_{13}^{(L)} &= \delta_{13}^{(L)} A_{11}^{(L)}, \quad A_{23}^{(L)} = \delta_{23}^{(L)} A_{21}^{(L)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_{13}^{(H)} &= [((\Omega^{(H)})^2 - c_{11}^{(H)} k^2 - c_{44}^{(H)} (\alpha_1^{(H)})^2) / (ik(c_{13}^{(H)} + c_{44}^{(H)}) \alpha_1^{(H)})], \\ \delta_{23}^{(H)} &= [(ik(c_{13}^{(H)} + c_{44}^{(H)}) \alpha_1^{(H)}) / ((\Omega^{(H)})^2 - c_{44}^{(H)} k^2 - c_{33}^{(H)} (\alpha_1^{(H)})^2)], \\ \delta_{13}^{(L)} &= [((\Omega^{(L)})^2 - c_{11}^{(L)} k^2 - c_{44}^{(L)} (\alpha_1^{(L)})^2) / (ik(c_{13}^{(L)} + c_{44}^{(L)}) \alpha_1^{(L)})], \\ \delta_{23}^{(L)} &= [(ik(c_{13}^{(L)} + c_{44}^{(L)}) \alpha_1^{(L)}) / ((\Omega^{(L)})^2 - c_{44}^{(L)} k^2 - c_{33}^{(L)} (\alpha_1^{(L)})^2)]. \end{aligned}$$

Формулировка краевых условий (3) с учетом представлений (4) и соотношений (6), порождает однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных постоянных коэффициентов  $A_{11}^{(H)}$ ,  $A_{21}^{(H)}$ ,  $A_{11}^{(L)}$ ,  $A_{21}^{(L)}$  с матрицей  $\|d_{n,m}(\Omega, k)\|$ . Ее ненулевые элементы в рассматриваемом случае имеют выражения

$$\begin{aligned} d_{1,m} &= -\delta_{m3}^{(L)} s_m, \quad d_{1,m+2} = \delta_{m3}^{(H)} e_m^{(H)}, \\ d_{2,m} &= -(c_{13}^{(L)} ik + c_{33}^{(L)} \delta_{m3}^{(L)} \alpha_m^{(L)}) c_m, \\ d_{2,m+2} &= (c_{13}^{(H)} ik - c_{33}^{(H)} \alpha_m^{(H)} \delta_{m3}^{(H)}) e_m^{(H)}, \\ d_{3,m} &= c_{44}^{(L)} (ik \delta_{m3}^{(L)} + \alpha_m^{(L)}) s_m, \quad d_{3,m+2} = 0, \\ d_{4,m} &= 0 \quad d_{4,m+2} = c_{44}^{(H)} (ik \delta_{m3}^{(H)} - \alpha_m^{(H)}) e_m^{(H)} \quad (m = \overline{1, 2}), \\ e_j^{(H)} &= \exp(-\alpha_j^{(H)} / 2), \quad c_j = \cosh(\alpha_j^{(L)} / 2), \quad s_j = \sinh(\alpha_j^{(L)} / 2). \end{aligned} \quad (7)$$

Равенство нулю функционального определителя матрицы  $\|d_{n,m}(\Omega, k)\|$  является искомым дисперсионным соотношением

$$F^{(s)}(\Omega, k) = \det \|d_{n,m}(\Omega, k)\| = 0, \quad (8)$$

для симметричных локализованных волн, которое связывает их нормированные безразмерные волновые числа  $k$  и приведенную частоту  $\Omega$ .

При исследовании антисимметричных локализованных волн аналогичные представления для составляющих вектора волновых динамических перемещений в компонентах волновода, удовлетворяющие уравнениям (2), с учетом идентичности свойств вмещающих полупространств приобретают вид

$$\begin{aligned}
 u_1^{(H+)}(x_1, x_3, t) &= (A_{11}^{(H)} \exp(-\alpha_1^{(H)} x_3) + A_{21}^{(H)} \exp(-\alpha_2^{(H)} x_3))E(x_1, t), \\
 u_3^{(H+)}(x_1, x_3, t) &= (A_{13}^{(H)} \exp(-\alpha_1^{(H)} x_3) + A_{23}^{(H)} \exp(-\alpha_2^{(H)} x_3))E(x_1, t), \\
 u_1^{(L)}(x_1, x_3, t) &= (A_{11}^{(L)} \sinh(\alpha_1^{(L)} x_3) + A_{21}^{(L)} \sinh(\alpha_2^{(L)} x_3))E(x_1, t), \\
 u_3^{(L)}(x_1, x_3, t) &= (A_{13}^{(L)} \cosh(\alpha_1^{(L)} x_3) + A_{23}^{(L)} \cosh(\alpha_2^{(L)} x_3))E(x_1, t), \\
 u_1^{(H-)}(x_1, x_3, t) &= (A_{11}^{(H)} \exp(\alpha_1^{(H)} x_3) + A_{21}^{(H)} \exp(\alpha_2^{(H)} x_3))E(x_1, t), \\
 u_3^{(H-)}(x_1, x_3, t) &= (A_{13}^{(H)} \exp(\alpha_1^{(H)} x_3) + A_{23}^{(H)} \exp(\alpha_2^{(H)} x_3))E(x_1, t); \\
 E(x_1, t) &= \exp[-i(\omega t - kx_1)], \tag{9}
 \end{aligned}$$

с коэффициентами, связанными соотношениями (6).

Из краевых условий (3) с учетом соотношений (6) и представлений (9) и в данном случае следует однородная система линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных постоянных коэффициентов  $A_{11}^{(H)}$ ,  $A_{21}^{(H)}$ ,  $A_{11}^{(L)}$ ,  $A_{21}^{(L)}$  с матрицей  $\|d_{n,m}(\Omega, k)\|$ , ненулевые элементы имеют выражения

$$\begin{aligned}
 d_{1,m} &= -\delta_{m3}^{(L)} s_m, \quad d_{1,m+2} = \delta_{m3}^{(H)} e_m^{(H)}, \\
 d_{2,m} &= -(c_{13}^{(L)} ik + c_{33}^{(L)} \delta_{m3}^{(L)} \alpha_m^{(L)}) c_m, \\
 d_{2,m+2} &= (c_{13}^{(H)} ik - c_{33}^{(H)} \alpha_m^{(H)} \delta_{m3}^{(H)}) e_m^{(H)}, \\
 d_{3,m} &= c_{44}^{(L)} (ik \delta_{m3}^{(L)} + \alpha_m^{(L)}) s_m, \quad d_{3,m+2} = 0, \\
 d_{4,m} &= 0, \quad d_{4,m+2} = c_{44}^{(H)} (ik \delta_{m3}^{(H)} - \alpha_m^{(H)}) e_m^{(H)} \quad (m = \overline{1, 2}), \\
 e_j^{(H)} &= \exp(-\alpha_j^{(H)} / 2), \quad c_j = \sinh(\alpha_j^{(L)} / 2), \quad s_j = \cosh(\alpha_j^{(L)} / 2). \tag{10}
 \end{aligned}$$

а искомое дисперсионное уравнение для антисимметричных локализованных волн принимает вид

$$F^{(a)}(\Omega, k) = \det \|d_{n,m}(\Omega, k)\| = 0. \tag{11}$$

**Качественное исследование свойств дисперсионного соотношения.** Как и в работах [2–5] исследования спектров симметричных и антисимметричных локализованных волн при идеальном механическом контакте трансверсально-изотропного слоя и трансверсально-изотропных полупространств, первичный анализ существования бегущих волн исследуемого типа при различных сочетаниях физико-механических свойств компонентов волновода базируется на качественном исследовании распределений корней характеристических полиномов систем обыкновенных дифферен-

циальных уравнений относительно зависящих от толщины координаты  $x_3$  комплексных амплитудных функций волновых перемещений в указанных компонентах.

В подобласти на множестве  $\{\Omega \in [0, \infty), k \in [0, \infty)\}$ , которая может являться областью существования локализованных бегущих волн исследуемого типа, значения корней  $\alpha_j^{(H)}$  характеристического полинома вида (4) должны быть действительными. Все множество изменения  $(\Omega, k)$  структурируется с выделением секторов, ограничиваемых прямыми  $\Omega = (c_{11}^{(\xi)} c_* / \rho^{(\xi)})^{1/2} R_* k$  и  $\Omega = (c_{44}^{(\xi)} c_* / \rho^{(\xi)})^{1/2} R_* k$ . Соответственно это сектора вида 1, в которых  $\Omega > (c_{11}^{(\xi)} c_* / \rho^{(\xi)})^{1/2} R_* k$ ; секторы вида 2, в которых  $(c_{44}^{(\xi)} c_* / \rho^{(\xi)})^{1/2} R_* k \leq \Omega \leq (c_{11}^{(\xi)} c_* / \rho^{(\xi)})^{1/2} R_* k$  и секторы вида 3, в которых  $\Omega < (c_{11}^{(\xi)} c_* / \rho^{(\xi)})^{1/2} R_* k$ .

В секторах вида 1 корни характеристических полиномов имеют мнимые значения, что следует из анализа асимптотического варианта

$$(\alpha^{(\xi)})^4 + \Omega^2 ((c_{33}^{(\xi)})^{-1} + (c_{44}^{(\xi)})^{-1}) (\alpha^{(\xi)})^2 + \Omega^4 (c_{33}^{(\xi)} c_{44}^{(\xi)})^{-1} = 0 \quad (12)$$

характеристического полинома (4) при  $\Omega \gg k$ . Свойства корней полиномов (4) в секторах вида 3 устанавливаются на основе их асимптотического анализа при  $\Omega \ll k$ . Они могут быть определены при анализе полиномов

$$(\alpha^{(\xi)})^4 + k^2 ((c_{13}^{(\xi)} + c_{44}^{(\xi)})^2 - c_{13}^{(\xi)} c_{33}^{(\xi)}) - (c_{44}^{(\xi)})^2 (c_{33}^{(\xi)} c_{44}^{(\xi)})^{-1} (\alpha^{(\xi)})^2 + k^4 c_{11}^{(\xi)} c_{44}^{(\xi)} = 0, \quad (13)$$

типы корней которых зависят от знакоопределенности комбинаций упругих постоянных

$$R_1(c_{ij}^{(\xi)}) = ((c_{13}^{(\xi)} + c_{44}^{(\xi)})^2 - c_{13}^{(\xi)} c_{33}^{(\xi)} - (c_{44}^{(\xi)})^2) / (c_{33}^{(\xi)} c_{44}^{(\xi)})^2 - 4c_{11}^{(\xi)} / c_{33}^{(\xi)}; \quad (14)$$

$$R_2^{(\pm)}(c_{ij}^{(\xi)}) = -((c_{13}^{(\xi)} + c_{44}^{(\xi)})^2 - c_{13}^{(\xi)} c_{33}^{(\xi)} - (c_{44}^{(\xi)})^2) / (c_{33}^{(\xi)} c_{44}^{(\xi)}) \pm (R_1(c_{ij}^{(\xi)}))^{1/2}. \quad (15)$$

Характеристические полиномы в секторах вида 3 имеют действительные корни при условиях  $R_1(c_{ij}^{(\xi)}) \geq 0$ ,  $R_2^{(+)}(c_{ij}^{(\xi)}) > 0$ ,  $R_2^{(-)}(c_{ij}^{(\xi)}) > 0$ , что является необходимым условием для существования анализируемых локализованных волн.

Для описания предельных свойств фазовых скоростей исследуемых локализованных волн в высокочастотном коротковолновом диапазоне анализируются асимптотические версии дисперсионных соотношений (8) и (11) при  $k \rightarrow \infty$ . Они представляют собой нелинейные алгебраические уравнения относительно фазовых скоростей обобщенных поверхностных волн Стоунли  $v_f = \Omega / k$ , потенциально существующих у границы неидеально контактирующих с проскальзыванием разнородных полупространств из материалов компонентов волновода. Эти уравнения однотипны для случаев симметричных и антисимметричных локализованных волн и имеют вид

$$F(v_f) = \det \|\tilde{d}_{n,m}(v_f)\| = 0, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{1,m} &= -\tilde{\delta}_{m3}^{(L)}, \quad \tilde{d}_{1,m+2} = \tilde{\delta}_{m3}^{(H)}, \quad \tilde{d}_{2,m} = -(c_{13}^{(L)}i + c_{33}^{(L)}\tilde{\delta}_{m3}^{(L)}\tilde{\alpha}_m^{(L)}), \\ \tilde{d}_{2,m+2} &= (c_{13}^{(H)}i - c_{33}^{(H)}\tilde{\alpha}_m^{(H)}\tilde{\delta}_{m3}^{(H)}), \quad \tilde{d}_{3,m} = c_{44}^{(L)}(i\tilde{\delta}_{m3}^{(L)} + \tilde{\alpha}_m^{(L)}), \\ \tilde{d}_{3,m+2} &= 0, \quad \tilde{d}_{4,m} = 0, \quad \tilde{d}_{4,m+2} = c_{44}^{(H)}(i\tilde{\delta}_{m3}^{(H)} - \tilde{\alpha}_m^{(H)}) \quad (m = \overline{1, 2}), \\ \tilde{\delta}_{13}^{(H)} &= [((v_f^{(H)})^2 - c_{11}^{(H)} - c_{44}^{(H)}(\tilde{\alpha}_1^{(H)})^2) / (i(c_{13}^{(H)} + c_{44}^{(H)})\tilde{\alpha}_1^{(H)})], \\ \tilde{\delta}_{23}^{(H)} &= [(i(c_{13}^{(H)} + c_{44}^{(H)})\tilde{\alpha}_1^{(H)} / ((v_f^{(H)})^2 - c_{44}^{(H)} - c_{33}^{(H)}(\tilde{\alpha}_1^{(H)})^2)], \\ \tilde{\delta}_{13}^{(L)} &= [((v_f^{(L)})^2 - c_{11}^{(L)} - c_{44}^{(L)}(\tilde{\alpha}_1^{(L)})^2) / (i(c_{13}^{(L)} + c_{44}^{(L)})\tilde{\alpha}_1^{(L)})], \\ \tilde{\delta}_{23}^{(L)} &= [(i(c_{13}^{(L)} + c_{44}^{(L)})\tilde{\alpha}_1^{(L)} / ((v_f^{(L)})^2 - c_{44}^{(L)} - c_{33}^{(L)}(\tilde{\alpha}_1^{(L)})^2)]. \\ \tilde{a}_j^{(\xi)} &= \left[ -(\chi_1^{(\xi)}v_\xi^2 + \eta_1^{(\xi)}) + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^j \left( \lambda_2^{(\xi)}v_\xi^4 + \chi_2^{(\xi)}v_f^2 + \eta_2^{(\xi)} \right)^{1/2} \right] / (2c_{33}c_{44}), \\ \chi_1^{(\xi)} &= c_{33}^{(\xi)} + c_{44}^{(\xi)}, \quad \eta_1^{(\xi)} = \left( c_{13}^{(\xi)} \right)^2 - 2c_{13}^{(\xi)}c_{44}^{(\xi)} - c_{11}^{(\xi)}c_{33}^{(\xi)}, \\ \lambda_2^{(\xi)} &= \left( c_{33}^{(\xi)} - c_{44}^{(\xi)} \right)^2, \\ \chi_2^{(\xi)} &= 2 \left( c_{13}^{(\xi)} + c_{44}^{(\xi)} \right) \left( \left( c_{13}^{(\xi)} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2c_{13}^{(\xi)}c_{44}^{(\xi)} - c_{11}^{(\xi)}c_{33}^{(\xi)} \right) - 4c_{11}^{(\xi)}c_{33}^{(\xi)}c_{44}^{(\xi)} + 4c_{33}^{(\xi)} \left( c_{44}^{(\xi)} \right)^2, \\ \eta_2^{(\xi)} &= \left( \left( c_{13}^{(\xi)} \right)^2 - 2c_{13}^{(\xi)}c_{44}^{(\xi)} - c_{11}^{(\xi)}c_{33}^{(\xi)} \right)^2 - 4c_{11}^{(\xi)}c_{33}^{(\xi)} \left( c_{44}^{(\xi)} \right)^2, \\ v_\xi &= \left( c_* / \rho^{(\xi)} \right)^{1/2}, \quad v_f^{(\xi)} = v_f \left( \rho^{(\xi)} / \rho_* \right). \end{aligned}$$

В случаях, когда уравнения (16) не имеют отвечающих скоростям бездисперсных обобщенных поверхностных волн Стоунли действительных корней, фазовые скорости всех мод бегущих локализованных волн симметричного и антисимметричного типов в высокочастотном коротковолновом диапазоне асимптотически стремятся к меньшей из скоростей вертикально поляризованных объемных волн сдвига в материалах контактирующих компонентов волновода.

**Результаты численных исследований.** Численные исследования полученных дисперсионных соотношений реализованы для трех волноводов, составленных из реальных трансверсально-изотропных геоматериалов [1]

с представленными в табл. 1 нормированными модулями упругости  $c_{ij}$  и

Таблица 1

Геоматериал	$\rho \cdot 10^{-3}$ кг / м <sup>3</sup>	$c_{ij} \cdot 10^{-10}$ Па				
		$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{33}$	$c_{44}$
Базальт	2,90	3,68	0,53	0,84	5,04	1,60
Песчанистый сланец	2,95	0,66	0,29	0,19	1,15	0,12
Известняк	2,72	3,76	0,96	0,85	4,10	1,45
Песчаник	2,30	4,52	0,67	0,68	4,70	1,92

параметрами плотности  $\rho$  ( $\rho_* = 10^3$  кг / м<sup>3</sup>).

В рассматриваемых волноводах материалом слоя является песчаный сланец, а материалами полупространств соответственно: для волновода 1 – известняк; для волновода 2 – базальт; для волновода 3 – песчаник. Все волноводы по введенной работах [2, 11] классификации относятся к типу А.

На рис. 1–3 для одинаковых исследуемых диапазонов изменения приведенной частоты и нормированного волнового числа соответственно приведены фрагменты действительных ветвей дисперсионных спектров симметричных нормальных волн для волноводов 1–3, а на рис. 4–6 – фрагменты ветвей спектров антисимметричных нормальных волн для этих волноводов. Пунктирными линиями изображены ветви спектров для волноводов с проскальзывающим контактом слоев и вмещающих полупространств, а сплошными линиями для сопоставительного анализа представлены соответствующие дисперсионные кривые для случаев идеального контакта компонентов волноводов. Общим свойством анализируемых распределений является их качественное подобие для рассматриваемых альтернативных вариантов краевых условий.

Ведущие количественные отличия рассчитанных спектров заключаются в следующем. Для симметричных локализованных волн (рис. 1, 2, 3)

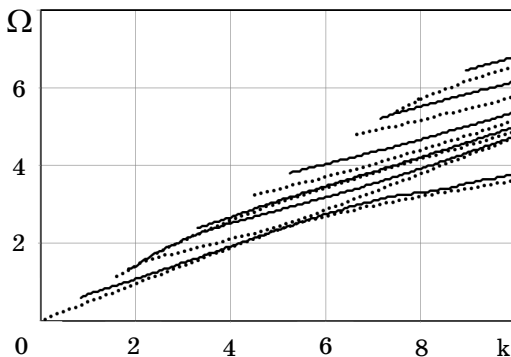


Рис. 1

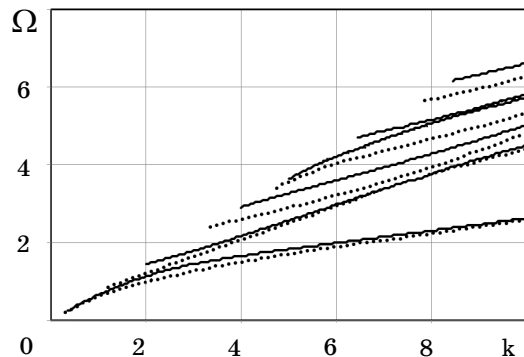


Рис. 2

в условиях скользящего контакта компонентов волновода критические частоты для однопорядковых по номеру мод существенно снижаются в

сравнении со случаем идеального жесткого контакта. При этом расхождения в траекториях мод симметричных волн с идентичными номерами,

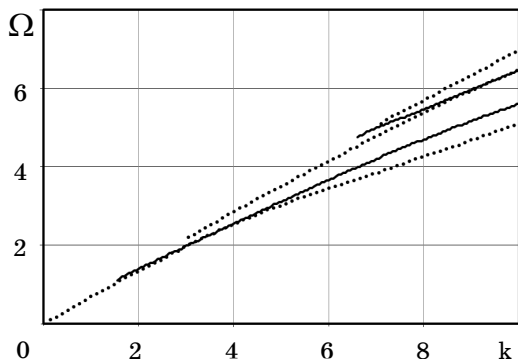


Рис. 3

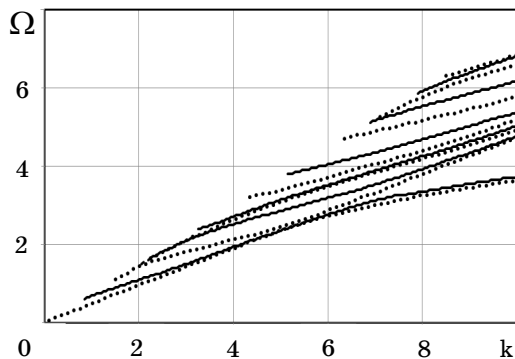


Рис. 4

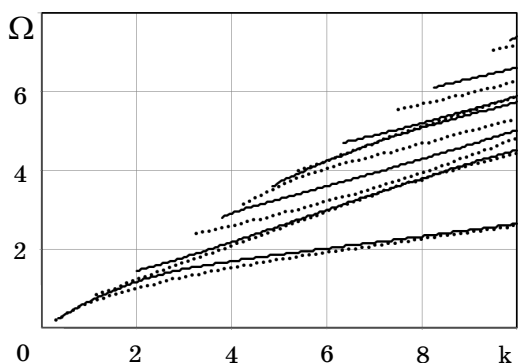


Рис. 5

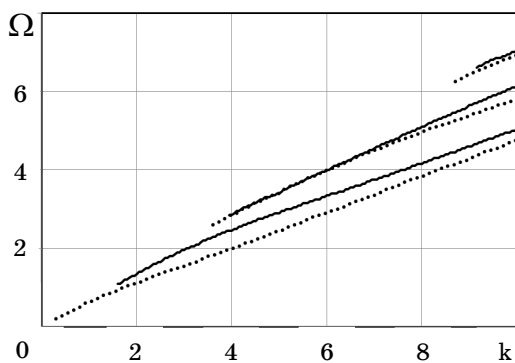


Рис. 6

отвечающие уменьшению фазовых скоростей соответствующих локализованных волн, в основном увеличиваются с номером моды. Следует также отметить графический эффект стремления к нулю критических частот низшей моды симметричных локализованных волн для волноводов с неидеальным контактом компонентов, который, однако, иллюстрирует лишь крайнюю малость значений ненулевых критических частот для волн этой моды. Характер приводимых распределений указывает также на малость обусловленных типом контакта компонентов различий в траекториях низших мод из спектров симметричных и антисимметричных локализованных волн в волноводах типа А, и на идентичность величин предельных фазовых скоростей волн этих мод в высокочастотном коротковолновом диапазоне, что возможно при стремлении указанных скоростей к минимальному значению скорости объемных вертикально поляризованных сдвиговых волн в материалах компонентов волновода.

**РЕЗЮМЕ.** В аналітичній формі отримані дисперсійні рівняння, що описують спектри біжучих симетричних і антисиметричних за товщиною координатою локалізованих поздовжньо-зсувних пружних хвиль у трансверсально-ізотропному шарі, розташованому проміж двома однотипними за властивостями трансверсально-ізотропними півпросторами. Шар і півпростори знаходяться у неідеальному механічному контакті з прослизанням. Наведено деякі результати якісного асимптотичного аналізу спектральної задачі, а також результати розрахунків низки нижчих дійсних гілок дисперсійних спектрів для деяких

сполучень реальних геоматеріалів шару і півпросторів. Проаналізовано основні відмінності в розрахованих спектрах для випадків неідеального та ідеального механічного контакту компонентів хвилеводу

**Ключові слова:** трансверсально-ізотропний шар між трансверсально-ізотропним півпросторами, неідеальний механічний контакт з прослизанням, симетричні і антисиметричні локалізовані поздовжньо-зсувні пружні хвилі, трансцендентні дисперсійні рівняння, хвилеводи з реальних геоматеріалів, асимптотичний і числовий аналіз, розрахунки гілок спектрів біжучих хвиль.

**SUMMARY.** In the analytical form is obtained transcendental dispersion relation describing the spectrums of the traveling symmetric and anti-symmetric localized longitudinal-shear elastic waves along the transversely isotropic layer sandwiched between two of the same type on the properties of transversely isotropic halfspaces. The cases of non-perfect mechanical sliding contact between Layer and halfspaces are investigated. Some results of the qualitative analysis of the asymptotic spectral problem and the results of calculations of a number of lower real branches of the dispersion spectrums for some combinations of geomaterials layer and halfspaces are presented. Analysis the main differences in the structure of calculated spectrums for cases of non-perfect and perfect mechanical contact waveguide components are realized.

**Keywords:** transversely isotropic layer between two transversely isotropic half-spaces, non-perfect mechanical sliding contact, symmetrical and anti-symmetrical localized longitudinal-shear elastic waves, transcendental dispersion relations, waveguides with components of geomaterials, asymptotic and numerical analysis, calculation of branches of the spectra of traveling waves.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ:

1. Аннин Б. Д. Трансверсально-изотропная упругая модель геоматериалов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2009. – Т. XII, № 3(39). – С. 5–14.
2. Глухов И. А., Сторожев В. И. Симметричные упругие волны в трансверсально-изотропном слое между однотипными трансверсально-изотропными полупространствами // Теорет. и прикладная механика. – 2014. – Вып. 8(54). – С. 114–122.
3. Глухов И. А., Сторожев В. И. Локализованные волны в анизотропном упругом слое между разнотипными анизотропными полупространствами // Тезисы докладов XVII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (г. Ростов-на-Дону, 14–17 окт. 2014 г.). Т. 1. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ. – 2014. – С. 36.
4. Глухов И. А., Сторожев В. И. Локализованные волны в анизотропном упругом слое между разнотипными анизотропными полупространствами // Труды XVII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». (г. Ростов-на-Дону, 14–17 окт. 2014 г.). Т. 1. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ. – 2014. – С. 132–137.
5. Глухов И. А., Сторожев В. И. Анализ дисперсии локализованных волн деформаций в поперечно-анизотропном слое между поперечно-анизотропными полупространствами // Тезисы докладов IX Всероссийской школы-семинара «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивноморское, 26–30 мая 2014 г.). – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ. – 2014. – С. 43.
6. Григорян В. Г., Вендлер Л. Локализованные акустические волны в слоистых структурах // Физика твердого тела. – 1991. – Т. 33, № 7. – С. 2120–2128.
7. Datta S. K. On ultrasonic guided waves in a thin anisotropic layer lying between two isotropic layers // J. Acoust. Soc. Am. – 2000. – Vol. 108. – P. 2005–2011.
8. Hoven J. M. Acoustic waves in finely layered media // Geophysics. – 1995. – Vol. 7.60, № 4. – P. 1217–1221.
9. Ting T. C. T. Steady waves in an anisotropic elastic layer attached to a half-space or between two half-spaces – A generalization of Love waves and Stoneley waves // Math. Mech. Solids. – 2009. – Vol. 14, No 1–2. – P. 52–71.
10. Velasco V. R. Djafari-Rouhani B. Dynamics of systems with two interfaces // Phys. Rev. – 1982. – Vol. B 26. – P. 1929–1941.
11. Wendler L. Grigoryan V. G. Acoustic interface waves in sandwich structures // Surface Science. – 1988. – Vol. 206. – P. 203–224.



12. *White J. E.* Computed wave forms in transversely isotropic media // *Geophysics.*– 1982.– Vol. 47.– P. 771–783.

13. *White J. E.* Underground sound. application of seismic waves.– Elsevier Science Publishers B.V.– 1983.– 270 p.

*Донецкий национальный университет*

*Поступила 10.11.2014*

УДК 539.3: 534.1

М. Н. ПАЧЕВА

В. И. СТОРОЖЕВ, д-р техн. наук

**РАССЕЯНИЕ НОРМАЛЬНЫХ СДВИГОВЫХ ВОЛН У НАКЛОННОЙ  
ТОРЦЕВОЙ ПОВЕРХНОСТИ СВОБОДНОГО ПОЛУСЛОЯ**

*Представлен численно-аналитический алгоритм решения задачи о рассеянии нормальной волны сдвига, падающей на плоскую боковую поверхность прямолинейно ортотропного полуслоя, наклоненную под произвольным углом к его плоским граням. Используемый подход базируется на концепции метода частичных областей с выделением геометрических элементов сечения в виде полуслоя с ортогональной граням боковой поверхностью и треугольной подобласти, дополняющей сечение до полуслоя с наклонной границей. Волновые поля в указанных подобластях после применения к исходному уравнению антиплоских колебаний ортотропной упругой среды приема аффинного преобразования координат соответственно представляются рядами с неопределенными коэффициентами по априори удовлетворяющим краевым условиям на плоских гранях и на наклонной боковой поверхности базисным частным решениям волнового уравнения в прямоугольных и полярных координатах. Алгебраизация функционального уравнения, следующего из краевых условий механического сопряжения выделенных в сечении подобластей, реализуется с использованием метода ортогональных рядов. Представлены результаты расчета полей волновых упругих перемещений в окрестности скошенной боковой поверхности для отдельных значений относительной длины падающей симметричной нормальной волны из нижней моды соответствующего дисперсионного спектра.*

**Ключевые слова:** *прямолинейно ортотропный упругий полуслой, наклоненная к граням плоская боковая поверхность, рассеяние нормальной волны сдвига, метод частичных областей, метод наименьших квадратов, аффинное преобразование координат, ряды по базисным частным решениям волнового уравнения, анализ полей волновых упругих перемещений в окрестности скошенной боковой поверхности, вариация относительной длины падающей нормальной волны.*

Проблема анализа эффектов рассеяния гармонических упругих волн, падающих на ортогональную плоским граням боковую граничную поверхность полуслоя, по многим аспектам исследовалась в публикациях [1–3, 5–8]. В гораздо меньшей степени изучены эффекты отражения волн деформаций от боковой граничной поверхности полуслоя, наклоненной по отношению к его плоским граням [4]. Для полуслоя из анизотропных материалов гексагональной, кубической и орторомбической системы с наклонной торцевой поверхностью задачи описания полей рассеиваемых у боковой границы нормальных волн, в том числе нормальных волн продольного сдвига, остаются неисследованными.

В данном контексте целью настоящей работы является построение и анализ теоретического численно-аналитического решения задачи о падении симметричных и антисимметричных нормальных упругих волн сдвига в свободном анизотропном полуслое на свободную, наклоненную по

отношению к граням плоскую торцевую граничную поверхность. Применяемый подход базируется на концепции метода частичных областей.

**Постановка задачи.** Рассматривается отнесенный к нормированным безразмерным прямоугольным координатам  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  анизотропный упру-

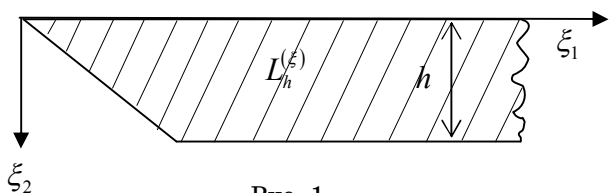


Рис. 1

гий полуслой  $L_h^{(\xi)}$  толщины  $h$  с наклоненной плоской боковой граничной поверхностью, составляющей угол  $\psi_0^{(\xi)}$  с его нижней плоской гранью (рис. 1). В рамках используемой методики рас-

сматриваемый полуслой с наклонной боковой поверхностью  $\Gamma_+^{(n)}$  интерпретируется как верхняя половина полуслоя  $L_{2h}^{(\xi)}$  толщины  $2h$  с треугольной клиновидной боковой поверхностью  $\Gamma_+^{(n)} \cup \Gamma_-^{(n)}$ . Сечение рассматриваемого тела в плоскости  $O\xi_1\xi_2$  представлено на рис 2. Грани  $\Gamma_{\pm}$ :  $\xi_2 = \pm h$  полуслоя  $L_{2h}^{(\xi)}$  свободны от механических напряжений. Физико-механические свойства материала полуслоя при динамической антиплоской деформации характеризуются упругими постоянными  $\{\tilde{c}_{44}, \tilde{c}_{55}\}$  и параметром плотности  $\rho$ .

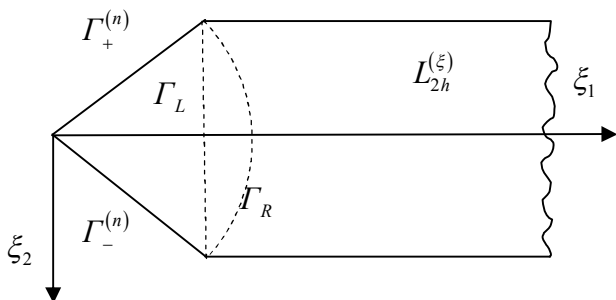


Рис. 2

Полагается, что в полуслое  $L_h^{(\xi)}$  вдоль направления, противоположного положительному координатному направлению  $O\xi_1$ , распространяется характеризующаяся функцией упругих волновых перемещений  $u_3^{(nad)}(\xi_1, \xi_2, t)$  нормальная симметричная по толщине  $L_h^{(\xi)}$  поляризо-

ванная вдоль  $O\xi_3$  волна продольного сдвига с круговой частотой  $\omega$  из произвольной моды соответствующего дисперсионного спектра. При ее взаимодействии с наклонной боковой поверхностью  $\Gamma_+^{(n)}$  формируется дифракционное поле  $u_3^{(omp)}(\xi_1, \xi_2, t)$  рассеянных волн.

Искомые комплексные амплитудные функции для волновых перемещений в падающих и рассеянных волнах подлежат определению из краевой задачи для уравнения стационарных сдвиговых упругих колебаний антиплоской деформации материала полуслоя, которое в случае отнесения всех характеристик к линейной размерности к нормирующему параметру  $h$  принимает вид

$$(c_{55}\partial_1^2 + c_{44}\partial_2^2 - \rho h^2 c_*^{-1}\partial_t^2)u_3 = 0, \quad \partial_j = \partial / \partial \xi_j \quad (j = 1, 2), \quad \partial_t = \partial / \partial t. \quad (1)$$

Краевые условия рассматриваемой задачи на плоских гранях полуслоя  $L_{2h}^{(\xi)}$  и на участках боковой границы  $\Gamma_{\pm}$  имеют вид

$$(\sigma_{23})_{\xi_2 = \pm h} = 0; \quad (2)$$

$$(\sigma_{n3})_{\Gamma_{\pm}^{(n)}} = 0. \quad (3)$$

В соотношениях (1)–(3)  $c_{55}$ ,  $c_{44}$  – отнесенные к нормирующему параметру  $c_* = \tilde{c}_{55}$  упругие постоянные материала полуслоя;  $(\sigma_{23})_{\xi_2 = \pm h}$ ,  $(\sigma_{n3})_{\Gamma_{\pm}^{(n)}}$  – отнесенные к  $c_* = \tilde{c}_{55}$  нормированные характеристики касательных напряжений на площадках с нормальными к плоским граням полуслоя и к поверхностям  $\Gamma_{\pm}^{(n)}$ . Задача заключается в описании и частотном параметрическом анализе волнового поля, являющегося суперпозицией полей падающих и отражаемых от  $\Gamma_{\pm}^{(n)}$  волн.

**Решение задачи.** На исходном этапе построения теоретического алгоритма решения осуществляется аффинное преобразование координат  $O\xi_1\xi_2$  в координаты  $Ox_1x_2$  на основе соотношений

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \mu\xi_2, \quad \mu = (c_{55} / c_{44})^{1/2}, \quad (4)$$

в результате которых уравнение (1) трансформируется в классическое волновое уравнение вида

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \rho h^2 c_*^{-1} \partial_t^2 \right) u_3 = 0. \quad (5)$$

В области сечения полуслоя  $L_{2h}$ , получаемого из  $L_{2h}^{(\xi)}$  преобразованиями (4), вводится вспомогательная система полярных координат  $Or\psi$  ( $x_1 = r \cdot \cos \psi$ ,  $x_2 = r \cdot \sin \psi$ ), а также выделяются частичные подобласти в виде полуполосы  $L = \{x_1 \in [l, \infty), x_2 \in [-h_{\mu}, h_{\mu}]\}$ ,  $h_{\mu} = \mu h$ , сектора  $L_R = \{r \in [0, R], \psi \in [-\psi_0, \psi_0]\}$ ,  $\psi_0 = \arctg(\mu \cdot tg \psi_0^{(\xi)})$  и треугольника  $L_T = \{x_1 \in [0, l], x_2 \in [-x_1 \cdot tg \psi_0, x_1 \cdot tg \psi_0]\}$ ,  $L_T \subset L_R$ .

Для описания поля волн в подобласти сечения  $L$  вводится удовлетворяющее уравнению (5) и трансформированным краевым условиям (2) представление  $u_3^{(L)}$  в виде суммы падающей и отраженной составляющих

$$u_3^{(L)} = u_{30}^{(p)} \cos(p\pi x_2 / h_{\mu}) \cdot \exp(-i(\omega t + k_p(x_1 - l))) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos((n-1)\pi x_2 / h_{\mu}) \cdot \exp(-i(\omega t - k_n(x_1 - l))). \quad (6)$$

Поле волн, отраженных от боковой поверхности полуслоя с сечени-

ем  $L = \{x_1 \in [l, \infty), x_2 \in [-h_\mu, h_\mu]\}$ , в представлении (6) описывается суперпозицией базисных нормальных волн. В этом представлении  $A_n$  – произвольные коэффициенты;  $k_p$  и  $k_n$  – постоянные распространения для падающей и отражающихся нормальных волн из мод с соответствующими номерами. Структура представления (6) в пределах  $L$  обеспечивает выполнение условия  $(\sigma_{23})_{x_2=0} = 0$  и соответствует симметричному по толщине подобласти  $0 \leq x_2 \leq h_\mu$  распределению сдвиговых динамических перемещений в падающей волне при четных значениях  $p$ , либо их антисимметричному распределению при нечетных  $p$ . В соответствии с этим, представление (6) в подобласти  $0 \leq x_2 \leq h_\mu$  описывает решение исходной сформулированной задачи о падении симметричных или антисимметричных нормальных упругих волн сдвига в свободном анизотропном полуслое толщины  $h$  на наклоненную по отношению к граням плоскую торцевую граничную поверхность.

В частичной подобласти  $L_R$  для описания стационарного поля набегающих и рассеиваемых сдвиговых волн вводится удовлетворяющее уравнению (5) и краевому условию (3) представление

$$u_3^{(C)} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_{\alpha_n}(kr) \cos \alpha_n \psi \cdot \exp(-i\omega t) \quad (7)$$

в котором  $B_n$  – произвольные коэффициенты;  $\alpha_n = n\pi / \psi_0$ ,  $k = (\rho h^2 \omega^2 / c_*)^{1/2}$ ,  $J_{\alpha_n}(kr)$  – цилиндрические функции Бесселя первого рода. Коэффициенты  $A_n$ ,  $B_n$  в этом представлении подлежат определению из функциональных краевых условий на границе  $\Gamma = \{x_1 = l, x_2 \in [-h_\mu, h_\mu]\}$  контакта частичных областей  $L$  и  $L_T$

$$(u_3^{(L)})_\Gamma = (u_3^{(C)})_\Gamma, \quad (\sigma_{13}^{(L)})_\Gamma = (\sigma_{13}^{(C)})_\Gamma, \quad (8)$$

в которых

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(L)} &= -c_{55} u_{30} i k_p \cos \frac{p\pi x_2}{h} \cdot \exp(-i k_p (x_1 - l)) + \\ &+ c_{55} \sum_{n=1}^{\infty} A_n i k_n \cos \frac{(n-1)\pi x_2}{h} \cdot \exp(i k_n (x_1 - l)), \\ \sigma_{13}^{(C)} &= c_{55} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[ k \left( \frac{\alpha_n}{kr} J_{\alpha_n}(kr) - J_{\alpha_n+1}(kr) \right) \cos \alpha_n \psi \cos \psi + \right. \\ &\left. + \frac{\alpha_n}{r} J_{\alpha_n}(kr) \sin \alpha_n \psi \sin \psi \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

При использовании для алгебраизации функциональных краевых условий (8) метода ортогональных рядов они сводятся к бесконечной сис-

теме линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} A_n \Delta_{nu} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \Delta_{nmu} &= \delta_{nu}, \\ A_n \Delta_{n\sigma} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \Delta_{nm\sigma} &= \delta_{n\sigma}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\Delta_{nu} = 1; \quad \Delta_{nmu} = - \int_{-h}^h J_{\alpha_n}(kr) \cos \alpha_n \psi \cos \frac{(n-1)\pi x_2}{h} dx_2 / \gamma_n^*; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{nm\sigma} = -c_{55} \int_{-h}^h \left[ k \left( \frac{\alpha_n}{kr} J_{\alpha_n}(kr) - J_{\alpha_{n+1}}(kr) \right) \cos \alpha_n \psi \cos \psi + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_n}{r} J_{\alpha_n}(kr) \sin \alpha_n \psi \sin \psi \right] \cos \frac{(n-1)\pi x_2}{h} dx_2 / \gamma_n^*; \end{aligned}$$

$$\delta_{nu} = -u_{30}; \quad \Delta_{n\sigma} = ik_n c_{55}; \quad \delta_{n\sigma} = c_{55} u_{30} ik_p.$$

При использовании для алгебраизации функциональных краевых условий (8) метода наименьших квадратов они сводятся к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{A_m} \Delta_{llnm} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{B_m} \Delta_{lcnm} &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{lln}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{A_m} \Delta_{clnm} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{B_m} \Delta_{ccnm} &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{cln}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{llnm} &= \int_{-h}^h F_{un}^{(L)}(x_2) \overline{F_{um}^{(L)}(x_2)} dx_2 + \int_{-h}^h F_{13n}^{(L)}(x_2) \overline{F_{13m}^{(L)}(x_2)} dx_2, \\ \Delta_{lcnm} &= - \int_{-h}^h F_{un}^{(L)}(x_2) \overline{F_{um}^{(C)}(x_2)} dx_2 - \int_{-h}^h F_{13n}^{(L)}(x_2) \overline{F_{13m}^{(L)}(x_2)} dx_2, \\ \delta_{lln} &= - \int_{-h}^h F_{un}^{(L)}(x_2) \overline{F_{up}^{(L)}(x_2)} dx_2 - \int_{-h}^h F_{13n}^{(L)}(x_2) \overline{F_{13p}^{(L)}(x_2)} dx_2, \\ \Delta_{clnm} &= - \int_{-h}^h F_{un}^{(C)}(x_2) \overline{F_{um}^{(L)}(x_2)} dx_2 - \int_{-h}^h F_{13n}^{(C)}(x_2) \overline{F_{13m}^{(L)}(x_2)} dx_2, \\ \Delta_{ccnm} &= \int_{-h}^h F_{un}^{(C)}(x_2) \overline{F_{um}^{(C)}(x_2)} dx_2 + \int_{-h}^h F_{13n}^{(C)}(x_2) \overline{F_{13m}^{(C)}(x_2)} dx_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{cln} &= \int_{-h}^h F_{un}^{(C)}(x_2) \overline{F_{up}^{(L)}(x_2)} dx_2 + \int_{-h}^h F_{13n}^{(C)}(x_2) \overline{F_{13p}^{(L)}(x_2)} dx_2; \\
F_{up}^{(L)}(x_2) &= u_{30} \cos(p\pi x_2 / h); \quad F_{un}^{(L)}(x_2) = \cos((n-1)\pi x_2 / h), \\
F_{un}^{(C)}(x_2) &= J_{\alpha_n}(ks) \cos(\alpha_n \arcsin(x_2 / s)), \\
F_{13p}^{(L)}(x_2) &= c_{55}^{(L)} u_{30} (-ik_p) \cos(p\pi x_2 / h), \\
F_{13n}^{(L)}(x_2) &= ik_n c_{55}^{(L)} \cos((n-1)\pi x_2 / h), \\
F_{13n}^{(C)}(x_2) &= c_{55}^{(L)} \cos(\varphi) \cos(\alpha_n \varphi) \left( \alpha_n J_{\alpha_n}(ks) / s - k J_{\alpha_n+1}(ks) \right) + \\
&\quad + \sin(\varphi) \sin(\alpha_n \varphi) \alpha_n J_{\alpha_n}(ks) / s; \\
s &= \sqrt{l^2 + x_2^2}, \quad \varphi = \arcsin\left(x_2 / \sqrt{l^2 + x_2^2}\right).
\end{aligned} \tag{13}$$

Системы уравнений (10) и (12) при реализации численных исследований подлежат редукции, порядок которой обуславливается критериями требуемой точности удовлетворения краевым условиям и устойчивости результатов расчетов при варьировании параметра редукции. После определения искоемых коэффициентов расчеты характеристик динамического напряженно-деформированного состояния реализуются с переходом к исходным координатам.

**Результаты численных исследований.** Приведенные результаты численных исследований получены на основе приема алгебраизации функциональных граничных условий методом наименьших квадратов применительно к изотропному полуслою с торцевой поверхностью, наклоненной под углом  $\psi_0^{(\xi)} = \pi/3$ . Представлены данные расчетов полей волновых упругих перемещений в подобласти  $\xi_1 \leq 6h / \text{tg}(\psi_0^{(\xi)})$  для моментов времени, соответствующих началу периода волновых колебаний, в случаях рассеяния у торцевой поверхности нормальной волны из низшей моды дисперсионного спектра симметричных сдвиговых волн в свободном изотропном слое с варьруемым параметром относительной длины  $\lambda = 2\pi / (kh)$ . Анализируемые поля иллюстрируются тонированными изображениями, в которых переход от темных тонов к светлым соответствует росту интенсивности описываемой характеристики.

На рис. 3–6 соответственно отражены распределения интенсивностей полей волновых перемещений для значений  $\lambda$  равных 3,3; 1,3; 0,7; 0,2. На основе данных рисунков можно констатировать малое влияние наклона торцевой поверхности на дальнее поле рассеиваемых волн и наблюдаемый эффект концентрации интенсивности волновых перемещений у вершины клиновидной приторцевой области при падении относительно длинной волны с  $\lambda = 3,3$ . Для более коротких волн с  $\lambda = 1,3$  основные эффекты также наблюдаются в приторцевой зоне и выражаются в искривлении фронта волны и росте степени локализации зоны интенсивных волновых смещений в окрестности вершины клиновидной границы. В

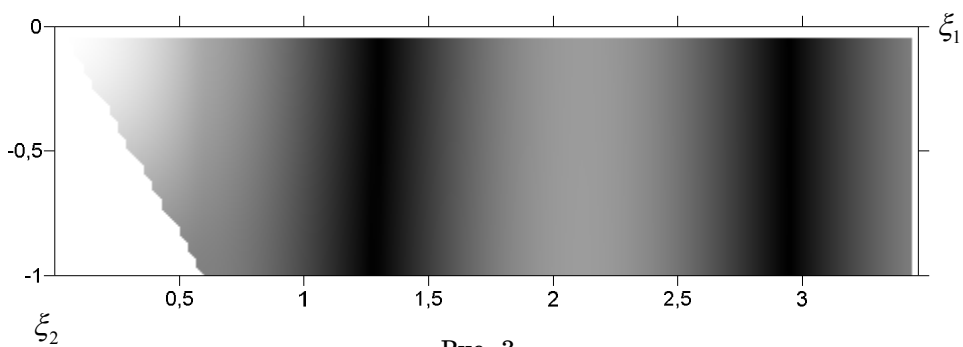


Рис. 3

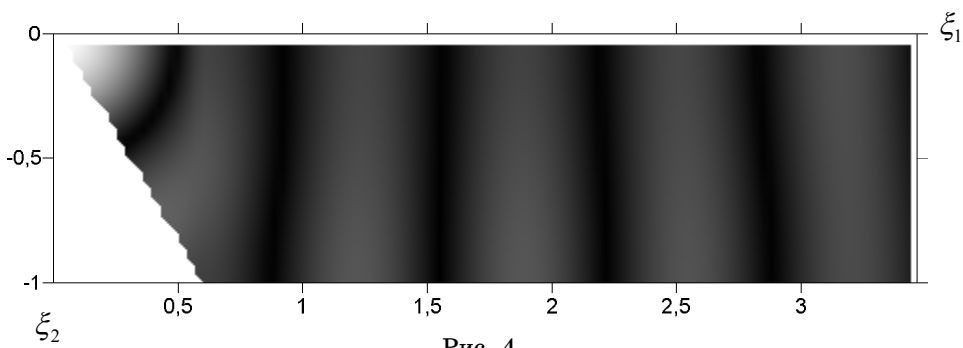


Рис. 4

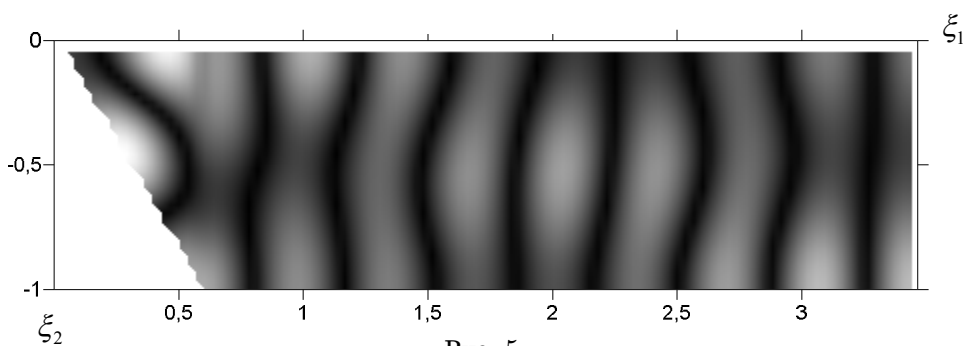


Рис. 5

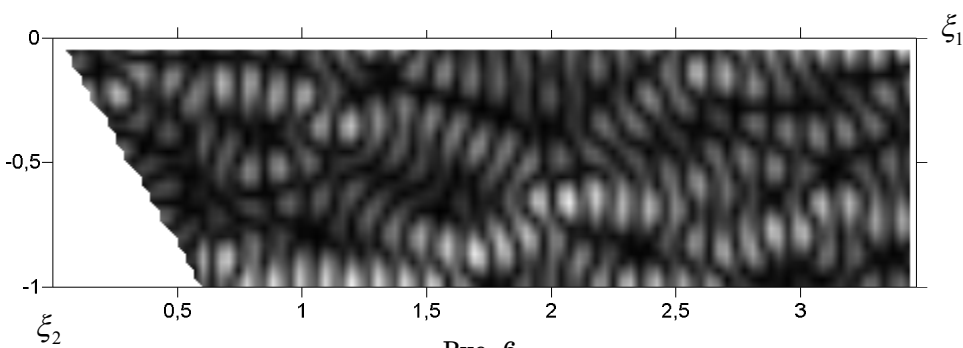


Рис. 6

случае  $\lambda = 0,7$  начинает отчетливо проявляться влияние эффектов рассеяния от наклоненного торца на форму дальнего волнового поля, а в клиновидной приграничной подобласти вместо фокусировки волновых смеще-



ний у ее вершины формируются два фокусных пятна повышенной интенсивности волновых смещений. Наконец, при  $\lambda = 0,2$  локальные приграничные эффекты в структуре рассеиваемого поля становятся исчезающе маловыраженными и наблюдается качественная перестройка поля рассеиваемых волн во всей рассматриваемой зоне полуслоя.

**РЕЗЮМЕ.** Представлено аналітико-числовий алгоритм розв'язання задачі про розсіювання нормальної хвилі зсуву, падаючої на нахилену під довільним кутом до плоских граней плоску бічну поверхню прямолінійно ортотропного півшару. Використовуваний підхід базується на концепції методу часткових областей з виділенням геометричних елементів перетину у вигляді півшару з ортогональної гранях бічною поверхнею і трикутної підобласті, що доповнює перетин до півшару з нахиленою торцевою поверхнею. Хвильові поля в зазначених підобластях після застосування прийому афінного перетворення координат до вихідного рівняння антиплоских коливань ортотропного пружного середовища відповідно представляються рядами з невизначеними коефіцієнтами за апіорі задовольняючим крайовим умовам на плоских гранях і на нахиленій бічній поверхні базисним частинним розв'язкам хвильового рівняння в прямокутних і полярних координатах. Алгебраїзація функціонального рівняння, яке впливає з крайових умов механічного спряження виділених в перетині підобластей, реалізується з використанням методу ортогональних рядів або методу найменших квадратів. Представлено результати розрахунку полів хвильових пружних переміщень в околі нахиленої бічній поверхні для окремих значень відносної довжини падаючої нормальної хвилі з нижчої моди відповідного дисперсійного спектру.

**Ключові слова:** прямолінійно ортотропний пружний півшар, нахилена до граней плоска бокова поверхня, розсіювання нормальної хвилі зсуву, метод часткових областей, метод найменших квадратів, афінне перетворення координат, ряди за базисними частинними розв'язками хвильового рівняння, аналіз полів хвильових пружних переміщень в околі скошеної бічній поверхні, варіація відносної довжини падаючої нормальної хвилі.

**SUMMARY.** Numerical-analytical algorithm for solving the problem of the scattering of normal shear wave incident on a flat side surface of orthotropic semileaf inclined at an arbitrary angle to the flat faces are constructed. The approach is based on the concept of the methods of partial areas. Wave fields in subareas after applying of affine transformation of coordinates to the original equations of antiplanar vibrations of orthotropic elastic medium, are received respectively in form of the series on basic particular solutions of the wave equation in rectangular and polar coordinates with undetermined coefficients. This series a priori satisfy the boundary conditions on the flat faces and on the inclined side surface. Algebraization of functional equations of boundary conditions of the full mechanical coupling of subareas implemented using the method of orthogonal series or least-squares method. Are presented the results of the calculation of the elastic wave displacement fields in the vicinity of the beveled side surface for the individual values of the relative length the incident waves of the lower modes from corresponding dispersion spectrums.

**Keywords:** rectilinear orthotropic elastic semileaf with the flat side surface inclined to the faces, the scattering of normal shear wave, the method of partial domains, least-squares method, an affine transformation of coordinates, series of basic particular solutions of the wave equation, analysis of the elastic wave displacement fields in the vicinity of the beveled side surface, the variation of the relative length of the incident normal waves.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ:

1. Бабенкова Е. В., Каплунов Ю. Д., Устинов Ю. А. О принципе Сен-Венана в случае низкочастотных колебаний полуполосы // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69, № 3. – С. 445–457.
2. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
3. Пельц С. П., Шихман В. М. О сходимости метода однородных решений в динамической смешанной задаче для полуполосы // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 295. № 4. – С. 821–824.
4. Суворова Т. В. О напряжениях в пространственном упругом полуслое с наклонной

боковой гранью, возникающих под действием осциллирующей нагрузки // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. VIII Междунар. конф.– Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ.– 2002.– С. 178–182.

5. *Cho Y. H., Rose J. L.* A boundary element solution for a mode conversion study on the edge reflection of Lamb waves // J. Acoust. Soc. Amer.– 1996.– Vol. 99, № 4.– P. 2097–2109.

6. *Gregory R. D., Gladwell I.* The reflection of a symmetric Rayleigh-Lamb wave at the fixed or free edge of a plate // J. Elasticity.– 1983.– Vol. 13.– P. 185–206.

7. *Pagneux V.* Revisiting the edge resonance for Lamb waves in a semi-infinite plate // J. Acoust. Soc. Amer.– 2006.– Vol. 120, № 2.– P. 649–656.

8. *Torvic P. J.* Reflection of wave trains in semiinfinite plates // J. Acoust. Soc. Amer.– 1967.– Vol. 41, № 2.– P. 346–353.

*Донецкий национальный университет*

*Поступила 22.10.2014*

УДК 539.3: 534.1

*В. А. ШПАК*, канд. физ-мат. наук**КЛАССИФИКАЦИЯ ТОПОЛОГИИ ВЕТВЕЙ КРАЕВЫХ  
СТОЯЧИХ УПРУГИХ ВОЛН В ПОЛНЫХ ДИСПЕРСИОННЫХ  
СПЕКТРАХ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН  
ОРТОРОМБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

*Построены и проанализированы дисперсионные соотношения для нормальных упругих волн с различными типами симметрии по толщине, распространяющихся вдоль упруго эквивалентных направлений в анизотропном слое ромбической системы с жестко закрепленными гранями. Реализованы расчеты полных спектров нормальных волн для рассматриваемых волноводов из ряда реальных материалов. Представлены результаты сравнительного анализа существующих систем классификации механических свойств анизотропных материалов. Предложен вариант классификации волноводных свойств поперечно-изотропных и ортотропных материалов по специфике топологии ветвей краевых стоячих волн в полных дисперсионных спектрах. В качестве иллюстрации к предложенной классификации представлены полные спектры дисперсионных кривых симметричных и антисимметричных волн вдоль альтернативных упруго эквивалентных направлений в четырех типов слоев из ортотропных материалов.*

*Ключевые слова:* ортотропный слой, трансцендентные дисперсионные уравнения, численный анализ, расчеты полных спектров нормальных волн, классификация волноводных свойств анизотропных материалов.

Спектры нормальных упругих волн в анизотропном слое при различных типах граничных условий и видах симметрии волновых движений относительно срединной плоскости, как правило, исследовались для отдельных материалов и направлений распространения [1, 4, 5]. В работе [3] с использованием введенного параметра анизотропии  $\Delta_m$  осуществлен сопоставительный анализ степени различия волноводных свойств транстропных и изотропных материалов. Однако вопрос поиска качественных закономерностей в распределениях ветвей полных дисперсионных спектров, свойств которых хотя бы для достаточно широкому кругу материалов определенного класса упругой симметрии, к настоящему времени остается открытым.

Необходимость в классификации волноводных свойств анизотропных упругих тел возникает при рассмотрении многих теоретических и прикладных проблем, а ее сложность обусловлена большим количеством соответствующих независимых физико-механических параметров. Одним из принятых вариантов классификации природных и искусственных анизотропных материалов является их разделение на четыре основных группы упругой симметрии [6]. В кристаллографии и смежных областях физики основой классификации кристаллов по свойствам симметрии относительно ортогональных преобразований систем координат является выделение тридцати двух видов геометрической симметрии, образующих семь кристаллографических сингоний [10]. Начиная с исследований, представленных в работах [8, 9], и до настоящего времени [7], развивают-

ся подходы к классификация упругих свойств деформируемых твердых тел с использованием понятий собственных модулей упругости и собственных состояний. В работе [2] проведена классификация трансропных материалов, подразделяющая эти материалы на десять групп по корням характеристического уравнения. Для ортотропных материалов наиболее детальной представляется упруго-динамическая классификация на основе построения изоповерхностей обратных скоростей объемных волн [12]. Каждый из перечисленных подходов имеет свои достоинства и недостатки, и, по всей видимости, пригоден для определенного круга задач. Таким образом, поиски эффективных специализированных схем классификации волноводных свойств анизотропных материалов остаются одной из актуальных проблем механики деформируемого твердого тела.

В данной статье предлагается один из вариантов классификации волноводных свойств, опирающийся на обобщение результатов численно-аналитического анализа полного спектра нормальных волн с симметричными и антисимметричными волновыми движениями в анизотропном слое гексагональной и ромбической системы с жестко закрепленными гранями.

**Постановка задачи.** В декартовой системе координат  $Ox_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ), оси которой совпадают с осями упругой симметрии анизотропного материала орторомбического класса, рассматривается слой, занимающий область  $V = \{(x_1, x_2) \in R^2, |x_3| \leq h\}$  и характеризующийся модулями упругости  $c_{nm}$  ( $n, m = \overline{1,6}$ ) и плотностью  $\rho$ . Нормальные  $P-SV$  волны в слое вдоль направлений  $Ox_1$  ( $\varphi = 0$ ) и  $Ox_2$  ( $\varphi = \pi/2$ ) описываются решениями краевой задачи относительно комплексной функции волновых перемещений  $u_j(x_1, x_3, t) = f_j(x_3) \exp(i(\gamma x_1 - \omega t))$ , включающей уравнения движения [3, 13]

$$\begin{aligned} (c_1 \partial_1^2 + c_3 \partial_3^2) u_1 + (c_2 + c_3) \partial_1 \partial_3 u_3 &= \rho \ddot{u}_1; \\ (c_2 + c_3) \partial_1 \partial_3 u_1 + (c_3 \partial_1^2 + c_3 \partial_3^2) u_3 &= \rho \ddot{u}_3 \end{aligned} \quad (1)$$

и граничные условия на плоских гранях

$$u_j^\pm(x_1, \pm h, t) = 0 \quad (j = \overline{1,3}). \quad (2)$$

Здесь  $c_1 = c_{rr}$ ,  $c_2 = c_{33}$ ,  $c_3 = c_{6-r, 6-r}$ ,  $c_4 = c_{3r}$ ;  $r = 1$  для  $\varphi = 0$  и  $r = 2$  для  $\varphi = \pi/2$ ;  $\omega$ ,  $\gamma$  – круговая частота и волновое число нормальных  $P-SV$  волн. В дальнейшем представления с индексами «+» и «-» соответственно описывают волновые движения, симметричные и антисимметричные относительно срединной плоскости слоя.

Исследование краевой задачи (1), (2) приводит к дисперсионному соотношению вида

$$\chi_1^\pm \sin(\mu_1 h) \cos(\mu_2 h) - \chi_2^\pm \sin(\mu_2 h) \cos(\mu_1 h) = 0, \quad (3)$$

где  $\chi_1^+ = \chi_2^- = (\mu_1^2 - a_{11}) / \mu_1$ ,  $\chi_2^+ = \chi_1^- = (\mu_2^2 - a_{11}) / \mu_2$ ;  $\mu_{1,2}$  – корни харак-

теристического уравнения

$$\mu^4 - p\mu^2 + q = 0, \quad (4)$$

коэффициенты которого имеют представления

$$\begin{aligned} p &= a_{11} + a_{22} - a_{12}a_{21}, & q &= a_{11}a_{22}, \\ a_{11} &= (\rho\omega^2 - c_1\gamma^2) / c_3, & a_{12} &= i\gamma(c_3 + c_4) / c_3, \\ a_{22} &= (\rho\omega^2 - c_3\gamma^2) / c_2, & a_{21} &= i\gamma(c_3 + c_4) / c_2. \end{aligned}$$

**Результаты численного исследования полных спектров.** Дисперсионные соотношения (3) определяют полные спектры симметричных (продольных) и антисимметричных (изгибных) нормальных волн в трансверсально-изотропном слое и являются достаточно сложными трансцендентными уравнениями, требующими разработки специальных приемов качественного и количественного анализа [1]. При фиксированном значении  $\omega$  уравнения (3) имеют конечное число действительных корней  $\gamma$ , счетное или конечное число чисто мнимых корней  $\gamma$  и счетное число комплексных корней  $\gamma$ . Количество чисто мнимых корней определяется знаком дискриминанта характеристического уравнения (4), который имеет следующее аналитическое представление:

$$d = d_2^2 - 4d_1d_3, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= (c^2 - 4c_1c_2c_3^2) / (c_2 - c_3)^2; \\ d_2 &= 2\rho(c(c_2 + c_3) + 2c_2c_3(c_1 + c_3)) / (c_2 - c_3); \\ d_3 &= \rho^2(c_2 - c_3) / (c_2 + c_3); \\ c &= (2c_3 + c_4) - c_1c_2. \end{aligned}$$

Для непосредственного численного исследования полных спектров были использованы физико-механические параметры ряда кристаллических материалов орторомбического класса, заимствованные из работы [11], дополненные рассчитанными по формулам из работы [6] значениями коэффициентов Пуассона. В табл. 1 приведены данные для четырех материалов, выбор которых обусловлен обобщением закономерностей и выделением специфических особенностей в поведение мнимых ветвей дисперсионных спектров. Здесь плотность материала  $\tilde{\rho}$  и коэффициенты упругости  $\tilde{c}_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) отнесены соответственно к нормирующим параметрам  $\rho_* = 10^3 \text{ кг/м}^3$  и  $c_* = 10^{10} \text{ Н/м}^2$ .

Результаты расчетов ветвей дисперсионных спектров дисперсионных уравнений вида (3) графически изображены на полуплоскости  $0\Gamma\Omega$ , где  $\Gamma = 2\gamma h / \pi$  и  $\Omega = 2\omega h / \pi v_0$ ,  $v_0 = (c_2 / \rho)^{1/2}$ . Сплошные линии соответствуют ветвям действительных и мнимых корней дисперсионных уравне-

Таблица 1

Материал	Постоянные материала						
	$\tilde{\rho}$	$\tilde{c}_1$	$\tilde{c}_2$	$\tilde{c}_3$	$\tilde{c}_4$	$\nu$	$\nu'$
	При $\varphi = 0$						
Германат лития	3,500	13,00	15,00	5,00	4,20	0,21	0,19
Литий-аммоний-тартрат	1,710	3,86	3,63	0,67	0,87	0,39	0,13
Резорцин	1,272	1,03	1,29	0,44	0,74	0,32	0,23
Оливин	3,324	32,40	24,90	8,10	7,90	0,11	0,20
	При $\phi = \pi/2$						
Германат лития	3,500	12,00	15,00	5,90	4,90	0,25	0,31
Литий-аммоний-тартрат	1,710	5,39	3,63	1,19	2,01	0,16	0,29
Резорцин	1,272	1,44	1,29	0,33	0,69	0,45	0,34
Оливин	3,324	19,80	24,90	6,67	7,80	0,21	0,30

ний (3), штриховыми линиями изображены действительные и мнимые составляющие комплексных корней.

На рис. 1 представлен фрагмент спектра симметричных  $P-SV$  волн вдоль направления  $\varphi = 0$  для кристалла германата лития. Изобра-

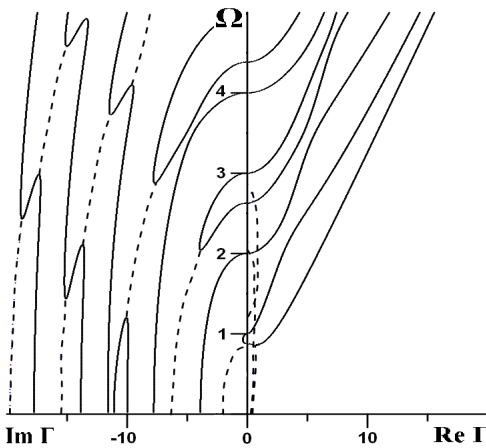


Рис. 1

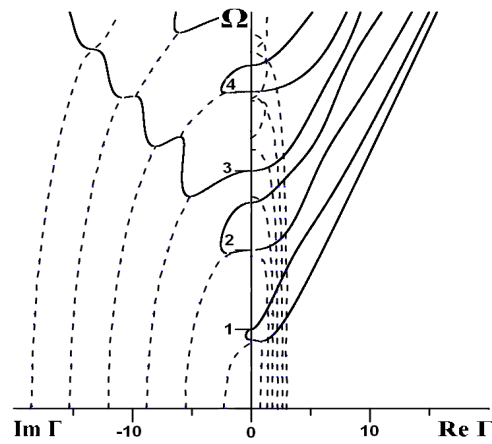


Рис. 2

женный на рис. 2 фрагмент спектра относится к антисимметричным  $P-SV$  волнам в том же направлении, но для кристалла оливина. Оба этих рисунка иллюстрируют наиболее часто встречаемые визуальные распределения мнимых ветвей дисперсионных уравнений (3).

Среди рассмотренных материалов наиболее редким внешним видом мнимой части спектра обладает слой из кристалла литий-аммоний-тартрата вдоль направления  $\varphi = \pi/2$ . Эта исключительность выражается в наличии двух видов незамкнутых кривых, первые из которых начинаются на оси  $0\Omega$ , вторые – на оси  $0\text{Im } \Gamma$ . На рис. 3 и 4 приведены фрагменты указанных выше спектров соответственно для симметричных и антисимметричных  $P-SV$  волн.

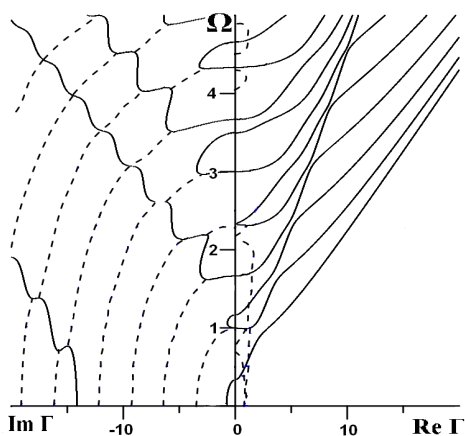


Рис. 3

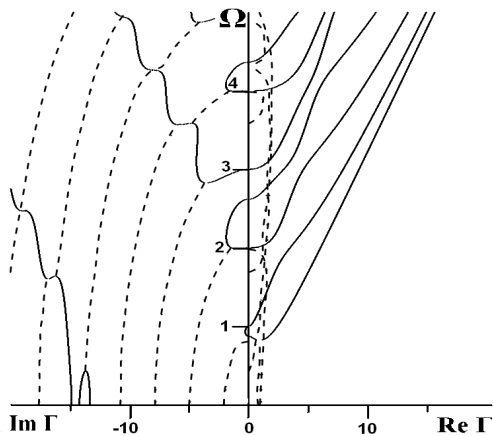


Рис. 4

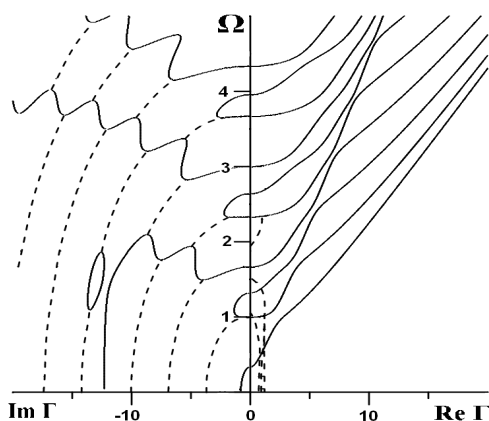


Рис. 5

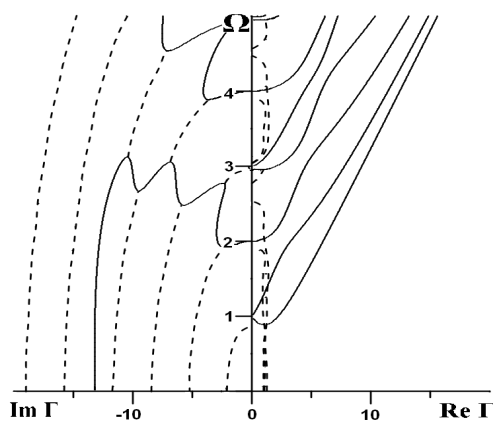


Рис. 6

Следующей не часто встречающейся особенностью в диаграммах распределений дисперсионных кривых является наличие внутренних петель. В рассматриваемом диапазоне изменения частоты  $\Omega$  и волнового числа  $\Gamma$  такой особенностью обладает спектр слоя из кристалла резорцина вдоль направления  $\varphi = \pi/2$  для симметричных волн (рис. 5). Как видно из рис. 6, указанная особенность не проявляется в случае антисимметричных волн.

**Классификация волноводных свойств транстропных материалов по топологии мнимых ветвей полного спектра.** На основе анализа приведенных фрагментов полных спектров нормальных волн можно сделать вывод о существовании 6-ти типов ветвей чисто мнимых корней дисперсионных уравнений (3):

- 1) обычные кривые – начинаются на оси  $O \text{Im } \Gamma$  и заканчиваются на оси  $O \Omega$ ;
- 2) незамкнутые кривые I рода – начинаются на оси  $O \Omega$  и уходят в бесконечность;
- 3) незамкнутые кривые II рода – начинаются на оси  $O \text{Im } \Gamma$  и уходят в бесконечность;

- 4) полупетли I рода – начинаются и заканчиваются на оси  $O\Omega$  ;
- 5) полупетли II рода – начинаются и заканчиваются на оси  $OIm\Gamma$  ;
- 6) внутренние петли – замкнутые кривые полностью лежащие в IV квадранте и не соприкасающиеся с осями координат.

Наличие или отсутствие каждого из этих типов мнимых ветвей в дисперсионных спектрах может быть основой для классификационного обособления следующих 3 групп материалов:

1-я группа включает спектры, состоящие из ветвей 2-го и 4-го типов и, возможно, 2-го типа. Для этой группы существует четкий количественный критерий, а именно  $d > 0$  или  $\Delta_m < 0$ .

2-я группа содержит спектры, состоящие из ветвей 1-го и 4-го типов.

3-я группа образуется ветвями 2-го, 3-го и 4-го типов.

Присутствие в распределениях дисперсионных кривых ветвей 5-го и 6-го типов не является элементом, обуславливающим выделение в особую отдельную подгруппу. Эта топологическая схема классифицируется как случай материалов группы 2 «а» при наличии в спектрах полупетель II рода и как случай материалов группы 2 «б» при наличии в спектрах внутренних петель. Следует отметить, что 2-ую и 3-ью группу образуют материалы, для которых приведенные выше параметры ( $d$  и  $\Delta_m$ ) имеют противоположные по сравнению с 1-ой группой значения. Построение количественного критерия для разделения 2-ой и 3-ей группы в рамках данной работы не проводилось.

Для рассматриваемых материалов были выполнены расчеты параметра анизотропии  $\Delta_m$  и ряда других параметров, позволивших провести их классификацию согласно подходам, изложенным в работах [2, 3,

Таблица 2

Материал	$\Delta_m$ [3]	[2]	[8]	CB	AB
Бензофенон	0,842	1	V.1.{1,1,1,1,2}	2а	2а
Германат лития	-0,064	3	V.2.{1,1,1,2,1}	1	1
Иодноватая кислота	-4,617	4	V.3.{1,1,2,1,1}	1	1
Калий-пентаборат	0,878	1	V.1.{1,1,1,1,2}	2а	2
Литий-аммоний-тарtrat	0,828	1	V.1.{1,1,1,1,2}	2а	2а
Магний-сульфит-гептагидрат	0,054	1	V.2.{1,1,1,2,1}	2	2
Натрий-аммоний-тарtrat	0,908	1	V.1.{1,1,1,1,2}	2	2
Натрий-тарtrat	0,965	1	V.1.{1,1,1,1,2}	2	2
Натрий-аммоний-селенат-дигидрат	0,526	1	V.1.{1,1,1,1,2}	2а	2б
Резорцин	-59,97	4	V.4.{1,2,1,1,1}	1	1
Сера	-0,083	3	V.2.{1,1,1,2,1}	1	1
Стронций-формиат	0,751	1	V.1.{1,1,1,1,2}	2а	2а
Терпин моногидрат	0,757	1	V.1.{1,1,1,1,2}	2	2а
Уран	0,576	1	V.1.{1,1,1,1,2}	2а	2а
Целестин	-0,024	3	V.3.{1,1,2,1,1}	1	1
Цинк-сульфат-гептагидрат	0,124	1	V.2.{1,1,1,2,1}	2	2а
Сегнетова соль	0,928	1	V.1.{1,1,1,1,2}	2	2а
Оливин	0,443	1	V.1.{1,1,1,1,2}	2а	2а



Таблица 3

Материал	$\Delta_m$ [3]	[2]	[8]	CB	AB
Бензофенон	0,485	1	V.1.{1,1,1,1,2}	2a	2a
Германат лития	-1,601	4	V.2.{1,1,1,2,1}	1	1
Иодноватая кислота	0,230	1	V.1.{1,1,1,1,2}	2	2a
Калий-пентаборат	-5,972	4	V.3.{1,1,2,1,1}	1	1
Литий-аммоний-тарtrat	0,040	1	V.1.{1,1,1,1,2}	3	3a
Магний-сульфит-гептагидрат	0,770	1	V.2.{1,1,1,2,1}	2a	2
Натрий-аммоний-тарtrat	-0,636	3	V.1.{1,1,1,1,2}	1	1
Натрий-тарtrat	0,039	1	V.1.{1,1,1,1,2}	2	2a
Натрий-аммоний-селенат-дигидрат	0,665	1	V.1.{1,1,1,1,2}	2	2a
Резорцин	0,057	1	V.1.{1,1,1,1,2}	2б	2
Сера	0,797	1	V.2.{1,1,1,2,1}	2a	2a
Стронций-формиат	0,315	1	V.2.{1,1,1,2,1}	2a	2a
Терпин моногидрат	0,728	1	V.1.{1,1,1,1,2}	a	2
Уран	-13,242	4	V.3.{1,1,2,1,1}	1	1
Целестин	0,850	1	V.1.{1,1,1,1,2}	2a	2a
Цинк-сульфат-гептагидрат	0,921	1	V.1.{1,1,1,1,2}	2a	2a
Сегнетова соль	-0,551	3	V.2.{1,1,1,2,1}	1	1
Оливин	0,185	1	V.1.{1,1,1,1,2}	2	2a

8], что отражают соответственно 2-я, 3-я и 4-я графа табл. 2 (при  $\varphi = 0$ ) и 3 (при  $\varphi = \pi/2$ ). В 5-ом и 6-ом столбцах этих таблиц представлены данные классификации анизотропных материалов по предлагаемой в настоящей работе методологии, базирующейся на особенностях топологии ветвей краевых стоячих волн в полных дисперсионных спектрах для волноводов в виде упругого слоя.

**РЕЗЮМЕ.** Побудовані та проаналізовані дисперсійні співвідношення для нормальних пружних хвиль з різними типами симетрії по товщині, розповсюджуючіся вздовж пружно-еквівалентних напрямків анизотропного шару ромбічної системи з жорстко-закріпченими зовнішніми гранями. Реалізовані розрахунки повних спектрів пружних хвиль для розглянутих хвильоводів із декількох реальних матеріалів. Представлені результати зрівняльного аналізу діючих систем класифікації механічних властивостей анізотропних матеріалів. Запропонован варіант класифікації хвильоводних властивостей поперечно ізотропних і ортотропних матеріалів за специфікою топології гілок крайових нерухомих хвиль у повних дисперсійних спектрах. У якості ілюстрації до запропонованої класифікації приведені повні спектри дисперсійних кривих симетричних і антисиметричних хвиль вздовж альтернативних пружно еквівалентних напрямків у чотирьох типів шарів з ортотропних матеріалів.

**Ключові слова:** ортотропний шар, трансцендентні дисперсійні рівняння, чисельний аналіз, розрахунки повних спектрів нормальних хвиль, класифікація хвильоводних властивостей анізотропних матеріалів.

**SUMMARY.** Constructed and analyzed the dispersion relations for normal elastic wave with different types of symmetry on thickness propagating along the elastically equivalent directions in an anisotropic layer of the orthorhombic system with rigid-clamped faces. Are realized the calculations of the full spectrums of normal waves for a series of real materials. The results of a comparative analysis of existing classification systems of mechanical properties anisotropic materials are presented. The option of classifying the waveguide properties of transversely isotropic and orthotropic materials on the specifics of

the topology the branches of the edge standing waves in the complete dispersion spectrums is offered. The complete diagrams of the dispersion curves of symmetric and antisymmetric waves along the alternative elastic-equivalent directions in the four types of layers from orthotropic materials for illustration to the proposed classification are presented.

**Keywords:** orthotropic layer, transcendental dispersion relations, numerical analysis, calculations of the full spectra of normal waves, classification of anisotropic materials.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамова О. П., Сторожев В. И., Шпак В. А.* Дисперсия нормальных волн в ортотропном слое с закрепленными границами // *Акустический журнал.*– 1995.– Т. 41, № 1.– С. 5–14.
2. *Будаев В. С.* Корни характеристического уравнения и классификация упругих анизотропных сред // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.*– 1978.– № 3. С. 33–40.
3. *Космодамианский А. С., Сторожев В. И.* Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред.– К.: Наук. думка, 1995.– 176 с.
4. *Космодамианский А. С., Сторожев В. И., Шпак В. А.* Спектр симметричных нормальных волн в ортотропном слое // *Теорет. и прикладная механика.*– 1988.– Вып. 19.– С. 116–121.
5. *Кузнецов С. В.* Волны Лэмба в защемленном и частично защемленном упругом слое // *Акустический журнал.*– 2014.– Т. 60, № 1.– С. 90–100.
6. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела.– М.: Наука, 1977.– 416 с.
7. *Моисеенко В. А.* Разработка методики сравнения анизотропных материалов по упругим свойствам // *Акуст. вісн.*– 2008.– Т. 11, № 3.– С. 76–84.
8. *Остросаблин Н. И.* О структуре тензора модулей упругости и классификации анизотропных материалов // *Журн. прикладной мех. и техн. физики.*– 1986.– № 4.– С. 127–135.
9. *Рыхлевский Я.* О законе Гука // *Прикладная математика и механика.*– 1984.– Т. 48, №3.– С. 420–425.
10. *Федоров Ф. И.* Теория упругих волн в кристаллах.– М.: Наука, 1965.– 386 с.
11. *Шутилов В. А.* Основы физики ультразвука.– Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.– 264 с.
12. *Musgrave M. J. P.* On an elastodynamic classification of orthorombic media // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.*– 1981.– Vol. 374, № 1758.– P. 401–429.
13. *Ting T. C. T.* Anisotropic elasticity: Theory and applications.– N. Y.: Oxford University Press, 1996.– 592 p.

*Донецкий НИИ черной металлургии*

*Поступила 17.11.2014*

УДК 539.3

С. А. КАЛОЕРОВ, д-р физ.-мат. наук,  
А. И. ЗАНЬКО, А. А. КОШКИН

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОБ ИЗГИБЕ ТОНКИХ ПЛИТ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

*Методом комплексных потенциалов решены задачи об изгибе плит для некоторых канонических областей. Даны точные аналитические решения задач для круговой изотропной плиты под действием сосредоточенной силы, кругового кольца под действием распределенных поперечных усилий на контурах или нормальных усилий на верхнем основании, кольца с загруженным по основанию нормальными усилиями упругим включением, кольца с загруженным нормальными усилиями внутренним кольцом. Даны приближенные численно-аналитические решения аналогичных задач для анизотропных плит. Аналитическими решениями подтвержден общий вид комплексных потенциалов для многосвязных плит. Аналогичные задачи решены для анизотропных плит. Отмечены неточности в общих представлениях комплексных потенциалов, полученных в работах других авторов. Даны результаты численных исследований, установлены закономерности влияния вида нагружения, «степени анизотропии» на значения изгибающих моментов.*

**Ключевые слова:** многосвязная плита, комплексные потенциалы, общее представление функций, круговое кольцо, равномерное давление по основанию

В различных отраслях современной науки и техники широкое применение находят тонкие пластинки, находящиеся в условиях изгиба. Они зачастую имеют отверстия и инородные включения, около которых при действии внешних усилий возникают большие концентрации напряжений, которые могут приводить к разрушению пластинок. Следовательно, необходимо иметь эффективные методы решения таких задач. Но, к сожалению, до сих пор таких исследований проведено незначительно. Большие возможности решения таких задач дает использование для их решения комплексных потенциалов. Однако недочеты, имеющиеся в ранее полученных общих представлениях этих функций для многосвязных областей [9, 10, 14] не позволили решать многие практически важные задачи. В статьях [3, 4] получены новые общие представления комплексных потенциалов для многосвязных анизотропных и изотропных плит.

В данной статье с использованием результатов работ [3, 4] даны точные аналитические решения ряда задач для изотропных плит с круговыми контурами, а также аналогичных задач для анизотропной плиты. Установлен ряд закономерностей изменения напряженного состояния в зависимости от вида действия внешней нагрузки, анизотропии материала плиты, включений.

**1. Комплексные потенциалы теории изгиба плит.** Самым эффективным методом решения задач теории изгиба тонких многосвязных плит является метод комплексных потенциалов, использование которого сводится к решению краевых задач для функций комплексных переменных.

В случае анизотропных плит решение указанной задачи сводится к

нахождению функций  $W_k(z_k)$  обобщенных комплексных переменных из соответствующих граничных условий. После нахождения этих функций основные характеристики изгиба плиты (прогиб, моменты, перерезывающие силы) вычисляются по формулам [3, 12]

$$w = w_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 W_k(z_k); \quad (1.1)$$

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = (M_{x0}, M_{y0}, H_{xy0}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k) W_k''(z_k); \quad (1.2)$$

$$(N_x, N_y) = (N_{x0}, N_{y0}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (\mu_k s_k, -s_k) W_k'''(z_k), \quad (1.3)$$

где  $w_0(x, y)$  – частное решение неоднородного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y); \end{aligned} \quad (1.4)$$

$q(x, y)$  – функция распределения по верхнему основанию плиты нормальных усилий;  $D_{ij} = B_{ij} D_0$  – жесткости материала плиты, в которых

$$\begin{aligned} B_{11} &= (a_{22} a_{66} - a_{26}^2) / \Delta, & B_{12} &= (a_{16} a_{26} - a_{12} a_{66}) / \Delta, \\ B_{16} &= (a_{12} a_{26} - a_{16} a_{22}) / \Delta, & B_{22} &= (a_{11} a_{66} - a_{16}^2) / \Delta, \\ B_{26} &= (a_{12} a_{16} - a_{26} a_{11}) / \Delta, & B_{66} &= (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) / \Delta, \\ \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix}; \end{aligned} \quad (1.5)$$

$a_{ij}$  – коэффициенты деформаций;  $D_0 = 2h^3/3$ ;  $h$  – полутолщина плиты;

$$\begin{aligned} M_{x0} &= - \left( D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right), \\ M_{y0} &= - \left( D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right), \\ H_{xy0} &= - \left( D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right); \end{aligned}$$

$$N_{x0} = - \left( D_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right),$$

$$N_{y0} = - \left( D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right); \quad (1.6)$$

$$p_k = D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2, \quad q_k = D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2,$$

$$r_k = D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2,$$

$$s_k = -D_{16} - (D_{12} + 2D_{66})\mu_k - 3D_{26}\mu_k^2 - D_{22}\mu_k^3; \quad (1.7)$$

$\mu_k$  – корни характеристического уравнения

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0. \quad (1.8)$$

Функции  $W'_k(z_k)$  определены в областях  $S_k$ , получаемых из заданной области  $S$ , занимаемой плитой, аффинными преобразованиями

$$z_k = x + \mu_k y \quad (1.9)$$

и на контурах  $L_l$  этой области  $S$  удовлетворяют определенным граничным условиям [3]. Если контур  $L_l$  загружен или жестко подкреплён, то граничные условия имеют вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{kli} W'_k(z_k) = f_{li} \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (1.10)$$

причем в случае загруженного контура

$$g_{kl1} = \frac{p_k}{\mu_k}, \quad g_{kl2} = q_k,$$

$$f_{l1} = - \int_0^s f_l dx + m_l dy + J_{01} - c_l x + c_{1l},$$

$$f_{l2} = - \int_0^s m_l dx - f_l dy - J_{02} + c_l y + c_{2l},$$

$$J_{01} = \int_0^s (N_{xy0} - H_{xy0}) dx + M_{x0} dy,$$

$$J_{02} = - \int_0^s M_{y0} dx - (N_{xy0} + H_{xy0}) dy,$$

$$f_l(s) = \int_0^s p_l(s) ds, \quad N_{xy0} = - \int_0^s N_{y0} dx - N_{x0} dy, \quad (1.11)$$

в случае подкреплённого контура

$$g_{kl1} = 1, \quad g_{kl2} = \mu_k, \quad f_{l1} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + c_{1l}, \quad f_{l2} = -\frac{\partial w_0}{\partial y} + c_{2l}, \quad (1.12)$$

$c_l$  – вещественная,  $c_{1l}$ ,  $c_{2l}$  – комплексные постоянные (для жестко заземленного контура  $c_{1l} = 0$ ,  $c_{2l} = 0$ ). В случае идеального контакта плиты с упругим включением граничные условия такие:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left( g_{kli} W'_k(z_k) - g_{kli}^l W_k^l(z_k^l) \right) = f_{li} \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (1.13)$$

где

$$g_{kl1} = 1, \quad g_{kl1}^l = 1, \quad g_{kl2} = \mu_k, \quad g_{kl2}^l = \mu_k^l, \\ g_{kl3} = p_k / \mu_k, \quad g_{kl3}^l = p_k^l / \mu_k^l, \quad g_{kl4} = q_k, \quad g_{kl4}^l = q_k^l; \quad (1.14)$$

$$f_{l1} = \partial w_0^l / \partial x - \partial w_0 / \partial x, \quad f_{l2} = \partial w_0^l / \partial y - \partial w_0 / \partial y, \\ f_{l3} = -c_l x + c_{1l} + J_{01} - J_{01}^l, \quad f_{l4} = c_l y + c_{2l} + J_{02} + J_{02}^l, \quad (1.15)$$

причем  $\mu_k^l$  – корни характеристического уравнения (1.8) для включения  $S^l$ ,  $W_k^l(z_k^l)$  – производные комплексных потенциалов для включения  $S_k^l$ ;  $p_k^l$ ,  $q_k^l$  – постоянные, вычисляемые по формулам (1.7), в которых нужно заменить  $D_{ij}$  и  $\mu_k$  на  $D_{ij}^{(l)}$  и  $\mu_k^l$ ;  $w_0^l(x, y)$  – частное решение неоднородного дифференциального уравнения (1.4) для включения;  $J_{01}^l$ ,  $J_{02}^l$  – интегралы, вычисляемые по формулам (1.11) при замене  $w_0(x, y)$  на функции загрузки включения  $w_0^l(x, y)$ .

Если плита занимает многосвязную область  $S$ , ограниченную внешним контуром  $L_0$  и контурами отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ), то в общем случае комплексные потенциалы  $W'_k(z_k)$  имеют вид [3]

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \\ + \sum_{r=1}^R \left[ (A_{kr}^0 z_k + B_{kr}^0) \ln(z_k - z_{kr}^0) + \frac{b_{kr1}^0}{z_k - z_{kr}^0} \right] + W'_{0k}(z_k), \quad (1.16)$$

где  $\Gamma_k$  – постоянные, равные нулю в случае конечной области и определяемые из системы

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \Gamma_k = A_{11} M_x^\infty + A_{21} M_y^\infty + A_{31} H_{xy}^\infty,$$

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \Gamma_k &= A_{12} M_x^\infty + A_{22} M_y^\infty + A_{32} H_{xy}^\infty, \\
2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k^2 \Gamma_k &= A_{13} M_x^\infty + A_{23} M_y^\infty + A_{33} H_{xy}^\infty, \\
2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k &= -3D_{16} A_1 M_x^\infty - (D_{12} + 2D_{22}) A_2 M_y^\infty - D_{26} A_3 H_{xy}^\infty, \quad (1.17)
\end{aligned}$$

если область бесконечна;  $M_x^\infty$ ,  $M_y^\infty$ ,  $H_{xy}^\infty$  – заданные на бесконечности значения изгибающих и скручивающего моментов;  $A_{kl}$ ,  $B_{kl}$  – постоянные, определяемые из решения систем

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left( 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kl} = \left( 0, 0, 0, \frac{P_l + P_{0l}}{2\pi D_{11}} \right), \quad (1.18)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left( 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i B_{kl} = \left( 0, 0, -\frac{M_{xl} + M_{x0l}}{4\pi D_{22}}, -\frac{M_{yl} + M_{y0l}}{4\pi D_{11}} \right), \quad (1.19)$$

$P_l$  и  $M_{xl}$ ,  $M_{yl}$  – главный вектор и компоненты главного момента относительно начала координат внешних сил, приложенных к контуру  $L_l$ ;

$$\begin{aligned}
P_{0l} &= -\int_L \left( N_y^0 dx - N_x^0 dy \right), \\
M_{x0l} &= \int_L \left[ \left( y N_x^0 - H_{xy}^0 \right) dy - \left( y N_y^0 - M_y^0 \right) dx \right], \\
M_{y0l} &= \int_L \left[ \left( x N_y^0 - H_{xy}^0 \right) dx - \left( x N_x^0 - M_x^0 \right) dy \right]; \quad (1.20)
\end{aligned}$$

$z_{kl}$  – точки, соответствующие при аффинных преобразованиях (1.9) произвольным точкам  $z_l$  внутри контуров отверстий  $L_l$ ;  $A_{kr}^0$ ,  $B_{kr}^0$  – постоянные, определяемые из систем (1.18), (1.19), в которых нужно заменить  $A_{kl}$ ,  $B_{kl}$ ,  $P_l$ ,  $M_{xl}$ ,  $M_{yl}$  на  $A_{kr}^0$ ,  $B_{kr}^0$ ,  $P_r^0$ ,  $M_{xr}^0$ ,  $M_{yr}^0$ ;  $P_r^0$ ,  $M_{xr}^0 = y_r^0 P_r^0$ ,  $M_{yr}^0 = -x_r^0 P_r^0$  – сосредоточенная сила в точке  $(x_r^0, y_r^0)$  и ее моменты относительно осей  $Ox$ ,  $Oy$ ;  $z_{kj}^0 = x_r^0 + \mu_k y_r^0$ ;  $b_{kr1}^0$  – вычет функции  $W_k'(z_k)$  в точке  $z_{kr}^0$ , удовлетворяющий равенству

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i \left( A_{kr}^0 (z_{kr}^0)^2 + 2B_{kr}^0 z_{kr}^0 + 2b_{kr1}^0 \right) = 0; \quad (1.21)$$

$W_{0k}'(z_k)$  – функции, голоморфные в многосвязных областях  $S_k$ , ограниченных контурами  $L_{kl} (l = \overline{1, L})$ , соответствующими при аффинных преоб-

разованиях (1.9) контурам  $L_l$ .

В случае многосвязной области удобнее использовать так называемые дифференциальные граничные условия, которые получаются из (1.10) и (1.13) их дифференцированием по дуге контура области, т. е.

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{kli} \delta_k W_k''(z_k) = f_{li1}(t) \quad (i = \overline{1, 2}) \quad (1.22)$$

в случае заданных загружений или подкреплений,

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left( g_{kli} \delta_k W_k''(z_k) - g_{kli}^{(l)} \delta_k^{(l)} W_k''^{(l)}(z_k^{(l)}) \right) = f_{li1} \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (1.23)$$

в случае идеального контакта. При этом  $\delta_k = \frac{dz_k}{ds}$ ,  $f_{li1}(t) = \frac{df_{li}(t)}{ds}$ .

В случае изотропной плиты определение ее напряженно-деформированного состояния сводится к нахождению комплексных потенциалов изгиба  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ . После нахождения этих функций основные характеристики изгиба плиты вычисляются по формулам [4, 10]

$$w = w_0 + \operatorname{Re} \left[ \bar{z} \varphi(z) + \int \psi(z) dz \right], \quad (1.24)$$

$$M_x + M_y = M_{0x} + M_{0y} - 4D(1 + \nu) \operatorname{Re} \varphi'(z),$$

$$M_y - M_x + 2iH_{xy} = M_{0y} - M_{0x} + 2iH_{0xy} + 2D(1 - \nu) [\bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z)]; \quad (1.25)$$

$$N_x = N_{0x} - 2D \left[ \varphi''(z) + \overline{\varphi''(z)} \right],$$

$$N_y = N_{0y} - 2iD \left[ \varphi''(z) - \overline{\varphi''(z)} \right], \quad (1.26)$$

где  $w_0(x, y)$  – частное решение неоднородного бигармонического дифференциального уравнения

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q(x, y)}{D}; \quad (1.27)$$

$\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  – оператор Лапласа;  $q(x, y)$  – функция распределения по верхнему основанию плиты нормальных усилий;  $D = \frac{E}{1 - \nu^2} D_0$  – жесткость материала плиты, в котором  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $D_0 = 2h^3 / 3$ ;  $h$  – полутолщина плиты;

$$M_{x0} = -D \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right), \quad M_{y0} = -D \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)$$

$$H_{xy0} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}; \quad (1.28)$$



$$N_{x0} = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w_0, \quad N_{y0} = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w_0; \quad (1.29)$$

На контурах плиты функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  удовлетворяют определенным граничным условиям [4].

Если контур  $L_l$  плиты загружен распределенными моментами  $m_l(s)$  и поперечными усилиями  $p_l(s)$ , то на нем должны выполняться граничные условия

$$\begin{aligned} \alpha \varphi(t) - t \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = & \frac{1}{D(1-\nu)} \int_0^s [(M_{y0} - iH_{xy0}) dx + \\ & + i(M_{x0} + iH_{xy0}) dy] + \frac{i}{D(1-\nu)} \int_0^s N_{xy0} dt \\ & - \frac{1}{D(1-\nu)} \int_0^s [m_l(s) + if_l(s)] dt - ic_l t + c_l^*, \end{aligned} \quad (1.30)$$

где  $\alpha = (3 + \nu)/(1 - \nu)$ ,  $c_l$  и  $c_l^*$  – вещественная и комплексная постоянные. Для незагруженного контура в (1.30) нужно принять  $m_l(s) = p_l(s) = 0$ .

Если на контуре  $L_l$  плиты заданы прогиб  $w_l^*$  и угол поворота по нормали  $w_{nl}^* = (dw/dn)^*$ , то граничные условия на нем имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = & -\frac{\partial w_0}{\partial x} - i \frac{\partial w_0}{\partial y} + \\ & + \left[ -\frac{\partial w_l^*}{\partial x} \cos ny + \frac{\partial w_l^*}{\partial y} \cos nx + w_{nl}^* \right] (\cos ny - i \cos nx). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Если край плиты жестко защемлен, то из условия (1.31) найдем

$$\varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} - i \frac{\partial w_0}{\partial y}. \quad (1.32)$$

Если край плиты жестко подкреплён, то граничные условия имеют вид

$$\varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} - i \frac{\partial w_0}{\partial y} + c_{1l} + ic_{2l}. \quad (1.33)$$

В случае идеального контакта по контуру  $L_l$  плиты с включением с областью  $S^{(l)}$  граничные условия такие:

$$\alpha \varphi(t) - t \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} - \eta^{(l)} \left[ \alpha^{(l)} \varphi(t) - t \overline{\varphi'^{(l)}(t)} - \overline{\psi^{(l)}(t)} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{D(1-\nu)} \left[ \int_0^s (M_{y0} - iH_{xy0}) dx + i(M_{x0} + iH_{xy0}) dy + \right. \\
&+ i \int_0^s H_{xy0} (dx + idy) \left. \right] - \frac{1}{D(1-\nu)} \left[ \int_0^s (M_{y0}^{(l)} - iH_{xy0}^{(l)}) dx + \right. \\
&+ i(M_{x0}^{(l)} + iH_{xy0}^{(l)}) dy + i \int_0^s H_{xy0}^{(l)} (dx + idy) \left. \right] - ic_l t + c_l^*, \\
\varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} - \varphi^{(l)}(t) - t \overline{\varphi^{(l)}(t)} - \overline{\psi^{(l)}(t)} &= - \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + i \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \\
+ \frac{\partial w_0^{(l)}}{\partial x} + i \frac{\partial w_0^{(l)}}{\partial y}, & \tag{1.34}
\end{aligned}$$

где  $\eta^{(l)} = D^{(l)}(1-\nu^{(l)})/D(1-\nu)$ .

Если плита занимает многосвязную область  $S$ , ограниченную внешним контуром  $L_0$  и контурами отверстий  $L_l$ , то в общем случае комплексные потенциалы имеют вид [4]

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \Gamma_1 z + \sum_{l=1}^L (A_l z + B_l) \ln(z - z_l) + \sum_{r=1}^R (A_r^0 z + B_r^0) \ln(z - z_r^0) + \varphi_0(z), \\
\psi(z) &= \Gamma_2 z + \sum_{l=1}^L \bar{B}_l \ln(z - z_l) + \sum_{r=1}^R \left[ \bar{B}_r^0 \ln(z - z_r^0) + \frac{b_{r1}^0}{z - z_r^0} \right] + \psi_0(z), \tag{1.35}
\end{aligned}$$

где  $\Gamma_1, \Gamma_2$  – постоянные, равные нулю в случае конечной области  $S$  и определяемые равенствами

$$\Gamma_1 = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)}, \quad \Gamma_2 = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty}{2D(1-\nu)} \tag{1.36}$$

для случая, когда область  $S$  бесконечна;  $M_x^\infty, M_y^\infty, H_{xy}^\infty$  – значения соответствующих моментов на бесконечности;

$$A_l = \frac{P_l + P_{0l}}{8\pi D}, \quad B_l = -\frac{(P_l + P_{0l})z_l + M_{yl} + M_{y0l} - i(M_{xl} + M_{x0l})}{8\pi D}; \tag{1.37}$$

$$A_r^0 = \frac{P_r^0}{8\pi D}, \quad B_r^0 = -\frac{P_r^0 z_r^0 + M_{xr}^0 + M_{yr}^0 - i(M_{xr}^0 + M_{yr}^0)}{8\pi D}; \tag{1.38}$$

$P_l, M_{xl}, M_{yl}$  – главный вектор и компоненты главного момента внешних воздействий, приложенных к контуру  $L_l$ ;  $P_{0l}, M_{x0l}, M_{y0l}$  – главный вектор и компоненты главного момента усилий по контуру  $L_l$  от воздействия

по нему нагрузки  $q(x, y)$ ;  $P_r^0$ ,  $M_{xr}^0 = y_r^0 P_r^0$ ,  $M_{yr}^0 = -x_r^0 P_r^0$  – сосредоточенная сила и компоненты ее момента относительно начала координат в точке  $z_r^0 = x_r^0 + iy_r^0$ ;  $b_{r1}^0$  – вычет функции  $\psi(z)$  в точке  $z_r^0$  приложения сосредоточенной  $P_r^0$ , вычисляемый по формуле

$$b_{r1}^0 = -i(M_{xr}^0 + iM_{yr}^0)\bar{z}_r^0; \quad (1.39)$$

$\varphi_0(z)$ ,  $\psi_0(z)$  – функции, голоморфные в многосвязной области (конечной или бесконечной), причем в случае бесконечной области они в точке  $z = \infty$  имеют полюс нулевого порядка.

Исходя из приведенных соотношений, решим некоторые задачи для изотропных плит с круговыми контурами и анизотропных с эллиптическими (круговыми) контурами.

## 2. Точные аналитические решения некоторых задач для изотропной плиты с круговыми контурами.

2.1. *Круговая плита под действием сосредоточенной силы.* Рассмотрим круговую плиту (рис. 1) с контуром  $L_0$  и радиусом  $R_0$ .

Плита находится под действием сосредоточенной силы  $P_1^0$ , приложенной в ее центре. По контуру  $L_0$  плита жестко закреплена.

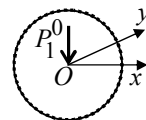


Рис. 1

Учитывая, что в данном случае функции, голоморфные в области (круге) можно представить степенными рядами, комплексные потенциалы (1.35) запишем в виде

$$\varphi(z) = (A_1^0 z + B_1^0) \ln z + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad \psi(z) = \bar{B}_1^0 \ln z + \frac{b_{11}^0}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \quad (2.1)$$

причем на основе (1.37) имеем

$$A_1^0 = \frac{P_1^0}{8\pi D}, \quad B_1^0 = 0, \quad b_{11}^0 = 0,$$

$a_k$ ,  $b_k$  – неизвестные постоянные. Подставляя эти функции в граничное условие (1.32) на контуре  $L_0$ , где  $z = R_0 \sigma$ ,  $\sigma = e^{i\theta}$ , и применяя метод рядов, получим

$$a_1 = -\left(2A_1^0 \ln R + A_1^0\right)/2, \quad b_1 = a_k = b_k = 0 \quad (k \geq 2).$$

Тогда функции примут вид

$$\varphi(z) = A_1^0 z \ln z - \frac{2A_1^0 \ln R + A_1^0}{2} z, \quad \psi(z) = 0. \quad (2.2)$$

Для моментов вдоль вещественной оси (при  $y = 0$ ) получим

$$M_x + M_y = -4D(1 + \nu) \left( A_1^0 \ln x + a_1 + A_1^0 \right),$$

$$M_y - M_x = 2D(1 - \nu)A_1^0, \quad H_{xy} = 0,$$

или

$$M_x = -2D(1 + \nu)(A_1^0 \ln x + a_1 + A_1^0) - D(1 - \nu)A_1^0,$$

$$M_y = -2D(1 + \nu)(A_1^0 \ln x + a_1 + A_1^0) + D(1 - \nu)A_1^0.$$

В силу симметрии такие же значения будут иметь моменты вдоль любых радиальных направлений.

Для диска из материала КАСТ-В изотропный [1] были вычислены моменты  $M_x/P_1^0$  и  $M_y/P_1^0$  в точках оси  $Ox$ . Для  $x/R_0$ , равных 1,0; 0,5; 0,1; 0,01; 0,0001, значения  $M_x/P_1^0$  получились такими: -0,0796; -0,0178; 0,1255; 0,3306; 0,7409. Для этих же координат значения  $M_y/P_1^0$  получились такими: -0,0095; 0,0522; 0,1956; 0,4007; 0,8110. Здесь и далее значения всех величин приводятся с точностью до  $D_0 = 2h^3/3$ . Видно, что при  $x \rightarrow 0$  значения моментов стремятся к бесконечности, причем они становятся большими только для достаточно близких расстояний от точки приложения сосредоточенной силы, при  $x < 0,01$ .

**2.2 Круговая кольцевая плита.** Рассмотрим кольцевую плиту с контурами  $L_0$  и  $L_1$ , радиусами  $R_0$  и  $R_1$ , находящуюся под действием распределенных поперечных усилий на внутреннем или внешнем контурах или давления по верхнему основанию. Во всех этих задачах в правые части граничных условий входят некоторые интегралы по контурам кольца. Вычислим вначале эти интегралы.

На контурах кольца  $z = t = R_l (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = R_l \sigma$ , где  $\vartheta$  - параметр параметрического задания круга, равный центральному углу,  $\sigma = e^{i\vartheta}$ .

В случае действия равномерно распределенных поперечных усилий интенсивности  $p_l$  по контурам  $L_l$  имеем

$$f_l(s) = \pm \int_0^s p_l ds = \pm p_l R_l \vartheta = \mp i p_l R_l \ln \sigma; \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \int_0^s f_l(s) dt &= \pm p_l R_l \int_0^{\vartheta} \vartheta (dx + idy) = \mp p_l R_l^2 \int_0^{\vartheta} \vartheta (\sin \vartheta - i \cos \vartheta) d\vartheta = \\ &= \pm p_l R_l^2 [(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)(\vartheta + i)] = \mp p_l R_l^2 i (\sigma \ln \sigma - \sigma). \end{aligned} \quad (2.4)$$

причем верхние и нижние знаки относятся соответственно к внешнему и внутреннему контурам кольца.

В случае действия равномерно распределенного давления интенсивности  $q_0$  по верхнему основанию плиты частное решение дифференциального уравнения изгиба будем выбирать в виде

$$w_0(x, y) = d_0(x^2 + y^2)^2 = d_0 z^2 \bar{z}^2, \quad (2.5)$$

где  $d_0$  – неизвестная постоянная. Подставляя функцию (2.5) в дифференциальное уравнение (1.27) и учитывая, что в данном случае  $q(x, y) = q_0$ , получим  $d_0$ , а на основании (1.28) и (1.29) ряд выражений. Имеем

$$\begin{aligned} d_0 &= q_0/64D; \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} &= 4d_0(x^2 + y^2)x, \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} = 4d_0(x^2 + y^2)y; \\ M_{x_0} &= -4d_0D((3 + \nu)x^2 + (1 + 3\nu)y^2), \\ M_{y_0} &= -4d_0D((1 + 3\nu)x^2 + (3 + \nu)y^2), \quad H_{xy_0} = -8d_0D(1 - \nu)xy, \\ N_{x_0} &= -32d_0Dx, \quad N_{y_0} = -32d_0Dy, \quad N_{xy_0}^1 = -32d_0DR_l^2\theta. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для рассматриваемого случая давления по верхнему основанию вычислим интегралы, входящие в правые части граничных условий на нагруженных контурах кольца. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^s (M_{y_0} - iH_{xy_0})dx + i(M_{x_0} + iH_{xy_0})dy &= \\ &= -4Dd_0R_l^3(3 + \nu)(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = -4Dd_0R_l^3(3 + \nu)\sigma, \\ \int_0^s N_{xy_0}(dx + idy) &= -32Dd_0R_l^3(\vartheta + i)(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = \\ &= 32Dd_0R_l^3i(\sigma \ln \sigma - \sigma). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Рассмотрим частные задачи.

1<sup>0</sup>. Пусть вначале внешний контур кольца жестко заземлен, по внутреннему действуют равномерно распределенные поперечные усилия интенсивности  $p_1$  (рис. 2). Учитывая, что функции, голоморфные в кольце можно представить рядами Лорана, комплексные потенциалы (1.35) запишем в виде

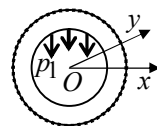


Рис. 2

$$\varphi(z) = (A_1z + B_1) \ln z + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \quad \psi(z) = \bar{B}_1 \ln z + \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k. \quad (2.8)$$

На внешнем жестко заземленном контуре кольца имеет место условие (1.32), в котором правая часть равна нулю. На внутреннем нагруженном поперечными усилиями контуре граничное условие имеет вид (1.30), причем на основе (2.4) правая часть получается такой:

$$-\frac{i}{D(1 - \nu)} \int_0^s f_1(s)dt = \frac{R_1^2 p_1}{D(1 - \nu)} (\sigma \ln \sigma - \sigma). \quad (2.9)$$

Подставляя функции (2.8) в условия (1.30) на  $L_1$  и (1.32) на  $L_0$  с

учетом (2.9) и применяя метод рядов (сравнивая коэффициенты при  $\sigma \ln \sigma$ ,  $\ln \sigma$  и степенях  $\sigma$ ) получим

$$A_1 = \frac{R_1 p_1}{D(1-\nu)(\alpha+1)} = \frac{R_1 p_1}{4D} = \frac{2\pi R_1 p_1}{8\pi D}, \quad B_1 = 0; \quad (2.10)$$

$$a_1 = -\frac{D(1-\nu)\left[A_1 R_0^2(2\ln R_0 + 1) + A_1 R_1^2((\alpha-1)\ln R_1 - 1)\right] + p_1 R_1^3}{D(1-\nu)\left((\alpha-1)R_1^2 + 2R_0^2\right)},$$

$$b_{-1} = -\left\{D(1-\nu)\left[A_1(\alpha-1)(2\ln R_0 + 1) - 2A_1((\alpha-1)\ln R_1 - 1)\right] - 2p_1 R_1\right\} \frac{R_0^2 R_1^2}{D(1-\nu)\left((\alpha-1)R_1^2 + 2R_0^2\right)}; \quad (2.11)$$

$$b_1 = a_{-1} = a_k = b_k = a_{-k} = b_{-k} = 0 \quad (k \geq 2).$$

Заметим, что в данном случае главный вектор усилий, приложенных к контуру  $L_1$ , равен  $P_1 = 2\pi R_1 p_1$ , а компоненты их главного момента равны нулю. Учитывая это, по формулам (1.37) для  $A_1$  и  $B_1$  получаем опять выражения (2.10), что подтверждает правильность формул (1.37) для нахождения коэффициентов при логарифмах комплексных потенциалов (1.35).

Окончательно функции (2.8) примут вид

$$\varphi(z) = A_1 z \ln z + a_1 z, \quad \psi(z) = \frac{b_{-1}}{z}. \quad (2.12)$$

Для моментов вдоль вещественной оси (при  $y = 0$ ) получим

$$M_x + M_y = -4D(1+\nu)\left[A_1 \ln x + a_1 + A_1\right]$$

$$M_y - M_x = 2D(1-\nu)\left(A_1 - \frac{b_{-1}}{x^2}\right), \quad H_{xy} = 0,$$

или

$$M_x = -2D(1+\nu)\left[A_1 \ln(x) + a_1 + A_1\right] - D(1-\nu)\left(A_1 - \frac{b_{-1}}{x^2}\right),$$

$$M_y = -2D(1+\nu)\left[A_1 \ln(x) + a_1 + A_1\right] + D(1-\nu)\left(A_1 - \frac{b_{-1}}{x^2}\right). \quad (2.13)$$

В силу симметрии такие же значения будут иметь моменты вдоль любых радиальных направлений.

При  $R_1 \rightarrow 0$  из приведенных формул следует решение предыдущей задачи для случая действия сосредоточенной силы в центре диска, если принять  $P_1^0 = 2\pi R_1 p_1$ .

На рис. 3 для различных значений  $R_1/R_0$  приведены графики расп-

ределения моментов  $M_y/P_1$  в зависимости от координаты  $x/R_0$ .

Штриховой линией изображен график для случая действия сосредоточенной силы  $P_1^0$  в центре круговой плиты (задача 2.1). Видно, что при  $R_1/R_0 \rightarrow 0$  значения моментов вблизи внутреннего контура растут, стремясь к их значениям для сосредоточенной силы в центре плиты. Так, в случае  $R_1/R_0 \leq 0,01$  значения моментов в точках при  $x/R_0 \geq 0,03$  для обеих задач практически совпадают (в пределе при  $R_1/R_0 \rightarrow 0$ ,

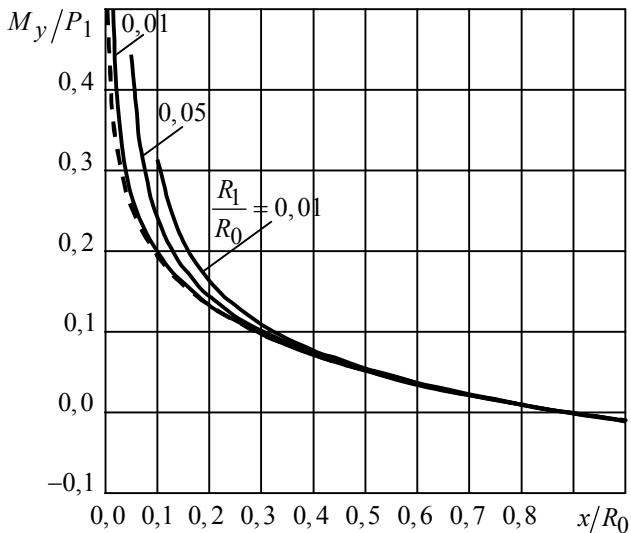


Рис.3

как указано выше они полностью совпадают). В общем же случае в точках  $x \geq 3R_1$ , т. е. находящихся от контура отверстия на расстояниях больше диаметра отверстия, значения моментов не зависят от вида нагружения (сосредоточенная сила или поперечная нагрузка по контуру), а зависят от главного вектора приложенных усилий, что подтверждает принцип Сен-Венана.

2°. Пусть теперь внешний контур кругового кольца находится под действием равномерно распределенных поперечных усилий интенсивности  $p_0$ , внутренний контур жестко защемлен. В этом случае комплексные потенциалы  $\phi(z)$  и  $\psi(z)$ , как и выше, представляются в виде (2.8).

На внутреннем жестко защемленном контуре кольца имеет место условие (1.32), в котором правая часть равна нулю. На внешнем нагруженном поперечными усилиями контуре граничное условие имеет вид (1.30), причем на основе (2.4) правая часть получается такой:

$$-\frac{i}{D(1-\nu)} \int_0^s f_0(s) dt = -\frac{R_0^2 p_0}{D(1-\nu)} (\sigma \ln \sigma - \sigma). \quad (2.14)$$

Подставляя функции (2.8) в условия (1.30) на  $L_0$  и (1.32) на  $L_1$ , учитывая (2.14) и применяя метод рядов, получим

$$A_1 = -\frac{R_0 p_0}{D(1-\nu)(\alpha + 1)} = -\frac{R_0 p_0}{4D} = -\frac{2\pi R_0 p_0}{8\pi D}, \quad B_1 = 0; \quad (2.15)$$

$$a_1 = -\frac{D(1-\nu) [A_1 R_1^2 (2 \ln R_1 + 1) + A_1 R_0^2 ((\alpha - 1) \ln R_0 - 1)] - p_0 R_0^3}{D(1-\nu) ((\alpha - 1) R_0^2 + 2R_1^2)},$$

$$b_{-1} = -\{D(1-\nu)[A_1(\alpha-1)(2\ln R_1+1)-2A_1((\alpha-1)\ln R_0-1)] + 2p_0R_0\} \frac{R_0^2R_1^2}{D(1-\nu)((\alpha-1)R_0^2+2R_1^2)}; \quad (2.16)$$

$$b_1 = a_{-1} = a_k = b_k = a_{-k} = b_{-k} = 0 \quad (k \geq 2).$$

Тогда функции (2.8) опять примут вид (2.12) и, как выше, т. к. сила реакции опоры равна  $P_0 = 2\pi R_0 p_0$ , то главный вектор усилий, приложенных к контуру  $L_1$  равен  $P_1 = -P_0$ , а компоненты их главного момента равны нулю, по формулам (1.37) для  $A_1$  и  $B_1$  получаем опять выражения (2.15), что подтверждает формулы (1.37) для нахождения коэффициентов при логарифмах комплексных потенциалов (1.35). Для моментов получим выражения (2.13).

В табл. 1 с точностью до  $P_0$  приведены значения моментов в точках с координатами  $x/R_0$  для случая  $R_1/R_0 = 0,5$ . Видно, что нижние слои плиты находятся в условиях сжатия (моменты отрицательны, значит и напряжения для положительных значений координаты  $z$  в системе координат

Таблица 1

Моменты	$x/R_0$					
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$10M_x/P_0$	-1,3143	-0,8680	-0,5595	-0,3294	-0,1483	0,0000
$10M_y/P_0$	-0,1568	-0,2783	-0,3122	-0,3044	-0,2756	-0,2363

нат с центром на срединной плоскости и осью  $Oz$  вниз), значения моментов  $M_n = M_x$  на внешнем краю равны нулю (выполнение граничного условия), максимальных значений по модулю эти моменты достигают на внутреннем контуре кольца.

3°. Рассмотрим теперь случай, когда круговое кольцо по контуру  $L_0$  жестко защемлено, внутренний контур  $L_1$  свободен от воздействий, а по

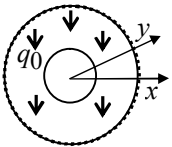


Рис. 4

верхнему основанию плиты действует равномерно распределенное давление интенсивности  $q_0$  (рис. 4). В этом случае частное решение дифференциального уравнения (1.27) для кольца можно выбрать в форме (2.5).

На внешнем контуре кольца имеет место условие (1.32), в котором правая часть, на основе (2.6) имеет вид

$$-\frac{\partial w_0}{\partial x} - i \frac{\partial w_0}{\partial y} = -4d_0 R_0^3 \sigma. \quad (2.17)$$

На внутреннем незагруженном контуре граничное условие имеет вид (1.30), причем на основе (2.7) правая часть получается такой:



$$\frac{1}{D(1-\nu)} \int_0^s [(M_{y0} - iH_{xy0}) dx + i(M_{x0} + iH_{xy0}) dy] + \\ + \frac{i}{D(1-\nu)} \int_0^s N_{xy0} dt = \frac{-4d_0 R_1^3 (3+\nu)}{(1-\nu)} \sigma - \frac{32d_0 R_1^3}{(1-\nu)} (\sigma \ln \sigma - \sigma). \quad (2.18)$$

Комплексные потенциалы  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ , как и выше, представляются в виде (2.8). Подставляя функции (2.8) в условия (1.30) на  $L_1$  и (1.32) на  $L_0$  с учетом (2.17), (2.18) и применяя метод рядов, получим

$$A_1 = -\frac{32d_0 R_1^2}{(1-\nu)(\varkappa+1)} = -\frac{q_0 R_1^2}{8D} = -\frac{q_0 \pi R_1^2}{8\pi D}, \quad B_1 = 0; \quad (2.19)$$

$$a_1 = -\frac{A_1 R_0^2 (2 \ln R_0 + 1) + A_1 R_1^2 ((\varkappa-1) \ln R_1 - 1) + 4d_0 R_1^3}{(\varkappa-1) R_1^2 + 2R_0^2} + \\ + \frac{4(5-\nu)d_0 R_1^4}{(1-\nu)((\varkappa-1) R_1^2 + 2R_0^2)}, \\ b_{-1} = -\left\{ (1-\nu) [A_1 (\varkappa-1)(2 \ln R_0 + 1) - 2A_1 ((\varkappa-1) \ln R_1 - 1)] + \right. \\ \left. + 8(1+\nu)d_0 R_0 + 4(5-\nu)d_0 R_1^2 \right\} \frac{R_0^2 R_1^2}{(1-\nu)((\varkappa-1) R_1^2 + 2R_0^2)}; \quad (2.20)$$

$$b_1 = a_{-1} = a_k = b_k = a_{-k} = b_{-k} = 0 \quad (k \geq 2).$$

Тогда функции (2.8) опять примут вид (2.12) и, как выше, т. к. главный вектор усилий по контуру  $L_1$  от частного решения  $w_0(x, y)$  равен

$$P_{01} = \int_{L_1} N_{xy0} dt = -32d_0 D R_1^2 \int_0^{2\pi} \vartheta(dx + idy) = -\pi R_1^2 q_0, \quad (2.21)$$

а компоненты их главного момента равны нулю, то по формулам (1.37) для  $A_1$  и  $B_1$  получаем опять выражения (2.19), что дополнительно подтверждает правильность формул (1.37) для нахождения коэффициентов при логарифмах комплексных потенциалов (1.35). Для моментов найдем формулы, которые получатся из (2.13), если к правым частям добавить соответственно  $M_{x0}$  и  $M_{y0}$ . Результаты численных расчетов для этой задачи приведены в табл. 5, 6 (см. в этих таблицах результаты для материала М1).

4<sup>0</sup>. Пусть теперь внешний контур рассмотренного кольца, нагруженного по верхнему основанию равномерными усилиями интенсивности  $q_0$ , свободен от воздействий, а внутренний жестко заземлен.

В этом случае на внешнем незагруженном контуре кольца имеет место условие (1.30), в котором правая часть, на основе (2.7) имеет вид

$$\frac{1}{D(1-\nu)} \int_0^s \left[ (M_{y0} - iH_{xy0}) dx + i(M_{x0} + iH_{xy0}) dy \right] +$$

$$+ \frac{i}{D(1-\nu)} \int_0^s N_{xy0} dt = \frac{-4d_0 R_0^3 (3+\nu)}{(1-\nu)} \sigma - \frac{32d_0 R_0^3}{(1-\nu)} (\sigma \ln \sigma - \sigma). \quad (2.22)$$

На внутреннем жестко защемленном контуре граничное условие имеет вид (1.32), причем на основе (2.6) правая часть получается такой:

$$-\frac{\partial w_0}{\partial x} - i \frac{\partial w_0}{\partial y} = -4d_0 R_1^3 \sigma. \quad (2.23)$$

Комплексные потенциалы  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ , как и выше, представляются в виде (2.8). Подставляя функции (2.8) в условия (1.30) на  $L_0$  и (1.32) на  $L_1$  с учетом (2.22), (2.23) и применяя метод рядов получим

$$A_1 = -\frac{32d_0 R_0^2}{(1-\nu)(\alpha+1)} = -\frac{q_0 R_0^2}{8D} = -\frac{q_0 \pi R_0^2}{8\pi D}, \quad B_1 = 0; \quad (2.24)$$

$$a_1 = -\frac{A_1 R_1^2 (2 \ln R_1 + 1) + A_1 R_0^2 ((\alpha-1) \ln R_0 - 1) + 4d_0 R_0^3}{(\alpha-1)R_0^2 + 2R_1^2} -$$

$$-\frac{4(5-\nu)d_0 R_0^4}{(1-\nu)((\alpha-1)R_0^2 + 2R_1^2)},$$

$$b_{-1} = -\left\{ (1-\nu) \left[ A_1 (\alpha-1)(2 \ln R_1 + 1) - 2A_1 ((\alpha-1) \ln R_0 - 1) \right] + \right.$$

$$\left. + 8(1+\nu)d_0 R_1 + 4(5-\nu)d_0 R_0^2 \right\} \frac{R_0^2 R_1^2}{(1-\nu)((\alpha-1)R_0^2 + 2R_1^2)}; \quad (2.25)$$

$$b_1 = a_{-1} = a_k = b_k = a_{-k} = b_{-k} = 0 \quad (k \geq 2).$$

Тогда функции (2.8) опять примут вид (2.12) и, как выше, т. к. сила реакции опоры равна  $P_0 = q_0 \pi (R_0^2 - R_1^2)$ , то главный вектор усилий, приложенных к контуру  $L_1$  равен

$$P_1 + P_{01} = -P_0 + \int_{L_1} N_{xy0} dt = -q_0 \pi (R_0^2 - R_1^2) - q_0 \pi R_1^2 = -\pi R_0^2 q_0,$$

а компоненты их главного момента равны нулю, по формулам (1.37) для  $A_1$  и  $B_1$  получаем опять выражения (2.19), что дополнительно подтверждает правильность формул (1.37) для нахождения коэффициентов при логарифмах комплексных потенциалов (1.35).

Для моментов получим формулы, аналогичные предыдущей задаче.

5<sup>0</sup>. Пусть теперь внешний контур рассмотренного кольца, нагруженного по верхнему основанию равномерными усилиями интенсивности  $q_0$ ,

жестко зашцеилен, внутреннии жестко подкреилен. В этом случае на основе общих представлений (1.35) комплексные потенциалы примут вид

$$\varphi(z) = A_1 z \ln z + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \quad \psi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k, \quad (2.26)$$

где

$$A_1 = \frac{P_{01}}{8\pi D}. \quad (2.27)$$

На внешнем жестко зашцеиленном контуре кольца имеет место условие (1.32), в котором правая часть, на основе (2.6) имеет вид (2.17).

На внутреннем жестко подкреиленном контуре граничное условие имеет вид (1.32), причем на основе (2.6) правая часть получается такой:

$$-\frac{\partial w_0}{\partial x} - i \frac{\partial w_0}{\partial y} = -4d_0 R_1^3 \sigma + c_{11} + ic_{21}. \quad (2.28)$$

Подставляя функции (2.26) в условия (1.32) на  $L_0$  и на  $L_1$ , учитывая (2.17), (2.28) и применяя метод рядов, получим

$$a_1 = \frac{\gamma_{10} R_0 - \gamma_{11} R_1}{2(R_0^2 - R_1^2)}, \quad b_{-1} = \frac{(-\gamma_{10} R_1^2 + \gamma_{11} R_0 R_1) R_0}{R_0^2 - R_1^2}; \quad (2.29)$$

$$b_1 = a_{-1} = a_k = b_k = a_{-k} = b_{-k} = 0 \quad (k \geq 2),$$

где  $\gamma_{kl} = -\left[ A_1 R_l^k (\ln R_l^k + 1) + 4d_0 R_l^3 \right]$ . Для моментов получим соотношения, аналогичные предыдущей задаче. Результаты численных расчетов для этой задачи приведены в табл. 7 (см. в этой таблице результаты для материала М1).

6°. Пусть теперь внешний контур рассмотренного кольца, нагруженного по верхнему основанию равномерными усилиями интенсивности  $q_0$ , жестко подкреилен, а внутренний жестко зашцеилен.

В этом случае на основе общих представлений (1.35) комплексные потенциалы примут вид (2.26), причем в данном случае нужно принять

$$A_1 = \frac{P_1 + P_{01}}{8\pi D} = \left( -\pi(R_0^2 - R_1^2)q_0 + \int_{L_1} N_{xy0} dt \right) / 8\pi D = \frac{-R_0^2 q_0}{8D}. \quad (2.30)$$

На внешнем жестко подкреиленном контуре кольца имеет место условие (1.32), в котором правая часть, на основе (2.6) имеет вид

$$-\frac{\partial w_0}{\partial x} - i \frac{\partial w_0}{\partial y} = -4d_0 R_0^3 \sigma + c_{10} + ic_{20}. \quad (2.31)$$

На внутреннем жестко зашцеиленном контуре граничное условие имеет вид (1.32), причем на основе (2.6) правая часть имеет вид (2.23).

Подставляя функции (2.26) в условие (1.32) на  $L_0$  и на  $L_1$  с учетом

(2.31) и применяя метод для неизвестных коэффициентов  $a_k, b_k$  опять получим формулы (2.29). Для моментов получим выражения, аналогичные предыдущей задаче.

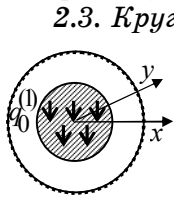


Рис. 5

2.3. *Круговое кольцо с вложенным упругим включением.* Пусть в изотропное круговое кольцо с внешним и внутренним контурами  $L_0, L_1$ , с радиусами  $R_0, R_1$  соответственно вложено включение (рис. 5) из другого материала, находящееся с кольцом в условиях идеального контакта. Плита по контуру  $L_0$  жестко закреплена. По верхнему основанию включения действует равномерно распределенное давление интенсивности  $q_0^{(1)}$ .

интенсивности  $q_0^{(1)}$ .

В данном случае частное решение дифференциального уравнения для включения можно выбрать в форме

$$w_0^{(1)}(x, y) = d_0^{(1)}(x^2 + y^2)^2 = d_0^{(1)}z^2\bar{z}^2, \quad (2.32)$$

где  $d_0^{(1)}$  — неизвестная постоянная. Подставляя функцию (2.32) в дифференциальное уравнение изгиба и учитывая, что в данном случае  $q(x, y) = q_0^{(1)}$ , получим, что  $d_0^{(1)} = q_0^{(1)}/64D^{(1)}$  и выражения моментов и сил, (1.28), (1.29). Имеем

$$\frac{\partial w_0^{(1)}}{\partial x} = 4d_0^{(1)}(x^2 + y^2)x, \quad \frac{\partial w_0^{(1)}}{\partial y} = 4d_0^{(1)}(x^2 + y^2)y; \quad (2.33)$$

$$M_{x0}^{(1)} = -4d_0^{(1)}D^{(1)}\left((3 + \nu^{(1)})x^2 + (1 + 3\nu^{(1)})y^2\right),$$

$$M_{y0}^{(1)} = -4d_0^{(1)}D^{(1)}\left((1 + 3\nu^{(1)})x^2 + (3 + \nu^{(1)})y^2\right),$$

$$H_{xy0}^{(1)} = -8d_0^{(1)}D^{(1)}(1 - \nu^{(1)})xy,$$

$$N_{x0}^{(1)} = -32d_0^{(1)}D^{(1)}x, \quad N_{y0}^{(1)} = -32d_0^{(1)}D^{(1)}y, \quad N_{xy0}^{(1)} = -32d_0^{(1)}D^{(1)}R_1^2\theta;$$

$$\int_0^s \left( M_{y0}^{(1)} - iH_{xy0}^{(1)} \right) dx + i \left( M_{x0}^{(1)} + iH_{xy0}^{(1)} \right) dy =$$

$$= -4D^{(1)}d_0^{(1)}R_1^3(3 + \nu^{(1)})(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = -4D^{(1)}d_0^{(1)}R_1^3(3 + \nu^{(1)})\sigma,$$

$$\int_0^s N_{xy0}^{(1)}(dx + idy) = -32D^{(1)}d_0^{(1)}R_1^3(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)(\vartheta + i) =$$

$$= 32D^{(1)}d_0^{(1)}R_1^3i(\sigma \ln \sigma - \sigma); \quad (2.34)$$

На внешнем жестко закрепленном контуре кольца имеет место условие (1.32), в котором правая часть равна нулю. На внутреннем контуре граничные условия имеют вид (1.34), причем на основе (2.33), (2.34) правая часть получается такой:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{D(1-\nu)} \int_0^s \left( M_{y0}^{(1)} - iH_{xy0}^{(1)} \right) dx + i \left( M_{x0}^{(1)} + iH_{xy0}^{(1)} \right) dy + \\
& + \frac{i}{D(1-\nu)} \int_0^s N_{xy0}^{(1)} (dx + idy) = \frac{4d_0^{(1)} R_1^3 \left( 3 + \nu^{(1)} \right) D^{(1)}}{(1-\nu)D} \sigma + \\
& + \frac{32d_0^{(1)} R_1^3 D^{(1)}}{(1-\nu)D} (\sigma \ln \sigma - \sigma), \\
& \frac{\partial w_0^{(1)}}{\partial x} + i \frac{\partial w_0^{(1)}}{\partial y} = 4d_0^{(1)} R_1^3 \sigma. \tag{2.35}
\end{aligned}$$

Комплексные потенциалы  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  для кольца, как и выше, представляются в виде (2.8). Что же касается комплексных потенциалов  $\varphi_1(z)$ ,  $\psi_1(z)$  для включения, они голоморфны в круге и их выберем в виде рядов Тейлора

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k, \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k, \tag{2.36}$$

Подставляя функции (2.8) и (2.36) в граничные условия (1.32) на  $L_0$  и (1.34) на  $L_1$  с учетом (2.35) и применяя метод рядов, получим

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{32d_0^{(1)} R_1^2 D^{(1)}}{(1-\nu)(\varkappa+1)D} = \frac{q_0^{(1)} R_1^2}{8D} = \frac{q_0^{(1)} R_1^2 \pi}{8\pi D}, \quad B_1 = 0; \tag{2.37} \\
a_1 &= - \left\{ (2 \ln R_0 + 1) \left( 2 + (\varkappa^{(1)} - 1) \eta^{(1)} \right) + R_0^{-1} \left[ -2R_1 (M - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - ((\varkappa - 1) \ln R_1 - 1) A_1 R_1 \right) + \right. \\
& \quad \left. + (\varkappa^{(1)} - 1) \eta^{(1)} R_1 \left( 4d_0^{(1)} R_1^3 - (2 \ln R_1 + 1) A_1 R_1 \right) \right] - \\
& \quad \left. - 2A_1 R_0 R_1^2 (2 \ln R_0 + 1) \left( 1 - \varkappa + (\varkappa^{(1)} - 1) \eta^{(1)} \right) \right\} / R_{10}, \\
b_{-1} &= \left\{ -2R_1 \left( M - ((\varkappa - 1) \ln R_1 - 1) A_1 R_1 \right) + \right. \\
& \quad \left. + (\varkappa^{(1)} - 1) \eta^{(1)} R_1 \left( 4d_0^{(1)} R_1^3 - (2 \ln R_1 + 1) A_1 R_1 \right) + \right. \\
& \quad \left. + A_1 R_1^2 (2 \ln(R_0) + 1) \left( -(\varkappa - 1) + (\varkappa^{(1)} - 1) \eta^{(1)} \right) \right\} \frac{2R_0}{R_{10}} \\
\alpha_1 &= \left\{ 2R_0 R_1^{-1} \left( -4d_0^{(1)} R_1^3 + (2 \ln R_1 + 1) A_1 R_1 \right) - (2 \ln R_0 + 1) A_1 R_0 (\varkappa + 1) - \right. \\
& \quad \left. - R_0^{-1} \left[ ((\varkappa - 1) R_1 \left( 4d_0^{(1)} R_1^3 - (2 \ln R_1 + 1) A_1 R_1 \right) - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2R_1 \left( M - \left( (\varkappa - 1) \ln R_1 - 1 \right) A_1 R_1 \right) \Big] \Big] ; \\
R_{10} &= 2R_0 \left( 2 + \left( \varkappa^{(1)} - 1 \right) \eta^{(1)} \right) - 2R_0^{-1} R_1^2 \left( 1 - \varkappa + \left( \varkappa^{(1)} - 1 \right) \eta^{(1)} \right); \\
b_1 &= a_{-1} = \beta_1 = a_k = b_k = a_{-k} = b_{-k} = \alpha_k = \beta_k = 0 \quad (k \geq 2), \tag{2.38}
\end{aligned}$$

где  $M = 4D^{(1)} d_0^{(1)} R_1^3 (v^{(1)} - 5) / D(1 - v)$ . Тогда комплексные потенциалы для кольца и включения будут такими:

$$\varphi(z) = A_1 z \ln z + a_1 z, \quad \psi(z) = \frac{b_{-1}}{z}, \quad \varphi_1(z) = \alpha_1 z, \quad \psi_1(z) = 0. \tag{2.39}$$

Заметим, что в данном случае нужно принять  $P_1 = \pi R_1^2 q_0^{(1)}$ , т. к. главный вектор приложенных к внутреннему контуру кольца усилий (действие суммарных усилий на включении) равен площади включения, умноженного на интенсивность нагрузки  $q_0^{(1)}$ , а главный момент этих усилий равен нулю. Учитывая это, по формулам (1.37) для  $A_1$  и  $B_1$  получаем опять выражения (2.37), что подтверждает правильность формул (1.37) для нахождения коэффициентов при логарифмах комплексных потенциалов (1.35).

Для моментов при  $y = 0$  получим

$$\begin{aligned}
M_x + M_y &= -4D(1 + v)(A_1 \ln x + a_1 + A_1), \\
M_y - M_x &= 2D(1 - v) \left( A_1 - \frac{b_{-1}}{x^2} \right), \quad H_{xy} = 0, \\
M_x^1 + M_y^1 &= -16D^{(1)} d_0^{(1)} (1 + v^{(1)}) x^2 - 4D^{(1)} (1 + v^{(1)}) \alpha_1, \\
M_y^1 - M_x^1 &= 8D^{(1)} d_0^{(1)} (1 - v^{(1)}) x^2, \quad H_{xy}^1 = 0. \tag{2.40}
\end{aligned}$$

При  $R_1 \rightarrow 0$  из приведенных формул следует решение задачи 2.1 для случая сосредоточенной силы в центре диска, если принять  $P_1^0 = \pi R_1^0 q_0^{(1)}$ .

Если материалы кольца и включения одинаковы, то в приведенном решении нужно считать одинаковыми соответствующие величины с индексом  $(l)$  вверху и без этого индекса. Для этого случая на рис. 6 для различных значений  $R_1/R_0$  приведены графики распределения моментов  $M_y/P_1$  в зависимости от координаты  $x/R_0$ . Штриховой линией изображен график для случая действия сосредоточенной силы  $P_1^0$  в центре круговой плиты (задача 2.1). Видно, что при  $R_1/R_0 \rightarrow 0$  значения моментов вблизи внутреннего контура растут, стремясь к их значениям для сосредоточенной силы в центре плиты. Так, в случае  $R_1/R_0 \leq 0,01$  значения моментов при  $x/R_0 \geq 0,01$  для обеих задач практически совпадают (в

пределе при  $R_1/R_0 \rightarrow 0$ , как указано выше они полностью совпадают). В общем же случае в точках  $x \geq R_1$ , т. е. находящихся от включения на малом расстоянии, значения моментов не зависят от вида загрузки (сосредоточенная сила или включение под действием давления), а зависят от главного вектора приложенных усилий (принцип Сен-Венана).

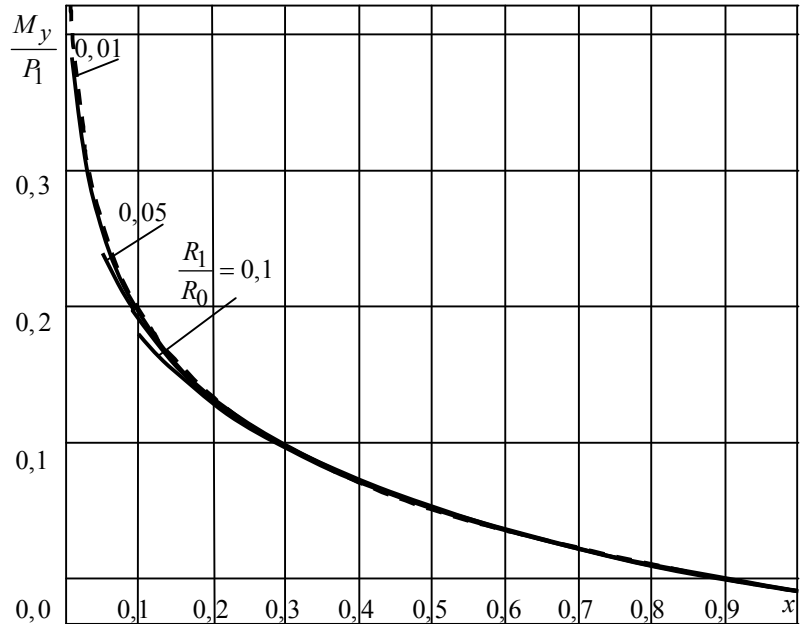


Рис. 6

2.4. Кольцевая плита с кольцевым включением. Рассмотрим составное круговое кольцо (рис. 7), состоящее из внешнего кольца с контурами  $L_0$  и  $L_1$ , радиусами  $R_0$  и  $R_1$ , и вложенного в него внутреннего кольца из другого материала с контурами  $L_1$  и  $L_2$ , радиусами  $R_1$  и  $R_2$ . Будем предполагать, что между кольцами имеет место условие идеального контакта. Внешнее кольцо по контуру  $L_0$  жестко зацементировано, по верхнему основанию включения действует равномерное давление интенсивности  $q_0^{(1)}$ , внутренний контур внутреннего кольца  $L_2$  свободен от воздействий.

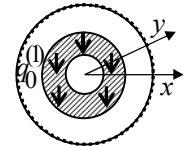


Рис. 7

Частное решение дифференциального уравнения для внутреннего кольца опять имеет вид (2.32). Поэтому для него имеют место формулы (2.34). Поэтому правые части на  $L_1$  получаются такими:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{D(1-\nu)} \int_0^s (M_{y0}^{(1)} - iH_{xy0}^{(1)}) dx + i(M_{x0}^{(1)} + iH_{xy0}^{(1)}) dy + \\ & + \frac{i}{D(1-\nu)} \int_0^s N_{xy0}^{(1)} (dx + idy) = \\ & = \frac{4d_0^{(1)} R_1^3 (3 + \nu^{(1)}) D^{(1)}}{(1-\nu) D} \sigma + \frac{32d_0^{(1)} R_1^3 D^{(1)}}{(1-\nu) D} (\ln \sigma \cdot \sigma - \sigma), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w_0^{(1)}}{\partial x} + i \frac{\partial w_0^{(1)}}{\partial y} = 4d_0^{(1)} R_1^3 \sigma, \quad (2.41)$$

Таким же образом для правой части на контуре  $L_2$  имеем

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{D^{(1)}(1-v^{(1)})} \int_0^s (M_{y0}^{(1)} - iH_{xy0}^{(1)}) dx + i(M_{x0}^{(1)} + iH_{xy0}^{(1)}) dy + \\ & -\frac{i}{D^{(1)}(1-v^{(1)})} \int_0^s N_{xy0}^{(1)} (dx + idy) = \\ & = -\frac{4d_0^{(1)} R_2^3 (3 + v^{(1)})}{(1-v^{(1)})} \sigma - \frac{32d_0^{(1)} R_2^3}{(1-v^{(1)})} (\sigma \ln \sigma - \sigma). \end{aligned}$$

Комплексные потенциалы  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  для внешнего кольца, как и выше, представляются в виде (2.8). Что же касается комплексных потенциалов  $\varphi_1(z)$ ,  $\psi_1(z)$  для внутреннего кольца, они голоморфны в кольце и их выберем в виде рядов Лорана. Окончательно функции  $\varphi_1(z)$  и  $\psi_1(z)$  для внутреннего кольца примут вид

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= (A_1^{(1)} z + B_1^{(1)}) \ln z + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k z^k, \\ \psi_1(z) &= \overline{B_1}^{(1)} \ln z + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k z^k. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Подставляя функции (2.8) и (2.42) в граничные условия на контурах  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ , и применяя метод рядов, получим, что все коэффициенты равны нулю, кроме  $a_1$ ,  $b_{-1}$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_{-1}$ , которые находятся из системы

$$\begin{aligned} 2R_0 a_1 + R_0^{-1} b_{-1} &= -A_1 R_0 (2 \ln(R_0) + 1), \\ (\varkappa - 1) R_1 a_1 - R_1^{-1} b_{-1} - \eta^{(1)} (\varkappa^{(1)} - 1) R_1 \alpha_1 - \eta^{(1)} R_1^{-1} \beta_{-1} &= \\ &= \frac{4D^{(1)} d_0^{(1)} R_1^3 (3 + v^{(1)}) - 32D^{(1)} d_0^{(1)} R_1^3}{D(1-v)} - A_1 R_1 ((\varkappa - 1) \ln(R_1) - 1) + \\ &+ A_1^1 R_1 \eta^{(1)} ((\varkappa^{(1)} - 1) \ln(R_1) - 1), \\ 2R_1 a_1 + R_1^{-1} b_{-1} - 2R_1 \alpha_1 - R_1^{-1} \beta_{-1} &= -A_1 R_1 (2 \ln(R_1) + 1) + \\ &+ A_1^1 R_1 (2 \ln(R_1) + 1) + 4d_0^{(1)} R_1^2, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (\varkappa^{(1)} - 1)R_2\alpha_1 - R_2^{-1}\beta_{-1} = & -\frac{4D^{(1)}d_0^{(1)}R_2^3(3+\nu_1)}{D^{(1)}(1-\nu^{(1)})} + \frac{32d_0^{(1)}R_2^3}{D^{(1)}(1-\nu^{(1)})} - \\ & -A_1^1R_2\left((\varkappa^{(1)} - 1)\ln(R_2) - 1\right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Сравнивая коэффициенты при  $\sigma \ln \sigma$ ,  $\ln \sigma$  для нахождения коэффициентов  $A_1^{(1)}$ ,  $B_1^{(1)}$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  получим формулы

$$\begin{aligned} A_1^{(1)} = & -\frac{32d_0^{(1)}R_2^2}{(1-\nu^{(1)})(\varkappa^{(1)}+1)} = -\frac{q_0^{(1)}R_2^2}{8D^{(1)}} = -\frac{q_0^{(1)}R_2^2\pi}{8\pi D^{(1)}}, \quad B_1^{(1)} = 0; \\ A_1 = & \frac{32d_0^{(1)}R_1^2D^{(1)}}{(1-\nu)(\varkappa+1)D} + A_1^{(1)}\frac{\eta^{(1)}(\varkappa^{(1)}+1)}{(\varkappa+1)} = \frac{q_0^{(1)}R_1^2}{8D} + \frac{D^{(1)}}{D}A_1^{(1)} = \\ = & \frac{q_0^{(1)}R_1^2}{8D} - \frac{q_0^{(1)}R_2^2}{8D} = \frac{q_0^{(1)}\pi(R_1^2 - R_2^2)}{8\pi D}, \quad B_1 = 0; \end{aligned} \quad (2.44)$$

Тогда функции (2.8) и (2.42) примут вид

$$\begin{aligned} \varphi(z) = & A_1z \ln z + a_1z, \quad \psi(z) = \frac{b_{-1}}{z}, \\ \varphi_1(z) = & A_1^{(1)}z \ln z + \alpha_1z, \quad \psi_1(z) = \frac{\beta_{-1}}{z}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Заметим, что в данном случае нужно принять  $P_1 = \pi(R_1^2 - R_2^2)q_0^{(1)}$ , т. к. главный вектор приложенных к внутреннему контуру внешнего кольца усилий (действие суммарных усилий на внутреннем кольце) равен площади внутреннего кольца, умноженной на интенсивность нагрузки  $q_0$ , а главный момент этих усилий равен нулю. Для главного вектора усилий по контуру  $L_2$  от частного решения  $w_0^{(1)}(x, y)$  получим

$$P_{01}^{(1)} = \int_{L_2} N_{xy0}^{(1)} dt = -32d_0^{(1)}D^{(1)}R_2^2 \int_0^{2\pi} \Im(dx + idy) = -\pi R_2^2 q_0^{(1)}, \quad (2.46)$$

а компоненты их главного момента равны нулю. Учитывая это, по формулам (1.37) для  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_1^{(1)}$ ,  $B_1^{(1)}$  получаем опять выражения (2.44), что подтверждает правильность формул (1.37) для нахождения коэффициентов при логарифмах комплексных потенциалов (1.35).

Для моментов при  $y = 0$  получим

$$\begin{aligned} M_x + M_y = & -4D(1+\nu)(A_1 \ln x + a_1 + A_1), \\ M_y - M_x = & 2D(1-\nu)\left(A_1 - \frac{b_{-1}}{x^2}\right), \quad H_{xy} = 0, \end{aligned}$$

$$M_x^1 + M_y^1 = -16D^{(1)}d_0^{(1)}(1 + \nu^{(1)})x^2 - 4D^{(1)}(1 + \nu^{(1)})(A_1^1 \ln x + \alpha_1 + A_1^1),$$

$$M_y^1 - M_x^1 = 8D^{(1)}d_0^{(1)}(1 - \nu^{(1)})x^2 + 2D^{(1)}(1 - \nu^{(1)})\left(A_1^1 - \frac{\beta_{-1}}{x^2}\right), \quad H_{xy}^1 = 0.$$

При  $R_1 - R_2 \rightarrow 0$  из приведенных формул следует решение задачи 2.2 для случая действия поперечной нагрузки на внутреннем контуре кругового кольца, если принять  $P_1 = q_0^{(1)}(R_1^2 - R_2^2)$ .

В табл. 2 для  $R_1 = 0,5$  и различных значений  $R_2/R_0$  приведены значения моментов  $10M_x/P_1$  и  $10M_y/P_1$  в точках внешнего кольца в зависимости от координаты  $x/R_0$ . Отдельной строкой приведены значения этих величин для случая действия поперечной нагрузки  $p_1$  по внутреннему контуру кругового кольца (задача 2.3). Видно, что при  $R_1 - R_2 \rightarrow 0$  значения моментов вблизи внутреннего контура растут, стремясь к их значениям для поперечной нагрузки по внутреннему контуру кругового кольца. Так, в случае  $R_1 - R_2/R_0 \leq 0,001$  значения моментов при  $x/R_0 \geq 0,5$  для обеих задач практически совпадают (в пределе при

Таблица 2

Моменты	$R_2$	$x/R_0$					
		0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\frac{10M_x}{P_1}$	0,1	0,0297	-0,1810	-0,3474	-0,4852	-0,6030	-0,7061
	0,3	-0,0505	-0,2425	-0,3977	-0,5283	-0,6411	-0,7407
	0,4	-0,0488	-0,2412	-0,3967	-0,5274	-0,6403	-0,7399
	0,49	-0,0071	-0,2092	-0,3705	-0,5049	-0,6205	-0,7220
	0,499	-0,0007	-0,2043	-0,3665	-0,5015	-0,6175	-0,7192
	Попер. усилия	0,0000	-0,2038	-0,3660	-0,5011	-0,6171	-0,7189
$\frac{10M_y}{P_1}$	0,1	0,4147	0,3006	0,1924	0,0923	0,0004	-0,0842
	0,3	0,4562	0,3235	0,2041	0,0968	-0,0002	-0,0884
	0,4	0,4554	0,3230	0,2038	0,0967	-0,0002	-0,0883
	0,49	0,4338	0,3111	0,1977	0,0944	0,0001	-0,0861
	0,499	0,4305	0,3093	0,1968	0,0940	0,0002	-0,0858
	Попер. усилия	0,4301	0,3091	0,1967	0,0940	0,0002	-0,0858

$R_1 - R_2 \rightarrow 0$ , как указано выше они полностью совпадают). В общем же случае в точках  $x \geq 0,5$ , т. е. находящихся от внешнего контура внутреннего кольца на малом расстоянии, значения моментов не зависят от вида загрузки (поперечная нагрузка по контуру или давление по внут-

ренному кольцу), а зависят от главного вектора приложенных усилий (принцип Сен-Венана).

**3. Решения задач для анизотропных плит с эллиптическими (круговыми) контурами.** В случае анизотропии из рассмотренных выше задач для изотропных плит аналитическое решение с использованием метода рядов может получиться только для сплошной плиты при действии сосредоточенной силы. Но даже в этом случае функции получатся в виде бесконечных рядов, т. е. во всех задачах удастся получить лишь приближенные решения, хотя можно добиваться и высокой точности результатов. Но для получения таких решений удобнее использовать дифференциальные формы граничных условий.

*3.1. Эллиптическая плита под действием сосредоточенной силы в центре.* Рассмотрим анизотропную эллиптическую плиту (рис. 8) с контуром  $L_0$  и полуосями  $a_0, b_0$ , жестко закрепленную по контуру  $L_0$  и находящуюся под действием сосредоточенной силы  $P_1^0$  в центре.

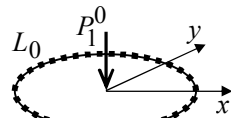


Рис. 8

В данном случае комплексные потенциалы (1.16) имеют вид

$$W_k'(z_k) = (A_{k1}^0 z_k + B_{k1}^0) \ln z_k + W'_{0k0}(z_k), \quad (3.1)$$

где  $A_{k1}^0, B_{k1}^0$  – постоянные, для которых из (1.18) и (1.19) имеем

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left( 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{k1}^0 = \left( 0, 0, 0, \frac{P_1^0}{2\pi D_{11}} \right), \quad B_{k1}^0 = 0; \quad (3.2)$$

$W'_{0k0}(z_k)$  – функции, голоморфные в эллипсах  $L_{k0}$  и представимые рядами по полиномам Фабера.

1°. Получим вначале аналитическое решение задачи методом рядов. Отобразим конформно внешность единичного круга  $|\zeta_{k0}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{k0}$

$$z_k = R_{k0} \left( \zeta_{k0} + m_{k0}/\zeta_{k0} \right), \quad (3.3)$$

где  $R_{k0} = \frac{a_0 - i\mu_k b_0}{2}$ ,  $m_{k0} = \frac{a_0 + i\mu_k b_0}{2R_{k0}}$ . Тогда для функций  $W_k'(z_k)$  получим выражения

$$W_k'(z_k) = A_{k1}^0 z_k \ln z_k + \sum_{n=0}^{\infty} a_{k0n} P_n(z_k), \quad (3.4)$$

$a_{k0n}$  – неизвестные постоянные;  $P_n(z_k)$  – полиномы Фабера, причем [11]

$$P_0 = 1, \quad P_n(z_k) = \zeta_{k0}^n + \frac{m_{k0}^n}{\zeta_{k0}^n}, \quad (3.5)$$

На контуре круга, где  $\zeta_{k0} = \sigma$ ,

$$A_{k1}^0 z_k \ln z_k = A_{k1}^0 R_{k0} \left( \sigma + \frac{m_{k0}}{\sigma} \right) \ln \sigma + A_{k1}^0 R_{k0} \ln R_{k0} \sigma + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{kn}}{\sigma^{2n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{k0n} P_n(\sigma), \quad (3.6)$$

причем

$$\alpha_{k1} = A_{k1}^0 R_{k0} m_{k0} (\ln R_{k0} + 1), \\ \alpha_{kn} = \frac{(-1)^n A_{k1}^0 R_{k0} m_{k0}^n}{n(n-1)} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Подставляя функции (3.4) в граничные условия (1.13) и применяя метод рядов, получим  $a_{k0,2n} = 0$  и систему уравнений

$$\sum_{k=1}^2 (a_{k0,2n-1} m_{k0}^{2n-1} + \bar{a}_{k0,2n-1}) = - \sum_{k=1}^2 \alpha_{kn}, \\ \sum_{k=1}^2 (\mu_k a_{k0,2n-1} m_{k0}^{2n-1} + \bar{\mu}_k \bar{a}_{k0,2n-1}) = \\ = - \sum_{k=1}^2 (\mu_k \alpha_{kn} + \delta_n^1 \bar{\mu}_k \bar{A}_{k1}^0 \bar{R}_{k0} \ln \bar{R}_{k0}). \quad (3.7)$$

Окончательно для функций (3.4) находим

$$W_k'(z_k) = A_{k1}^0 z_k \ln z_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,2n-1} P_{2n-1}(z_k). \quad (3.8)$$

Зная комплексные потенциалы, найдем изгибающие моменты (1.2). При этом для производных функций (3.8) будем иметь

$$W_k''(z_k) = A_{k1}^0 \ln z_k + A_{k1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{k0,2n-1} P'_{2n-1}(z_k), \quad (3.9)$$

причем  $P'_{2n-1}(z_k)$  получаются по рекуррентным формулам [11]

$$P_1'(z_k) = \frac{1}{R_k}, \quad P_2'(z_k) = \frac{2z_k}{R_k^2}, \\ P'_{2n+1}(z_k) = \frac{2n+1}{2n} \frac{z_k}{R_k} P'_{2n}(z_k) - \frac{2n+1}{2n-1} m_k P'_{2n-1}(z_k), \\ P'_{2n+2}(z_k) = \frac{2n+2}{2n+1} \frac{z_k}{R_k} P'_{2n+1}(z_k) - \frac{2n+2}{2n} m_k P'_{2n}(z_k) \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (3.10)$$

Были проведены численные исследования значений изгибающих мо-

Таблица 3

Материал	Постоянные материала				$\frac{a_{11}}{a_{22}}$
	$a_{11} \cdot 10^{-4}$ , МПа <sup>-1</sup>	$a_{22} \cdot 10^{-4}$ , МПа <sup>-1</sup>	$a_{12} \cdot 10^{-4}$ , МПа <sup>-1</sup>	$a_{66} \cdot 10^{-4}$ , МПа <sup>-1</sup>	
М1	72,100	72,100	-8,600	161,500	1,000
М3	10,000	2,800	-0,770	27,000	3,571
М4	2,381	0,100	-0,024	1,333	23,810

Таблица 4

$x/a_0$	Материал					
	М1	М3	М4	М1	М3	М4
	$M_x/P_1^0$			$M_y/P_1^0$		
0,0001	0,7409	0,6071	0,2963	0,8110	1,2733	1,6948
0,01	0,3306	0,2578	0,1119	0,4007	0,6133	0,7946
0,05	0,1873	0,1360	0,0478	0,2574	0,3828	0,4800
0,10	0,1255	0,0840	0,0213	0,1956	0,2838	0,3447
0,20	0,0638	0,0336	-0,0015	0,1339	0,1858	0,2104
0,30	0,0277	0,0066	-0,0103	0,0978	0,1299	0,1339
0,40	0,0020	-0,0100	-0,0126	0,0721	0,0917	0,0832
0,50	-0,0178	-0,0203	-0,0116	0,0522	0,0635	0,0485
0,60	-0,0341	-0,0262	-0,0091	0,0360	0,0418	0,0254
0,70	-0,0478	-0,0286	-0,0061	0,0223	0,0249	0,0111
0,80	-0,0597	-0,0283	-0,0034	0,0104	0,0117	0,0034
0,90	-0,0702	-0,0258	-0,0012	-0,0001	0,0015	0,0003
1,00	-0,0796	-0,0216	0,0002	-0,0095	-0,0059	0,0001

ментов для плиты из материалов: КАСТ-В изотропный (материал М1) [1], стеклопластик косугольной намотки (М3) [11], сосна (М4) [12]. Коэффициенты  $a_{ij}$  деформаций для этих материалов приведены в табл. 3.

В табл. 4 для круговой плиты радиуса  $a_0$  приведены значения моментов  $M_x/P_1^0$  и  $M_y/P_1^0$  вдоль оси  $Ox$  в точках с координатами  $x/a_0$ , а на рис. 9 изображены графики распределения  $M_y/P_1^0$ . Видно, что при  $x \rightarrow 0$  значения моментов стре-

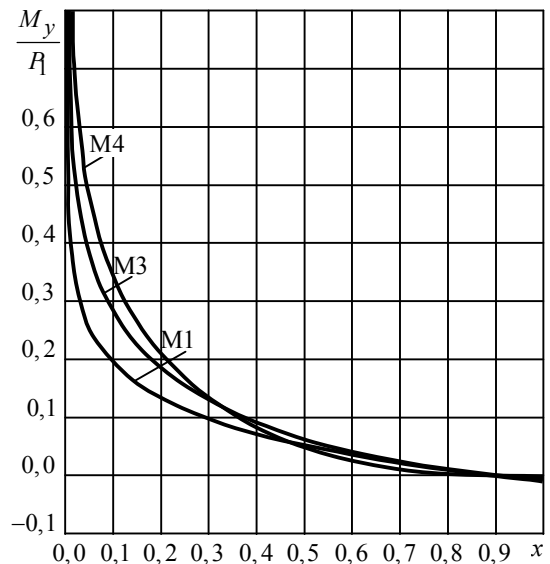


Рис. 9

мятся к бесконечности, они уже велики, когда расстояние до точки приложения сосредоточенной силы меньше 0,1. «Степень анизотропии» (отличие  $a_{11}/a_{22}$  от 1) вдали от точки приложения силы мало влияет на значения моментов, вблизи точки приложения чем больше «степень анизотропии» тем больше значения изгибающих моментов. Заметим, что значения моментов для материала М1 совпадают с полученными по точному решению в задаче 2.1.

2<sup>0</sup>. Приближенное решение для эллиптической плиты под действием сосредоточенной силы в центре. Для этого случая полиномы Фабера (3.5) удобнее представить рядами Тейлора по степеням  $z_k/R_{k0}$  [5]. Тогда для функций  $W'_k(z_k)$  и их производных получим

$$\begin{aligned} W'_k(z_k) &= A_{k1}^0 z_k \ln z_k + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{k0n} a_{k0n}, \\ W''_k(z_k) &= A_{k1}^0 \ln z_k + A_{k1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi'_{k0n} a_{k0n}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где

$$\varphi_{k0n} = \left( \frac{z_k}{R_{k0}} \right)^n, \quad \varphi'_{k0n} = \frac{n z_k^{n-1}}{R_{k0}^n}, \quad (3.12)$$

Для определения постоянных  $a_{k0n}$  удовлетворим граничным условиям (1.22) на контуре плиты, которые для этой задачи имеют вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{k0i} \delta_k W''_k(t_k) = f_{0i1}(t) \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (3.13)$$

где  $\delta_k = dz_k/ds$ ,  $f_{011} = 0$ ,  $f_{021} = 0$ . Этим условиям будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [2, 7, 15]. Для этого на контуре плиты выберем набор точек  $M_{0m}(x_{0m}, y_{0m})$  ( $m = \overline{1, M_0}$ ), в которых удовлетворим условиям (3.13), получим

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} g_{k0i} \delta_k \varphi'_{k0n}(t_{k0m}) a_{k0n} = f_{0i1}(t_{0m}) \quad (i = \overline{1, 2}). \quad (3.14)$$

где  $t_{k0m} = x_{0m} + \mu_k y_{0m}$ .

После решения системы (3.14) с использованием метода сингулярного разложения постоянные  $a_{k0n}$ , а следовательно и функции  $W'_k(z_k)$ , будут известными и по ним можно вычислять изгибающие моменты (1.2).

Были проведены численные исследования значений изгибающих моментов. При сохранении в рядах (3.11) даже первых 2–3 членов числовые значения величин оказались практически совпадающими с приведенными выше в задаче 3.1.

3.2. *Кольцевая эллиптическая плита.* Рассмотрим анизотропную кольцевую плиту, с внешним и внутренним эллиптическими контурами  $L_0$  и  $L_1$ , имеющими полуоси  $a_0, b_0$  и  $a_1, b_1$ . Будем считать, что центры эллипсов совпадают.



Рис. 10

Во всех этих задачах в правые части граничных условий входят некоторые интегралы по контурам кольца. Вычислим вначале эти интегралы.

На контурах плиты для координат точек имеем  $x = a_l \cos \vartheta$ ,  $y = b_l \sin \vartheta$ ,  $\vartheta$  – параметр параметрического задания эллипса,  $\sigma = e^{i\vartheta}$ .

В случае действия равномерно распределенных поперечных усилий интенсивности  $p_l$  по контуру  $L_l$  имеем

$$f_l(s) = \pm \int_0^s p_l ds = \pm p_l \int_0^{\vartheta} \sqrt{a_l^2 \sin^2 \vartheta + b_l^2 \cos^2 \vartheta} d\vartheta = \pm p_l b_l E(\theta, i(e_l a_l / b_l)), \quad (3.15)$$

где верхний знак соответствует внешнему контуру, нижний – контурам отверстий,  $E(\theta, i(e_l a_l / b_l))$  – неполный эллиптический интеграл второго рода,  $e_l = \sqrt{1 - (b_l / a_l)^2}$ .

В случае действия равномерно распределенного давления интенсивности  $q_0$  по верхнему основанию частное решение дифференциального уравнения изгиба будем выбирать в виде (2.5), причем для данной задачи

$$d_0 = \frac{q_0}{8[3(D_{11} + D_{22}) + 2(D_{12} + 2D_{66})]}.$$

Для рассматриваемого случая давления по верхнему основанию вычислим функции, входящие в правые части граничных условий контурах кольца. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} &= 4d_0(3x^2 + y^2), & \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} &= 4d_0(3y^2 + x^2), & \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} &= 8d_0 xy; & (3.16) \\ M_{x0} &= -4d_0 [D_{11}(3x^2 + y^2) + D_{12}(3y^2 + x^2) + 4D_{16}xy], \\ M_{y0} &= -4d_0 [D_{12}(3x^2 + y^2) + D_{22}(3y^2 + x^2) + 4D_{26}xy], \\ H_{xy0} &= -4d_0 [D_{16}(3x^2 + y^2) + D_{26}(3y^2 + x^2) + 4D_{66}xy]; \\ N_{xy0} &= 4d_0 [3 \cos^2(\vartheta) a_1^2 D_{16} + 3 \cos^2(\vartheta) a_1^2 D_{26} - 2a_1 b_1 D_{12} \vartheta + \\ &+ 3 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) a_1 b_1 D_{22} - 3a_1 b_1 D_{22} \vartheta - 4a_1 b_1 D_{66} \vartheta - 3 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) \times \\ &\times a_1 b_1 D_{11} - 3a_1 b_1 D_{11} \vartheta + 3 \cos^2(\vartheta) b_1^2 D_{16} + 3 \cos^2(\vartheta) b_1^2 D_{26}]. & (3.17) \end{aligned}$$

$1^0$ . Пусть внешний контур эллиптического кольца жестко зашпелен, по внутреннему действуют равномерно распределенные поперечные уси-

лия интенсивности  $p_1$  (рис. 10). В данном случае функции  $W'_k(z_k)$  представляются в виде

$$W'_k(z_k) = (A_{k1}z_k + B_{k1}) \ln z_k + W'_{0k0}(z_k) + W'_{0k1}(z_k), \quad (3.18)$$

где  $A_{k1}$ ,  $B_{k1}$  – постоянные;  $W'_{0k0}(z_k)$  – функции, голоморфные внутри контуров  $L_{k0}$ , соответствующих  $L_0$  при аффинных преобразованиях (1.9);  $W'_{0k1}(z_k)$  – функции, голоморфны вне контуров  $L_{k1}$ , соответствующих  $L_1$ .

Для главного вектора усилий, приложенных к  $L_1$ , получим

$$P_1 = p_1 a_1 \int_0^{2\pi} ds = p_1 a_1 \int_0^{2\pi} \sqrt{a_1^2 \sin^2 \vartheta + b_1^2 \cos^2 \vartheta} d\vartheta = 4a_1 p_1 E(\pi/2, e_1), \quad (3.19)$$

где  $E(\pi/2, e_1)$  – полный эллиптический интеграл 2-го рода. Главный же момент указанных усилий относительно начала координат в силу имеющейся силовой и геометрической симметрии равен нулю. Учитывая сказанное, по формулам (1.18) и (1.19) получаем

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left( 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{k1} = \left( 0, 0, 0, \frac{P_1}{2\pi D_{11}} \right), \quad B_{k1} = 0. \quad (3.20)$$

Функции  $W'_{0k0}(z_k)$ , голоморфные внутри контуров  $L_{k0}$ , опять представляются рядами по полиномам Фабера из (3.11). Для нахождения же общего вида функций  $W'_{0k1}(z_k)$  отображим внешности единичных кругов  $|\zeta_{k1}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{k1}$ :

$$z_k = R_{k1} (\zeta_{k1} + m_{k1}/\zeta_{k1}), \quad (3.21)$$

где  $R_{k1} = (a_1 - i\mu_k b_1)/2$ ,  $m_{k1} = (a_1 + i\mu_k b_1)/2R_{k1}$ . В конформно отображенных областях функции  $W'_{0k1}(z_k)$  будут голоморфными вне кругов  $|\zeta_{k1}| \geq 1$  и их можно разложить в ряды Лорана по отрицательным степеням  $\zeta_{k1}$ . Следовательно, для функций  $W'_{0k1}(z_k)$  получим

$$W'_k(z_k) = A_{k1} z_k \ln z_k + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{k0n} a_{k0n} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{k1n} a_{k1n}, \quad (3.22)$$

где  $\varphi_{k1n} = 1/\zeta_{k1}^n$ . Окончательно для производных функций имеем

$$W''_k(z_k) = A_{k1} \ln z_k + A_{k1} + \sum_{l=0}^1 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi'_{kln} a_{kln}, \quad (3.23)$$

в которых

$$\varphi'_{k0n} = \frac{n z_k^{n-1}}{R_{k1}^n}, \quad \varphi'_{k1n} = -\frac{n}{\zeta_{k1}^{n-1} R_{k1} (\zeta_{k1}^2 - m_{k1})}. \quad (3.24)$$



Для определения постоянных  $a_{kln}$  удовлетворим граничным условиям (1.22) с учетом (3.15) на контурах плиты, которые для этой задачи имеют вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{kli} \delta_k W_k''(t_k) = f_{li}(t) \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (3.25)$$

где

$$\begin{aligned} g_{k01} &= 1, & g_{k02} &= \mu_k, & g_{k11} &= p_k/\mu_k, & g_{k12} &= q_k; \\ f_{011} &= 0, & f_{021} &= 0, \\ f_{111} &= -f_1 \frac{dx}{ds} - c_1 \frac{dx}{ds}, & f_{121} &= f_1 \frac{dy}{ds} + c_1 \frac{dy}{ds}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Условиям (3.25) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [2, 7, 15]. Выбрав на контурах плиты набор точек  $M_{lm}(x_{lm}, y_{lm})$  ( $m = \overline{1, M_l}$ ) и удовлетворив этим условиям, получим

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=0}^1 \sum_{n=1}^{\infty} g_{kli} \delta_k \Phi'_{kln}(t_{klm}) a_{kln} = f_{li}(t_{lm}) - \\ - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{kli} \delta_k (A_{k1} \ln(t_{klm}) + A_{k1}) \quad (i = \overline{1, 2}), \end{aligned} \quad (3.27)$$

где  $t_{klm} = x_{lm} + \mu_k y_{lm}$ . Дополним систему (3.27) уравнением однозначности прогиба [3] для контура  $L_1$ :

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i a_{k11} R_{k1} = 0. \quad (3.28)$$

После решения системы (3.28), (3.27) с использованием метода сингулярного разложения постоянные  $a_{kln}$ , а следовательно и функции  $W'_k(z_k)$ , будут известными и по ним можно вычислять моменты (1.2).

Если контур отверстия круговой, то  $e_1 = 0$ ,  $E(\pi/2, e_1) = E(\pi/2, 0) = \pi/2$ ,  $E(\theta, 0) = \theta$ .

На рис. 11 для кругового кольца из материала МЗ с радиусами  $a_0$ ,  $a_1$  приведены графики распределения моментов  $M_y/P_1$  для различных значений  $a_1/a_0$  вдоль оси  $Ox$  в точках с координатами  $x/a_0$ . Штриховой линией изображен график для случая действия сосредоточенной силы  $P_1^0$  в центре круговой плиты (задача 2.1). Видно, что при  $a_1/a_0 \rightarrow 0$  значения моментов вблизи внутреннего контура растут, стремясь к их значениям для сосредоточенной силы в центре плиты. Так, в случае  $a_1/a_0 \leq 0,01$  значения моментов в точках при  $x/a_0 \geq 0,03$  для обеих задач практически совпадают (в пределе при  $a_1/a_0 \rightarrow 0$ , они полностью совпа-

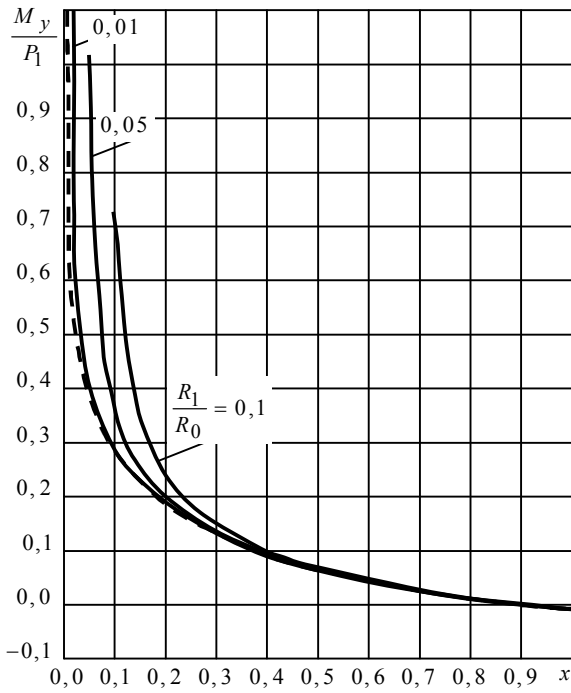


Рис.11

дают). В общем же случае в точках  $x \geq 3a_1$ , т. е. находящихся от контура отверстия на расстояниях больше диаметра отверстия, значения моментов не зависят от вида загрузки (сосредоточенная сила или поперечная нагрузка по контуру), а зависят от главного вектора приложенных усилий, что подтверждает принцип Сен-Венана. Заметим, что значения моментов для материала М1 совпадают с полученными по точному решению в задаче 2.2, пункт 1<sup>0</sup>, для анизотропного кольца результаты согласуются с данными работы [8].

2<sup>0</sup>. Пусть теперь внешний контур кругового кольца находится под действием равномерно распределенных поперечных усилий интенсивности  $p_0$ ,

внутренний контур жестко заземлен. Комплексные потенциалы  $W'_k(z_k)$  и их производные для кольца, как и выше, представляются в виде (3.22), (3.23), причем сила реакции опоры  $P_0$  для этого случая равна действию суммарных усилий на внешнем эллиптическом контуре, т. е. интенсивности нагрузки  $p_0$ , умноженной на длину эллипса. Учитывая сказанное, для главного вектора приложенных к внутреннему контуру кольца усилий получим

$$P_1 = -P_0 = -p_0 a_0 \int_0^{2\pi} ds = -p_0 a_0 \int_0^{2\pi} \sqrt{a_0^2 \sin^2 \vartheta + b_0^2 \cos^2 \vartheta} d\vartheta = -4a_0 p_0 E(\pi/2, e_0),$$

а главный момент этих усилий равен нулю.

Для данного случая в граничных условиях (3.25) нужно принять

$$g_{k01} = \frac{P_k}{\mu_k}, \quad g_{k02} = q_k, \quad g_{k11} = 1, \quad g_{k12} = \mu_k,$$

$$f_{011} = -f_0 \frac{dx}{ds}, \quad f_{021} = f_0 \frac{dy}{ds}, \quad f_{111} = 0, \quad f_{121} = 0.$$

Удовлетворив условиям (3.25) обобщенным методом наименьших квадратов, получим систему для определения постоянных  $a_{kln}$ , а после ее решения можем находить изгибающие моменты в точках плиты.

Были проведены численные исследования распределения изгибающих моментов в плите из различных анизотропных материалов. Значения моментов для плиты из материала М1 оказались равными полученным по точному решению в задаче 2.2, пункт 2<sup>о</sup>, для анизотропного кольца результаты согласуются с данными работы [14].

3<sup>о</sup>. Рассмотрим теперь случай, когда эллиптическая плита по контуру  $L_0$  жестко закреплена, внутренний контур  $L_1$  свободен от воздействий, а по верхнему основанию плиты действует равномерно распределенное давление интенсивности  $q_0$  (рис. 12). Комплексные потенциалы  $W'_k(z_k)$  и их производные для кольца, как и выше, представляются в виде (3.22), (3.23), причем в данном случае главный вектор и главный момент усилий по внутреннему контуру равны нулю и в системе (1.18) нужно принять

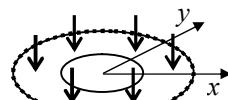


Рис. 12

$$P_1 = 0, \quad P_{01} = - \int_0^{2\pi} (N_y^0 dx - N_x^0 dy) = -\pi q_0 a_1 b_1. \quad (3.29)$$

Для этого случая в граничных условиях (3.25) нужно принять

$$\begin{aligned} g_{k01} &= 1, \quad g_{k02} = \mu_k, \quad g_{k11} = \frac{p_k}{\mu_k}, \quad g_{k12} = q_k, \\ f_{011} &= - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds}, \quad f_{021} = - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{dy}{ds}, \\ f_{111} &= \frac{dJ_{01}(s)}{ds} - c_1 \frac{dx}{ds}, \quad f_{121} = - \frac{dJ_{02}(s)}{ds} + c_1 \frac{dy}{ds}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

Удовлетворив условиям (3.25) опять обобщенным методом наименьших квадратов, получим систему для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$ , а после ее решения можем находить изгибающие моменты в точках плиты.

Были проведены численные исследования распределения изгибающих моментов для кругового кольца из различных материалов.

Таблица 5

Материал	$\vartheta$ , рад	$a_1/a_0$		
		0,1	0,5	0,9
М1	0	-0,124	-0,078	-0,005
М3	0	-0,063	-0,048	-0,005
	$\pi/12$	-0,064	-0,049	-0,005
	$\pi/6$	-0,074	-0,055	-0,004
	$\pi/4$	-0,105	-0,073	-0,005
	$\pi/3$	-0,156	-0,098	-0,005
	$5\pi/12$	-0,205	-0,118	-0,005
	$\pi/2$	-0,225	-0,126	-0,005

Для материалов М1 и М3 в табл. 5 и табл. 6 приведены значения моментов  $M_n$  и  $M_s$  соответственно в зависимости от центрального угла  $\vartheta$  и отношения  $a_1/a_0$  с точностью до  $q_0$ . При этом на контуре отверстия  $M_n = 0$ , поэтому в табл. 5 даны их значения только для контура  $L_0$ . Для изотропного материала М1 значения моментов не зависят от угла  $\vartheta$  и поэтому

они в таблицах приведены только для  $\vartheta = 0$ . Видно, что с увеличением отношения  $a_1/a_0$  (с уменьшением ширины кольца) значения изгибающих моментов  $M_s$  по модулю уменьшаются. Заметим, что значения

Таблица 6

Материал	$\theta$ , рад	$a_1/a_0$					
		0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9
		$L_0$			$L_1$		
М1	0	-0,015	-0,009	-0,001	0,125	0,026	0,000
М3	0	-0,017	-0,013	-0,001	0,292	0,077	0,001
	$\pi/12$	-0,028	-0,021	-0,002	0,253	0,060	0,001
	$\pi/6$	-0,048	-0,036	-0,003	0,161	0,028	0,000
	$\pi/4$	-0,059	-0,041	-0,003	0,095	0,013	0,000
	$\pi/3$	-0,048	-0,030	-0,002	0,082	0,010	0,000
	$5\pi/12$	-0,028	-0,016	-0,001	0,085	0,008	0,000
	$\pi/2$	-0,017	-0,010	0,000	0,088	0,007	0,000

моментов для плиты из материала М1 оказались равными полученным по точному решению в задаче 2.2, пункт 3<sup>0</sup>. В статье [7], где не учтено логарифмическое слагаемое в комплексных потенциалах, значения моментов значительно отличаются от приведенных.

4<sup>0</sup>. Пусть теперь внешний контур, нагруженного нормальными усилиями по верхнему основанию, кольца свободен от воздействий, а внутренний жестко защемлен.

В рассматриваемом случае сила реакции опоры равна  $P_0 = \pi(a_0b_0 - a_1b_1)q_0$ , а главный момент усилий приложенных к плите в силу симметрии равен нулю. Тогда комплексные потенциалы  $W'_k(z_k)$  и их производные для кольца, представляются в виде (3.22), (3.23), причем для определения коэффициентов при логарифмах в системе (1.18) нужно принять

$$\begin{aligned} P_1 + P_{01} &= -P_0 + \int_{L_1} N_{xy0} dt = \\ &= -q_0\pi(a_0b_0 - a_1b_1) - q_0\pi a_1b_1 = -\pi a_0b_0q_0. \end{aligned}$$

Для определения постоянных  $a_{kl n}$  опять удовлетворим граничным условиям (3.25), в которых нужно принять

$$\begin{aligned} g_{k01} &= \frac{p_k}{\mu_k}, \quad g_{k02} = q_k, \quad g_{k11} = 1, \quad g_{k12} = \mu_k, \\ f_{011} &= \frac{dJ_{01}(s)}{ds}, \quad f_{021} = -\frac{dJ_{02}(s)}{ds}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{111} &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds}, \\
f_{121} &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{dy}{ds}.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Удовлетворив условиям (3.25) обобщенным методом наименьших квадратов, получим систему для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$ , а после ее решения можем находить изгибающие моменты в точках плиты.

5°. Пусть теперь внешний контур, нагруженного нормальными усилиями по верхнему основанию, кольца жестко защемлен, а внутренний жестко подкреплен.

Комплексные потенциалы  $W'_k(z_k)$  и их производные для кольца, как и выше, представляются в виде (3.22), (3.23), причем в данном случае в системе (1.18) нужно принять

$$P_1 = 0, \quad P_{01} = -\int_0^{2\pi} (N_y^0 dx - N_x^0 dy) = -\pi q_0 a_1 b_1.$$

Главный же момент усилий, приложенных к  $L_1$ , относительно начала координат в силу имеющейся силовой и геометрической симметрии равен нулю.

Для определения постоянных  $a_{kln}$  опять удовлетворим граничным условиям (3.25), в которых нужно принять

$$\begin{aligned}
g_{kl1} &= 1, \quad g_{kl2} = \mu_k, \\
f_{111} &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds}, \quad f_{121} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{dy}{ds}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Удовлетворив условиям (3.25) обобщенным методом наименьших квадратов, получим систему для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$ , а после ее решения можем находить изгибающие моменты в точках плиты.

Были проведены численные исследования распределения изгибающих моментов для кругового кольца из различных материалов. Для материалов М1 и М3 в табл. 7 приведены значения моментов  $M_n$  и  $M_s$  соответственно в зависимости от центрального угла  $\vartheta$  и отношения  $a_1/a_0$  с точностью до  $q_0$ . Видно, что с увеличением отношения  $a_1/a_0$  (с уменьшением ширины кольца) значения изгибающих моментов  $M_s$  по модулю уменьшаются. Значения моментов для плиты из материала М1 оказались равными полученным по точному решению в задаче 2.2, пункт 5°.

6°. Пусть внешний контур, нагруженного нормальными усилиями по основанию, кольца жестко подкреплен, внутренний жестко защемлен.

В рассматриваемом случае сила реакции опоры равна  $P_0 = \pi(a_0 b_0 - a_1 b_1) q_0$ , а главный момент усилий приложенных к плите в

Таблица 7

Моменты	Материал	$\theta$ , рад	$a_1 / a_0$					
			0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9
			$L_0$			$L_1$		
$M_n$	M1	0	-0,121	-0,060	-0,003	0,115	0,041	0,002
	M3	0	-0,063	-0,037	-0,002	0,040	0,009	0,000
		$\pi / 12$	-0,063	-0,036	-0,002	0,050	0,012	0,000
		$\pi / 6$	-0,072	-0,038	-0,002	0,077	0,023	0,001
		$\pi / 4$	-0,101	-0,049	-0,003	0,113	0,038	0,001
		$\pi / 3$	-0,150	-0,071	-0,004	0,149	0,056	0,002
		$5\pi / 12$	-0,199	-0,095	-0,005	0,176	0,071	0,003
		$\pi / 2$	-0,221	-0,107	-0,005	0,185	0,077	0,004
$M_s$	M1	0	-0,014	-0,007	0,000	0,014	0,005	0,000
	M3	0	-0,017	-0,010	-0,001	0,011	0,002	0,000
		$\pi / 12$	-0,027	-0,015	-0,001	0,022	0,005	0,000
		$\pi / 6$	-0,047	-0,025	-0,001	0,050	0,015	0,000
		$\pi / 4$	-0,057	-0,028	-0,002	0,063	0,021	0,001
		$\pi / 3$	-0,046	-0,022	-0,001	0,046	0,017	0,001
		$5\pi / 12$	-0,027	-0,013	-0,001	0,024	0,010	0,000
		$\pi / 2$	-0,017	-0,008	0,000	0,014	0,006	0,000

силу симметрии равен нулю. Тогда комплексные потенциалы  $W'_k(z_k)$  и их производные для кольца, как и выше, представляются в виде (3.22), (3.23), причем в данном случае в системе (1.18) нужно принять

$$P_1 + P_{01} = -P_0 + \int_{L_1} N_{xy0} dt = -q_0 \pi (a_0 b_0 - a_1 b_1) - q_0 \pi a_1 b_1 = -\pi a_0 b_0 q_0.$$

Для определения постоянных  $a_{kln}$  опять удовлетворим граничным условиям (3.25), в которых нужно принять

$$g_{kl1} = 1, \quad g_{kl2} = \mu_k, \\ f_{l11} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds}, \quad f_{l21} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{dy}{ds}. \quad (3.33)$$

Удовлетворив условиям (3.25) обобщенным методом наименьших квадратов, получим систему для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$ , а после ее решения можем находить изгибающие моменты в точках плиты.

Заметим, что значения моментов для материала M1 совпадают с полученными по точному решению в задаче 2.2, пункт 6<sup>0</sup>.

3.3. Кольцевая плита с вложенным упругим включением. Пусть в анизотропное кольцо с внешним и внутренним эллиптическими конту-

рами  $L_0$ ,  $L_1$ , имеющими полуоси  $a_0$ ,  $b_0$  и  $a_1$ ,  $b_1$  соответственно вложено включение (рис. 13) из другого материала, находящееся с кольцом в условиях идеального контакта. Плита по контуру  $L_0$  жестко заделана. По верхнему основанию включения действует равномерно распределенное давление интенсивности  $q_0^{(1)}$ .

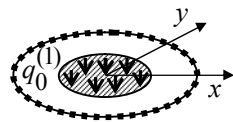


Рис. 13

В данном случае частное решение дифференциального уравнения для включения выберем в виде (2.32), причем для этой задачи

$$d_0^{(1)} = \frac{q_0^{(1)}}{8 \left[ 3 \left( D_{11}^{(1)} + D_{22}^{(1)} \right) + 2 \left( D_{12}^{(1)} + 2D_{66}^{(1)} \right) \right]}. \quad (3.34)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_0^{(1)}}{\partial x} &= 4d_0^{(1)}x(x^2 + y^2), & \frac{\partial w_0^{(1)}}{\partial y} &= 4d_0^{(1)}y(x^2 + y^2); \\ M_{x0}^{(1)} &= -4d_0^{(1)} \left[ D_{11}^{(1)}(3x^2 + y^2) + D_{12}^{(1)}(3y^2 + x^2) + 4D_{16}^{(1)}xy \right], \\ M_{y0}^{(1)} &= -4d_0^{(1)} \left[ D_{12}^{(1)}(3x^2 + y^2) + D_{22}^{(1)}(3y^2 + x^2) + 4D_{26}^{(1)}xy \right], \\ H_{xy0}^{(1)} &= -4d_0^{(1)} \left[ D_{16}^{(1)}(3x^2 + y^2) + D_{26}^{(1)}(3y^2 + x^2) + 4D_{66}^{(1)}xy \right]; \\ N_{xy0}^{(1)} &= 4d_0^{(1)} \left[ 3 \cos^2(\vartheta) a_1^2 D_{16}^{(1)} + 3 \cos^2(\vartheta) a_1^2 D_{26}^{(1)} - 2a_1 b_1 D_{12}^{(1)} \vartheta + \right. \\ &\quad + 3 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) a_1 b_1 D_{22}^{(1)} - 3a_1 b_1 D_{22}^{(1)} \vartheta - 4a_1 b_1 D_{66}^{(1)} \vartheta - \\ &\quad - 3 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) a_1 b_1 D_{11}^{(1)} - 3a_1 b_1 D_{11}^{(1)} \vartheta + \\ &\quad \left. + 3 \cos^2(\vartheta) b_1^2 D_{16}^{(1)} + 3 \cos^2(\vartheta) b_1^2 D_{26}^{(1)} \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Комплексные потенциалы  $W_k'(z_k)$  и их производные для кольца, как и выше, представляются в виде (3.22), (3.23), причем в данном случае нужно принять  $P_1 = \pi a_1 b_1 q_0^{(1)}$ , т. к. главный вектор приложенных к внутреннему контуру кольца усилий (действие суммарных усилий на включении) равен площади включения, умноженной на интенсивность нагрузки  $q_0^{(1)}$ , а главный момент этих усилий равен нулю. Комплексные потенциалы  $W_k^{(1)}(z_k^{(1)})$  для упругих включений в рассматриваемом случае будут равны функциям  $W_{0k}^{(1)}(z_k^{(1)})$ , голоморфным в областях  $S_k^{(1)}$ , ограниченных контурами  $L_k^{(1)}$ , получаемыми из  $L_l$  аффинными преобразованиями  $z_k^{(1)} = x + \mu_k^{(1)}y$ . Последние функции можно представить в ряды по полиномам Фабера для  $S_k^{(1)}$ , а, следовательно, в степенные ряды. Тогда для

функций  $W_k^{(1)}(z_k^{(1)})$  и их производных будем иметь

$$W_k^{(1)}(z_k^{(1)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{kn}^{(1)} a_{kn}^{(1)}, \quad W_k^{(1)'}(z_k^{(1)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{kn}^{\prime(1)} a_{kn}^{(1)}. \quad (3.37)$$

Здесь

$$\Psi_{kn}^{(1)}(z_k^{(1)}) = \left( \frac{z_k^{(1)}}{R_k^{(1)}} \right)^n, \quad \Psi_{kn}^{\prime(1)}(z_k^{(1)}) = n z_k^{(1)n-1} / \left( R_k^{(1)} \right)^n; \quad (3.38)$$

$$R_k^{(1)} = \frac{a_1 - \mu_k^{(1)} i b_1}{2}. \quad (3.39)$$

Для определения постоянных  $a_{kln}$ ,  $a_{kn}^{(1)}$  удовлетворим граничным условиям (1.22), (1.23) на контурах плиты, которые для этой задачи имеют вид (3.13) для заземленного контура и

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left[ g_{k1i} W_k''(t_k) \delta_k - g_{k1i}^{(1)} W_k^{(1)''}(t_k^{(1)}) \delta_k^{(1)} \right] = f_{1i1}(t) \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (3.40)$$

где

$$\begin{aligned} f_{111} &= \frac{\partial^2 w_0^{(1)}}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 w_0^{(1)}}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds}, \quad f_{121} = \frac{\partial^2 w_0^{(1)}}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 w_0^{(1)}}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds}, \\ f_{131} &= -c_1 \frac{dx}{ds} - J_{011}^{(1)}, \quad f_{141} = c_1 \frac{dy}{ds} + J_{021}^{(1)}; \\ J_{011}^{(1)} &= \left( N_{xy0}^{(1)} - H_{xy0}^{(1)} \right) \frac{dx}{ds} + M_{x0}^{(1)} \frac{dy}{ds}, \\ J_{021}^{(1)} &= -M_{y0}^{(1)} \frac{dx}{ds} + \left( N_{xy0}^{(1)} + H_{xy0}^{(1)} \right) \frac{dy}{ds}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

для контакта кольца с упругим включением  $L_1$ .

Выберем на внешнем контуре и на контурах включений систему точек  $M_{lm}(x_{lm}, y_{lm})$  ( $m = \overline{1, M_l}; l = \overline{0, 1}$ ), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, получим

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=0}^1 \sum_{n=1}^{\infty} g_{k0i} \delta_k \varphi'_{kln}(t_{k0m}) a_{kln} &= f_{0i1}(t_{0m}) - \\ &- 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{k0i} \delta_k \left( A_{k1} \ln(t_{k0m}) + A_{k1} \right) \quad (i = \overline{1, 2}; m = \overline{1, M_l}; l = 0), \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left[ \sum_{l=0}^1 \sum_{n=1}^{\infty} g_{k1i} \delta_k \varphi'_{kln}(t_{k1m}) a_{kln} - \sum_{n=1}^{\infty} g_{k1i}^{(1)} \delta_k^{(1)} \Psi_{kn}^{\prime(1)}(t_{km}^{(1)}) a_{kn}^{(1)} \right] &= f_{1i1}(t_{1m}) - \end{aligned}$$



$$-2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{k1i} \delta_k [A_{k1} \ln(t_{k1m}) + A_{k1}] \quad (i=1, 4; m=1, M_l; l=1), \quad (3.42)$$

где  $t_{km}^{(1)} = x_{lm} + \mu_k^{(1)} y_{lm}$ .

После решения системы (3.42) с использованием метода сингулярного разложения постоянные  $a_{kln}$ ,  $a_{kn}^{(1)}$  а следовательно и функции  $W'_k(z_k)$ ,  $W_k^{(1)}(z_k^{(1)})$  будут известными и по ним можно вычислять изгибающие моменты (1.2).

На рис. 14 для кругового кольца из материала МЗ с радиусами  $a_0$ ,

$a_1$  для случая когда материалы кольца и включения совпадают приведены графики распределения моментов  $M_y/P_1$  для различных значений  $a_1/a_0$  вдоль оси  $Ox$  в точках с координатами  $x/a_0$ . Штриховой линией изображен график для случая действия сосредоточенной силы  $P_1^0$  в центре круговой плиты (задача 2.1). Видно, что при  $a_1/a_0 \rightarrow 0$  значения моментов вблизи внутреннего контура растут, стремясь к их значениям для сосредоточенной силы в центре плиты. Так, в случае  $a_1/a_0 \leq 0,01$  значения моментов

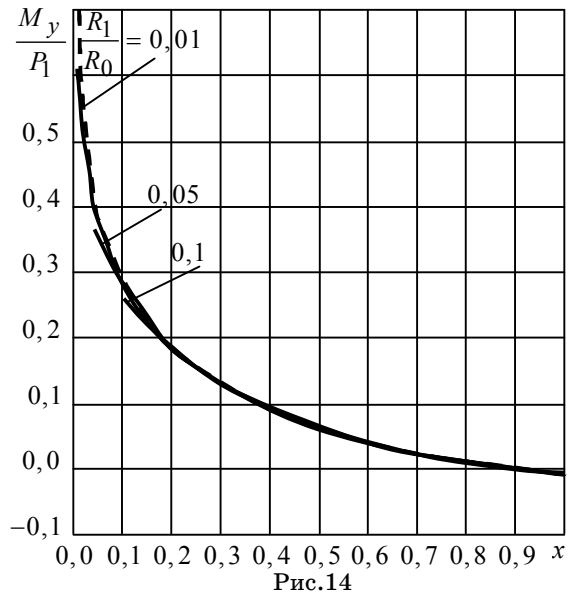


Рис.14

в точках при  $x/a_0 \geq 0,01$  для обеих задач практически совпадают (в пределе при  $a_1/a_0 \rightarrow 0$ , они полностью совпадают). В общем же случае в точках  $x \geq a_1$ , т. е. находящихся от включения на малом расстоянии, значения моментов не зависят от вида загрузки (сосредоточенная сила или включение под действием давления), а зависят от главного вектора приложенных усилий (принцип Сен-Венана).

Заметим, что значения моментов для материала М1 совпадают с полученными по точному решению в задаче 2.3.

**РЕЗЮМЕ.** Методом комплексних потенціалів вирішені задачі про вигин плит для деяких канонічних областей. Дані точні аналітичні вирішення задач для кругової ізотропної плити під дією зосередженої сили, кругового кільця під дією розподілених поперечних зусиль на контурах або нормальних зусиль по верхній основі, кільця з завантаженням по основі нормальними зусиллями пружним включенням, кільця з завантаженням нормальними зусиллями внутрішнім кільцем. Дано наближені чисельно-аналітичні вирішення аналогічних задач для анізотропних плит.

**Ключові слова:** багатозв'язна плита, комплексні потенціали, загальне уявлення

функцій, кругове кільце, рівномірний тиск по основі.

**SUMMARY.** The problem of bending plates for some canonical regions was solved by the method of complex potentials. The accurate analytic solutions for circular isotropic plate under the action of a force, circular ring under the action of distributed transverse forces on the contours or normal forces on the upper base, ring with loaded at the base by normal force elastic inclusion, ring with loaded by normal force inner ring were given. Approximate numerical and analytical solutions of similar problems for anisotropic plates were given.

**Keywords:** multiply connected plate, complex potentials, general representation of functions, circular ring, uniform pressure at the base.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Амбарцумян С. А., Дургарьян С. М. Некоторые нестационарные температурные задачи для ортотропной пластинки // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1962. – №3. – С. 120–127.
2. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
3. Калоеров С. А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит // Теорет. и прикладная механика. – 2012. – Вып. 4 (50). – С. 113–132.
4. Калоеров С. А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных изотропных плит // Теорет. и прикладная механика. – 2013. – Вып. 7 (53). – С. 83–100.
5. Калоеров С. А., Авдюшина Е. В., Мироненко А. Б. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2013. – 440 с.
6. Калоеров С. А., Горянская Е. С. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений. – К.: А. С. К., 1998. – С. 10–26. (Механика композитов: В 12 т., т. 7).
7. Калоеров С. А., Занько А. И. Результаты новых исследований по изгибу многосвязной анизотропной плиты // Вісн. Донец. ун-та. Сер. А. Природ. науки. – 2014. – Вып. 1. – С. 48–56.
8. Копнина В. И., Меглинский В. В. Исследование напряженно-деформированного состояния эллиптической анизотропной плиты с отверстием // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. – 1971. – Вып. 6. – С. 67–73.
9. Космодамианский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. – К., Донецк: Вища шк., 1976. – 200 с.
10. Космодамианский А. С., Иванов Г. М. Изгиб тонких многосвязных плит. – Донецк, 1973. – 256 с.
11. Космодамианский А. С., Калоеров С. А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках. – К., Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.
12. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
13. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит // Прикладная математика и механика. – 1938. – Т. 2, вып. 2. – С. 181–209.
14. Меглинский В. В. Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. – 1967. – Вып. 3. – С. 97–127.
15. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1969. – 280 с.

*Донецкий национальный университет*

*Поступила 02.12.2014*

УДК 539.3:534.1

*И. А. МОИСЕЕНКО*, канд. физ.-мат. наук**СПЕКТРЫ НОРМАЛЬНЫХ УПРУГИХ ВОЛН КРУЧЕНИЯ  
В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ  
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРАХ**

*Получена и исследована аналитическая форма дисперсионных соотношений, описывающих спектры осесимметричных нормальных волн кручения в протяженных экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах со свободной или жестко закрепленной граничной поверхностью. Охарактеризовано влияние параметров неоднородности и механической анизотропии на топологию дисперсионных спектров и кинематические характеристики бегущих нормальных волн варьируемой длины из низших мод спектров.*

*Ключевые слова:* трансверсально-изотропный цилиндрический волновод, экспоненциальная радиальная неоднородность, свободная граничная поверхность, жестко закрепленная граничная поверхность, осесимметричные нормальные волны кручения, дисперсионные спектры, кинематические характеристики.

В исследованиях закономерностей процессов распространения нормальных упругих волн в трансверсально-изотропных цилиндрах кругового сечения, представленных и обобщенных в работах [1, 8–11, 13], используется модель однородного по физико-механическим свойствам материала. Достаточно широко исследованы также волновые процессы для кусочно-однородных в радиальном направлении многослойных трансверсально-изотропных цилиндров [12]. Вместе с тем, как с позиций углубления фундаментальных исследований, так и с учетом характера изменений свойств материалов конструкций при применении различных технологий обработки, актуальными являются проблемы анализа спектров и свойств нормальных упругих волн вдоль непрерывно-неоднородных по радиальной координате анизотропных цилиндров, в том числе трансверсально-изотропных цилиндров с экспоненциальной радиальной неоднородностью физико-механических свойств [2–7]. В этой связи, целью настоящей работы является получение и анализ дисперсионных зависимостей для одного из классов волновых процессов в протяженных экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах, а именно процессов распространения осесимметричных волн кручения в цилиндрах со свободной или жестко закрепленной граничной поверхностью.

**Постановка задачи.** Рассматривается бесконечно протяженный трансверсально-изотропный упругий цилиндр кругового сечения радиуса  $R$  со свободной либо закрепленной боковой поверхностью, который в цилиндрических координатах  $Or\theta z$ , полученных из исходных путем отнесением координатных переменных линейной размерности к нормирующему параметру  $R_* = R$ , имеет единичный приведенный безразмерный радиус и занимает в пространстве область

$V = \{r \in [0, 1]; 0 \leq \theta \leq 2\pi, z \in (-\infty, \infty)\}$ . Динамическое деформирование цилиндра описывается системой дифференциальных уравнений движения

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} - \rho R_*^2 / c_* \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{\theta r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{r\theta}}{r} - \rho R_*^2 / c_* \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{zr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \rho R_*^2 / c_* \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u_r, u_\theta, u_z$  – компоненты отнесенного к нормирующему параметру  $R_*$  безразмерного вектора динамических упругих перемещений;  $\sigma_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = r, \theta, z$ ) – компоненты отнесенного к нормирующему параметру  $c_*$  тензора динамических напряжений;  $\rho$  – плотность материала цилиндра;  $t$  – время. В исследуемом случае осесимметричных динамических деформаций кручения, характеризуемом полем волновых перемещений  $u_\theta(r, z, t)$ ,  $u_r = u_z = 0$  и полем динамических напряжений  $\sigma_{r\theta}(r, z, t)$ ,  $\sigma_{\theta z}(r, z, t)$ ,  $\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = 0$  следствием из системы (1) является уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{\theta r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{r\theta}}{r} - \rho R_*^2 / c_* \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

а рассматриваемые граничные условия имеют альтернативный вид

$$(u_\theta)_{r=1} = 0, \quad (3)$$

либо

$$(\sigma_{r\theta})_{r=1} = 0. \quad (4)$$

Полагается, что трансверсально-изотропный материал цилиндра является экспоненциально-неоднородным в радиальном направлении по всем своим физико-механическим свойствам, а его плотность  $\rho$  и отнесенные к  $c_*$  нормированные модули упругости  $c_{ij}$  описываются представлениями

$$\rho = \rho^{(0)} \exp(\lambda r), \quad c_{ij} = c_{ij}^{(0)} \exp(\lambda r), \quad (5)$$

в которых  $\lambda$  – действительнoзначный приведенный параметр неоднородности. При этом для характеристик тензора динамических напряжений  $\sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta z}$  в поле волн кручения зависимости от  $u_\theta$  имеют вид

$$\sigma_{r\theta} = c_{66}^{(0)} \exp(\lambda r) \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad c_{66}^{(0)} = (c_{11}^{(0)} - c_{12}^{(0)}) / 2;$$

$$\sigma_{\theta z} = c_{44}^{(0)} \exp(\lambda r) \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z}. \quad (6)$$

**Получение аналитической формы дисперсионных соотношений.** Для комплексной функции волновых упругих перемещений  $u_{\theta}$  в исследуемых нормальных волнах с круговой частотой  $\omega$  и нормированным волновым числом  $k$  вводится представление

$$u_{\theta}(r, z, t) = \tilde{u}_{\theta}(r) \cdot \exp(-i(\omega t - kz)), \quad (7)$$

с учетом которого и соотношений (5) уравнение (2) приводится к виду

$$\left( \zeta^2 \partial_{\zeta}^2 + \zeta \partial_{\zeta} + \zeta^2 - 1 + \kappa (\zeta^2 \partial_{\zeta} - \zeta) \right) \tilde{u}_{\theta}(\zeta) = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta &= \delta \cdot r, & \kappa &= \lambda / \delta, & \delta &= \sqrt{\Omega^2 - \eta k^2}, \\ \eta &= c_{44}^{(0)} / c_{66}^{(0)}, & \Omega^2 &= \rho^{(0)} \omega^2 R_*^2 / c_{66}^{(0)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Решение дифференциального уравнения (8) отыскивается в форме степенного ряда

$$\tilde{u}_{\theta}(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot \zeta^{m+\alpha} \quad (a_0 \neq 0), \quad (10)$$

подстановка которого в (8) приводит к рекуррентной системе соотношений

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, & a_1 &= 0, \\ a_m &= -\left( a_{m-2} + \kappa(m-1)a_{m-1} \right) \cdot (m^2 + 2m)^{-1} \quad (m = 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (11)$$

Использование построенного таким образом решения (10) при формулировке краевых условий вида (3) и (4) на закрепленной либо свободной от напряжений боковой поверхности цилиндра соответственно позволяет записать искомые дисперсионные соотношения: для закрепленного по границе волновода в форме

$$F_c(\delta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(\kappa) \cdot \delta^{m+1} = 0, \quad \Omega = \sqrt{\delta^2 + \eta k^2}; \quad (12)$$

для волновода со свободной от напряжений границей в форме

$$F_f(\delta) = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot a_m(\kappa) \cdot \delta^{m+1} = 0, \quad \Omega = \sqrt{\delta^2 + \eta k^2}. \quad (13)$$

Все ряды в представлениях  $\tilde{u}_{\theta}(\zeta)$ ,  $F_c(\delta)$ ,  $F_f(\delta)$  являются абсолютно и равномерно сходящимися.

**Результаты численных исследований.** Структура полученных дисперсионных уравнений (12), (13) позволяет использовать для исследования

факторов влияния параметра неоднородности  $\lambda$  и показателя степени механической анизотропии материала цилиндра  $\eta$  результаты анализа параметрических зависимостей  $\delta(\lambda)$  и соотношения  $\Omega(k, \lambda, \eta) = \sqrt{\delta(\lambda)^2 + \eta k^2}$ . Следует заметить, что значения  $\delta(\lambda)$  по физическому смыслу являются критическими частотами для мод бегущих нормальных волн рассматриваемого типа.

Результаты расчетов зависимостей  $\delta(\lambda)$  в диапазонах  $\lambda \in [-2.0, 2.0]$  для цилиндров с закрепленной и свободной от напряжений граничной поверхностью представлены соответственно на рис. 1 и рис. 2.

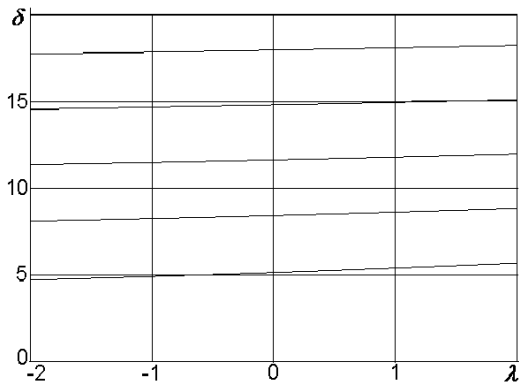


Рис.1.

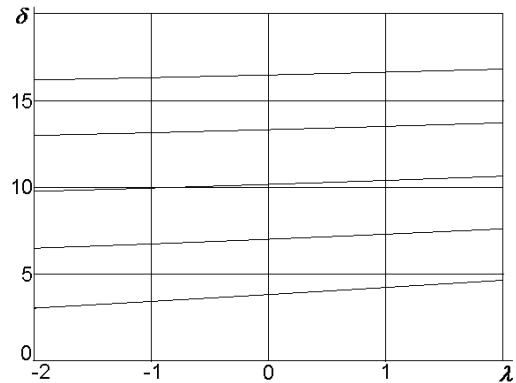


Рис.2.

Их анализ показывает, в рассмотренном интервале изменения параметра неоднородности его влияние является достаточно мягким и снижается по мере роста номера моды бегущих волн. Так, к примеру, рост значений  $\delta(2.0)$  по отношению к  $\delta(-2.0)$  составляет в случае первой моды спектра для свободного цилиндра 21.1%, в случае второй моды – 9.51%, а в случае пятой моды – лишь 2.72%. Для цилиндра с закрепленной граничной поверхностью это влияние оказывается более существенным, и вышеуказанные изменения составляют 52.55% для первой моды спектра, 17.18% для второй моды и 3.89% для пятой моды.

Различия в топологических картинах распределений пяти нижних действительных ветвей спектров для закрепленных цилиндров с идентичными параметрами неоднородности  $\lambda = 2.0$  и различающимися показателями механической анизотропии  $\eta = 1/3$  и  $\eta = 3$  соответственно характеризуют рис. 3 и рис. 4.

Следует также указать, что специфика рассмотренного варианта закона неоднородности физико-механических свойств материала волновода влечет за собой неизменность параметров скоростей объемных сдвиговых волн при любых значениях показателя  $\lambda$ , а, следовательно, и независимость асимптотического поведения мод нормальных волн кручения в высокочастотном коротковолновом диапазоне от этого показателя.

Наконец, рис. 5, рис. 6 соответственно характеризуют различия в формах упругих колебательных перемещений  $u_0$  в волнах первой и пятой

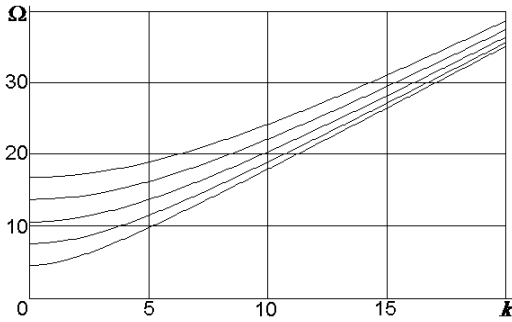


Рис.3.

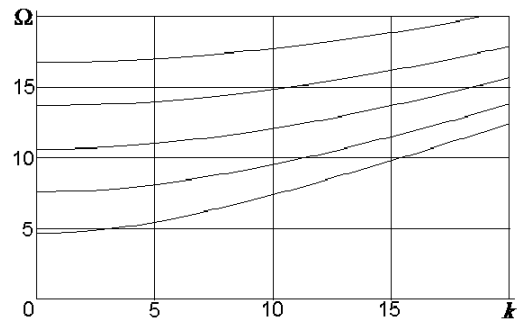


Рис.4.

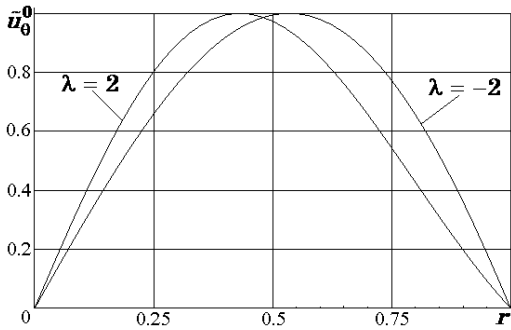


Рис.5

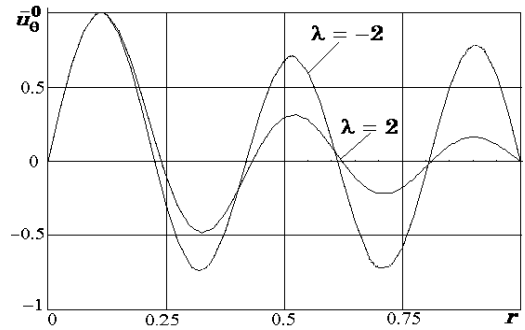


Рис.6

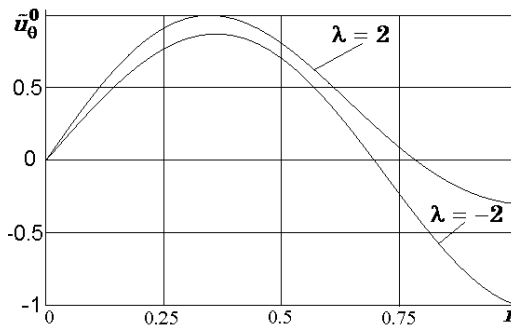


Рис. 7

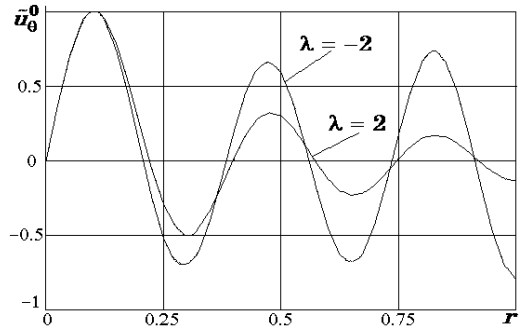


Рис. 8

мод спектров для цилиндров с альтернативными показателями неоднородности  $\lambda = -2.0$  и  $\lambda = 2.0$ , имеющих закрепленные боковые поверхности, а рис. 7 и рис. 8 – различия в формах упругих колебательных для цилиндров со свободными боковыми поверхностями при аналогичных параметрах. Анализируемые формы описываются радиальными распределениями нормированных величин  $\tilde{u}_\theta^0(r) = u_\theta(r, 0, 0) / \max_{r \in [0, 1]}(u_\theta(r, 0, 0))$  и имеют постоянный вид для всех нормальных волн рассматриваемого типа, принадлежащих каждой конкретной моде.

Представленные распределения позволяют оценить степень смещения зон повышенных уровней волновых колебаний к боковой поверхности цилиндров с уменьшающимися в радиальном направлении показате-

лями жесткости и плотности ( $\lambda = -2.0$ ), и альтернативные эффекты локализации повышенных уровней колебательных перемещений в окрестности центра сечения для цилиндров с увеличивающимися в радиальном направлении физико-механическими характеристиками ( $\lambda = 2.0$ ). В этой связи можно указать на рост количественной меры указанных эффектов с увеличением номера моды рассматриваемых волн.

**РЕЗЮМЕ.** Отримано і досліджено аналітичну форму дисперсійних співвідношень, що описують спектри осесиметричних нормальних хвиль крутіння у видовжених експоненціально-неоднорідних трансверсально-ізотропних циліндрах з вільною або жорстко закріпленою граничною поверхнею. Охарактеризовано вплив параметрів неоднорідності і механічної анізотропії на топологію дисперсійних спектрів і кінематичні характеристики біжучих нормальних хвиль варійованої довжини з нижчих мод спектрів.

**Ключові слова:** трансверсально-ізотропний циліндричний хвилевід, експоненціальна радіальна неоднорідність, вільна гранична поверхня, жорстко закріплена гранична поверхня, осесиметричні нормальні хвилі крутіння, дисперсійні спектри, кінематичні характеристики.

**Summary.** The analytical form of the dispersion relations for describing the spectrum of axisymmetric normal waves of torsion in long exponentially inhomogeneous transversely isotropic cylinders with free or rigidly fixed boundary surfaces are obtained and investigated. Characteristics of the influence of the parameters of heterogeneity and mechanical anisotropy on the topology of the dispersion spectrums and kinematic characteristics of traveling normal waves varying lengths from lower modes of spectra are presented.

**Keywords.** Transversely isotropic cylindrical waveguide, exponential radial inhomogeneous, free boundary surface, rigidly fixed boundary surface, axisymmetric normal waves of torsion, dispersion spectrums, kinematic characteristics.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:

1. *Berliner M.J., Solecki R.* Wave propagation in fluid-loaded transversely isotropic cylinders. Part 1. Analytical formulation // *J. Acoustical Society America.*– 1996.– Vol. 99.– P. 1841–1847.
2. *Birman V., Byrd L.W.* Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures // *Appl. Mech. Rev.*– 2007.– Vol. 60, № 5.– P. 195–216.
3. *Fang X.-Q., Liu J.-X., Wang X.-H., Zhang L.-L.* Dynamic stress around two holes in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves // *Phil. Mag. Lett.*– 2010.– Vol. 90.– P. 361–380.
4. *Fang X.-Q., Liu J.-X., Wang X.-H.* Dynamic stress from a cylindrical inclusion buried in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves // *Compos. Sci. Technol.*– 2009.– Vol. 69.– P. 1115–1123.
5. *Fang X.-Q., Liu J.-X., Zhang L.-L., Kong Y.-P.* Dynamic stress from a subsurface cylindrical inclusion in a functionally graded material layer under anti-plane shear waves // *Mater. Struct.*– 2011.– Vol. 44.– P. 67–75.
6. *Fang X.-Q.* Multiple scattering of electro-elastic waves from a buried cavity in a functionally graded piezoelectric material layer // *Int. J. Solids Struct.*– 2008.– Vol. 45.– P. 5716–5729.
7. *FGM: Design, processing and applications* / Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin et al.– Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.– 434 p.
8. *Frazer W.B.* Separable equations for a cylindrical anisotropic elastic waveguide // *Journal of Sound and Vibration.*– 1980.– Vol. 72.– P. 151–157.
9. *Honarvar F., Enjilela E., Sinclair A.N.* Guided ultrasonic waves in composite cylinders // *Mech. Compos. Mater.*– 2007.– Vol. 43, № 3.– P. 277–288.
10. *Honarvar F., Enjilela E., Sinclair A.N., Mirnezami S.A.* Wave propagation in transversely isotropic cylinders // *Int. J. Solids Struct.*– 2007.– Vol. 44.– P. 5236–5246.
11. *Mirsky I.* Wave propagation in transversely isotropic circular cylinders part 1: Theory



// Journal of Acoustical Society of America.– 1964.– Vol. 36.– P. 2106–2122.

12. *Nayfeh A.H., Abdelrahman W.G., Nagy P.B.* Analyses of axisymmetric waves in layered piezoelectric rods and their composites // J. Acoustical Society America.– 2000.– Vol. 108, № 4.– P. 1496–1504.

13. *Wei J.P., Su X.Y.* Wave propagation in a piezoelectric rod of 6mm symmetry // Int. J. Solids Struct.– 2005.– Vol. 42.– P. 3644–3654.

14. *Winkel V., Oliviera J.E.B., Dai J.D., Jen C.K.* Acoustic wave propagation in piezoelectric fibers of hexagonal crystal symmetry // IEEE Trans. Ultrasonic, Ferroelectric requency Control.– 1995.– Vol. 42.– P. 949–955.

15. *Yang Y.-H., Wu L.-Z., Fang X.-Q.* Non-destructive detection of a circular cavity in a finite functionally graded material layer using anti-plane shear waves // J. Nondestructive Eval.– 2010.– Vol. 29.– P. 233–240.

*Донецкий национальный университет*

*Поступила 03.12.2014*