

УДК 539.3

А. Р. ГАЧКЕВИЧ, д-р физ.-мат. наук, Р. С. МУСИЙ, д-р физ.-мат. наук,
Н. Б. МЕЛЬНИК, И. И. ШИМЧАК, канд. физ.-мат. наук

МЕТОДИКА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ КОНТАКТНОГО СОЕДИНЕНИЯ БИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИН ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Конструктивными элементами многих технических устройств являются биметаллические пластины, которые, в частности, используются для изготовления контактных переходников, несущих и токонесущих элементов специальных устройств преобразования электромагнитной энергии [1, 2]. При эксплуатации таких устройств под действием нестационарного электромагнитного поля (ЭМП) возникает проблема сохранения механических свойств контактного соединения, которые определяются величиной интенсивности напряжений σ_i на спае при различных временных параметрах нестационарного электромагнитного воздействия.

Известны расчетные схемы определения термонапряженного состояния биметаллических пластин при индукционном нагреве установившимся ЭМП [3, 4] и однородных электропроводных тел при воздействии импульсных ЭМП [5–7]. Однако недостаточно изучено термонапряженное состояние биметаллических тел при воздействии импульсных ЭМП.

В настоящей статье приводятся математическая постановка динамической задачи термомеханики для биметаллической пластины при воздействии электромагнитного импульса (ЭМИ) и результаты численного исследования интенсивности напряжений в плоскости контакта составных слоев при различных параметрах ЭМИ.

Постановка и расчетная схема задачи. Рассматривается биметаллическая пластина (бесконечная по координатам x , y и постоянной толщины по координате z), отнесенная к прямоугольной декартовой системе координат $(Oxyz)$. Плоскость Oxy является плоскостью контакта составных $p = \overline{1; 2}$ слоев, а ось Oz перпендикулярна к основаниям пластины $z = -h_1$ и $z = h_2$, где h_1 и h_2 – толщины составных слоев. Материалы слоев однородны, изотропны и неферромагнитны, а их физико-механические характеристики постоянны.

Биметаллическая пластина находится под воздействием нестационарного ЭМП, которое обуславливает возникновение в ней джоулевых тепловыделений $Q^{(p)}$ и пондеромоторных сил $\vec{F}^{(p)}$. Эти факторы создают в составных слоях пластины нестационарные температурное и механическое поля. Соответствующие им интенсивности напряжений могут достигать

критических значений, превышающих предел прочности σ_M контактного соединения слоев.

Исходные соотношения для количественного описания параметров, характеризующих электромагнитные, тепловые и механические процессы можно сформулировать в три этапа.

На первом этапе записываются уравнения для определения параметров ЭМП и выражения для джоулева тепла $Q^{(p)}$ и пондеромоторных сил $\vec{F}^{(p)}$, как функций этих параметров. Если в качестве ключевой функции выбран вектор напряженности магнитного поля \vec{H} , то удельные плотности $Q^{(p)}$ и $\vec{F}^{(p)}$ определяются по формулам [3–5]

$$Q^{(p)} = \frac{1}{\sigma_p} \left(\text{rot } \vec{H}^{(p)} \right)^2, \quad \vec{F}^{(p)} = \mu_p \cdot \text{rot } \vec{F}^{(p)} \times \vec{F}^{(p)}. \quad (1)$$

Здесь σ_p – коэффициент электропроводности, μ_p – магнитная проницаемость материалов p -го ($p = 1, 2$) слоя.

На втором этапе при уже найденном распределении джоулева тепла $Q^{(p)}$ определяется температура $T^{(p)}$ в пластине (с учетом условий теплообмена на основаниях пластины и условий идеального теплового контакта между слоями).

На третьем этапе при известных выражениях температуры $T^{(p)}$ и пондеромоторной силы $\vec{F}^{(p)}$ из уравнений динамической термоупругости определяется термонапряженное состояние. При этом отличные от нуля компоненты $\sigma_{jj}^{(p)}$, ($j = x, y, z$) тензора напряжений $\hat{\sigma}^{(p)}$ (соответствующие двум физическим факторам – джоулевому теплу $Q^{(p)}$ и пондеромоторной силе $\vec{F}^{(p)}$, обуславливающих влияние импульсного ЭМП на термоупругое состояние тела) находятся в виде суммы двух составляющих $\sigma_{jj}^{(p)} = \sigma_{jj}^{(p)Q} + \sigma_{jj}^{(p)F}$. Далее определяется интенсивность напряжений [8]:

$$\sigma_i^{(p)} = \sqrt{(3I_2(\hat{\sigma}^{(p)}) - I_1^2(\hat{\sigma}^{(p)})/2)}, \quad (2)$$

где $I_j(\hat{\sigma}^{(p)})$, ($j = 1, 2$) – j -й инвариант тензора напряжений.

Свойства контактного соединения сохраняются, если максимальное значение интенсивностей напряжений $\sigma_i^{(p)}$ не превышает предел прочности σ_M контактного соединения [8, 9], то есть $\max \sigma_i^{(p)} < \sigma_M$.

Формулирование краевых задач. Нестационарное ЭМП задается значениями отличной от нуля касательной компоненты $H_y^{(p)}(z, t)$ вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}^{(p)} = \{0; H_y^{(p)}(z, t); 0\}$ на основаниях пластины

$$H_y^{(1)}(-h_1, t) = H_y^-(t), \quad H_y^{(2)}(h_2, t) = H_y^+(t), \quad (3)$$

где t – время. В плоскости $z = 0$ слая составных слоев имеют место условия идеального электромагнитного контакта [3, 4]:

$$H_y^{(1)}(0, t) = H_y^{(2)}(0, t), \quad \frac{\partial H_y^{(1)}(0, t)}{\partial z} = k_\sigma \frac{\partial H_y^{(2)}(0, t)}{\partial z}, \quad (4)$$

в которых $k_\sigma = \sigma_1 / \sigma_2$. Функция $H_y^{(p)}(z, t)$ в каждом p -м слое удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial H_y^{(p)}}{\partial t} - \frac{1}{\sigma_p \mu_p} \frac{\partial^2 H_y^{(p)}}{\partial z^2} = 0, \quad (5)$$

при граничных условиях (3), (4) и начальных условиях

$$H_y^{(p)}(z, 0) = 0. \quad (6)$$

Температура $T^{(p)}(z, t)$ в p -м слое при известном распределении джоулевых тепловыделений $Q^{(p)}(z, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T^{(p)}}{\partial z^2} - \frac{1}{\chi_p} \frac{\partial T^{(p)}}{\partial z} = -\frac{Q^{(p)}}{\lambda_p} \quad (7)$$

при граничных условиях теплоизоляции оснований пластины

$$\frac{\partial T^{(1)}(-h_1, t)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T^{(2)}(h_2, t)}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

условиях идеального контакта слоев в плоскости $z = 0$ слая [3, 4]

$$T^{(1)}(0, t) = T^{(2)}(0, t), \quad \frac{\partial T^{(1)}(0, t)}{\partial z} = k_\lambda \frac{\partial T^{(2)}(0, t)}{\partial z} \quad (9)$$

и нулевым начальном условии

$$T^{(p)}(z, 0) = 0. \quad (10)$$

Здесь χ_p, λ_p – коэффициенты температуро- и теплопроводности мате-

риалов составных слоев, $k_\lambda = \lambda_2 / \lambda_1$.

Исходная система уравнений динамической задачи термоупругости для биметаллической пластины, записанная относительно компонент $\sigma_{jj}^{(p)}$

($j = x, y, z$) тензора напряжений $\bar{\sigma}^{(p)}$, имеет вид

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}^{(p)}}{\partial z^2} - \frac{1}{c_{1p}^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}^{(p)}}{\partial t^2} = \alpha_p \rho_p \frac{1 + \nu_p}{1 - \nu_p} \frac{\partial^2 T^{(p)}}{\partial t^2} - \frac{\partial F_z^{(p)}}{\partial z},$$

$$\sigma_{xx}^{(p)} = \sigma_{yy}^{(p)} = \frac{\nu_p}{1 - \nu_p} \sigma_{zz}^{(p)} - \frac{\alpha_p E_p}{1 - 2\nu_p} T^{(p)}. \quad (11)$$

Здесь $c_{1p} = \sqrt{(1 - \nu_p)E_p / (\rho_p(1 + \nu_p)(1 - 2\nu_p))}$ – скорость упругой волны расширения материала p -го слоя; α_p , ν_p , E_p – коэффициенты линейного теплового расширения, Пуассона и модуль Юнга p -го слоя; $k_p = \rho_2 / \rho_1$.

Компонента напряжений $\sigma_{zz}^{(p)}$ определяется из 1-го уравнения системы (11) при свободных от внешних усилий основаниях пластины

$$\sigma_{zz}^{(1)}(-h_1, t) = 0, \quad \sigma_{zz}^{(2)}(h_2, t) = 0 \quad (12)$$

и условиях идеального механического контакта [3, 4]

$$\sigma_{zz}^{(1)}(0, t) = \sigma_{zz}^{(2)}(0, t),$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}^{(1)}(0, t)}{\partial z} + F_z^{(1)}(0, t) = k_p \left[\frac{\partial \sigma_{zz}^{(2)}(0, t)}{\partial z} + F_z^{(2)}(0, t) \right] \quad (13)$$

в плоскости $z = 0$ сая. При этом начальными условиями для $\sigma_{zz}^{(p)}(z, t)$ будут

$$\sigma_{zz}^{(p)}(z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}^{(p)}(z, 0)}{\partial t} = -\frac{\alpha_p E_p}{1 - 2\nu_p} \frac{\partial T^{(p)}(z, 0)}{\partial t}. \quad (14)$$

Согласно принятой расчетной схеме задачи составляющие напряжений $\sigma_{zz}^{(p)Q}$, обусловленные джоулевым теплом, и составляющие $\sigma_{zz}^{(p)F}$, обусловленные пондеромоторной силой определяются из систем уравнений

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}^{(p)Q}}{\partial z^2} - \frac{1}{c_{1p}^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}^{(p)Q}}{\partial t^2} = \alpha_p \rho_p \frac{1 + \nu_p}{1 - \nu_p} \frac{\partial^2 T^{(p)}}{\partial t^2},$$

$$\sigma_{xx}^{(p)Q} = \sigma_{yy}^{(p)Q} = \frac{\nu_p}{1-\nu_p} \sigma_{zz}^{(p)Q} - \frac{\alpha_p E_p}{1-2\nu_p} T^{(p)}; \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}^{(p)F}}{\partial z^2} - \frac{1}{c_{1p}^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}^{(p)F}}{\partial t^2} = - \frac{\partial F_z^{(p)F}}{\partial z},$$

$$\sigma_{xx}^{(p)F} = \sigma_{yy}^{(p)F} = \frac{\nu_p}{1-\nu_p} \sigma_{zz}^{(p)F}. \quad (16)$$

При этом граничные условия для $\sigma_{ij}^{(p)Q}$ записываются в виде [3, 4]

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(1)Q}(-h_1, t) = 0, \quad \sigma_{zz}^{(2)Q}(h_2, t) = 0, \\ \sigma_{zz}^{(1)Q}(0, t) = \sigma_{zz}^{(2)Q}(0, t), \quad \frac{\partial \sigma_{zz}^{(1)Q}(0, t)}{\partial z} = k_p \frac{\partial \sigma_{zz}^{(2)Q}(0, t)}{\partial z}, \end{aligned} \quad (17)$$

а для $\sigma_{ij}^{(p)F}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(1)F}(-h_1, t) = 0, \quad \sigma_{yy}^{(2)F}(h_2, t) = 0, \quad \sigma_{zz}^{(1)F}(0, t) = \sigma_{zz}^{(2)F}(0, t), \\ \frac{\partial \sigma_{zz}^{(1)F}(0, t)}{\partial z} + F_z^{(1)}(0, t) = k_p \left[\frac{\partial \sigma_{zz}^{(2)F}(0, t)}{\partial z} + F_z^{(2)}(0, t) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Функции $\sigma_{ij}^{(p)Q}$ определяются при начальных условиях

$$\sigma_{zz}^{(p)Q}(z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}^{(p)Q}}{\partial t} = - \frac{\alpha_p E_p}{1-2\nu_p} \frac{\partial T^{(p)}(z, 0)}{\partial t}, \quad (19)$$

а функции $\sigma_{zz}^{(p)F}$ – при начальных условиях

$$\sigma_{zz}^{(p)F}(z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}^{(p)F}}{\partial t} = 0. \quad (20)$$

При найденных компонентах $\sigma_{zz}^{(p)}$ и $\sigma_{xx}^{(p)} = \sigma_{yy}^{(p)}$ напряжений интенсивность суммарных напряжений $\sigma_i^{(p)}$ в p -м слое согласно (2) определяется выражением

$$\sigma_i^{(p)} = \left| \sigma_{xx}^{(p)} - \sigma_{zz}^{(p)} \right|. \quad (21)$$

Методика решения краевых задач. Для построения решений сформулированных краевых задач, описывающих ЭМП, температуру и динамические составляющие тензора напряжений, используется полиномиальная

аппроксимация ключевых функций $\Phi^{(p)}(z, t) = \left\{ H_y^{(p)}(z, t), T^{(p)}(z, t), \sigma_{zz}^{(p)}(z, t) \right\}$ по толщине z в каждом p -м составном слое пластины, т.е. представления функций $\Phi^{(p)}(z, t)$ в виде

$$\Phi^{(p)}(z, t) = \sum_{i=0}^2 a_i^{(p)} \Phi^{(p)}(t) z^i. \quad (22)$$

Коэффициенты $a_i^{(p)} \Phi^{(p)}(t)$ аппроксимирующих полиномов (22) выражаются через интегральные $\Phi_s(t)$ характеристики

$$\Phi_s(t) = \int_{-h_1}^0 \Phi^{(1)}(z, t) z^{s-1} dz + \int_0^{h_2} \Phi^{(2)}(z, t) z^{s-1} dz \quad (s=1, 2) \quad (23)$$

ключевых функций (с использованием заданных краевых условий (3), (8), (13), (18) на основаниях $z = -h_1$ и $z = h_2$ пластины и условий идеального электромагнитного (4), теплового (9) и механического (13) контактов).

В результате получим выражения напряженности $H_y^{(p)}(z, t)$ магнитного поля, температуры $T^{(p)}(z, t)$, составляющих $\sigma_{zz}^{(p)Q}(z, t)$, составляющих $\sigma_{zz}^{(p)F}(z, t)$ нормальных напряжений $\sigma_{zz}^{(p)}(z, t)$ в виде

$$H_y^{(p)}(z, t) = \sum_{i=0}^2 \left[a_{i1}^{(p)} H_{y1}(t) + a_{i2}^{(p)} H_{y2}(t) + a_{i3}^{(p)} H_y^-(t) + a_{i4}^{(p)} H_y^+(t) \right] z^i; \quad (24)$$

$$T^{(p)}(z, t) = \sum_{k=0}^2 \left[b_{k1}^{(p)} T_1(t) + a_{k2}^{(p)} T_2(t) \right] z^k; \quad (25)$$

$$\sigma_{zz}^{(p)Q}(z, t) = \sum_{n=0}^2 \left[c_{n1}^{(p)Q} \sigma_{zz1}^Q(t) + c_{n2}^{(p)Q} \sigma_{zz2}^Q(t) \right] z^n; \quad (26)$$

$$\sigma_{zz}^{(p)F}(z, t) = \sum_{n=0}^2 \left[c_{n1}^{(p)F} \sigma_{zz1}^F(t) + c_{n2}^{(p)F} \sigma_{zz2}^F(t) \right] z^n. \quad (27)$$

Для определения интегральных характеристик $\Phi_s(t)$ ключевых функций $\Phi^{(p)}(z, t)$ исходные уравнения (5), (7), (15) и (16) интегрируем по толщинной координате z в соответствии с формулой (23). Получаем системы обычных дифференциальных уравнений на интегральные характеристики

$H_{ys}(t)$, функций $H_y^{(p)}(z, t)$, температуры $T^{(p)}(z, t)$, составляющих напряжений $\sigma_{zz}^{(p)Q}(z, t)$ и $\sigma_{zz}^{(p)F}(z, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{y1}(t)}{\partial t} - d_1 H_{y1}(t) - d_2 H_{y2}(t) &= d_3 H_y^-(t) + d_4 H_y^+(t), \\ \frac{\partial H_{y2}(t)}{\partial t} - d_5 H_{y1}(t) - d_6 H_{y2}(t) &= d_7 H_y^-(t) + d_8 H_y^+(t); \end{aligned} \quad (28)$$

$$\frac{dT_1}{dt} + d_1^T T_1 + d_2^T T_2 = W_1^Q(z, t), \quad \frac{dT_2}{dt} + d_3^T T_1 + d_4^T T_2 = W_2^Q(z, t); \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma_{zz1}^Q}{dz^2} - d_1^Q \sigma_{zz1}^Q - d_2^Q \sigma_{zz2}^Q &= W_1^T(t), \\ \frac{d^2 \sigma_{zz2}^Q}{dz^2} - d_4^Q \sigma_{zz1}^Q - d_5^Q \sigma_{zz2}^Q &= W_2^T(t); \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma_{zz1}^F}{dz^2} - d_1^F \sigma_{zz1}^F - d_2^F \sigma_{zz2}^F &= W_1^F(t), \\ \frac{d^2 \sigma_{zz2}^F}{dz^2} - d_4^F \sigma_{zz1}^F - d_5^F \sigma_{zz2}^F &= W_2^F(t). \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\alpha_1}{\sigma_1 \mu_1} + \frac{\alpha_5}{\sigma_2 \mu_2}, \quad d_2 = \frac{\alpha_2}{\sigma_1 \mu_1} + \frac{\alpha_6}{\sigma_2 \mu_2}, \quad d_3 = \frac{\alpha_3}{\sigma_1 \mu_1} + \frac{\alpha_7}{\sigma_2 \mu_2}, \\ d_4 &= \frac{\alpha_4}{\sigma_1 \mu_1} + \frac{\alpha_8}{\sigma_2 \mu_2}, \quad d_5 = \frac{\alpha_9}{\sigma_1 \mu_1} + \frac{\alpha_{13}}{\sigma_2 \mu_2}, \quad d_6 = \frac{\alpha_{10}}{\sigma_1 \mu_1} + \frac{\alpha_{14}}{\sigma_2 \mu_2}, \\ d_7 &= \frac{\alpha_{11}}{\sigma_1 \mu_1} + \frac{\alpha_{15}}{\sigma_2 \mu_2}, \quad d_8 = \frac{\alpha_{12}}{\sigma_1 \mu_1} + \frac{\alpha_{16}}{\sigma_2 \mu_2}, \quad \alpha_1 = 2a_{21}^{(1)} h_1, \\ \alpha_2 &= 2a_{22}^{(1)} h_1, \quad \alpha_3 = 2a_{23}^{(1)} h_1, \quad \alpha_4 = 2a_{24}^{(1)} h_1, \quad \alpha_5 = 2a_{21}^{(2)} h_2, \\ \alpha_6 &= 2a_{22}^{(2)} h_2, \quad \alpha_7 = 2a_{23}^{(2)} h_2, \quad \alpha_8 = 2a_{24}^{(2)} h_2, \quad \alpha_9 = -a_{21}^{(1)} h_1^2, \\ \alpha_{10} &= -a_{22}^{(1)} h_1^2, \quad \alpha_{11} = -a_{23}^{(1)} h_1^2, \quad \alpha_{12} = -a_{24}^{(1)} h_1^2, \quad \alpha_{13} = a_{21}^{(2)} h_2^2, \\ \alpha_{14} &= a_{22}^{(2)} h_2^2, \quad \alpha_{15} = a_{23}^{(2)} h_2^2, \quad \alpha_{16} = a_{24}^{(2)} h_2^2, \\ d_1^T &= \chi_2 b_{11}^{(2)} - \chi_1 b_{11}^{(1)}, \quad d_2^T = \chi_2 b_{12}^{(2)} - \chi_1 b_{12}^{(1)}, \\ d_3^T &= \chi_2 b_{21}^{(2)} h_2^2 - \chi_1 h_1^2 b_{21}^{(1)}, \quad d_4^T = \chi_2 h_2^2 b_{22}^{(2)} - \chi_1 h_1^2 b_{22}^{(1)}, \end{aligned}$$

$$W_1^Q(z, t) = \frac{\chi_1}{\lambda_1} \int_{-h_1}^0 Q^{(1)} dz + \frac{\chi_2}{\lambda_2} \int_0^{h_2} Q^{(2)} dz ,$$

$$W_2^Q(z, t) = \frac{\chi_1}{\lambda_1} \int_{-h_1}^0 Q^{(1)} z dz + \frac{\chi_2}{\lambda_2} \int_0^{h_2} Q^{(2)} z dz ,$$

$$W_1^T(t) = -c_{11}^2 \alpha_1 \rho_1 \frac{1+v_1}{1-v_1} \int_{-h_1}^0 \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial t^2} dz - c_{12}^2 \alpha_2 \rho_2 \frac{1+v_2}{1-v_2} \int_0^{h_2} \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial t^2} dz ,$$

$$W_2^T(t) = -c_{11}^2 \alpha_1 \rho_1 \frac{1+v_1}{1-v_1} \int_{-h_1}^0 \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial t^2} z dz - c_{12}^2 \alpha_2 \rho_2 \frac{1+v_2}{1-v_2} \int_0^{h_2} \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial t^2} z dz ,$$

$$W_1^F(t) = c_{11}^2 \int_{-h_1}^0 \frac{\partial F_z^{(1)}}{\partial z} dz + c_{12}^2 \int_0^{h_2} \frac{\partial F_z^{(2)}}{\partial z} dz + d_3^F F_0(t) ,$$

$$W_2^F(t) = c_{11}^2 \int_{-h_1}^0 \frac{\partial F_z^{(1)}}{\partial z} z dz + c_{12}^2 \int_0^{h_2} \frac{\partial F_z^{(2)}}{\partial z} z dz + d_5^F F_0(t) ,$$

$$d_1^Q = -c_{11}^2 2h_1 c_{21}^{(1)Q} + c_{12}^2 2h_2 c_{21}^{(2)Q} , \quad d_2^Q = -c_{11}^2 2h_1 c_{22}^{(1)Q} + c_{12}^2 2h_2 c_{22}^{(2)Q} ,$$

$$d_3^Q = -c_{11}^2 h_1^2 c_{21}^{(1)Q} + c_{12}^2 h_2^2 c_{21}^{(2)Q} , \quad d_4^Q = -c_{11}^2 h_1^2 c_{22}^{(1)Q} + c_{12}^2 h_2^2 c_{22}^{(2)Q} ,$$

$$d_1^F = c_{11}^2 2h_1 c_{21}^{(1)F} + c_{12}^2 2h_2 c_{21}^{(2)F} , \quad d_2^F = c_{11}^2 2h_1 c_{22}^{(1)F} + c_{12}^2 2h_2 c_{22}^{(2)F} ,$$

$$d_3^F = c_{11}^2 2h_1 c_{23}^{(1)F} + c_{12}^2 2h_2 c_{23}^{(2)F} , \quad d_4^Q = -c_{11}^2 h_1^2 c_{21}^{(1)Q} + c_{12}^2 h_2^2 c_{21}^{(2)Q} ,$$

$$d_5^Q = -c_{11}^2 h_1^2 c_{22}^{(1)Q} + c_{12}^2 h_2^2 c_{22}^{(2)Q} , \quad d_6^Q = -c_{11}^2 h_1^2 c_{23}^{(1)Q} + c_{12}^2 h_2^2 c_{23}^{(2)Q} .$$

Системы уравнений (28)–(31) решаем при начальных условиях

$$H_{ys}(0) = 0 , \quad T_s(0) = 0 , \quad \sigma_{zss}^Q(0) = 0 , \quad \sigma_{zss}^F(0) = 0 ,$$

$$\frac{d\sigma_{zss}^Q(0)}{dt} = -\frac{\alpha_1 E_1}{1-2\nu_1} \int_{-h_1}^0 \frac{\partial T^{(1)}(z, 0)}{\partial t} z^{s-1} dz - \frac{\alpha_2 E_2}{1-2\nu_2} \int_0^{h_2} \frac{\partial T^{(2)}(z, 0)}{\partial t} z^{s-1} dz ,$$

$$\frac{d\sigma_{zss}^F(0)}{dt} = 0 . \tag{32}$$

Решения сформулированных выше задач Коши на интегральные характеристики $\Phi_s(t)$ ключевых функций находим, применяя преобразование Лапласа с учетом заданных начальных условий (32). В результате получаем выражения

$$H_{y1}(t) = \sum_{k=1}^2 \int_0^t \left[A_{11}(k) e^{Pk\tau} H_y^-(t-\tau) + A_{12}(k) e^{Pk\tau} H_y^+(t-\tau) \right] d\tau,$$

$$H_{y2}(t) = \sum_{k=1}^2 \int_0^t \left[A_{21}(k) e^{Pk\tau} H_y^-(t-\tau) + A_{22}(k) e^{Pk\tau} H_y^+(t-\tau) \right] d\tau. \quad (33)$$

интегральных характеристик $H_{ys}(t)$ напряженности магнитного поля,

$$T_1(t) = \sum_{m=1}^2 \int_0^t \left[B_{11}(m) e^{Pm\tau} W_1^Q(t-\tau) + B_{12}(m) e^{Pm\tau} W_2^Q(t-\tau) \right] d\tau,$$

$$T_2(t) = \sum_{m=1}^2 \int_0^t \left[B_{21}(m) e^{Pm\tau} W_1^Q(t-\tau) + B_{22}(m) e^{Pm\tau} W_2^Q(t-\tau) \right] d\tau \quad (34)$$

интегральных характеристик температуры,

$$\sigma_{zz1}^Q(t) = \sum_{\alpha=1}^4 \int_0^t \left[R_{11}(\alpha) e^{P\alpha\tau} W_1^T(t-\tau) + R_{12}(\alpha) e^{P\alpha\tau} W_2^T(t-\tau) \right] d\tau,$$

$$\sigma_{zz2}^Q(t) = \sum_{\alpha=1}^4 \int_0^t \left[R_{21}(\alpha) e^{P\alpha\tau} W_1^T(t-\tau) + R_{22}(\alpha) e^{P\alpha\tau} W_2^T(t-\tau) \right] d\tau \quad (35)$$

интегральных характеристик составляющих напряжений σ_{zz}^Q и

$$\sigma_{zz1}^F(t) = \sum_{\beta=1}^4 \int_0^t \left[P_{11}(\beta) e^{P\beta\tau} W_1^F(t-\tau) + P_{12}(\beta) e^{P\beta\tau} W_2^F(t-\tau) \right] d\tau,$$

$$\sigma_{zz2}^F(t) = \sum_{\beta=1}^4 \int_0^t \left[P_{21}(\beta) e^{P\beta\tau} W_1^F(t-\tau) + P_{22}(\beta) e^{P\beta\tau} W_2^F(t-\tau) \right] d\tau \quad (36)$$

интегральных характеристик составляющих напряжений σ_{zz}^F . Здесь

$$A_{11}(k) = \frac{(p-d_6)d_3 + d_2d_7}{2p_k - (d_1 + d_6)}, \quad A_{12}(k) = \frac{(p-d_6)d_4 + d_2d_8}{2p_k - (d_1 + d_6)},$$

$$\begin{aligned}
A_{21}(k) &= \frac{(p-d_1)d_7+d_3d_5}{2p_k-(d_1+d_6)}, & A_{22}(k) &= \frac{(p-d_1)d_8+d_4d_5}{2p_k-(d_1+d_6)}, \\
B_{11}(m) &= \frac{p_m+d_4^T}{2p_m+(d_1^T+d_4^T)}, & B_{12}(m) &= \frac{d_2^T}{2p_m+(d_1^T+d_4^T)}, \\
B_{21}(m) &= \frac{d_2^T}{2p_m+(d_1^T+d_4^T)}, & B_{22}(m) &= \frac{p_m+d_1^T}{2p_m+(d_1^T+d_4^T)}, \\
R_{11}(\alpha) &= \frac{p_\alpha^2-d_4^Q}{4p_\alpha^3-2p_\alpha(d_1^Q+d_4^Q)}, & R_{12}(\alpha) &= \frac{d_2^Q}{4p_\alpha^3-2p_\alpha(d_1^Q+d_4^Q)}, \\
R_{21}(\alpha) &= \frac{d_3^Q}{4p_\alpha^3-2p_\alpha(d_1^Q+d_4^Q)}, & R_{22}(\alpha) &= \frac{p^2-d_1^Q}{4p_\alpha^3-2p_\alpha(d_1^Q+d_4^Q)}, \\
P_{11}(\beta) &= \frac{p_\beta^2-d_5^F}{4p_\beta^3-2p_\beta(d_1^F+d_5^F)}, & P_{12}(\beta) &= \frac{d_2^F}{4p_\beta^3-2p_\beta(d_1^F+d_5^F)}, \\
P_{21}(\beta) &= \frac{d_4^F}{4p_\beta^3-2p_\beta(d_1^F+d_5^F)}, & P_{22}(\beta) &= \frac{p^2-d_1^F}{4p_\beta^3-2p_\beta(d_1^F+d_5^F)},
\end{aligned}$$

p_k – корни уравнения $p^2 - p(d_1 + d_6) + d_1d_6 + d_2d_5 = 0$; p_m – корни уравнения $p^2 + p(d_1^T + d_4^T) + d_1^T d_4^T - d_2^T d_3^T = 0$; p_α – корни уравнения $p^4 - p^2(d_1^Q + d_4^Q) + d_1^Q d_4^Q - d_2^Q d_3^Q = 0$; p_β – корни уравнения $p^4 - p^2(d_1^F + d_5^F) + d_1^F d_5^F - d_2^F d_4^F = 0$.

По найденным выражениям (33)–(36) интегральных характеристик ключевые функции записываем на основании соотношений (24)–(27).

Численный анализ решения задачи при действии электромагнитного импульса. На основании приведенных выше общих решений находятся выражения ключевых функций при воздействии ЭМИ. При этом функции $H_y^\pm(t)$ имеют вид [6, 7]

$$H^+(t) = H^-(t) = k H_0 (e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t}), \quad (37)$$

где k – нормирующий коэффициент, H_0 – максимальное значение на-

пряженности магнитного поля в импульсе, β_1 и β_2 – параметры, характеризующие времена фронта нарастания и убывания импульса.

Численный анализ проводился для биметаллической пластины, материалами составных слоев которой являются сталь X19H9T и медь. Толщины слоев принимались равными $h_1 = h_2 = 1$ мм. Параметрами ЭМИ были: $k = 4$, $\beta_1 = 69000$, $\beta_2 = 2\beta_1$, что соответствует длительности ЭМИ $t_i = 100$ мкс. При этом время фронта нарастания ЭМИ $t_{\phi,н.} = 0,1 \cdot t_i$ (ЭМИ с такими параметрами используют в установках МИОМ [1]).

На рис. 1–3 показано изменение во времени (t , мкс) составляющих $\sigma_{zz}^{(p)Q}$ [Па·м²/А²] и $\sigma_{zz}^{(p)F}$ [Па·м²/А²] тензора напряжений, а также интенсивности суммарных напряжений $\sigma_i^{(p)}$ [Па·м²/А²] в плоскости $z = 0$

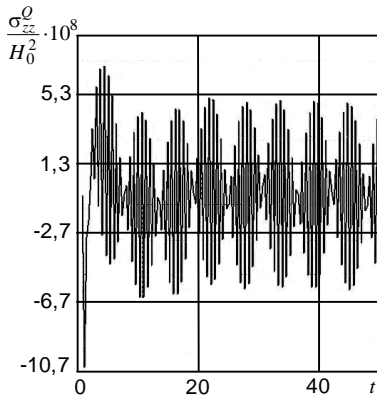


Рис. 1

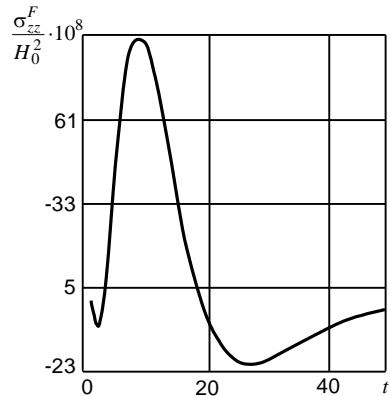


Рис. 2

спая составных слоев. Видно, что напряжения $\sigma_{zz}^{(p)Q}$ за время, равное $t_{\phi,н.}$, выходят на режим собственных колебаний, а напряжения $\sigma_{zz}^{(p)F}$ – за время $t > 0,7 \cdot t_i$. При этом напряжения $\sigma_{zz}^{(p)F}$ на спае на порядок превышают напряжения $\sigma_{zz}^{(p)Q}$. Интенсивности напряжений в стальном $\sigma_i^{(1)}$ (кривая 1 на рис. 3) и в медном $\sigma_i^{(2)}$ (кривая 2 на рис. 3) слоях в области контакта $z = 0$ отличаются в данном случае незначительно. При этом величина их осцилляций в медном слое существенно больше.

Рис. 4 иллюстрирует зависимость максимальных значений интенсивности напряжений σ_i^{\max} [МПа] в плоскости спая составных слоев от вели-

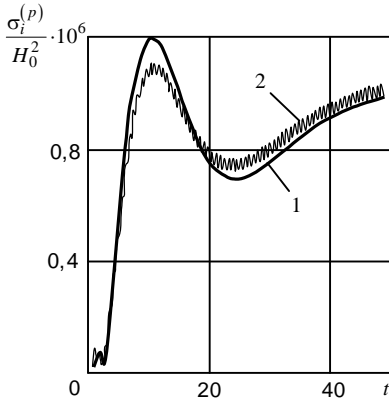


Рис. 3

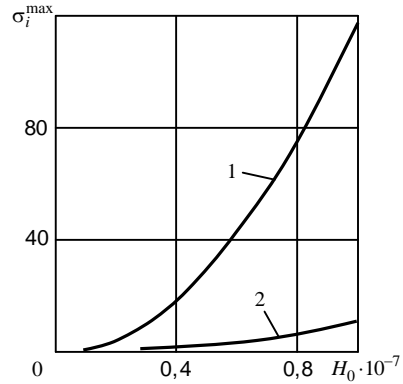


Рис. 4

чины H_0 [A/m]. Кривая 1 соответствует длительности ЭМИ $t_i = 100$ мкс, а кривая 2 – $t_i = 1000$ мкс. Видно, что при $t_i = 100$ мкс интенсивность напряжений σ_i^{\max} достигает критического значения σ_m , равного для данной биметаллической пластины $\sigma_m = 60 \div 100$ МПа [2, 9] для значений величины $H_0 < 8 \cdot 10^6$ A/m. Однако при таких значениях H_0 при длительности ЭМИ $t_i = 1000$ мкс σ_i^{\max} значительно меньше σ_m .

Отметим, что построенные зависимости $\sigma_i^{\max}(H_0)$ при разной длительности ЭМИ для других материалов составных слоев, в частности, сталь-Al и Cu-Al позволяют прогнозировать свойства контактного соединения биметаллических пластин в зависимости от временных параметров импульсных электромагнитных воздействий.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано методику визначення параметрів, які описують термо-напружений стан і механічні властивості контактної з'єднання биметалевої пластини за дії імпульсного електромагнітного поля. Для пластини сталь X18H9T-Cu приведено результати числового аналізу компонент тензора динамічних напружень та інтенсивностей напружень в площині контакту складових шарів за дії електромагнітного імпульса.

SUMMARY. The methodology of determination of parameters, which describe thermoelastic state and mechanical properties of contact joint of bimetallic plate under the effect of impulse electromagnetic field, has been suggested. For the plate Steel X18H9T-Cu the results of numeral analysis of components of dynamic stresses tensor and of stress intensity in the component layers contact area under the effect of electromagnetic impulse have been shown.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. Батыгин Ю. В., Лавинский В. И., Хименко Л. Т. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. – Харьков: МОСТ. – Торнадо, 2003. – 288 с. 2. Мэттьюз Ф., Ролинс Р. Композитные материалы. Механика и

итехнология. – 2004. – 408 с. 3. *Термоупругость электропроводных тел / Подстри-
гач Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В.* – К.: Наук. думка, 1977. – 247 с.
4. *Гачкевич А. Р.* Термомеханика электропроводных тел при действии квазиустановив-
шихся электромагнитных полей. – К.: Наук. думка, 1992. – 217 с. 5. *Гачкевич А. Р., Му-
сий Р. С.* Термомеханика электропроводных тел при воздействии неустановившихся
электромагнитных полей. – Львов, 1993. – 54 с. (Препр. / АН Украины. Ин-т прикладных
проблем механики и математики НАНУ, № 3–93.) 6. *Гачкевич О. Р., Мусій Р. С., Мель-
ник Н. Б.* Термомеханічна поведінка порожнистого електропровідного циліндра при імпу-
льсній електромагнітній дії // *Мат. мет. і фіз.-мех. поля.* – 2001. – Т. 44, № 1. – С. 146–
154. 7. *Мусій Р. С., Мельник Н. Б., Стасюк Г. Б.* Дослідження термомеханічної поведін-
ки електропровідної пластини при імпульсних електромагнітних діях // *Прикладні пробл.
механіки і математики.* – 2004. – Вип. 2. – С. 153–160. 8. *Ионов В. Н., Огибалов П. М.*
Напряжения в телах при импульсном нагружении. – М.: Высшая шк., 1975. – 463 с.
9. *Орленко Л. П.* Поведение материалов при интенсивных динамических нагрузках. – М.:
Машиностроение, 1964. – 168 с.

*Институт прикладных проблем механики и математики НАН Украины,
Национальный университет «Львовская политехника»,
Политехника Опольская (Польша)*

Поступила 20.02.2008

УДК 539.3

И. В. ЗИНОВЕЕВ, А. К. ПРИВАРНИКОВ, д-р физ.-мат. наук

СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ОСНОВАНИЙ С ДЕФЕКТАМИ

К настоящему времени исследованию напряженно-деформированного состояния тел с дефектами посвящено большое количество работ, например, [1–4]. Однако для многослойных оснований с произвольным конечным числом слоев таких исследований весьма мало [2]. В данной статье предлагается приближенный способ определения напряженно-деформированного состояния многослойного основания с дефектом в одном из внутренних слоев.

Постановка задачи. Рассмотрим плоскую деформацию n -слоеного упругого основания с изотропными плоскопараллельными слоями (рис. 1). Нумерацию слоев выберем сверху вниз, начиная с единицы. Нижний слой имеет номер n , полупространство – номер $n+1$. Модуль Юнга E , коэффициент Пуассона ν и толщину h слоя с номером k ($k = \overline{1, n}$) будем

снабжать нижним индексом k . Все слои в основании сцеплены. На верхней

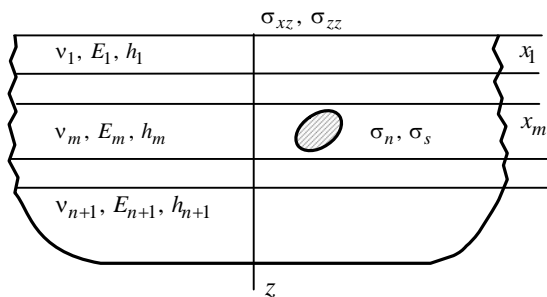


Рис. 1

нижней границе n -го слоя выполняются условия сцепления с полупространством (упругим, или абсолютно жестким). В одном из слоев имеется дефект (например, отверстие, ограниченное гладким контуром, на границах которого известны или нормальные и касательные напря-

жения, или перемещения). Для определенности будем считать, что в m -ом слое имеется отверстие, ограниченное гладким контуром L . Каждый слой основания отнесем к местной декартовой системе координат.

Определение напряжений и деформаций основания будем проводить, сводя задачу для основания с отверстием к задаче для сплошного основания, находящегося под действием объемных сил, распределенных по контуру L . При этом контур L в слое с номером m будем разбивать на N

частей (элементов), каждую из которых будем заменять прямолинейным отрезком, на который действует объемная равномерно распределенная вдоль всего отрезка нагрузка $\bar{P} = (P_n, P_s)$ (будем называть ее фиктивной). Затем будем строить и решать систему линейных алгебраических уравнений для нахождения таких значений нормальных P_n и касательных P_s составляющих фиктивных нагрузок, которые обеспечивают выполнение граничных условий исходной задачи. После этого перемещения и напряжения в точках многослойного основания можно вычислить, суммируя влияния фиктивных нагрузок на всех элементах контура.

При таком подходе напряженно-деформированное состояние m -го слоя, нагруженного заданными нагрузками на дневной поверхности и объемными во внутренних точках m -го слоя, представим в виде суммы двух состояний: состояния нагруженной только объемной нагрузкой вдоль контура L плоскости с упругими характеристиками m -го слоя (первая вспомогательная задача) и состояния сплошного слоя, свободного от объемных нагрузок (вторая вспомогательная задача), на границах которого выполняются условия сцепления с двумя соседними слоями:

$$\begin{aligned} u_{s_{m-1}}^1(x, h_{m-1}) &= u_{s_m}^1(x, 0) + u_{s_m}^0(x, 0), \\ \sigma_{zs_{m-1}}^1(x, h_{m-1}) &= \sigma_{zs_m}^1(x, 0) + \sigma_{zs_m}^0(x, 0), \\ u_{s_m}^1(x, h_m) + u_{s_m}^0(x, h_m) &= u_{s_{m+1}}^1(x, 0), \\ \sigma_{zs_m}^1(x, h_m) + \sigma_{zs_m}^0(x, h_m) &= \sigma_{zs_{m+1}}^1(x, 0). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь верхними индексами 0 и 1 отмечены величины, относящиеся к напряженным состояниям плоскости и слоя соответственно. Суперпозиция решений этих двух задач позволяет определить напряженно-деформированное состояние m -го слоя, нагруженного объемной нагрузкой, распределенной по контуру L .

Решение первой вспомогательной задачи. Рассмотрим плоскость, упругие характеристики которой совпадают с соответствующими упругими характеристиками m -го слоя основания. Контур L , который считается непрерывным и кусочно-гладким, будем обходить против движения часовой стрелки. Определим напряжения и перемещения в упругой плоскости, считая, что вдоль контура L действуют объемные силы.

Отнесем плоскость к той же системе координат, что и m -й слой. На каждом элементе контура введем вспомогательную локальную систему координат с осями n и s . Единичные векторы этих осей направлены соответственно вдоль внешней нормали к контуру и в сторону его обхода (рис. 2, а). Для приближенного решения задачи заменим контур L замкнутой ломаной линией L' из N отрезков (элементов) длины $2a_i$ ($i = \overline{1, N}$).

По отношению к общей системе координат Oxy расположение и ориентация каждого элемента определяются координатами центра отрезка, его длиной и углом α между нормалью n к контуру L в центре отрезка и положительным направлением оси Ox . При достаточно малых длинах отрез-

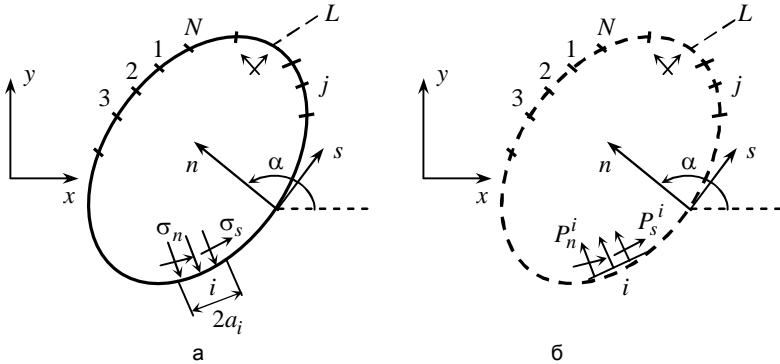


Рис. 2.

ков $2a_i$ ломаная аппроксимирует контур отверстия. В силу малости отрезков $2a_i$ будем считать, что на каждом из них действуют постоянные нормальная и касательная объемные силы: P_n^i и P_s^i (рис. 2, б). Тогда перемещения и напряжения в произвольной точке плоскости можно вычислять, суммируя соответствующие перемещения и напряжения (в глобальной системе координат Oxy), которые возникают в плоскости от действия объемных сил на каждый элемент контура.

Для решения рассматриваемой задачи будем использовать метод фиктивных нагрузок [4], основанный на аналитическом решении задачи о действии постоянной объемной силы

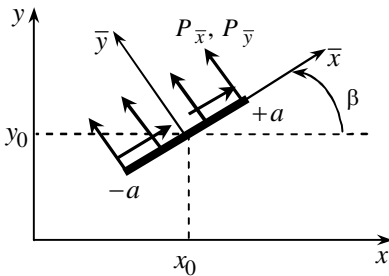


Рис. 3

постоянной объемной силы $P_n = P_{\bar{y}}$, $P_s = P_{\bar{x}}$, приложенной к

прямолинейному отрезку $|\bar{x}| \leq a$, $\bar{y} = 0$ незагруженной на бесконечности плоскости (рис. 3). На основании такого подхода в глобальной системе координат Oxy напряжения и перемещения в плоскости определяются формулами [4]:

$$\begin{aligned}
u_x^0 &= \frac{P_{\bar{x}}}{2G} [v_4 c F_1 + Y_{sc}] - \frac{P_{\bar{y}}}{2G} [v_4 s F_1 + Y_{cs}], \\
u_y^0 &= \frac{P_{\bar{x}}}{2G} [v_4 s F_1 - Y_{cs}] + \frac{P_{\bar{y}}}{2G} [v_4 c F_1 - Y_{sc}], \\
\sigma_{xx}^0 &= P_{\bar{x}} [(1 + v_1 \tilde{c}) F_2 - v_1 \tilde{s} F_3 + \tilde{Y}_{cs}] + P_{\bar{y}} [(1 - v_2 \tilde{c}) F_3 - v_2 \tilde{s} F_2 + \tilde{Y}_{sc}], \\
\sigma_{yy}^0 &= P_{\bar{x}} [(1 - v_1 \tilde{c}) F_2 + v_1 \tilde{s} F_3 - \tilde{Y}_{cs}] + P_{\bar{y}} [(1 + v_2 \tilde{c}) F_3 + v_2 \tilde{s} F_2 - \tilde{Y}_{sc}], \\
\sigma_{xy}^0 &= P_{\bar{x}} [v_1 (\tilde{s} F_2 + \tilde{c} F_3) + \tilde{Y}_{sc}] + P_{\bar{y}} [v_2 (\tilde{c} F_2 - \tilde{s} F_3) - \tilde{Y}_{cs}], \tag{2}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
F_1 &= -A \left[\bar{y} \left(\arctg \frac{\bar{y}}{\bar{x} - a} - \arctg \frac{\bar{y}}{\bar{x} + a} \right) - (\bar{x} - a) \ln \sqrt{R_1} + (\bar{x} + a) \ln \sqrt{R_2} \right], \\
F_2 &= \frac{A}{2} \ln \frac{R_1}{R_2}, \quad F_3 = -A \left[\arctg \frac{\bar{y}}{\bar{x} - a} - \arctg \frac{\bar{y}}{\bar{x} + a} \right], \\
F_4 &= A \left[\frac{\bar{y}}{R_1} - \frac{\bar{y}}{R_2} \right], \quad F_5 = A \left[\frac{\bar{x} - a}{R_1} - \frac{\bar{x} + a}{R_2} \right], \quad A = \frac{1}{2\pi v_1}, \\
Y_{sc} &= \bar{y} (s F_2 + c F_3), \quad Y_{cs} = \bar{y} (c F_2 - s F_3), \\
\tilde{Y}_{cs} &= \bar{y} (\tilde{c} F_4 + \tilde{s} F_5), \quad \tilde{Y}_{sc} = \bar{y} (\tilde{s} F_4 - \tilde{c} F_5), \\
v_1 &= 2(1 - \nu), \quad v_2 = 1 - 2\nu, \quad v_4 = 3 - 4\nu, \\
R_1 &= (\bar{x} - a)^2 + \bar{y}^2, \quad R_2 = (\bar{x} + a)^2 + \bar{y}^2, \\
c &= \cos \beta, \quad \tilde{c} = \cos 2\beta, \quad s = \sin \beta, \quad \tilde{s} = \sin 2\beta, \\
\bar{x} &= (x - x_o) c + (y - y_o) s, \quad \bar{y} = -(x - x_o) s + (y - y_o) c. \tag{3}
\end{aligned}$$

Если воспользоваться решением (2), то можно вычислить нормальные и касательные напряжения или перемещения в средней точке (x_o^i, y_o^i) ($i = \overline{1, N}$) каждого отрезка ломаной L' , суммируя решения для всех ее отрезков:

$$\begin{aligned}
\sigma_n^i(x_o^i, y_o^i) &= \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nm}^{ij} P_n^j, \\
\sigma_s^i(x_o^i, y_o^i) &= \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} P_n^j,
\end{aligned}$$

$$u_n^i(x_o^i, y_o^i) = \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nm}^{ij} P_n^j,$$

$$u_s^i(x_o^i, y_o^i) = \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} P_n^j. \quad (4)$$

Здесь $A_{ns}^{ij}, A_{sn}^{ij}, A_{ss}^{ij}, A_{nm}^{ij}, B_{ns}^{ij}, B_{sn}^{ij}, B_{ss}^{ij}, B_{nm}^{ij}$ ($i, j = \overline{1, N}$) – коэффициенты влияния, которые определяются формулами

$$Y_{sc}^{ij} = \bar{y}_i^j (s_\gamma^{ij} F_2 - c_\gamma^{ij} F_3), \quad Y_{cs}^{ij} = \bar{y}_i^j (c_\gamma^{ij} F_2 + s_\gamma^{ij} F_3),$$

$$B_{ss}^{ij} = \frac{\nu_4 c_\gamma^{ij} F_1 - Y_{sc}^{ij}}{2G}, \quad B_{sn}^{ij} = \frac{\nu_4 s_\gamma^{ij} F_1 - Y_{cs}^{ij}}{2G},$$

$$\tilde{Y}_{cs}^{ij} = \bar{y}_i^j (\tilde{c}_\gamma^{ij} F_4 - \tilde{s}_\gamma^{ij} F_5), \quad \tilde{Y}_{sc}^{ij} = \bar{y}_i^j (s_\gamma^{ij} F_4 + \tilde{c}_\gamma^{ij} F_5),$$

$$B_{ns}^{ij} = \frac{-\nu_4 s_\gamma^{ij} F_1 - Y_{cs}^{ij}}{2G}, \quad B_{nm}^{ij} = \frac{\nu_4 c_\gamma^{ij} F_1 + Y_{sc}^{ij}}{2G},$$

$$A_{ss}^{ij} = -\nu_1 (\tilde{s}_\gamma^{ij} F_2 - \tilde{c}_\gamma^{ij} F_3) - \tilde{Y}_{sc}^{ij}, \quad A_{sn}^{ij} = \nu_2 (\tilde{c}_\gamma^{ij} F_2 + \tilde{s}_\gamma^{ij} F_3) - \tilde{Y}_{cs}^{ij},$$

$$A_{ns}^{ij} = F_2 - \nu_1 (\tilde{c}_\gamma^{ij} F_2 + \tilde{s}_\gamma^{ij} F_3) - \tilde{Y}_{cs}^{ij},$$

$$A_{nm}^{ij} = F_3 - \nu_2 (\tilde{s}_\gamma^{ij} F_2 - \tilde{c}_\gamma^{ij} F_3) + \tilde{Y}_{sc}^{ij},$$

$$A_{ns}^{ii} = A_{sn}^{ii} = 0, \quad A_{ss}^{ii} = A_{nm}^{ii} = 0,5, \quad B_{ns}^{ii} = B_{sn}^{ii} = 0,$$

$$B_{ss}^{ii} = B_{nm}^{ii} = -\frac{\nu_4 a_i \ln(a_i)}{2\pi\nu_1 G}, \quad \bar{x}_i^j = (x_i - x_j)c_j + (y_i - y_j)s_j,$$

$$\bar{y}_i^j = -(x_i - x_j)s_j + (y_i - y_j)c_j, \quad c_\gamma^{ij} = \cos \gamma_i^j, \quad \tilde{c}_\gamma^{ij} = \cos 2\gamma_i^j,$$

$$s_\gamma^{ij} = \sin \gamma_i^j, \quad \tilde{s}_\gamma^{ij} = \sin 2\gamma_i^j, \quad \gamma_i^j = \beta_i - \beta_j. \quad (5)$$

Таким образом, если для каждого элемента контура L известны величины P_s^j, P_n^j ($j = \overline{1, N}$), то решение первой вспомогательной задачи дается формулами (2)–(5). Если к выражениям (2) и (4) прибавить соответствующие значения, которые будут получены при решении второй вспомогательной задачи, то найдем реальные значения напряжений и перемещений в m -м слое рассматриваемого многослойного основания, в частности, в

точках (x_o^i, y_o^i) ($i = \overline{1, N}$) контура. Тогда, требуя выполнения граничных условий на контуре отверстия, придем к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных значений фиктивных нагрузок. Решив эту СЛАУ, найдем искомые значения P_s^j, P_n^j ($j = \overline{1, N}$).

Решение второй вспомогательной задачи. Рассмотрим n -слойное основание со сплошными слоями, которые имеют те же физические и геометрические характеристики, что и слои исходного основания. На верхней границе основания граничные условия совпадают с условиями исходной задачи, на нижней выполняются условия сцепления с полупространством (упругим, или абсолютно жестким). На границах m -го слоя выполняются условия (1), для других слоев – условия сцепления соседних слоев:

$$\begin{aligned}\sigma_{r z_{k+1}}^1(x, 0) &= \sigma_{r z_k}^1(x, h_k), \\ u_{n_{k+1}}^1(x, 0) &= u_{n_k}^1(x, h_k), \quad k \neq m, m-1, \quad r = x, z.\end{aligned}\quad (6)$$

Во второй вспомогательной задаче трансформанты одномерного интегрального преобразования Фурье напряжений и перемещений в m -м слое основания можно определять по известной схеме для оснований сложной структуры [1–3], причем трансформанты Фурье искомых напряжений и перемещений в слоях основания получаются в виде [1]

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{zzk}^1(\xi, z) &= e^{-pz} \alpha_k [a_k (D - pzC) + b_k pzD + 1 + pz] - \\ &\quad - e^{-pz} \delta_k [b_k (D - pzC) + b_{\tau k} pzD + pz] + \\ &\quad + L_k^0 (\tilde{D} - pz\tilde{C}) - M_k^0 pz\tilde{D}, \\ -\frac{i\xi}{p} \bar{\sigma}_{xzk}^1(\xi, z) &= e^{-pz} \alpha_k [a_k pzD - b_k (D + pzC) + pz] - \\ &\quad - e^{-pz} \delta_k [b_k pzD - b_{\tau k} (D + pzC) + pz - 1] + \\ &\quad + L_k^0 pz\tilde{D} + M_k^0 (\tilde{D} + pz\tilde{C}), \\ 2G_k (-i\xi) \bar{u}_{xk}^1(\xi, z) &= e^{-pz} \alpha_k [a_k (v_{2k} D + pzC) - \\ &\quad - b_k (v_{1k} C + pzD) + pz - v_{2k}] - \\ &\quad - e^{-pz} \delta_k [b_k (v_{2k} D + pzC) - b_{\tau k} (v_{1k} C + pzD) + \\ &\quad + pz - v_{1k}] + L_k^0 (v_{2k} \tilde{D} + pz\tilde{C}) + M_k^0 (v_{1k} \tilde{C} + pz\tilde{D}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2G_k p \bar{u}_{z_k}^{-1}(\xi, z) = & e^{-pz} \alpha_k \left[a_k (v_{1_k} C - pzD) - \right. \\
& \left. - b_k (v_{2_k} D - pzC) - pz - v_{1_k} \right] - \\
& - e^{-pz} \delta_k \left[b_k (v_{1_k} C - pzD) - b_{\tau k} (v_{2_k} D - pzC) - pz - v_{2_k} \right] + \\
& + L_k^0 (v_{1_k} \tilde{C} - pz\tilde{D}) + M_k^0 (v_{2_k} \tilde{D} - pz\tilde{C}). \tag{7}
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\alpha_k(\xi) = \bar{\sigma}_{zzk}^{-1} \Big|_{z=0}, \quad \beta_k(\xi) = \tilde{G}_k p \bar{u}_{z_k}^{-1} \Big|_{z=0}, \\
\gamma_k(\xi) = -i\xi \tilde{G}_k \bar{u}_{xk}^{-1} \Big|_{z=0}, \quad \delta_k(\xi) = -\frac{i\xi}{p} \bar{\sigma}_{xzk}^{-1} \Big|_{z=0}; \tag{8} \\
C = \frac{1}{2} \left(e^{-2p(h_k - z)} + e^{-2ph_k} \right), \quad D = \frac{1}{2} \left(e^{-2p(h_k - z)} - e^{-2ph_k} \right), \\
\tilde{C} = \frac{1}{2} \left(e^{-p(h_k - z)} + e^{-p(h_k + z)} \right), \quad \tilde{D} = \frac{1}{2} \left(e^{-p(h_k - z)} - e^{-p(h_k + z)} \right);
\end{aligned}$$

функции податливости $A_k(p)$, $B_k(p)$, $B_{\tau k}(p)$ ($k = \overline{1, n}$) и модифицированные функции податливости $a_k(p)$, $b_k(p)$, $b_{\tau k}(p)$ ($k = \overline{1, n}$) находятся по известным формулам [2], а функции $L_k(\xi)$, $M_k(\xi)$ определяются из выражений

$$\begin{aligned}
D_k(p)L_k(p) = & e^{-pk} \Delta_k \left\{ V_k \cdot \left[\tilde{c}_k + p_k \tilde{s}_k v_{1_k}^{-1} + \Delta_k B_{\tau k+1} (\tilde{s}_k + p_k \tilde{c}_k) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \Delta_k A_{\tau k+1} p_k \tilde{s}_k \right] + W_k \cdot \left[(v_{2_k} \tilde{s}_k - p_k \tilde{c}_k) v_{1_k}^{-1} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \Delta_k B_{k+1} (\tilde{s}_k + p_k \tilde{c}_k) - \Delta_k A_{k+1} p_k \tilde{s}_k \right] \right\}, \\
D_k(p)M_k(p) = & e^{-pk} \Delta_k \left\{ V_k \cdot \left[- (v_{2_k} \tilde{s}_k + p_k \tilde{c}_k) v_{1_k}^{-1} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \Delta_k B_{\tau k+1} p_k \tilde{s}_k + \Delta_k A_{\tau k+1} (\tilde{s}_k - p_k \tilde{c}_k) \right] + \right. \\
& \left. + W_k \cdot \left[-\tilde{c}_k + p_k \tilde{s}_k v_{1_k}^{-1} - \Delta_k A_{k+1} (\tilde{s}_k - p_k \tilde{c}_k) + \Delta_k B_{k+1} p_k \tilde{s}_k \right] \right\}, \tag{9}
\end{aligned}$$

где

$$N_k = \frac{1}{4(1 - v_k)^2}, \quad H_k = \Delta_{k+1}^2 \left[A_{k+1} B_{\tau k+1} - B_{k+1} A_{\tau k+1} \right],$$

$$\begin{aligned}
D_k(p) = & N_k \left[v_{4k} \tilde{c}_k^2 + p_k^2 e_k + e_k v_{2k}^2 \right] + \\
& + \Delta_k \left(A_{k+1} (\tilde{s}_k \tilde{c}_k - p_k e_k) + B_{\tau k+1} (\tilde{s}_k \tilde{c}_k + p_k e_k) \right) + \\
& + \frac{\tilde{\Delta}_k}{2} \left[B_{k+1} + A_{\tau k+1} \right] \cdot \left[v_{2k} \tilde{s}_k^2 + p_k^2 e_k \right] + H_k \left[\tilde{s}_k^2 - p_k^2 e_k \right],
\end{aligned}$$

$$V_k = \left[-\beta_k^0 - A_{k+1} \alpha_k^0 + B_{k+1} \delta_k^0 + L_{k+1} \right],$$

$$W_k = \left[\gamma_k^0 - A_{\tau k+1} \alpha_k^0 + B_{\tau k+1} \delta_k^0 - M_{k+1} \right];$$

$$\alpha_{m-1}^o = -\bar{\sigma}_{zz_m}^o, \quad \beta_{m-1}^o = -\tilde{A} \frac{i\xi}{p} \frac{\partial \bar{u}_{z_m}^o}{\partial x},$$

$$\gamma_{m-1}^o = \tilde{A} \frac{\partial \bar{u}_{x_m}^o}{\partial x}, \quad \delta_{m-1}^o = \frac{i\xi}{p} \bar{\sigma}_{xz_m}^o;$$

при $z=0$ $\alpha_m^o = \bar{\sigma}_{zz_m}^o$, $\beta_m^o = A \frac{i\xi}{p} \frac{\partial \bar{u}_{z_m}^o}{\partial x}$, $\gamma_m^o = A \frac{\partial \bar{u}_{x_m}^o}{\partial x}$, $\delta_m^o = -\frac{i\xi}{p} \bar{\sigma}_{xz_m}^o$; при

$z = h_m$, $\alpha_k^o = \beta_k^o = \gamma_k^o = \delta_k^o = 0$ ($k = \overline{1, m-3, m-2, m+1, n}$);

$$A = \frac{G_{m+1}}{1 - v_{m+1}}, \quad \tilde{A} = \frac{G_m}{1 - v_m}; \quad (10)$$

$\bar{\sigma}_{xz_m}^o$, $\bar{\sigma}_{zz_m}^o$, $\bar{u}_{z_m}^o$, $\bar{u}_{x_m}^o$ – трансформанты преобразования Фурье функций (8):

$$\begin{aligned}
2G \frac{\partial \bar{u}_x^0}{\partial x} = & \sum_{i=1}^N P_s^i \left[\left(v_4^i c_i^2 - s_i^2 \right) \bar{F}_2^i - v_1^i \tilde{s}_i \bar{F}_3^i + \bar{Z}_{cs}^i \right] + \\
& + P_n^i \left[-v_2^i \tilde{s}_i \bar{F}_2^i + 2v_2^i s_i^2 \bar{F}_3^i + \bar{Z}_{sc}^i \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2G \frac{\partial \bar{u}_z^0}{\partial x} = & \sum_{i=1}^N P_s^i \left[v_1^i \tilde{s}_i \bar{F}_2^i - 2v_1^i s_i^2 \bar{F}_3^i + \bar{Z}_{sc}^i \right] + \\
& + P_n^i \left[\left(v_4^i c_i^2 + s_i^2 \right) \bar{F}_2^i - v_2^i \tilde{s}_i \bar{F}_3^i - \bar{Z}_{cs}^i \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{xx}^0 &= \sum_{i=1}^N P_s^i \left[\left(1 + \nu_1^i \tilde{c}_i \right) \bar{F}_2^i - \nu_1^i \tilde{s}_i \bar{F}_3^i + \bar{Z}_{cs}^i \right] + \\
&\quad + P_n^i \left[-\nu_2^i \tilde{s}_i \bar{F}_2^i + \left(1 - \nu_2^i \tilde{c}_i \right) \bar{F}_3^i + \bar{Z}_{sc}^i \right], \\
\bar{\sigma}_{zz}^0 &= \sum_{i=1}^N P_s^i \left[\left(1 - \nu_1^i \tilde{c}_i \right) \bar{F}_2^i + \nu_1^i \tilde{s}_i \bar{F}_3^i - \bar{Z}_{cs}^i \right] + \\
&\quad + P_n^i \left[\nu_2^i \tilde{s}_i \bar{F}_2^i + \left(1 + \nu_2^i \tilde{c}_i \right) \bar{F}_3^i - \bar{Z}_{sc}^i \right], \\
\bar{\sigma}_{xz}^0 &= \sum_{i=1}^N P_s^i \left[\nu_1^i \tilde{s}_i \bar{F}_2^i + \nu_1^i \tilde{c}_i \bar{F}_3^i + \bar{Z}_{sc}^i \right] + \\
&\quad + P_n^i \left[\nu_2^i \tilde{c}_i \bar{F}_2^i - \nu_2^i \tilde{s}_i \bar{F}_3^i - \bar{Z}_{cs}^i \right], \tag{11}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{F}_2^i(\xi) &= -\frac{A}{p} \left[B_1^i - B_2^i \right], \\
\bar{F}_3^i(\xi) &= \frac{Ai\xi}{p^2} \left[B_1^i \cdot \text{sign}(b_1^i) - B_2^i \cdot \text{sign}(b_2^i) \right], \\
\bar{Z}_{cs}^i(\xi) &= \overline{\tilde{c}_i F_4^i + \tilde{s}_i F_5^i} = A \left(|b_1^i| \cdot B_1^i - |b_2^i| \cdot B_2^i \right), \\
b_1^i &= \tilde{z} - a_i s_i, \quad b_2^i = \tilde{z} + a_i s_i, \\
\bar{Z}_{sc}^i(\xi) &= \overline{\tilde{s}_i F_4^i - \tilde{c}_i F_5^i} = -A \cdot i \cdot \text{sign}(\xi) \left(b_1^i \cdot B_1^i - b_2^i \cdot B_2^i \right), \\
\tilde{x} &= x - x_i, \quad \tilde{z} = z - z_i, \quad c_i = \cos \beta_i, \quad \tilde{c}_i = \cos 2\beta_i, \\
s_i &= \sin \beta_i, \quad \tilde{s}_i = \sin 2\beta_i, \quad B_1^i = \pi e^{i\tilde{\xi} \tilde{t}} e^{-pb_i}, \\
B_2^i &= \pi e^{i\tilde{\xi} \tilde{t}} e^{-p\tilde{b}_i}, \quad t_i = x_i - a_i c_i, \quad \tilde{t}_i = x_i + a_i c_i. \tag{12}
\end{aligned}$$

Полагая поочередно $P_s^i = 0$, $P_n^i = 1$ и $P_s^i = 1$, $P_n^i = 0$ и подвергая формулы (7) обратному преобразованию Фурье, находим коэффициенты влияния (5). Это позволяет найти напряжения и деформации в центре каждого элемента ломаной. Складывая полученные выражения (11) с соответствующими выражениями (4), приходим к равенствам

$$\sigma_n^i = \sigma_n^o(x_o^i, y_o^i) + \sigma_n^1(x_o^i, y_o^i) = \sum_{j=1}^N \tilde{A}_{ns}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N \tilde{A}_{nn}^{ij} P_n^j,$$

$$\sigma_s^i = \sigma_s^o(x_o^i, y_o^i) + \sigma_s^1(x_o^i, y_o^i) = \sum_{j=1}^N \tilde{A}_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N \tilde{A}_{sn}^{ij} P_n^j \quad i = \overline{1, N}, \quad (13)$$

$$u_n^i = u_n^o(x_o^i, y_o^i) + u_n^1(x_o^i, y_o^i) = \sum_{j=1}^N \tilde{B}_{ns}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N \tilde{B}_{nn}^{ij} P_n^j,$$

$$u_s^i = u_s^o(x_o^i, y_o^i) + u_s^1(x_o^i, y_o^i) = \sum_{j=1}^N \tilde{B}_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N \tilde{B}_{sn}^{ij} P_n^j \quad i = \overline{1, N}, \quad (14)$$

которые определяют напряжения и перемещения в центрах всех элементов контура L в m -м слое основания (на внутренней стороне).

При решении конкретной задачи в зависимости от граничных условий на контуре L выбираются соответствующие соотношения из (13) или (14).

Если для каждого элемента ломаной задать значения напряжений σ_n^i , σ_s^i , или перемещений u_n^i , u_s^i , то соотношения для нормальных и касательных напряжений и перемещений поставленной задачи образуют систему $2N$ линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных P_s^i , P_n^i ($i = \overline{1, N}$)

$$f_n^i(x_o^i, y_o^i) = \sum_{j=1}^N C_{ns}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N C_{nn}^{ij} P_n^j,$$

$$f_s^i(x_o^i, y_o^i) = \sum_{j=1}^N C_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N C_{sn}^{ij} P_n^j \quad i = \overline{1, N}. \quad (15)$$

После решения СЛАУ (15) найдем такие значения фиктивных нагрузок, для которых нормальные и касательные напряжения (перемещения) в точках контура будут равны заданным.

Таким образом, задача об отверстии в многослойном основании решается по такому алгоритму.

Контур отверстия разбивается на элементарные части; исходя из условий задачи, для каждой элементарной части устанавливаются ее геометрические характеристики (длина, координаты центра элемента, направляющие косинусы вектора нормали) и граничные условия (средние значения напряжений или перемещений на каждом элементе). Вычисляются коэффициенты системы линейных алгебраических уравнений (15). Решается

система (15) и определяются значения фиктивных объемных нагрузок. Определяются функции α_k^o , β_k^o , γ_k^o , δ_k^o по формулам (10)–(12). Определяются функции податливости [5] для многослойного основания. Определяются функции α_k , β_k , γ_k , δ_k [5]. Определяются трансформанты искомых напряжений и перемещений для расчетного слоя, а при помощи обратного преобразования Фурье и сами искомые величины. Если в расчетном слое есть отверстие, то к полученным напряжениям и перемещениям добавляются соответствующие величины (2).

Примеры численной реализации. Рассмотрим трехслойное основание, состоящее из слоев с толщинами $h_1 = h_3 = 0,1 \text{ м}$, $h_2 = 0,2 \text{ м}$, сцепленных с упругой полуплоскостью. Коэффициенты Пуассона всех слоев и полуплоскости одинаковы и равны $\nu = 0,3$; модули Юнга верхнего слоя и полупространства одинаковы. Во втором слое имеется круговое отверстие радиуса $r = 0,05 \text{ м}$, центр которого находится на глубине $z = 0,15 \text{ м}$ от поверхности основания. На контуре отверстия действует равномерно распределенное внутреннее давление интенсивностью p . Рассматриваются случаи: 1) $E_2 = 10E$; 2) $E_2 = 0,1E$.

В обоих случаях контур отверстия заменялся ломаной из $N \geq 50$ звеньев, проверялось выполнение граничных условий на дневной поверхности основания, условия совместности деформации слоев и условия на контуре отверстия. На рис. 4 приведены графики напряжений σ_{zz} (рис. 4, а) и σ_{xz} (рис. 4, б) на границах второго слоя для случая $E_2 = 10E_1$.

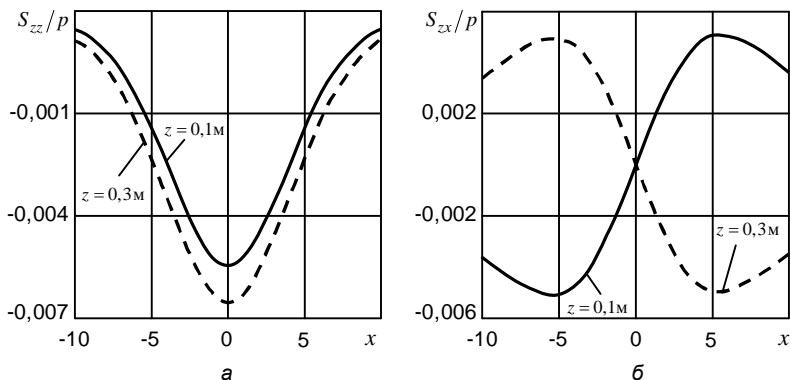


Рис. 4

На рис. 5 приведены графики напряжений σ_{zz} (рис. 5, а) и σ_{xz} (рис. 5, б) на границах второго слоя для $E_2 = 0,1E_1$.

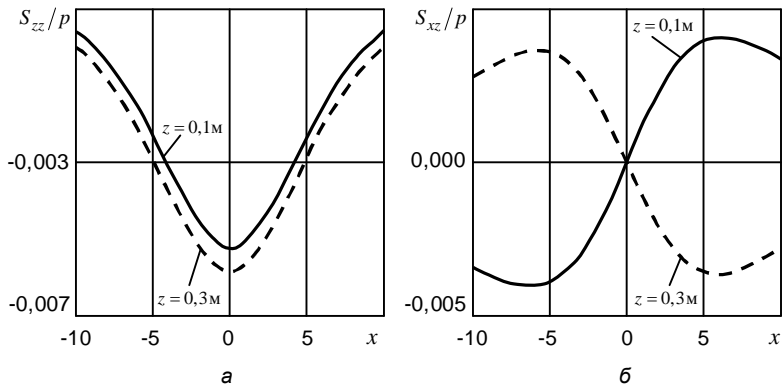


Рис. 5

Приведенные результаты согласуются с ожидаемой картиной распределения напряжений в основании. Заметим, что аналогичным образом можно решать граничные задачи для многослойных оснований с произвольно ориентированными трещинами в слоях.

РЕЗЮМЕ. В рамках лінійної теорії пружності пропонується спосіб розв'язання задачі про визначення напружено-деформівного стану пружної багат шарової основи із зчепленими ізотропними плоскопаралельними шарами, яка в одному з шарів має отвір. Деформація основи плоска.

Поставлена задача про отвір зводиться до задачі про суцільну багат шарову основу, в якій вздовж контуру L діє розподілене об'ємне навантаження з невідомою щільністю розподілу. Розв'язок базується на ідеях методів фіктивних навантажень та методу функцій податливості. Запропоновано ефективний метод чисельного розв'язку.

SUMMARY. Within the framework of a linear theory of an elasticity the technique of the solution of the problem, connected with determination of the intense-deformed state of the elastic multilayer foundation with spanned isotropic parallel plate layers, one of which has a hole, is offered. The deformation of the foundation is flat.

The formulated problem, about a hole is reduced to the problem about the solid multilayer foundation, in which one along a contour L the distributed load with a unknown density function acts. The solution of posed problem is based on the ideas of the method of dummy loads and the compliance function technique. The effective method of the numerical solution is given.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. Вигдерович И. Е., Ламзюк В. Д., Приварников А. К. О решении граничных задач теории упругости для многослойных оснований сложной структуры // Всесоюзная конференция по теории упругости: Тез. докл. – Ереван, 1979. – С. 81–84. 2. Вигдерович И. Е., Ламзюк В. Д., Приварников А. К. Об использовании метода функций податливости при решении граничных задач для многослойных оснований сложной структуры. – ДАН УССР. Сер.А. – 1979. – № 6. – С. 434–438. 3. Зинovieв И. В. Напряженно-деформированное состояние многослойного основания под действием поверхностных и объемных нагрузок // Вопросы меха-

ники деформирования и разрушения твердых тел. – Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1999. – С. 66–73. 4. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.: Мир. – 1987. – 328 с. 5. Приварников А. К., Ламзюк В. Д. Упругие многослойные основания. – Днепропетровск, ДГУ. – 1985. – Ч. 1. – 182 с. Деп. в ВИНТИ 23.12.85,8789 -В.

Запорожский национальный университет

Поступила 10.04.2008

УДК 539.3

Л. В. НАЗАРЕНКО, канд. физ.-мат. наук

ДЕФОРМИРОВАНИЕ И КРАТКОВРЕМЕННАЯ ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ МАТЕРИАЛА АРМИРОВАННОГО БЕСКОНЕЧНЫМИ ОРТОТРОПНЫМИ ВОЛОКНАМИ

Теория совместных процессов деформирования и кратковременной микроповреждаемости однородных [1, 2] и композитных материалов с изотропными [3–7] и трансверсально-изотропными компонентами [8] основана на моделировании рассеянных единичных микроповреждений квазисферическими микропорами, пустыми или заполненными частицами разрушенного материала. Это дает возможность описывать деформирование таких материалов на основе механики стохастически неоднородных сред с применением теории эффективных модулей. Описание процесса образования и накопления микроразрушений при нагружении материала базируется на использовании критерия разрушения микрообъема в виде предельного значения определенной комбинации напряжений в микроточке типа Губера-Мизеса или Шлейхера-Надаи [9] и формулировании уравнения баланса разрушенных микрообъемов, исходя из общих свойств функции распределения предела микропрочности микрообъема, являющегося случайной функцией координат. Это дает возможность построить замкнутую систему уравнений, описывающих совместные процессы деформирования и кратковременной микроповреждаемости.

В настоящей работе данная модель обобщается на случай кратковременной повреждаемости композитного материала на основе изотропной матрицы и бесконечных ортотропных волокон. Построены нелинейные диаграммы макродеформирования композита.

Постановка задачи. Рассмотрим композитный материал, представляющий собой матрицу, армированную однонаправленными бесконечными волокнами, поперечные сечения которых имеют форму эллипса. Будем предполагать, что матрица изотропная, а волокна обладают ортотропной симметрией упругих свойств, причем в процессе нагружения в матрице возникают микроразрушения, моделируемые случайно расположенными пустыми микропорами квазисферической формы. Будем считать, что заданы макродеформации композита $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$, тогда макронапряжения в композите

$\langle \sigma_{ij} \rangle$ связаны с ними соотношениями

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \lambda_{ijkl}^* \langle \varepsilon_{kl} \rangle, \quad (1)$$

в которых λ_{ijkl}^* – тензор эффективных упругих модулей, определяемый как

функция тензора упругих модулей поврежденных компонентов [10] $\lambda_{ijkl}^{[1]}$, $\lambda_{ijkl}^{[2]}$, объемного содержания включений c_1 и параметра характеризующего эллипсоидальное волокно \bar{t}_2 , т.е.

$$\lambda_{ijkl}^* = \lambda_{ijkl}^* \left(\lambda_{ijkl}^{[1]}, \lambda_{ijkl}^{[2]}, c_1, \bar{t}_2 \right), \quad \bar{t}_2 = t_2 / t_1; \quad (2)$$

t_1, t_2 – размеры полуосей эллипса в направлении осей x_1, x_2 ; индексы 1 и 2 сверху обозначают соответственно включения и матрицу.

Тензоры модулей упругости поврежденных компонентов $\lambda_{ijkl}^{[1]}, \lambda_{ijkl}^{[2]}$ определим [11] через тензоры модулей упругости скелетов компонентов $\lambda_{ijkl}^1, \lambda_{ijkl}^2$ и их пористости p_1, p_2 , характеризующие поврежденность:

$$\lambda_{ijkl}^{[1]} = \lambda_{ijkl}^{[1]} \left(\lambda_{ijkl}^1, p_1 \right), \quad \lambda_{ijkl}^{[2]} = \lambda_{ijkl}^{[2]} \left(\lambda_{ijkl}^2, p_2 \right). \quad (3)$$

Зная эффективные модули упругости и макродеформации композита, можно определить деформации в матрице композита

$$\langle \varepsilon_{kl} | 2 \rangle = \left(I_{klpq} + c_2 \left(\langle \lambda_{klmn} \rangle - \lambda_{klmn}^* \right) \left(\lambda_{mnpq}^{[3]} \right)^{-1} \right) \langle \varepsilon_{pq} \rangle. \quad (4)$$

Здесь

$$\langle \lambda_{klmn} \rangle = c_1 \lambda_{klmn}^{[1]} + c_2 \lambda_{klmn}^{[2]}, \quad \lambda_{mnpq}^{[3]} = \lambda_{mnpq}^{[1]} - \lambda_{mnpq}^{[2]}. \quad (5)$$

Средние напряжения в матрице $\langle \sigma_{ij} | 2 \rangle$ связаны с ее средними деформациями $\langle \varepsilon_{kl} | 2 \rangle$ следующим образом:

$$\langle \sigma_{ij} | 2 \rangle = \lambda_{ijkl}^{[2]} \langle \varepsilon_{kl} | 2 \rangle. \quad (6)$$

Средние по скелету матрицы напряжения $\langle \sigma_{ij}^2 \rangle$ связаны со средними напряжениями в матрице $\langle \sigma_{ij} | 2 \rangle$ зависимостями

$$\langle \sigma_{ij}^2 \rangle = \frac{1}{1 - p_0} \langle \sigma_{ij} | 2 \rangle. \quad (7)$$

Тогда на основании (1), (5) – (7) напряжения $\langle \sigma_{ij}^2 \rangle$ могут быть определены через макродеформации всего композита:

$$\langle \sigma_{ij}^2 \rangle = \frac{1}{1 - p_0} \lambda_{ijmn}^{[2]} \left(I_{mnkl} + c_2 \left(\langle \lambda_{mnkl} \rangle - \lambda_{mnkl}^* \right) \lambda_{klpq}^{[3]} \right)^{-1} \langle \varepsilon_{pq} \rangle. \quad (8)$$

Если процесс накопления повреждений происходит в матрице, примем критерий кратковременного разрушения в микрообъеме неповрежденной части материала матрицы в форме Губера-Мизеса [9]

$$I_{\sigma}^2 = \left(\left\langle \sigma_{ij}^2 \right\rangle' \left\langle \sigma_{ij}^2 \right\rangle' \right) = k_2, \quad (9)$$

где $\left\langle \sigma_{ij}^2 \right\rangle'$ – девиатор средних по неповрежденной части материала матрицы напряжений; k_2 – предельное значение инварианта I_{σ}^2 , являющееся случайной функцией координат.

Одноточечную функцию распределения $F(k_2)$ параметра k_2 можно описывать степенным законом на конечном интервале [1]:

$$F(k_2) = \begin{cases} 0, & k_2 < k_0 \\ \left(\frac{k_2 - k_0}{k_1 - k_0} \right)^{\alpha}, & k_0 \leq k_2 \leq k_1, \\ 1, & k_2 \geq k_1 \end{cases} \quad (10)$$

или на полубесконечном интервале распределением Вейбулла:

$$F(k_2) = \begin{cases} 0, & k_2 < k_0 \\ 1 - \exp\left(-n(k_2 - k_0)^{\alpha}\right), & k_2 \geq k_0 \end{cases} \quad (11)$$

Здесь k_0 – минимальная величина предельного значения k_2 , с которого начинается разрушение в некоторых микрообъемах материала; k_1 , n , α – постоянные, характеризующие разброс микропрочности в материале.

Примем, что случайное поле предела микропрочности k_2 является статистически однородным, что характерно для реальных материалов, а размеры единичных микроразрушений и расстояний между ними пренебрежимо малы по сравнению с размерами рассматриваемого макрообъема материала. Тогда имеет место свойство эргодичности, согласно которому функция распределения $F(k_2)$ определяет относительное содержание неразрушенной части материала матрицы, где предел микропрочности меньше соответствующего значения k_2 . Поэтому при ненулевых напряжениях $\left\langle \sigma_{ij}^2 \right\rangle$ функция $F(I_{\sigma}^2)$ определяет согласно (9) – (11) относительное содержание мгновенно разрушенных микрообъемов материала матрицы. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то, принимая начальную пористость матрицы равной p_0 , можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов [1]:

$$p = p_0 + F \left(I_{\sigma}^2 \right) (1 - p_0). \quad (12)$$

Тогда на основании уравнений (1) – (12), напряжения по скелету матрицы $\langle \sigma_{ij}^2 \rangle$ могут быть определены через макродеформации всего композита $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$. Подставляя (9) в (12), получаем систему уравнений для определения пористости матрицы p , как функции макродеформаций

$$p = p \left(\langle \varepsilon_{kl} \rangle \right). \quad (13)$$

Подставляя в (2)–(11) вместо p_0 значение p , получаем нелинейные зависимости между $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$.

Метод решения. Исходя из изложенной выше модели рассмотрим задачу о деформировании композита представляющего собой изотропную матрицу, армированную ортотропными эллиптическими волокнами при условии, что микрповреждения происходят только в матрице, т.е. $p_2 \neq 0$. Переходя к матричным обозначениям мы можем определить 9 независимых постоянных тензора модулей упругости рассматриваемого композита λ_{11}^* , λ_{12}^* , λ_{13}^* , λ_{22}^* , λ_{23}^* , λ_{33}^* , λ_{44}^* , λ_{55}^* , λ_{66}^* [10]:

$$\lambda_{ij}^* = \langle \lambda_{ij} \rangle + c_1 c_2 L_{ij}, \quad \lambda_{pp}^* = \langle \lambda_{pp} \rangle + c_1 c_2 \frac{4M_{pp} \lambda_{pp}^{[3]2}}{1 - 4M_{pp} \lambda_{pp}},$$

($i, j = 1, 2, 3; p = 4, 5, 6$).

(14)

Здесь

$$L_{ij} = P_{1i} R_{1j} + P_{2i} R_{2j}, \quad \lambda'_{ij} = c_1 \lambda_{ij}^{[2]} + c_2 \lambda_{ij}^{[1]} - \lambda_{ij}^c, \quad \lambda_{ij}^{[3]} = \lambda_{ij}^{[1]} - \lambda_{ij}^{[2]}; \quad (15)$$

$$R_{nj} = M_{1n} \lambda_{1j}^{[3]} + M_{2n} \lambda_{2j}^{[3]}, \quad P_{nj} = N_{1n} \lambda_{1j}^{[3]} + N_{2n} \lambda_{2j}^{[3]} \quad (n = 1, 2); \quad (16)$$

$$M_{11} = -\frac{2}{\pi} \left(\lambda_{66}^c A_3 + \frac{\lambda_{22}^c}{t_2} A_3 \right), \quad M_{12} = -\frac{2}{\pi t_2} \left(\lambda_{12}^c + \lambda_{66}^c \right) A_2,$$

$$M_{22} = -\frac{2}{\pi t_2} \left(\lambda_{11}^c A_2 + \frac{\lambda_{66}^c}{t_2} A_1 \right), \quad M_{44} = -\frac{1}{2\pi t_2} B_1,$$

$$M_{55} = -\frac{1}{2\pi} B_2, \quad M_{66} = -\frac{1}{2\pi} \left(\lambda_{11}^c A_3 - \frac{2\lambda_{12}^c}{t_2} A_2 + \frac{\lambda_{22}^c}{t_2^4} A_1 \right), \quad (17).$$

причем суммирование по индексу p не производится. При этом λ_{ij}^c принимаются в виде [10]:

$$\lambda_{ij}^c = \begin{cases} \langle \lambda_{ij} \rangle, & \lambda_{ij}^{[1]} \leq \lambda_{ij}^{[2]} \\ \langle \lambda_{ij}^{-1} \rangle^{-1}, & \lambda_{ij}^{[1]} \geq \lambda_{ij}^{[2]} \end{cases}, \quad (18)$$

а величины A_j ($j = 1, 2, 3$) будут иметь различную форму в зависимости от знака параметра $Q = f^2 - q$, где

$$f = \frac{\lambda_{11}^c \lambda_{22}^c - \lambda_{12}^c (\lambda_{12}^c + 2\lambda_{66}^c)}{t_2^{-2}}, \quad q = \frac{4\lambda_{11}^c \lambda_{22}^c \lambda_{66}^c}{t_2^{-4}}. \quad (19)$$

При $Q > 0$, $p > 0$ имеем

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\pi t_2^{-4}}{2 \left(t_2^{-4} \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c \right) \lambda_{66}^c - t_2^{-4} f} \left[1 - \frac{\lambda_{66}^c \sqrt{\lambda_{11}^c} \left(-t_2^{-2} \sqrt{\lambda_{11}^c} + \sqrt{\lambda_{22}^c} \right) + t_2^{-2} f}{\sqrt{Q} \sqrt{\lambda_{22}^c \lambda_{66}^c}} \left(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} \right) \right], \\ A_2 &= - \frac{\pi t_2^{-4}}{2 \left(t_2^{-4} \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c \right) \lambda_{66}^c - t_2^{-4} f} \left[1 - \frac{\lambda_{66}^c \left(t_2^{-2} \sqrt{\lambda_{11}^c} + \sqrt{\lambda_{22}^c} \right)}{t_2^{-2} \sqrt{Q}} \left(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} \right) \right], \\ A_3 &= \frac{\pi t_2^{-4}}{2 \left(t_2^{-4} \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c \right) \lambda_{66}^c - t_2^{-4} f} \left[1 - \frac{\lambda_{66}^c \sqrt{\lambda_{22}^c} \left(t_2^{-2} \sqrt{\lambda_{11}^c} - \sqrt{\lambda_{22}^c} \right) + t_2^{-4} f}{t_2^{-4} \sqrt{Q} \sqrt{\lambda_{11}^c \lambda_{66}^c}} \left(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} \right) \right]; \quad (20) \end{aligned}$$

$$z_1 = \frac{1}{2} (p + \sqrt{Q}), \quad z_2 = \frac{1}{2} (p - \sqrt{Q}).$$

Если $Q > 0$ и $p < 0$, то

$$A_1 = -A_2 = A_3 = -\frac{\pi t_2^{-4}}{2 \left(t_2^4 \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c \right) \lambda_{66}^c - t_2^4 f}, \quad (21)$$

При $Q = 0$ и $p > 0$

$$A_1 = \frac{\pi t_2^{-4} \left(4 \sqrt{\lambda_{22}^c} - 4 t_2^{-2} 4 \sqrt{\lambda_{11}^c} \right)}{2 \lambda_{66}^c 4 \sqrt{\lambda_{22}^c} \left(t_2^4 \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c - 10 t_2^{-2} \sqrt{\lambda_{11}^c \lambda_{22}^c} \right)},$$

$$A_2 = -\frac{\pi t_2^{-2}}{4 \lambda_{66}^c 4 \sqrt{\lambda_{11}^c \lambda_{22}^c} \left(t_2^2 4 \sqrt{\lambda_{11}^c} + 4 \sqrt{\lambda_{22}^c} \right)^2},$$

$$A_3 = \frac{\pi t_2^{-4} \left(t_2^2 4 \sqrt{\lambda_{11}^c} - 4 \sqrt{\lambda_{22}^c} \right)}{2 \lambda_{66}^c 4 \sqrt{\lambda_{11}^c} \left(t_2^4 \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c - 10 t_2^{-2} \sqrt{\lambda_{11}^c \lambda_{22}^c} \right)}, \quad (22)$$

Если $Q = 0$, $p < 0$, то

$$A_1 = -A_2 = A_3 = \frac{\pi t_2^{-4}}{2 \lambda_{66}^c \left(t_2^4 \sqrt{\lambda_{11}^c} + \sqrt{\lambda_{22}^c} \right)}, \quad (23)$$

При $Q < 0$

$$A_1 = \frac{\pi t_2^{-4}}{2 \left(t_2^4 \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c \right) \lambda_{66}^c - t_2^4 f} \left[1 - \frac{\lambda_{66}^c \sqrt{\lambda_{11}^c} \left(\sqrt{\lambda_{22}^c} - t_2^{-2} \sqrt{\lambda_{11}^c} \right) + t_2^2 f}{\sqrt{f + \sqrt{q}} \sqrt{\lambda_{22}^c \lambda_{66}^c}} \right],$$

$$A_2 = -\frac{\pi t_2^{-4}}{2 \left(t_2^4 \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c \right) \lambda_{66}^c - t_2^4 f} \left[1 - \frac{\lambda_{66}^c \left(t_2^{-2} \sqrt{\lambda_{11}^c} + \sqrt{\lambda_{22}^c} \right)}{t_2^{-2} \sqrt{f + \sqrt{q}}} \right],$$

$$A_3 = \frac{\pi t_2^{-4}}{2 \left(t_2^4 \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c \right) \lambda_{66}^c - t_2^4 f} \left[1 - \frac{\lambda_{66}^c \sqrt{\lambda_{22}^c} \left(t_2^2 \sqrt{\lambda_{11}^c} - \sqrt{\lambda_{22}^c} \right) + t_2^4 f}{t_2^4 \sqrt{f + \sqrt{q}} \sqrt{\lambda_{11}^c \lambda_{66}^c}} \right]. \quad (24)$$

Определив тензор M_{ij} , на основе (14), (15) можно найти эффективные модули композита с ортотропными бесконечными волокнами.

Итерационную схему решения трансцендентного уравнения, описываемого соотношениями (1) – (12), можно представить следующим образом.

В n -ом приближении пористость матрицы $p_2^{(n)}$ связана с предельным значением интенсивности средних касательных напряжений в каркасе материала $k_2^{(n)}$, т.е. с интенсивностью средних касательных напряжений скелета $I_{(\sigma)}^{2(n)}$.

В $(n-1)$ -ом приближении интенсивность средних касательных напряжений скелета связана с текущей пористостью матрицы $p_2^{(n-1)}$, эффективными модулями упругости всего композита $\lambda_{ij}^{*(n-1)}$ и макродеформациями $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ согласно соотношениям (5) – (10); эффективные модули упругости также связаны с текущей пористостью матрицы $p_2^{(n-1)}$ в соответствии с формулами (2), (3).

Таким образом, на основании выражений (12) находим:

$$p_2^{(n)} = p_0 + (1 - p_0) F(k_2^{(n)}), \quad (25)$$

где

$$k_2^{(n)} = I_{\bar{\sigma}}^{2(n)}; \quad (26)$$

$$F(k_2^{(n)}) = \begin{cases} 0, & k_2^{(n)} < k_0 \\ 1 - \exp\left(-m_2(k_2^{(n)} - k_0)^{\alpha_2}\right), & k_2^{(n)} \geq k_0 \end{cases}. \quad (27)$$

Согласно соотношениям (5)–(9) имеем

$$I_{\bar{\sigma}}^{2(n)} = I_{\bar{\sigma}}^{2(n)} \left(\lambda_{ij}^{*(n-1)}, p_2^{(n-1)}, \langle \varepsilon_{kl} \rangle \right), \quad (28)$$

причем из (2)–(12) следует, что

$$\lambda_{ij}^{*(n-1)} = \lambda_{ij}^* \left(\lambda_{ij}^1, \lambda_{ij}^2, c_1, p_2^{(n-1)}, \bar{t}_2 \right). \quad (29)$$

Таким образом, уравнения (2)–(29) позволяют определить эффективные упругие характеристики изотропного материала армированного бесконечными ортотропными волокнами в зависимости от макродеформаций согласно равенству

$$\lambda_{ij}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{ij}^{*(n)}. \quad (30)$$

Задавая макродеформации, которым подвергается материал и определив его эффективные упругие характеристики, на основании выражений (1)–(24) можно вычислить макронапряжения.

Анализ результатов численных исследований. Используя изложенную методику и полученные соотношения баланса пористости, в качестве примера, построим нелинейную диаграмму макродеформирования и исследуем поведение композита на основе изотропной матрицы с ортотропными эллиптическими волокнами, для двухосного растяжения

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0, \quad \langle \varepsilon_{22} \rangle = 0,02.$$

В качестве включений и матрицы взяты соответственно топаз и эпоксидная смола с характеристиками неповрежденной части

$$\lambda_{11}^1 = 287 \text{ ГПа}, \quad \lambda_{22}^1 = 365 \text{ ГПа}, \quad \lambda_{33}^1 = 300 \text{ ГПа},$$

$$\lambda_{23}^1 = 90 \text{ ГПа}, \quad \lambda_{13}^1 = 85 \text{ ГПа}, \quad \lambda_{12}^1 = 128 \text{ ГПа},$$

$$\lambda_{44}^1 = 110 \text{ ГПа}, \quad \lambda_{55}^1 = 135 \text{ ГПа}, \quad \lambda_{66}^1 = 133 \text{ ГПа};$$

$$E_2 = 3 \text{ ГПа}, \quad \nu_2 = 0,35,$$

объемной концентрации включений, начальных пор в матрице и волокна

$$c_1 = 0,4, \quad p_0 = 0; 0,2; 0,4, \quad \bar{t}_2 = 2,$$

при заданных параметрах функции распределения микропрочности матрицы

$$\alpha_2 = 2, \quad n = 10^3; 2 \times 10^4, \quad k_0 = 0,015 \text{ ГПа}.$$

На рис. 1–3 изображены кривые зависимостей соответственно $\langle \sigma_{11} \rangle$, $\langle \sigma_{22} \rangle$ и $\langle \sigma_{33} \rangle$ в зависимости от $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ для различных значений параметров p_0 и n , а также без учета разброса микропрочности (предполагается,

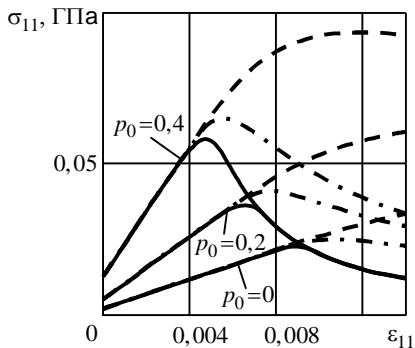


Рис. 1

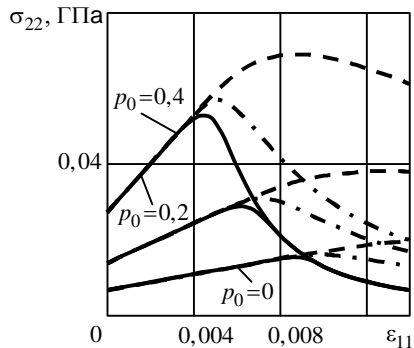


Рис. 2

что k_2 является постоянной величиной равной k_0). Сплошные линии соответствуют случаю, когда не учитывается разброс микропрочности, а пунктирные и штрих-пунктирные линии – случаям учета разброса микропрочности с параметрами $\alpha_2 = 2$, $n = 10^3$ и $\alpha_2 = 2$, $n = 2 \times 10^4$. Как видно, до момента возникновения повреждений все три кривые совпадают. Кривые, учитывающие разброс микропрочности, являются более гладкими без изломов, причем, варьируя параметры n и α_2 для каждого конкретного материала теоретическую кривую макродеформирования можно максимально приблизить к экспериментальной. Из графиков также видно, что кривые, полученные без учета разброса микропрочности, не учитывают влияния начальной пористости p_0 на поведение материала после начала образования микротрещин; диаграммы макродеформирования, в которых учитывается разброс микропрочности, существенно зависят от начальной пористости.

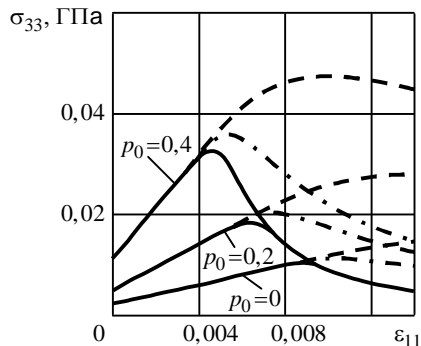


Рис. 3

РЕЗЮМЕ. Викладено теорію мікропошкодження матеріалів на основі ізотропної матриці і нескінчених ортотропних волокон. Мікроруйнування моделюються порожніми порами. Критерій руйнування в мікрооб'ємі приймається у формі Губера-Мізеса, де границя міцності є випадковою функцією координат із степеневим розподілом або розподілом Вейбулла. Напружено-деформований стан та ефективні властивості матеріалу визначаються на основі рівнянь теорії пружності для матеріалів на основі ізотропної матриці і нескінчених ортотропних волокон. Замикання рівнянь деформування і мікропошкоджуваності здійснюється на основі рівнянь балансу пористості. Побудовано нелінійні залежності сумісних процесів деформування таких матеріалів і мікропошкодження матриці від макродеформацій.

SUMMARY. The model of nonlinear deformation of stochastic composites under microdamaging is developed for the case of orthotropic composite, when the microdamages are accumulated in the matrix. The composite is treated as isotropic matrix strengthened by orthotropic unlimited fibers. It is assumed that the loading process leads to accumulation of damages in matrix. Fractured microvolumes are modelled by a system of randomly distributed quasi spherical pores. The porosity balance equation and relations for determining the effective elastic modules for the case of orthotropic components are taken as basic relations. The fracture criterion is assumed to be given as the limit value of the intensity of average shear stresses occurring in the undamaged part of the material. Basing on the analytical and numerical approach the algorithm for determination of nonlinear deformative properties of such a material is constructed. The nonlinearity of composite deformations is caused by finiteness of deformations. Using the numerical solution the nonlinear stress-strain diagrams for an orthotropic composite for the case of biaxial tension are obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. *Khoroshun L. P.* Principles of the micromechanics of material damage. 1. Short-term damage // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – Vol. 34, № 10. – P. 120–127. 2. *Khoroshun L. P., Nazarenko L. V.* Model of short-term damaging of transversally isotropic materials // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – Vol. 37, № 1. – P. 74–83. 3. *Khoroshun L. P., Shikula E. N.* Deformation of composite material under microdestructions // *Int. Appl. Mech.* – 1996. – Vol. 32, № 6. – P. 52–58. 4. *Khoroshun L. P., Shikula E. N.* Effect of the spread of strength characteristics on the deformation of granular composite under microdestructions // *Int. Appl. Mech.* – 1997. – Vol. 33, № 8. – P. 39–45. 5. *Khoroshun L. P., Shikula E. N.* To theory of short-term microdestructions of composite materials of granular structure under temperature influences // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – Vol. 38, № 1. – P. 79–87. 6. *Khoroshun L. P., Shikula E. N.* Short-term microdestructions of fibrous materials with transversally isotropic fibers under temperature influences // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – Vol. 38, № 6. – P. 74–83. 7. *Khoroshun L. P., Shikula E. N.*, Short-term microdamageability of a fibrous composites with physically nonlinear matrix and microdamaged reinforcement // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – Vol. 42, № 2. – P.127–135. 8. *Khoroshun L. P., Nazarenko L. V.* Deformation and microdamaging of discretely-fibrous composites with transversally-isotropic components // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – Vol. 39, № 6. – P. 696–703. 9. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 311 с. 10. *Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Шикула Е. Н., Назаренко Л. В.* Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – К.: Наук. думка, 1993. – 390 с. – (Механика композитов: в 12-ти т.; Т. 3). 11. *Nazarenko L. V.* Thermoelastic Properties of Orthotropic Porous Materials // *Int. Appl. Mech.* – 1997. – Vol. 33, № 2. – P. 114–122.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 29.01.2008

УДК 539.3

А. Н. СОЛОВЬЕВ, д-р физ.-мат. наук,
П. С. КУРБАТОВА, *Н. И. САПРУНОВ*

О РЕКОНСТРУКЦИИ ДЕФЕКТОВ В УПРУГИХ ТЕЛАХ С ПОМОЩЬЮ СОЧЕТАНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ И МКЭ

В последние годы благодаря универсальности искусственных нейронных сетей (ИНС) технологии решения задач, основанные на их применении, проникают во многие области естественных, технических и гуманитарных наук. Одно из таких приложений связано с решением обратных коэффициентных геометрических задач теории упругости, в частности, в важной практической области их применения – неразрушающий контроль и дефектоскопия. Краткий обзор методов неразрушающего контроля представлен в работе [1]. В работе [2] дан обзор (до 1995 г.) методов искусственного интеллекта, использующих нейронные сети и интеллектуальные системы, с приложением к ультразвуковой дефектоскопии, а в [3] представлен обзор статей, посвященных моделированию механического поведения упрочненных нитями полимеркомпозитных материалов с помощью ИНС. В работах [4, 5] приведен анализ применения нейросетевых технологий в исследованиях в различных сферах бизнеса, в том числе в информационных системах и некоторых производствах, включающих, в частности, производство оборудования для дефектоскопии и диагностики.

В настоящей статье рассматриваются задачи идентификации эксплуатационных и технологических дефектов, в качестве которых выбраны трещины, выходящие на границу тела, и полости или сквозные отверстия в несущих элементах конструкций, в предположении, что берега трещин не взаимодействуют, а внутренние границы полостей свободны от усилий. При этом реконструкция трещин производится на основе спектрального зондирования, а определение геометрии отверстий (координат центра и радиуса) – на основе позиционного зондирования. В качестве классификатора поврежденностей используются ИНС с архитектурой многослойного персептрона (МСП) и, обучаемые методом обратного распространения ошибки «back propagation» (BP) [6]. Обучение разработанных ИНС производится на основе сочетания с конечно-элементным (КЭ) комплексом ACELAN, в котором строятся выборки входных данных с помощью решения прямых задач.

Постановка прямой и обратной задач. Рассматриваются установившиеся или собственные колебания упругих тел, которые описываются краевой задачей (прямая задача)

$$\sigma_{ij,j} = -\rho\omega^2 u_i, \quad \sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

$$u_i |_{S_u} = u_i^{(0)}, \quad \sigma_{ij} n_j |_{S_t} = p_i, \quad \sigma_{ij} n_j |_{S_d} = q_i, \quad (2)$$

где u_i – искомые компоненты вектора смещений; $u_i^{(0)}$ и p_i, q_i – известные компоненты вектора смещений и поверхностных нагрузок; σ_{ij} и c_{ijkl} – компоненты тензоров напряжения и модулей упругости; ρ – плотность материала; ω – круговая частота, S_d – внутренние поверхности трещины или отверстия.

В задачах идентификации дефектов требуется определить конфигурацию трещины (координаты выхода на поверхность, длину, угол наклона) или геометрию отверстия (координаты центра, характерный размер, например, радиус). Поэтому поверхности S_d являются неизвестными, что относит проблемы к обратным геометрическим задачам теории упругости. Для решения обратных задач реконструкции поверхности S_d необходима некоторая дополнительная информация, кроме той, что содержится в краевых условиях (2). Такой дополнительной информацией может служить \bar{U} – волновое поле смещений, измеренное на свободной поверхности S_0

$$u_i|_{S_0} = U_i(x, \omega), \text{ при } x \in S_0 \text{ и } \omega \in [\omega_b, \omega_e], \quad (3)$$

на основе которого получается дискретизированная информация: Ω – набор собственных частот (спектральное сканирование)

$$\Omega = \{\omega_{r1}, \omega_{r2}, \dots, \omega_{rN}\} \quad (4)$$

или Ψ – набор амплитуд смещений при установившихся колебаниях в некотором наборе точек x_k (позиционное сканирование) и при наборе частот ω_m (частотное сканирование)

$$\Psi = \{U_i(x_k, \omega_m) | k = \overline{1, K}, m = \overline{1, M}\}, \quad x_k \in S_0, \quad \omega_m \in [\omega_b, \omega_e]. \quad (5)$$

Таким образом, в виде Ω или Ψ имеем некоторый дискретный набор входной информации X .

Схема решения обратной задачи. Решение обратной задачи предполагает реконструкцию поверхности S_d , которая очевидным образом может быть параметризована. Кроме того, при определенной априорной информации число неизвестных параметров конечно. Так, при реконструкции плоских или прямолинейных трещин такими параметрами являются координаты выхода трещины на поверхность, длина трещины и угол ее наклона, а при реконструкции эллиптических отверстий – координаты центра, полуоси и углы их наклона. Кроме этого, для практической цели оценки поврежденности конструкции важным является ответы на следующие вопросы: имеется ли поврежденное состояние. Если таковое есть, то остается ли конструкция работоспособной и каков ее ресурс живучести. Эти обстоятельства позволяют разделить искомую информацию на классы и сводить

задачу реконструкции поврежденного состояния к задаче классификации конечного числа параметров, т.е. определять дискретный выходной набор Y . Задача определения оператора $F: X \rightarrow Y$ эффективно решается с помощью ИНС, с архитектурой МСП. При этом оператор F определяется архитектурой ИНС (количеством слоев и нейронов в них), видом функции активации, набором W – синаптических весовых коэффициентов, включая пороговые значения, причем если первые могут быть назначены, то множество W (подмножество определенного векторного конечномерного пространства) должно быть определено в процессе обучения ИНС.

Обучение персептрона происходит с помощью алгоритма ВР (с учителем). Обучение методом ВР предполагает: наличие обучающей выборки (набора $\{X_\alpha, Y_\alpha\} \alpha = 1, 2, \dots, P$), прямой и обратный проход по слоям сети. Содержанием обратного прохода является коррекция ошибок, в частности минимизация среднеквадратичной ошибки

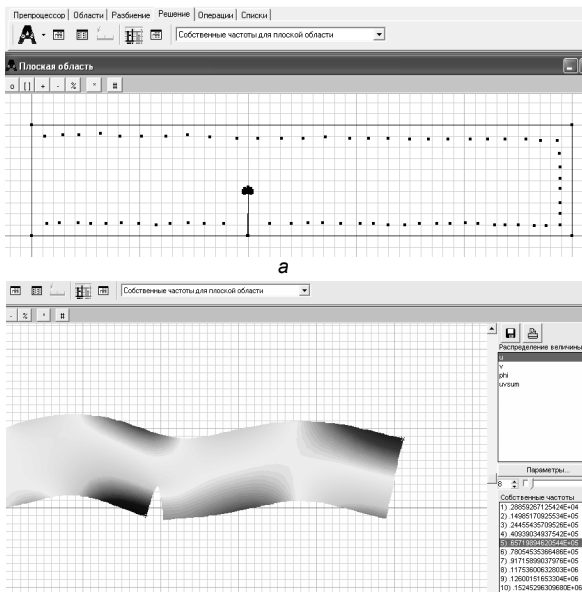
$$E(W) = \sum_{\alpha=1}^P \|F(X_\alpha, W) - Y_\alpha\|. \quad (6)$$

При прямом проходе входной вектор подается на входной слой и распространяется от слоя к слою, в результате генерируется набор выходных сигналов - реакция сети на данный входной образ. Синаптические веса настраиваются в соответствии с правилом коррекции ошибок во время обратного хода и формируется сигнал ошибки от слоя к слою в обратном направлении, а также по всем входным сигналам. Обучающая выборка $\{X_\alpha, Y_\alpha\}$ может быть построена на основе решения прямых задач (1)-(2) с известными размерами дефектов (поверхность S_d определена). Следует отметить, что объем такой выборки, может быть довольно значительным, что предполагает в данном случае наличие эффективного численного алгоритма решения прямой задачи, а также возможность множественного решения задач, например в пакетном режиме использования соответствующего ПО (программного обеспечения). В настоящей работе таким ПО является КЭ комплекс ACELAN, в котором имеются эти возможности [8]. В результате решения серии прямых задач в ACELAN определяется набор $\{X_\alpha, Y_\alpha\}$ на основе соотношений (4) или (5).

Следует отметить, что механизм реализации метода ВР - многопараметрический процесс. Некоторые из параметров являются аналогом многомерных начальных точек - начальных значений. Известно, успех оптимизации существенно зависит от более или менее удачного выбора начальных значений. В нашем случае начальные значения - веса задаются случайным образом, выбираются веса равномерно распределенные с нулевым средним, а диапазон их изменения существенно зависит от числа входящих нейронов (m) текущего скрытого слоя. Таким образом, для успешной работы сети выбирается вполне определенная дисперсия $\sigma_w = m^{-1/2}$.

Кроме того все входные переменные должны быть предварительно обработаны так, чтобы среднее значение по всему обучающему множеству было близко к нулю, иначе будет сложно их сравнивать со стандартным отклонением. Наконец, при разбиении на классы в случае, например, двоичных целевых значений $[0, 1]$, во время обучения сети их надо изменить на небольшое значение ε , т.е. $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, во избежание насыщения синаптических весов. Далее, если в качестве активационной функции используется гиперболический тангенс, выходное множество следует сместить (нормировать) так, чтобы значения располагались в диапазоне линейной части функции гиперболического тангенса, т.е. $[-1, 1]$.

Описание результатов численных экспериментов. В качестве первого приложения разработанного ПО в среде MatLab рассмотрим плоскую задачу определения размера краевой трещины, перпендикулярной к границе в наблюдаемом месте. Дополнительная информация соответствует случаю спектрального сканирования. Формулировка обратной задачи состоит из соотношений (1), (2), (4) и сводится к минимизации функционала (6) на некоторой выборке $\{X_\alpha, Y_\alpha\}$ ($\alpha = \overline{1, P}$). При построения этой выборки в пакете ACELAN решается прямая задача (см. рис. 1) модального анализа для прямоугольной области (сталь: $E = 2,0 \times 10^{10}$ Н/м², $\nu = 0,29$, $\rho = 7,86 \times 10^3$ кг/м³), закрепленной по левой стороне с трещиной, выходящей на нижнюю сторону в точке на расстоянии $2/5$ ее длины от закрепленного края (рис. 1, а). У вершины трещины в связи с сингулярностью напряжений помещены дополнительные узлы конечноэлементной сетки. В качестве обучающей выборки используется множество собственных частот для задач, глубина трещины в которых изменяется в пределах $[0; 0,5]$ с шагом 0,01. Здесь и далее размеры даны в сантиметрах. Таким образом, обучающая выборка состоит из 50



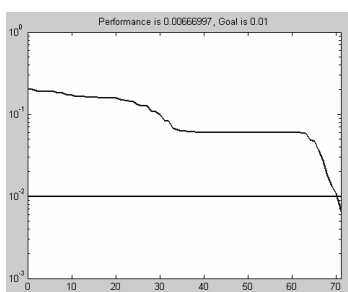
б
Рис. 1

векторов, размер каждого вектора определяется количеством рассматриваемых собственных частот. Следует отметить, что количество векторов и участок спектра имеет смысл выбирать после определенного анализа их зависимости от изменения размеров или других параметров классифицируемого объекта. Приведенные результаты соответствуют первым десяти частотам, хотя удовлетворительные результаты были достигнуты при использовании первых двух (табл. 1).

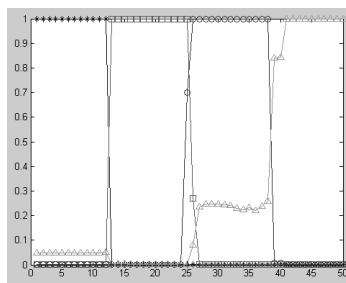
Таблица 1

Собственные частоты 1,0e+004*		Координаты трещин (глубина, см)	Реакция сети			
3,3117	1,7758	0,05	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3,1594	1,6641	0,17	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000
3,3090	1,6181	0,30	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000
2,7733	1,2257	0,48	0,0000	0,0000	0,0000	0,9900

В результате обучения персептрон делит входное пространство на четыре класса с глубиной трещины, не превосходящей 0,125; 0,25; 0,375; 0,5. Векторы цели (выходы) состоят из четырехмерных векторов, являющихся единичными базисами четырехмерного пространства. Процессы сходимости и оптимизации представлены на рис. 2. На рис. 2, а по оси ординат отложена ошибка при настройке весов сети; по оси абсцисс количество эпох, в течение которых осуществлялась оптимизация. Как видно, в результате 71 эпохи обучения ошибка не превосходит 0,0066, при этом в сети использовались 12 слоев с чередующимися функциями активации (линейной и сигмоидальной). Результат классификации представлен на рис. 2, б. Для



а



б

Рис. 2

изображения каждого класса выбран соответствующий маркер. Первый класс, изображенный звездочками, классифицирован четко со значениями, равными единице; второй класс - квадратики, равно как и третий - ромбы не внесли своего вклада в функционал ошибок, а вот четвертый класс, изображенный треугольниками классифицирован так, что существует некото-

рая вероятность попадания как в первый, так и в третий класс.

В табл. 1 представлены результаты предъявления ИНС данных отсутствующих в обучающей выборке. В первом столбце приведены первые две собственные частоты, во втором и третьем – размер трещины и результаты классификации. Для классификации трещин, как по основанию, так и по длине обучающая выборка была увеличена до 300 векторов, каждый из которых содержал 5 собственных частот. Процесс классификации осуществлялся с помощью двух ИНС, первая классифицировала наличие дефекта и относила его к одному из трех классов, вторая классифицировала трещины по длине на пять классов.

На рис.3 представлены матрица выходов первой ИНС и процесс обучения (1000 эпох, $E=0,0121$, темп обучения 0,01 соответствовал лучшей сходимости). На рис. 4 дана матрица выходов и процесс обучения второй ИНС при делении на пять классов при использовании той же обучающей выборки (3000 эпох, $E=0,0521$). Анализ результатов представленных на рис. 3, 4 показывает, что при фиксированном объеме обучающей выборки предельный порог ошибки достигается при определенном числе эпох, после которого обучение сети может быть прекращено или должны быть введены новые данные.

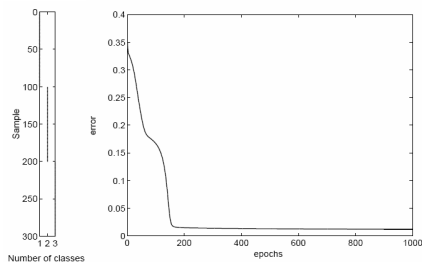


Рис. 3

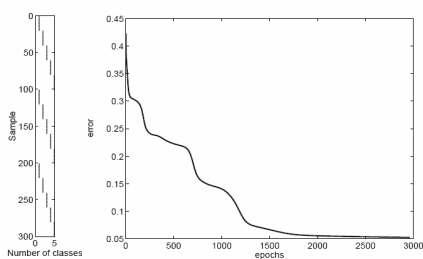


Рис. 4

В качестве второго примера рассматривается приложение ПО разработанного в среде C++, с помощью которого решается задача идентификации размера кругового отверстия в прямоугольной области (сталь, размеры 10 и 4 см), совершающего установившиеся колебания с частотой 12860 Гц (рис. 5, б). Правая сторона прямоугольника закреплена, а к левой приложена нормальная нагрузка, меняющаяся по линейному закону. На верхней грани было выбрано девять точек, равноудаленных друг от друга, амплитудные значения смещений которых представляют обучающий вектор. Следовательно, в этом случае обратная задача описывается уравнениями (1), (2) с дополнительной информацией соответствующей позиционному зондированию (5) и минимизацией функционала (6) на обучающей выборке при генерации которой радиус кругового отверстия, вырезанного в центре прямоугольника, изменяется от 0 до 1 см, с шагом 0,05 см. На рис. 5, а представлена схема размещения датчиков смещений (узлы на верхней стороне) и распределение вертикального смещения (справа) на деформи-

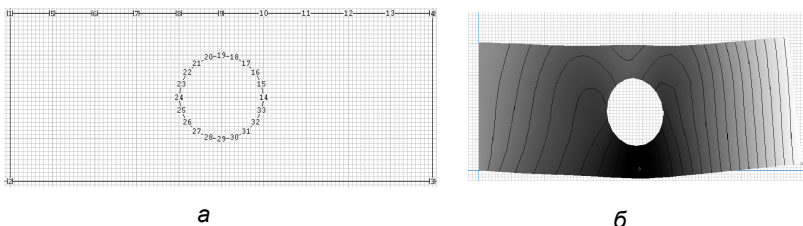


Рис. 5

рованном состоянии области (решение в ACELAN).

Расчеты по нахождению неизвестного радиуса были проведены для различных значений квадратичной ошибки. Проведенные численные эксперименты показали, что время обучения значительно возрастает с уменьшением погрешности в ошибке ИНС при ее обучении. Это связано с градиентной схемой обучения. Следует отметить, что в последнее время при обучении ИНС применяются генетические алгоритмы. В табл. 2 представлены результаты реконструкции радиуса отверстия (точное значение в первом столбце) по предъявляемым обученной НС входным данным, полученным также, как и набор обучаемых векторов в результате решения прямых задач в ACELAN. При определении координат центра дефекта рассматривались установившиеся колебания с частотой 11100 Гц. При гене-

Таблица 2

Искомый радиус	Результаты работы программы		
	При $E=0,0001$	При $E=0,001$	При $E=0,01$
0,00	0,016506	0,030340	0,051752
0,05	0,043600	0,032420	0,050491
0,10	0,099849	0,097987	0,087814
0,15	0,152461	0,151787	0,126447
0,20	0,195268	0,197852	0,247280
0,25	0,250088	0,251322	0,483163
0,30	0,307989	0,320501	0,303377
0,35	0,343948	0,340646	0,305505
0,40	0,400302	0,403105	0,380939
0,45	0,450077	0,447951	0,455971
0,50	0,499881	0,501753	0,504106
0,55	0,552064	0,549489	0,499499

рации обучающей выборки координаты центра кругового отверстия изменялись от 3 см до 7 см с шагом 0,4см по оси Ox и от 1,5 см до 2,5 см с шагом 0,1 см по оси Oy . Радиус отверстия постоянный и равен 1 см. Решение прямой задачи для определения смещений также проводилось в ACELAN. Расчеты по нахождению неизвестных координат центра отверстия были проведены для различных архитектур ИНС и квадратичных ошибок. В

Таблица 3

Исходные данные		$E=0,0001$		$E=0,0001$	
		$H=0,5$ 5 сл. 434		$H=0,5$ 5 сл. 434	
1,000000	0,000000	0,98	0,03	0,98	0,05
1,000000	1,000000	0,98	0,97	0,96	0,93
1,000000	0,111111	0,98	0,12	0,98	0,13
1,000000	0,222222	0,98	0,20	0,98	0,20
1,000000	0,333333	0,98	0,31	0,97	0,30
1,000000	0,444444	0,98	0,42	0,97	0,43
1,000000	0,555556	0,98	0,54	0,97	0,60
1,000000	0,666667	0,98	0,64	0,97	0,69
1,000000	0,777778	0,98	0,78	0,97	0,80
1,000000	0,888889	0,98	0,88	0,96	0,83
0,000000	0,000000	0,03	0,05	0,06	0,06
0,000000	1,000000	0,03	0,97	0,03	0,93
0,000000	0,111111	0,03	0,12	0,05	0,11
0,000000	0,222222	0,02	0,21	0,05	0,18
0,000000	0,333333	0,02	0,32	0,04	0,30
0,000000	0,444444	0,02	0,43	0,04	0,43
0,000000	0,555556	0,02	0,54	0,04	0,55
0,000000	0,666667	0,02	0,65	0,04	0,68
0,000000	0,777778	0,02	0,77	0,03	0,79
0,000000	0,888889	0,02	0,89	0,03	0,87

табл. 3 представлены результаты реконструкции центра. В первом столбце даны точные значения, второй столбец соответствует ИНС с 3 внутренними слоями, третий столбец – с 2 внутренними слоями.

Проведенные численные эксперименты показывают, что разработанные методы и их программная реализация могут быть применены в задачах идентификации поврежденного состояния ответственных элементов несущих конструкций в режиме on-line, если вместе с этими элементами будут поставляться предварительно обученные ИНС и основанные на них контроллеры. Кроме этого такие конструкции должны быть оборудованными некоторыми сенсорами, поставляющими информацию в контроллеры, причем оптимальное расположение сенсоров в конструкции

представляет отдельную задачу для каждой конструкции и ожидаемых деффектов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 07-08-13589-офи_ц, 07-08-12193-офи).

РЕЗЮМЕ. За допомогою розроблених штучних нейронних мереж з архітектурою багат шарового перцептронну та їх програмної реалізації у пакеті MatLab у вигляді незалежного додатка, в поєднанні з МСЕ у комплексі ACELAN виконується реконструкція тріщин, що виходять на поверхню, та скрізьких отворів в пружних тілах. Проведені чисельні дослідження для плоских задач показали ефективність запропонованої методики.

SUMMARY. With the help designed ANN and their program embodying in a combination with FEM in ACELAN reconstruction of flaws going out on a surface and holes in elastic solids is yielded.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. *J.D. Achenbach*. Quantitative nondestructive evaluation. // *Int. J. Sol. Struct.* – 2000. – Vol. 37. – P. 13-27. 2. *McNab A., Dunlop I.*, A review of artificial intelligence applied to ultrasonic defect evaluation // *Insight*. – 1995. – Vol. 37, № 1. – P. 11–16. 3. *Hany El Kadi*. Modeling the mechanical behavior of fiber-reinforced polymeric composite materials using artificial neural networks—A review. // *Composite Structures* – 2006. – Vol. 73. – P. 1–23. 4. *Wong B.K, Bodnovich T.A, Selvi Y.* A bibliography of neural network business applications research: 1988-September 1994. // *Expert Systems*. – 1995. – Vol. 12. – P. 253-262. 5. *Bo K. Wong, Vincent S. Lai, Jolie Lam*. A bibliography of neural network business applications research: 1994-1998. // *Computers & Operations Research* – 2000. – Vol. 27 – P. 1045-1076. 6. *Сальмон Хайкин* Нейронные сети. // Университет McMaster, Гамильтон, Онтарио, Канада. 7. *Norhisham Bakhary, Hong Hao, Andrew J. Deeks*. Damage detection using artificial neural network with consideration of uncertainties. // *Eng. Struct.* – 2007. – Vol. 29. – P. 2806-2815. 8. *Петушков А.Л., Соловьев А.Н.* О реализации пакетного режима работы конечно элементного комплекса ACELAN // *Соврем. Пробл. механики сплошной среды: Тр. VIII Междунар. конф., Ростов-на-Дону, 14-18 октября 2002 г.* – Ростов-н/Д: Новая книга, 2003. – Т. 2. – С. 149-153.

*Донской государственный технический университет
Южный федеральный университет, г.Ростов-на-Дону*

Поступила 10.03.2008

УДК 539.3

Б. М. СТАСЮК, канд. физ.-мат. наук

**ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О
ВЗАИМОДЕЙСТВИИ КОМПЛАНАРНЫХ ДИСКООБРАЗНЫХ
ТРЕЩИН В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

В работе [1] для некоторых видов областей путем сведения к задаче Римана-Гильберта теории аналитических функций исследована разрешимость двумерных интегро-дифференциальных уравнений первого рода типа ньютоновского потенциала

$$\Delta_x \iint_S \frac{\alpha(\xi)}{|x-\xi|} d\xi S = g(x), \quad x \in S. \quad (1)$$

Доказано, что в общем случае уравнение (1) не имеет единственного решения, но при существовании дополнительных условий на поведение функции $\alpha(\xi)$ в окрестности контура области интегрирования уравнение разрешимо однозначно. В механике разрушения, где плотность интегрального ядра имеет физический смысл функции раскрытия трещины, такое условие следует из физической постановки задачи.

Проблема построения замкнутого аналитического решения уравнений вида (1) при произвольной правой части также решена лишь для некоторых областей интегрирования. В частности для круговой области интегрирования формула обращения имеет вид [1]

$$\alpha(x) = -\frac{1}{2\pi^3} \iint_S \frac{g(\xi)}{|x-\xi|} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2}}{a|x-\xi|} d\xi S, \quad (2)$$

где a – радиус области S . В случае постоянной правой части $g(x) = g_0$, решение уравнения (1) приобретает более простой вид:

$$\alpha(x) = -\frac{g_0}{\pi^2} \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2}, \quad (3)$$

Что же касается других топологических форм области интегрирования или проблемы взаимодействия не периодической системы нескольких трещин, то в литературе аналитические решения таких задач отсутствуют. В таких случаях принято применять численные или численно-аналитические методики решения интегральных уравнений [2]. Ниже получено приближенное аналитическое решение системы двумерных интегро-дифференциальных уравнений первого рода типа ньютоновского потенциала на примере задачи о взаимодействии двух круговых трещин в упругом пространстве. Найден-

ная формула может быть использована для проверки достоверности численных методик, применяемых в механике разрушения.

Постановка задачи. Пусть в одной плоскости однородного упругого пространства расположены две плоские круговые трещины, занимающие области S_1 , S_2 и имеющие радиусы a_1 , a_2 (рис. 1). Выберем в центре S_1 декартову систему координат $O_1 x_1 x_2 x_3$ так, чтобы противоположным поверхностям S_1^\pm трещины соответствовали значения $x_3 = \pm 0$. Аналогичным образом в центре S_2 выберем систему координат $O_2 y_1 y_2 y_3$. Расстояние между центрами трещин $d = |O_1 O_2|$. Предположим, что на бесконечности тело нагружено постоянными нормальными к поверхности трещин усилиями N_3 .

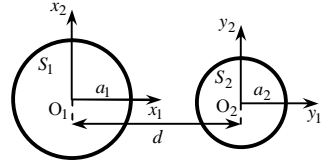


Рис. 1

Задача концентрации напряжений, в рассматриваемом случае, сводится к решению системы интегро-дифференциальных уравнений [3]

$$\Delta_x \iint_{S_1} \frac{\alpha_3^{(1)}(\xi)}{|x-\xi|} d\xi S_1 + \Delta_y \iint_{S_2} \frac{\alpha_3^{(2)}(\eta)}{|y-\eta|} d\eta S_2 = \frac{1-\nu}{G} N_3, \quad x, y \in S_1;$$

$$\Delta_x \iint_{S_1} \frac{\alpha_3^{(1)}(\xi)}{|x-\xi|} d\xi S_1 + \Delta_y \iint_{S_2} \frac{\alpha_3^{(2)}(\eta)}{|y-\eta|} d\eta S_2 = \frac{1-\nu}{G} N_3, \quad x, y \in S_2, \quad (4)$$

где $\alpha_3^{(j)}$ – функции, характеризующие нормальное раскрытие j -той трещины; G , ν – упругие постоянные материала тела содержащего трещины; Δ – двумерный оператор Лапласа.

Учитывая обращение в нуль плотностей потенциалов в уравнениях (4) на контуре областей интегрирования, в дальнейшем будем использовать новые неизвестные функции

$$\alpha_3^{(1)}(\xi) = \beta_1(\xi) \sqrt{a_1^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}, \quad \alpha_3^{(2)}(\eta) = \beta_2(\eta) \sqrt{a_2^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}. \quad (5)$$

В уравнениях (3) проведем операции дифференцирования:

$$\iint_{S_1} \frac{\sqrt{a_1^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{|x-\xi|^3} \beta_1(\xi) d\xi S_1 + \iint_{S_2} \frac{\sqrt{a_2^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}}{|y-\eta|^3} \beta_2(\eta) d\eta S_2 =$$

$$= \frac{1-\nu}{G} N_3, \quad x, y \in S_1;$$

$$\iint_{S_1} \frac{\sqrt{a_1^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{|x - \xi|^3} \beta_1(\xi) d_\xi S_1 + \iint_{S_2} \frac{\sqrt{a_2^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}}{|y - \eta|^3} \beta_2(\eta) d_\eta S_2 =$$

$$= \frac{1-\nu}{G} N_3, \quad x, y \in S_2.$$

Возможность внесения операции дифференцирования под знак интеграла доказана в [1] при условии обращения в нуль функций раскрытия трещины на контуре области интегрирования. Оставляя в левой части уравнений только сингулярные интегралы, получаем

$$\iint_{S_1} \frac{\sqrt{a_1^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{|x - \xi|^3} \beta_1(\xi) d_\xi S_1 = \frac{1-\nu}{G} N_3 - \iint_{S_2} \frac{\sqrt{a_2^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}}{|y - \eta|^3} \beta_2(\eta) d_\eta S_2;$$

$$\iint_{S_2} \frac{\sqrt{a_2^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}}{|y - \eta|^3} \beta_2(\eta) d_\eta S_2 = \frac{1-\nu}{G} N_3 - \iint_{S_1} \frac{\sqrt{a_1^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{|x - \xi|^3} \beta_1(\xi) d_\xi S_1. \quad (6)$$

Решение системы интегральных уравнений. Полученные уравнения обладают структурой, аналогичной уравнению (1) задачи о концентрации напряжений в окрестности изолированной трещины. Правая их часть соответствует нагрузке на поверхности трещины. Поэтому интегралы в правой части уравнений (6) можно считать поправкой к усилиям на поверхности трещины, вызываемым наличием соседней трещины. Вычисление этих интегралов дало бы возможность применить формулу обращения (2), но, к сожалению, это невозможно из-за взаимосвязанности системы уравнений (6). Проблему можно решить, пренебрегая в первом приближении взаимодействием трещин и принимая, согласно (3), $\beta_2(\xi)$ в первом уравнении (6) и $\beta_1(\xi)$ во втором уравнении (6) равным значению $(\nu - 1)N_3 / G\pi^2$. Таким образом, можно разделить систему (6) на независимые уравнения

$$\iint_{S_1} \frac{\sqrt{a_1^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{|x - \xi|^3} \beta_1(\xi) d_\xi S_1 = \frac{1-\nu}{G} N_3 \left(1 + \frac{1}{\pi^2} \iint_{S_2} \frac{\sqrt{a_2^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}}{|y - \eta|^3} d_\eta S_2 \right);$$

$$\iint_{S_2} \frac{\sqrt{a_2^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}}{|y - \eta|^3} \beta_2(\eta) d_\eta S_2 = \frac{1-\nu}{G} N_3 \left(1 + \frac{1}{\pi^2} \iint_{S_1} \frac{\sqrt{a_1^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{|x - \xi|^3} d_\xi S_1 \right). \quad (7)$$

Далее в точке, находящейся за пределами области интегрирования, необходимо вычислить интеграл вида $J(y) = \iint_{S_2} \frac{\sqrt{a_2^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}}{|y - \eta|^3} d_\eta S_2$. Для

этого перейдем к полярным координатам: $\eta_1 = y_1 + \rho \cos \varphi$; $\eta_2 = y_2 + \rho \sin \varphi$. Так как значение интеграла зависит лишь от расстояния центра области интегрирования до точки нахождения интеграла r , то достаточно рассмотреть частный случай, когда $y_1 = -r$, $y_2 = 0$ (рис. 2).

Уравнение контура S_2 имеет вид $\eta_1^2 + \eta_2^2 = a_2^2$ или в полярных координатах $(-r + \rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2 = a_2^2$. Вычислим значения ρ , при которых точка η находится на контуре S_2 : $\rho^2 + 2M\rho - N = 0$, где $M = -r \cos \varphi$; $N = a_2^2 - r^2$; ($N < 0$, $M < 0$). Решая квадратное уравнение,

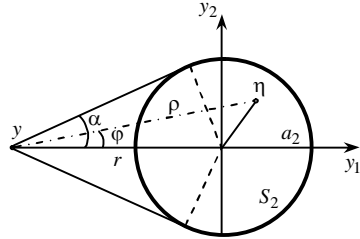


Рис. 2

получаем: $\rho_{1-2} = -M \pm \sqrt{M^2 + N}$. Угол обзора, под которым видна область трещины из точки y , обозначим через $\alpha = \arcsin(a_2 / r)$. Тогда искомый интеграл можно вычислять так:

$$J(y) = \iint_{S_2} \frac{\sqrt{a_2^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}}{|y - \eta|^3} d\eta S_2 = \int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi \int_{-M - \sqrt{M^2 + N}}^{-M + \sqrt{M^2 + N}} \frac{\rho \sqrt{N - 2M\rho - \rho^2}}{\rho^3} d\rho.$$

Проведем замену переменных $\rho = -M + t\sqrt{M^2 + N}$. Тогда $d\rho = dt\sqrt{M^2 + N}$; $\sqrt{N - 2M\rho - \rho^2} = \sqrt{M^2 + N}\sqrt{1 - t^2}$. Используя прием интегрирования по частям, будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{\left(t - M/\sqrt{M^2 + N}\right)^2} dt &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\frac{-\sqrt{1-t^2}}{t - M/\sqrt{M^2 + N}} \Big|_{-1}^1 - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-1}^1 \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2} \left(t - M/\sqrt{M^2 + N}\right)} \right] d\varphi = \\ &= - \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\int_{-1}^1 \frac{t - M/\sqrt{M^2 + N}}{\sqrt{1-t^2} \left(t - M/\sqrt{M^2 + N}\right)} dt + \int_{-1}^1 \frac{M/\sqrt{M^2 + N} dt}{\sqrt{1-t^2} \left(t - M/\sqrt{M^2 + N}\right)} \right] d\varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{M}{\sqrt{M^2+N}} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \left(t - M/\sqrt{M^2+N} \right)} \right] d\varphi = \\
&= -\pi \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[1 + \frac{M}{\sqrt{-N}} \right] d\varphi = -2\pi\alpha + \frac{\pi}{\sqrt{-N}} 2r \sin\alpha = \\
&= 2\pi \left[\frac{a_2}{\sqrt{r^2 - a_2^2}} - \arcsin\left(\frac{a_2}{r}\right) \right].
\end{aligned}$$

Здесь [4]

$$\int_{-a}^a \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2} (\xi - y)} = \pi \begin{cases} 0, & |y| < a \\ -\frac{\text{sign } y}{\sqrt{y^2 - a^2}}, & |y| > a \end{cases} \text{ и } \left| \frac{M}{\sqrt{M^2 + N}} \right| > 1.$$

Таким образом, первое уравнение системы (7) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \frac{\sqrt{a_1^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{|x - \xi|^3} \beta_1(\xi) d\xi S_1 &= \frac{1-\nu}{G} N_3 \times \\
&\times \left(1 + \frac{2}{\pi} \left[\frac{a_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 - a_2^2}} - \arcsin\left(\frac{a_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}\right) \right] \right), \quad x, y \in S_1.
\end{aligned}$$

Учитывая соотношения между координатами точки в локальных системах координат $x_1 = y_1 + d$; $x_2 = y_2$, окончательно получим

$$\iint_{S_1} \frac{\sqrt{a_1^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{|x - \xi|^3} \beta_1(\xi) d\xi S_1 = \frac{1-\nu}{G} N_3 \left(1 + \frac{2}{\pi} \Omega(x_1, x_2) \right), \quad x \in S_1,$$

$$\text{где } \Omega(x_1, x_2) = \frac{a_2}{\sqrt{(x_1 - d)^2 + x_2^2 - a_2^2}} - \arcsin\left(a_2 / \sqrt{(x_1 - d)^2 + x_2^2}\right).$$

Используя формулу обращения (2), получаем функции раскрытия трещины

$$\beta_1(x) = -\frac{1-\nu}{G} \frac{N_3}{\pi^2} \left(1 + \iint_{S_1} \frac{\Omega(\xi_1, \xi_2)}{\pi^2 |x - \xi| \sqrt{a_1^2 - x_1^2 - x_2^2}} \times \right.$$

$$\times \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a_1^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} \sqrt{a_1^2 - x_1^2 - x_2^2}}{a_1 |x - \xi|} d_\xi S_1 \Big). \quad (8)$$

Основными величинами, характеризующими концентрацию напряжений в окрестности контура трещины, являются коэффициенты интенсивности напряжений. Для их определения необходимы значения функций β_j ($j = 1, 2$) на контуре трещин. В частности, коэффициенты интенсивности напряжений нормального отрыва определяем по формуле [2]

$$K_1(x_0) = -2\pi \sqrt{a\pi} \frac{G}{1-\nu} \beta(x_0). \quad (9)$$

Развертывая функцию arctg в ряд для ликвидации неопределенности, и переходя к точке контура x_0 области трещины, находим

$$\beta_1(x_0) = -\frac{1-\nu}{G} \frac{N_3}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{\pi^2} \iint_{S_1} \Omega(\xi_1, \xi_2) \frac{\sqrt{a_1^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{a_1 |x_0 - \xi|^2} d_\xi S_1 \right).$$

Остальные члены ряда обращаются в нуль. Таким образом, для коэффициента интенсивности напряжений получим

$$K_1(x_0) = 2N_3 \sqrt{\frac{a_1}{\pi}} \left(1 + \frac{1}{\pi^2} \iint_{S_1} \Omega(\xi_1, \xi_2) \frac{\sqrt{a_1^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{a_1 |x_0 - \xi|^2} d_\xi S_1 \right). \quad (10)$$

Интеграл в (10) содержит интегрируемую сингулярность на контуре трещины. Ее ликвидация возможна с помощью численно-аналитической методики регуляризации [2] или численной методики регуляризации [5].

Числовые результаты. Для проверки формулы (10) результаты, полученные с ее помощью, сопоставлялись с известными в литературе результатами численного решения задачи [2, 6, 7]. Рассмотрен случай взаимодействия двух круговых трещин одинакового радиуса a , находящихся в одной плоскости. Для исключения влияния величины нагрузки на коэффициенты интенсивности напряжений, на рис. 3 представлены зависимости нормированных величин $K_1^*(x_0) = K_1(x_0)/k_\infty$, от угловой координаты точки контура трещины ($k_\infty = 2N_3 \sqrt{a/\pi}$ – коэффициент интенсивности напряжений для круговой изолированной трещины аналогичного ра-

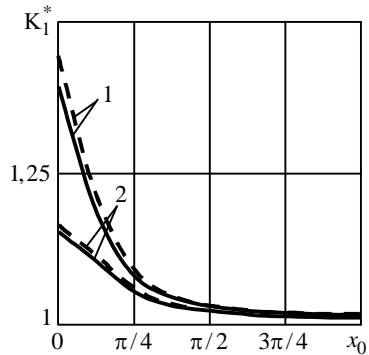


Рис. 3

диуса). Штриховыми и сплошными линиями обозначены результаты, полученные с помощью формулы (10) и численным методом. Кривые 1 и 2 соответствуют расстояниям $d = 2,05a$ и $d = 2,2a$.

Вышеизложенный метод показывает наименее точный результат в точках контура трещины, которые наиболее близки к соседней трещине, причем точность ухудшается при приближении трещин. Следует заметить, что коэффициент интенсивности напряжений определенный посредством метода малого параметра в первом приближении по точности значительно уступает выражению (10) при аналогичных исходных данных.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано методику визначення концентрації напружень в пружному безмежному тілі, що містить дві компланарні кругові тріщини, яка ґрунтується на точному зведенні задачі до системи ГІР. Для отримання аналітичного розв'язку задачі додатково визначено ефективно поле напружень, яке створює сусідня тріщина. Для визначення ефективного поля напружень використано замкнутий розв'язок задачі про розкриття ізольованої тріщини і явний вигляд ядер ГІР, які враховують взаємодію тріщин. Отримано замкнутий аналітичний вираз для КІН нормального відриву. Приведено порівняння результатів з відомими в літературі.

SUMMARY. The technique of definition of a stress concentration in the elastic solid, containing two coplanar penny-shaped cracks is offered. The technique is based on an exact reduction of a problem to boundary integral equations. For analytical solution of a problem the effective stress field is in addition defined. For determination of effective stress field are used the closed solutions of a problem on the isolated crack opening and an explicit form of boundary integral equation kernels which subject to interacting of cracks. The closed analytical form is deduced for stress intensity factor of normal mode. Comparison of results with known in the literature is given.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. Хай М. В. Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения. – К.: Наук. думка, 1993. – 254 с. 2. Кит Г. С., Хай М. В. Метод потенциала в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1989. – 283 с. 3. Кит Г. С., Хай М. В., Лаушник И. П. Первая основная задача теории упругости для тела с дискообразными трещинами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1978. – Вып. 7. – С. 26–32. 4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с. 5. Михаськив В. В., Стасюк Б. М. Метод граничных элементов в трехмерных статических задачах теории упругости для тела с включением неканонической формы // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 4. – С. 27–35. 6. Попов Г. Я., Шумихин С. А. Концентрация напряжений в неограниченной упругой среде возле круговых трещин, лежащих в одной плоскости // Актуальные пробл. механики деформируемых тел. – Днепропетровск, 1979. – С. 168–173. 7. Улитко А. Ф. Растяжение упругого пространства ослабленного двумя круговыми трещинами, расположенными в одной плоскости // Концентрация напряжений. – К.: Наук. думка, 1968. – Вып. 2. – С. 201–208.

Национальный университет "Львовская политехника"

Поступила 05.03.2008

УДК 539.3

А. А. БОБЫЛЕВ, канд. физ.-мат. наук, А. А. ШПОРТА

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О СОУДАРЕНИИ УПРУГИХ ТЕЛ МЕТОДОМ РАСЩЕПЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СХЕМ РУНГЕ-КУТТА

Задачи о соударении выпуклых упругих тел конечных размеров являются нелинейными динамическими задачами из-за наличия граничных условий в виде неравенств. Возможности аналитических методов решения таких задач весьма ограничены. Поэтому актуальной является разработка эффективных методов численного решения. Перспективным подходом к построению вычислительных алгоритмов решения динамических контактных задач с односторонними связями является применение вариационного метода [1] с последующим использованием для полудискретизации по времени полученных гиперболических вариационных неравенств различных разностных схем, а для полудискретизации по пространственным координатам – метода конечных элементов. В данной работе предложен вычислительный алгоритм решения динамических контактных задач с односторонними связями методом расщепления с использованием схем Рунге-Кутта.

Постановка задачи. Пусть упругие однородные изотропные тела занимают конечные области $\Omega^1 \in R^3$, $\Omega^2 \in R^3$, ограниченные замкнутыми поверхностями Γ^1 , Γ^2 с внешними нормальными векторами \vec{v}^1 и \vec{v}^2 . Под $u_i(x, t)$, $\varepsilon_{ij}(x, t)$, $\sigma_{ij}(x, t)$ будем понимать компоненты вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений в точке $x \in \Omega^1 \cup \Omega^2$ в момент времени t . Перемещения и деформации будем считать малыми. Напряжения в недеформируемом состоянии отсутствуют.

Поверхность Γ^n ($n=1, 2$), состоит из трех непересекающихся частей $\Gamma^n = \Gamma_u^n \cup \Gamma_q^n \cup \Gamma_c^n$. На частях Γ_u^n и Γ_q^n заданы перемещения $\vec{g}(x, t)$ и усилия $\vec{q}^n(x, t)$ соответственно. Пусть Γ_c^1 и Γ_c^2 – совокупности предельно возможных зон контакта тел Ω^1 и Ω^2 , $\vec{x}^2(x^1)$ – точка пересечения перпендикуляра из точки $x_1 \in \Gamma_c^1$ с границей Γ_c^2 . Взаимное расположение границ Γ_c^1 и Γ_c^2 в начальный момент времени $t=0$ определяется вектором начального зазора $\vec{x}^2(x^1) - \vec{x}^1$, модуль которого равен $\phi(x^1)$. Контактное взаимодействие рассматриваемых упругих тел описывается линеаризованными условиями идеального одностороннего контакта [1]

$$\begin{aligned}
u_v(x^1, t) + u_v(x^2, t) &\leq \phi(x^1), \\
\sigma_v(x^1, t) = \sigma_v(x^2, t) &\leq 0, \quad \sigma_\tau(x^1) = \sigma_\tau(x^2) = 0, \\
\sigma_v(x^1, t)[u_v(x^1, t) + u_v(x^2, t) - \phi(x^1)] &= 0, \quad x^1 \in \Gamma_c^1, \quad x^2(x^1) \in \Gamma_c^2, \quad (1)
\end{aligned}$$

где $u_v = u_i v_i$, $\sigma_v = \sigma_{ij} v_i v_j$, $\sigma_{\tau i} = \sigma_{ij} v_j - \sigma_v v_i$.

Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ тело Ω^1 находится в покое, а тело Ω^2 движется равномерно со скоростью $\bar{\psi}_0$, направленной вдоль нормали \bar{v}^2 в точке начального касания тел

$$\begin{aligned}
\bar{u}(x^1, 0) = 0, \quad \dot{\bar{u}}(x^1, 0) = 0, \quad x^1 \in \Omega^1; \\
\bar{u}(x^2, 0) = 0, \quad \dot{\bar{u}}(x^2, 0) = \bar{\psi}_0, \quad x^2 \in \Omega^2. \quad (2)
\end{aligned}$$

Рассматриваемая задача сводится к нахождению функций $u_i(x, t)$, $\varepsilon_{ij}(x, t)$, $\sigma_{ij}(x, t)$, удовлетворяющих в областях Ω^1 и Ω^2 уравнениям движения, соотношениям Коши, соотношениям закона Гука, граничным и начальным условиям. Динамический процесс рассматривается на конечном интервале времени $[0, T]$, соизмеримом с продолжительностью удара.

Метод решения. Для решения рассматриваемой контактной задачи используем вариационный подход [2]. Пусть $H(\Omega) \equiv [L_2(\Omega)]^3$, $V(\Omega) \equiv [W_2^1(\Omega)]^3$, где $W_2^1(\Omega)$ – пространство функций С. Л. Соболева. Перемещения точек упругих тел будем рассматривать как элементы функционального пространства

$$\begin{aligned}
X \equiv \{ (w^1, w^2) \in L_2(0, T; V(\Omega^1)) \otimes L_2(0, T; V(\Omega^2)) : \\
(\dot{w}^1, \dot{w}^2) \in L_2(0, T; H(\Omega^1)) \otimes L_2(0, T; H(\Omega^2)) \}.
\end{aligned}$$

Выделим из X множество кинематически допустимых перемещений Q , удовлетворяющих граничным условиям на Γ_u , кинематическим условиям из (1) и начальным условиям (2)

$$\begin{aligned}
Q = \{ w = (\bar{w}^1, \bar{w}^2) \in U : \bar{w}(x^n, t) = \bar{g}(x, t) \quad x \in A_u^n \quad n = 1, 2; \\
w_v(x^1, t) + w_v(x^2, t) \leq \phi(x^1) \quad x^1 \in A_c^1 \quad x^2(x^1) \in A_c^2; \\
\bar{w}(x^1, 0) = 0, \quad \dot{\bar{w}}(x^1, 0) = 0, \quad x^1 \in \Omega^1; \\
\bar{w}(x^2, 0) = 0, \quad \dot{\bar{w}}(x^2, 0) = \bar{\psi}_0, \quad x^2 \in \Omega^2 \}.
\end{aligned}$$

На основе результатов [2] можно показать, что решение

$\{\bar{u}^1(x, t), \bar{u}^2(x, t)\}$ рассматриваемой задачи в дифференциальной постановке удовлетворяет гиперболическому вариационному неравенству

$$\sum_{n=1}^2 \int_{\Omega} \rho^n \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial t^2} (w_i^n - u_i^n) d\Omega + \sum_{n=1}^2 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}^n) \varepsilon_{ij}(\bar{w}^n - \bar{u}^n) d\Omega - \sum_{n=1}^2 \int_{\Gamma_q} q_i^n (w_i^n - u_i^n) d\Gamma_q \geq 0, \quad \forall w, u \in Q. \quad (3)$$

Для дискретизации задачи (3) по пространственным координатам используем метод конечных элементов [3; 4]. Получим конечномерную задачу

$$(M\dot{U} + KU - Q, W - U) \geq 0, \quad \forall W, U \in Z,$$

для которой $U(t)$ – искомый вектор узловых перемещений; W – вектор возможных узловых перемещений; M , K – соответственно матрицы масс и жесткости рассматриваемой системы; Q – вектор внешней узловой нагрузки. Множество допустимых узловых перемещений Z имеет вид

$$Z = \left\{ U \in R^S : u_i = a_i, i \in J_1; u_k + u_m \leq b_k, (k, m) \in J_2 \right\},$$

где R^S – S -мерное эвклидово пространство; S – размерность конечномерной задачи; J_1 – множество номеров компонент вектора U , соответствующих перемещениям узлов, принадлежащих поверхности Γ_u ; J_2 – множество пар номеров компонент вектора U , которые соответствуют нормальным перемещениям расположенных друг против друга узлов, принадлежащих поверхностям Γ_c^1 и Γ_c^2 ; a_i , b_k – коэффициенты, равные соответственно значениям функций $g_j(x)$ и $\phi(x)$ в граничных узлах.

С целью упрощения вида ограничений выполним линейное параметрическое преобразование переменных $Y = GU$ такое [5], что

$$\begin{aligned} y_i &= u_i, \quad i \notin J_3 \cup J_4; \\ y_k &= (1/\sqrt{2})(u_k + u_m), \quad y_m = (1/\sqrt{2})(u_k - u_m), \quad (k, m) \in J_2, \end{aligned} \quad (4)$$

где J_3 , J_4 – множества соответственно из первых и вторых элементов пар $(k, m) \in J_2$. Выражения для элементов матриц G^{-1} и G^{-T} несложно получить в явном виде. В результате получим вариационное неравенство

$$\begin{aligned} (M_1\ddot{Y} + K_1Y - Q_1, W - Y) \geq 0 \quad \forall W, Y \in Z_1, \\ Z_1 = \left\{ Y \in R^S : y_i = a_i, i \in J_1; y_k \leq (1/\sqrt{2})b_k, k \in J_3 \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $M_1 = G^{-T} M G^{-1}$; $K_1 = G^{-T} K G^{-1}$; $Q_1 = G^{-T} Q$.

Представим вариационное неравенство (5) в виде системы соотношений, содержащей только первые производные по времени

$$(M_1 \dot{Y} + K_1 Y - Q_1, W - Y) \geq 0; \quad \dot{Y} = V. \quad (6)$$

Для дискретизации задачи по времени разобьем временную ось на равные отрезки $[t^k, t^{k+1}]$ ($k = 1, 2, \dots$), длины Δt . Под Y^k и V^k будем понимать векторы узловых перемещений и скоростей в момент времени t^k .

Интегрирование по времени соотношений (6) будем проводить методом расщепления с использованием схем Рунге-Кутты. При этом решение задачи на каждом временном шаге разбивается на два этапа: на первом из них методом Рунге-Кутты вычисляются промежуточные значения искомого параметров, не учитывая контактного взаимодействия тел, а на втором этапе – учитываются односторонние связи путем проектирования промежуточного решения на допустимое множество, которому должно принадлежать решение задачи. В настоящей работе используются семейства 2- и 4-этапных схем Рунге-Кутты [6]. Для 2-этапной схемы Рунге-Кутты

$$\begin{aligned} M_1 D_1 &= -K_1 Y^n + Q(t^n); \quad E_1 = V^n; \\ M_1 D_2 &= -K_1 (Y^n + b_{21} \tau D_1) + Q(t^n + \alpha_2 \tau); \quad E_2 = V^n + b_{21} \tau E_1; \\ \tilde{Y}^{n+1} &= Y^n + \tau(\sigma_1 E_1 + \sigma_2 E_2); \quad \tilde{V}^{n+1} = V^n + \tau(\sigma_1 D_1 + \sigma_2 D_2). \\ Y^{n+1} &= G^{-1} P' G(\tilde{Y}^{n+1}); \quad V^{n+1} = G^{-1} P''(G \tilde{Y}^{n+1}, G \tilde{V}^{n+1}). \end{aligned} \quad (7)$$

Для 4-этапной схемы Рунге-Кутты

$$\begin{aligned} M_1 D_1 &= -K_1 Y^n + Q(t^n); \quad E_1 = V^n; \\ M_1 D_2 &= -K_1 (Y^n + b_{21} \tau D_1) + Q(t^n + \alpha_2 \tau); \quad E_2 = V^n + b_{21} \tau E_1; \\ M_1 D_3 &= -K_1 (Y^n + b_{31} \tau D_1 + b_{32} \tau D_2) + Q(t^n + \alpha_3 \tau); \\ E_3 &= V^n + b_{31} \tau E_1 + b_{32} \tau E_2; \\ M_1 D_4 &= -K_1 (Y^n + b_{41} \tau D_1 + b_{42} \tau D_2 + b_{43} \tau D_3) + Q(t^n + \alpha_4 \tau); \\ E_4 &= V^n + b_{41} \tau E_1 + b_{42} \tau E_2 + b_{43} \tau E_3; \\ \tilde{Y}^{n+1} &= Y^n + \tau(\sigma_1 E_1 + \sigma_2 E_2 + \sigma_3 E_3 + \sigma_4 E_4); \\ \tilde{V}^{n+1} &= V^n + \tau(\sigma_1 D_1 + \sigma_2 D_2 + \sigma_3 D_3 + \sigma_4 D_4); \\ Y^{n+1} &= G^{-1} P' G(\tilde{Y}^{n+1}); \quad V^{n+1} = G^{-1} P''(G \tilde{Y}^{n+1}, G \tilde{V}^{n+1}). \end{aligned} \quad (8)$$

Учет ограничений в виде равенств и односторонних ограничений в виде неравенств производится с помощью оператора линейного преобразования

переменных G , определенного выражением (4), и операторов проектирования P' и P'' , которые имеют вид

$$P'_j(U) = \begin{cases} a_j, & j \in J_1; \\ \beta_1 b_j, & u_j \geq \beta_1 b_j, j \in J_3; \\ u_j, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$P''_j(U, V) = \begin{cases} 0, & j \in J_1; \\ 0, & u_j > \beta_1 b_j, \quad j \in J_3; \\ 0, & u_j = \beta_1 b_j, v_j \geq 0, j \in J_3; \\ v_j, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Описание результатов численных исследований. Для численной реализации полученного решения разработаны алгоритмы и составлен пакет прикладных программ. С использованием этого программного пакета исследована зависимость точности численных результатов от выбора параметров схем Рунге-Кутты и конечно-элементной сетки, а также проведено сравнение затрат машинного времени. В расчетах в качестве модельной рассматривалась плоская задача о соударении двух упругих тел, занимающих области

$$\Omega^1 = \left\{ x = (x_1, x_2) \in R^2 : -a/2 \leq x_1 \leq a/2, -b \leq x_2 \leq 0 \right\};$$

$$\Omega^2 = \left\{ x = (x_1, x_2) \in R^2 : -a/2 \leq x_1 \leq a/2, \phi(x) \leq x_2 \leq b \right\}.$$

На грани $x_2 = -b$ тела Ω^1 задавались граничные условия $u_2(x) = 0$. Остальные части поверхностей тел считались свободными от внешних нагрузок. Горизонтальные смещения системы тел исключались введением дополнительного условия $u_1(x) = 0, x_1 = 0$.

Если жесткость второго тела, движущегося с начальной скоростью ψ_0 , значительно превышает жесткость первого тела ($E_1/E_2 \geq 100$) и соотношение геометрических размеров тел такого, что $b/a \geq 10$, то рассматриваемая задача сводится к задаче об ударе жесткого тела по торцу упругого стержня. Для этого случая результаты сравнивались с аналитическим решением [7]. Для количественной оценки погрешности численного решения использовались три параметра:

$$\Delta u = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{|u_a^i - u_c^i|}{|u_a^i|}, \quad \Delta P = \frac{|P_a^{\max} - P_c^{\max}|}{|P_a^{\max}|}, \quad \Delta T = \frac{|T_a - T_c|}{T_a},$$

где k – количество шагов интегрирования по времени; u^i – перемещение

первого тела в центре площадки контакта на i -ом временном шаге; P^{\max} – максимальное значение усилия контактного взаимодействия; T – время соударения. Величины с нижними индексами a и c соответствуют аналитическому [7] и численному решениям. Параметры Δu , ΔP , ΔT характеризуют соответственно точности определения перемещений, определения максимального контактного усилия и численного нахождения времени соударения.

Из анализа результатов численного решения модельной задачи при $E_1/E_2 = 100$ и $b/a = 10$ следует, что оптимальные значения параметров схем для двухпараметрического семейства четырехэтапных методов Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации [6] равны $\alpha_2 \approx 0,3$, $\alpha_3 \approx 0,7$, а для однопараметрического семейства двухэтапных методов Рунге-Кутты второго порядка аппроксимации соответственно $\alpha_2 \approx 0,7$. Уменьшение шага сетки по пространственным координатам и по времени приводит к увеличению точности численных результатов. Для достижения погрешности определения перемещений $\Delta u = 0,02$ для двухэтапной схемы следует выбирать $\Delta t = \tau/6$ и равномерную сетку из 401×41 узлов, где τ – время прохождения упругой волны через один конечный элемент, а для четырехэтапной схемы – $\Delta t = \tau/4$ и равномерную сетку из 251×26 узлов. Дальнейшее измельчение сетки как по пространственным координатам, так и по времени не приводит к существенному уменьшению погрешности численного решения, а приводит лишь к увеличению затрат машинного времени. При этом параметр ΔP равен $0,28$ для четырехэтапной схемы и $0,34$ для двухэтапной схемы.

РЕЗЮМЕ. Розроблено алгоритм чисельного розв'язання задач співудару пружних тіл методом розщеплення з використанням схем Рунге-Кутта. Методом обчислювального експерименту встановлено оптимальні значення параметрів обчислювальних схем.

SUMMARY. Computational algorithm for solving elastic impact problems with the splitting method based on Runge-Kutt's schemes was developed. The optimal values of the schemes were determined by the computational experiment method.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. *Механика* контактных взаимодействий. – М.: Физматлит, 2001. – 672 с. 2. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 384 с. 3. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Трёмольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 574 с. 4. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с. 5. *Бобылев А. А.* Об одном варианте численного решения контактных задач теории упругости // Решение прикладных задач математической физики и дискретной математики. – Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1987. – С. 23–29. 6. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с. 7. *Жарий О. Ю., Улитко А. Ф.* Введение в механику нестационарных колебаний и волн. – К.: Высшая шк., 1989. – 184 с.

Днепропетровский национальный университет

Поступила 04.04.08

УДК 539.3+539.375

С. А. КАЛОЕРОВ, д-р физ.-мат. наук, О. А. СОРОЧАН

ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ СРЕД

В последние десятилетия в связи с широким использованием конструкций с элементами из пьезоматериалов часто возникает необходимость исследования напряженно-деформированного состояния таких элементов при действии различных механических усилий, электромагнитных и тепловых полей. Для проведения таких исследований к настоящему времени разработаны достаточно эффективные методы для случаев, когда не учитываются или магнитные, или электрические свойства материалов [1–5]. В случаях, когда в исследованиях учитываются и электрические, и магнитные свойства, но без учета температур, в статье [6] предложен подход решения общей задачи электромагнитоупругости, даны решения частных задач. В данной работе в отличие от последней статьи приводится метод решения общей двумерной задачи термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред, находящихся под действием не только механических сил и электромагнитного поля, но и температурных полей.

1. Постановка задачи. Рассмотрим многосвязное пьезоэлектромагнитное цилиндрическое тело с продольными цилиндрическими полостями, образующие которых параллельны оси цилиндра. Тело находится под действием механических сил, температурных и электромагнитных полей в двумерном термоэлектромагнитоупругом состоянии (ТЭМУС), не меняющемся в направлении образующих цилиндрических поверхностей. Выберем прямоугольную систему координат $Oxuz$, направив ось z по направлению образующих полостей. В поперечном сечении тела будем иметь многосвязную область S , ограниченную внешним контуром L_0 и контурами отверстий L_l ($l = \overline{1, L}$) (рис. 1). Внешние воздействия

распределены по цилиндрическим поверхностям тела или сосредоточены вдоль линий, проходящих через точки (x_j^0, y_j^0)

($j = \overline{1, J}$) и параллельных оси цилиндра. В качестве частного случая, когда внешняя цилиндрическая поверхность целиком уходит в бесконечность и, следовательно, контур L_0

отсутствует, будем рассматривать бесконечное тело с полостями.

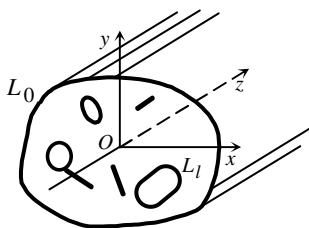


Рис. 1

2. Комплексный потенциал задачи теплопроводности. При использовании комплексных потенциалов определение температурного поля в рассматриваемом теле сводится к нахождению комплексного потенциала теплопроводности $F_6(z_6)$ из условий [7]

$$2 \operatorname{Re} F_6(z_6) = T_l, \quad (2.1)$$

если на границе задана температура, или

$$2 \operatorname{Re} [i \alpha \varepsilon F_6(z_6)] = \mp \int_0^s q_n(s) ds + c \quad (2.2)$$

при задании на границе плотности потока тепла. При этом

$$z_6 = x + \mu_6 y; \quad (2.3)$$

$\mu_6 = (-k_{12} + i \alpha \varepsilon) / k_{22}$, $\alpha \varepsilon = \sqrt{k_{11} k_{22} - k_{12}^2}$; k_{jp} – коэффициенты теплопроводности материала. Здесь и далее верхние знаки относятся к внешнему контуру области L_0 , нижние – к контурам отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$).

После нахождения функции $F_6(z_6)$ температура и плотность потока тепла через площадку с нормалью n вычисляются по формулам

$$T(x, y) = T_H + 2 \operatorname{Re} F_6(z_6); \quad (2.4)$$

$$q_n = -2 \operatorname{Re} [i \alpha \varepsilon \delta_6 F_6'(z_6)]. \quad (2.5)$$

3. Комплексные потенциалы задачи термоэлектромагнитоупругости. Определение ТЭМУС рассматриваемого тела сводится к решению основной системы уравнений, состоящей из уравнений равновесия, вынужденной электростатики и магнитостатики, термоэлектромагнитоупругого состояния и соотношений Коши [1–6, 8, 9]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0; \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0; \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = & a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{14} \tau_{yz} + a_{15} \tau_{xz} + a_{16} \tau_{xy} + b_{11} D_x + \\ & + b_{21} D_y + d_{11} B_x + d_{21} B_y + \alpha_1 T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_y = & a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y + a_{24} \tau_{yz} + a_{25} \tau_{xz} + a_{26} \tau_{xy} + \\ & + b_{12} D_x + b_{22} D_y + d_{12} B_x + d_{22} B_y + \alpha_2 T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{yz} &= a_{14}\sigma_x + a_{24}\sigma_y + a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz} + a_{46}\tau_{xy} + \\
&\quad + b_{14}D_x + b_{24}D_y + d_{14}B_x + d_{24}B_y + \alpha_4 T, \\
\gamma_{xz} &= a_{15}\sigma_x + a_{25}\sigma_y + a_{45}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{xz} + a_{56}\tau_{xy} + \\
&\quad + b_{15}D_x + b_{25}D_y + d_{15}B_x + d_{25}B_y + \alpha_5 T, \\
\gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{46}\tau_{yz} + a_{56}\tau_{xz} + a_{66}\tau_{xy} + \\
&\quad + b_{16}D_x + b_{26}D_y + d_{16}B_x + d_{26}B_y + \alpha_6 T, \\
E_x &= -b_{11}\sigma_x - b_{12}\sigma_y - b_{14}\tau_{yz} - b_{15}\tau_{xz} - b_{16}\tau_{xy} + \\
&\quad + c_{11}D_x + c_{12}D_y + e_{11}B_x + e_{12}B_y - t_1 T, \\
E_y &= -b_{21}\sigma_x - b_{22}\sigma_y - b_{24}\tau_{yz} - b_{25}\tau_{xz} - b_{26}\tau_{xy} + \\
&\quad + c_{12}D_x + c_{22}D_y + e_{12}B_x + e_{22}B_y - t_2 T, \\
H_x &= -d_{11}\sigma_x - d_{12}\sigma_y - d_{14}\tau_{yz} - d_{15}\tau_{xz} - d_{16}\tau_{xy} + \\
&\quad + e_{11}D_x + e_{12}D_y + f_{11}B_x + f_{12}B_y - m_1 T, \\
H_y &= -d_{21}\sigma_x - d_{22}\sigma_y - d_{24}\tau_{yz} - d_{25}\tau_{xz} - d_{26}\tau_{xy} + \\
&\quad + e_{12}D_x + e_{22}D_y + f_{12}B_x + f_{22}B_y - m_2 T;
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\
E_x &= -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \\
H_x &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad H_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad H_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= s_{ij}^{D,B,T} \left[s_{i3}^{D,B,T} \left(p_{3j}^{\sigma,B,T} A_1 + g_{3j}^{\sigma,D,T} A_2 + s_{j3}^{D,B,T} A_4 \right) + g_{3i}^{\sigma,D,T} \left(s_{j3}^{D,B,T} A_2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + p_{3j}^{\sigma,B,T} A_3 - g_{3j}^{\sigma,D,T} A_5 \right) + p_{3i}^{\sigma,B,T} \left(s_{j3}^{D,B,T} A_1 + g_{3j}^{\sigma,D,T} A_3 - p_{3j}^{\sigma,B,T} A_6 \right) \right] / D, \\
b_{mj} &= g_{mj}^{\sigma,D,T} \left[s_{j3}^{D,B,T} \left(-v_{m3}^{\sigma,T} A_1 - \beta_{m3}^{\sigma,T} A_2 + g_{m3}^{\sigma,D,T} A_4 \right) + g_{3j}^{\sigma,D,T} \left(g_{m3}^{\sigma,D,T} A_2 - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mathbf{v}_{m3}^{\sigma,T} A_3 + \beta_{m3}^{\sigma,T} A_5) + p_{3j}^{\sigma,B,T} \left(g_{m3}^{\sigma,D,T} A_1 - \beta_{m3}^{\sigma,T} A_3 + \mathbf{v}_{m3}^{\sigma,T} A_6 \right) \Big] / D, \\
c_{nm} = & \beta_{nm}^{\sigma,T} \left[g_{n3}^{\sigma,D,T} \left(\mathbf{v}_{m3}^{\sigma,T} A_1 + \beta_{m3}^{\sigma,T} A_2 - g_{m3}^{\sigma,D,T} A_4 \right) + \beta_{n3}^{\sigma,T} \left(g_{m3}^{\sigma,D,T} A_2 - \right. \right. \\
& \left. \left. -\mathbf{v}_{m3}^{\sigma,T} A_3 + \beta_{m3}^{\sigma,T} A_5 \right) + \mathbf{v}_{n3}^{\sigma,T} \left(g_{m3}^{\sigma,D,T} A_1 - \beta_{m3}^{\sigma,T} A_3 + \mathbf{v}_{m3}^{\sigma,T} A_6 \right) \right] / D, \\
d_{mj} = & p_{mj}^{\sigma,B,T} \left[s_{j3}^{D,B,T} \left(-\chi_{m3}^{\sigma,T} A_1 - \mathbf{v}_{m3}^{\sigma,T} A_2 + p_{m3}^{\sigma,B,T} A_4 \right) + g_{3j}^{\sigma,D,T} \left(p_{m3}^{\sigma,B,T} A_2 - \right. \right. \\
& \left. \left. -\chi_{m3}^{\sigma,T} A_3 + \mathbf{v}_{m3}^{\sigma,T} A_5 \right) + p_{3j}^{\sigma,B,T} \left(p_{m3}^{\sigma,B,T} A_1 - \mathbf{v}_{m3}^{\sigma,T} A_3 + \chi_{m3}^{\sigma,T} A_6 \right) \right] / D, \\
e_{nm} = & \mathbf{v}_{nm}^{\sigma,T} \left[g_{n3}^{\sigma,D,T} \left(\chi_{m3}^{\sigma,T} A_1 + \mathbf{v}_{m3}^{\sigma,T} A_2 - p_{m3}^{\sigma,B,T} A_4 \right) + \beta_{n3}^{\sigma,T} \left(p_{m3}^{\sigma,B,T} A_2 - \right. \right. \\
& \left. \left. -\chi_{m3}^{\sigma,T} A_3 + \mathbf{v}_{m3}^{\sigma,T} A_5 \right) + \mathbf{v}_{n3}^T \left(p_{m3}^{\sigma,B,T} A_1 - \mathbf{v}_{m3}^{\sigma,T} A_3 + \chi_{m3}^{\sigma,T} A_6 \right) \right] / D, \\
f_{nm} = & \chi_{nm}^{\sigma,T} \left[p_{n3}^{\sigma,B,T} \left(\chi_{m3}^{\sigma,T} A_1 + \mathbf{v}_{m3}^{\sigma,T} A_2 - p_{m3}^{\sigma,B,T} A_4 \right) + \mathbf{v}_{n3}^{\sigma,T} \left(p_{m3}^{\sigma,B,T} A_2 - \right. \right. \\
& \left. \left. -\chi_{m3}^{\sigma,T} A_3 + \mathbf{v}_{m3}^{\sigma,T} A_5 \right) + \chi_{n3}^{\sigma,T} \left(p_{m3}^{\sigma,B,T} A_1 - \mathbf{v}_{m3}^{\sigma,T} A_3 + \chi_{m3}^{\sigma,T} A_6 \right) \right] / D, \\
\alpha_n = & \alpha_n^{D,B} \left[s_{n3}^{D,B,T} \left(m_3^\sigma A_1 + t_3^\sigma A_2 + \alpha_3^{D,B} A_4 \right) + g_{3n}^{\sigma,D,T} \left(\alpha_3^{D,B} A_2 - \right. \right. \\
& \left. \left. -m_3^\sigma A_3 + t_3^\sigma A_5 \right) + p_{3n}^{\sigma,B,T} \left(\alpha_3^{D,B} A_1 + t_3^\sigma A_3 - m_3^\sigma A_6 \right) \right] / D, \\
t_n = & t_n^\sigma \left[g_{n3}^{\sigma,D,T} \left(m_3^\sigma A_1 + t_3^\sigma A_2 + \alpha_3^{D,B} A_4 \right) - \beta_{n3}^{\sigma,T} \left(\alpha_3^{D,B} A_2 - \right. \right. \\
& \left. \left. -m_3^\sigma A_3 + t_3^\sigma A_5 \right) - \mathbf{v}_{n3}^{\sigma,T} \left(\alpha_3^{D,B} A_1 + t_3^\sigma A_3 - m_3^\sigma A_6 \right) \right] / D, \\
m_n = & m_n^\sigma \left[p_{n3}^{\sigma,B,T} \left(m_3^\sigma A_1 + t_3^\sigma A_2 + \alpha_3^{D,B} A_4 \right) - \mathbf{v}_{n3}^{\sigma,T} \left(\alpha_3^{D,B} A_2 - \right. \right. \\
& \left. \left. -m_3^\sigma A_3 + t_3^\sigma A_5 \right) - \chi_{n3}^{\sigma,T} \left(\alpha_3^{D,B} A_1 + t_3^\sigma A_3 - m_3^\sigma A_6 \right) \right] / D; \tag{3.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= p_{33}^{\sigma,B,T} A_1 + g_{33}^{\sigma,D,T} A_2 + s_{33}^{D,B,T} A_4 = \\
&= g_{33}^{\sigma,D,T} A_2 - \mathbf{v}_{33}^{\sigma,T} A_3 + \beta_{33}^{\sigma,T} A_5 = p_{33}^{\sigma,B,T} A_1 - \mathbf{v}_{33}^{\sigma,T} A_3 + \chi_{33}^{\sigma,T} A_6, \\
A_1 &= \beta_{33}^{\sigma,T} p_{33}^{\sigma,B,T} - \mathbf{v}_{33}^{\sigma,T} g_{33}^{\sigma,D,T}, \quad A_2 = \chi_{33}^{\sigma,T} g_{33}^{\sigma,D,T} - \mathbf{v}_{33}^{\sigma,T} p_{33}^{\sigma,B,T}, \\
A_3 &= \mathbf{v}_{33}^{\sigma,T} s_{33}^{D,B,T} + p_{33}^{\sigma,B,T} g_{33}^{\sigma,D,T}, \quad A_4 = \beta_{33}^{\sigma,T} \chi_{33}^{\sigma,T} - \left(\mathbf{v}_{33}^{\sigma,T} \right)^2,
\end{aligned}$$

$$A_5 = \chi_{33}^{\sigma,T} s_{33}^{D,B,T} + \left(p_{33}^{\sigma,B,T} \right)^2, \quad A_6 = \beta_{33}^{\sigma,T} s_{33}^{D,B,T} + \left(g_{33}^{\sigma,D,T} \right)^2.$$

σ_i , τ_{ij} , ε_i , γ_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций; D_i , E_i и B_i , H_i – компоненты векторов индукций и напряженностей электрического и магнитного полей; φ и ψ – потенциалы этих полей; $s_{ij}^{D,B,T}$ – коэффициенты деформации материала тела, измеренные при постоянной индукции электромагнитного поля и температуре; $g_{ni}^{\sigma,D,T}$ и $p_{ni}^{\sigma,B,T}$ – пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули деформаций и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях, индукциях и температуре; $\beta_{kl}^{\sigma,T}$ и $\chi_{kl}^{\sigma,T}$ – коэффициенты диэлектрической и магнитной восприимчивости, измеренные при постоянных напряжениях и температуре; $v_{nm}^{\sigma,T}$ – коэффициенты электромагнитной восприимчивости, измеренные при постоянных напряжениях; $\alpha_i^{D,B}$ – коэффициенты теплового расширения, измеренные при постоянной индукции электромагнитного поля; t_n^σ – пьезоэлектрические модули, измеренные при постоянных напряжениях; m_n^σ – пьезомагнитные модули, измеренные при постоянных напряжениях; $T = T_m - T_H$ – разность температур в текущем и начальном состоянии, при котором напряжения и деформации, индукции и напряженности поля равны нулю.

При этом из соотношений совместности деформаций следует, что

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = 0. \quad (3.6)$$

Основную систему уравнений (3.1)–(3.4) нужно решать при заданных на границе механических, электрических и магнитных условиях.

Механические граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_x \cos nx + \tau_{xy} \cos ny &= X_n, \\ \tau_{xy} \cos nx + \sigma_y \cos ny &= Y_n, \\ \tau_{xz} \cos nz + \tau_{yz} \cos ny &= Z_n, \end{aligned} \quad (3.7)$$

если на границе заданы усилия X_n , Y_n , Z_n , или

$$u = u^*, \quad v = v^*, \quad w = w^*, \quad (3.8)$$

когда на границе заданы перемещения u^* , v^* , w^* . Электрические граничные условия имеют вид

$$D_x \cos nx + D_y \cos ny = D_n, \quad B_x \cos nx + B_y \cos ny = B_n \quad (3.9)$$

в случае задания на границе электрической и магнитной индукции, или

$$\varphi = \varphi^*, \quad \psi = \psi^*, \quad (3.10)$$

если на границе заданы потенциалы электромагнитного поля.

Введем функции напряжений $F(x, y)$, $\Psi(x, y)$, электрической индукции $X(x, y)$ и магнитной индукции $\Omega(x, y)$ таким образом, чтобы уравнения равновесия (3.1), первые уравнения вынужденной электростатики и вынужденной магнитостатики (3.2) удовлетворялись тождественно, положив [1–6]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \\ D_x &= \frac{\partial X}{\partial y}, \quad D_y = -\frac{\partial X}{\partial x}, \quad B_x = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Подставив (3.11) в уравнения состояния (3.3), а затем полученные выражения в (3.6), второе и четвертое уравнения (3.2), получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} L_{4a}F + L_{3a}\Psi + L_{3b}X + L_{3d}\Omega &= L_{2\alpha}T, \\ L_{3a}F + L_{2a}\Psi + L_{2b}X + L_{2d}\Omega &= L_{\alpha}T, \\ L_{3b}F + L_{2b}\Psi + L_{2c}X + L_{2e}\Omega &= L_{\gamma}T, \\ L_{3d}F + L_{2d}\Psi + L_{2e}X + L_{2f}\Omega &= L_mT. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_{4a} &= a_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \\ L_{3a} &= -a_{24} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (a_{25} + a_{46}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (a_{14} + a_{56}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + a_{15} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\ L_{2a} &= a_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2a_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{3b} &= -b_{22} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (b_{12} + b_{26}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (b_{21} + b_{16}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + b_{11} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\ L_{2b} &= b_{24} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (b_{14} + b_{25}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + b_{15} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{3d} &= -d_{22} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (d_{12} + d_{26}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (d_{21} + d_{16}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + d_{11} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\
L_{2d} &= d_{24} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (d_{14} + d_{25}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + d_{15} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\
L_{2c} &= -c_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2c_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - c_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\
L_{2e} &= -e_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2e_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - e_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\
L_{2f} &= -f_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2f_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - f_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\
L_{\alpha} &= -\alpha_5 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_4 \frac{\partial}{\partial y}, \quad L_{2\alpha} = -\alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_6 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\
L_t &= -t_2 \frac{\partial}{\partial x} + t_1 \frac{\partial}{\partial y}, \quad L_m = -m_2 \frac{\partial}{\partial x} + m_1 \frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Решая систему (3.12) таким же образом, как это сделано в работах [1–6], для функций получаем выражения

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^5 F_k(z_k) + r_6 \int dz_6 \int F_6(z_6) dz_6 \right], \\
\Psi(x, y) &= 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^4 \lambda_k F'_k(z_k) + \frac{1}{\lambda_5} F'_5(z_5) + r_6 \lambda_6 \int F_6(z_6) dz_6 \right], \\
X(x, y) &= 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^5 v_k F'_k(z_k) + r_6 v_6 \int F_6(z_6) dz_6 \right], \\
\Omega(x, y) &= 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^5 \rho_k F'_k(z_k) + r_6 \rho_6 \int F_6(z_6) dz_6 \right],
\end{aligned} \tag{3.14}$$

где

$$z_k = x + \mu_k y \quad (k = \overline{1, 5}); \tag{3.15}$$

$$\lambda_k = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta_{0k}}, \quad v_k = \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{0k}}, \quad \rho_k = \frac{\Delta_{3k}}{\Delta_{0k}}, \quad \lambda_5 = \frac{\Delta_6}{\Delta_5},$$

$$\lambda_6 = r_\psi / r_6, \quad v_6 = r_\chi / r_6, \quad \rho_6 = r_\omega / r_6,$$

$$\Delta_{0k} = \begin{vmatrix} l_{2a}(\mu_k) & l_{2b}(\mu_k) & l_{2d}(\mu_k) \\ l_{2b}(\mu_k) & l_{2c}(\mu_k) & l_{2e}(\mu_k) \\ l_{2d}(\mu_k) & l_{2e}(\mu_k) & l_{2f}(\mu_k) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{1k} = \begin{vmatrix} -l_{3a}(\mu_k) & l_{2b}(\mu_k) & l_{2d}(\mu_k) \\ -l_{3b}(\mu_k) & l_{2c}(\mu_k) & l_{2e}(\mu_k) \\ -l_{3d}(\mu_k) & l_{2e}(\mu_k) & l_{2f}(\mu_k) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{2k} = \begin{vmatrix} l_{2a}(\mu_k) & -l_{3a}(\mu_k) & l_{2d}(\mu_k) \\ l_{2b}(\mu_k) & -l_{3b}(\mu_k) & l_{2e}(\mu_k) \\ l_{2d}(\mu_k) & -l_{3d}(\mu_k) & l_{2f}(\mu_k) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{3k} = \begin{vmatrix} l_{2a}(\mu_k) & l_{2b}(\mu_k) & -l_{3a}(\mu_k) \\ l_{2b}(\mu_k) & l_{2c}(\mu_k) & -l_{3b}(\mu_k) \\ l_{2d}(\mu_k) & l_{2e}(\mu_k) & -l_{3d}(\mu_k) \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} -l_{4a}(\mu_5) & l_{3b}(\mu_5) & l_{3d}(\mu_5) \\ -l_{3b}(\mu_5) & l_{2c}(\mu_5) & l_{2e}(\mu_5) \\ -l_{3d}(\mu_5) & l_{2e}(\mu_5) & l_{2f}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} l_{3a}(\mu_5) & l_{3b}(\mu_5) & l_{3d}(\mu_5) \\ l_{2b}(\mu_5) & l_{2c}(\mu_5) & l_{2e}(\mu_5) \\ l_{2d}(\mu_5) & l_{2e}(\mu_5) & l_{2f}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_{4a}(\mu) = a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22},$$

$$l_{3a}(\mu) = a_{15}\mu^3 - (a_{14} + a_{56})\mu^2 + (a_{25} + a_{46})\mu - a_{24},$$

$$l_{2a}(\mu) = a_{55}\mu^2 - 2a_{45}\mu + a_{44},$$

$$l_{3b}(\mu) = b_{11}\mu^3 - (b_{21} + b_{16})\mu^2 + (b_{12} + b_{26})\mu - b_{22},$$

$$l_{2b}(\mu) = b_{15}\mu^2 - (b_{14} + b_{25})\mu + b_{24},$$

$$l_{3d}(\mu) = d_{11}\mu^3 - (d_{21} + d_{16})\mu^2 + (d_{12} + d_{26})\mu - d_{22},$$

$$l_{2d}(\mu) = d_{15}\mu^2 - (d_{14} + d_{25})\mu + d_{24}, \quad l_{2c}(\mu) = -c_{11}\mu^2 + 2c_{12}\mu - c_{22},$$

$$l_{2e}(\mu) = -e_{11}\mu^2 + 2e_{12}\mu - e_{22}, \quad l_{2f}(\mu) = -f_{11}\mu^2 + 2f_{12}\mu - f_{22},$$

$$r_6 = \frac{l_f(\mu_6)}{l_{10}(\mu_6)}, \quad r_\psi = \frac{l_\psi(\mu_6)}{l_{10}(\mu_6)}, \quad r_\chi = \frac{l_\chi(\mu_6)}{l_{10}(\mu_6)}, \quad r_\omega = \frac{l_\omega(\mu_6)}{l_{10}(\mu_6)}; \quad (3.16)$$

$$l_f(\mu) = \begin{vmatrix} l_{2\alpha}(\mu) & l_{3a}(\mu) & l_{3b}(\mu) & l_{3d}(\mu) \\ l_\alpha(\mu) & l_{2a}(\mu) & l_{2b}(\mu) & l_{2d}(\mu) \\ l_t(\mu) & l_{2b}(\mu) & l_{2c}(\mu) & l_{2e}(\mu) \\ l_m(\mu) & l_{2d}(\mu) & l_{2e}(\mu) & l_{2f}(\mu) \end{vmatrix},$$

$$l_\psi(\mu) = \begin{vmatrix} l_{4a}(\mu) & l_{2\alpha}(\mu) & l_{3b}(\mu) & l_{3d}(\mu) \\ l_{3a}(\mu) & l_\alpha(\mu) & l_{2b}(\mu) & l_{2d}(\mu) \\ l_{3b}(\mu) & l_t(\mu) & l_{2c}(\mu) & l_{2e}(\mu) \\ l_{3d}(\mu) & l_m(\mu) & l_{2e}(\mu) & l_{2f}(\mu) \end{vmatrix},$$

$$l_\chi(\mu) = \begin{vmatrix} l_{4a}(\mu) & l_{3a}(\mu) & l_{2\alpha}(\mu) & l_{3d}(\mu) \\ l_{3a}(\mu) & l_{2a}(\mu) & l_\alpha(\mu) & l_{2d}(\mu) \\ l_{3b}(\mu) & l_{2b}(\mu) & l_t(\mu) & l_{2e}(\mu) \\ l_{3d}(\mu) & l_{2d}(\mu) & l_m(\mu) & l_{2f}(\mu) \end{vmatrix},$$

$$l_\omega(\mu) = \begin{vmatrix} l_{4a}(\mu) & l_{3a}(\mu) & l_{3b}(\mu) & l_{2\alpha}(\mu) \\ l_{3a}(\mu) & l_{2a}(\mu) & l_{2b}(\mu) & l_\alpha(\mu) \\ l_{3b}(\mu) & l_{2b}(\mu) & l_{2c}(\mu) & l_t(\mu) \\ l_{3d}(\mu) & l_{2d}(\mu) & l_{2e}(\mu) & l_m(\mu) \end{vmatrix}; \quad (3.17)$$

μ_k ($k = \overline{1, 5}$) – корни характеристического уравнения

$$l_{10}(\mu) = \begin{vmatrix} l_{4a}(\mu) & l_{3a}(\mu) & l_{3b}(\mu) & l_{3d}(\mu) \\ l_{3a}(\mu) & l_{2a}(\mu) & l_{2b}(\mu) & l_{2d}(\mu) \\ l_{3b}(\mu) & l_{2b}(\mu) & l_{2c}(\mu) & l_{2e}(\mu) \\ l_{3d}(\mu) & l_{2d}(\mu) & l_{2e}(\mu) & l_{2f}(\mu) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.18)$$

Подставив функции (3.14) в (3.11), получим выражения напряжений, индукций и напряженностей электромагнитного поля, а затем, интегрируя (3.4), и формулы для перемещений и потенциалов поля:

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^6 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{5k}, \lambda_{6k}) \Phi'_k(z_k); \quad (3.19)$$

$$(D_x, D_y, E_x, E_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^6 \left(\lambda_{7k}, \lambda_{8k}, -r_k^0, -\mu_k r_k^0 \right) \Phi_k'(z_k); \quad (3.20)$$

$$(B_x, B_y, H_x, H_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^6 \left(\lambda_{9k}, \lambda_{10k}, -h_k^0, -\mu_k h_k^0 \right) \Phi_k'(z_k); \quad (3.21)$$

$$(u, v, w, \varphi) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^6 \left(p_k, q_k, s_k^0, r_k^0 \right) \Phi_k(z_k) + \\ + (-\omega_3 y + u_0, \omega_3 x + v_0, w_0, \varphi_0); \quad (3.22)$$

$$\lambda_{1j} = \mu_j^2, \quad \lambda_{2j} = 1, \quad \lambda_{4j} = -\lambda_j, \quad \lambda_{5j} = \lambda_j \mu_j, \quad \lambda_{6j} = -\mu_j,$$

$$\lambda_{7j} = \nu_j \mu_j, \quad \lambda_{8j} = -\nu_j, \quad \lambda_{9j} = \rho_j \mu_j, \quad \lambda_{10j} = -\rho_j,$$

$$\lambda_{15} = \lambda_5 \mu_5^2, \quad \lambda_{25} = \lambda_5, \quad \lambda_{45} = -1, \quad \lambda_{55} = \mu_5, \quad \lambda_{65} = -\lambda_5 \mu_5,$$

$$\lambda_{75} = \lambda_5 \nu_5 \mu_5, \quad \lambda_{85} = -\lambda_5 \nu_5, \quad \lambda_{95} = \lambda_5 \rho_5 \mu_5, \quad \lambda_{105} = -\lambda_5 \rho_5;$$

$$p_j = a_{11} \mu_j^2 - a_{16} \mu_j + a_{12} + (a_{15} \mu_j - a_{14}) \lambda_j + (b_{11} \mu_j - b_{21}) \nu_j + \\ + (d_{11} \mu_j - d_{21}) \rho_j + \delta_j^6 \alpha_1 / r_6,$$

$$q_j = a_{12} \mu_j - a_{26} + a_{22} / \mu_j + (a_{25} - a_{24} / \mu_j) \lambda_j + (b_{12} - b_{22} / \mu_j) \nu_j + \\ + (d_{12} - d_{22} / \mu_j) \rho_j + \delta_j^6 \alpha_2 / \mu_j r_6,$$

$$s_j^0 = a_{14} \mu_j - a_{46} + a_{24} / \mu_j + (a_{45} - a_{44} / \mu_j) \lambda_j + (b_{14} - b_{24} / \mu_j) \nu_j + \\ + (d_{14} - d_{24} / \mu_j) \rho_j + \delta_j^6 \alpha_4 r_6 / \mu_j,$$

$$r_j^0 = b_{11} \mu_j^2 - b_{16} \mu_j + b_{12} + (b_{15} \mu_j - b_{14}) \lambda_j - (c_{11} \mu_j - c_{12}) \nu_j - \\ - (e_{11} \mu_j - e_{12}) \rho_j + \delta_j^6 t_1 / r_6,$$

$$h_j^0 = d_{11} \mu_j^2 - d_{16} \mu_j + d_{12} + (d_{15} \mu_j - d_{14}) \lambda_j - (e_{11} \mu_j - e_{12}) \nu_j - \\ - (f_{11} \mu_j - f_{12}) \rho_j + \delta_j^6 m_1 / r_6,$$

$$p_5 = (a_{11} \mu_5^2 - a_{16} \mu_5 + a_{12}) \lambda_5 + a_{15} \mu_5 - a_{14} + (b_{11} \mu_5 - b_{21}) \lambda_5 \nu_5 + \\ + (d_{11} \mu_5 - d_{21}) \lambda_5 \rho_5,$$

$$q_5 = (a_{12} \mu_5 - a_{26} + a_{22} / \mu_5) \lambda_5 + a_{25} - a_{24} / \mu_5 + (b_{12} - b_{22} / \mu_5) \lambda_5 \nu_5 +$$

$$\begin{aligned}
& +(d_{12} - d_{22}/\mu_5)\lambda_5\rho_5, \\
s_5^0 & = (a_{14}\mu_5 - a_{46} + a_{24}/\mu_5)\lambda_5 + a_{45} - a_{44}/\mu_5 + (b_{14} - b_{24}/\mu_5)\lambda_5\nu_5 + \\
& +(d_{14} - d_{24}/\mu_5)\lambda_5\rho_5, \\
r_5^0 & = (b_{11}\mu_5^2 - b_{16}\mu_5 + b_{12})\lambda_5 + b_{15}\mu_5 - b_{14} - (c_{11}\mu_5 - c_{12})\lambda_5\nu_5 - \\
& -(e_{11}\mu_5 - e_{12})\lambda_5\rho_5, \\
h_5^0 & = (d_{11}\mu_5^2 - d_{16}\mu_5 + d_{12})\lambda_5 + d_{15}\mu_5 - d_{14} - \\
& -(e_{11}\mu_5 - e_{12})\lambda_5\nu_5 - (f_{11}\mu_5 - f_{12})\lambda_5\rho_5; \\
\Phi_k(z_k) & = F_k'(z_k) \quad (k=\overline{1,4}),
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\Phi_5(z_5) = \frac{1}{\lambda_5} F_5'(z_5), \quad \Phi_6(z_6) = r_6 \int F_6(z_6) dz_6; \tag{3.24}$$

$-\omega_3 y + u_0$, $\omega_3 x + v_0$ – жесткие перемещения тела как целого; ω_3 – угол поворота плоскости Oxy против часовой стрелки; u_0 , v_0 , w_0 – поступательные перемещения; φ_0 , ψ_0 – нулевой уровень потенциалов электрического и магнитного полей.

Из равенств (3.7)–(3.10) получаются следующие граничные условия для определения комплексных потенциалов [1–5]

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^6 g_{ki}^0 \delta_k \Phi_k'(t_k) = f_i'(t) \quad (i = \overline{1,5}), \tag{3.25}$$

При этом $\delta_k = dx/ds + \mu_k dy/ds$;

$$\begin{aligned}
g_{k1}^0 & = \lambda_{6k}, \quad g_{k2}^0 = \lambda_{2k}, \quad g_{k5}^0 = \lambda_{4k}, \\
f_1' & = \mp Y_n, \quad f_2' = \mp X_n, \quad f_5' = \mp Z_n
\end{aligned} \tag{3.26}$$

в случае задания на границе внешних усилий,

$$\begin{aligned}
g_{k1}^0 & = p_k, \quad g_{k2}^0 = q_k, \quad g_{k5}^0 = s_k^0, \\
f_1' & = \frac{d}{ds}(u^* + \omega_3 y), \quad f_2' = \frac{d}{ds}(v^* - \omega_3 x), \quad f_5'(t) = \frac{d w^*}{d s},
\end{aligned} \tag{3.27}$$

когда на границе заданы перемещения;

$$g_{k3}^0 = \lambda_{8k}, \quad g_{k4}^0 = \lambda_{10k}, \quad f_3' = \mp D_n, \quad f_4' = \mp B_n \tag{3.28}$$

при задании индукции полей,

$$g_{k3}^0 = r_k^0, \quad g_{k4}^0 = h_k^0, \quad f_3' = d\Phi^*/ds, \quad f_4' = d\Psi^*/ds, \quad (3.29)$$

если на границе заданы потенциалы полей.

4. Комплексные потенциалы для рассматриваемой задачи. Функции $F_6(z_6)$ и $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 6}$) определены в соответствующих областях S_6 и S_k , получаемых из области S аффинными преобразованиями (2.3) и (3.15). По аналогии с выводами [1–6] для них получаются выражения

$$F_6(z_6) = c_0 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{6l} \ln(z_6 - z_{6l}) + \sum_{j=1}^J \delta_{6j} \ln(z_6 - z_{6j}^0) + F_{60}(z_6); \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_k) = & \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \\ & + \sum_{j=1}^J \alpha_{kj}^0 (z_k - z_{kj}^0) \ln(z_k - z_{kj}^0) + \Phi_{k0}(z_k) \quad (k = \overline{1, 6}), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где c_0 – вещественная постоянная, определяемая из граничных условий на контурах отверстий при решении задачи теплопроводности;

$$D_{6l} = -q_l / 4\pi a \varepsilon, \quad \delta_{6j} = -q_j^0 / 4\pi a \varepsilon,$$

$$\Gamma_6 = r_6 c_0, \quad A_{6l} = r_6 D_{6l}, \quad B_{6l} = r_6 (b_{6l} - z_{6l} D_{6l}), \quad \alpha_{6j}^0 = r_6 \delta_{6j}; \quad (4.3)$$

b_{6l} – коэффициент при $(z_6 - z_{6l})^{-1}$ в разложении функции $F_{60}(z_6)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_{6l} ; q_l – суммарный поток тепла через контур L_l в область S ; Γ_k ($k = \overline{1, 5}$) – постоянные, равные нулю в случае конечной области S и определяемые из системы

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^6 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{5k}, \lambda_{6k}, \lambda_{7k}, \lambda_{8k}, \lambda_{9k}, \lambda_{10k}, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k = \\ = \left(\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{yz}^\infty, \tau_{xz}^\infty, \tau_{xy}^\infty, D_x^\infty, D_y^\infty, B_x^\infty, B_y^\infty, \omega_3^\infty \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

для бесконечной области; A_{kl} , B_{kl} , a_{kj}^0 – постоянные, удовлетворяющие системам

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^6 i \left(\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}, p_k, q_k, s_k^0, r_k^0, h_k^0 \right) A_{kl} = \\ = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^6 i \left(\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}, p_k, q_k, s_k^0, r_k^0, h_k^0 \right) B_{kl} =$$

$$= \left(\frac{X_l}{2\pi}, \frac{Y_l}{2\pi}, \frac{Z_l}{2\pi}, \frac{Q_{\exists l}}{2\pi}, \frac{Q_{ml}}{2\pi}, 0, 0, 0, 0, 0 \right); \quad (4.6)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^6 i \left(\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}, p_k, q_k, s_k^0, r_k^0, h_k^0 \right) \alpha_{kj}^0 =$$

$$= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \quad (4.7)$$

z_{kl} – точки, соответствующие в S_k при аффинных преобразованиях (3.15) произвольным точкам z_l внутри контура отверстия L_l области S ; z_{kj}^0 – точки, соответствующие точкам приложения сосредоточенных источников тепла z_j^0 . При этом из ограниченности температуры, напряжений, напряженности и индукции на бесконечности должны выполняться условия [3, 4]

$$\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{6l} + \sum_{j=1}^J \delta_{6j} = 0, \quad \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{kl} + \sum_{j=1}^J \alpha_{kj}^0 = 0 \quad (k = \overline{1, 6}). \quad (4.8)$$

Входящие в общие представления комплексных потенциалов (4.1) и (4.2) функции $F_{60}(z_6)$, $\Phi_{k0}(z_k)$ голоморфны в областях S_k , получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями (2.3) и (3.15). Используя конформные отображения внешности единичного круга на внешности эллипсов L_{kl} и разлагая функции, голоморфные во внешностях единичного круга в ряды Лорана, для функций получаем [3, 4, 7, 10]

$$F_6(z_6) = c_0 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{6l} \ln \zeta_{6l} + \sum_{j=1}^J \delta_{6j} \ln(z_6 - z_{6j}^0) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{6ln} \Phi_{6ln}(z_6); \quad (4.9)$$

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln \zeta_{kl} + \sum_{j=1}^J \alpha_{kj}^0 (z_k - z_{kj}^0) \times$$

$$\times \ln(z_k - z_{kj}^0) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \Phi_{kln}(z_k); \quad (4.10)$$

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[A_{kl} \ln \zeta_{kl} + \frac{(A_{kl} z_k + B_{kl}) \zeta_{kl}}{R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \right] + \sum_{j=1}^J \alpha_{kj}^0 \ln(z_k - z_{kj}^0) +$$

$$+ \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \Phi'_{kln}(z_k) \quad (k = \overline{1, 5}), \quad \Phi'_6(z_6) = r_6 F_6(z_6). \quad (4.11)$$

Здесь

$$\Phi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}, \quad \Phi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}; \quad (4.12)$$

ζ_{kl} – переменные, определяемые из неявных зависимостей [10]

$$z_k = x + \mu_k y = z_{kl} + R_{kl} (\zeta_{kl} + m_{kl} / \zeta_{kl}); \quad (4.13)$$

z_{kl}, R_{kl}, m_{kl} – известные постоянные.

5. Определение постоянных, входящих в комплексные потенциалы. Неизвестные постоянные $c_0, D_{6l}, c_{6ln}, a_{kln}$, входящие в (4.9) и (4.11), определим из граничных условий на контурах отверстий методом наименьших квадратов. Исходя из (2.1), (3.25), составим функционалы

$$I_T = \sum_{m=1}^M |2 \operatorname{Re} F_6(t_{6m}) - T_l|^2; \quad (5.1)$$

$$I_\sigma = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^5 \left| 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^6 \delta_{km} g_{kim}^0 \Phi'_k(t_{km}) - f'_{im}(t_m) \right|^2, \quad (5.2)$$

где t_m ($m = \overline{1, M}$) – точки L_l ($l = \overline{0, \mathcal{L}}$). Удовлетворив условиям минимума $\partial I_T / \partial c_0 = 0, \partial I_T / \partial D_{6l} = 0, \partial I_T / \partial c_{6ln} = 0; \partial I_\sigma / \partial a_{kln} = 0$ функционалов (5.1) и (5.2), получим системы линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов $c_0, D_{6l}, c_{6ln}, a_{kln}$. Решив эти системы, найдем указанные коэффициенты. После этого искомые комплексные потенциалы будут известными и по формулам (2.4), (3.19)–(3.21) в любой точке можно вычислять основные характеристики ТЭМУС (температуру, напряжения, индукции и напряженности электромагнитного поля).

В случае вырождения полости в плоскую трещину, кроме основных характеристик ТЭМУС, можно вычислять и коэффициенты интенсивности напряжений, индукций и напряженностей поля (КИНИН) [11]

$$k_1^\pm = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^6 \left[\lambda_{1k} \sin^2 \varphi_l + \lambda_{2k} \cos^2 \varphi_l - 2\lambda_{6k} \sin \varphi_l \cos \varphi_l \right] M_k,$$

$$k_2^\pm = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^6 \left[(\lambda_{2k} - \lambda_{1k}) \cos \varphi_l \sin \varphi_l + \lambda_{6k} (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l) \right] M_k,$$

$$\begin{aligned}
k_3^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^6 [\lambda_{4k} \cos \varphi_l - \lambda_{5k} \sin \varphi_l] M_k, \\
k_D^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^6 (\lambda_{8k} \cos \varphi_l - \lambda_{7k} \sin \varphi_l) M_k, \\
k_E^\pm &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^6 (r_{k0} \mu_k \cos \varphi_l - r_{k0} \sin \varphi_l) M_k, \\
k_B^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^6 (\lambda_{10k} \cos \varphi_l - \lambda_{9k} \sin \varphi_l) M_k, \\
k_H^\pm &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^6 (h_{k0} \mu_k \cos \varphi_l - h_{k0} \sin \varphi_l) M_k,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

где

$$M_k = \frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \left(A_{kl} (z_{kl} \pm 2R_{kl}) + B_{kl} - \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln} \right),$$

φ_l – угол между направлением трещины и положительным направлением оси Ox .

Если в приведенных формулах положить равными нулю все величины с индексом $k = 5$, то получатся соответствующие соотношения для плоской задачи термоэлектромагнитоупругости.

6. Анализ результатов численных исследований. Были проведены численные исследования ТЭМУС анизотропного кольца и пластинки с двумя отверстиями. Кольцо и пластинка считалась изготовленной из материала $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$, поляризованного в направлении оси y феррит-пьезоэлектрического композита, с постоянными [12]

$$\begin{aligned}
s_{11}^{D,B,T} &= 7,15s_0, & s_{22}^{D,B,T} &= 6,83s_0, & s_{12}^{D,B,T} &= -2,33s_0, \\
s_{44}^{D,B,T} &= 19,91s_0, & g_{21}^{\sigma,D,T} &= -4,94g_0, & g_{22}^{\sigma,D,T} &= 11,63g_0, \\
p_{21}^{\sigma,B,T} &= 5,8p_0, & p_{22}^{\sigma,B,T} &= 11,85p_0, & p_{16}^{\sigma,B,T} &= 18,44g_0, \\
\beta_{11}^{\sigma,T} &= 1,56\beta_0, & \beta_{22}^{\sigma,T} &= 1,37\beta_0, & v_{11}^{\sigma,T} &= -1,9v_0, & v_{22}^{\sigma,T} &= -1,85v_0; \\
\chi_{11}^{\sigma,T} &= 3,35\chi_0, & \chi_{22}^{\sigma,T} &= 11,89\chi_0, & \alpha_1^{D,B} &= 8,53\alpha_0, \\
\alpha_2^{D,B} &= 1,99\alpha_0, & t_2^\sigma &= 0,0133t_0, & m_2^\sigma &= 0,0133m_0,
\end{aligned}$$

$$s_0 = 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad g_0 = 10^{-3} \text{ м}^2 \cdot \text{Кл}^{-1}, \quad p_0 = 10^{-6} \text{ МТл}^{-1},$$

$$\beta_0 = 10^2 \text{ МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}, \quad \chi_0 = 10^{-3} \text{ МПа}^{-1} \cdot \text{МТл}^{-2},$$

$$\alpha_0 = 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad t_0 = 1 \text{ МН} \cdot (\text{Кл} \cdot \text{К})^{-1}, \quad m_0 = 1 \text{ МА} \cdot (\text{м} \cdot \text{МКл})^{-1},$$

$$k_{22} / k_{11} = 2, \quad k_{12} = 0.$$

Для выяснения вклада электрических и магнитных свойств материала в ТЭМУС тела были вычислены значения основных характеристик в задачах термоупругости (ТУ, когда решалась задача теории упругости с учетом температуры и не учитывались электрические и магнитные свойства материала), термоэлектроупругости (ТЭУ, когда учитывалась температура в задаче электроупругости), терромагнитоупругости (ТМУ, когда учитывалась температура в задаче магнитоупругости) и термоэлектромагнитоупругости (ТЭМУ, когда учитывалась температура, а также электрические и магнитные свойства материала). При решении задачи ТУ считалось, что коэффициенты деформации $\beta_{ij} = a_{ij}$, остальные постоянные в уравнениях состояния принимались равными нулю; для задачи термоэлектроупругости в уравнениях состояния принималось $\rho_{ni}^{\sigma, B, T} = \chi_{nm}^{\sigma, T} = v_{nm}^{\sigma, T} = m_n^{\sigma} = 0$, а для задачи терромагнитоупругости считалось, что $g_{ni}^{\sigma, D, T} = \beta_{nm}^{\sigma, T} = v_{nm}^{\sigma, T} = t_n^{\sigma} = 0$. Ниже приведены некоторые из полученных результатов для кругового кольца и пластинки с двумя круговыми отверстиями. Все значения величин даны с точностью до значения разности температур на контурах $T_1 - T_0$.

В табл. 1 в зависимости от отношения R_1 / R_0 радиусов внутреннего и внешнего контуров кругового кольца (рис. 2, а) для площадок с нормалью s , касательной контурам кольца, приведены значения нормальных напряжений σ_s , электрической и магнитной индукции D_s и B_s , полученные при

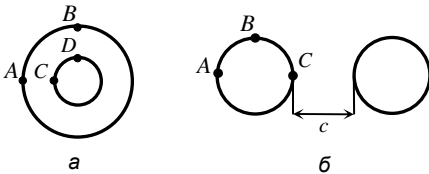


Рис. 2

решении указанных задач ТУ, ТЭУ, ТМУ и ТЭМУ. Значения индукций в точках B и D значительно малы по сравнению с другими величинами, поэтому они не приведены. Из данных табл. 1 следует, что учет электрических и магнитных свойств материала значительно изменяет значения напряжений. При этом наибольшее влияние оказывает

учет магнитных свойств (в задаче ТМУ), а еще больше учет и магнитных, и электрических (в задаче ТЭМУ). Следовательно, для пьезоматериалов при исследовании их термоупругого состояния следует решать задачу термоэлектромагнитоупругости. Из табл. 1 также следует, что с увеличением

Таблица 1

Точка	Величина	Модель	R_1 / R_0							
			0,1	0,5	0,7	0,9	0,1	0,5	0,7	
			Контуры L_0, L_1 не подкреплены				L_0 подкреплен, L_1 не подкреплен			
A	σ_s	ТУ	0,196	0,319	0,345	0,361	-0,258	-0,249	-0,892	
		ТЭУ	0,176	0,273	0,290	0,299	-0,158	-0,147	-0,125	
		ТМУ	-0,002	-0,314	-0,381	-0,428	-0,739	-0,868	-0,974	
		ТЭМУ	-0,010	-0,376	-0,453	-0,509	-0,779	-0,989	-0,998	
	B_s	ТМУ	-0,316	-0,485	-0,519	-0,547	-0,315	-0,484	-0,502	
		ТЭМУ	-0,316	-0,485	-0,519	-0,547	-0,315	-0,484	-0,502	
		$D_s \cdot 10^4$	ТЭУ	-0,350	-0,606	-0,672	-0,716	-0,247	-0,418	-0,446
			ТЭМУ	-0,586	-0,680	-0,727	-0,774	-0,205	-0,337	-0,369
B	σ_s	ТУ	0,111	0,247	0,300	0,346	-0,169	-0,249	-0,383	
		ТЭУ	0,075	0,186	0,235	0,281	-0,034	-0,051	-0,064	
		ТМУ	-0,225	-0,490	-0,563	-0,528	-0,035	-0,051	-0,054	
		ТЭМУ	-0,266	-0,566	-0,649	-0,617	-0,020	-0,032	-0,028	
C	σ_s	ТУ	-0,370	-0,393	-0,385	-0,374	-0,663	-0,331	-0,329	
		ТЭУ	-0,243	-0,305	-0,308	-0,309	-0,203	-0,318	-0,322	
		ТМУ	0,889	0,451	0,460	0,454	1,465	0,923	0,354	
		ТЭМУ	1,022	0,565	0,560	0,543	1,548	0,818	0,746	
	B_s	ТМУ	0,862	0,652	0,604	0,572	0,861	0,652	0,625	
		ТЭМУ	0,862	0,652	0,604	0,572	0,861	0,652	0,625	
		$D_s \cdot 10^4$	ТЭУ	0,977	0,857	0,806	0,768	0,652	0,515	0,521
			ТЭМУ	1,075	1,006	0,892	0,813	0,324	0,374	0,432
D	σ_s	ТУ	-0,813	-0,521	-0,445	-0,390	-1,987	-1,052	-1,866	
		ТЭУ	-0,775	-0,463	-0,383	-0,325	-1,770	-1,667	-1,580	
		ТМУ	-0,643	-0,164	0,070	0,324	-2,138	-2,088	-1,477	
		ТЭМУ	-0,596	-0,101	0,139	0,404	-2,129	-1,805	-1,667	

внутреннего радиуса кольца (с уменьшением его ширины) напряжения, электрическая и магнитная индукция по модулю вблизи внутреннего контура уменьшаются, вблизи внешнего – увеличиваются, подкрепление внешнего контура значительно изменяет на значения напряжений и электрической индукции, а магнитная индукция при этом меняется незначительно.

В табл. 2 для пластинки с двумя одинаковыми круговыми отверстиями (рис. 2, б) приведены значения напряжений σ_s , электрической и магнитной индукции D_s и B_s вблизи контура левого отверстия в зависимости от отношения c/a расстояния c между отверстиями к радиусу a одного из

Таблица 2

Точка	Величина	Модель	c/a					
			10	1	0,5	0,1	0,01	
A	σ_s	ТУ	0,257	0,280	0,277	0,272	0,271	
		ТЭУ	0,138	0,151	0,148	0,144	0,143	
		ТМУ	-0,967	-1,065	-1,068	-1,064	-1,061	
		ТЭМУ	-1,069	-1,174	-1,178	-1,172	-1,168	
	B_s	ТМУ	-0,637	-0,641	-0,639	-0,637	-0,636	
		ТЭМУ	-0,637	-0,641	-0,639	-0,637	-0,636	
	$D_s \cdot 10^4$	ТЭУ	-0,692	-0,721	-0,717	-0,711	-0,706	
		ТЭМУ	-0,531	-0,471	-0,463	-0,462	-0,495	
	B	σ_s	ТУ	0,389	0,275	0,260	0,248	0,246
			ТЭУ	0,389	0,285	0,272	0,261	0,259
ТМУ			0,562	0,719	0,746	0,763	0,765	
ТЭМУ			0,576	0,765	0,797	0,817	0,820	
B_s		ТМУ	-0,027	-0,021	-0,003	0,018	0,024	
		ТЭМУ	-0,027	-0,021	-0,003	0,018	0,024	
$D_s \cdot 10^4$		ТЭУ	-0,007	-0,019	-0,015	-0,009	-0,004	
		ТЭМУ	-0,039	-0,047	-0,021	0,011	-0,012	
C		σ_s	ТУ	0,280	0,391	0,408	0,416	0,399
			ТЭУ	0,157	0,222	0,222	0,200	0,168
	ТМУ		-0,984	-1,515	-1,684	-1,957	-2,105	
	ТЭМУ		-1,090	-1,656	-1,839	-2,140	-2,324	
	B_s	ТМУ	0,652	0,617	0,587	0,563	0,558	
		ТЭМУ	0,652	0,617	0,586	0,563	0,558	
	$D_s \cdot 10^4$	ТЭУ	0,724	0,813	0,770	0,675	0,673	
		ТЭМУ	0,549	0,066	-0,176	-0,550	-1,129	

них, полученные при решении задач ТУ, ТЭУ, ТМУ и ТЭМУ. Все величины даны с точностью до разности $T_2 - T_1$ температур на контурах отверстий L_1 и L_2 . Из данных табл. 2, как и в случае кругового кольца, видно, что учет электрических и магнитных свойств материала значительно изменяет значения напряжений по сравнению с их значениями, получаемыми при решении классической задачи термоупругости для пластинки с отверстиями. При этом наибольшее влияние оказывает учет магнитных свойств (в задаче ТМУ), а еще больше учет и магнитных, и электрических свойств (в задаче ТЭМУ). Поэтому при решении задач о термоупругом состоянии для пьезоматериалов необходимо решать задачу термозлектромагнитоупругости. Из табл. 2 также следует, что при уменьшении расстояния между отверстиями напряжения растут, электрическая индукция убывает, а магнитная индукция меняется незначительно.

РЕЗЮМЕ. Наведені методика розв'язання задачі термоелектромагнітопружності для багатозв'язних тіл з п'єзоматеріалів, що знаходяться у двовимірному термоелектромагнітопружному стані, та її застосування при розв'язку конкретних задач. Подано результати чисельних досліджень з їх аналізом для кругового кільця і пластинки з двома еліптичними (круговими) отворами. Встановлено, що нехтування електричними та магнітними властивостями матеріалів при визначенні термонапруженого стану тіл з п'єзоматеріалів призводить до помилкових результатів.

SUMMARY. The solution of thermoelectromagnetoelasticity problem in multiply-connected piezoelectromagnetic solid and its application for particular problems are provided. The numerical results and analysis of this results for circular ring and plate with two elliptic (circular) holes are presented. It is found that electric and magnetic behaviors of material neglect in thermoelectromagnetoelastic state determination gives misresults.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. *Kaloerov S.A., Baeva A.I., Glushchenko Yu.A.* Two-Dimensional Electroelastic Problem for a Multiply Connected Piezoelectric Body // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – Vol. 39, N 1. – P. 77–84. 2. *Калоєров С.А., Бороненко О.И.* Двумерная задача магнитоупругости для многосвязного пьезомагнитного тела // *Прикладная механика.* – 2005. – Т. 41, № 10. – С. 64–74. 3. *Калоєров С. А., Хорошев К. Г.* Термозлектроупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами // *Теорет. и прикладная механика.* – 2005. – Вып. 41. – С. 124–133. 4. *Калоєров С. А., Хорошев К. Г.* Двумерные задачи термоэлектроупругости и термомагнитоупругости для многосвязных сред // *Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природ. науки.* – 2006. – Вып. 2. – С. 89–100. 5. *Калоєров С.А, Баєва А.И., Бороненко О.И.* Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных сред. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 268 с. 6. *Калоєров С.А., Петренко А.В.* Двумерная задача электромагнитоупругости для многосвязных сред // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2008. – Вып. 51. – С. 208–221. 7. *Космодамианский А. С., Калоєров С.А.* Температурные напряжения в многосвязных пластинках. – К.: Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с. 8. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с. (Механика связных полей в элементах конструкций: В 5 т. Т. 5) 9. *Желудев И.С.* Физика кристаллических диэлектриков. – М.: Наука, 1968. – 463 с. 10. *Калоєров С.А., Горянская Е.С.* Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // *Концентрация напряжений.* – К.: А.С.К., 1998. С. 10–26. (Механика композитов: В 12 т. Т. 7). 11. *Калоєров С.А.* Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих анизотропных сред // *Прикладная механика.* – 2007. – Т. 43, N 6. – С. 56–62. 12. *Zhao M.H., Wang H., Yang F., Liu T.* A magneto-electroelastic medium with an elliptical cavity under combined mechanical–electric–magnetic loading // *Theoret. Appl. Fract. Mech.* – 2006. – Vol. 45. – P. 227–237.

Донецкий национальный университет

Поступила 15.04.2008

УДК 539.3

С. А. КАЛОЕРОВ, д-р физ.-мат. наук,
А. И. БАЕВА, канд. физ.-мат. наук, Ю. С. ШИПОША

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ПЛИТ

В современной технике широко используются конструкции с элементами из полимерных материалов. В процессе эксплуатации конструкций в таких элементах могут возникать высокие концентрации напряжений и деформаций, меняющиеся со временем. Поэтому разработка методов определения напряженно-деформированного состояния вязкоупругих тел и решение на их основе практических задач представляют как теоретический, так и практический интерес. К настоящему времени разработаны методы решения задач и решены различные задачи линейной теории вязкоупругости для пластинок, находящихся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния [1, 2]. Но элементы многих конструкций при эксплуатации находятся в условиях изгиба, а эффективные методы решения задач вязкоупругости для многосвязных сред не разработаны. В данной статье с использованием комплексных потенциалов предложены подходы решения задач вязкоупругого изгиба плит, приведены решения частных задач, исследовано влияние времени на изменение напряженно-деформированного состояния.

1. Постановка задачи. Рассмотрим вязкоупругую плиту постоянной толщины h , срединная плоскость которой занимает многосвязную область S , ограниченную внешним контуром L_0 и контурами отверстий $L_l (l = \overline{1, \mathcal{L}})$ (рис.1). Плита находится под действием распределенного по верхнему основанию давления $q(x, y)$, изгибающих моментов и поперечных сил, действующих на ее контурах.

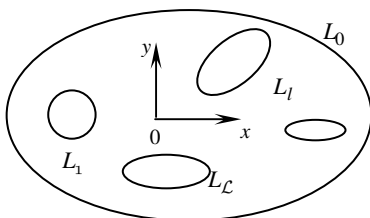


Рис. 1

Как частный будем рассматривать и случай бесконечной многосвязной плиты, когда контур L_0 отсутствует (целиком уходит в бесконечность). В последнем случае будем считать, что на бесконечности заданы изгибающие и крутящий моменты $M_x^\infty, M_y^\infty, H_{xy}^\infty$. Будем считать, что плита обладает свойствами, описываемыми линейной теорией вязкоупругости. Решение задачи будем проводить с помощью принципа Вольтерра, по которому вначале нужно решить соответствующую задачу

теории упругости, а затем заменой коэффициентов упругости временными операторами найти напряженно-деформированное состояние плиты в любой момент времени.

В упругой постановке решение об изгибе рассматриваемой плиты будем проводить с использованием комплексных потенциалов $\varphi(z)$ $\psi(z)$, удовлетворяющих на контурах определенным граничным условиям. Если эти функции найдены, то прогиб, моменты и перерезывающие силы вычисляются по формулам [3–5]

$$w = \frac{1}{D} \left\{ \operatorname{Re} \left[\bar{z} \varphi(z) + \int \psi(z) dz \right] + w_1 \right\}; \quad (1.1)$$

$$M_x + M_y = -4(1+\nu) \left[\operatorname{Re} \varphi'(z) + \partial^2 w_1 / \partial z \partial \bar{z} \right],$$

$$M_y - M_x + 2iH_{xy} = 2(1-\nu) \left[\bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z) + 2 \partial^2 w_1 / \partial z^2 \right]; \quad (1.2)$$

$$N_x - iN_y = -4 \left[\varphi''(z) + 2 \partial^3 w_1 / \partial z^2 \partial \bar{z} \right], \quad (1.3)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; E , ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала плиты, w_1 – частное решение уравнения

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{1}{D} q(x, y). \quad (1.4)$$

Комплексные потенциалы должны удовлетворять определенным граничным условиям на контурах плиты. При задании на контуре L_l плиты усилий и моментов или его жестком подкреплении [3–5]

$$K_1 \varphi(t) + K_2 \left[t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} \right] = f(t) + ic_l t. \quad (1.5)$$

Здесь

$$K_1 = (3+\nu)/(1-\nu), \quad K_2 = -1,$$

$$f(t) = \frac{1}{\nu-1} J(t) + \frac{8}{1-\nu} \left[\int_0^s t \frac{\partial^3 w_1}{\partial t^2 \partial \bar{t}} dt - t \int_0^s \frac{\partial^3 w_1}{\partial t^2 \partial \bar{t}} dt \right] + 2 \frac{\partial w_1}{\partial \bar{t}},$$

$$J(t) = \int_0^s [m(s) + iQ(s)] dt, \quad Q = \int_0^s p(s) ds, \quad (1.6)$$

c_l – произвольная постоянная, если контур загружен заданными распределенными усилиями $p(s)$ и моментами $m(s)$;

$$K_1 = K_2 = 1, \quad c_l = 0, \quad f(t) = -2 \partial w_1 / \partial \bar{t}, \quad (1.7)$$

если контур жестко подкреплен. В случае опертого края плиты, нагруженно-го моментами $m(s)$, граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\bar{t} \varphi(t) + \int \psi(t) dt \right] &= -w_1(t), \\ \operatorname{Re} \left\{ (1-\nu) t_s^2 \left[\bar{t} \varphi''(t) + \psi'(t) \right] - 2(1+\nu) \varphi'(t) \right\} &= g(t), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $g(t) = m(s) - (1-\nu) \left[t_s^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \bar{t}_s^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \bar{t}^2} \right] + 2(1+\nu) \frac{\partial^2 w_1}{\partial t \partial \bar{t}}$, $t_s = \frac{dt}{ds}$.

В общем случае многосвязной области функции имеют вид [3–5]

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \Gamma z - \sum_{l=1}^L (A_l z + B_l) \ln(z - z_l) - \sum_{j=1}^J (C_j^0 z + D_j^0) \ln(z - z_j^0) + \varphi_0(z), \\ \psi(z) &= \Gamma' z - \sum_{l=1}^L \bar{B}_l \ln(z - z_l) - \sum_{j=1}^J \bar{D}_j^0 \ln(z - z_j^0) + \psi_0(z), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где Γ , Γ' – постоянные, равные нулю в случае конечной области и определяемые выражениями

$$\Gamma = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4(1+\nu)}, \quad \Gamma' = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty}{2(1-\nu)} \quad (1.10)$$

в случае бесконечной области;

$$\begin{aligned} A_l &= -\frac{P_l + P_{ql}}{8\pi}, \quad B_l = \frac{(P_l + P_{ql})z_l + M_{yl} - iM_{xl} + M_{ql}}{8\pi}, \\ C_j^0 &= -\frac{P_j^0}{8\pi}, \quad D_j^0 = \frac{P_j^0 \bar{z}_j^0 + M_{yj}^0 - iM_{xj}^0}{8\pi}; \end{aligned}$$

P_l и M_{xl} , M_{yl} – главный вектор и компоненты главного момента усилий, приложенных к L_l ; z_l – точка внутри этого контура; P_j^0 и M_{xj}^0 , M_{yj}^0 – сосредоточенная сила и компоненты сосредоточенного момента в точке z_j^0 ;

$$P_{ql} = 8i \int_{L_l} \frac{\partial^3 w_1}{\partial z^2 \partial \bar{z}} dz, \quad M_{ql} = 8i \int_{L_l} (z - z_l) \frac{\partial^3 w_1}{\partial z^2 \partial \bar{z}} dz; \quad (1.11)$$

$\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ – функции, голоморфные в рассматриваемой области S , включая точки приложения сосредоточенных сил и моментов, а в случае бесконечной области и точку $z = \infty$.

2. Краевые задачи вязкоупругого изгиба. Для вязкоупругих материалов эффекты объемной ползучести релаксации малы. Поэтому изменение модуля объемного расширения материала K пренебрежимо мало и при использовании принципа Вольтерра модуль объемного расширения можно считать постоянным и не заменять временным оператором. В то же время коэффициент Пуассона ν изменяется. Будем считать, что последний коэффициент мало меняется во времени и его можно представить в виде

$$\nu = \nu_0 + \lambda, \quad (2.1)$$

где ν_0 – мгновенно-упругое значение коэффициента Пуассона; $\lambda = \nu - \nu_0$ – малый параметр, равный отклонению ν от ν_0 . Тогда граничные условия (1.5) для нагруженного контура и условия (1.8) переписутся в виде [2]

$$\begin{aligned} (3 + \lambda + \nu_0)\varphi(t) - (1 - \lambda - \nu_0)\left[\bar{t}\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}\right] = \\ = (1 - \nu_0 - \lambda)f(t) + i(1 - \nu_0 - \lambda)c_l t, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\operatorname{Re}\left[\bar{t}\varphi(t) + \int \psi(t)dt\right] = -w_1(t),$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\{(1 - \lambda - \nu_0)t_s^2\left[\bar{t}\overline{\varphi''(t)} + \overline{\psi'(t)}\right] - 2(1 + \lambda + \nu_0)\overline{\varphi'(t)}\right\} = \\ = m(s) - (1 - \lambda - \nu_0)\left[t_s^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \bar{t}_s^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \bar{t}^2}\right] + \\ + 2(1 + \lambda + \nu_0)\frac{\partial^2 w_1}{\partial t \partial \bar{t}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Разложим искомые функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и постоянные c_l в ряды по степеням малого параметра λ :

$$(\varphi(z), \psi(z), c_l) = \sum_{j=0} \lambda^j (\varphi_j(z), \psi_j(z), c_{lj}). \quad (2.4)$$

Подставив (2.4) в условия (2.2), (2.3) и приравняв в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях параметра λ , найдем

$$\alpha_0 \varphi_j(t) - \overline{t\varphi_j'(t)} - \overline{\psi_j(t)} = \frac{\delta_j^0 - 1}{1 - \nu_0} \left[\varphi_{j-1}(t) + \overline{t\varphi_{j-1}'(t)} + \right.$$

$$+ \overline{\Psi_{j-1}(t) + i c_{lj-1} t} + \frac{\delta_j^0}{1-v_0} \left[8 \left(t \int_0^s \frac{\partial^3 w_1}{\partial t^2 \partial \bar{t}} dt - \int_0^s t \frac{\partial^3 w_1}{\partial t^2 \partial \bar{t}} dt \right) - \right. \\ \left. - J(t) + 2(1-v_0) \frac{\partial w_1}{\partial \bar{t}} \right] + 2 \frac{\delta_j^1}{1-v_0} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \delta_j^0 i c_{lj} t \quad (j=1, 2, 3, \dots); \quad (2.5)$$

$$\operatorname{Re} \left[\bar{t} \varphi(t) + \int \psi(t) dt \right] = -w_1(t),$$

$$\operatorname{Re} \left\{ t_s^2 \left[\bar{t} \varphi_j''(t) + \psi_j'(t) \right] - 2 \mathfrak{a}_j \varphi_j'(t) \right\} = \frac{1-\delta_j^0}{1-v_0} \operatorname{Re} \left\{ t_s^2 \left[\bar{t} \varphi_{j-1}''(t) + \right. \right. \\ \left. \left. + \psi_{j-1}'(t) \right] + 2 \varphi_{j-1}''(t) \right\} + \frac{\delta_j^1}{1-v_0} \left[t_s^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \bar{t}_s^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \bar{t}^2} + 2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t \partial \bar{t}} \right] + \\ + \delta_j^0 \left[\frac{m(s)}{1-v_0} - t_s^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \bar{t}_s^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \bar{t}^2} + 2 \mathfrak{a}_j \frac{\partial^2 w_1}{\partial t \partial \bar{t}} \right] \quad (j=1, 2, 3, \dots), \quad (2.6)$$

где $\mathfrak{a}_0 = (3+v_0)/(1-v_0)$, $\mathfrak{a}_1 = (1+v_0)/(1-v_0)$.

После определения функций из соответствующих граничных условий на основании (2.4) и принципа Вольтерра можно найти функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ для любого момента времени. На основе принципа Вольтерра λ^j ($j \geq 1$) заменим значениями функций $T_j(t)$ [6]:

$$\lambda^j = T_j(t) = \lambda^{*j} \cdot 1 = (v^* - v_0)^j \cdot 1, \quad (2.7)$$

где v^* – операторный коэффициент Пуассона, который будем аппроксимировать выражением

$$v^* = v_0 \left(1 + \delta_* \mathfrak{E}_\alpha^*(-\beta) \right), \quad (2.8)$$

причем для вычисления значений воздействия оператора Работнова на единицу можно использовать формулу [7]

$$\mathfrak{E}_\alpha^*(-\beta) \cdot 1 = \frac{1}{\beta} \left\{ 1 - \exp \left[-\beta [(1-\alpha)t]^{1-\alpha} \right] \right\}; \quad (2.9)$$

α , β , δ_* – реологические постоянные материала.

Учитывая (2.9) и свойство возведения резольвентных операторов в степень, функции (2.7) запишем в виде

$$T_j(t) = v_0^j \delta_*^j \mathcal{E}_\alpha^j(-\beta) \cdot 1 = v_0^j \delta_*^j \frac{(-1)^{j-1}}{(1-j)!} \frac{\partial^{j-1}}{\partial \beta^{j-1}} [\mathcal{E}_\alpha^*(-\beta) \cdot 1]. \quad (2.10)$$

Окончательно

$$\lambda^j = T_j(t) = \frac{v_0^j \delta_*^j}{\beta^j} \left[1 - e^{-\beta \tau} \sum_{r=0}^{j-1} \frac{(\beta \tau)^r}{r!} \right], \quad (2.11)$$

где $\tau = [(1-\alpha)t]^{1-\alpha}$. Подставляя λ^j по формуле (2.11) в (2.4), найдем функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, а затем вычислим моменты (1.5) и поперечные силы (1.6) в любой точке. Рассмотрим решения частных задач.

3. Изгиб бесконечной плиты с круговым отверстием. Рассмотрим бесконечную вязкоупругую плиту с круговым отверстием радиуса R (рис. 2). Контур отверстия свободен от усилий и моментов, на бесконечности плита находится под действием изгибающих моментов интенсивности m относительно прямых, составляющих с осью Ox угол α , т.е. $M_x^\infty = m(1 - \cos 2\alpha)/2$,

$$M_y^\infty = m(1 + \cos 2\alpha)/2, \quad H_{xy}^\infty = m \sin 2\alpha.$$

Материал плиты обладает свойствами, описываемыми линейной теорией вязкоупругости.

В данном случае функции (1.9) с учетом (2.4) принимают вид

$$\varphi(z) = \Gamma z + \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \varphi_j(z), \quad \psi(z) = \Gamma' z + \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \psi_j(z), \quad (3.1)$$

где

$$\varphi_j(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} z^{-k}, \quad \psi_j(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{jk} z^{-k}; \quad (3.2)$$

a_{jk} , b_{jk} – постоянные, определяемые из условий (2.5), из которых имеем

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{A}_0 \varphi_j(t)} - t \overline{\varphi_j'(t)} - \overline{\psi_j(t)} = \frac{\delta_j^0 - 1}{1 - v_0} \left[\overline{\varphi_{j-1}(t)} + t \overline{\varphi_{j-1}'(t)} + \right. \\ \left. + \overline{\psi_{j-1}(t)} \right] + \frac{\delta_j^0}{1 - v_0} \left[\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{2} t + \frac{M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty}{2} t \right] \text{ на } L. \quad (3.3) \end{aligned}$$

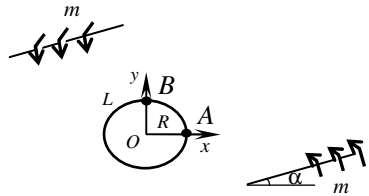


Рис.2

Здесь и далее в граничных условиях постоянная c_l принята равной нулю.

Подставив функции (3.2) в условия (3.3) на контуре отверстия, где $z = R\sigma = e^{i\theta}$, θ – центральный угол, найдем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha_0 \frac{a_{jk} R^k}{\sigma^k} + (1 - \delta_k^1 - \delta_k^2)(k-2)a_{jk-2} R^{k-2} \sigma^k - b_{jk} R^k \sigma^k \right\} = \\ & = \frac{\delta_j^0 - 1}{1 - \nu_0} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_{j-1k} R^k}{\sigma^k} - (1 - \delta_k^1 - \delta_k^2)(k-2)a_{j-1k-2} R^{k-2} \sigma^k + \right. \\ & \left. + b_{j-1k} R^k \sigma^k \right\} + \frac{\delta_j^0}{1 - \nu_0} \left[\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{2} R \sigma + \frac{M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty}{2} \frac{R}{\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях σ , будем иметь

$$\begin{aligned} \alpha_0 a_{jk} &= \frac{\delta_j^0 - 1}{1 - \nu_0} a_{j-1k} + \frac{\delta_j^0 \delta_k^1 R}{1 - \nu_0} \frac{M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty}{2}, \\ (1 - \delta_k^1 - \delta_k^2)(k-2)a_{jk-2} - b_{jk} &= \frac{\delta_j^0 - 1}{1 - \nu_0} \left\{ -(\delta_k^1 + \delta_k^2 - 1) \times \right. \\ & \left. \times (k-2)a_{j-1k-2} + b_{j-1k} \right\} + \frac{\delta_j^0 R}{1 - \nu_0} \frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Решив систему (3.5), получим

$$\begin{aligned} a_{01} &= \frac{(M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty)R}{2(1 - \nu_0)\alpha_0}, \quad b_{01} = \frac{(M_x^\infty + M_y^\infty)R}{2(1 - \nu_0)}, \quad b_{03} = a_{01}, \\ a_{j1} &= -\frac{a_{j-1,1}}{(1 - \nu_0)\alpha_0}, \quad b_{j1} = \frac{b_{j-1,1}}{1 - \nu_0}, \quad b_{j3} = a_{j1}; \\ a_{j2} &= a_{j3} = b_{j2} = a_{jk} = b_{jk} = 0 \quad (k = 4, 5, \dots). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Окончательно

$$\varphi_j(z) = \frac{a_{j1}}{z}, \quad \psi_j(z) = \frac{b_{j1}}{z} + \frac{b_{j3}}{z^3}. \quad (3.7)$$

Были проведены численные исследования распределения изгибающих

моментов в плите в зависимости от времени приложения нагрузки. Плита считалась изготовленной из алюминия, для которой $\nu = 0.25$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 6.65 \cdot 10^{-3}$, $\delta_* = 6.15 \cdot 10^{-3}$, или меди, когда $\nu = 0.34$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 9.20 \cdot 10^{-3}$, $\delta_* = 6.65 \cdot 10^{-3}$. В расчетах количество приближений j по степеням малого параметра λ увеличивалось до тех пор, пока последующее приближение изменяло значения максимальных моментов предыдущего приближения более чем на 0,01%. Для этого необходимо было для различных времен оставлять степени малого параметра λ от 6 до 10.

Для изгиба плиты моментами $M_x^\infty = m$ (угол $\alpha = \pi/2$) с точностью до

Таблица 1

Материал	Точка	t , час					
		0	50	100	200	300	400
Алюминий	A	0,2308	0,1587	0,1530	0,1502	0,1494	0,1492
	B	1,7692	1,8413	1,8470	1,8498	1,8505	1,8507
Медь	A	0,1976	0,1198	0,1167	0,1157	0,1156	0,1154
	B	1,8024	1,8802	1,8832	1,8842	1,8844	1,8844

множителя m в табл. 1 в зависимости от времени приложения нагрузки даны значения изгибающих моментов M_s в точках A и B на площадках, перпендикулярных контуру, а на рис. 3 изображены графики их изменения в точке A. Сплошные и штриховые линии соответствуют плите из алюминия и меди. Из табл. 1 и рис. 3 видно, что с течением времени значения моментов M_s в точке A уменьшаются (на 35%), а в точке B увеличиваются (на 10%). При этом значительные изменения значений моментов происходит лишь в первые 100 час. после приложения нагрузки, а через 200 час. в плите устанавливается стационарное состояние и после этого с течением времени значения моментов практически не изменяются. Как показывают расчеты, и в других задачах стационарное состояние устанавливается примерно в такое же время. Поэтому в дальнейшем результаты расчетов будем приводить для двух случаев: когда $t = 0$ (начальный момент времени) и $t = 400$ (через 400 час. от начала процесса деформирования), когда, nevertheless, уже установилось стационарное состояние.

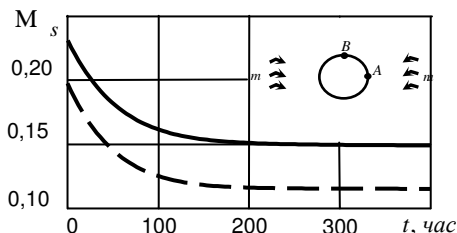


Рис.3

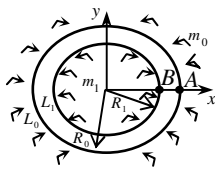


Рис. 4

4 Изгиб кругового кольца. Рассмотрим вязкоупругую кольцевую плиту с круговыми контурами L_0 (внешним) и L_1 (внутренним) и радиусами R_0 и R_1 (рис. 4). Плита изгибается под действием распределенных изгибающих моментов с интенсивностями m_0 и m_1 , действующими на контурах L_0 и L_1 . В данном случае функции примут вид

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \varphi_j(z), \quad \psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \psi_j(z), \\ \varphi_j(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{jk} z^k, \quad \psi_j(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{jk} z^k; \end{aligned} \quad (4.1)$$

где a_{jk} , b_{jk} – постоянные, определяемые из граничных условий на контурах (2.5), которые для данного случая примут вид

$$\begin{aligned} \alpha_0 \varphi_j(t) - t \overline{\varphi_j'(t)} - \overline{\psi_j(t)} &= \frac{\delta_j^0 - 1}{1 - \nu_0} \left[\varphi_{j-1}(t) + t \overline{\varphi_{j-1}'(t)} + \right. \\ &\left. + \overline{\psi_{j-1}(t)} \right] - \frac{\delta_j^0}{1 - \nu_0} \int_0^s m_l dt \quad (l = 0, 1). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Учитывая, что на контурах L_l имеют место равенства $z = t = R_l \sigma$ и, подставляя функции (4.1) в граничные условия (4.2), будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \alpha_0 a_{jk} R_l^k \sigma^k - \frac{(k+2) a_{jk+2} R_l^{k+2}}{\sigma^k} - \frac{b_{jk} R_l^k}{\sigma^k} \right\} &= \\ = \frac{\delta_j^0 - 1}{1 - \nu_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ a_{j-1k} R_l^k \sigma^k + \frac{(k+2) a_{j-1k+2} R_l^{k+2}}{\sigma^k} + \right. \\ &\left. + \frac{b_{j-1k} R_l^k}{\sigma^k} \right\} - \frac{\delta_j^0}{1 - \nu_0} m_l R_l \sigma. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Приравнявая в последнем равенстве коэффициенты при одинаковых степенях σ , получаем

$$\begin{aligned}
\alpha_0 R_l^{2k} a_{jk} - (2-k) R_l^2 a_{j2-k} - b_{j,-k} &= \frac{\delta_j^0 - 1}{1 - \nu_0} \left\{ R_l^{2k} a_{j-1k} + \right. \\
&\quad \left. + (2-k) R_l^2 a_{j-1,2-k} + b_{j-1,-k} \right\} - \frac{\delta_k^1 \delta_j^0 R_l^{k+1} m_l}{1 - \nu_0}, \\
\alpha_0 a_{j,-k} - (k+2) R_l^{2k+2} a_{jk+2} - R_l^{2k} b_{jk} &= \frac{\delta_j^0 - 1}{1 - \nu_0} \left\{ a_{j-1,-k} + \right. \\
&\quad \left. + (k+2) R_l^{2k+2} a_{j-1,k+2} + R_l^{2k} b_{j-1,k} \right\}. \tag{4.4}
\end{aligned}$$

Из системы (4.4) будем иметь

$$\begin{aligned}
a_{01} &= \frac{R_0^2 m_0 - R_1^2 m_1}{2(1 + \nu_0)(R_0^2 - R_1^2)}, \quad b_{0,-1} = R_1^2 a_{01} (\alpha_0 - 1) + \frac{R_1^2 m_1}{1 - \nu_0}, \\
a_{j1} &= -\frac{2a_{j-1,1}}{(\alpha_0 - 1)(1 - \nu_0)}, \quad b_{j,-1} = R_1^2 a_{j1} (\alpha_0 - 1) + \\
&\quad + \frac{1}{1 - \nu_0} \left\{ 2R_1^2 a_{j-1,1} + b_{j-1,-1} \right\}; \quad a_{j2} = b_{j,-2} = 0, \\
a_{jk+2} = b_{j,-k-2} = a_{j,-k} = b_{jk} &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Phi_j(z) = a_{j1} z, \quad \Psi_j(z) = \frac{b_{j,-1}}{z}. \tag{4.6}$$

Если в приведенных формулах принять $R_1 = 0$, то получится решение задачи об изгибе круглой плиты, загруженной по внешнему контуру изгибающими моментами интенсивности m_0 . Для этого случая

$$\begin{aligned}
a_{01} &= \frac{m_0}{2(1 + \nu_0)}, \quad a_{j1} = -\frac{a_{j-1,1}}{1 + \nu_0}, \quad b_{j,-1} = 0; \\
\Phi_j(z) &= a_{j1} z, \quad \Psi_j(z) = 0; \\
M_x + M_y &= -4 \sum_{j=0} \left((1 + \nu_0) \lambda^j + \lambda^{j+1} \right) a_{j1}, \\
M_y - M_x + 2iH_{xy} &= 0. \tag{4.7}
\end{aligned}$$

При $R_0 = \infty$, $m_0 = 0$ из приведенных формул получится решение задачи изгиба бесконечной плиты с круговым отверстием радиуса R_1 , на контуре которого действуют моменты интенсивности m_1 . Тогда

$$a_{j1} = 0, \quad b_{0,-1} = -\frac{R^2 m_1}{1-\nu_0}, \quad b_{j,-1} = \frac{b_{j-1,-1}}{1-\nu_0},$$

$$\varphi_j(z) = 0, \quad \psi_j(z) = \frac{b_{j,-1}}{z};$$

$$M_x + M_y = 0, \quad M_y - M_x + 2iH_{xy} = -2 \sum_{j=0}^{\infty} \left((1-\nu_0) \lambda^j - \lambda^{j+1} \right) \frac{b_{j,-1}}{z^2}. \quad (4.8)$$

Были проведены численные исследования распределения моментов в зависимости от геометрических характеристик кольца и времени приложения нагрузки. Плита считалась изготовленной из алюминия.

В табл. 2 даны значения изгибающих моментов M_s в точках A и B кольца в зависимости от отношения R_1/R_0 радиусов кольца. Как видно, уменьшение ширины кольца (увеличение отношения R_1/R_0) при действии моментов m_0 на внешнем контуре приводит к увеличению значения M_s , а при действии моментов m_1 на внутреннем контуре – к его уменьшению. При

Таблица 2

Нагрузка	Точка	t , час.	R_1/R_0					
			0,0001	0,01	0,1	0,5	0,8	0,9
m_0	A	0	1,0000	1,0002	1,0202	1,6667	4,5556	9,5236
		400	1,0000	1,0002	1,0218	1,7342	5,0599	10,9011
	B	0	2,0000	2,0002	2,0202	2,6667	5,5556	10,5263
		400	2,0000	2,0002	2,0234	2,7748	6,1706	12,0454
m_1	A	0	0,0000	0,0002	-0,0202	-0,6667	-3,5556	-8,5263
		400	0,0000	0,0002	-0,0202	-0,6836	-3,8784	-9,6399
	B	0	-1,0000	-1,0002	-1,0202	-1,6667	-4,5556	-9,5263
		400	-1,0000	-1,0002	-1,0202	-1,6937	-4,9492	-10,7568

$R_1/R_0 < 0,1$ влиянием контуров друг на друга можно пренебречь. В этом случае вблизи внешнего контура возникающие моменты равны соответствующим значениям, полученным по формулам (4.7) для сплошной круглой

плиты, на контуре которой действуют моменты m_0 , а вблизи внутреннего контура возникающие моменты равны соответствующим значениям, полученным по формулам (4.8) для бесконечной плиты с круговым отверстием, на контуре которого действуют моменты m_1 . Как видно из данных, для этого случая (когда $R_1 / R_0 < 0,1$) значения моментов от времени не зависят. Если же взаимовлияние контуров значительно, то в кольце возникает большая концентрация моментов и влияние времени на значения моментов достаточно велико. Например, при $R_1 / R_0 = 0,9$ значения моментов при переходе в стационарное состояние изменяются на 14 % (если моменты действуют на внешнем контуре, интенсивности m_0) или на 13 % (если моменты действуют на внутреннем контуре, интенсивности m_1). Следовательно, в вязкоупругой плите изменение моментов со временем может наблюдаться только в зонах их концентрации.

5. Изгиб плиты с эллиптическим отверстием. Рассмотрим бесконечную вязкоупругую плиту с эллиптическим отверстием с полуосями a , b и контуром L (рис. 5). Контур отверстия свободен от усилий и моментов, на бесконечности плита находится под действием изгибающих моментов m относительно прямых, составляющих с осью Ox угол α , т.е. $M_x^\infty = m(1 - \cos 2\alpha) / 2$,

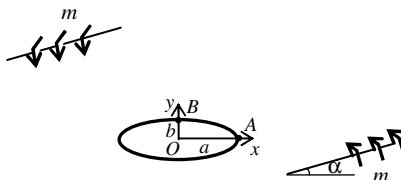


Рис.5

$M_y^\infty = m(1 + \cos 2\alpha) / 2$, $H_{xy}^\infty = m \sin 2\alpha$. В данном случае

$$\varphi(z) = \Gamma z + \sum_{j=0} \lambda^j \varphi_j(z), \quad \psi(z) = \Gamma' z + \sum_{j=0} \lambda^j \psi_j(z), \quad (5.1)$$

где $\varphi_j(z)$, $\psi_j(z)$ – функции, голоморфные в бесконечной области вне контура отверстия. Для нахождения этих функций используем конформные отображения и метод интегралов типа Коши.

Отобразим внешность единичного круга $|\zeta| \geq 1$ на внешность L :

$$z = R(\zeta + m/\zeta), \quad (5.2)$$

где $R = (a+b)/2$, $m = (a-b)/(a+b)$. В отображенной области граничное условие (2.5) примет вид

$$\alpha_0 \varphi_j(\sigma) - \frac{\sigma^2 + m}{(1 - m\sigma^2)\sigma} (\sigma \overline{\varphi_j(\sigma)} - \overline{\psi_j(\sigma)}) = \frac{\delta_j^0 - 1}{1 - \nu_0} [\varphi_{j-1}(\sigma) +$$

$$\begin{aligned}
& \left. + \frac{\sigma^2 + m}{(1 - m\sigma^2)\sigma} (\overline{\sigma \phi'_{j-1}(\sigma)} + \overline{\psi_{j-1}(\sigma)}) \right] + \frac{\delta_j^0}{1 - \nu_0} \left[\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{2} \times \right. \\
& \left. \times R\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right) + \frac{M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty}{2} R\left(\frac{1}{\sigma} + \sigma m\right) \right]. \quad (5.3)
\end{aligned}$$

Функция $\phi_j(\sigma)$ является граничным значением функции $\phi_j(\zeta)$, голоморфной вне единичной окружности γ в отображенной области, включая точку $z = \infty$. Поэтому для точек, принадлежащих внешности γ имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\phi_j(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = -\phi_j(\zeta) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\phi_{j-1}(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = -\phi_{j-1}(\zeta).$$

В силу голоморфности $\phi_j(\zeta)$ вне единичной окружности в отображенной области

$$\phi_j(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{jk}}{\zeta^k}.$$

Учитывая, что $|m| < 1$, $|\sigma| = 1$, $\frac{1}{1 - m\sigma^2} = \sum_{p=0}^{\infty} m^p \sigma^{2p}$, по-

лучаем разложение

$$\frac{\sigma^2 + m}{(1 - m\sigma^2)\sigma} \overline{\phi'_j(\sigma)} = - \frac{\sigma^2 + m}{(1 - m\sigma^2)\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} k \bar{a}_{jk} \sigma^{k+1} = A_0 + A_1 \sigma + \dots,$$

из которого следует, что $\frac{\sigma^2 + m}{(1 - m\sigma^2)\sigma} \overline{\phi'_j(\sigma)}$ является граничным значением

функции $\frac{\zeta^2 + m}{(1 - m\zeta^2)\zeta} \overline{\phi'_j(\zeta)}$, голоморфной внутри γ . Поэтому интеграл

типа Коши от нее для области $|\zeta| \geq 1$ равен нулю. Аналогичным образом

интегралы типа Коши от $\frac{\sigma^2 + m}{(1 - m\sigma^2)\sigma} \overline{\phi'_{j-1}(\sigma)}$, $\overline{\psi_j(\sigma)}$ и $\overline{\psi_{j-1}(\sigma)}$ равны

нулю. Окончательно, вычислив интегралы типа Коши, из (5.3) получим

$$\phi_j(\zeta) = \frac{\delta_j^0 - 1}{(1 - \nu_0)\alpha_0} \phi_{j-1}(\zeta) + \frac{\delta_j^0}{(1 - \nu_0)\alpha_0} \left[\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{2} \frac{Rm}{\zeta} + \right.$$

$$\left. + \frac{M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty}{2} \frac{R}{\zeta} \right]. \quad (5.4)$$

Условие, сопряженное с (5.3), имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha_0 \overline{\varphi_j(\sigma)} - \frac{(1+m\sigma^2)\sigma}{(\sigma^2-m)} \varphi_j'(\sigma) - \psi_j(\sigma) &= \frac{\delta_j^0 - 1}{1-\nu_0} \left[\overline{\varphi_{j-1}(\sigma)} + \right. \\ &+ \left. \frac{(1+m\sigma^2)\sigma}{(\sigma^2-m)} \varphi_{j-1}'(\sigma) + \psi_{j-1}(\sigma) \right] + \frac{\delta_j^0}{1-\nu_0} \left[\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{2} \times \right. \\ &\times R \left(\frac{1}{\sigma} + m\sigma \right) + \frac{M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty}{2} R \left(\sigma + \frac{m}{\sigma} \right) \left. \right]. \quad (5.5) \end{aligned}$$

Методом интегралов типа Коши из (5.5) находим

$$\begin{aligned} \psi_j(\zeta) &= - \frac{(1+m\zeta^2)\zeta}{\zeta^2-m} \varphi_j'(\zeta) - \frac{\delta_j^0 - 1}{1-\nu_0} \left[\frac{(1+m\zeta^2)\zeta}{(\zeta^2-m)} \varphi_{j-1}'(\zeta) + \psi_{j-1}(\zeta) \right] + \\ &+ \frac{\delta_j^0}{1-\nu_0} \left[\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{2} \frac{R}{\zeta} + \frac{M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty}{2} \frac{mR}{\zeta} \right]. \quad (5.6) \end{aligned}$$

Зная функции (5.4), (5.6), а следовательно, и (5.1), можно найти изгибающие моменты и перерезывающие силы в любой точке.

Если $a = b$, то будем иметь решение задачи для плиты с круговым отверстием. В этом случае $m = 0$;

$$\begin{aligned} \varphi_j(\zeta) &= \frac{\delta_j^0 - 1}{\alpha_0(1-\nu_0)} \varphi_{j-1}(\zeta) + \frac{\delta_j^0 (M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty)}{2\alpha_0(1-\nu_0)} \frac{R}{\zeta}, \\ \psi_j(\zeta) &= - \frac{\varphi_j'(\zeta)}{\zeta} - \frac{\delta_j^0 - 1}{1-\nu_0} \left[\frac{\varphi_{j-1}'(\zeta)}{\zeta} + \right. \\ &+ \left. \psi_{j-1}(\zeta) \right] + \frac{\delta_j^0 R (M_x^\infty + M_y^\infty)}{2(1-\nu_0)\zeta}. \quad (5.7) \end{aligned}$$

Эти формулы совпадают с приведенными ранее (3.7), полученными для

этого случая методом рядов.

Проведены численные исследования влияния отношения полуосей b/a и времени приложения нагрузки на значения изгибающих моментов M_s в точках контура на площадках, перпендикулярных к контуру. В табл. 3

Таблица 3

α , рад.	Точка	t , час.	b/a				
			10	2	1	0,5	0,1
0	A	0	1,0770	1,3850	1,7692	2,5390	8,6930
		400	1,0850	1,4360	1,8507	2,7020	9,5080
	B	0	0,2303	0,2307	0,2308	0,2308	0,2308
		400	0,1489	0,1491	0,1492	0,1492	0,1492
$\pi/2$	A	0	0,2303	0,2307	0,2308	0,2308	0,2308
		400	0,1489	0,1491	0,1492	0,1492	0,1492
	B	0	8,6860	2,5380	1,7692	1,3850	1,0770
		400	9,4990	2,7010	1,8507	1,4250	1,0850

для алюминиевой плиты даны значения этих моментов в точках A и B в зависимости отношения b/a для двух времен отсчета $t=0$ и $t=400$. Из табл. 3 видно, что если $\alpha=0$, то с уменьшением отношения b/a значения моментов M_s в точке B не изменяются, а в точке A резко растут, если

же $\alpha = \pi/2$, то с уменьшением отношения b/a значения M_s в точке A не изменяются, а в точке B уменьшаются. Закономерности изменения M_s в зависимости от времени аналогичны тем, какие были получены для плиты с круговым отверстием. Точнее, если $\alpha = \pi/2$, то при переходе в стационарное состояние значения моментов в точке A, как и в случае круга, уменьшаются на 35 %, а в точке B увеличиваются на 6 % вместо 10% для круга. В случае $\alpha = 0$ получаются аналогичные закономерности изменения моментов: при переходе в стационарное состояние значения моментов в точке A увеличиваются на 3–9 %, в точке B уменьшаются на 35 %.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано метод розв'язання задач в'язкопружного згину багатозв'язних ізотропних плит. Розв'язок задач зведено до послідовності граничних задач для комплексних потенціалів. Отримано загальні представлення комплексних потенціалів різних наближень і граничні умови для їх визначення. Дано розв'язання деяких задач для однозв'язних областей з дослідженням впливу часу на напружено-деформівний стан даних середовищ.

SUMMARY. The method for solving of problems of viscoelastic bend multiconnected plates is offered. The decisions of problems are reduced to the sequence of the boundary problems for complex potentials. General presentations of complex potentials of different approximations and boundary conditions for their determination are obtained. The decisions of some problems for simply connected domains with research of influence of time on the tense-deformed state of the considered mediums are given.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. *Иванов Г. М., Космодамианский А. С., Шкодина Л. Н.* Напряженно-деформированное состояние вязкоупругих многосвязных плит // Тр. X Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. – Тбилиси: Мецниереба, 1975. – Т.1. – С. 435–440. 2. *Калоеров С. А., Мироненко А. Б.* Исследование вязкоупругого состояния пластинки с жесткими эллиптическими или линейными включениями // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2005. – Вип. 1, ч. 1. – С. 61–69. 3. *Космодамианский А. С., Иванов Г. М.* Изгиб тонких многосвязных плит. – Донецк, 1973. – 264 с. 4. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела – М.: Наука, 1977. – 416 с. 5. *Фридман М. М.* Решение общей задачи об изгибе тонкой изотропной упругой плиты, опертой вдоль края // Прикладная математика и механика. – 1952. – Т. 16, № 4. – С. 429–436. 6. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с. 7. *Работнов Ю. Н.* Равновесие упругой среды с последствием // Прикладная математика и механика. – 1948. – Т. 12, № 1. – С. 53–62.

Донецкий национальный университет

Поступила 10.04.2008

УДК 539.3

В. М. БЫСТРОВ, канд. физ.-мат. наук,
В. С. ЗЕЛЕНСКИЙ, канд. физ.-мат. наук

ЗАТУХАНИЕ КРАЕВОГО ЭФФЕКТА В СЛОИСТОМ КОМПОЗИТНОМ МАТЕРИАЛЕ С ТОНКИМ ИЗОТРОПНЫМ ПОКРЫТИЕМ

В работах [1–3] рассмотрен вопрос о затухании краевого эффекта в трансверсально-изотропном материале с тонким изотропным покрытием. Трансизотропный материал рассматривался в рамках *континуального подхода*, как модель армированного однонаправленными волокнами материала. Задача определения параметров затухания краевого эффекта решалась для случая поверхностной нагрузки, действующей в направлении армирования, когда достигается наибольшая длина затухания краевого эффекта. Исследовалась зависимость длины затухания краевого эффекта от соотношения между периодом кусочно-постоянной поверхностной нагрузки и толщиной покрытия. Показано, что наличие изотропного покрытия приводит к изменению геометрии зоны краевого эффекта и уменьшению ее протяженности. В работе [4] в рамках *модели кусочно-однородной среды* исследовано влияние тонкого изотропного покрытия на длину затухания краевого эффекта при одноосном продольном сжатии слоистого композитного материала. Длина затухания краевого эффекта рассматривалась как максимальная протяженность зоны краевого эффекта, определенная с заданной точностью. Показано, что наличие тонкого изотропного покрытия приводит к уменьшению длины затухания краевого эффекта для значений периода поверхностной нагрузки, превышающих параметр структуры материала. При их равенстве (равномерное сжатие слоев наполнителя) наличие покрытия практически не влияет на длину затухания краевого эффекта. Анализ влияния покрытия на длину затухания краевого эффекта выполнен с использованием результатов работ [5, 6]. В этих работах в рамках *модели кусочно-однородной среды* рассмотрен вопрос о затухании краевого эффекта в слоистом композитном материале при одноосном продольном сжатии слоев наполнителя.

В данной статье исследуется влияние покрытия на затухание краевого эффекта в компонентах слоистого композитного материала для поверхностной нагрузки, период которой равен двум параметрам структуры материала. Для такой нагрузки, как показано в работе [4], изменение максимальной длины затухания краевого эффекта по сравнению с равномерным сжатием слоев наполнителя является наиболее существенным при изменении периода нагрузки. С использованием результатов работы [7] проводится сравнительная оценка затухания краевого эффекта при наличии тонкого покрытия и его отсутствии. Для анализа затухания краевого эффекта

используется функция затухания напряжений. Применяется расчетная схема, которая включает краевую задачу теории упругости кусочно-однородных тел и количественный критерий затухания краевого эффекта для нормальных напряжений. Задача решается с использованием метода сеток в рамках концепции базовых схем [8].

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о затухании краевого эффекта в слоистом композитном материале с покрытием для случая одноосного продольного сжатия материала поверхностной кусочно-постоянной перио-

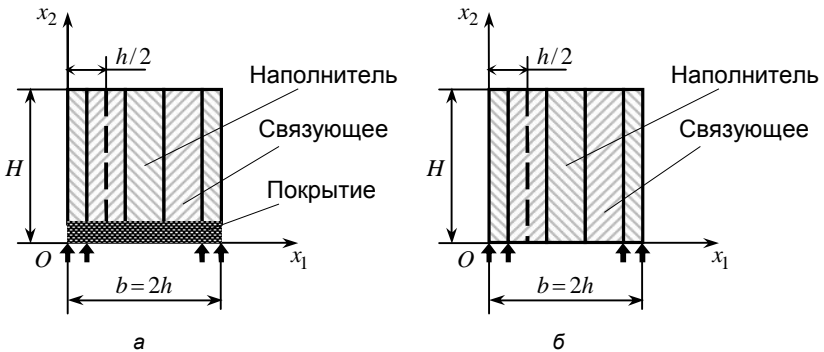


Рис.1

дической нагрузкой (рис. 1, а). Композитный материал образован последовательным чередованием плоских слоев наполнителя и связующего. Слои покрытия размещается перпендикулярно слоям материала. Область, которую занимает слоистый композитный материал с покрытием, отнесем к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, плоскость Ox_2x_3 которой совпадает со срединной поверхностью произвольного слоя наполнителя, а плоскость Ox_1x_3 совпадает с поверхностью покрытия. Будем считать, что кусочно-постоянная периодическая нагрузка p прикладывается к слою покрытия и действует в плоскости размещения слоев наполнителя в направлении оси Ox_2 : $p(x_1, 0) = p^0$, $|x_1| \leq 0,5h_n + kb$, $k = 0, 1, \dots$. Период b поверхностной нагрузки равен двум параметрам структуры: $b = 2h$, $h = h_n + h_c$, где h_n , h_c – соответственно толщина слоя наполнителя и связующего. Вдоль оси Ox_3 нагрузка не изменяется. Расчетная область $\bar{\Omega}$, исходя из условий регулярности композитной структуры и периодического характера поверхностной нагрузки, может быть представлена следующим образом:

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{n=1}^2 \bar{\Omega}^{(n)} = \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_1 \leq b/2; 0 \leq x_2 \leq H\},$$

где $\bar{\Omega}^{(n)}$ – область, занимаемая расчетным элементом n структуры материала с покрытием, называемым в дальнейшем просто расчетным элементом. Такой элемент образуется половинами соседних слоев наполнителя и связующего и сопряженной с ними областью покрытия. Расчетный элемент характеризуется размером $h/2$ в направлении оси Ox_1 и толщиной покрытия h_n . Размер расчетной области в направлении оси Ox_1 равен половине периода b поверхностной нагрузки. Размер H этой области в направлении оси Ox_2 определяется в рамках вычислительного эксперимента и соответствует условию установившегося вдоль оси Ox_2 напряженного состояния с заданной точностью и условию независимости параметров затухания краевого эффекта от этого размера.

Затухание краевого эффекта будем исследовать с использованием функции затухания напряжений $\tilde{\rho}(x)$. Эта функция характеризует в процентном отношении изменение нормальных напряжений в зоне краевого эффекта по сравнению с напряжениями в области установившегося напряженного состояния для самоуравновешенной нагрузки при изменении расстояния от линии приложения нагрузки. Эта функция может быть представлена в виде

$$\tilde{\rho}(x) = \tilde{\rho}(x_1, x_2) = 100 \left(\sigma_{22}(x_1, x_2) - \sigma_{ycm}(x_1, H) \right) / f(x_1, 0), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (1)$$

в котором $f(x_1, 0) = p(x_1, 0) - \sigma_{ycm}(x_1, H)$ – функция самоуравновешенной нагрузки, σ_{ycm} – нормальные напряжения σ_{22} , которые устанавливаются в расчетной области при затухании краевого эффекта. Значение координаты x_2 , для которой функция затухания напряжений $\tilde{\rho}(x_1, x_2)$ принимает некоторое значение ρ для фиксированной координаты x_1 , может рассматриваться как длина затухания λ_ρ краевого эффекта в направлении оси Ox_2 , определенная с точностью $\rho\%$.

Напряжения σ_{22} определим из решения соответствующей краевой задачи для расчетной области $\bar{\Omega}$. Граничные условия краевой задачи на участке $\{0 \leq x_1 \leq b/2, x_2 = 0\}$ границы расчетной области $\bar{\Omega}$ определяют поверхностную нагрузку, которой ставится в соответствие самоуравнове-

шенная функция нагрузки. На участках $\{x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq H\}$ и $\{x_1 = b/2, 0 \leq x_2 \leq H\}$ границы расчетной области граничные условия соответствуют периодическому характеру напряженного состояния и являются смешанными однородными условиями. Условия на участке $\{0 \leq x_1 \leq b/2, x_2 = H\}$ границы являются смешанными однородными и не допускают перемещения и вращения расчетной области как целого. Условия сопряжения между слоями материала, между слоями материала и слоем покрытия соответствуют идеальному контакту.

Для геометрических параметров материала и параметров нагрузки справедливо соотношение: $h_n \sim h_{\pi} < h \leq b < H$.

Для анализа влияния покрытия на затухание краевого эффекта будем использовать результаты определения параметров затухания краевого эффекта в слоистом композитном материале, представленные в работе [7]. Соответствующая расчетная область для композитного материала и условия нагружения материала показаны на рис. 1 б.

Анализ результатов расчета. Исследовалось затухание краевого эффекта в компонентах материала с использованием функции затухания напряжений (1). Расчеты проводились для следующих значений упругих и геометрических характеристик компонент материала: $E_n / E_c = 100$, $E_{\pi} = E_n$, $\nu_n = \nu_c = \nu_{\pi} = 0,3$, где E_n , ν_n , E_c , ν_c и E_{π} , ν_{π} – соответственно модули Юнга и коэффициенты Пуассона наполнителя, связующего и покрытия, $c_n = h_n / (h_n + h_c) = 0,5$ – концентрация наполнителя, $h_{\pi} = 0,125 h$.

На рис. 2 изображено изменение функции затухания напряжений вдоль оси Ox_2 в слоях материала при наличии покрытия, что соответствует расчетной области, представленной на рис. 1 а. Кривые 1, 2 относятся к сечениям x_1 / h , равным 0 и 2 (в слое наполнителя), кривая 3 – к сечению $x_1 / h = 1$ (в слое связующего). Для указанных сечений достигается максимальная протяженность зоны краево-

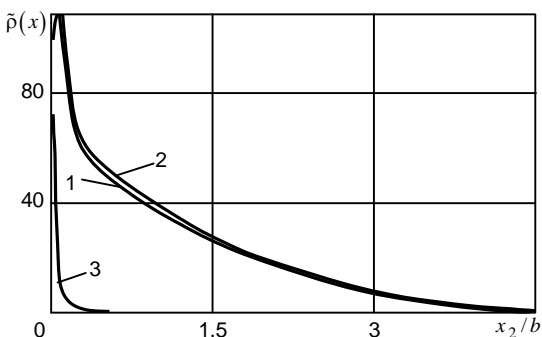


Рис. 2

го эффекта в компонентах материала. На рис. 3 для сравнения изображено изменение функции затухания напряжений вдоль оси Ox_2 при отсут-

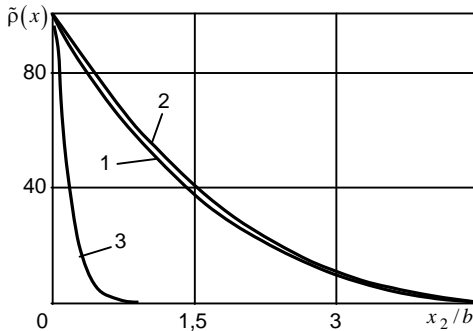


Рис. 3

вии покрытия, что соответствует расчетной области, представленной на рис. 1, б.

Как следует из полученных результатов, значения функции затухания напряжений для слоя наполнителя, в плоскости которого действует нагрузка (нагруженный слой), ниже, чем для ненагруженного слоя наполнителя. Это наблюдается как при наличии покрытия, так и при его отсутствии. Наличие покрытия приводит к более

низким значениям функции затухания напряжений (и соответствующих значений длины затухания краевого эффекта). Уменьшение составляет 25–30 % (сравните кривые 1, 2 на рис. 2 и рис. 3). Для слоя связующего наличие покрытия приводит к значительному уменьшению значений функции затухания напряжений. Такое уменьшение достигает 90 % (сравните кривые 3 на рис. 2 и рис. 3).

Таким образом, из анализа полученных в данной работе и работе [4] результатов следует, что наличие тонкого изотропного покрытия приводит к уменьшению значений функции затухания напряжений и, следовательно, к уменьшению длины затухания краевого эффекта в слоях наполнителя и в слоях связующего для заданной точности определения краевого эффекта. При этом, такое изменение наиболее существенно для слоя связующего.

Отметим также, что из результатов данной работы и работы [7] следует, что наличие тонкого покрытия приводит к уменьшению длины затухания краевого эффекта для значений периода поверхностной нагрузки, превышающих параметр структуры материала. При их равенстве (равномерное сжатие слоев наполнителя) наличие покрытия практически не влияет на поведение функции затухания напряжений и длину затухания краевого эффекта.

РЕЗЮМЕ. Досліджується згасання крайового ефекту при одноосьовому повздо-вжньому стисканні шаруватого композитного матеріалу із тонким ізотропним покриттям. Розглядається випадок періодичного кусково-постійного поверхневого навантаження, коли період навантаження дорівнює двом параметрам структури матеріалу. Зроблено порівняльну оцінку згасання крайового ефекту за наявністю покриття та його відсутністю. Для аналізу згасання крайового ефекту застосовується функція згасання напружень. Ця функція відповідає кількісному критерію згасання крайового ефекту для нормальних напружень.

SUMMARY. Influence of thin isotropic covering on the decay of end effect in components of layered composite material is investigated. The case of piecewise-constant periodic surface load when the period of load is equal to two parameters of structure of a material is considered. The comparative rating of the decay of end effect is spent at presence of thin coverings and its absence. For the analysis of the decay of end effect the function of stresses decay is used. This function corresponds to quantitative criteria of decay of end effect for normal stresses.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. *Bystrov V. M., Kokhanenko Yu. V.* An analysis of the decay of Saint-Venant end effects in a transversally isotropic matrix with an isotropic covering // *Mech. Compos. Mater.* – 2002. – Vol. 38, № 2. – P. 95–102. 2. *Быстров В. М.* Влияние неоднородности материала на зону краевого эффекта Сен-Венана при плоской деформации полуограниченной трансверсально-изотропной матрицы с покрытием // *Доп. НАНУ.* – 2004. – № 1. – С. 38–42. 3. *Bystrov V. M., Kokhanenko Yu. V.* Influence of a thin isotropic coating on the edge effect zone in isotropic and transversally isotropic materials // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – Vol. 43, № 12. – P. 1353–1358. 4. *Быстров В. М.* О влиянии тонкого изотропного покрытия на затухание краевого эффекта при одноосном продольном сжатии слоистого композитного материала // *Доп. НАНУ.* – 2008. – № 2. – С. 35–38. 5. *Быстров В. М.* Затухание краевого эффекта Сен-Венана в слоистом композитном материале при изменении количества ненагруженных слоев наполнителя // *Доп. НАНУ.* – 2005. – № 11. – С. 35–38. 6. *Kokhanenko Yu. V., Bystrov V. M.* Edge effects in laminated composite with longitudinally compressed laminas // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – Vol. 42, № 8. – P. 922–927. 7. *Быстров В. М.* Затухание краевого эффекта Сен-Венана в слоистом композитном материале при наличии ненагруженных слоев наполнителя // *Теорет. и прикладная механика.* – 2005. – Вып. 41. – С. 53–57. 8. *Коханенко Ю. В., Быстров В. М.* Построение дискретных моделей на основе базовых факторов // *Численные методы.* – К. – 2002. – С. 135–187. (Механика композитов: В 12 т.; Т. 11).

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 15.03.2008

УДК 539.3

Б. М. ДИВЕЕВ, канд. тех. наук, И. Б. БУТИТЕР,
Н. Н. ЩЕРБИНА, канд. физ.-мат. наук

ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН

Для исследования колебаний слоистых композитных пластин были развиты модели, в которых рассмотрены различные комбинации аппроксимаций перемещений в плоскости пластины и послойно в трансверсальном направлении [1]. В результате численного анализа колебаний изотропных, ортотропных и композитных слоистых пластин определены рациональные аппроксимации поля перемещений, которые могут быть использованы для эффективного исследования распространения волн и колебаний в слоистых структурах и идентификации их механических характеристик. С целью определения свойств материала слоистых композитных элементов предложено множество неразрушающих комбинированных численно-экспериментальных методик [2, 3]. Эффективность численно-экспериментальных методов идентификации может быть улучшена, заменяя одношаговый процесс минимизации двухступенчатой стратегией. Так, в работах [4–6] для идентификации упругих модулей ортотропных материалов развит двухшаговый метод, который сокращает общее количество шагов решения, не уменьшая точность результатов оптимизации; улучшает скорость сходимости одним из двух возможных способов, а именно: упругие параметры разделяются на два множества и оцениваются на двух независимых шагах оптимизации, или они оцениваются грубо на первом коротком шаге и затем уточняются на втором при более жестких условиях. В статье [7] для идентификации упругих модулей изотропных материалов используется метод граничных элементов. Многие исследователи для идентификации упругих модулей слоистых композитов использовали экспериментально определенные собственные частоты [2, 8, 9]. В данной работе на основе измеренных собственных частот и развитого многоуровневого теоретического подхода выполнена идентификация упругих свойств слоистых пластин.

Теоретико-экспериментальное сравнение. Для того, чтобы убедиться в правильности предложенного теоретического подхода [1], необходимо было выполнить серию численных экспериментов. С этой целью были исследованы колебания композитной балки с такими геометрическими и физико-механическими параметрами: длина $L = 0,3 \div 0,6$ м, толщина $H = 0,0127$ м, модули упругости материала – $C_{xx} = C_{zz} = 250$ МПа, $G = 58$ МПа и $C_{xz} = 40$ МПа, плотность материала $\rho = 240$ кг/м³. При вычислениях применялась дискретно-континуальная расчетная схема «балка-вибратор» (рис. 1), соответствующая части экспериментальной установки

102 © Дивеев Б. М., Бутитер И. Б., Щербина Н. Н., 2008

для возбуждения вибраций в композитных балочных образцах (рис. 2). Экспериментальные исследования проводились на основе методики, предложенной в работе [10].

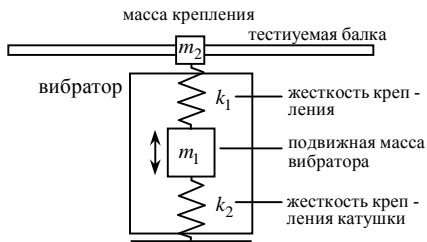


Рис. 1



Рис. 2

На рис. 3 для разных диапазонов частот представлены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ), полученные с использованием моделей разного уровня точности, в т.ч. предложенной уточненной с рациональными кинематическими аппроксимациями. Рис. 3, а и 3, б соответствуют значениям L_0 , равным 0,6 м и 0,3 м. Из данных рис. 3 можно сделать вывод, что теория балок Эйлера дает завышенные значения частот; теория балок Тимошенко также дает завышенные значения частот, но меньше, чем теория Эйлера; результаты по уточненной модели с разложением в ряды практически совпадают для порядков аппроксимаций перемещений в продольном направлении $N_x > 13$ и по толщине $N_z > 3$ и более длинные образцы демонстрируют лучшее совпадение на высоких частотах.

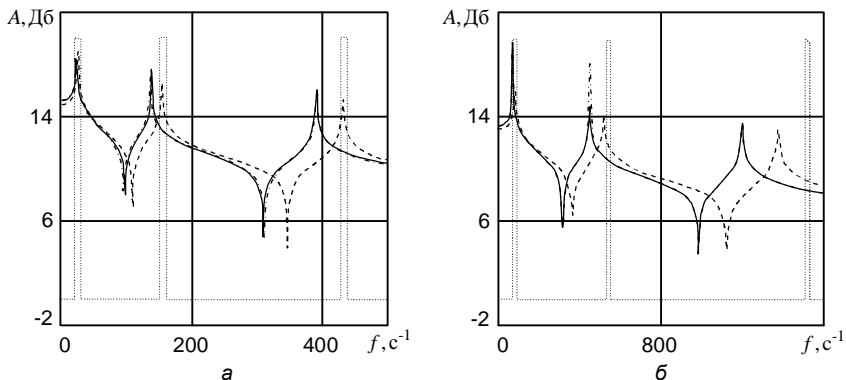


Рис. 3

Для более высокого частотного диапазона ($4000 \div 20000$ Гц) для балок длины $L = 0,06$ м и толщины $H = 0,0127$ м, на рис. 4 показаны амплитудно-частотные характеристики для однородной и неоднородной трехслойной

балок (рис. 4, а и 4, б соответственно). Как видно из рис. 4, при исследовании колебаний на высоких частотах для однородной балки достаточно ограничиться четырьмя членами аппроксимации перемещений по толщине ($N_z = 4$), а для неоднородной слоистой – шестью ($N_z = 6$).

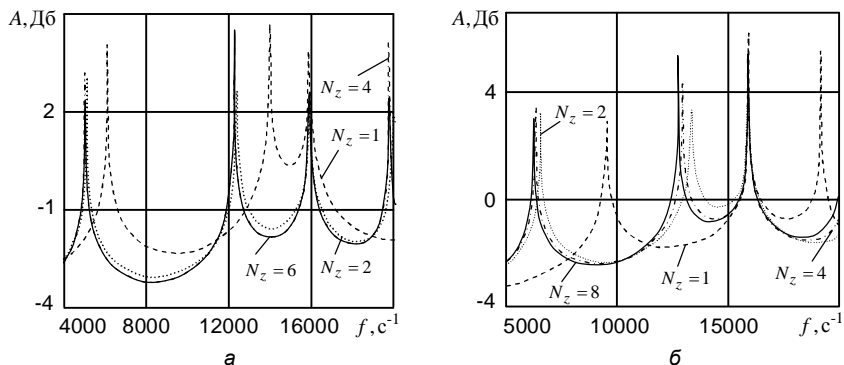


Рис. 4

Идентификация упругих модулей. Детальный анализ чувствительности показал, что решение одношаговой задачи идентификации (оптимизации) очень восприимчиво к изменениям одной группы модулей упругости и менее восприимчиво к другим модулям. Поскольку существование погрешностей в данных измерения неизбежно, то вышеупомянутая [1] формулировка задачи идентификации констант материала в таком случае является неподходящей, если необходимо определение истинных значений упругих констант. Иначе такая идентификация может привести к ошибочным результатам даже тогда, когда отклонения измеренных частот относительно малы. Поэтому целесообразно применение двух- (или более) шагового метода идентификации. На каждом шаге может использоваться две или больше различных методик минимизации. Первый шаг задачи идентификации основан на генетическом алгоритме и включает функцию оптимизации, максимальный набор параметров оптимизации: упругие модули исследуемого образца, неизвестные его геометрические характеристики, а также механические параметры, учитывающие крепление образца к вибростенду. В нашем случае в качестве функции оптимизации выбрано суммарное отклонение вычисленных собственных частот от полученных из эксперимента. На втором уровне идентификации проводится генетическая оптимизация по параметрам, меньше всех влияющих на функцию оптимизации на первом уровне. В связи со сложностью и большой размерностью некоторых моделей их численной реализации, как правило, используют эвристические методы оптимизации. В этом смысле генетические алгоритмы (GA) [11] оказываются весьма удобным инструментом для решения широкого класса задач оптимизации.

В общем случае функцию оптимизации можно представить в виде

$$F_c = \sum_i^{N_f} C_i \left(f_i^{\text{exp}}, f_i^c \right) + \sum_j^M D_j \left(a_j^{\text{exp}}, a_j^c \right) + \sum_{i,j} M_{ij} \left(E_{ij}^{\text{exp}}, E_{ij}^c \right) + \sum_k^K G_k \left(g_k^{\text{exp}}, g_k^c \right). \quad (1)$$

Здесь $\sum_i^{N_f} C_i \left(f_i^{\text{exp}}, f_i^c \right)$ и $\sum_j^M D_j \left(a_j^{\text{exp}}, a_j^c \right)$ – отклонения экспериментальных частот и амплитуд от расчетных; $\sum_{i,j} M_{ij} \left(E_{ij}^{\text{exp}}, E_{ij}^c \right)$ – отклонение априори известных модулей упругости от их экспериментальных значений; $\sum_k^K G_k \left(g_k^{\text{exp}}, g_k^c \right)$ – отклонение априори известных геометрических и механических свойств соединения от их теоретически уточненных значений. Верхние индексы c и exp в формуле (1) обозначают вычисленные и экспериментально найденные значения функций, соответственно. Обычно используют функцию оптимизации F_c в виде [2]

$$F_c = \sum_i^{N_f} \frac{\left| f_i^{\text{exp}} - f_i^c \right|}{f_i^{\text{exp}}}. \quad (2)$$

На первом шаге генетической оптимизации была использована функция оптимизации

$$F_c = \sum_i^{N_f} \frac{\left| f_i^{\text{exp}} - f_i^c \right|}{f_i^{\text{exp}}} + \frac{\left| L - L_c \right|}{L} + \frac{\left| m_2 - m_2^c \right|}{m_2} + \frac{\left| k_2 - k_2^c \right|}{k_2}. \quad (3)$$

В качестве параметров оптимизации выбраны модули упругости материала композитной балки C_{xx} , C_{xz} , C_{zz} , G , ее длина L , масса узла крепления балки m_2 и жесткость крепления k_2 к столу вибростенда (рис. 2). Их исходные значения равны: $C_{xx} = 251$ МПа, $G = 57,7$ МПа, $C_{zz} = 250$ МПа, $C_{xz} = 40$ МПа, $L = 0,6$ м, $m_2 = 0,02$ кг, $k_2 = 5 \cdot 10^4$ Н/м. Значения модулей C_{xx} , G материала балки (пенопласт) взяты из таблиц.

В результате генетической оптимизации на первом шаге получены значения модулей Юнга и сдвига $C_{xx} = 260,3$ МПа, $G = 58,7$ МПа, оказывающие наибольшее влияние на функцию оптимизации F_c (3). Наблюдалась

сильная зависимость от длины балки. Так, найденное значение длины балки $L_c = 0,594$ м меньше, чем ее исходная длина $L = 0,600$ м. Параметр крепления балки влияет только на первую собственную частоту. Эта частота не была известна из эксперимента. На рис. 5 наведены результирующие амплитудно-частотные характеристики колебаний композитной балки с идентифицированными параметрами. Заметим, что теории низкого порядка неадекватно описывают колебания балок на среднем уровне частот. Такая же особенность наблюдалась выше на рис. 3.

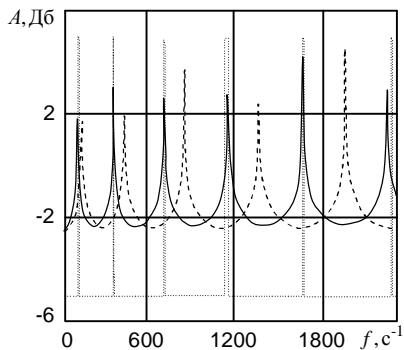


Рис. 5

На втором шаге идентификации функция оптимизации F_c взята в виде (2). Параметрами оптимизации являлись модули трансверсально изотропного материала C_{xz} и C_{zz} . В результате минимизации функции F_c получены следующие уточненные значения модулей:

$C_{xz} = 37,9$ МПа, $C_{zz} = 247,6$ МПа. Результаты идентификации представлены на рис. 6, где изображены изолинии графика функции идентификации (2) в зависимости от C_{xx} и C_{zz} (рис. 6, а) и C_{xz} и G (рис. 6, б) (значения $\times 10$ ГПа).

Из представленных на рис. 6 результатов видна сильная зависимость функции идентификации от продольного модуля упругости C_{xx} , меньшая зависимость от модуля сдвига G и малая зависимость от модулей C_{xz} , C_{zz} .

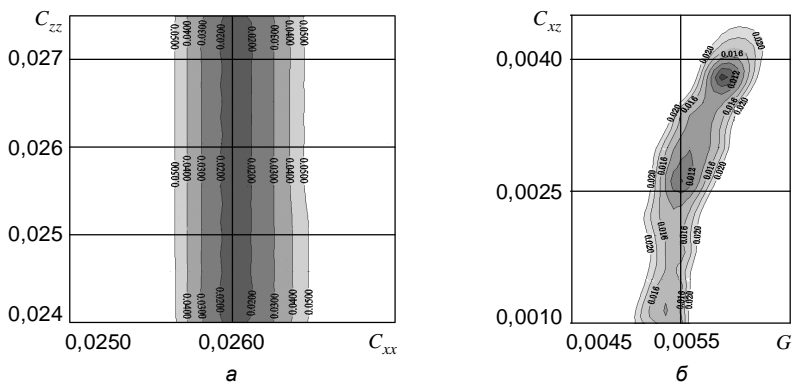


Рис. 6

РЕЗЮМЕ. За даними вимірювань власних частот виконана ідентифікація пружних властивостей шаруватих композитних пластин. Модулі пружності ламінатів визначалися на основі багаторівневого моделювання і двокрокової процедури ідентифікації. На першому кроці ідентифікації з використанням генетичного алгоритму визначались модулі Юнга і зсуву, а на другому кроці в результаті мінімізації функції похибки уточнювалися значення трансверсальних модулів.

SUMMARY. Identification of elastic properties of laminated composite plates from the measured eigenfrequencies has been performed. Elastic constants of laminates have been determined by using a multi-level modelling and identification procedure. A genetic minimization technique is then used to identify Young's and shear modules of the first-level of identification and transverse constants by minimizing the error function of the second-level of optimization.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. *Diveyev B., Crocker M. J.* Dynamic properties and damping prediction for laminated plates // Proceeding of international conference on noise and vibration engineering (ISMA-2006), September 18-20, 2006 Katholieke Universiteit Leuven, Belgium. – 2006. – P. 1021–1028. 2. *Mota Soares C. M., Moreira de Freitas M., Araujo A. L.* Identification of material properties of composite plate specimens // Composite structures. – 1993. – Vol. 25. – P. 277–285. 3. *Araujo A. L., Mota Soares C. M., Moreira de Freitas M. J., Pedersen P., Herskovits J.* Combined numerical-experimental model for the identification of mechanical properties of laminated structures // Composite structures. – 2000. – Vol. 50. – P. 363–372. 4. *Rikards R., Chate A., Gailis A.* Identification of elastic properties of laminates based on experimental design // Structural optimization. – 2001. – Vol. 38. – P. 5097–5115. 5. *Chen M., Kam T. Y.* Elastic constants identification of symmetric angle-ply laminates via a two-level optimization approach // Composites science and technology. – 2007. – Vol. 67, № 3-4. – P. 698–706. 6. *Wang W. T., Kam T. Y.* Elastic constants identification of shear deformable laminated composite plates // ASCE, Journal of engineering mechanics. – 2001. – Vol. 127, № 11. – P. 1117–1123. 7. *Marin L., Elliott L., Ingham D. B., Lesnic D.* Parameter identification in isotropic linear elasticity using the boundary element method // Eng. Anal. Boundary Elements. – 2004. – Vol. 28. – P. 221–233. 8. *Wilde W. P., Sol H.* Anisotropic material identification using measured resonant frequencies of rectangular composite plates // Composite structures. – 1987. – Vol. 4, № 2. – P. 2317–2324. 9. *Rikards R., Chate A., Steinchen W., Kessler A., Bledzki A. K.* Method for identification of elastic properties of laminates based on experiment design // Composites. – 1999. – Vol. 30B. – P. 279–289. 10. *Козум І., Бутутер І., Буря О., Чувінцева О., Микита А.* Дослідження демпфування в армованих полімерах при циклічному згині балкових зразків // машинознавство. – 2007. – № 3 (117). – С. 18–21. 11. *Levine D.* Genetic algorithms: a practitioner's view // IN-FORMS J. Comput. – 1997. – Vol. 9, № 3. – P. 256–259.

*Национальный университет «Львовская политехника»,
Институт прикладных проблем механики и
математики НАН Украины*

Поступила 24.03.08

УДК 539.3

Г. Д. ГАВРИЛЕНКО, д-р техн. наук, В. И. МАЦНЕР, канд. техн. наук

ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ ПРОГИБАМИ

Устойчивость цилиндрических оболочек с осесимметричными прогибами исследовалась в работах [1, 2]. В данной статье подобной методикой получены замкнутые аналитические решения динамических задач, позволяющие находить частоты колебаний оболочек. Исследование выполнено для оболочки, шарнирно опертой по торцам.

Постановка задачи. Рассмотрим свободные колебания цилиндрической оболочки с осесимметричными начальными прогибами в виде вмятин и выпучин (одиночных или регулярных) (рис. 1). Будем предполагать, что

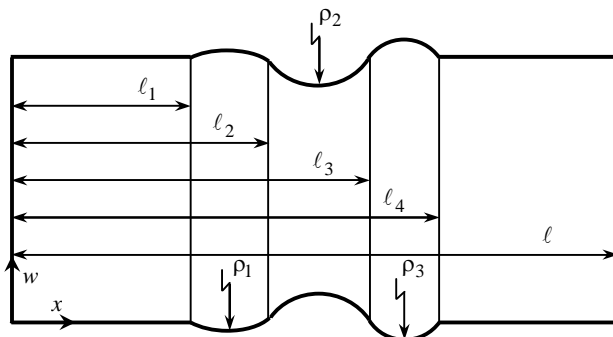


Рис. 1

части оболочки $l_{n+1} - l_n$ ($n = \overline{1, N}$; где N – число вмятин и выпучин) вследствие наличия начальных прогибов искривляются вдоль образующей по радиусам ρ_n и могут рассматриваться как оболочки, близкие по форме к цилиндрическим с радиусами кривизн r , ρ_n ; радиус r имеет столь малое изменение, что можно считать его постоянным по всей длине оболочки.

Методика расчета оболочек с прогибами. Для расчета рассматриваемых оболочек воспользуемся методикой, описанной в работах [1–3].

Уравнения движения оболочки получим, используя принцип стационарности действия Остроградского-Гамильтона [4]

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (V - T) dt = 0, \quad (1)$$

где V и T – потенциальная и кинетическая энергии системы, причем для потенциальной энергии имеют место известные формулы [1]. Что же касается кинетической энергии, ее можно вычислить по формуле

$$T = \frac{h\rho_0}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\ell \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] r dx d\theta, \quad (2)$$

в которой ρ_0 – плотность материала обшивки; h – толщина оболочки.

Выражения для компонент перемещений, удовлетворяющих условиям шарнирного операния оболочки по торцам выберем в виде

$$\begin{aligned} u &= u_{ij} \cos i \theta \cos \lambda x / r \cos \omega t, \\ v &= v_{ij} \sin i \theta \sin \lambda x / r \cos \omega t, \\ w &= w_{ij} \cos i \theta \sin \lambda x / r \cos \omega t, \end{aligned} \quad (3)$$

где u_{ij} , v_{ij} , w_{ij} – произвольные постоянные, $\lambda = j\pi r / \ell$, j – число полу-волн по длине, i – числа полных волн по окружности, ω – собственная частота, t – временная координата.

Подставив (3) в выражения для потенциальной и кинетической энергий, получим

$$\begin{aligned} V &= \frac{K\pi\ell}{4r} \left\{ (u_{ij}\lambda - iv_{ij} + w_{ij})^2 + 2(1-\mu)u_{ij}(iv_{ij} - w_{ij}) + \right. \\ &+ \frac{1-\mu}{2} (-u_{ij}i + v_{ij}\lambda)^2 + \frac{1}{a} \left\{ [(\lambda^2 + i^2)w_{ij} - iv_{ij}]^2 + \right. \\ &+ 2(1-\mu) \left[\lambda^2 w_{ij}(iv_{ij} - i^2 w_{ij}) - (iv_{ij} - i^2 w_{ij})^2 \right] \left. \right\} + \\ &+ S_{12}w_{ij}^2 + 2S_{11}\lambda u_{ij}w_{ij} - 2\mu S_{11}w_{ij}(iv_{ij} - w_{ij})^2 + \\ &+ \frac{1}{a} \left\{ S_{12}\lambda^2 u_{ij}^2 + 2S_{11}\lambda^3 u_{ij}w_{ij} + 2\mu S_{11}\lambda u_{ij}(i^2 w_{ij} - iv_{ij}) + \right. \\ &+ 2(1-\mu) \left[S_{21}iu_{ij}(2i\lambda w_{ij} - 2\lambda v_{ij}) + S_{22}u_{ij}^2 \right] \left. \right\} - \\ &- \frac{K}{4} \frac{\pi\ell}{r} \frac{\sigma}{E} (1-\mu^2) (\lambda^2 - i^2 S_{11}) w_{ij}^2; \end{aligned} \quad (4)$$

$$T = \frac{h\rho_0\omega^2}{4} (A_1 u^2 + A_2 v^2 + A_3 w^2). \quad (5)$$

Здесь

$$S_{11} = \sum_{n=1}^N r_n I_{1n}, \quad S_{12} = \sum_{n=1}^N r_n^2 I_{1n}, \quad S_{21} = \sum_{n=1}^N r_n I_{2n}, \quad S_{22} = \sum_{n=1}^N r_n^2 I_{2n},$$

$$I_{1n} = \frac{2}{\ell} \int_{\ell_n}^{\ell_{n+1}} \sin^2 \frac{\lambda x}{r} dx, \quad I_{2n} = \frac{2}{\ell} \int_{\ell_n}^{\ell_{n+1}} \cos^2 \frac{\lambda x}{r} dx, \quad a = \frac{12r^2}{h^2}, \quad r_n = r / \rho_n.$$

Условия экстремума полной энергии системы приводят к следующему уравнению для определения собственных частот колебаний рассматриваемой оболочки:

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \omega^2 & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} - \omega^2 & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

где

$$A_{11} = \lambda^2 + \frac{1-\mu}{2} i^2 + \frac{1}{a} \left[\lambda^2 S_{12} + 2(1-\mu) i^2 S_{22} \right],$$

$$A_{12} = -i\lambda \frac{1+\mu}{2} - \frac{i\lambda}{a} \left[\mu S_{11} + 2(1-\mu) S_{21} \right],$$

$$A_{13} = \lambda\mu + \frac{\lambda}{a} \left[(\lambda^2 + \mu i^2) S_{11} + 2(1-\mu) i^2 S_{21} \right],$$

$$A_{22} = \frac{1-\mu}{2} \lambda^2 + i^2 + \frac{1}{a} \left[i^2 + 2(1-\mu) \lambda^2 \right],$$

$$A_{23} = -i(1+\mu S_{11}) - \frac{i}{a} \left(i^2 + (2-\mu) \lambda^2 \right),$$

$$A_{33} = 1 + S_{12} + 2\mu S_{11} + \alpha_r \left(1 - i^2 z_{rr} \right)^2 + \frac{1}{a} \left(\lambda^2 + i^2 \right)^2. \quad (7)$$

Решая уравнение (6), найдем три различных значения ω^2 . Однако для тонких оболочек практически важным является только первое собственное значение, поэтому в (6) членами с ω^4 и ω^6 будем пренебрегать. Для определения собственных частот колебаний получаем зависимость

$$\omega_{ij}^2 = \frac{K}{r^2 h \rho_0} \frac{A_{33} \left(A_{11} A_{22} - A_{12}^2 \right) + 2A_{12} A_{13} A_{23} - A_{11} A_{23}^2 - A_{22} A_{13}^2}{\left(A_{11} A_{33} - A_{13}^2 \right) + \left(A_{22} A_{33} - A_{23}^2 \right) + \left(A_{11} A_{22} - A_{12}^2 \right)}. \quad (8)$$

Анализ результатов исследований. Были проведены численные исследования для оболочек, описанных в работе [3]. Для них $\ell/r = 2, 25$,

$r/h = 400$, материал – листовой прокат АМГ – 6М.

На рис. 2 изображены графики изменения $\zeta = f(z_j)$ и минимальной частоты колебаний от амплитуды одиночного прогиба, где $z_j = Zw_0/h$, $Z = \ell^4 \sqrt{1 - \mu^2} / \sqrt{r h}$, $\zeta = \omega_{cr} / \omega_{\min}$, $\omega_{\min} = (\pi / rZ) \sqrt{E / \rho_0} \sqrt{3}$ – минимальная частота колебаний идеальной оболочки, приведенная в [5]. Зона, на ко-

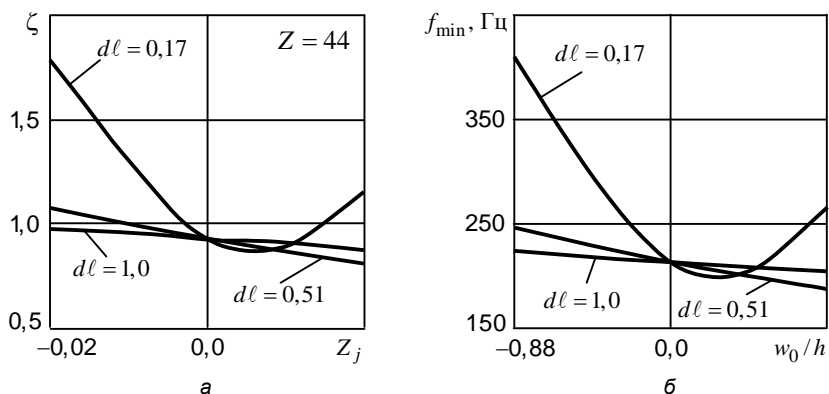


Рис. 2

торой размещена одиночная осесимметричная вмятина или выпучина (посредине оболочки), определяется величиной $dl = \ell_0 / \ell$, ℓ_0 – протяженность вмятины (выпучины). Как следует из рис. 2, а, величина ζ , связанная с частотой колебаний несовершенной оболочки, ведет себя по-разному для положительных и отрицательных z_j . Она может как возрастать, так и убывать. При наличии вмятины ($z_j \geq 0$) с ростом ее амплитуды ($0 \leq z_j \leq 0,02$) значение ζ убывает при $0,51 \leq dl \leq 1$ и возрастает при $dl > 0,17$. В случае выпучин ($z_j \leq 0$) при увеличении z_j или w_0/h значение ζ тоже увеличивается, причем оно становится весьма существенным. Например, при $dl = 0,17$ и $|z_j| = 0,02$ величина $\zeta > 1,75$. Эти выводы качественно соответствуют результатам работы [6], где исследовались сферические оболочки. Следовательно, одиночные локальные вмятины и выпучины могут существенно повышать собственную частоту колебаний. Однако в зоне $0 \leq z_j \leq 0,02$ и $0,51 \leq dl \leq 1$ значение ζ уменьшается. Пове-

дение кривых на рис. 2, б аналогично описанным данным рис. 2, а.

На рис. 3 даны зависимости $f_{ij} = f(i)$ при $j=1$ для одиночной выпукины (рис. 3, а) и вмятины (рис. 3, б), где i – число волн по окружности оболочки, $f_{ij} = \omega/2\pi$ – круговая частота. Сплошные и штриховые линии соответствуют идеальной оболочке и оболочкам с выпукинами ($d\ell = 0,17$), у которых w_0/h растет от $-0,11$ до $-0,44$ (рис. 3, а) или от $0,11$ до $0,66$ (рис. 3, б), результаты для испытанных оболочек [3] помечены значками \bullet , \blacktriangle . Как сле-

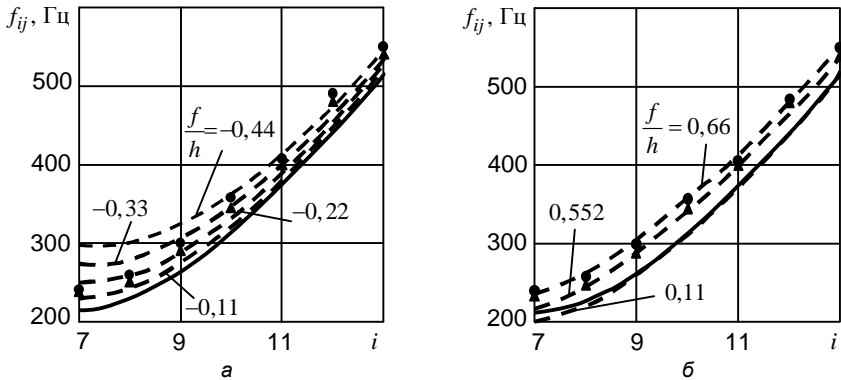


Рис. 3

дует из рис. 3, рост амплитуды прогибов ведет к росту всех частот колебаний, причем f_{\min} при наличии вмятин может даже уменьшаться при $w_0/h = 0,11$. Все частоты колебаний неидеальных оболочек увеличиваются по сравнению с идеальной оболочкой (сплошная линия) и при этом приближаются к экспериментальным данным [3]. Однако, в испытанных оболочках [3], естественно, были начальные несовершенства, причем не в виде одиночных прогибов, а, скорее, ближе к регулярным, т.е. в виде чередующихся вмятин и выпукин (как на рис. 1).

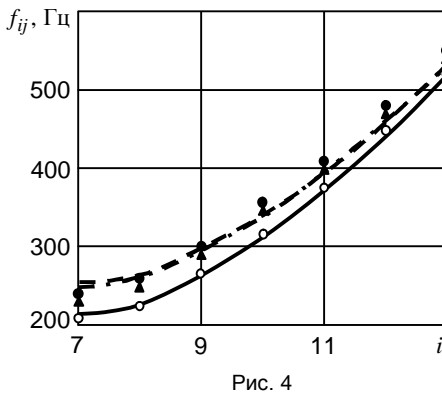


Рис. 4

На рис. 4 представлены результаты расчетов $f_{ij} = f(i)$ для оболочек с 3 зонами вмятин и выпукин (при $j=1$). Результаты, получен-

ные предложенным способом для идеальной оболочки, изображены сплошной линией, теоретические результаты работы [3] – в виде белых кружков (○), экспериментальные данные [3], описанные на рис. 3 в виде – значками (●, ▲). Кроме того, нанесены полученные нами две теоретические кривые. Каждая из них соответствует оболочке с 3 прогибами (одинаковой амплитуды $w_0/h = 0,5$) и одинаковыми зонами протяженности ($d\ell = 0,25$). При этом одна кривая (штриховая) отвечает оболочке, у которой есть одна центральная вмятина $w_0/h = 0,5$ и две примыкающие к ней выпучины. Вторая кривая (тонкая линия) характеризует поведение частот в неидеальной оболочке с выпучиной в центре ($w_0/h = -0,5$) и двумя примыкающими к ней вмятинами. Из рис. 4 следует, что регулярные прогибы подобного типа увеличивают собственные частоты колебаний оболочек и приближают их значения к экспериментальным данным [3].

РЕЗЮМЕ. Запропоновано новий підхід до проблеми коливань циліндричних оболонок при наявності осесиметричних прогинів. Отримано аналітичний розв'язок та приведено результати розрахунків.

SUMMARY. A new approach to the problem of cylindrical shells vibrations is used for the estimation of free oscillation frequency of shells with initial local axisymmetrical deflection. The analytical solution and results of calculation are presented.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. *Гавриленко Г. Д., Мацнер В. И.* Устойчивость и несущая способность подкрепленных оболочек с осесимметричными вмятинами // Теорет. основы строительства: Матер. польско-украинского семинара, Варшава-Днепропетровск, июнь 2004. – Днепропетровск, 2004. – Т. 12. – С. 629–636. 2. *Гавриленко Г. Д., Мацнер В. И., Ситник А. С.* Устойчивость и несущая способность подкрепленных оболочек с осесимметричными вмятинами и выпучинами // Теорет. основы строительства: Матер. польско-украинского семинара, Варшава-Днепропетровск, июнь 2005. – Днепропетровск, 2005. – Т. 13. – С. 99–106. 3. *Кукарина А. И., Мацнер В. И., Сивак Э. Ф.* О влиянии начальных погибей на собственные колебания ребристых цилиндрических оболочек // Прикладная механика. – 1982. – Т. 18, № 4. – С. 58–63. 4. *Кільчевський М. О.* курс теоретичної механіки. – К.: Рад. шк., 1957. – Т. 2. – 462 с. 5. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. Кармишин А. В, Лясковец В. А., Мяченков В. И., Фролов А. Н. – М.: Машиностроение, 1975. – 376 с. 6. *Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Решетарь А. Д.* О формах изгибных колебаний сферических оболочек с начальными неправильностями // Прикладная механика. – 1988. – Т. 24, № 12. – С. 30–38.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 20.02.2008

Я. А. ЖУК, д-р физ.-мат. наук; И. А. ГУЗЬ, д-р физ.-мат. наук

ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ И ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ НА ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ БАЛКИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПЬЕЗОАКТИВНЫЕ СЛОИ

В статьях [1–3] общие соотношения электромеханики для тонкостенных элементов, состоящих из физически нелинейных пьезоактивных слоев развиты в предположении справедливости стандартных гипотез типа Кирхгофа-Лява, обобщенных на случай электромеханики и плоского напряженного состояния [4]. Уравнения движения тонкостенных оболочек приведены в [4]. Вместе с соответствующими граничными и начальными условиями они замыкают постановку нестационарной задачи электромеханики для слоистых оболочек, содержащих пьезоактивные слои. В данной статье в качестве исследуемого объекта выбрана слоистая балка, содержащая пьезоактивные слои. Для рассматриваемого класса вопросов балка является наиболее простым объектом, который в то же время позволяет исследовать все основные закономерности поведения слоистых тонкостенных конструкций и изучить особенности взаимодействия физической и геометрической нелинейностей, а также возможности активного демпфирования вынужденных колебаний [5].

Постановка и решение задачи. Рассматривается модельная задача о вынужденных колебаниях шарнирно опертой трехслойной балки, средний слой которой изготовлен из алюминиевого сплава, а внешние – из пьезокерамики. Толщины слоев постоянные. Поведение материала электрически пассивного (без пьезоэффекта) алюминиевого сплава описывается при помощи модели, учитывающей физически нелинейную реакцию материала. Пьезокерамические слои считаются упругими трансверсально изотропными. Изучаются вопросы механического и электрического возбуждения колебаний, возможность гашения механически возбуждаемых колебаний при помощи подачи соответствующей разности потенциалов на контакты пьезослоев, особенности влияния физической нелинейности поведения материала пассивных слоев на реакцию слоя-сенсора и конструкции в целом, влияние геометрической нелинейности на поведение конструкции и слоя-сенсора, а также взаимодействие физической и геометрической нелинейностей как при переходных, так и при стационарных режимах работы.

Для описания реакции материала, как в упругой, так и в физически нелинейной области используется модель Боднера-Партома [1], основанная на концепции внутренних параметров состояния. Принимается предположение об аддитивности деформации: полная деформация представима в виде суммы упругой и неупругой составляющих. Модель также включает

уравнения закона Гука, закон течения с условием пластической несжимаемости, кинетическое уравнение, эволюционные уравнения для внутренних переменных изотропного и направленного упрочнения и начальные значения для внутренних параметров состояния [1].

Введем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ таким образом, чтобы ось абсцисс совпадала с осью балки, толщинная координата отсчитывается вдоль оси ординат, а ширина – вдоль оси аппликат. Геометрические параметры балки: длина – L , толщина – h (верхняя и нижняя грани $z = h/2$, $z = -h/2$ соответственно), ширина – b_y .

Определяющие уравнения для s -го слоя, состоящего из физически нелинейного пьезоэлектрического материала, запишутся в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(s)} &= C_{11}^{(s)} \varepsilon_{xx} - C_{11}^{(s)} \varepsilon_{xx}^p + p H_{31}^{(s)} D_z, \\ E_z^{(s)} &= p H_{31}^{(s)} \varepsilon_{xx} - p H_{31}^{(s)} \varepsilon_{xx}^p + B_{33}^{(s)} D_z,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}C_{11}^{(s)} &= (c_{11}^D - c_{12}^D)[c_{33}^D(c_{11}^D + c_{12}^D) - 2(c_{13}^D)^2] / (c_{11}^D c_{33}^D - (c_{13}^D)^2), \\ H_{31}^{(s)} &= (c_{11}^D - c_{12}^D)(h_{31} c_{33}^D - h_{33} c_{13}^D) / (c_{11}^D c_{33}^D - (c_{13}^D)^2), \\ B_{33}^{(s)} &= [2h_{33} h_{31} c_{13}^D - h_{33}^2 c_{11}^D - h_{31}^2 c_{33}^D + \\ &+ \beta_{33}^S (c_{11}^D c_{33}^D - (c_{13}^D)^2)] / c_{11}^D c_{33}^D - (c_{13}^D)^2,\end{aligned}$$

а для модулей упругости, пьезоэлектрических констант и коэффициентов диэлектрической непроницаемости приняты стандартные обозначения [4]. Параметры соответствуют материалу отдельно взятого слоя. Деформации произвольной точки балки могут быть определены по формуле [3]

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon + \kappa z + \vartheta^2 / 2, \quad (1)$$

в которой ε , κ и ϑ – деформация оси балки, кривизна и угол поворота сечения соответственно. Разность электрических потенциалов на контактах отдельного слоя выражается так

$$V^{(s)} = n^{(s)} \varepsilon + m^{(s)} \kappa + n^{(s)} \vartheta^2 / 2 + l^{(s)} D_z + R_p^{(s)},$$

где выражения для $n^{(s)}$, $m^{(s)}$, $l^{(s)}$, и $R_p^{(s)}$ получены в [2, 3]. Выражения

для осевого усилия $N^{(s)}$ и момента $M^{(s)}$ для индивидуально слоя получаются в виде

$$\begin{aligned}N^{(s)} &= C_1^{(s)} \varepsilon + K_1^{(s)} \kappa + C_1^{(s)} \vartheta^2 / 2 - n^{(s)} D_z - N_p^{(s)}, \\ M^{(s)} &= K_1^{(s)} \varepsilon + D_1^{(s)} \kappa + K_1^{(s)} \vartheta^2 / 2 - m^{(s)} D_z - M_p^{(s)}.\end{aligned} \quad (2)$$

Формулы для $C_1^{(s)}$, $K_1^{(s)}$, $D_1^{(s)}$, $N_p^{(s)}$ и $M_p^{(s)}$ также получены в [2, 3].

Суммирование (2) по всему пакету слоев позволяет получить физические уравнения в виде

$$\begin{aligned} N &= C_1 \varepsilon + K_1 \kappa + N_G + N_P + N_E, \\ M &= K_1 \varepsilon + D_1 \kappa + M_G + M_P + M_E, \end{aligned} \quad (3)$$

где N_G , N_P , N_E и M_G , M_P , M_E – усилия и моменты, возникающие из-за учета геометрической нелинейности, физической нелинейности и пьезоактивных свойств материала соответственно.

В дальнейшем наряду с изгибной учитывается также деформация срединной линии по нелинейным зависимостям Кармана. Тогда формула (1) переписывается в виде

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon + \kappa z = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} g^2.$$

Здесь u и w – перемещения точек балки вдоль осей Ox и Oz .

Физические соотношения (3) и уравнения модели физически нелинейного поведения материала необходимо дополнить уравнениями движения и дифференциальными зависимостями при изгибе, которые в случае учета немалости прогиба и продольных усилий, обусловленных этим прогибом, запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial x} + q_x = \bar{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - q_z(t) = \bar{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M}{\partial x} - Q = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\bar{q}(t) = (q_x(t), q_z(t))$ – равномерно распределенная по длине балки нагрузка, которая в общем случае является функцией времени; $\bar{\rho} = \sum \rho_k h_k$ – приведенная погонная плотность балки; h_k – толщина k -го слоя.

Вторые производные от компонент перемещений по времени в уравнениях движения выражаются через перемещения, скорости и ускорения с предыдущего временного шага по формулам схемы Ньюмарка.

Полученная система разрешающих уравнений колебаний балки для каждого момента времени дополняется соответствующими граничными и начальными условиями и решается численно.

Анализ результатов численных исследований. При проведении расчетов в качестве пассивного материала (без пьезоэффекта) был выбран алюминиевый сплав АМг-6 [2, 3]; физико-механические свойства пьезоактивного материала соответствуют пьезокерамике ЦТС-19. Расчеты проводились для модельной задачи о вынужденных колебаниях шарнирно закрепленной трехслойной балки, состоящей из центрального слоя и двух

пьезоактивных слоев. Толщины пьезоактивных слоев равны $h_1 = h_3$, полная толщина балки $h = h_1 + h_2 + h_3$, где h_2 – толщины алюминиевого слоя. Длина балки $L = 0,826$ м. Рассмотрены конфигурация со следующим набором толщин: $h = 0,6 \cdot 10^{-1}$ м, $h_1 = h_3 = 0,2 \cdot 10^{-2}$ м, $h_2 = 0,56 \cdot 10^{-1}$ м. Ширина балки $b_y = 0,3 \cdot 10^{-1}$ м. Резонансная частота первой изгибной моды колебаний составляет 1167 Гц. Частота возбуждения выбиралась равной 10 Гц. Пьезоактивные слои считались предварительно поляризованными по толщине, причем направления поляризации слоев противоположны (например, верхний слой поляризован в направлении, совпадающем с осью поляризации, а нижний – в противоположном направлении). Рассматривались два типа гармонически изменяющихся во времени нагружений: моменты, приложенные на концах балки, и разность электрических потенциалов, подаваемая на электроды пьезослоев. Во всех случаях гармонический закон изменения нагрузки модулировался линейной функцией таким образом, чтобы заданная амплитуда нагружения достигалась за 50 циклов колебаний. Такой подход обеспечил симметричные прогибы балки относительно оси.

Для оценки взаимного влияния физической и геометрической нелинейностей удобно использовать жесткостную характеристику для установившейся стадии процесса: зависимость амплитуды прогиба от амплитуды изгибающего момента (либо электрического потенциала). Эта характеристика представлена на рис. 1. Пунктирная кривая отвечает линейному слу-

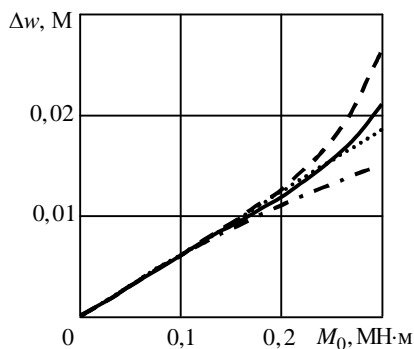


Рис. 1

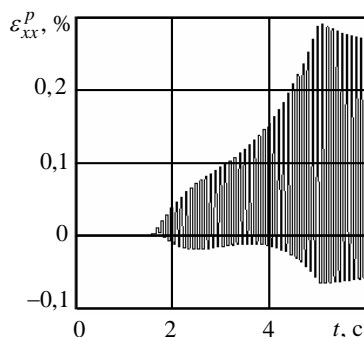


Рис. 2

чаю, штрихпунктирной и штриховой линиями показаны жесткостные характеристики балки для случаев учета только геометрической и только физической нелинейностей соответственно. Решение задачи с учетом обеих нелинейностей представлено сплошной кривой. Для более тонких балок доминирующей является геометрическая нелинейность. С увеличением толщины происходит нарастание влияния физической нелинейности.

Пример нестационарной реакции балки на гармоническое механическое возбуждение – история изменения неупругой деформации в точке $x = L/2$, $z = -h_2/2$ – для $M_0 = 0,27$ МН представлен на рис. 2. При учете геометрической нелинейности история изменения неупругой деформации не является симметричной относительно нуля вследствие деформации оси балки. Учет только физической нелинейности приводит к иной ситуации: формируется симметричная история неупругой деформации. Аналогичная ситуация наблюдается и для эволюции величины электрического тока, снимаемого с нижнего пьезокерамического слоя в режиме сенсора.

Эквивалентность механического и электрического возбуждения в данной задаче служит основой для использования метода активного гашения механически возбуждаемых колебаний путем подачи гармонически изменяющейся разности электрических потенциалов, подаваемой на электроды пьезослоев. Пример представлен на рис. 3. Закон изменения потенциала записывается в виде

$$V = V_0 \sin(\omega t + \pi + \delta) = -V_0 \sin(\omega t + \delta),$$

где V_0 – амплитуда, ω – круговая частота возбуждения, δ – некоторый сдвиг фаз.

Изменение характера поведения остаточных колебаний при учете как физической, так и геометрической нелинейности, представлено на рис. 3 при $M_0 = 270$ кН·м, $V_0 = 670$ кВ. Кривая 1 на рис. 3 соответствует реше-

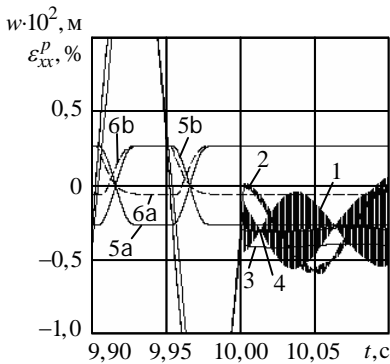


Рис. 3

нию динамической задачи при $t_s = 10,002$ с и $\delta = 0$, где t_s – момент включения электрического напряжения. Кривая 2 представляет динамическое поведение балки при $t_s = 10,002$ с и $\delta = \delta_{Mw}$, где δ_{Mw} – сдвиг фаз между механическим возбуждением и прогибом, обусловленный неупругим деформированием. Кривые 3 и 4 иллюстрируют квазистатическое решение, отвечающее линии 1, для случая неучета и учета геометрической нелинейности соответственно. Кривые 5а и 6а представляют поведение неупругой деформации в точке $(L/2, -h_2/2)$ в случае пренебрежения и учета геометрической нелинейности соответственно, а кривые 5б и 6б показывают аналогичные зависимости для точки $(L/2, h_2/2)$.

Оказывается, что при подавлении колебаний на частоте вынуждающей силы не удастся погасить колебания полностью. Остаточные результирующие колебания характеризуются двумя особенностями.

Оказывается, что при подавлении колебаний на частоте вынуждающей силы не удастся погасить колебания полностью. Остаточные результирующие колебания характеризуются двумя особенностями.

Во-первых, они происходят около изогнутого положения оси балки. Это положение определяется неупругими деформациями материала и остается постоянным, если момент включения электрического напряжения попадает на этап упругого деформирования (см. рис. 3). Если не учитывать инерционные эффекты, то амплитуда остаточных колебаний будет пренебрежимо малой, а соответствующим подбором фазы δ можно полностью подавить указанные колебания.

Во-вторых, учет динамических эффектов качественно меняет характер остаточных колебаний. Они также совершаются около изогнутого положения оси, однако, амплитуда их значительно возрастает и совершаются они с собственной частотой колебаний балки (быстрые составляющие на рис. 3), модулированной медленно изменяющимися остаточными колебаниями на частоте внешнего воздействия. В этом случае рассматриваемая задача становится эквивалентной задаче об упругих колебаниях изогнутой балки, имеющей в начальный момент времени некоторый прогиб и скорость. Геометрическая нелинейность в рассмотренной постановке является кубической по прогибу. Это приводит к появлению нечетных гармоник в спектре частот остаточных колебаний. Поскольку остаточные колебания являются упругими, то на рис. 3 наблюдаются биения как результат суммирования колебаний на частоте внешнего воздействия, кратных ему частотам и частоте первого изгибного резонанса для балки.

РЕЗЮМЕ. Розглядаються вимушені коливання шарнірно обпертої шаруватої балки з п'єзоактивними шарами. Вивчаються питання механічного і електричного збудження коливань, можливість їх активного гасіння і взаємовплив фізичної і геометричної нелінійності при перехідних і стаціонарних режимах роботи.

SUMMARY. Problem of forced vibrations of hinged layered beam containing piezoelectric layers is investigated. The aspects of mechanical and electric excitation of the vibration are studied as well as the possibility of active suppression of the vibrations. The interaction between physical and geometrical nonlinearities under transient and steady state processes is also studied.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. *Bodner S., Partom Y.* Constitutive equations for elastoviscoplastic strain hardening material // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1975. – Vol. 42. – P. 385–389. 2. *Жук Я. А., Сенченков И. К.* Соотношения связанной динамической задачи термовязкопластичности для тонкостенных оболочек с пьезоактивными слоями // *Теорет. и прикладная механика.* – 2001. – Вып. 34. – С. 115–121. 3. *Жук Я. А., Сенченков И. К.* Моделирование стационарных колебаний и диссипативного разогрева тонкостенных неупругих элементов, содержащих пьезоактивные слои // *Прикладная механика.* – 2004. – Т. 40, № 5. – С. 80–91. 4. *Колебания пьезоэлектрических тел / Шульга Н. А., Болкисев А. М.;* Отв. ред. Б.П. Маслов; АН УССР. Ин-т механики. – К.: Наук. думка. – 1990. – 228 с. 5. *Rao S. S., Sunar M.* Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of flexible structures: A survey // *Appl. Mech. Rev.* – 1994. – Vol. 47, № 4. – P. 113–123.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев
Абердинский университет, Центр микро- и наномеханики
Абердин, Великобритания*

Поступила 25.03.2008

УДК 539.3+536.424

В.И. АСТАШКИН, канд. физ.-мат. наук, *Б.Л. БОЖЕНКО*, канд. физ.-мат. наук,
Ю.И. НЯШИН, д-р техн. наук, *А.Е. ОНЫШКО*, канд. физ.-мат. наук

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБУСЛОВЛЕННЫХ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИМ НАГРУЖЕНИЕМ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СТЕРЖНЕ ИЗ МАТЕРИАЛА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

В термомеханических моделях для количественного описания деформирования и теплообмена в твердых телах в качестве параметров, описывающих механические процессы, обычно принимают компоненты тензоров напряжений и деформаций. Такое описание удобно, если изменения параметров немеханических процессов в системе (концентрация, фазовый состав, температура) связаны только с изменением объема. Вместе с тем известно, что существуют такие процессы в твердых телах, протекание которых существенно зависит не только от изменения объема (гидростатического давления), но и от изменения формы элемента объема, связанной со вторым инвариантом тензора напряжений или деформаций. Это прежде всего относится к фазовым переходам, которые могут протекать под влиянием сдвиговых напряжений. Поведение твердых тел, в которых происходят вышеупомянутые изменения внутренней структуры, целесообразно описывать при помощи инвариантов тензоров напряжений и деформаций, которые можно рассматривать в качестве независимых параметров состояния [1]. Такой подход позволяет отдельно учесть влияние как шаровой (изменение объема), так и девиаторной (изменение формы) частей тензоров напряжений и деформаций на фазовый состав системы. На основании изложенных выше соображений были сформулированы основные положения макроскопической термодинамической модели для количественного описания деформирования изотропных твердых тел, в которых происходят фазовые превращения, обусловленные влиянием всестороннего растяжения – сжатия и сдвига [2–4]. При этом использовались известные методы механики сплошных сред и термодинамики неравновесных процессов.

В предлагаемой работе с использованием соответствующей математической модели [2] исследуется поведение стержня кругового сечения, изготовленного из сплава с памятью формы, в котором происходит твердофазное мартенситное превращение: вначале вследствие действия сдвиговых напряжений образуется мартенсит, а последующий нагрев вызывает протекание обратного перехода – преобразования мартенсита в аустенит.

В основу используемого термодинамического подхода положена гипотеза локального термодинамического равновесия. В качестве параметров состояния, описывающих тепловые процессы, избраны абсолютная температура T и удельная энтропия S . Мартенситное превращение характери-

зается относительным содержанием мартенсита Ξ и удельным сродством превращения A [5]. Механические воздействия [1], связанные с изменением объема, учитываются через инварианты тензора напряжений σ и тензора деформаций e ; механические воздействия, связанные с изменением формы тела – через инварианты σ_i и e_i , где $\sigma = \Pi_1/3$ – среднее гидростатическое давление; $e = \frac{I_1}{3}$ – относительное изменение средних линейных размеров; $\sigma_i = \sqrt{(3\Pi_2 - \Pi_1^2)/2}$; $e_i = \sqrt{(3I_2 - I_1^2)/2}$ – интенсивности напряжений и деформаций соответственно; $\Pi_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ – 1-й инвариант тензора напряжений; $I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – 1-й инвариант тензора деформаций; $\Pi_2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)$ – 2-й инвариант тензора напряжений; $I_2 = \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 2(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2)$ – 2-й инвариант тензора деформаций.

Ограничимся рассмотрением случая, когда в исходном состоянии материал стержня описывается определенным начальным значением относительного содержания мартенсита $\Xi = \Xi_0$, которому соответствует начальное значение удельного сродства превращения A_0 , и вследствие соответствующих тепловых и механических воздействий значения Ξ изменяются. В качестве функции термодинамического состояния выберем свободную энергию $F = F(e, e_i, T, \Xi)$.

Обобщенное уравнение Гиббса с использованием инвариантов тензоров напряжений и деформаций модифицируется к виду

$$dF = -SdT + \frac{3}{\rho}\sigma de + \frac{1}{\rho}\sigma_i de_i + Ad\Xi, \quad (1)$$

в котором ρ – плотность материала.

Из разложения свободной энергии F в степенной ряд в окрестности начального равновесного ненапряженного состояния $T = T_0$, $S = S_0$, $e = 0$, $\sigma = 0$, $e_i = 0$, $\sigma_i = 0$, $\Xi = \Xi_0$, $A = A_0$ с точностью до квадратичных членов и уравнения Гиббса (1) получим следующую систему линейных уравнений состояния модели:

$$\begin{aligned} S &= S_0 + \frac{c_t}{T_0}t + \frac{1}{\rho}K\alpha e - K_{t\xi}\xi, & 3\sigma &= K(e - \alpha t - \beta\xi), \\ \sigma_i &= G(e_i - \beta'\xi), & A &= A_0 + K_\xi\xi + K_{t\xi}t - \frac{1}{\rho}K\beta e - \frac{1}{\rho}G\beta'e_i, \end{aligned} \quad (2)$$

где $t = T - T_0$, $\xi = \Xi - \Xi_0$.

Коэффициенты в (2) характеризуют определенные физические свойства материала модели: c_i – удельную теплоемкость; K – модуль всестороннего сжатия; G – модуль сдвига; α – температурный коэффициент объемного расширения; $K_{t\xi}$ – коэффициент зависимости сродства мартенситного превращения от температуры; K_ξ – коэффициент зависимости сродства мартенситного превращения от относительного содержания мартенсита; β – коэффициент изменения объема при мартенситном превращении; β' – коэффициент изменения формы при мартенситном превращении. При записи системы (2) принято, что параметр σ_i не зависит непосредственно от изменения объема и температуры.

В дальнейшем материальные характеристики, описывающие образование мартенсита, будем обозначать индексом “ M ”, а описывающие обратное превращение (образование аустенита) – индексом “ A ”.

Рассмотрим длинный стержень кругового сечения радиуса R , изготовленный из сплава с памятью формы и нагруженный моментом кручения M . Пусть в начальном состоянии материал стержня пребывает в аустенитной (высокотемпературной) фазе (относительное содержание мартенсита $\Xi = 0$). Температура стержня $T = T_1$ постоянна и находится в интервале, в котором даже незначительные напряжения могут вызвать возникновение мартенсита [5]. Определим фазовый состав стержня, который сформируется при действии заданного нагружения.

Если использовать цилиндрическую систему координат с осью z , направленной вдоль оси стержня, то известно, что при таком нагружении ненулевой будет только одна составляющая тензора напряжений:

$$\sigma_{\theta z} = \frac{2Mr}{\pi R^4}. \quad (3)$$

Необходимое условие протекания мартенситного превращения определяем из условия минимума свободной энергии F по содержанию мартенсита Ξ при фиксированных значениях деформации и температуры [5], которое для этой задачи сводится к виду

$$K_\xi^M \Xi - \frac{E\beta'_M}{3(1+\nu)\rho} e_i = 0, \quad (4)$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Из условия (4) и третьего из уравнений (2) с учетом (3) получим распределение мартенсита по радиусу стержня

$$\Xi^* = \frac{4\sqrt{3}(1+\nu)\beta'_M Mr}{\pi R^4 \left[2(1+\nu)\rho K_\xi^M - E(\beta'_M)^2 \right]}. \quad (5)$$

Если теперь снять приложенную нагрузку ($M = 0$), то для материалов с достаточно широкой петлей гистерезиса (то есть таких, в которых без дополнительных внешних воздействий обратное превращение не происходит) [5–7] достигнутое фазовое состояние в стержне сохранится и будет описываться зависимостью (5). Поскольку переход материала из аустенита в мартенсит сопровождается объемным эффектом [6, 7], то в стержне образуются вызванные фазовым превращением остаточные напряжения. В рассматриваемом случае эти напряжения имеют только одну составляющую, отличную от нуля, выражение которой будет

$$\sigma_r^* = \frac{2\sqrt{3}(1+\nu)\beta'_M(\beta'_M - 2\beta_M)Mr}{\pi R^4(2-7\nu)\left[2(1+\nu)\rho K_\xi^M - E(\beta'_M)^2\right]}. \quad (6)$$

Рассмотрим далее, как изменятся фазовый состав (5) и напряженное состояние (6) свободного от механической нагрузки стержня после его Равномерного нагрева от температуры T_1 до T_2 . Необходимое условие протекания вызванного таким нагревом обратного превращения мартенсита в аустенит [2] в этом случае запишется в виде

$$K_\xi^A \Xi + K_{t\xi}^A t + \frac{E\beta_A}{3(1-2\nu)\rho} e + \frac{E\beta'_A}{3(1+\nu)\rho} e_i = 0, \quad (7)$$

где $t = T_2 - T_1$, $\xi = \Xi - \Xi^*$.

Из уравнений состояния (2) и условия (7) получим распределения мартенсита

$$\Xi = \Xi^* - \frac{D_0 K_\xi^A - ED_1 D_2 \beta'_M}{D_0 K_{t\xi}^A - \alpha ED_1 D_2} \cdot t \cdot \frac{r}{R} \quad (8)$$

и остаточных напряжений

$$\sigma_r = \sigma_r^* - \frac{E}{4-7\nu} \left[\alpha t + \left(\beta_A - \frac{1}{2}\beta'_A \right) \xi \right] \quad (9)$$

в стержне после нагрева. Здесь $D_0 = 9\rho(1-2\nu)(1+\nu)(7\nu-2)$, $D_1 = (1+\nu)\beta_A + (1-2\nu)\beta'_A$, $D_2 = 2(1+\nu)\beta_A - 3(1-2\nu)\beta'_A$.

С использованием вышеприведенных зависимостей произведены расчеты для некоторых распространенных сплавов с памятью формы. На рис. 1 в зависимости от радиуса r показано распределение мартенсита в стержне, вызванное действием момента кручения $M = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (сплошные линии), и фазовый состав после нагрева ($t = 10 \text{ К}$, штриховые линии). При этом $R = 10 \text{ см}$. На рис. 2 также в зависимости от радиуса r изображены графики распределения остаточных напряжений, возникших вследствие протекания превращения: сплошные линии соответствуют состоянию, воз-

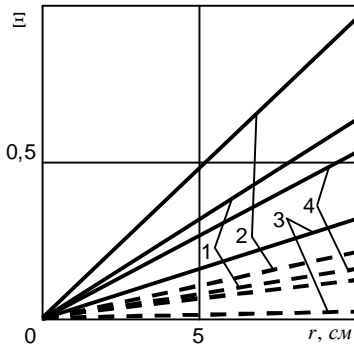


Рис. 1

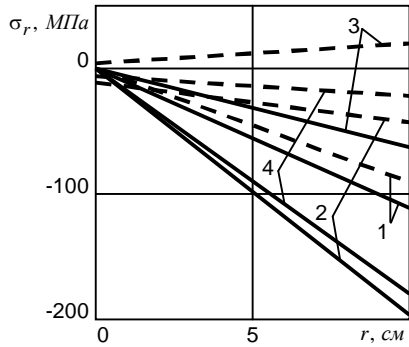


Рис. 2

нижнему вследствие кручения, штриховые – состоянию после нагрева. Кривые 1–4 отвечают сплавам $NiTi$, $NiAl$, $CuAlNi$, $CuZn$.

Из полученных результатов следует, что при кручении в стержне формируется неоднородный по радиусу фазовый состав и вызванное им неоднородное распределение остаточных напряжений. После последующего нагрева напряжения уменьшаются (что объясняется протеканием обратного превращения и приближением при этом фазового состава стержня к исходному). Это согласуется с известными сведениями о поведении сплавов с памятью формы [6, 7].

Предложенная модель описания термомеханических процессов с учетом мартенситного превращения является теоретическим основанием для разработки оптимальных режимов изготовления и эксплуатации конструктивных элементов из сплавов с памятью формы в соответствующих технических устройствах. В частности, планируется ее применение с использованием подхода [8] для расчета параметров фиксаторов, применяющихся при восстановлении переломов.

РЕЗЮМЕ. В роботі аналізується напружено-деформований стан та зміна фазового складу стрижня колового перерізу зі сплаву з пам'яттю форми при крученні та нагріві за температур фазового перетворення. Приймається, що ступінь повноти перетворення залежить від інваріантів тензорів напружень і деформацій. Після зняття силового навантаження фазовий склад не повертається до вихідного стану, внаслідок чого в стрижні існують залишкові напруження. Наступний нагрів створює умови для протікання зворотного перетворення, що спричиняє суттєве зниження рівня цих напружень.

SUMMARY. On the base of the mathematical model proposed before, the phase and stressed state of shape memory rod during torsion and following heating has been determined. The non-uniform distribution of residual stresses induced by change of phase structure under loading decreases after heating in consequence of returning material to initial phase state.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. Гольденблат И. И. Нелинейные проблемы теории упругости. – М.: Наука, 1969. – 336 с. 2. Онишко О., Боженко Б., Новацкий В.

Моделювання термомеханічних явищ в матеріалах з пам'яттю форми // *Мат. пробл. механіки неоднорідних структур.* – Львів, 2003. – С. 71–73. 3. *Асташкін В., Боженко Б., Будз С., Онышко А.* Моделирование с использованием инвариантов тензоров напряжений и деформаций термомеханических процессов в твердых телах при технологическом нагреве // *Projektowanie procesow i systemow technologicznych.* – Lublin: Societas Scientarium Lublinensis, 2003. – С. 164–170. 4. *Асташкін В., Гачкевич О., Онышко О., Боженко Б.* Моделювання з використанням інваріантів тензорів напружень і деформацій термомеханічних процесів у деформівних твердих тілах при врахуванні структурних перетворень // *Машинознавство.* – 2003. – № 11. – С. 14–17. 5. *Асташкін В. І., Будз С. Ф., Онышко О. Є.* Кількісний опис фізико-механічних процесів у матеріалах з пам'яттю форми // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 1994. – № 4. – С. 60–66. 6. *Лихачев В. А., Кузьмин С. Л., Каменцева З. П.* Эффект памяти формы. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. – 316 с. 7. *Сплавы с эффектом памяти формы /* Под ред. Х. Фунакубо. – М.: Металлургия, 1990. – 224 с. 8. *Nyashin Y., Likhov V., Ziegler F.* Decomposition method in linear elastic problem with eigenstrain // *Z. Angew. Math. Mech.* – 2005. Vol. 85, No. 8. – P. 557–570.

*Институт прикладных проблем механики и математики НАН Украины, Львов
Опольский технический университет (Польша)
Пермский государственный технический университет (Россия)*

Поступила 14.04.2008

УДК 581+519.61+539.3+624.04

В. М. ЛЕВИН, д-р техн. наук, В. С. ГУДРАМОВИЧ, д-р техн. наук,
В. А. МИТРАКОВ, канд. физ.-мат. наук, И. Г. ГЕВЛИЧ, канд. техн. наук,
Ю. В. ГРИЦУК, канд. техн. наук

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ АРМИРОВАННОЙ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

В работах [1–6] предложены методы решения задач о напряженно-деформированном состоянии пластин в зоне проема, когда пластины изготовлены из армированного упруговязкопластического материала, работающего с образованием трещин. Проведены численные исследования для мгновенного и длительного нагружений. В данной работе аналогичные результаты получены для сочетания процессов длительного нагружения и кратковременного догружения.

Постановка задачи. Рассмотрим прямоугольную пластину с прямоугольным проемом, сжатую в своей плоскости (рис. 1). Пластина изготовлена из армированного упруговязкопластического материала с матрицей,

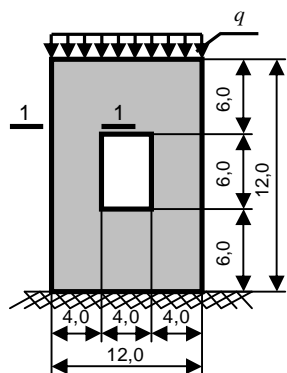


Рис. 1

своими деформационными свойствами аналогичной бетону [7–9]. Пластина загружается в два этапа – длительное нагружение и кратковременное догружение. Будем считать, что усилия в сечении равны сумме усилий в матрице и арматуре, в процессе деформирования в матрице могут образовываться трещины или происходить местные разрушения, после чего пластина продолжает сопротивляться действию нагрузок. Примем, что до образования трещин деформации матрицы и арматуры одинаковы. Определяющие соотношения матрицы до образования трещин для плосконапряженного состояния задаются суммой

$$F_i^M = F_i^{Me} + \Delta F_i^M, \text{ где } i = x, y; F_i^M - \text{ векторы}$$

усилий в сечениях; $x = const$ и $y = const$; F_i^{Me} – векторы усилий в упругой матрице; ΔF_i^M – приращения, обусловленные неупругим характером деформирования.

Приращения ΔF_i^M будем определять по различным моделям деформирования в зависимости от режима нагружения и наличия или отсутствия трещин. При длительном нагружении будем исходить из наследственной

теории старения [6], когда учет возрастной неоднородности приводит к соотношениям [1]

$$\Delta F_i^M = - \sum_{k=1}^n T_k(t - \tau_0(y)) \int_{\tau_0(y)}^t F_i^{Me} \Theta_k(\tau - \tau_0(y)) d\tau - F_i^{Me} A_R(t - \tau_0(y)), \quad (1)$$

где $\tau_0(y)$ – момент зарождения материала в сечении $y = const$;

$$\bar{R}(t - \tau_0(y), \tau - \tau_0(y)) = \sum_{i=1}^n T_k(t - \tau_0(y)) \Theta_k(\tau - \tau_0(y)) + A_R(t - \tau_0(y)) \delta(t, \tau) -$$

приведенное ядро релаксации матрицы с учетом наращивания в направлении оси Oy ; $T_k(t)$, $\Theta_k(\tau)$ – функции времен наблюдения и воздействия, при помощи которых «спокойная» часть приведенного ядра релаксации аппроксимируется вырожденным ядром; $\delta(t, \tau)$ – дельта-функция Дирака;

$A_R(t - \tau_0(y))$ – площадь «всплеска» на графике $\bar{R}(t, \tau)$ при $\tau \rightarrow t$.

При кратковременном нагружении матрицы примем вариант деформационной теории пластичности с различными законами сдвигового и гидростатического деформирования, причем будем учитывать неупругий характер последнего [8]. Это позволяет записать соответствующие приращения напряжений из-за неупругости матрицы в виде

$$\Delta \sigma_x^M = \frac{E_0(t - \tau_0(y))}{1 - \mu_0^2} \left[a(\sigma_{окт}, \tau_{окт}) \varepsilon_x + \mu_0 b(\sigma_{окт}, \tau_{окт}) \varepsilon_y \right], \quad (2)$$

$$\Delta \sigma_y^M = \frac{E_0(t - \tau_0(y))}{1 - \mu_0^2} \left[a(\sigma_{окт}, \tau_{окт}) \varepsilon_y + \mu_0 b(\sigma_{окт}, \tau_{окт}) \varepsilon_x \right], \quad (3)$$

$$\Delta \tau_{xy}^M = \frac{E_0}{2(1 + \mu_0)} c(\tau_{окт}) \gamma = \tau_{xy}^{Me} c(\tau_{окт}). \quad (4)$$

Здесь E_0 , μ_0 – модуль Юнга и коэффициент Пуассона матрицы в естественном упругом состоянии; $\sigma_{окт}$, $\tau_{окт}$ – октаэдрические нормальное и касательное напряжения в матрице; $a(\sigma_{окт}, \tau_{окт})$, $b(\sigma_{окт}, \tau_{окт})$, $c(\tau_{окт})$; $\nu_E(\sigma_{окт}, \tau_{окт})$ – параметры, зависящие от уровня нагружения; μ – текущее значение коэффициента поперечной деформации; $\gamma = 2\varepsilon_{xy}$; ε_x , ε_y , ε_{xy} – компоненты тензора деформаций.

Свойства арматуры будем описывать откорректированной диаграммой Прандтля (с конечной длиной площадки текучести по аналогии с данными работы [9]). После образования трещин в матрице для описания деформа-

ционных свойств армированного материала будем использовать модель дисперсных трещин [9]. Она учитывает частичное проскальзывание арматуры в матрице и оперирует с двумя деформациями арматурного стержня: средними на шаге трещин и максимальными в сечении, проходящем по трещине. Будем определять напряжения в матрице в нормальном сечении ее полосы между трещинами, в матрице вследствие зацепления берегов трещины, в арматуре (средних на шаге трещин и максимальных в трещине). Связь между максимальными и средними деформациями примем на основе экспериментальных данных: $\varepsilon_k = \varepsilon_{km} / \phi_{sk}$, ε_k , ε_{km} – максимальная и средняя деформации арматурного стержня; ϕ_{sk} – эмпирический коэффициент (коэффициент Мурашова). Такая модель отождествляет армированный материал с однородной ортотропной средой Коссера.

Будем учитывать эмпирическую информацию о связи деформаций арматуры с деформациями полосы матрицы между трещинами и о связи напряжений в этой полосе с ее деформациями, а также о предельных напряжениях и деформациях матрицы. При переходе от длительного нагружения к кратковременному догружению деформации арматуры на конец первого этапа примем в качестве начальных условий для второй стадии; для материала матрицы в качестве начальных данных второго этапа используем «силовую» часть деформаций конца первой стадии.

На втором этапе условия перехода (от стадии до образования трещины к стадии работы с трещинами) зависят от знака первого главного напряжения. Если это напряжение положительно, то на первой главной площадке образуется трещина, и при дальнейшем нагружении используется модель дисперсных трещин, в противном случае происходит разрушение матрицы от сжатия, и все компоненты тензора напряжений в матрице обнуляются. Если реализуется первый случай, то при определении напряжений в различных сечениях матрицы и в арматуре используются различные условия перехода. Так, для определения напряжений в арматуре, не пересекающей трещину, в качестве начальной деформации третьей стадии примем полную деформацию, накопленную к концу второй стадии. Для нормальных напряжений вдоль полосы матрицы между трещинами будем учитывать только их «силовую» часть. Для определения напряжений в арматуре, пересекающей трещину, и напряжения зацепления берегов трещины деформации принимаются на момент погашения сжатия на площадке будущей трещины.

Методы решения. Задачу о напряженно-деформированном состоянии пластины будем решать, используя для дискретизации системы схему Канторовича-Власова. Для анализа длительных процессов применим метод продолжения по параметру времени в сочетании с методом вырожденных ядер и специальной аппроксимацией ядра релаксации, учитывающей его быстрый рост при приближении времени воздействия к времени наблюдения. При кратковременном догружении будем применять метод продолжения по параметру нагрузки с итерационным уточнением при помощи модифицированного метода Ньютона. Поле перемещений дискретной модели в

поперечном тангенциальном направлении будем аппроксимировать линейной комбинацией линейных финитных функций с носителями совпадающими с множеством граней, инцидентных одному ребру и значениями равными единице на этом ребре и нулю на противоположной стороне грани. Коэффициенты указанной линейной комбинации будем определять методом Галеркина. В результате получим математическую модель в виде краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$X'(y, t) = A(y, t)X(y, t) + Q^{ne}(y, t) + P(y, t); \quad (5)$$

$$B_1 X_1(0) + B_2 X_2(0) = C_0, \quad B_3 X_1(H) + B_4 X_2(H) = C_H, \quad (6)$$

где $X = (X_1^T, X_2^T)^T$ – вектор искомых обобщенных перемещений X_1 и обобщенных усилий X_2 в сечении $y = const$; A – матрица коэффициентов; Q^{ne} – вектор поправок на неупругий характер деформирования; P – вектор нагрузок и деформационных воздействий; B_i – матрицы коэффициентов; C_0, C_H – вектора краевых условий; $y \in [0, H]$.

Для первой стадии систему (5) приведем к виду

$$X'(y, t) = A(y, t)X(y, t) - \int_{\tau_0}^t \left[U(X_1'(y, \tau), X_1(y, \tau)) \times \right. \\ \left. \times \bar{R}(t - \tau_0(y), \tau - \tau_0(y)) \right] d\tau + P(y, t), \quad (7)$$

в котором $U(., .)$ – билинейный оператор.

Для второй и третьей стадиях

$$X_1'(y, t) = A(y, t)X(y, t) - V(X_1'(y, t), X_1(y, t)) + P(y, t), \quad (8)$$

где $V(., .)$ – билинейный оператор; t – момент времени догружения.

Применение для решения задачи (6), (7) методов конечных сумм и вырожденных ядер приводит к следующему вычислительному процессу [1]:

$$\frac{\partial X^{(M)}}{\partial y} = \bar{A}^{(M)} X^{(M)} + P^{(M)} - \sum_t T_i(\tau_M - \tau_0) \times \\ \times \sum_{m=1}^{M-1} U \left(\frac{\partial X_1^{(m)'}}{\partial z}, X_1^{(m)} \right) \theta_i(t_m - \tau_0) \Delta t_m. \quad (9)$$

Здесь M – номер шага по времени; \bar{A} – приведенная матрица коэффициентов; m – текущий номер предшествующего шага по времени.

Задачу (6), (8) решим методом дискретного продолжения по параметру нагрузки [3, 4] с итерационным уточнением на каждом шаге модифициро-

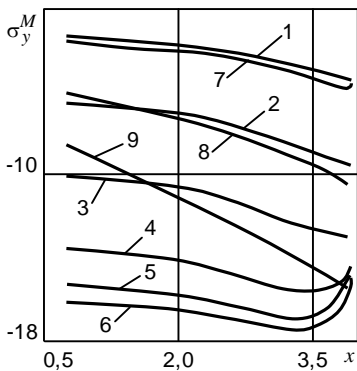
ваным методом Ньютона

$$\frac{dX^{(M, N)}}{dz} = AX^{(M, N)} + P^{(N)} - V \left(\frac{dX_1^{M-1, N}}{dy}, X_1^{M-1, N} \right), \quad (10)$$

где N – номер шага по нагрузке; M – номер итерации. Линейные краевые задачи на каждом шаге и на каждой итерации решим методом ортогональной прогонки Годунова. Напряжения у грани проема вычислим с учетом неидеальности его угла, кроме того, найдем их в середине первой от проема полосы, а не у самой грани.

Результаты численных исследований. При выполнении численных исследований анализировалось напряженно-деформированное состояние железобетонной пластины с проемом со следующими характеристиками материалов: матрица из бетона класса В20 (максимум диаграммы $\sigma - \varepsilon$ одноосного сжатия $|\sigma_{c \max}| = 19,2$ МПа, одноосного растяжения $\sigma_{t \max} = 1,8$ МПа, $\mu = 0,2$), арматура из стали класса А-III (предел пропорциональности $\sigma_{nn} = 400$ МПа, длина площади текучести $\lambda = 15 \cdot 10^{-3}$).

На рис. 2 изображены графики распределения по сеч. 1–1 нормальных напряжений σ_y^M в матрице на горизонтальных площадках для различных



уровней кратковременной нагрузки и режимов нагружения (равнодействующие нагрузки: кривые 1–6 соответствуют двухэтапному нагружению усилиями 2,0 МН; 4,0 МН; 8,0 МН; 12,0 МН; 14,0 МН; 15,0 МН; кривые 7–9 – кратковременному нагружению усилиями 2 МН; 4,0 МН; 8,0 МН). Как видно из рис. 2, эффект концентрации напряжений в матрице несколько ослабляется из-за неупругого характера ее деформирования и учета неидеальности угла проема; при двухэтапном нагружении при приближении к проему в зоне концентрации деформаций наблюдается уменьшение напряжений в матрице вследствие выхо-

да бетона на нисходящую ветвь диаграммы $\sigma_y^M - \varepsilon$. Кроме того, при двухэтапном нагружении напряжения в матрице вследствие физической нелинейности не пропорциональны нагрузке.

На рис. 3 приведены графики изменения нормальных напряжений σ_y^S в вертикальных арматурных стержнях в том же сечении, при тех же уровнях нагрузки и режимах нагружения как для рис. 2. Из этих графиков видно, что концентрация напряжений проявляется в большей степени, для рассмот-

ренных уровней нагрузки арматура работала упруго и соответствующие графики подобны графикам распределения относительных линейных деформаций вертикальных волокон. При этом на зависимости от нагрузки напряжений в арматуре физическая нелинейность сказывается в меньшей степени, в то же время режим нагружения сильнее влияет на напряжения в арматуре, чем на напряжения в матрице.

На рис. 4 при равнодействующей 2,6 МН показаны графики распределения нормальных напряжений σ_y^M (рис. 4, а)

и σ_y^S (рис. 4, б) в рассматриваемом сечении при разных режимах нагружения. Кривые 1, 2 соответствуют двухэтапному и кратковременному нагружениям. Из графиков на рис. 4, следует, что в результате предшествующего длительного нагружения происходит перераспределение (по сравнению с

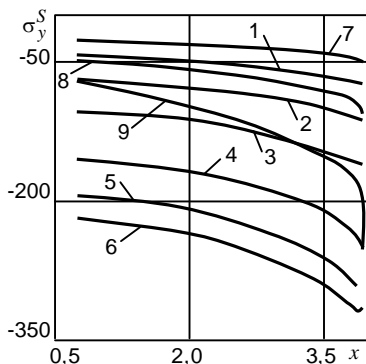


Рис. 3

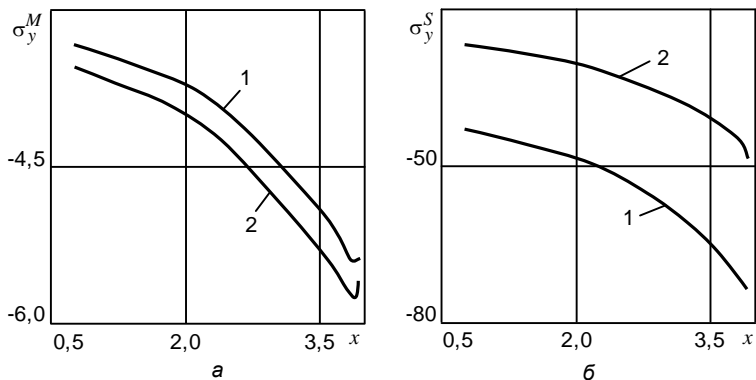


Рис. 4

кратковременным нагружением) усилий: в матрице, в которой проявляется ползучесть, напряжения уменьшаются, а в арматуре увеличиваются.

Как следует из рис. 3 (кривые 7–9) и рис. 4, б, при кратковременном нагружении в гораздо большей степени проявляется эффект концентрации деформаций у проема. При двухэтапном нагружении на первом этапе он сглаживается из-за перераспределения усилий вследствие ползучести бетона.

Таким образом, режим нагружения упруговязкопластической армированной пластины с проемом сказывается на ее конечном напряженно-деформированном состоянии; наличие этапа длительного нагружения ча-

стю нагрузок приводит к некоторому уменьшению напряжений σ_y^M и увеличению напряжений σ_y^S .

РЕЗЮМЕ. Дано розв'язок задачі про напружений стан армованої пружно-язкопластичної пластини, який враховує наявність прямокутного прорізу. Дискретизацію області виконано за схемою Канторовича – Власова у сполученні з методом Гальоркіна. Лінеаризацію пружнопластичної задачі здійснено методом продовження по параметру навантаження з ітераційним уточненням на кожному кроці модифікованим методом Ньютона. Розв'язок задачі тривалого деформування одержано методом продовження по параметру часу з використанням спеціального представлення ядра релаксації матриці та методу вироджених ядер.

SUMMARY. It is given solution of task about stress state of reinforced elastoviscoplastic plate, which permits to take into account presence of rectangular opening. Discretization of region is executed by Kantorovich's – Vlasov's method with Galjorkin's method. Linearization of elastoplastic task is realized by method of continuation by parameter of load with elaboration by modified Newton's method. Solution of task of lengthy deformation was fulfilled by method of continuation by parameter of time with use special representation of kernel of relaxation of matrix and method of degenerated kernels.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. Левин В. М. Железобетонные башенные сооружения. Исследования, расчет. – Макеевка, 1999. – 230 с. 2. Hudramovych V. S. Features of nonlinear deformation and critical states of shell systems with geometrical imperfections // Int. Appl. Mech. – 2006. – Vol. 1, № 12. – P. 1323–1355. 3. Левин В. М. Полудискретная математическая модель деформирования неупругой складчатой системы // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. – 2004. – Вип. 1., ч. 1. – С. 171–178. 4. Левин В. М., Грицук Ю. В., Митраков В. А. Определение напряженного состояния неупругих армированных пластинок и пластинчатых систем с проемами // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. – 2006. – Вип. 1., ч. 1. – С. 171–175. 5. Левин В. М. Численный анализ напряженного состояния неупругих складок в окрестности отверстий // Вісн. Дніпропетров. ун-ту. Сер. Механіка. – 2006. – № 2/2. – С. 103–109. 6. Левин В. М. Расчет железобетонных стержневых и пространственных конструкций при наличии концентраторов напряжений // Бетон и железобетон – пути развития: Тр. 2 Всерос. (Международ.) конф. по бетону и железобетону, 5–9 сентября 2005 г., Москва. – М.: – Т. 2. – С. 495–502. 7. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел. – М.: Наука, 1983. – 336 с. 8. Круглов В. М., Козачевский А. И. Основные физические соотношения для бетона в плоском напряженном состоянии // Сопrotив. матер. и теория сооружений. – 1989. – Вип. 55. – С. 71–77. 9. Карпенко Н. И. Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.

*Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, г. Макеевка
Институт технической механики НАН Украины и НКА Украины, г. Днепропетровск
Поступила 21.03.2008*

УДК 393.3

А. Я. ГРИГОРЕНКО, д-р физ.-мат. наук,
Т. Л. ЕФИМОВА, канд. физ.-мат. наук, И. А. ЛОЗА, канд. физ.-мат. наук

ПРИМЕНЕНИЕ СПЛАЙН-АПРОКСИМАЦИИ И МЕТОДА ДИСКРЕТНОЙ ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПОЛЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ

Широкое использование пьезоэлементов в автоматике и приборостроении началось в начале 60-х годов, когда был освоен промышленный синтез пьезокерамических материалов, обладающих по сравнению с такими естественными материалами как кварц, турмалин, сегнетова соль и др., рядом преимуществ. Возможность придания желаемой формы, более низкая стоимость по сравнению с природными пьезоэлектрическими материалами, высокая чувствительность, повышенная температурная стабильность и т.д. окончательно определили выбор за пьезокерамическими материалами. В то же время в научной литературе известны только отдельные работы о колебаниях пьезокерамических цилиндров конечной длины, выполненные в рамках трехмерной теории упругости [1–5]. В последнее время в задачах вычислительной математики, математической физики и механики для решения подобных задач используется метод, основанный на применении сплайн-функций. Это объясняется преимуществами аппарата сплайн приближений по сравнению с другими методами. К последним следует отнести следующие: устойчивость сплайнов относительно локальных возмущений, иными словами, поведение сплайна в окрестности точки не влияет на поведение сплайна в целом; высокая сходимость сплайн-интерполяции в отличие от полиномиальной; простота и удобство реализации алгоритмов построения и вычисления сплайнов на персональных компьютерах. Применение сплайн-функций в различных вариационных, проекционных и других дискретно континуальных методах позволяет получить ощутимые преимущества по сравнению с использованием классического аппарата многочленов, существенно упростить их численную реализацию, а также получить искомое решение с высокой степенью точности.

Поэтому метод сплайн-аппроксимации используется для исследования механического поведения пластин и оболочек различной структуры [6].

Постановка и решение задачи. В цилиндрической системе координат уравнения электростатики и соотношения Коши имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho \omega^2 \tilde{u}_r &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho \omega^2 \tilde{u}_z &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r} D_r + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0; \quad E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad (2)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \tilde{u}_r; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial u_z}; \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial z}. \quad (3)$$

Физические соотношения для пьезокерамического материала, поляризованного вдоль оси цилиндра, в системе координат (r, θ, z) будут такими:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{11}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{31}E_z, \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{12}\varepsilon_{rr} + c_{11}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{31}E_z, \\ \sigma_{zz} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{33}\varepsilon_{zz} - e_{33}E_z, \\ \sigma_{\theta z} &= 2c_{55}\varepsilon_{\theta z} - e_{15}E_\theta, \quad \sigma_{rz} = 2c_{55}\varepsilon_{rz} - e_{15}E_r, \\ \sigma_{r\theta} &= (c_{11} - c_{12})\varepsilon_{r\theta}, \quad D_r = 2e_{15}\varepsilon_{rz} + \varepsilon_{11}E_r, \\ D_\theta &= 2e_{15}\varepsilon_{\theta z} + \varepsilon_{11}E_\theta, \quad D_z = e_{13}\varepsilon_{rr} + e_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + e_{33}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{33}E_z. \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные условия на боковых поверхностях цилиндра (при $r = R_0 \pm h$) имеют вид $\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0$ (поверхности свободны от внешних усилий) и $\varphi = 0$ (покрыты тонкими электродами, которые закорочены). Торцы цилиндра (при $z = \pm L/2$) жестко защемлены: $\tilde{u}_r = 0$; $\tilde{u}_z = 0$ и свободны от электродов: $D_z = 0$. Здесь R_0 – радиус серединной поверхности цилиндра; h – половина толщины цилиндра; L – половина длины цилиндра.

Разрешим уравнения относительно вторых производных по r , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} &= -\frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial z} + \frac{\Delta_3}{\Delta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial r^2} &= -\frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{11}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r^2} \tilde{u}_r - \frac{\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial z^2} - \\ &\quad - \frac{\Omega^2}{\tilde{c}_{11}} u_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} - \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial r \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial r^2} &= \frac{\Delta_4}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \left(1 + \frac{\Delta_5}{\Delta}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} - \left(1 + \frac{\Delta_5}{\Delta}\right) \frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial r \partial z} - \\ &\quad - \left(\frac{\Delta_6}{\Delta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon_{11} \Omega^2}{\Delta} \tilde{u}_z\right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial r}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$\Delta = e_{15}^2 + c_{55}\varepsilon_{11}, \quad \Delta_1 = c_{55}\varepsilon_{33} + e_{33}e_{15}, \quad \Delta_2 = c_{55}e_{13} - c_{13}e_{15},$$

$$\Delta_3 = c_{55}e_{33} - c_{33}e_{15}, \quad \Delta_4 = e_{15}\varepsilon_{33} - e_{33}\varepsilon_{11},$$

$$\Delta_5 = e_{15}e_{33} + \varepsilon_{11}c_{13}, \quad \Delta_6 = e_{33}e_{15} + c_{33}\varepsilon_{11}; \quad (6)$$

$$\varepsilon = \frac{h}{R_0}, \quad \Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}, \quad \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\lambda}, \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{\varepsilon_0 \lambda}}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0}; \quad \lambda = 10^{10} \text{ Па}; \quad (7)$$

ω – круговая частота; ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Используем метод разделения переменных. Функции $\varphi(r, z)$, $\tilde{u}_r(r, z)$, $\tilde{u}_z(r, z)$ будем искать в виде

$$\varphi(r, z) = \sum_{i=0}^N v_i(x) \varphi_{2i}(z), \quad \tilde{u}_r(r, z) = \sum_{i=0}^N w_i(x) \varphi_{2i}(z),$$

$$\tilde{u}_z(r, z) = \sum_{i=0}^N u_i(x) \varphi_{1i}(z), \quad (8)$$

в котором $x = (r - R_0)/h$; $u_i(x)$, $v_i(x)$, $w_i(x)$ – искомые функции; $\varphi_{ji}(z)$ ($j = 1, 2; i = \overline{0, N}$) – линейные комбинации В-сплайнов на равномерной сетке Δ ; $-L/2 = z_0 < z_1 < \dots < z_n = L/2$.

Принимая во внимание граничные условия на торцах цилиндра при $z = -L/2$ и $z = L/2$, можно заметить, что в систему входят производные от компонент вектора решения не выше второго порядка, следовательно, можно ограничиться аппроксимацией сплайн-функциями третьего порядка.

Если вводить обозначения

$$\Phi_j = [\varphi_{ji}(\xi_k)], \quad k, i = \overline{0, N}, \quad j = 1, 2;$$

$$\bar{u} = [u_0, u_1, \dots, u_N]^T, \quad \bar{v} = [v_0, v_1, \dots, v_N]^T,$$

$$\bar{w} = [w_0, w_1, \dots, w_N]^T, \quad (k, l) \in \{(k, l) | k, l = \overline{1, 6}\};$$

$$\bar{a}_{kl}^T = \left\{ a_{kl}(x, \xi_0, \Omega^2), a_{kl}(x, \xi_1, \Omega^2), \dots, a_{kl}(x, \xi_N, \Omega^2) \right\}, \quad (9)$$

то система (5) превратится в систему $6(N+1)$ линейных дифференциальных уравнений относительно функций u , \tilde{u} , v , \tilde{v} , w , \tilde{w} :

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = \tilde{u}, \quad \frac{d\bar{v}}{dx} = \tilde{v}, \quad \frac{d\bar{w}}{dx} = \tilde{w};$$

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} = \Phi_2^{-1} \left[(\bar{a}_{11}\Phi_2 + \bar{a}_{12}\Phi_2')\bar{u} + \bar{a}_{13}\Phi_2\tilde{u} + \bar{a}_{14}\Phi_1'\bar{v} + \bar{a}_{15}\Phi_1'\bar{w} + \bar{a}_{16}\Phi_1'\tilde{w} \right];$$

$$\frac{d\tilde{w}}{dx} = \Phi_1^{-1} [\bar{a}_{31}\Phi_2'\tilde{u} + \bar{a}_{32}\Phi_2'\tilde{v} + (\bar{a}_{33}\Phi_1 + \bar{a}_{34}\Phi_1'')\tilde{w} + \bar{a}_{35}\Phi_1\tilde{w}]. \quad (10)$$

Эту систему можно привести к виду

$$d\bar{R}/dx = A(x, \Omega)\bar{R}. \quad (11)$$

Для ненулевых элементов матрицы A имеем

$$\begin{aligned} A_{12} &= 1, & A_{21} &= \Phi_2^{-1}(\bar{a}_{11}\Phi_2 + \bar{a}_{12}\Phi_2''), & A_{22} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{13}\Phi_2, \\ A_{23} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{14}\Phi_2'', & A_{25} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{15}\Phi_1', & A_{26} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{16}\Phi_1', \\ A_{34} &= 1, & A_{41} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{21}\Phi_2'', & A_{43} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{22}\Phi_2'', & A_{44} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{23}\Phi_2, \\ A_{45} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{24}\Phi_1', & A_{46} &= \Phi_2^{-1}\bar{a}_{25}\Phi_1', & A_{56} &= 1, & A_{62} &= \Phi_1^{-1}\bar{a}_{31}\Phi_2', \\ A_{64} &= \Phi_1^{-1}\bar{a}_{32}\Phi_2', & A_{65} &= \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{33}\Phi_1 + \bar{a}_{34}\Phi_1''), & A_{66} &= \Phi_1^{-1}\bar{a}_{35}\Phi_1. \end{aligned}$$

Граничные условия будут иметь вид:

$$B_1\bar{R}(-1) = 0, \quad B_2\bar{R}(1) = 0.$$

Анализ результатов численных расчетов. На рис. 1 дана зависимость первых пяти частот собственных колебаний от относительной длины L/h цилиндра ($\varepsilon = 0,25$), изготовленного из пьезокерамики ЦТСтБС-2. Сплошными линиями изображены значения собственных частот с учетом пьезоэффекта, пунктирными – без учета пьезоэффекта ($e_{ij} = 0$). Из приведенного рисунка видно, что влияние пьезоэффекта приводит к «ужесточению» материала, т. е. к повышению значения собственных частот, причем при определении первой собственной частоты влиянием пьезоэффекта можно пренебречь. Для второй частоты заметное влияние пьезоэффекта наблюдается для достаточно коротких цилиндров ($L < 2$). В случае высоких частот это влияние заметно для более длинных цилиндров ($L < 4$).

На рис. 2 представлена зависимость первых четырех собственных

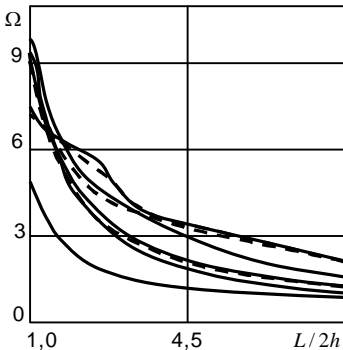


Рис. 1

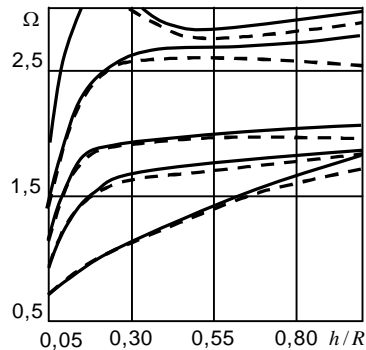


Рис. 2

частот от относительной толщины цилиндра ($\varepsilon = h/R$, $L = 10$) из материала ЦТСтБС-2. Рассматривается изменение внутреннего диаметра в широком диапазоне от 0,05 до 1 безразмерных единиц. Анализ приведенного рисунка показывает, что при определении первой собственной частоты влияние пьезоэффекта проявляется лишь для толстых цилиндров ($\varepsilon \geq 0,6$). Для более высоких частот влияние пьезоэффекта начинает проявляться для более тонких цилиндров ($\varepsilon \geq 0,2$).

РЕЗЮМЕ. В цій статті розглядається осесиметрична задача про вільні по-вздовжні коливання порожнистого п'єзокерамічного циліндра кінцевої довжини. Бокові поверхні циліндра вільні від зовнішніх навантажень і вкриті тонкими замороченими електродами. Для розв'язання поставленої задачі запропонована ефективна чисельно-аналітична методика, яка базується застосуванні метода сплайн-колокацій по одній із координат. Отримана після застосування цього метода система звичайних диференціальних рівнянь розв'язується стійким методом дискретної ортогоналізації в комбінації з методом покорокового пошуку. Представлені чисельні результати для частот власних коливань циліндру з п'єзокераміки ЦТСтБС-2 у широкому спектрі зміни геометричних характеристик циліндра.

SUMMARY. In this article the axisymmetrical problem on free longitudinal oscillations of hollow piezoceramic cylinders of finite length is considered. Lateral surfaces are free from external loading and are covered by thin electrodes which are short-circuited. For its solution the effective numerically-analytical technique based on representation of the required solution by basic splines and choosing by defined way (certain way) the points of a collocation is proposed. The received system is solved a stable numerical method of discrete orthogonalisation and a method of step-by-step search. Numerical calculations for the cylinder from piezoceramic ЦТСтБС-2 in a wide range of change of geometrical parameters are resulted.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. Лазуткин В. Н., Михайлов А. И. Колебания пьезокерамических цилиндров конечных размеров с поляризацией по высоте // Акуст. журн. – 1976. – Т. 22, вып. 3. – С. 393–399. 2. Шульга Н. А., Григоренко А. Я., Лоза И. А. Осесимметричные электроупругие волны в полом пьезокерамическом цилиндре // Прикладная механика. – 1984. – Т. 20, № 1. – С. 26–32. 3. Шульга Н. А., Борисенко Л. В. Колебания пьезокерамического цилиндра с осевой поляризацией при электрическом нагружении // Прикладная механика. – 1990. – Т. 25, № 10. – С. 41–47. 4. Kharouf N., Heyliger P. R. Axisymmetric free vibrations of homogeneous and laminated piezoelectric cylinders // J. Sound and Vibration, Vol. 174, № 4, 21 July 1994. – P. 539–561. 5. Hussein M., Heyliger P. R. Discrete layer analysis of axisymmetric vibrations of laminated piezoelectric cylinders journal of sound and vibration, Vol. 192, № 5, 23 May 1996. – P. 995–1013. 6. Budak V. D., Grigorenko A. Ya., Puzyrev S. V. On free vibrations of rectangular in plan orthotropic shallow shells of variable thickness // Int. Appl. Mech. – 2007. – Vol. 43, № 6. – P.702–715.

*Институт механики НАН Украины,
Национальный транспортный университет, г. Киев*

Поступила 10.03.2008

УДК 539.3

Т. В. ХОДАНЕН, В. В. ЛОБОДА, д-р физ.-мат. наук

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО/ПЬЕЗОМАГНИТНОГО ТЕЛА С ТРЕЩИНОЙ

В связи с созданием новых широко используемых в современной технике композитных материалов, характеризуемых пьезоэлектрическими, пьезомагнитными свойствами, актуальным становится изучение влияния различных видов внешних нагрузок – механических, тепловых, электрических, магнитных – на параметры разрушения таких материалов. Напряженно-деформированное состояние пьезоэлектрических тел как с трещинами, так и без трещин изучалось в монографиях [1, 2]. В последнее время появились и начали активно использоваться на практике материалы с ярко выраженным как пьезоэлектрическим, так и пьезомагнитным эффектами. Трещины в таких материалах под действием механической нагрузки, электрического и магнитного потоков изучались в монографии [3] и статьях [4–7]. Данная работа посвящена решению плоской задачи для электрически и магнитно изолированной трещины в пьезоэлектрическом/пьезомагнитном пространстве под действием магнито-электро-механической нагрузки, а также теплового потока.

Постановка задачи. Рассмотрим трещину в области $(-a, a)$ пьезо-

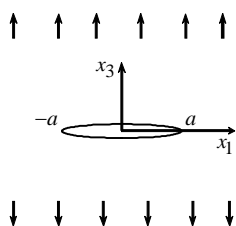


Рис. 1

электромагнитного пространства под действием внешней растягивающей нагрузки, теплового, электрического и магнитного потоков (рис. 1). Будем считать, что все поля не зависят от координаты x_2 , берега трещины термо- электро-магнитоизолированы.

Определение упругого равновесия рассматриваемого тела сводится к решению краевой задачи, состоящей из уравнений равновесия (при отсутствии массовых сил и свободных зарядов), уравнений стационарной теплопроводности, соотношений Коши

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad D_{i,i} = 0, \quad B_{i,i} = 0; \quad (1)$$

$$q_{i,i} = 0; \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i = -\varphi_{,i}, \quad H_i = -\phi_{,i}, \quad (3)$$

При этом имеют место уравнения состояния вида [5]:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= c_{ijks}\varepsilon_{ks} - e_{sij}E_s - h_{sij}H_s - \beta_{ij}T, \\
D_i &= e_{iks}\varepsilon_{ks} + \alpha_{is}E_s + d_{is}H_s - \beta_{i4}T, \\
B_i &= h_{iks}\varepsilon_{ks} + d_{is}E_s + \gamma_{is}H_s - \beta_{i5}T, \quad q_i = -\lambda_{ij}T_{,j},
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций; D_i, B_i – компоненты векторов электрической и магнитной индукций; E_i, H_i – напряженности электрического и магнитного полей; c_{ijks} – модули упругости, e_{iks}, h_{iks}, d_{is} – пьезоэлектрические, пьезомагнитные, электромагнитные модули; α_{is}, γ_{is} – диэлектрические и магнитные проницаемости; $\beta_{ij}, \beta_{i4}, \beta_{i5}$ – температурные, пирозлектрические и пиромагнитные коэффициенты; λ_{ij} – коэффициенты теплопроводности, φ, ϕ – электрический и магнитный потенциалы.

Из соотношений (1), (3), (4) получим

$$\begin{aligned}
(c_{ijks}u_k + e_{sij}\varphi - h_{sij}\phi)_{,si} &= \beta_{ij}T_{,i}, \\
(e_{iks}u_k - \alpha_{is}\varphi - d_{is}\phi)_{,si} &= \beta_{i4}T_{,i}, \\
(h_{iks}u_k - d_{is}\varphi - \gamma_{is}\phi)_{,si} &= \beta_{i5}T_{,i}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Введем векторы

$$\mathbf{V} = \{u_1, u_3, \varphi, \phi\}^T, \quad \mathbf{t} = \{\sigma_{31}, \sigma_{33}, D_3, B_3\}^T. \tag{6}$$

Таким же образом, как это сделано в [8], получаем

$$q_3(x_1, 0) = -ik_0 \{ \theta''^+(x_1) + \theta''^-(x_1) \}; \tag{7}$$

$$[\mathbf{V}'(x_1)] = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1); \tag{8}$$

$$\mathbf{t}(x_1, 0) = \mathbf{G}\mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{G}}\mathbf{W}^-(x_1) - \mathbf{g}(x_1); \tag{9}$$

где $k_0 = 0,5\sqrt{\lambda_{11}\lambda_{33}}$; $\mathbf{g} = \{g_1, g_3, g_4, g_5\}^T$; $\mathbf{g}(x_1) = \mathbf{h}\theta^+ - \bar{\mathbf{h}}\theta^-$; $\mathbf{G} = \{G_{ij}\}_{i,j=3,4,5}$; $q_3(x_1, 0)$ – плотность теплового потока; \mathbf{G} – матрица, определенная в [7]; $\mathbf{W}(z)$ – вектор-функция, аналитическая всюду, кроме области трещины. Квадратные скобки обозначают скачок функции при переходе через ось x_1 .

В случае трансверсальной изотропии и плоской деформации в плоскости (x_1, x_3) матрица \mathbf{G} и вектор \mathbf{h} имеют такую структуру:

$$\mathbf{G} = i \begin{Bmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{33} & g_{34} & g_{35} \\ 0 & g_{43} & g_{44} & g_{45} \\ 0 & g_{53} & g_{54} & g_{55} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{Bmatrix} i\theta_1 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

где все g_{ij} и θ_i – вещественные величины.

Решение задачи термоэлектромагнитоупругости для рассматриваемого тела можно получить как сумму решений, получаемых от действия равномерного теплового потока плотности q_0 в теле без трещины и возмущенного состояния, вызванного наличием трещины и затухающего при удалении от нее. Поскольку однородное термомеханическое состояние не представляет интереса, то рассмотрим возмущенное состояние, для которого при $y = 0$ справедливы следующие условия:

$$[T] = 0, \quad [q_3] = 0 \quad \text{для } x_1 \in (-\infty, \infty) \setminus (-a, a); \quad (11)$$

$$q_3^\pm = -q_0 \quad \text{для } x_1 \in (-a, a); \quad (12)$$

$$[\mathbf{V}(x_1, 0)] = 0, \quad [\mathbf{t}(x_1, 0)] = 0 \quad \text{для } x_1 \notin (-a, a); \quad (13)$$

$$\mathbf{t}(x_1, 0) = 0 \quad \text{для } x_1 \in (-a, a). \quad (14)$$

Решение задачи. Удовлетворяя граничному условию (12), с использованием уравнения (7) получим задачу Гильберта

$$\theta^{''+}(x_1) + \theta^{''-}(x_1) = -\frac{iq_0}{k_0} \quad \text{при } x_1 \in (-a, a), \quad (15)$$

решение которой при условии затухания на бесконечности имеет вид [9]

$$\theta'(z) = \frac{iq_0}{2k_0} \left\{ \sqrt{(z^2 - a^2)} - z \right\}. \quad (16)$$

С помощью этого решения и формулы (7) скачок температур при переходе через поверхность раздела материалов для $-a < x_1 < a$ и тепловой поток для $x_1 > a$ могут быть представлены в виде

$$[T(x_1)] = -\frac{q_0}{k_0} \sqrt{(x^2 - a^2)}, \quad q_3(x_1, 0) = q_0 \left(\frac{x}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} - 1 \right). \quad (17)$$

С учетом формулы (16) и свойств вектора \mathbf{h} выражение для вектор-функции $\mathbf{g}(x_1)$ примет вид

$$\mathbf{g}^T(x_1) = \left\{ \theta_1 q_0 k_0^{-1} x_1, \beta_3(x_1), \beta_4(x_1), \beta_5(x_1) \right\} \quad \text{для } x_1 \in (-a, a),$$

$$\mathbf{g}^T(x_1) = \left\{ -\theta_1 q_0 k_0^{-1} \sqrt{x_1^2 - a^2}, 0, 0, 0 \right\} \text{ для } x_1 \notin (-a, a)$$

$$\text{где } \beta_m(x_1) = i\theta_m q_0 k_0^{-1} \sqrt{x_1^2 - a^2}.$$

Используя (9), удовлетворяя граничным условиям (14) и учитывая структуру матрицы \mathbf{G} , приходим к независимым задачам линейного сопряжения для $-a < x_1 < a$

$$W_1^+(x_1) + W_1^-(x_1) = -i \frac{\theta_1 q_0}{k_0 g_{11}} x_1, \quad W(z)|_{z \rightarrow \infty} = 0; \quad (18)$$

$$\Phi^+(x_1) + \Phi^-(x_1) = \frac{i q_0}{k_0} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{e} \sqrt{x_1^2 - a^2},$$

$$\Phi(z)|_{z \rightarrow \infty} = 0, 5 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P}^\infty, \quad (19)$$

$$\text{где } M_{ij} = G_{i+2, j+2}, \quad \Phi_j(z) = W_{j+2}(z), \quad e_j = h_{j+2} \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

$$\mathbf{P}^\infty = \left\{ \sigma^\infty, D^\infty, B^\infty \right\}^T.$$

Решение задачи (18) получено в виде [7]

$$\mathbf{W}_1(z) = -\frac{i\theta_1 q_0}{2g_{11}k_0} \left(z - \frac{z^2 - a^2/2}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right),$$

а решение задачи (19) выберем в форме

$$\Phi(z) = -\frac{i q_0}{k_0} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{e} \frac{1}{2\pi i \sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{t^2 - a^2}{t - z} dt + \frac{\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 z}{\sqrt{z^2 - a^2}}.$$

Здесь $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$ – произвольные векторы, определяемые из условий на бесконечности. Окончательно, для функций будем иметь

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} \mathbf{M}^{-1} \left\{ \frac{q_0 \mathbf{e}}{\pi k_0} \left(\frac{2az}{\sqrt{z^2 - a^2}} + \sqrt{z^2 - a^2} \ln \frac{z-a}{z+a} \right) + \mathbf{P}^\infty \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right\}.$$

Используя последнюю формулу и соотношения (8), (9), находим

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_0 = \{ \sigma_{33}, D_3, B_3 \} &= \frac{q_0 \mathbf{e}}{\pi k_0} \left(\frac{2ax_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} + \sqrt{x_1^2 - a^2} \ln \frac{x_1 - a}{x_1 + a} \right) + \\ &+ \mathbf{P}^\infty \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}}, \quad \sigma_{13}(x_1, 0) = -\frac{a^2 \theta_1 q_0}{2k_0 \sqrt{x_1^2 - a^2}} \text{ при } x_1 > a; \end{aligned} \quad (20)$$

$$[\mathbf{V}'_0] = \{[u'_3], [\varphi'], [\phi']\} = i\mathbf{M}^{-1} \left\{ \frac{q_0 \mathbf{e}}{\pi k_0} \left(-\frac{2ax_1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}} + \sqrt{a^2 - x_1^2} \ln \frac{a - x_1}{a + x_1} \right) + \right. \\ \left. + \mathbf{P}^\infty \frac{x_1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}} \right\}, \quad [V_1] = \frac{\theta_1 q_0 (x_1^2 - a^2 / 2)}{g_{11} k_0 \sqrt{a^2 - x_1^2}} \text{ при } x_1 \in (-a, a). \quad (21)$$

Вводя вектор $\mathbf{K} = \{K_1, K_4, K_5\} = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(x_1 - a)} \mathbf{t}_0^{(1)}(x_1, 0)$ и скаляр $K_2 = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(x_1 - a)} \sigma_{13}(x_1, 0)$ коэффициент интенсивности напряжений, получаем

$$\mathbf{K} = \frac{2a^2 q_0}{\sqrt{\pi a k_0}} \mathbf{e} + \sqrt{\pi a} \mathbf{P}^\infty, \quad K_2 = -\theta_1 \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{a^2 q_0}{2k_0}. \quad (22)$$

Для скорости освобождения энергии будем иметь

$$G = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\Delta l} \int_a^{a+\Delta l} \mathbf{t}(x_1, 0) [\mathbf{V}(x_1 - \Delta l, 0)] dx_1 \right\},$$

и с использованием представлений (20) – (22) получаем

$$G = 0,25 \left(i \mathbf{K}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} + g_{11}^{-1} K_2^2 \right). \quad (23)$$

Анализ результатов численных расчетов. Расчеты проводились для пьезоэлектрического / пьезомагнитного материала ВаТiО₃-СоFe₂О₄, для которого [4] $c_{11} = 274$, $c_{13} = 161$, $c_{33} = 259$, $c_{44} = 45$ (ГПа), $e_{31} = -4,4$, $e_{33} = 1,86$, $e_{15} = 1,16$ (Кл/м²), $\alpha_{11} = 11,9 \cdot 10^{-10}$, $\alpha_{33} = 13,4 \cdot 10^{-10}$ (Кл²/Н·м²), $h_{31} = 522,3$, $h_{33} = 629,7$, $h_{15} = 495,0$ (Н/А·м), $\gamma_{11} = 531,5 \cdot 10^{-6}$, $\gamma_{33} = 142,3 \cdot 10^{-6}$ (Н·с²/Кл²).

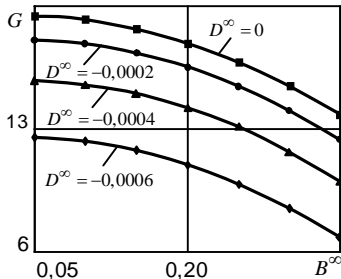


Рис. 2

На рис. 2 для $a = 10$ мм, $\sigma = 10^7$ Па, $q_0 = 0$ и различных значений D^∞ приведены кривые изменения скорости освобождения энергии в зависимости от B^∞ . Видно, что приложение электрического и магнитного потоков способствует снижению скорости освобождения энергии, что может использоваться для сдерживания роста трещин.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто плоску задачу для тріщини в п'єзоелектричному/п'єзомагнітному просторі під дією віддаленого механічного навантаження, електромагнітного та теплового полів. Шляхом зведення поставленої задачі до векторної та скалярної задач лінійного спряження і побудови її точного розв'язку знайдені аналітичні вирази для всіх електромагнітних та механічних факторів. Обчислено також їх коефіцієнти інтенсивності та швидкість вивільнення енергії.

SUMMARY. The plane problem for a crack in piezoelectric/piezomagnetic space under the action of a remote mechanical loading, electromagnetic and thermal fields is considered. This problem is reduced to the vector and scalar problem of linear relationship and solved exactly. Analytical expressions for all electromagnetic and mechanical values as well as for their intensity factors and the energy release rate are found.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с. 2. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 471 с. 3. Калоеров С. А., Баева А. И., Бороненко О. И. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 268 с. 4. Sih G. C., Song Z. F. Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO₃-CoFe₂O₄ composite // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2003. – Vol. 39. – P. 209–227. 5. Cun-Fa Gao, H. Kessler, H. Balke Crack problems in magnetoelastoelectroelastic solids. Part I: exact solution of a crack // Int. J. Eng. Sci. – 2003. – Vol. 41. – P. 963-981. 6. Kaloerov S.A., Boronenko O.I. Two-dimensional magneto-elastic problem for a multiply connected piezomagnetic body // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41, N 10. – P. 1137–1147. 7. Лобода В. В., Ходанен Т. В. Межфазная трещина в пьезоэлектромагнитном биматериале под действием механической нагрузки, электрического и магнитного потоков // Вісн. Дніпропетров. у-ту. Сер: Механіка. – 2007. – Вип. 11. т. 2 – С. 117-129. 8. Herrmann K. P., Loboda V. V. Contact zone models for an interface crack in a thermomechanically loaded anisotropic bimaterial // J. Thermal Stresses. – 2001. – № 24. – P. 479-506. 9. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.

Дніпропетровський національний університет

Поступила 10.03.2008

В. С. КИРИЛЮК, канд. физ.-мат. наук

О ДАВЛЕНИИ НАГРЕТОГО ЖЕСТКОГО КРУГОВОГО ШТАМПА НА ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО С ОТСЛОЕНИЕМ МАТЕРИАЛА ПОД ШТАМПОМ

Возрастающее использование пьезокерамических материалов вызывает необходимость исследования в них распределения силовых, электрических и температурных полей. Однако решение пространственных задач электроупругости сопряжено с определенными математическими трудностями, поскольку исходная система уравнений для нахождения электрического и напряженного состояний представляет собой связанную систему дифференциальных уравнений [1]. Решению граничных задач для электроупругих тел посвящены работы [1–8]. Взаимосвязь между решениями контактных задач для упругих и электроупругих тел без учета отслоения штампа от материала показана в работах [4, 5]. При давлении нагретого плоского жесткого штампа на упругое изотропное полупространство эффект отслоения материала изучался в работах [9, 10].

В настоящей работе решена задача о вдавливании нагретого жесткого кругового штампа на электроупругое полупространство, в виде неравенства найдена взаимосвязь между значениями силы вдавливания, температурного нагрева и свойствами пьезокерамического материала, что позволяет при давлении плоского кругового штампа прогнозировать возникновение области отслоения материала и оценивать ее размеры. Показано, что возникновение отслоения материала приводит к существенному изменению характера распределения контактного давления под штампом по сравнению со случаем, когда отслоение материала не происходит.

Постановка задачи. Рассмотрим электроупругое трансверсально-изотропное полупространство, занимающее область $z \leq 0$. В полупространство без трения вдавливается нагретый жесткий штамп кругового сечения. Пусть ось Oz совпадает с осью поляризации тела. Граничные условия на поверхности полупространства принимают вид

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \text{ при } z = 0; \quad \sigma_{zz} = 0 \text{ при } (x, y) \notin \Omega;$$

$$T(x, y, 0) = T_q \left(1 - x^2/a^2 - y^2/a^2\right)^q, \quad (x, y) \in \Omega;$$

$$T(x, y, 0) = 0; \quad (x, y) \notin \Omega;$$

$$u_z(x, y, 0) = \delta - \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

где $\Omega: x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$; $z = \varphi(x, y)$, $T(x, y, 0) > 0$ – уравнение поверхности и температура нагрева штампа; δ – перемещение под штампом. Сила вдавливания штампа связана с контактным давлением соотношением

$$P = \iint_{\Omega} -\sigma_{zz}(x, y) dx dy.$$

Условия (1) необходимо дополнить граничными условиями по электрическому состоянию. Согласно [1, 2] рассмотрим два возможных варианта граничных условия. При отсутствии электродного покрытия поверхности полупространства граничные условия можно записать в виде

$$D_z(x, y) = 0 \text{ при } z = 0, \quad (2)$$

а в случае наличия электродного покрытия имеем

$$\Psi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega; \quad D_z(x, y) = 0, \quad (x, y) \notin \Omega, \quad (3)$$

где Ψ – электрический потенциал; D_z – нормальная компонента вектора электрических перемещений (индукции).

Основные уравнения и соотношения. Уравнения стационарной термоэлектроупругости для пьезокерамической среды при отсутствии массовых сил и источников тепла в теле можно записать в виде

$$\begin{aligned} & c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{y,xy} + \\ & + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,xz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,xz} = \lambda_{11} T_{,x}, \\ & c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{x,xy} + \\ & + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,yz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,yz} = \lambda_{11} T_{,y}, \\ & (c_{13}^E + c_{44}^E)(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E (u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + \\ & + e_{15}(\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33} \Psi_{,zz} = \lambda_{33} T_{,z}, \\ & (e_{31} + e_{15})(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + e_{15} (u_{z,xx} + u_{z,yy}) + e_{33} u_{z,zz} - \\ & - \varepsilon_{11}^S (\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) - \varepsilon_{33}^S \Psi_{,zz} = -p_3 T_{,z}. \\ & k_{11} (T_{,xx} + T_{,yy}) + k_{33} T_{,zz} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

в котором c_{11}^E , c_{12}^E , c_{13}^E , c_{33}^E , c_{44}^E – независимые модули упругости; e_{31} , e_{15} , e_{33} – пьезомодули; ε_{11}^S , ε_{33}^S – диэлектрические проницаемости; k_{11} , k_{33} – коэффициенты теплопроводности; λ_{11} , λ_{33} – коэффициенты температурных напряжений; p_3 – пьезоэлектрическая постоянная.

Метод решения. Решение системы уравнений (4) можно представить через пять потенциальных функций Φ_i ($i = \overline{1, 5}$) [8]:

$$\begin{aligned} u_x &= \sum_{j=1}^4 \Phi_{j,x} + \Phi_{5,y}, & u_y &= \sum_{j=1}^4 \Phi_{j,y} - \Phi_{5,x}, \\ u_z &= \sum_{j=1}^4 k_j \Phi_{j,z}, & \Psi &= \sum_{j=1}^4 l_j \Phi_{j,z}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь k_j, l_j – некоторые постоянные, которые подлежат определению. После подстановки выражений перемещений и потенциала (5) в уравнения (4) можно получить, что функции Φ_j удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + v_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j = \overline{1, 5}), \quad (6)$$

где $v_5 = 2c_{44}^E / (c_{11}^E - c_{12}^E)$; v_i ($i = \overline{1, 3}$) – корни алгебраического уравнения третьего порядка

$$\begin{aligned} v^3 (A_1 B_2 - C_1 D_2) + v^2 (A_1 B_3 + A_2 B_2 - C_1 D_3 - C_2 D_2) + \\ + v (A_2 B_3 + A_3 B_2 - C_2 D_3 - C_3 D_2) + A_3 B_3 - C_3 D_3 = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$A_1 = c_{11}^E e_{15}, \quad A_2 = (c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{31} + e_{15}) - c_{11}^E e_{33} - c_{44}^E e_{15},$$

$$A_3 = c_{44}^E e_{33}, \quad B_2 = -\left[\varepsilon_{11}^S (c_{13}^E + c_{44}^E) + e_{15} (e_{31} + e_{15}) \right],$$

$$B_3 = \varepsilon_{33}^S (c_{13}^E + c_{44}^E) + e_{33} (e_{31} + e_{15}), \quad C_1 = -c_{11}^E \varepsilon_{11}^S,$$

$$C_2 = (e_{31} + e_{15})^2 + c_{11}^E \varepsilon_{33}^S + c_{44}^E \varepsilon_{11}^S, \quad C_3 = -c_{44}^E \varepsilon_{33}^S,$$

$$D_2 = e_{15} (c_{13}^E + c_{44}^E) - c_{44}^E (e_{31} + e_{15}),$$

$$D_3 = c_{33}^E (e_{31} + e_{15}) - e_{33} (c_{13}^E + c_{44}^E). \quad (8)$$

Постоянные k_j, l_j ($j = \overline{1, 3}$) в формулах (5) связаны со значениями v_j следующими соотношениями:

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{e_{33} k_j - \varepsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = v_j, \quad (9)$$

где

$$a_j = c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j, \quad d_j = e_{15} (1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j \quad (j = \overline{1, 4}). \quad (10)$$

Далее получаем

$$k_j = \frac{[(v_j c_{11}^E - c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33}) + v_j (c_{44}^E + c_{13}^E)(e_{31} + e_{15})]}{[(c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33}) - (c_{44}^E v_j - c_{33}^E)(e_{31} + e_{15})]},$$

$$l_j = \frac{[(v_j c_{11}^E - c_{44}^E)(v_j c_{44}^E - c_{33}^E) + v_j (c_{44}^E + c_{13}^E)^2]}{[(v_j c_{44}^E - c_{33}^E)(e_{31} + e_{15}) - (c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33})]} \quad (j = \overline{1, 3}). \quad (11)$$

Кроме того, имеем

$$\Phi_{4,zz} = mk^{-2}T, \quad \Phi_{4,xx} + \Phi_{4,yy} + k^2\Phi_{4,zz} = 0,$$

$$T_{,xx} + T_{,yy} + k^2T_{,zz} = 0,$$

где $k^2 = k_{33}/k_{11}$ – отношение коэффициентов теплопроводности; а m – неизвестная постоянная. Для определения неизвестных постоянных k_4 , l_4 получаем систему двух линейных уравнений

$$\begin{aligned} & (\lambda_{33}(c_{13}^E + c_{44}^E) - \lambda_{11}c_{33}^E + \lambda_{11}c_{44}^E k^2)k_4 + \\ & + (\lambda_{33}(e_{15} + e_{31}) - \lambda_{11}e_{33} + \lambda_{11}e_{15}k^2)l_4 + \\ & + (\lambda_{33}(c_{44}^E - c_{11}^E k^2) + \lambda_{11}(c_{44}^E + c_{13}^E)k^2) = 0, \\ & (-p_3(c_{13}^E + c_{44}^E) - \lambda_{11}e_{33} + \lambda_{11}e_{15}k^2)k_4 + \\ & + (-p_3(e_{15} + e_{31}) + \lambda_{11}\varepsilon_{33}^S - \lambda_{11}\varepsilon_{11}^S k^2)l_4 + \\ & + (-p_3(c_{44}^E - c_{11}^E k^2) + \lambda_{11}(e_{15} + e_{31})k^2) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее находим

$$m = \frac{\lambda_{11}k^2}{c_{44}^E + (c_{13}^E + c_{44}^E)k_4 + (e_{15} + e_{31})l_4 - c_{11}^E k^2}.$$

Если ввести обозначения $z_j = z v_j^{-1/2}$ ($j = \overline{1, 5}$), то $\Phi_j(x, y, z_j)$ будут гармоническими функциями в соответствующих системах координат.

Построение решения задачи. С помощью специального выбора функций $\Phi_j(x, y, z_j)$ рассматриваемую контактную задачу можно привести [4] к поиску неизвестной плотности потенциала простого слоя. Остается удовлетворить граничному условию

$$u_z(x, y, 0) = \delta - \varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} B_1^{Piezo} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}. \quad (13)$$

Нормальные напряжения под штампом при этом имеют вид

$$\sigma_{zz} |_{z=0} = -p(x, y) - \gamma_S^{Piezo1} T_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (14)$$

Для неэлектродривированной поверхности полупространства следует вместо постоянных B_1^{Piezo} и γ_S^{Piezo1} взять B_2^{Piezo} и γ_S^{Piezo2} . Все упомянутые постоянные зависят от термоэлектродупругих свойств материала, их явные выражения приведены в [4, 5].

На основе результатов [4] для нагретого плоского жесткого штампа радиуса a получаем значения контактного давления и перемещения под штампом в виде

$$\begin{aligned} -\sigma_{zz}(x, y) &= \frac{P - Q_1}{2\pi a^2} \left(1 - x^2/a^2 - y^2/a^2\right)^{-1/2} + \\ &+ \gamma_S^{Piezo1} T_q \left(1 - x^2/a^2 - y^2/a^2\right)^q, \\ \delta &= \frac{P - Q_1}{4a} B_1^{Piezo}, \quad Q_1 = 2\pi \gamma_S^{Piezo1} \int_0^a T_q (1 - r^2)^q r dr, \quad P \geq Q_1. \end{aligned} \quad (15)$$

Для штампа в виде параболоида вращения согласно [4] находим

$$\begin{aligned} u_z(x, y) &= b_0 + b_1 \left(1 - x^2/a^2 - y^2/a^2\right); \\ -\sigma_{zz}(x, y) &= \frac{3(P - Q_1)}{2\pi a^3} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} + \\ &+ \gamma_S^{Piezo1} T_q \left(1 - x^2/a^2 - y^2/a^2\right)^q; \\ a &= \sqrt[3]{\frac{3}{8} B_1^{Piezo} (P - Q_1) R}; \quad b_0 = b_1 = \frac{3(P - Q_1)}{16a} B_1^{Piezo}; \quad P \geq Q_1, \end{aligned} \quad (16)$$

где R – радиус кривизны параболы, вращением которой получен параболоид. После вычисления интеграла величина Q_1 принимает вид

$$Q_1 = \frac{1}{q+1} T_q \gamma_S^{Piezo1} \pi a^2, \quad q \geq 0.$$

Отметим, что формулы (15), (16) имеют физический смысл, когда $P \geq Q_1$. В этом случае штамп прижат к материалу по всей области контакта и не возникает областей отделения материала. Следовательно, при отсутствии отслоения материала под штампом получаем неравенство

$$P \geq \frac{1}{q+1} T_q \gamma_S^{Piezo1} \pi a^2. \quad (17)$$

В случае же выполнения неравенства

$$P < \frac{1}{q+1} T_q \gamma_S^{Piezo1} \pi a^2,$$

при приближении к краю штампа ($r \rightarrow a$) из формул (15) можем заключить, что тогда напряжения под штампом становятся растягивающими. Следовательно, появляется зона отделения материала.

В работах [9, 10] для задачи о контакте нагретого плоского штампа с упругим изотропным полупространством предложено искать новую зону полного контакта, которая меньше размеров штампа, из задачи для неплюского кругового штампа, устремляя $R \rightarrow \infty$. Используем этот подход в контактной задаче электроупругости. Из выражений (16) получаем

$$\frac{3}{8} B_1^{Piezo} (P - Q_1) = \frac{a^3}{R}. \quad (18)$$

Устремляя в правой части $R \rightarrow \infty$, находим новый радиус контакта $a_* < a$

$$\sqrt{\frac{P(q+1)}{T_q \pi \gamma_S^{Piezo1}}} = a_*. \quad (19)$$

В случае отслоения материала контактное давление принимает вид

$$-\sigma_{zz}(x, y) = \gamma_S^{Piezo1} T_q \left(1 - x^2/a_*^2 - y^2/a_*^2\right)^q, \quad (20)$$

что принципиально отличается от выражения давления в формулах (15). Следовательно, при увеличении нагрева штампа при превышении некоторого порогового значения, которое зависит от силы P и термоэлектроупругих свойств пьезокерамического материала, появляется область отделения материала под штампом.

Анализ результатов численных исследований. Рассмотрим случай $q = 1/4$. Тогда для температуры под штампом имеем $T_0(1 - r^2/a^2)^{1/4}$, при $T_0 > 0$. В качестве расчетных исследуем такие три случая нагрева штампа:

$$T_0 = \frac{1,2P}{\gamma_S^{Piezo1} \pi a^2}, \quad T_0 = \frac{1,3P}{\gamma_S^{Piezo1} \pi a^2} \quad \text{и} \quad T_0 = \frac{1,5P}{\gamma_S^{Piezo1} \pi a^2}.$$

Вначале проверим выполнение неравенства (17), чтобы выяснить, происходит ли отслоение материала. В результате получаем, что неравенство (17) для первого случая выполняется, т.е. отделение материала под штампом не происходит. В то же время, при увеличении нагрева (случаи 2 и 3), такое отделение материала имеет место. После простых вычислений для первого случая нагрева выражение давления под штампом принимает вид

$$-\frac{\sigma_{zz}}{T_0 \gamma_S^{Piezo1}} = \frac{1}{60} (1 - r^2/a^2)^{-1/2} + (1 - r^2/a^2)^{1/4}. \quad (21)$$

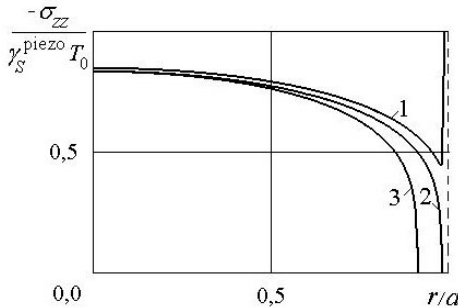
Для второго и третьего случаев контактное давление имеет одно и то же

выражение

$$-\frac{\sigma_{zz}}{T_0 \gamma_S^{Piezo1}} = (1 - r^2 / a_*^2)^{1/4}, \quad (22)$$

но радиусы новой контактной области для них различны. Для второго и третьего случаев имеем соответственно $a_* = 5a / \sqrt{26}$, $a_* = a\sqrt{5/6}$.

На рисунке показано изменение контактного давления под штампом. При этом кривая давления для случая 1 (без отделения материала под штампом) отражена линией 1,



для второго и третьего случаев – линиями с соответствующими номерами. Видно, что при увеличении нагрева плоского штампа область контакта с полупространством уменьшается.

Отметим, что из установленных результатов, полагая пьезомодули и диэлектрические проницаемости пьезокерамического материала равными нулю,

получим аналогичные соотношения для чисто упругого трансверсально-изотропного материала. Для результатов контакта с отслоением формулы (21), (22) для чисто упругого трансверсально-изотропного материала имеют тот же вид, однако при этом величину γ_S^{Piezo1} следует заменить специ-

альной величиной γ^{Trans} . Явное выражение γ^{Trans} из-за громоздкости в данной работе не приводится. Осуществляя предельный переход от упругого трансверсально-изотропного к изотропному материалу, находим, что $\gamma^{Trans} \rightarrow \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha \mu$, где ν – коэффициент Пуассона; μ – модуль сдвига;

α – коэффициент линейного температурного расширения изотропного материала. Для материала PZT-5Н, свойства которого приведены в работе [8], проведено сравнение значений величин γ_S^{Piezo1} и γ^{Trans} . В результате вычислений получено, что для этого материала отношение $\gamma_S^{Piezo1} / \gamma^{Trans} = 1,063$. Это означает, что связанность силового и электрического полей увеличивает влияние температурного поля на распределение напряжений под штампом для этого материала примерно на 6%.

Таким образом, в работе в виде простых неравенств получены условия возникновения отслоения материала под круговым плоским нагретым штампом, что вдавливаются без трения в трансверсально-изотропное электроупругое полупространство. В эти неравенства входят величина силы вдавливания, температурный нагрев и термоэлектроупругие свойства ма-

териала. Показано, что при увеличении нагрева область полного контакта (при отслоении материала) уменьшается. Как частный случай из установленных данных следуют результаты для чисто упругого трансверсально-изотропного материала, которые также являются новыми.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу про тиск нагрітого плоского жорсткого кругового штампу (без тертя) на п'єзокерамічний півпростір з можливістю відшарування матеріалу під штампом. У вигляді простих нерівностей, в які входять величина сили притискання, температурний нагрів та термоелектропружні властивості матеріалу, отримані умови виникнення відшарування матеріалу під нагрітим штампом. Показано, що при збільшенні нагріву область контакту (при відшаруванні матеріалу) зменшується. Як частинний випадок із знайдених виразів впливають результати для чисто пружного ізотропного трансверсально-ізотропного матеріалу, які також є новими. Проведено числові дослідження контактної тиску під нагрітим штампом при появі відшарування та без нього.

SUMMARY. It was considered the problem on pressure of a heated plane hard circular punch (without friction) with a possibility of material separation under the punch. As simple inequalities, which contain the values of stamping force, temperature of heating and thermoelectroelasticity properties of material, it was obtained the conditions of separation arising under heated punch. It was shown, that at increase of heating the contact area (under the separation of material) decreases. As a special case from obtained expressions follow the results for transversally-isotropic material, which also are new. The numerical researches of contact pressure under a heated punch were carried out at appearance separation and without it.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. Грінченко В. Т., Уліто А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 279 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 6 т. Т. 1). 2. Podil'chuk Yu. N. Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelectroelastic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – Vol. 39, № 2. – P. 132–170. 3. Kalberov S. A. Determining the intensity factors for stresses, electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – Vol. 43, № 6. – P. 631–637. 4. Кирилук В. С. О соответствии между решениями специального класса контактных задач термоупругости и термоэлектроупругости для полупространства // *Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки.* – 2006. – Вип. 2. – С. 69–76. 5. Kirilyuk V. S. On the relationship between the solutions of static contact problems of elasticity and electroelasticity for a half-space // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – Vol. 42, № 11. – P. 1256–1269. 6. Dai L., Guo W., Wang X. Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids // *Int. J. Solids and Struct.* – 2006. – Vol. 43, № 6. – P. 1818–1831. 7. Chen W. Q., Lim C. W. 3D point force solution for a permeable penny-shaped crack embedded in an infinite transversely isotropic piezoelectric medium // *Int. J. Fract.* – 2005. – Vol. 131, № 3. – P. 231–246. 8. Shang F., Kuna M., Kitamura T. Theoretical investigation of an elliptical crack in thermopiezoelectric material. Part 1: Analytical development // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 2003. – Vol. 40, № 3. – P. 237–246. 9. Barber J. R. Indentation of an elastic half space by a cooled flat punch. // *Q.J. Mech. Appl. Math.* – 1982. – Vol. 35. – P. 141–154. 10. Pauk V. Plane Contact of Hot Flat-Ended Punch and Thermoelastic Half-Space Involving Finite Friction // *J. Appl. Mech.* – 2007. – Vol. 74, № 6. – P. 1172–1177.

УДК 539.3

Е. В. СТЕГАНЦЕВ, И. Г. ВЕЛИЧКО, канд. физ.-мат. наук

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ЗАМЕНЕ МНОГОСЛОЙНОГО ОСНОВАНИЯ СЛОИСТЫМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ

В современных исследованиях широко используются модели в виде упругих многослойных оснований [1]. При этом многослойное основание с большим количеством слоев заменяется слоистым полупространством регулярной структуры, для которого разработаны специальные методы решения задач теории упругости [2–4]. В данной статье исследуется вопрос допустимости такой замены.

Постановка задачи. Рассмотрим одинаково нагруженные упругие слоистое полупространство регулярной структуры и состоящее из таких же пакетов слоев многослойное основание, под которым понимается основание, состоящее из бесконечного числа одинаковых групп по n сцепленных плоскопараллельных слоев. Выясним, насколько напряжения в точках верхнего слоя полупространства и многослойного основания могут отличаться друг от друга.

Слои n -слойного основания будем нумеровать сверху вниз, начиная с единицы. Каждый слой является однородным, изотропным, невесомым и характеризуется толщиной h , модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Толщины и упругие характеристики слоев, номера которых отличаются на число, кратное n , совпадают. Все величины, относящиеся к слою с номером k , обозначим нижним индексом k . С каждым слоем свяжем местную декартову систему координат с осями OZ_k , лежащими на одной прямой и направленными в глубину слоя. Начала всех систем координат лежат на верхних границах соответствующих слоев.

Метод решения. Для решения задачи о деформации многослойного основания используем метод функций податливости [5], который заключается в том, что в пространстве трансформант Фурье по переменным x и y с параметрами ξ и η напряженно-деформированное состояние каждого слоя однозначно определяется шестью вспомогательными функциями слоя, связанными с трансформантами напряжений и перемещений точек верхней границы слоя:

$$\alpha_k = \bar{\sigma}_{zk} \Big|_{z=0}, \quad L_k \beta_k = p \bar{u}_{zk} \Big|_{z=0},$$

$$L_k \gamma_k = - \left(i \xi \bar{u}_{xk} + i \eta \bar{u}_{yk} \right) \Big|_{z=0}, \quad \delta_k = -p^{-1} \left(i \xi \bar{\tau}_{xzk} + i \eta \bar{\tau}_{yzk} \right) \Big|_{z=0},$$

$$L_k \tilde{\gamma}_k = \left(i\eta \bar{u}_{xk} - i\xi \bar{u}_{yk} \right) \Big|_{z=0}, \quad \tilde{\delta}_k = p^{-1} \left(i\eta \bar{\tau}_{xzk} - i\xi \bar{\tau}_{yzk} \right) \Big|_{z=0},$$

где $p^2 = \xi^2 + \eta^2$, $L_k = 2(1 - \nu_k^2) / E_k$. Удовлетворяя условиям сопряжения слоев, получаем рекуррентные соотношения между вспомогательными функциями. Следовательно, достаточно определить шесть вспомогательных функций только для одного из слоев, например, для первого. Из граничных условий определяются три вспомогательные функции первого слоя, но для многослойного основания вспомогательные функции одного слоя связаны между собой линейными соотношениями [5]

$$B_k = -A_k \alpha_k + B_k \delta_k, \quad \gamma_k = B_k \alpha_k - B_{\tau k} \delta_k, \quad \tilde{\gamma}_k = -C_{\tau k} \tilde{\delta}_k. \quad (1)$$

Здесь $A_k(p)$, $B_k(p)$, $B_{\tau k}(p)$, $C_{\tau k}(p)$ – функции податливости.

Последние функции не зависят от приложенных нагрузок и могут быть вычислены, если известны упругие характеристики и толщины слоев. Функции податливости находятся из рекуррентных соотношений, причем, если многослойный пакет лежит на полупространстве, то эти функции вычисляются, начиная с известных функций податливости однородного полупространства.

Для полупространств регулярной структуры описанный выше способ определения функций податливости непригоден: так как абсолютно жесткого или упругого полупространства нет, то нет возможности начать вычисления функций податливости по рекуррентным формулам. В работе [6] предложен способ построения функций податливости, основанный на том, что, если от исходного слоистого полупространства регулярной структуры отделить одну или несколько групп, состоящих из n слоев, то получим слоистое полупространство регулярной структуры с теми же механическими свойствами; получено нелинейное матричное уравнение для нахождения функций податливости первого слоя; предложен способ получения численного решения этого уравнения с любой наперед заданной точностью. Все расчетные формулы для вычисления напряжений в слоях многослойного основания и слоистого полупространства регулярной структуры одинаковы. По-разному вычисляются лишь функции податливости.

Априорная оценка погрешности замены. Число пакетов многослойного основания обозначим через m . Все величины, относящиеся к основанию, обозначим знаком «тильда». Определим, насколько напряжения в слоистом полупространстве регулярной структуры и многослойном основании могут отличаться друг от друга в соответствующих точках. Для упрощения решения рассмотрим случай, когда к верхней границе слоистого полупространства регулярной структуры и многослойного основания приложена одинаковая сосредоточенная сила Q . Проведем рассуждения на примере напряжения σ_z в первом слое основания. Для восстановления значений σ_{z1} воспользуемся обратным преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned}\sigma_{z1}(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}_{z1}(\xi, \eta, z) e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} p \bar{\sigma}_{z1}(p, z) J_0(pr) dp.\end{aligned}$$

Для трансформанты напряжения $\bar{\sigma}_{z1}$ имеем [5]

$$\bar{\sigma}_{z1}(p, z) = \alpha_1 \left(chpz - \frac{pz}{2(1-\nu_1)} shpz \right) + \beta_1 (shpz - pzchpz) - \gamma_1 pzshpz. \quad (2)$$

Так как для рассматриваемых деформаций $\alpha_1 = Q$, $\delta_1 = 0$, $\tilde{\delta}_1 = 0$, $\tilde{\gamma}_1 = 0$, то формулы (1) принимают вид $\beta_1 = -A_1 \alpha_1$, $\gamma_1 = B_1 \alpha_1$. Подставляя в (2) выражения для β_1 и γ_1 через функцию α_1 , получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{z1}(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} pQ \left(\left(chpz - \frac{pz}{2(1-\nu_1)} shpz \right) - \right. \\ &\quad \left. - A_1 (shpz - pzchpz) - B_1 pzshpz \right) J_0(pr) dp.\end{aligned}$$

Рассмотрим модифицированные функции податливости a_1 и b_1 , которые удовлетворяют равенствам

$$A_1 = 1 - a_1 \cdot e^{2ph_1}, \quad B_1 = 0,5(1 - 2\nu_1)/(1 - \nu_1) - b_1 \cdot e^{2ph_1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_{z1}(r, z) &= \frac{Q}{2\pi} \int_0^{\infty} p \left(\left(chpz - \frac{pz}{2(1-\nu_1)} shpz \right) - \right. \\ &\quad \left. - (shpz - pzchpz) + (shpz - pzchpz) a_1 e^{-2ph_1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1-2\nu_1}{2(1-\nu_1)} pzshpz + b_1 e^{-2ph_1} pzshpz \right) J_0(pr) dp.\end{aligned}$$

Представим последний интеграл в виде суммы двух интегралов так, чтобы один из интегралов не содержал модифицированные функции податливости, другой содержал таковые. Получим

$$\sigma_{z1}(r, z) = \frac{Q}{2\pi} \int_0^{\infty} p \left(\left(chpz - \frac{pz}{2(1-\nu_1)} shpz \right) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -(\text{shpz} - \text{pzchpz}) - \frac{1-2\nu_1}{2(1-\nu_1)} \text{pzshpz} \Big) J_0(pr) dp + \\
& + \frac{Q}{2\pi} \int_0^\infty p e^{-2ph_1} ((\text{shpz} - \text{pzchpz}) \cdot a_1 + \text{pzshpz} \cdot b_1) J_0(pr) dp.
\end{aligned}$$

Оценим модуль разности напряжений $\sigma_{z1}(x, z)$ для слоистого полупространства регулярной структуры и многослойного основания с m пакетами: $I_m = \left| \sigma_{z1} - \tilde{\sigma}_{z1}^m \right|$. Учитывая, что интегралы, не содержащие модифицированные функции податливости, одинаковы, можно записать

$$\begin{aligned}
I_m = \left| \sigma_{z1} - \tilde{\sigma}_{z1}^m \right| = \frac{Q}{2\pi} \left| \int_0^\infty \left[p e^{-2ph_1} ((\text{shpz} - \text{pzchpz}) \cdot (a_1 - \tilde{a}_1^m)) \times \right. \right. \\
\left. \left. \times J_0(pr) \right] dp + \int_0^\infty p e^{-2ph_1} \text{pzshpz} \cdot (b_1 - \tilde{b}_1^m) J_0(pr) dp \right|.
\end{aligned}$$

Используя свойства интегралов, имеем

$$\begin{aligned}
I_m \leq \frac{Q}{2\pi} \int_0^\infty p e^{-2ph_1} (\text{pzchpz} - \text{shpz}) \cdot \left| a_1 - \tilde{a}_1^m \right| \cdot \left| J_0(pr) \right| dp + \\
+ \frac{Q}{2\pi} \int_0^\infty p e^{-2ph_1} \text{pzshpz} \cdot \left| b_1 - \tilde{b}_1^m \right| \cdot \left| J_0(pr) \right| dp.
\end{aligned}$$

Оценим выражения $F = \left| p e^{-2ph_1} (\text{pzchpz} - \text{shpz}) \right|$ и $G = \left| p e^{-2ph_1} \text{pzshpz} \right|$ при $p > 0$ и $0 \leq z \leq h_1$:

$$\begin{aligned}
F & \leq \frac{1}{h_1} \max_t \left(t e^{-2t} (tcht - sht) \right) < \frac{0,156}{h_1}, \\
G & \leq \frac{1}{h_1} \max_t \left(t e^{-2t} tsht \right) < \frac{0,252}{h_1}.
\end{aligned}$$

Для функции Бесселя имеет место ограничение $\left| J_0(pr) \right| \leq 1$. Поэтому

$$I_m \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{h_1} \int_0^\infty Q \cdot 0,156 \cdot \left| a_1 - \tilde{a}_1^m \right| dp +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{h_1} \int_0^{\infty} Q \cdot 0,252 \cdot |b_1 - \tilde{b}_1^m| dp.$$

Учитывая, что функции a_1 , \tilde{a}_1^m , b_1 , \tilde{b}_1^m зависят от ph_1 и, выполняя замену $t = ph_1$, получаем

$$I_m \leq \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{R_m}{h_1^2},$$

$$\text{где } R_m = \int_0^{\infty} \left(0,156 |a_1(t) - \tilde{a}_1^m(t)| + 0,252 |b_1(t) - \tilde{b}_1^m(t)| \right) dt.$$

Таким образом, задача свелась к оценке подынтегральной функции в R_m . Рассмотрим случай, когда упругое слоистое полупространство регулярной структуры и многослойное основание состоят из пакетов по два слоя одинаковой толщины: $h_2 = h_1 = h$. Упругие характеристики слоев следующие: коэффициенты Пуассона слоев одинаковы $\nu = 0,3$, модули Юнга четных слоев равны между собой и в два раза больше модулей Юнга нечетных слоев. На рис. 1, 2 приведены соответственно графики модифицированных функций податливости $a(t)$ и $b(t)$ первого слоя для многослойных оснований, состоящих из одного (кривая 1), двух (кривая 2), трех (кривая 3), пяти (кривая 4), десяти (кривая 5) и двадцати (кривая 6) пакетов, и этих же функций для слоистого полупространства регулярной структуры (кривая 7).

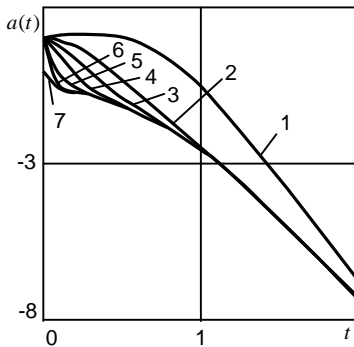


Рис. 1

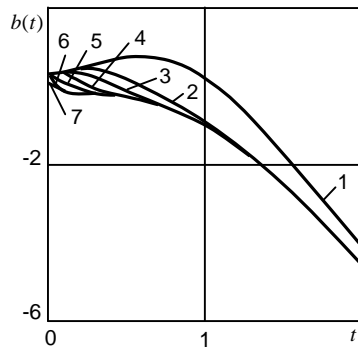


Рис. 2

Вычисления показывают, что $R_5 < 0,065$. Это означает, что для заданных параметров при замене десятислойного основания (пять пакетов по два слоя) на слоистое полупространство регулярной структуры погрешность вычисления нормальных напряжений σ_z в первом слое заведомо не

превосходит $I_5 < R_5 \cdot Q / 2\pi h_1^2 < 0,01 \cdot Q / h_1^2$. А при замене двадцатислойного основания на слоистое полупространство регулярной структуры погрешность заведомо не превосходит $I_{10} < 0,005 \cdot Q / h_1^2$.

РЕЗЮМЕ. В статті запропоновано спосіб апріорної оцінки похибки визначення напружень в першому шарі при заміні багатшарової основи шаруватим півпростором регулярної структури. Розглянуто випадок, коли обидва об'єкти знаходяться під дією зосередженої нормальної сили. Отримано оцінки для двадцяти- і сорокашарових основ.

SUMMARY. The article presents the method of a priori estimation of the error of the stress determination in the first layer in the case of the replacement of the multilayer foundation by the layered semispace of the regular structure. The case when both objects are under the action of the concentrated normal force is considered. We have obtained the estimation for the foundations, which consist of twenty and forty layers.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. Гузь А. Н., Чехов В. Н. Задачи складкообразования в слоистой толще земной коры // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 2. – С. 3–44. 2. Шульга Н. А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1982. – 200 с. 3. Вильдеман В. Э., Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. – М.: Физматлит, 1997. – 288 с. 4. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Периодические кусочно-однородные упругие структуры. – М.: Наука, 1992. – 288 с. 5. Приварников А. К. Двумерные граничные задачи теории упругости для многослойных оснований. – Запорожье, 1990. – 85 с. 6. Величко И. Г., Стеганцев Е. В. Исследование пространственной деформации слоистого полупространства периодической структуры // Прикладні пробл. механіки і математики. – 2005. Вип. 3. – С. 135–139.

Запорожский национальный университет

Поступила 10.04.2008

УДК 539.3

А. С. ПОЛИЩУК, Ю. А. ЧЕРНЯКОВ, д-р физ.-мат. наук

ОБОБЩЕННЫЙ ВАРИАНТ ТЕОРИИ МИКРОДЕФОРМАЦИЙ

Теория микродеформаций позволяет описывать необратимое деформирование поликристаллических металлов для широкого класса сложных нагружений [1–4]. В ней представительный объем рассматривается как некоторое множество взаимодействующих микрочастиц, каждая из которых идентифицируется ее локальным пределом текучести τ и ориентационным тензором $\hat{\mu}$, определяющим направление пластической деформации. В качестве ориентационных тензоров используются направляющие деваторы $\hat{\alpha}$

$$\hat{\alpha} : \hat{\alpha} = 1, \quad \text{tr} \hat{\alpha} = 0. \quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем используется безиндексная форма записи тензорных величин и соотношений

$$\hat{a} = a_{kl} \vec{i}_k \vec{i}_l, \quad \hat{a} \cdot \hat{b} = a_{km} b_{ml} \vec{i}_k \vec{i}_l, \quad \hat{a} : \hat{b} = a_{ij} b_{ji}, \quad \text{tr} \hat{a} = a_{ii}.$$

Установлено [1], что выбор ориентационного тензора в форме (1) приводит к начальному условию пластичности теории микродеформаций в форме Мизеса, выбор $\hat{\mu}$ в виде симметризованной диады векторов

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{n}\vec{m} + \vec{m}\vec{n}), \quad |n| = 1, \quad |m| = 1, \quad \vec{n} \cdot \vec{m} = 0$$

приводит к условию пластичности Треска и позволяет получить большинство известных вариантов теории скольжения. В работе [5] представление (1) было расширено введением шарового тензора, что позволило получить поверхность текучести Шлейхера–Мизеса и, таким образом, учесть влияние гидростатического давления на микропластическое деформирование.

Все известные варианты теории микродеформаций не позволяли рассматривать поверхность текучести общего вида и, как следствие, материалы, чувствительные к виду напряженного состояния.

В настоящей работе предлагается обобщенный вариант теории микродеформаций, позволяющий устранять указанный недостаток. В обобщенном варианте в качестве ориентационного используется произвольный тензор, что дает возможность учитывать наряду с первым и вторым инвариантами третий инвариант тензора напряжений и его влияние на пластическое деформирование материала. Ключевым моментом предлагаемого обобщения является новое представление тензора $\hat{\mu}$, которое в отличие от использованных ранее разделяет инварианты тензора и величины, характеризующие ориентацию главных осей тензора в пространстве.

Воспользуемся следующим представлением для $\hat{\mu}$:

$$\hat{\mu} = \rho(\xi) \left[\left(-\frac{\cos \xi}{\sqrt{6}} - \frac{\sin \xi}{\sqrt{2}} \right) \vec{j}_1 \vec{j}_1 + \left(-\frac{\cos \xi}{\sqrt{6}} + \frac{\sin \xi}{\sqrt{2}} \right) \vec{j}_2 \vec{j}_2 + \left(\frac{2 \cos \xi}{\sqrt{6}} \right) \vec{j}_3 \vec{j}_3 \right], \quad (2)$$

где \vec{j}_k – тройка взаимноортогональных векторов, определяющих главные направления тензора $\hat{\mu}$; $\rho(\xi)$ – заданная функция; ξ – полярный угол на девиаторной плоскости, удовлетворяющий соотношению

$$\cos 3\xi = \sqrt{6} \text{tr}(\hat{\mu} \cdot \hat{\mu} \cdot \hat{\mu}) (\hat{\mu} : \hat{\mu})^{-3/2}.$$

Из соотношения (2) находим

$$\hat{\mu} : \hat{\mu} = \rho^2(\xi) \neq 1 \quad (3)$$

и, следовательно, тензор $\hat{\mu}$ теперь не будет направляющим.

Обозначим через Ω множество всех ориентаций микрочастиц. Примем, что пределы текучести распределены с некоторой плотностью $\Phi(\tau)$ на полупрямой (τ_0, ∞) . Множество Ω_τ будем считать представимым в виде прямого произведения множества всех возможных ориентаций на множество всех пределов текучести.

Следуя [1], выберим микронапряжения в виде суммы тензоров диссипативных $\hat{\tau}$ и внутренних $\hat{\rho}$ напряжений:

$$\hat{\sigma}(\hat{\mu}, \tau) = \hat{\tau}(\hat{\mu}, \tau) + \hat{\rho}(\hat{\mu}, \tau), \quad (4)$$

в которой диссипативная составляющая определяется формулой

$$\hat{\tau}(\hat{\mu}, \tau) = \tau \hat{\mu}. \quad (5)$$

Тензор деформаций макрообъема представим в виде суммы упругой и пластической составляющей:

$$\langle \hat{\varepsilon} \rangle = \langle \hat{\varepsilon}_e \rangle + \langle \hat{\varepsilon}_p \rangle, \quad (6)$$

в которой упругая составляющая определяется локальным законом Гука, а пластическая составляющая – локальным законом пластического течения

$$\dot{\hat{\varepsilon}}_p(\hat{\mu}, \tau) = \dot{\lambda}(\hat{\mu}, \tau) \hat{\mu}. \quad (7)$$

Пластическую макродеформацию представим как сумму микродеформаций по всем направлениям и пределам текучести:

$$\langle \hat{\varepsilon}_p \rangle = \int_{\tau_0}^{\infty} \Phi^*(\tau') d\tau' \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_p(\hat{\mu}', \tau') d\Omega'. \quad (8)$$

Тензор $\hat{\rho}$, характеризующий неоднородность развития пластической деформации элементарного представительного объема, зададим в виде

$$\hat{\rho}(\hat{\mu}, \tau) = \int_0^{\infty} \Phi(\tau') d\tau' \int_{\Omega} \tilde{R}(\hat{\mu}, \tau, \hat{\mu}', \tau') \varepsilon_p(\hat{\mu}', \tau') d\Omega', \quad (9)$$

где $\tilde{R}(\hat{\mu}, \tau, \hat{\mu}', \tau')$ – тензор четвертого ранга, определяющий взаимовлияние микрочастиц.

Записанные выше соотношения имеют место при выполнении условий пластичности и условия активности нагружения:

$$\sqrt{\tau(\hat{\mu}, \tau)} : \hat{\tau}(\hat{\mu}, \tau) = \tau/\rho(\xi), \quad \dot{\lambda} > 0. \quad (10)$$

Частицы, для которых не выполнены оба условия одновременно, деформируются по закону упругого деформирования.

Для установления связи между микро- и макро- состояниями материала, как и в работах [1-5], используем соотношение Кренера:

$$\langle \hat{\sigma} \rangle - \hat{\sigma}(\hat{\mu}, \tau) = m \left(\hat{\varepsilon}_p(\hat{\mu}, \tau) - \langle \hat{\varepsilon}_p \rangle \right). \quad (11)$$

Подставив в (11) представления (4) с учетом выражений (5) и (9), получаем

$$\langle \hat{\sigma} \rangle = \tau \hat{\mu} + \int_0^{\infty} \Phi(\tau') d\tau' \int_{\Omega} \tilde{R}_2(\hat{\mu}, \tau, \hat{\mu}', \tau') : \hat{\varepsilon}_p(\hat{\mu}', \tau') d\Omega',$$

где $\tilde{R}_2(\hat{\mu}, \tau, \hat{\mu}', \tau') = \tilde{R}_1(\hat{\mu}, \tau, \hat{\mu}', \tau') + m(\delta(\hat{\mu}' - \hat{\mu})\delta(\tau' - \tau) - 1)\tilde{I}$; \tilde{I} – изотропный «единичный» тензор четвертого ранга с компонентами

$$I_{ijkl} = 0,5(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

Выполняя двойную свертку соотношения (4) с тензором $\hat{\mu}$ и пользуясь выражением для диссипативной составляющей, получаем

$$\langle \hat{\sigma} \rangle : \hat{\mu} = T(\hat{\mu}, \tau), \quad (12)$$

где

$$T(\hat{\mu}, \tau) = \tau \rho(\xi)^2 + \int_0^{\infty} \Phi(\tau') d\tau' \int_{\Omega} \tilde{R}_2(\hat{\mu}, \tau, \hat{\mu}', \tau') : \hat{\varepsilon}_p(\hat{\mu}', \tau') : \hat{\mu} d\Omega',$$

$T(\hat{\mu}, \tau) = \tau \rho(\xi)^2$ при всех $\hat{\varepsilon}_p(\hat{\mu}, \tau) = 0$.

Очевидно, что соотношение (12) определяет условие пластичности в направлении $\hat{\mu}$ и его правая часть представляет собой локальный предел текучести в том же направлении в данный момент процесса пластического деформирования. Тогда начальное условие пластичности имеет вид

$$\hat{\sigma} : \frac{\hat{\mu}}{\rho(\xi)} - \rho(\xi)\tau = 0, \quad (13)$$

Для перехода от (13) к уравнению поверхности текучести вида

$f(\bar{\sigma}) = 0$ необходимо найти экстремум левой части (13) по тензорам $\bar{\mu}$. Очевидно, условие пластичности выполнится сначала для частиц с наименьшим пределом текучести, поэтому для построения начальной поверхности можно рассматривать только их. Далее задачу построения поверхности текучести можно поставить как задачу на условный экстремум и решить методом множителей Лагранжа.

Остановимся подробнее на некоторых частных вариантах выбора тензора $\bar{\mu}$ и рассмотрим поверхности текучести, порождаемые этим тензором. Прежде всего, отметим, что будем рассматривать лишь изотропные поверхности текучести, т.е. не будем вводить в материале никаких предпочтительных направлений. Это означает, что в Ω должны входить тензоры типа (2) со всеми возможными ориентациями триэдра векторов \bar{j}_k . Тогда остается один произвольный параметр ξ . Возможны два варианта: либо этот параметр также принимает все возможные допустимые значения (эти значения лежат на отрезке $[0, \pi/3]$), либо параметр ξ фиксирован. В случае, когда параметр ξ принимает все допустимые значения, экстремум выражения (13) можно найти аналитически. В результате получится начальное условие пластического течения:

$$\sqrt{\langle \bar{S} \rangle : \langle \bar{S} \rangle} = \tau \rho(\xi_S), \quad (14)$$

в котором $\langle \bar{S} \rangle$ – девиатор тензора макронапряжений; ξ_S – параметр, удовлетворяющий соотношению

$$\cos 3\xi_S = \sqrt{6} \text{tr}(\langle \bar{S} \rangle \cdot \langle \bar{S} \rangle \cdot \langle \bar{S} \rangle) (\langle \bar{S} \rangle : \langle \bar{S} \rangle)^{-3/2}.$$

Из (14) следует, что при $\rho(\xi) \neq 1$ обобщенный вариант теории микродеформаций позволяет учесть влияние третьего инварианта и дает возможность описывать механическое поведение материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. В этом случае функция $\rho(\xi)$ определяет след поверхности текучести на девиаторной плоскости. Очевидно, при $\rho(\xi) \equiv 1$ получится первоначальный вариант теории микродеформаций.

Если в (2) параметр ξ является постоянным, то множество Ω образуется девиаторами с фиксированными главными значениями и произвольно ориентированными главными осями. В этом случае выражение (13) представляет собой скалярное произведение тензора напряжений на некоторый нормированный тензор и, очевидно, принимает максимальное значение, когда сомножители пропорциональны друг другу. Следовательно, каждый тензор $\bar{\mu}$ из множества Ω порождает в тензорном пространстве поверхность текучести в виде плоскости, ортогональной данному направлению, а общая поверхность строится из этих плоскостей по принципу наименьшего

расстояния до начала координат. На рис. 1, а изображены примеры такого вида поверхностей. Следует отметить, что, несмотря на свою простоту, поверхности текучести типа $\xi = const$ образуют достаточно важный, ранее не рассмотренный применительно к теории микродеформаций, класс.

Интерес представляют предельные варианты, когда тензор $\hat{\mu}$ является осесимметричным или сдвиговым. Выполняя несложные построения, убеждаемся, что в первом случае поверхность текучести будет иметь на девиа-

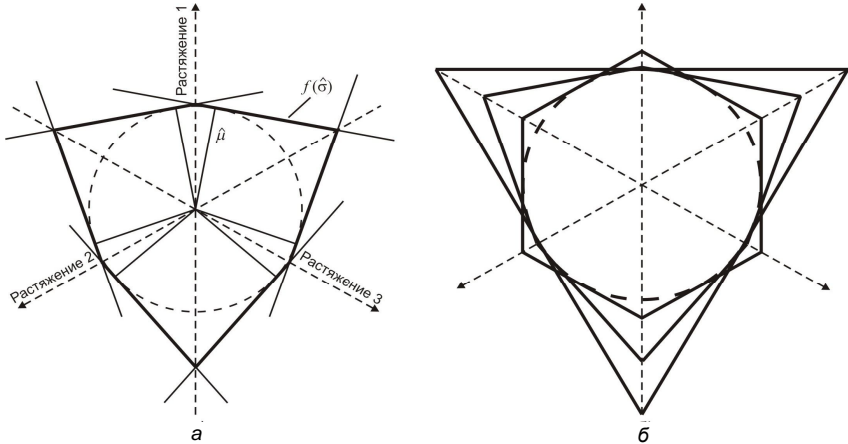


Рис. 1

торной плоскости след в виде правильного треугольника, во втором – правильного шестиугольника. Проводя аналогию с известными критериями пластичности, делаем вывод, что первая поверхность задает критерий максимальных растягивающих (сжимающих) напряжений, а вторая – критерий

максимальных касательных напряжений.

Выбирая угол ξ из отрезка $[0, \pi/3]$, можно

получать поверхности текучести с различными пределами на растяжение, сжатие и

кручение. На рис 1, б показаны оба предельных варианта и один промежуточный.

Анализируя поверхности на рис. 1, а, легко получить соотношения, связывающие пределы текучести на растяжение, сжатие и

сдвиг в зависимости от угла ξ . На рис. 2

изображена зависимость от угла ξ отношений пределов текучести при растяжении

σ_+ , сжатию σ_- и сдвиге τ_c к радиусу

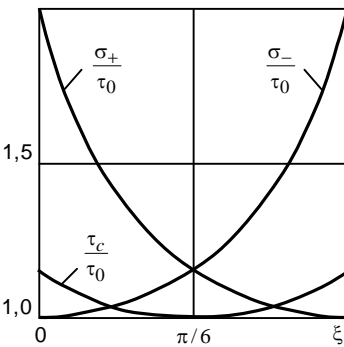


Рис. 2

сферы Мизеса τ_0 . Эта зависимость позволяет на основании экспериментальных данных получить значение угла ξ , которое однозначно определяет вид поверхности текучести, что в свою очередь, существенно упрощает проблему идентификации универсальных констант и функций теории микродеформации.

РЕЗЮМЕ. Сформульований узагальнений вариант теорії мікродеформації, дозволяє врахувати вплив третього інваріанта на необернене деформування матеріалів. За допомогою узагальнених співвідношень можна одержати різні варіанти теорії мікродеформації без перебудови всіх співвідношень, а лише змінивши кілька параметрів. Цей результат досить важливий з точки зору чисельної реалізації теорії, оскільки запропоноване узагальнення дозволяє уніфікувати алгоритми чисельного інтегрування визначальних співвідношень теорії мікродеформації різних модефікацій.

SUMMARY. A generalized variant of the theory of microstrains was formulated in the paper. It allows accounting an influence of the third invariant of stresses on the irreversible deformation on material. Also it is important that the generalized equations allow deriving other variants of the theory of microstrains by changing just a few parameters. This result is very important from practical point of view as it allows unifying rather complex computational procedure for numerical integration of the constitutive relations.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. Новожилов В. В., Кадашевич Ю. И., Черняков Ю. А. Теория пластичности, учитывающая микродеформации // Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 284, № 4. – С. 821–823. 2. Кадашевич Ю. И., Черняков Ю. А. Описание циклического нагружения с помощью теории микродеформации // Пробл. прочности. – 1987. – № 3. – С. 20–25. 3. Кадашевич Ю. И., Черняков Ю. А. Учет пластического разрыхления и поврежденности в теории пластичности, учитывающей микродеформации // ДАН СССР. – 1988. – Т. 300, № 3. – С. 571–573. 4. Кадашевич Ю. И., Черняков Ю. А. Теория пластичности, учитывающая микронапряжения в пространстве деформаций // Надежность и неупругое деформирование конструкций. – Куйбышев, 1990. – С. 14–20. 5. Черняков Ю. А., Шнейдер В. П. Учет повреждаемости в теории микродеформаций // Вестн. Днепропетров. ун-ту. Сер: Механика – 2006. – № 2. – С. 205–210.

Днепропетровский национальный университет

Поступила 29.03.2008

УДК 539.3

О. Г. ГОМАН, д-р физ.-мат. наук, Е. В. ШАШКОВА

ЗАДАЧА О СКОЛЬЖЕНИИ ШТАМПА С ТРЕНИЕМ ПО ГРАНИЦЕ ШЕРОХОВАТОГО НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В последние десятилетия широкое развитие получили методы решения контактных задач для штампов различной формы [1, 2], с учетом или без учета трения [1], температурного фактора [3] и т.п. Значительные исследования выполнены для случаев шероховатых поверхностей штампов [1, 4–7]. В данной работе методами итерации и механических квадратур дано решение задачи о скольжении штампа с трением по границе упругого шероховатого полупространства.

Постановка задачи. Рассмотрим квазистатическую пространственную контактную задачу о скольжении жесткого квадратного в плане штампа по границе упругого неизотермического полупространства. На штамп действуют внешние силы: прижимающая нормальная Q и касательная T , приложенная на высоте d от поверхности полупространства. Под действием этих сил штамп находится в состоянии предельного равновесия или равномерного движения. Будем считать, что возникающие от действия внешних сил на границе упругого полупространства $z = 0$ напряжения σ_z , τ_{xz} связаны законом трения Амонтона

$$\tau_{xz} = -\mu\sigma_z \geq 0,$$

где μ – коэффициент трения. Примем, что штамп под действием приложенных к нему сил может поворачиваться на угол α . Тогда уравнение поверхности основания штампа имеет вид

$$f(x, y) = -\gamma x, \text{ где } \gamma = tg \alpha.$$

В общем случае площадкой контакта является область

$$\Omega = \{-a \leq y \leq a; -a \leq x \leq b(y)\}.$$

В случае полного контакта функция $b(y)$ постоянна ($b(y) \equiv a$), для неполного контакта она ограничена ($-a \leq b(y) \leq a$). Таким образом, граничные условия задачи примут вид

$$\begin{aligned} w &= f(x, y) + \delta, \quad \tau_{xz} = -\mu\sigma_z, \quad (x, y) \in \Omega; \\ \sigma_z &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{xy} = 0, \quad (x, y) \notin \Omega \end{aligned} \quad (1)$$

где δ – осадка штампа в точке, соответствующей началу координат.

Смещение штампа в направлении оси z можно представить как суперпозицию перемещения точек основания, вызванного смятием микровыступов шероховатости, перемещений точек полупространства за счет действия нормального давления $p(x, y) = -\sigma_z(x, y, 0) \geq 0$, касательной силы $\tau_{xz}(x, y) = \mu p(x, y) \geq 0$ и воздействия температуры, заданной функцией $\varphi(x, y)$.

С учетом условий (1) интегральное уравнение для определения давления $p(x, y)$ под штампом при линейном законе деформирования шероховатости имеет вид [1, 7]

$$Bp(x, y) + \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_{\Omega} p(x', y') \left(\frac{1}{r} + \mu\lambda \frac{x-x'}{r^2} \right) dx' dy' - \frac{1}{4\pi} (1-2\nu) K_T \iint_{R^2} \frac{\varphi(x', y')}{r} dx' dy' = \delta - \gamma x. \quad (2)$$

Здесь $\lambda = \frac{1-2\nu}{2-2\nu}$, $r = r(x, x', y, y') = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$, δ – осадка штампа, B – параметр шероховатости, E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона, $K_T = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha_T$; α_T – коэффициент теплового расширения.

Условия равновесия нормальных и касательных сил имеют соответственно вид

$$Q = \iint_{\Omega} p(x', y') dx' dy'; \quad (3)$$

$$T = -\iint_{\Omega} \tau_{xz}(x', y') dx' dy' = -\mu \iint_{\Omega} p(x', y') dx' dy' = -\mu Q; \quad (4)$$

$$\iint_{\Omega} x' p(x', y') dx' dy' + \mu dQ = 0. \quad (5)$$

Если контакт штампа с полупространством неполный и имеет место отрыв его от границы полупространства, то необходимо определить и уравнение границы площадки контакта, т.е. функцию $b(y)$. Для этого используем граничное условие $p(b(y), y) = 0$, с учетом которого из (2) следует дополнительное уравнение

$$\frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_{\Omega} p(x', y') \left(\frac{1}{r_0} + \mu\lambda \frac{b(y) - x'}{r_0^2} \right) dx' dy' -$$

$$-\frac{1}{4\pi} (1-2\nu) K_T \iint_{R^2} \frac{\varphi(x', y')}{r_0} dx' dy' = \delta - \gamma b(y), \quad (6)$$

где $r_0 = r(b(y), x', y, y')$.

Метод решения. Для решения рассматриваемой задачи будем использовать методы итераций и механических квадратур.

Введем безразмерные величины: функцию нормального давления $p_1(x, y) = c \cdot p(x, y)$, $c = (1-\nu^2)/\pi E$; коэффициент шероховатости $B_1 = B/ca$ и осадку штампа $\delta_1 = \delta/a$. Обозначим $\beta = \sqrt{2} + 2\sqrt{2}\mu\lambda/\pi$.

Пусть $H(x, y) = \frac{\alpha_T(1+\nu)}{4\pi^2\beta a} \iint_{R^2} \frac{\varphi(s, t)}{r(x, s, y, t)} ds dt$. Основное уравнение (2) пере-

пишем в операторном виде

$$\frac{B_1}{2\pi\beta} p_1(x, y) + (Lp_1)(x, y) - H(x, y) = \frac{\delta_1}{2\pi\beta} - \frac{\gamma x}{2\pi\beta a}, \quad (7)$$

где

$$(Lp_1)(x, y) = \frac{1}{2\pi\beta a} \iint_{\Omega} p_1(x', y') \left(\frac{1}{r} + \mu\lambda \frac{x-x'}{r^2} \right) dx' dy'$$

– оператор, переводящий пространство непрерывных на квадрате $K = [-a, a] \times [-a, a]$ функций $C(K)$ с нормой $\|p_1\| = \max_{(x, y) \in K} |p_1(x, y)|$ в се-

бя. Имеет место оценка нормы этого оператора: $\|L\| \leq 1$.

Перепишем уравнение (7) в виде

$$p_1(x, y) = -\frac{2\pi\beta}{B_1} (Lp_1)(x, y) + \frac{2\pi\beta}{B_1} H(x, y) + \frac{\beta\delta_1}{B_1} - \frac{\beta\gamma x}{B_1 a}. \quad (8)$$

Тогда согласно принципу сжимающих отображений к уравнению (8) можно применять метод последовательных приближений, если

$$B_1 > 2\pi\beta. \quad (9)$$

Совершим разбиение квадрата K на $n \times n$ равных квадратов $K_{q, j}$:

$$-a = x_0 < x_1 < \dots < x_q < \dots < x_n = a;$$

$$-a = y_0 < y_1 < \dots < y_j < \dots < y_n = a;$$

$$K_{q,j} = [x_{q-1}; x_q] \times [y_{j-1}; y_j], \quad q = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Интеграл $[Lf](x, y)$ приближенно заменим его интегральной суммой (чертой сверху будем обозначать приближенные значения соответствующих величин)

$$2\beta\pi a \cdot [\bar{L}f](x, y) = \sum_{\substack{m, l: (x, y) \notin K_{m,l}; \\ (\xi_m, \eta_l) \in \Omega}} \frac{(1 + \mu\lambda(x - \xi_m)) f(\xi_m, \eta_l) \mu K_{m,l}}{\sqrt{(\xi_m - x)^2 + (\eta_l - y)^2}},$$

где $\mu K_{m,l} = \Delta = 4a^2/n^2 < a^2$, (ξ_m, η_l) – центр квадрата $K_{m,l}$, то есть $\xi_m = (x_m + x_{m-1})/2$, $\eta_l = (y_l + y_{l-1})/2$, $m = 1, 2, \dots, n$; $l = 1, 2, \dots, n$.

Определим $\theta(x, y)$ равным 1, если $(x, y) \in \Omega$, и равным 0 в противном случае. Далее положим

$$p_2(x, y) = p_1(x, y)\theta(x, y); \quad A = [a_{q,j,m,l}]_{q,j,m,l},$$

$$H_2(x, y) = H(x, y)\theta(x, y)$$

$$\text{где } a_{q,j,m,l} = \frac{\Delta}{2\beta\pi a} \left(\frac{1 + \mu\lambda(\xi_q - \xi_m)}{\sqrt{(\xi_m - \xi_q)^2 + (\eta_l - \eta_j)^2}} \right), \text{ если } m \neq q, \quad l \neq j, \text{ и}$$

$a_{q,j,m,l} = 0$ – в противном случае. Неизвестная функция будет представ-

лена матрицей $X = [p_2(\xi_q, \eta_j)]_{q,j}$. Обозначим

$$A \cdot X = [\bar{L}p_2](x, y) - \overline{H_2}(x, y),$$

$$[\bar{H}](x, y) = \frac{\alpha_T(1+\nu)}{4\pi^2\beta a} \sum_{\substack{m, l: (x, y) \notin K_{m,l}; \\ (\xi_m, \eta_l) \in \Omega}} \frac{\varphi_1(\xi_m, \eta_l)}{\sqrt{(\xi_m - x)^2 + (\eta_l - y)^2}} \mu K_{m,l},$$

$$Y = \frac{\delta_1}{2\pi\beta} [\theta(\xi_q, \eta_j)]_{q,j} - \frac{\gamma}{2\pi\beta a} [\xi_q \cdot \theta(\xi_q, \eta_j)]_{q,j},$$

то с учетом (8) получим приближенное матричное уравнение относительно неизвестной матрицы X :

$$X = -\frac{2\pi\beta}{B_1} A \cdot X + \frac{2\pi\beta}{B_1} Y, \quad (10)$$

Если коэффициент шероховатости B_1 не удовлетворяет условию (9), то введением малого параметра $\alpha = 1 - \frac{B_1}{2\pi\beta}$ получим следующее матричное уравнение: $X = \alpha X + A \cdot X + Y$.

Введем обозначения:

$$S = \iint_{\Omega} dx'dy', \quad S_1 = \iint_{\Omega} x'dx'dy', \quad S_2 = \iint_{\Omega} (x')^2 dx'dy';$$

$$z = \sum_{m, l: (\xi_m, \eta_l) \in \Omega} (\bar{L}p_2 - \bar{H})(\xi_m, \eta_l) \Delta,$$

$$z_1 = \sum_{m, l: (\xi_m, \eta_l) \in \Omega} \xi_m (\bar{L}p_2 - \bar{H})(\xi_m, \eta_l) \Delta.$$

Из (3) и (5) получим соотношения, с помощью которых определяются значения γ и δ_1 , а именно: в случае больших B_1 имеем

$$\gamma = \frac{aB_1}{S_1^2 - S \cdot S_2} \left[\left(\frac{2\pi\beta}{B_1} z_1 - \mu d Q_1 \right) S - \left(\frac{2\pi\beta}{B_1} z + Q_1 \right) S_1 \right], \quad (Q_1 = Qc), \quad (11)$$

$$\delta_1 = \frac{B_1}{S_1^2 - S \cdot S_2} \left[\left(\frac{2\pi\beta}{B_1} z_1 - \mu d Q_1 \right) S_1 - \left(\frac{2\pi\beta}{B_1} z + Q_1 \right) S_2 \right]. \quad (12)$$

Если контакт неполный, то искомую функцию $b(y)$ приближенно заменим вектором $b(\eta_j)$. Для нахождения значений этого вектора из (6) получаем уравнение

$$b(\eta_j) = \frac{1}{\gamma} \left[\delta_1 a - 2\pi\beta a (\bar{L}p_2 - \bar{H})(b(\eta_j), \eta_j) \right]. \quad (13)$$

При численном решении задачи методом последовательных приближений сначала решается система из уравнений (10), (11) и (12), а при неполном контакте – и (13). При этом все искомые величины находятся в итерационном процессе, поэтому вместе с функцией $b(y)$ пошагово изменяется и область Ω . Суммарная погрешность, включающая в себя погрешность численного интегрирования и погрешность метода итераций, при $n = 40$ в случае полного контакта она составляет 2%, а в случае неполного контакта 4%.

Анализ результатов численных исследований. Численные исследования были проведены для квадратного в плане плоского штампа, когда $v = 0,3$, $a = 1$ м, $Q_1 = 8,625 \cdot 10^{-3}$ м², $\alpha = 13 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹, $\mu = 0,2$. При этом

менялись значения параметров шероховатости и температуры основания под штампом.

На рис. 1 изображены графики распределения нормального давления в точках с ординатой $y = 0,95$ м при $B_1 = 4$, $\varphi_1 = 600$ К. Кривые 1–4 соответствуют значениям d , равным 0,5 м; 1 м; 3 м; 4 м. На рис. 2 изображены графики изменения тангенса γ угла наклона штампа (линия 1) и безразмерного углубления δ_1 (линия 2) основания под штампом в зависимости от значений d , при $B_1 = 4$ и $\varphi_1 = 600$ К. На рис. 3 изображены графики изменения функций $b(y)$ при $B_1 = 4$ и различных значениях d и φ . Кривые 1, 3, 5 соответствуют случаю $\varphi_1 = 600$ К и значениям d , равным 2,1 м; 2,5 м и 3 м. Кривые 2, 4 построены для $\varphi_1 = 0$ К, когда d принимает значения 2,5 м; 3 м. На рис. 4 для $B_1 = 3$, $d = 2$ см изображены графики функций $b(y)$ в зависимости от значений параметра φ_1 . Кривые 1-4 отвечают значениям φ_1 , равным 0, 100, 300 и 600 К соответственно. В таблице

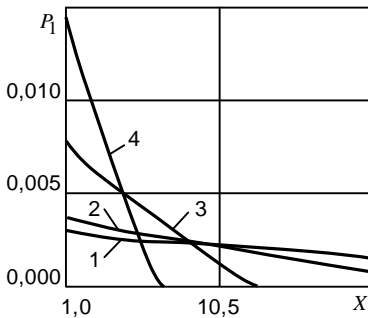


Рис. 1

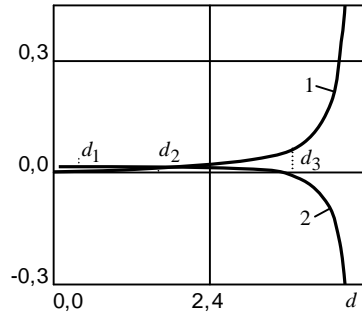


Рис. 2

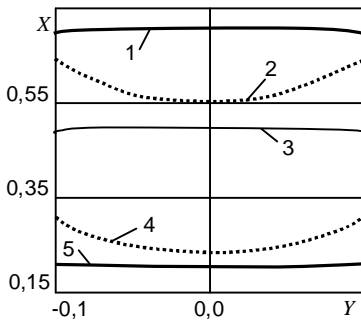


Рис. 3

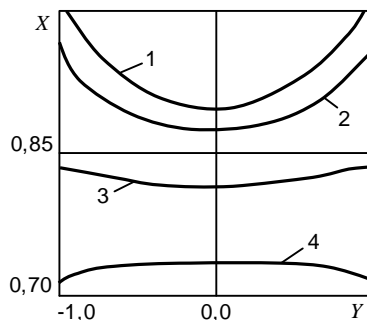


Рис. 4

B_1	$\delta_1 \cdot 10^{-2},$ $\varphi_1 = 0K$	$\delta_1 \cdot 10^{-2},$ $\varphi_1 = 600K$	$\gamma \cdot 10^{-2},$ $\varphi_1 = 0K$	$\gamma \cdot 10^{-2},$ $\varphi_1 = 600K$
1	1,29	0,52	1,28	1,21
2	1,44	0,64	1,87	1,83
3	1,56	0,76	2,51	2,44
4	1,70	0,88	3,06	3,04
5	1,82	1,00	3,66	3,65
6	1,95	1,12	4,26	4,25

приведены значения безразмерного углубления штампа δ_1 в полупространство и тангенс γ угла наклона штампа для различных значений параметра шероховатости B_1 .

Как видно из данных рис. 1–3 и таблицы, увеличение расстояния d от линии приложения касательной силы до поверхности полупространства приводит к увеличению угла γ , уменьшению осадки штампа δ_1 (рис. 2) и размеров площадки контакта (рис. 3); к увеличению давления в точках наибольшего погружения штампа в упругое полупространство, т.е. в точках с абсциссой, близкой к $x = -a$, а также к уменьшению давления в точках, близких к $x = a$; в случае отрыва штампа давления в этих точках принимают нулевые значения (см. рис. 1);

При увеличении температуры φ_1 основания под штампом осадка штампа δ_1 и размеры площадки контакта уменьшаются, однако тангенс γ угла наклона штампа практически не изменяется (рис. 2 и 4, таблица); направление выпуклости кривой $b(y)$ меняется с выпуклости вниз на выпуклость вверх (рис. 3, 4).

С увеличением коэффициента шероховатости B_1 тангенс γ угла наклона штампа и осадка штампа δ_1 увеличиваются (см. таблица); размеры площадки контакта уменьшаются, так что значения функции $b(y)$ уменьшаются для всех $y \in [-a, a]$.

Если $d = d_1 \approx 4,75 \cdot 10^{-2}$ м, то $\gamma = 0$, при $d \in [0, d_1]$ имеем $\gamma < 0$; в случае $d > d_2 \approx 1,44$ м имеет место неполный контакт, при $d \in [0, d_2]$ – полный контакт. При $d > d_3 \approx 3,7$ м начало координат поднимается над полупространством и осадка штампа отрицательна: $\delta_1 < 0$. При $\gamma = \infty$ осуществляется опрокидывание штампа.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто квазістатичну задачу про ковзання квадратного в плані штампа з урахуванням тертя та температурного фактора по пружному шорсткому півпростору при лінійному законі деформування шорсткості. До її розв'язання застосовуються метод послідовних наближень і метод механічних квадратур. Визначено

вплив коефіцієнтів шорсткості, тертя, температури і висоти прикладення дотичної сили на контактні характеристики, кут нахилу штампа і форму площадки контакту, як для повного, так і для неповного контакту.

SUMMARY. The quasistatic problem about sliding of a punch, square in the plan, with friction and temperature factor on border of elastic rough half-space by the linear law of deformation of a roughness is considered. To her decision the iteration method and a method of the mechanical squaring is applied. Influence of factors of a roughness, frictions, temperatures and heights of the appendix of a tangent of force on contact characteristics, a inclination of a stamp and a form of a platform of contact, both for full, and for incomplete contact is determined.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ: 1. *Горячева И. Г., Добычин М. Н.* Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. – 256 с. 2. *Бородачев Н. М.* О вдавливании штампа с плоским квадратным основанием в упругое полупространство // Прикладная механика. – 1999. – Т. 35, № 10. – С. 21–26. 3. *Ткаченко І. Г.* Двовимірна задача про контакт нагрітого штампа та багатшарової основи // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. – 2005. – Вип. 9, т. 1, № 10/1. – С. 139–146. 4. *Shashkova Ye., Dyachenko N., Shashkov K.* The solution of a contact problem of square punch with rough half-space at the sedate law of deformation of a roughness // Mechanika – 2005. Proceedings of the international conference. – Kaunas University of Technology, Lithuania. Kaunas: Technologija, 2005. P. 95–102. 5. *Шишканова А. А.* О решении контактной задачи с учетом трения и шероховатости для штампа в форме двусвязного квадрата в плане // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2004. – Вип. 1. – С. 95–102. 6. *Дьяченко Н. Н., Шашкова Е. В.* Решение задачи о скольжении штампа с трением по границе шероховатого полупространства с линейным законом деформирования шероховатости // Вісн. Зопоріж. ун-ту. – 2006. – № 1. – С. 25–33. 7. *Гоман О. Г., Шашкова Е. В.* Інтегральне рівняння контактної задачі для шорсткого неізотермічного півпростору // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. – 2007. – Вип. 11, т. 1, № 2/1. – С. 114–125.

Запорожский национальный университет

Поступила 15.03.2008

УДК 539.3+534.1

В. А. МОИСЕЕНКО, канд. физ.-мат. наук.

ВОЛНОВОДНЫЕ СВОЙСТВА УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ ОРТОРОМБИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Исследование волновых процессов в анизотропных волноводах в отличие от изотропных требует предварительного изучения волноводных свойств материалов. Это связано с тем, что для проведения сравнительных количественных и качественных исследований закономерностей и особенностей поведения кинематических, силовых и энергетических характеристик волновых процессов необходим определенный подбор материалов. Такой подбор может быть выполнен только на основании обобщенных критериев, определяемых волноводными свойствами материалов, так как только в этих свойствах учтены упругие свойства, плотность и направление распространения волны. Среди указанных анизотропных материалов важное место занимают материалы орторомбической структуры, так как они по упругим свойствам являются характерными представителями этого класса материалов и в тоже время сохраняют определенную симметрию упругих свойств, хотя волноводные свойства этих материалов изучены частично.

Настоящая публикация посвящена решению этой важной проблемы с использованием ранее разработанной трехмерной модели [1] и является логическим продолжением уже выполненных аналогичных исследований для материалов гексагональной [2] и кубической структуры [3].

Постановка и решение задачи. Рассмотрим отнесенное к декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) упругое неограниченное тело (называемое в дальнейшем упругим волноводным объектом) из материала орторомбической структуры. Плоскости упругой симметрии совместим с координатными плоскостями и будем считать, что упругие свойства материала определяются девятью безразмерными постоянными $C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{12}, C_{13}, C_{23}, G_{12}, G_{13}, G_{23}$, отнесенными к нормирующей величине C_0 .

В отличие от волноводов изотропных [1] или из материалов гексагональной группы [2] для волноводов из материалов орторомбической группы структура волнового поля, как и для волноводов из материалов кубической группы [3], не допускает разделения на независимые структурные составляющие [1], а определяется векторным потенциалом $\bar{\Psi}^{(PSS)}(\vec{x}, t)$ и представляется в виде произведения амплитудного и волнового сомножителей:

$$\bar{\Psi}^{(PSS)}(\vec{x}, t) = \bar{A}^{(PSS)}(\vec{n}) e^{i(\gamma \vec{n} \vec{x} - \omega t)}, \quad (1)$$

где \vec{x} – радиус-вектор произвольной точки волноводного объекта; γ – волновое число; ω – круговая частота волнового процесса; \vec{n} – единичный волновой вектор; t – время; $\vec{A}^{(PSS)}(\vec{n})$ – амплитудный вектор. Разрешающее уравнение для определения неизвестного векторного потенциала имеет вид [1]:

$$L_{PSS}^{(6)} \vec{\Psi}^{(PSS)}(\vec{x}, t) = 0. \quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_{PSS}^{(6)} = & D_{600} \partial_1^6 + D_{060} \partial_2^6 + D_{006} \partial_3^6 + D_{420} \partial_1^4 \partial_2^2 + D_{240} \partial_1^2 \partial_2^4 + \\ & + D_{402} \partial_1^4 \partial_3^2 + D_{042} \partial_2^4 \partial_3^2 + D_{222} \partial_1^2 \partial_2^2 \partial_3^2 + D_{204} \partial_1^2 \partial_3^4 + D_{024} \partial_2^2 \partial_3^4 - \\ & - \rho^3 C_0^{-3} \partial_t^6 - D_{400} \rho C_0^{-1} \partial_1^4 \partial_t^2 - D_{220} \rho C_0^{-1} \partial_1^2 \partial_2^2 \partial_t^2 - D_{040} \rho C_0^{-1} \partial_2^4 \partial_t^2 - \\ & - D_{004} \rho C_0^{-1} \partial_3^4 \partial_t^2 - D_{202} \rho C_0^{-1} \partial_1^2 \partial_3^2 \partial_t^2 + D_{022} \rho C_0^{-1} \partial_2^2 \partial_3^2 \partial_t^2 + \\ & + D_{200} \rho^2 C_0^{-2} \partial_1^2 \partial_t^4 + D_{020} \rho^2 C_0^{-2} \partial_2^2 \partial_t^4 + D_{002} \rho^2 C_0^{-2} \partial_3^2 \partial_t^4; \\ D_{600} = & C_{11} G_{12} G_{13}, \quad D_{060} = G_{12} C_{22} G_{23}, \quad D_{006} = G_{13} G_{23} C_{33}, \\ D_{420} = & G_{12}^2 G_{13} + C_{11} C_{22} G_{13} + C_{11} G_{12} G_{23} - G_{13} (C_{12} + G_{12})^2, \\ D_{240} = & G_{12}^2 G_{23} + C_{11} C_{22} G_{23} + C_{22} G_{12} G_{13} - G_{23} (C_{12} + G_{12})^2, \\ D_{402} = & G_{12} G_{13}^2 + C_{11} G_{13} G_{23} + C_{11} C_{33} G_{12} - G_{12} (C_{13} + G_{13})^2, \\ D_{042} = & G_{12} G_{23}^2 + C_{22} G_{13} G_{23} + C_{22} C_{33} G_{12} - G_{12} (C_{23} + G_{23})^2, \\ D_{204} = & G_{13}^2 G_{23} + G_{12} G_{13} C_{33} + C_{11} G_{23} C_{33} - G_{23} (C_{13} + G_{13})^2, \\ D_{024} = & G_{13} G_{23}^2 + G_{12} G_{23} C_{33} + C_{22} G_{13} C_{33} - G_{13} (C_{23} + G_{23})^2, \\ D_{222} = & C_{11} C_{22} C_{33} + 2G_{12} G_{13} G_{23} + 2(C_{12} + G_{12})(C_{13} + \\ & + G_{13})(C_{23} + G_{23}) - C_{11}(C_{23}^2 + 2C_{23} G_{23}) - \\ & - C_{22}(C_{13}^2 + 2C_{13} G_{13}) - C_{33}(C_{12}^2 + 2C_{12} G_{12}), \\ D_{400} = & G_{12} G_{13} + C_{11} G_{13} + C_{11} G_{12}, \quad D_{040} = G_{12} G_{23} + C_{22} G_{23} + C_{22} G_{12}, \\ D_{004} = & G_{13} G_{23} + G_{13} C_{33} + G_{23} C_{33}, \quad D_{200} = G_{13} + G_{12} + C_{11}, \\ D_{020} = & G_{23} + G_{12} + C_{22}, \quad D_{002} = G_{13} + G_{23} + C_{33}, \\ D_{220} = & G_{12} G_{13} + C_{22} G_{13} + G_{12} G_{23} + C_{11} G_{23} + G_{12}^2 + C_{11} C_{22} - (C_{12} + G_{12})^2, \end{aligned}$$

$$D_{202} = G_{13}G_{23} + G_{13}^2 + G_{12}C_{33} + C_{11}C_{33} + G_{13}G_{12} + C_{11}G_{23} - (C_{13} + G_{13})^2,$$

$D_{022} = G_{13}G_{23} + G_{23}^2 + G_{12}C_{33} + C_{22}C_{33} + G_{23}G_{12} + C_{22}G_{13} - (C_{23} + G_{23})^2$; $\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t$ – частные производные соответственно по пространственным координатам и времени.

Подстановка представления (1) в разрешающее уравнение (2) с учетом того, что компоненты единичного волнового вектора связаны равенством $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, приводит к бикубическому уравнению для определения фазовых скоростей $C^f = \omega/\gamma$ бездисперсионных упругих волн

$$C^6 - d_1C^4 + d_2C^2 - d_3 = 0, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= D_{200}n_1^2 + D_{020}n_2^2 + D_{002}n_3^2, \quad d_2 = D_{400}n_1^4 + D_{040}n_2^4 + \\ &+ D_{004}n_3^4 + D_{220}n_1^2n_2^2 + D_{202}n_1^2n_3^2 + D_{022}n_2^2n_3^2, \\ d_3 &= D_{600}n_1^6 + D_{060}n_2^6 + D_{006}n_3^6 + D_{420}n_1^4n_2^2 + D_{402}n_1^4n_3^2 + \\ &+ D_{240}n_1^2n_2^4 + D_{042}n_2^4n_3^2 + D_{204}n_1^2n_3^4 + D_{024}n_2^2n_3^4 + D_{222}n_1^2n_2^2n_3^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Из уравнения (3) определяются нормированные величиной $V_0 = \sqrt{C_0/\rho}$ безразмерные фазовые скорости $C_{1,2,3} = C_{1,2,3}^f/V_0$ квазипродольной моды и двух квазипоперечных мод.

Для изотропного материала коэффициенты d_1, d_2, d_3 уравнения (3) становятся независимыми от компонент волнового вектора, следовательно, и фазовые скорости не зависят от направления распространения волны. Для этого случая решение уравнения (3) совпадает с известным $C_1^f = C_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $C_2^f = C_3^f = C_s = \sqrt{\mu/\rho}$.

Отдельного рассмотрения заслуживают три предельных случая, когда одна из координат волнового вектора равна единице, а две другие равны нулю. В этих случаях направление волнового вектора совпадает с направлением одной из координатных осей и дисперсионное уравнение (3) в каждом из трех случаев ($n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0$; $n_2 = 1, n_1 = n_3 = 0$; $n_3 = 1, n_1 = n_2 = 0$) упрощается и принимает соответственно вид

$$\begin{aligned} C^6 - (C_{11} + G_{12} + G_{13})C^4 + (C_{11}G_{12} + C_{11}G_{13} + G_{12}G_{13})C^2 - \\ - C_{11}G_{12}G_{13} = (C^2 - C_{11})(C^2 - G_{12})(C^2 - G_{13}) = 0; \\ C^6 - (C_{22} + G_{12} + G_{23})C^4 + (C_{22}G_{12} + C_{11}G_{23} + G_{12}G_{23})C^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -C_{22}G_{12}G_{23} = (C^2 - C_{22})(C^2 - G_{12})(C^2 - G_{23}) = 0; \\
& C^6 - (C_{33} + G_{13} + G_{23})C^4 + (C_{33}G_{13} + C_{33}G_{23} + G_{13}G_{23})C^2 - \\
& -C_{22}G_{13}G_{23} = (C^2 - C_{33})(C^2 - G_{13})(C^2 - G_{23}) = 0. \quad (5)
\end{aligned}$$

Как видно, все три волновые составляющие в каждом из этих трех случаев становятся независимыми и определяют соответственно одну продольную волновую составляющую и две поперечных (сдвиговых) волновых составляющих. Формулы для вычисления безразмерных фазовых скоростей для этих случаев легко получаются как решения каждого из уравнений (5) и после учета нормировки дают известные формулы [4] $C_1^f = \sqrt{C_0 C_{33} / \rho}$, $C_2^f = \sqrt{C_0 G_{13} / \rho}$, $C_3^f = \sqrt{C_0 G_{23} / \rho}$, для вычисления абсолютных (размерных) значений фазовых скоростей.

В общем же случае при любых произвольных значениях компонент волнового вектора безразмерные фазовые скорости квазипродольной и двух квазипоперечных взаимосвязанных мод определяются из решения бикубического уравнения (3) с использованием алгоритма Кардано по таким формулам:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \sqrt{\frac{d_1}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{d_1^2 - 3d_2} \cos\left(\frac{\alpha + 2\pi}{3}\right)}, \\
C_2 &= \sqrt{\frac{d_1}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{d_1^2 - 3d_2} \cos\left(\frac{\alpha - 2\pi}{3}\right)}, \\
C_3 &= \sqrt{\frac{d_1}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{d_1^2 - 3d_2} \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)}, \quad (6)
\end{aligned}$$

где

$$\alpha = \arccos\left(\left(-2d_1^3 + 9d_1d_2 - 27d_3\right) / \left(2\sqrt{\left(d_1^2 - 3d_2\right)^3}\right)\right).$$

Эти формулы справедливы и для рассмотренных выше всех предельных случаев, что использовалось для их проверки.

Анализ результатов численных исследований. Численные исследования волноводных свойств анизотропных упругих материалов проводились на основании справочных данных [4], которые представлены ниже в первых двух таблицах.

В табл. 1 приведены обозначения и названия материалов, а также их плотность с точностью до множителя $10^3 \cdot \text{кг} / \text{м}^3$. В табл. 2 даны безразмерные значения упругих постоянных для этих материалов в порядке их нумерации с точностью до множителя $C_0 = 10^{10} \cdot \text{Н} / \text{м}^2$.

Таблица 1

№ материала	Обозначение	Название	ρ
1	Hg ₂ Cl ₂	Каломель	6,9700
2	KDP	Дигидрофосфат калия-1	2,3383
3	KDP	Дигидрофосфат калия-2	2,3383
4	ADP	Дигидрофосфат аммония-1	1,8030
5	ADP	Дигидрофосфат аммония-2	1,8030
6	Ba ₂ Si ₂ TiO ₃	Фресноит-1	4,4460
7	Ba ₂ Si ₂ TiO ₃	Фресноит-2	4,4460
8	Gd ₂ (MoO ₄) ₃	Молибдат гадолиния	4,5760
9	α -HIO ₂	Йодноватая кислота	4,6290
10	SbSI	Сульфид сурьмы	5,2500
11	LiGaO ₂	Галлат лития-1	4,1870
12	LiGaO ₂	Галлат лития-2	4,1870
13	Li ₂ GeO ₃	Германат лития	3,4900
14	Ba ₂ NaNb ₅ O ₁₅	Ниобат бария-натрия	5,4100
15	KHC ₆ H ₄ O ₄	Калий кислый, фталиево-	1,6364

Таблица 2

№	C_{11}	C_{22}	C_{33}	G_{12}	G_{13}	C_{23}	C_{12}	C_{13}	G_{23}
1	1,893	1,893	8,037	1,225	0,846	0,846	1,719	1,563	1,563
2	8,000	8,000	8,000	0,610	1,280	1,280	3,400	4,100	4,100
3	7,400	7,400	6,800	0,630	1,350	1,350	1,800	2,700	2,700
4	6,170	6,170	3,280	0,592	0,850	0,850	0,720	1,940	1,940
5	6,877	6,877	3,402	0,602	0,862	0,862	0,406	2,038	2,038
6	16,95	16,95	9,990	6,940	3,170	3,170	5,770	4,360	4,360
7	14,00	14,00	8,300	5,900	3,300	3,300	3,600	2,400	2,400
8	5,850	7,300	10,30	3,300	2,600	2,450	1,050	2,850	3,200
9	2,995	5,386	4,353	1,736	1,106	1,835	1,154	0,514	2,193
10	3,090	3,270	4,950	0,600	0,920	5,210	0,960	0,930	1,580
11	14,00	12,00	14,00	6,900	4,740	5,710	1,400	2,800	3,100
12	14,00	12,00	15,00	6,800	4,900	5,900	1,400	2,600	2,700
13	13,40	14,20	15,70	3,600	5,600	4,400	3,300	3,100	4,600
14	23,90	24,70	13,50	7,600	6,600	6,500	1,040	5,000	5,200
15	1,872	1,369	1,833	0,652	0,747	0,515	0,829	0,119	0,677

В табл. 3–5 с точностью до множителя $10^3 \cdot \text{м/с}$ приведены значения фазовых скоростей C_1^f (табл. 3), C_2^f (табл. 4) и C_3^f (табл. 4), вычисленные для указанных материалов по формулам (6).

При проведении расчетов были выбраны семь характерных направлений волнового вектора. Направления 1, 2 и 3 соответствуют координатным осям в порядке их нумерации. Направления 3, 4, 5 – биссектрисам координатных осей.

натных плоскостей (x_1, x_2) , (x_1, x_3) , (x_2, x_3) соответственно. Направление 7 – определяет симметричное направление, когда $n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = 1/3$.

Таблица 3

№	Направления волнового вектора						
	1	2	3	4	5	6	7
1	1,6478	1,6478	3,3957	2,0853	2,6398	2,6398	2,3960
2	5,8492	5,8492	5,8492	5,1947	5,5989	5,5989	5,3422
3	5,6256	5,6256	5,3927	4,7293	5,1723	5,1723	4,8496
4	5,8498	5,8498	4,2652	4,7319	4,9167	4,9167	4,5834
5	6,1759	6,1759	4,3438	4,8514	5,1008	5,1008	4,6807
6	6,1745	6,1745	4,7402	6,4157	5,2955	5,2955	5,7361
7	5,6115	5,6115	4,3207	5,7501	4,8392	4,8392	5,1814
8	3,5755	3,9941	4,7443	3,9508	4,2540	4,3220	4,1769
9	2,5436	3,4111	3,0666	3,1272	2,6571	3,4100	3,1311
10	2,4260	3,1502	3,1502	2,4162	2,5839	3,9233	3,3239
11	5,7825	5,3535	5,7825	5,8092	5,6020	5,7386	5,7368
12	5,7825	5,3535	5,9854	5,7887	5,6695	5,7958	5,7550
13	6,1964	6,3787	6,7071	5,9017	6,4375	6,3766	6,1921
14	6,6466	6,7569	4,9954	6,1218	5,9272	5,9706	5,8871
15	3,3823	2,8924	3,3469	3,3961	3,2539	3,1900	3,2980

Таблица 4

№	Направления волнового вектора						
	1	2	3	4	5	6	7
1	1,3257	1,3257	1,1015	1,1015	1,2188	1,2188	1,4882
2	2,3397	2,3397	2,3397	3,1363	2,8878	2,8878	2,8952
3	2,4028	2,4028	2,4028	3,4604	3,0635	3,0635	3,1476
4	2,1713	2,1713	2,1713	3,8876	2,5975	2,5975	3,4128
5	2,1865	2,1865	2,1865	4,2362	2,6959	2,6959	3,6820
6	3,9509	3,9509	2,6702	3,5459	3,3719	3,3719	3,2801
7	3,6428	3,6428	2,7244	3,4199	3,2166	3,2166	3,2049
8	2,6854	2,6854	2,3837	2,4436	2,5065	2,5390	2,4797
9	1,9366	1,9910	1,9910	1,7823	1,9640	1,7521	1,8610
10	1,3238	2,4957	3,0706	2,2557	2,3523	1,5363	1,6238
11	4,0595	4,0595	3,6929	3,7122	3,8805	3,7283	3,7562
12	4,0300	4,0300	3,7538	3,7121	3,8944	3,7379	3,8138
13	4,0057	3,5507	4,0057	3,8764	4,0368	3,8449	3,8615
14	3,7481	3,7481	3,4928	4,6356	3,6099	3,6227	4,2855
15	2,1366	1,9961	2,1366	1,9637	2,3016	2,0675	2,1736

Таблица 5

	Направления волнового вектора						
	1	2	3	4	5	6	7
1	1,1015	1,1015	1,1015	0,3526	1,1695	1,1695	0,6981
2	1,6152	1,6152	2,3397	2,3397	2,0103	2,0103	2,5159
3	1,6414	1,6414	2,4028	2,4028	2,0576	2,0576	2,6191
4	1,8120	1,8120	2,1713	2,1713	1,9997	1,9997	2,1674
5	1,8273	1,8273	2,1865	2,1865	2,0149	2,0149	2,2028
6	2,6702	2,6702	2,6702	2,6702	3,0634	3,0634	3,0262
7	2,7244	2,7244	2,7244	2,7244	3,0139	3,0139	2,9734
8	2,3837	2,3139	2,3139	2,3490	2,2874	2,4300	2,3772
9	1,5457	1,9366	1,5457	1,7388	1,8071	1,6898	1,6244
10	1,0690	1,0690	1,3238	1,4532	1,6531	1,2032	1,4289
11	3,3646	3,6929	3,3646	3,5326	3,6571	3,4285	3,5284
12	3,4209	3,7538	3,4209	3,5912	3,7671	3,5696	3,6055
13	3,2117	3,2117	3,5507	3,7851	3,3855	3,6305	3,7525
14	3,4928	3,4662	3,4662	3,4795	3,4108	3,4164	3,2783
15	1,9961	1,7740	1,7740	1,5342	1,8883	1,6598	1,5912

Приведенные в табл. 3–5 данные представляют непосредственный интерес как дополнение справочных материалов по свойствам акустических кристаллов [4]. Кроме того они являются основой для выработки критериев сравнения анизотропных материалов по волноводным свойствам, так как независимо от числа упругих характеристик число волновых характеристик не меняется.

Заметим, что для изотропных материалов все направления эквивалентны и волноводные свойства материала определяются простыми отношениями $C_2^f / C_3^f = 1$ и $C_1^f / C_{2,3}^f = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \mu} = \sqrt{2(1-\nu)(1-2\nu)}$. В рассматриваемом же случае материалов орторомбической группы для их сравнения можно выбирать соотношения

$$\left(C_2^f + C_3^f \right)_{|7} / \frac{1}{3} \left(\left(C_2^f + C_3^f \right)_{|1} + \left(C_2^f + C_3^f \right)_{|2} + \left(C_2^f + C_3^f \right)_{|3} \right),$$

$$\left(C_2^f + C_3^f \right)_{|7} / \frac{1}{3} \left(\left(C_2^f + C_3^f \right)_{|4} + \left(C_2^f + C_3^f \right)_{|5} + \left(C_2^f + C_3^f \right)_{|6} \right), \quad (7)$$

где цифрами за вертикальной чертой обозначены направления волнового вектора. Для оценки влияния анизотропии на волноводные свойства можно взять отношения квазипродольной и средней квазисдвигой фазовых скоростей по всем направлениям и определить их разброс по полученным значениям этого отношения. Проведенный сравнительный анализ материалов по этим критериям на основе приведенных в табл. 3–5 данных о фазовых скоростях упругих волн подтвердил правомерность такого подхода.

РЕЗЮМЕ. У тривимірній постановці проведено дослідження хвилеводних властивостей пружних матеріалів орторомбічної структури і порівняння отриманих аналітичних і чисельних результатів з відомими крайовими випадками. Проведено зрівняння матеріалів за хвилеводними властивостями. Приведено розрахункові формули для фазових швидкостей і чисельні їхні значення.

SUMMARY. In three-dimensional statement research of waveguide properties of elastic materials orthorhombic structures and comparison of the received analytical and numerical results with known limiting cases is carried out. Comparison of materials on waveguide properties is carried out. Formulas for phase speeds and their numerical values are presented.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. *Моїсеєнко В. О.* Хвильві потенціали для просторових хвилеводних об'єктів із анізотропних матеріалів // Вісн. київ. ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2007. – № 3. – С. 94–98. 2. *Моїсеєнко В. А.* Волноводные свойства упругих материалов гексагональной структуры // Вісн. донец. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. 2008. – Вип. 1. – С. 45–49. 3. *Мелешко В.В., Моїсеєнко В. А.* Волноводные свойства упругих материалов кубической структуры // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вип. 43. – С. 135–143. 4. *Акустические кристаллы.* Справочник / Блистанов А. А, Бондаренко В. С, Чкалова В. В. и др.; под ред. Шаскольской М.П. – М.: Наука, 1982. – 632 с.

Київський національний університет

Поступила 10.05.2008

Н. В. ДЕРГАЧЕВА

**ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ОРТОТРОПНЫХ
ОБОЛОЧЕК ПРИ ЛОКАЛЬНОМ ТЕПЛОМ НАГРЕВЕ**

В связи с необходимостью расчета элементов тонкостенных конструкций при тепловых нагревах во время сварки [1] в последние годы интенсивно развиваются методы исследования термоупругого состояния таких элементов. В работах [2–4] такие методы развиты на основе фундаментальных решений. В данной статье этими методами решена задача о локальном тепловом нагреве оболочки произвольной гауссовой кривизны.

Постановка задачи. Рассмотрим тонкую пологую оболочку толщиной $2h$ произвольной гауссовой кривизны, площадка S которой нагревается заданной распределенной температурой. Определение термоупругого состояния заданной оболочки сводится к решению системы уравнений [2, 3]

$$\sum_{j=1}^3 L_{ij} u_j = -X_i \quad (i = \overline{1,3}), \quad (1)$$

в которой $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$ – компоненты вектора перемещений; L_{ij} – известные дифференциальные операторы. При этом если распределение температуры является четной функцией, то

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\alpha_t^{(1)} \kappa^2 + v \alpha_t^{(2)}}{\kappa^2} \frac{\partial}{\partial x} t_1, & X_2 &= -\frac{\alpha_t^{(2)} + v \kappa^2 \alpha_t^{(1)}}{\kappa^2} \frac{\partial}{\partial y} t_1, \\ X_3 &= \frac{1}{h R_2 \kappa^2} \left[\alpha_t^{(1)} \kappa^2 (v + \lambda \kappa^2) + \alpha_t^{(2)} (1 + \lambda \kappa^2 v) \right] t_1, \end{aligned} \quad (2)$$

а в случае температуры, заданной нечетной функцией,

$$\begin{aligned} X_1 &= 0, & X_2 &= 0, \\ X_3 &= -\frac{1}{6 \kappa^2} \left[\frac{\alpha_t^{(1)} \kappa^2 + v \alpha_t^{(2)}}{\kappa^3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\alpha_t^{(2)} + v \kappa^2 \alpha_t^{(1)}}{\kappa} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] t_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $v = \sqrt{v_1 v_2}$, $v_1 v_2$ – коэффициенты Пуассона вдоль главных осей ортотропии; $\lambda = R_2 / R_1$, R_1 , R_2 – кривизна и радиусы кривизны оболочки вдоль главных осей ортотропии; $\alpha_t^{(1)}$, $\alpha_t^{(2)}$ – температурные коэффициенты линейного расширения; t_1 , t_2 – интегральные характеристики температуры.

Закон распределения интегральных характеристик температуры возьмем в соответствии с законом распределения в сварочной дуге или пламени, близкой к закону нормального распределения Гаусса [1]:

$$t_{1,2}(r) = \begin{cases} \mu_{0,1} e^{-k_0 r^2}, & |r| \leq r_0, \\ 0, & |r| > r_0, \end{cases} \quad (4)$$

где μ_0, μ_1 – значение интегральных характеристик температуры t_1, t_2 в центре пятна нагрева; r_0 – радиус пятна нагрева; k_0 – коэффициент сосредоточенности теплового потока дуги или пламени (коэффициент, характеризующий форму кривой нормального распределения). Рассматриваемый локальный нагрев будем называть нормально-круговым.

Известно, что между коэффициентом сосредоточенности и радиусом пятна нагрева существует обратно-пропорциональная зависимость, полученная экспериментально [1]. Для сварочной дуги $r_0 = \sqrt{3/k_0}$, для пламени газовой горелки $r_0 = \sqrt{1/k_0}$. Рассмотрим такой локальный нагрев, при котором размеры площадки нагрева малы по сравнению с областью, занимаемой оболочкой, а место ее расположения находится на значительном удалении от края оболочки.

Метод решения. Решение рассматриваемой задачи о распределенном тепловом нагреве оболочки по области $S \in S^\infty$ получим, используя формулу свертки для соответствующего фундаментального решения с функцией, описывающей тепловой нагрев (4). Формула свертки имеет вид [2]

$$F(x, y) = \iint_S E(x-x_0, y-y_0) T(x, y, x_0, y_0) dx_0 dy_0, \quad (5)$$

где F – компоненты термоупругого состояния; E – компоненты фундаментального решения, соответствующие элементам фундаментальных матриц термоупругих усилий и моментов; T – закон распределения интегральных характеристик температуры по области S ; $x, y \in S^\infty, x_0, y_0 \in S$.

Для исследования напряженно-деформированного состояния оболочки будем использовать фундаментальные решения [4, 5]. Методику решения покажем на примере усилий $T_{1,2}^{(0)}$, и моментов $M_{1,2}^{(1)}$, где 1 – направление действия усилий и моментов вдоль оси Ox , 2 – вдоль оси Oy .

Выделим две области: область А внутри пятна нагрева и область вне пятна нагрева, но в непосредственной близости к нему (рис. 1).

Воспользуемся формулой свертки (5) и формулой фундаментального решения для усилий [4].

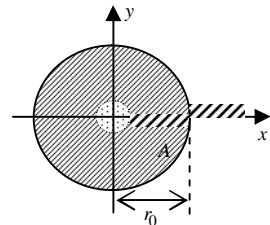


Рис. 1

Получим следующие выражения при локальном нагреве, который моделируется четной функцией распределения температуры:

$$\begin{aligned}
 T_{1,2}^{(0)}(r, \varphi) = & -\frac{Ehk^4 \mu_0 (1-\mu)}{4\pi^2 \begin{pmatrix} \kappa \\ \kappa^3 \end{pmatrix} a} \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t_{mn}(\lambda)}{m!!} \times \\
 & \times \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} G_{n,m+n}(k\rho\sqrt{i}) e^{-k_0 r_0^2} \cos(2n\varphi_1) dr_0 d\varphi_0 \mp \\
 & \mp \frac{Eh(1-\mu)(1-b^2)\sqrt{1-b^2}\mu_0}{8b\pi^2 \kappa a} \left(\frac{\alpha_t^1 \kappa^2 (1+b) - \alpha_t^2 (1-b)}{(1-b)} \right) \times \\
 & \times \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} e^{-k_0 r_0^2} \frac{\cos 2\varphi_1 \mp b}{\rho^2 (1 \mp b \cos 2\varphi_1)^2} dr_0 d\varphi_0 \mp \\
 & \mp \frac{Eh(1-\mu)(1-b^2)\sqrt{1-b^2}\mu_0}{8b\pi^2 \kappa a} \left(\frac{\alpha_t^2 (1+b) - \alpha_t^1 \kappa^2 (1-b)}{(1+b)} \right) \times \\
 & \times \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} e^{-k_0 r_0^2} \frac{\cos 2\varphi_1 \pm b}{\rho^2 (1 \pm b \cos 2\varphi_1)^2} dr_0 d\varphi_0 ; \tag{6}
 \end{aligned}$$

при распределении температуры, которое описывается нечетной функцией:

$$\begin{aligned}
 M_{1,2}^{(1)} = & \frac{D(1-\nu)\mu_1}{4\pi\sqrt{1-d^2}ha \begin{pmatrix} \kappa \\ \kappa^3 \end{pmatrix}} \left((\alpha_t^2 (2\nu\mu + (1-\nu)) - \right. \\
 & \left. - 2\alpha_t^1 \kappa^2 (1-\mu)) - \alpha_t^1 \kappa^2 (1+\nu) \right) \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} \left[\frac{e^{-k_0 r_0^2}}{\rho^2 (1-d^2 \sin^2 2\varphi)} \times \right. \\
 & \left. \times \left(\frac{2(1-d^2)\cos^2 \varphi_1}{(1-d^2 \sin^2 2\varphi_1)} - ((1-d^2)\cos^2 \varphi_1 + 1) \right) \right] d\varphi_0 dr_0 - \\
 & - \frac{D(1-\nu)\mu_1}{4\pi ha \begin{pmatrix} \kappa \\ \kappa^3 \end{pmatrix}} \left((\alpha_t^2 (2\nu\mu + (1-\nu)) - 2\alpha_t^1 \kappa^2 (1-\mu)) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha_t^1 \kappa^2 (1+\nu) \sqrt{1-d^2} \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} \left[\frac{2 \cos \varphi_1 e^{-k_0 r_0^2}}{\rho^2 (1-d^2 \sin^2 2\varphi_1)^2} \times \right. \\
& \times \left. \left(\cos \varphi_1 (1+d^2 \sin^2 2\varphi_1) - 2 \sin 2\varphi_1 \sin \varphi_1 \right) \right] d\varphi_0 dr_0 - \\
& - \frac{E\mu_1 (1+\nu)^2 (\alpha_t^1 \kappa^2 + \alpha_r^2)}{4\pi^2 a R_2^2 \begin{pmatrix} \kappa \\ \kappa^3 \end{pmatrix}} \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m'_{mn}(\lambda)}{m!} \times \\
& \times \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} G_{n,n+m}(k\rho\sqrt{i}) \cos(2n\varphi_1) e^{-k_0 r_0^2} dr_0 d\varphi_0, \tag{7}
\end{aligned}$$

где $\rho^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$; $\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{r_0 \sin \varphi_0 + r \sin \varphi}{r_0 \cos \varphi_0 + r \cos \varphi}$;

$k^4 = 12(1-\nu^2)/(R_2^2 h^2)$; $c = \sqrt{1-(\mu-\mu\nu)/2} = \sqrt{1-d^2}$, $b = \mu(1+\nu)/(2a)$; r , φ – полярные координаты; (r_0, φ_0) – координаты точки приложения сосредоточенного теплового нагрева.

$$\Delta_1 = \left[1 + 4\tilde{\mu}(1-\nu) \cos^2 2\theta \right], \quad \Delta_2 = \left[1 - 4\tilde{\mu}(1+\nu) \cos^2 2\theta \right],$$

$$\begin{aligned}
t_{mn}(\lambda) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} \left(\frac{1+\lambda x^2}{2} \frac{(1+2\gamma \cos 2\theta)}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} \right)^{l+n+1} \times \\
&\times \left(\sqrt{\frac{1-\mu}{a^2}} \right)^{l+n+1} (1-\cos 2\theta) \cos(2n\theta) \times \\
&\times \left((\alpha_y + \alpha_x \kappa^2) + (\alpha_y - \alpha_x \kappa^2) \cos 2\theta \right) \Delta_2^{-1} d\theta, \\
m'_{mn}(\lambda) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} \left(\frac{1+\lambda \kappa^2}{2} \frac{(1+2\gamma \cos 2\theta)}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}} \right)^{l+n+1} \times \\
&\times \left(\sqrt{\frac{1-\mu}{a^2}} \right)^{l+n+1} \left(1 \pm \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} \cos 2\theta \right) \left[1 + \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} \frac{(\alpha_r^1 \kappa^2 - \alpha_r^2)}{(\alpha_r^1 \kappa^2 + \alpha_r^2)} \cos 2\theta \right] \times
\end{aligned}$$

$$\times \left[1 + \frac{\mu(1-\nu)}{2a} \cos^2 2\theta \right]^{-1} \cos 2n\theta d\theta. \quad (8)$$

Для А рассматриваются значения усилий и моментов внутри нагреваемой области оболочки на расстоянии h от центра нагрева. В непосредственной близости от центра нагрева для исследования термоупругого состояния необходимо уже применять трехмерную теорию оболочек. Методика решения задачи в этом случае приведена в работе [2]. Рассматривается зависимость функций от радиуса пятна нагрева α , который принимает значения в промежутке (h, R_0) . Усилия при локальном нагреве, который моделируется четной функцией распределения температуры, будет иметь вид

$$T_{1,2}^{(0)}(\alpha) = -\frac{Ehk^4(1-\mu)\mu_0}{2\pi \begin{pmatrix} \kappa \\ \kappa^2 \end{pmatrix} a} \operatorname{Im} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t_{m0}}{m!!} \int_0^{\alpha} G_{0,m}(\zeta_0 \sqrt{i}) e^{-k_0 \zeta_0^2} d\zeta_0; \quad (9)$$

для нечетной функции распределения температур

$$M_{1,2}^{(1)}(\alpha) = -\frac{E\mu_1(1+\nu)^2(\alpha_t^1 \kappa^2 + \alpha_t^2)\mu_1}{2\pi R_2^2 \begin{pmatrix} \kappa \\ \kappa^3 \end{pmatrix}} \operatorname{Im} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m'_{m0}(\lambda)}{m!} \times \\ \times \int_0^{\alpha} G_{0,m}(\zeta_0 \sqrt{i}) e^{-k_0 \zeta_0^2} d\zeta_0. \quad (10)$$

Аналогичные выражения получаются для других компонент упругого состояния оболочки.

Анализ результатов расчетов. Численные исследования были проведены для стеклопластика АГ-4С, обладающего сильной анизотропией [2] со следующими термомеханическими параметрами: $G_{12} = 4,1 \cdot 10^3 \text{ МПа}$; $\nu_1 = 0,07$; $E_1 = 1,6 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; $E_2 = 2,1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; $\alpha_1 = 0,7 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$; $\alpha_2 = 3,8 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$; $\mu_0 = 1^\circ \text{ К}$; $\mu_1 = 1^\circ \text{ К}$. При вычислении интегралов в (7)–(10) использовался метод численного интегрирования Файлона.

На рис. 2, 3 для внутренней области А приведены значения усилий и моментов соответственно Цифрой 1 обозначены кривые для изотропного материала ($\mu = 0$, $E_1 = E_2 = 1,6 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,07$), цифрой 2 – для модели материала с «приведенной» ортотропией ($\mu = 0$, $E_1 \neq E_2$,

$$G_{12} = \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2(1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2})}, \text{ цифрой 3 – для ортотропного материала с выше ука-$$

занными термомеханическими параметрами, при которых $\mu = 0,52$, кривизна $\lambda = 0,5$, толщина $h = 0,1$, радиус области нагрева $r_0 = 1$. Видно, что ортотропия материала существенно влияет на значения термоупругих усилий и моментов в области нагрева. При локальном нагреве, моделируемом нечетной функцией распределения температуры (рис. 3), расчеты для ортотропного материала можно проводить с использованием модели «приведенной ортотропии». Как показали исследования, термоупругие усилия для внутренней области существенно зависят от кривизны оболочки.

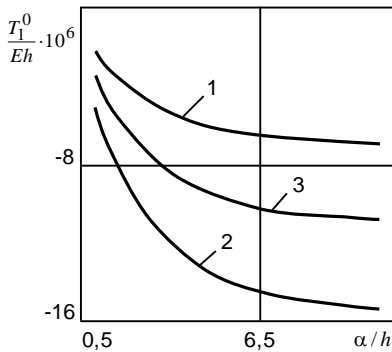


Рис. 2

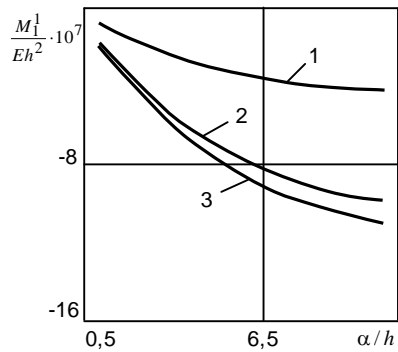


Рис. 3

На рис. 4, 5 для различных ортотропных материалов в зависимости от координаты r полярной системы координат с началом в центре пятна нагрева изображены графики распределения температурных усилий и моментов вне пятна нагрева вдоль оси Ox ($\varphi = 0$). Из данных рис. 4, 5 следует, что вне области нагрева ортотропия материала оболочки существенно влияет на значения термоупругих усилий и моментов. Применение модели «приведенной» ортотропии для расчетов термоупругих усилий и моментов вне области нагрева может привести к ошибочным результатам. Заметим, что

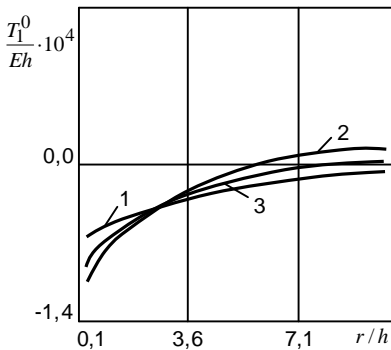


Рис. 4

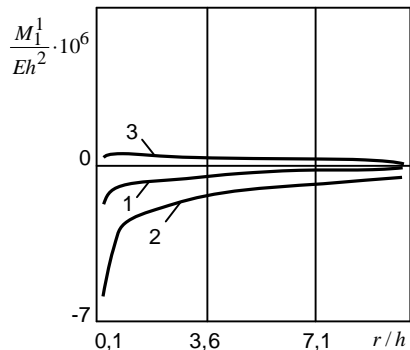


Рис. 5

характер поведения функций термоупругих усилий при распределенном нагреве в области прилежащей к зоне нагрева, совпадает с характером поведения этих же функций при сосредоточенном нагреве [3, 5].

РЕЗЮМЕ. Отримано розв'язок задачі про локальний тепловий нагрів ортотропної оболонки для термопружних сил та моментів. Локальний термопружний стан визначався за допомогою фундаментального розв'язку рівняння термопружної рівноваги пластин та оболонок та формул зворотки. Інтегрування проводилось методом Файлона.

SUMMARY. The decision of a problem on local thermal heating orthotropical shells for thermoelastic and the moments is received. Local thermoelastic the condition was defined with use of the fundamental decision of the equations thermoelastic balance of plates and environments and the formula of convolution. Integration was carried out by Filon's method.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. Рыкалин Н. Н. Расчеты тепловых процессов при сварке. – М.: Машгиз., 1951. – 296 с. 2. Шевченко В. П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек // Концентрация напряжений. – К.: А.С.К., 1998. – С. 159–196. – (Механика композитов: В 12 т. Т. 7). 3. Шевченко В. П., Дергачева Н. В. Фундаментальные решения уравнений термоупругого равновесия пологих ортотропных оболочек // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 160–166. 4. Шевченко В. П., Дергачева Н. В. Дослідження напруженого стану ортотропних оболонок при зосередженому тепловому нагріві // машинознавство. – 2008. – №. 10. – С. 3–6. 5. Аксентян Н. К., Поляков Н. А., Устинов Ю. А. Трехмерное напряженное состояние плиты в окрестности нагрузки локального типа // Теория оболочек и пластин. – М.: Наука, 1973. – С. 13–16. 6. Дергачева Н. В. Исследование фундаментального решения для усилий и моментов при сосредоточенном тепловом нагреве // Second int. Conf. for young mathematicians of differential equations and applications dedicated to Ya. B. Lopatinskii, Donetsk, 11–14 Nov., 2008. Abstracts of talks. – 2008. – С. 64–65.

Донецкий национальный университет

Поступила 20.04.2008

УДК 539.3

Методика прогнозирования напряженного состояния контактного соединения биметаллических пластин при импульсном электромагнитном воздействии / А.Р.Гачкевич, Р.С.Мусий, Н.Б.Мельник, И.И.Шимчак // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 3–15.

Предложена методика определения параметров, которые описывают термонапряженное состояние и механические свойства контактного соединения биметаллической пластины при воздействии импульсного электромагнитного поля. Для пластины из стали X18H9T–Cu приведены результаты численного анализа компонент тензора динамических напряжений и интенсивностей напряжений в плоскости контакта составных слоев при воздействии электромагнитного импульса.

Ил. 4. Библиогр.: 9 назв.

УДК 539.3

Способ определения напряженно-деформированного состояния многослойных оснований с дефектами / И.В.Зиновеев, А.К.Приварников // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 16–28.

В рамках линейной теории упругости предлагается способ решения задачи об определении плоского напряженно-деформированного состояния упругого многослойного основания со сцепленными изотропными плоскопараллельными слоями, в одном из слоев которого имеется отверстие. С использованием методов фиктивных нагрузок и функций податливости задача сводится к решению задачи о сплошном многослойном основании, в котором вдоль контура отверстия действует распределенные объемные силы с неизвестной плотностью распределения. Дана численная реализация полученного решения.

Ил. 5. Библиогр.: 5 назв.

УДК 539.3

Деформирование и кратковременная повреждаемость материала армированного бесконечными ортотропными волокнами / Л.В.Назаренко // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 29–38.

Изложена теория микроповреждаемости материалов на основе изотропной матрицы и ортотропных бесконечных эллипсоидальных волокон. Микроразрушения моделируются пустыми порами. Критерий разрушения в микрообъеме принимается в форме Губера-Мизеса, где предел прочности является случайной функцией координат со степенным распределением

или распределением Вейбулла. Напряженно-деформированное состояние и эффективные свойства материала с микроповреждениями в компонентах определяются на основе стохастических уравнений упругости для материалов на основе изотропной матрицы и ортотропных бесконечных эллипсоидальных волокон. Замыкание уравнений деформирования и повреждаемости осуществляется на основании уравнения баланса поврежденности (пористости) компонентов. Построены нелинейные зависимости совместности процессов деформирования таких материалов и повреждения матрицы от макродеформаций.

Ил. 3. Библиогр.: 11 назв.

УДК 539.3

О реконструкции дефектов в упругих телах с помощью сочетания искусственных нейронных сетей и МКЭ / А.Н.Соловьев, П.С.Курбатова, Н.И.Сапрунов // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 39–47.

Решены обратные геометрические задачи теории упругости по реконструкции внутренних и выходящих на поверхность дефектов. В качестве дефектов рассматриваются трещины и полости (сквозные отверстия). Дополнительной информацией для решения задач является набор первых собственных частот или волновое поле на части свободной поверхности при установившихся колебаниях тела. Реконструкция дефектов осуществляется с помощью разработанных и программно реализованных искусственных сетей, обучение которых происходит методом обратного распространения ошибки. При этом обучающая выборка строится с помощью конечноэлементного решения прямых задач с дефектами в комплексе ACE-LAN. Приведены результаты численных экспериментов, на основе которых обсуждаются параметры обучения сети и точность распознавания дефектов обученной сетью.

Ил. 5. Табл. 3. Библиогр.: 8 назв.

УДК 539.3

Приближенное аналитическое решение задачи о взаимодействии компланарных дискообразных трещин в упругом пространстве / Б.М.Стасюк // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 48–54.

Предложена методика определения концентрации напряжений в упругом пространстве, содержащем две компланарные круговые трещины. Методика базируется на точном сведении задач определения концентрации напряжений в окрестности дефектов типа трещин к системе граничных интегральных уравнений. Для получения аналитического решения задачи дополнительно определено эффективное поле напряжений, которое создает-

ся соседней (по отношению к рассматриваемому дефекту) трещиной. Для определения эффективного поля напряжений использовано замкнутое решение задачи о раскрытии изолированной трещины и явный вид ядер граничных интегральных уравнений, которые учитывают взаимодействие трещин. Построено замкнутое аналитическое выражение для коэффициента интенсивности напряжений нормального отрыва на контуре областей двух взаимодействующих трещин. Дано сравнение результатов с известными в литературе.

Ил.3. Библиогр.: 7 назв.

УДК 539.3

Вычислительный алгоритм решения задач о соударении упругих тел методом расщепления с использованием схем Рунге-Кутты / А.А.Бобылев, А.А.Шпорта // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 55–60.

Разработан алгоритм численного решения задач соударения упругих тел методом расщепления с использованием схем Рунге-Кутты. Методом вычислительного эксперимента определены оптимальные параметры вычислительных схем.

Библиогр.: 7 назв.

УДК 539.3+539.375

Двумерные задачи термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А.Калоеров, О.А.Сорочан // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 61–79.

Приведены методика решения задачи термоэлектромагнитоупругости для многосвязных тел из пьезоматериалов, находящихся в двумерном термоупругом состоянии, и ее приложение к решению конкретных задач. Описаны результаты численных исследований с их анализом для кругового кольца и пластинки с двумя эллиптическими (круговыми) отверстиями. Установлено, что пренебрежение электрическими и магнитными свойствами материалов при определении термонапряженного состояния тел из пьезоматериалов приводит к неверным результатам.

Ил. 2. Табл. 2. Библиогр.: 12 назв.

УДК 539.3

Определение вязкоупругого состояния многосвязных изотропных плит / С.А.Калоеров, А.И.Баева, Ю.С.Шипоша // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44.–С. 80–95.

Предложен метод решения задач о вязкоупругом изгибе многосвязных изотропных плит. Решения задач сведены к последовательности граничных

задач для комплексных потенциалов. Получены общие представления комплексных потенциалов различных приближений и граничные условия для их определения. Даны решения некоторых задач для односвязных областей с исследованием влияния времени на напряженно-деформированное состояние рассматриваемых сред.

Ил. 5. Табл. 3. Библиогр.: 7 назв.

УДК 539.3

Затухание краевого эффекта в слоистом композитном материале с тонким изотропным покрытием / В.М.Быстров, В.С.Зеленский // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 96–101.

Решена задача о затухании краевого эффекта в слоистом композитном материале с тонким изотропным покрытием, расположенным перпендикулярно к слоям. Расчетная схема включает краевую задачу теории упругости кусочно-однородных тел и количественный критерий затухания краевого эффекта для нормальных напряжений. Задача решается с применением метода сеток в рамках концепции базовых схем. Исследуется влияние покрытия на затухание краевого эффекта в слоях в случае одноосного продольного сжатия материала периодической кусочно-постоянной поверхностной нагрузкой. Период нагрузки полагается равным двум параметрам структуры материала. Для такой нагрузки изменение длины затухания краевого эффекта по сравнению с равномерным сжатием слоев наполнителя является наиболее существенным при изменении периода нагрузки. Для анализа затухания краевого эффекта используется функция затухания напряжений. Показано, что наличие покрытия приводит к уменьшению длины затухания краевого эффекта в слоях композитного материала. При этом такое изменение наиболее существенно для слоя связующего.

Ил. 3. Библогр.: 8 назв.

УДК 539.3

Теоретико-экспериментальный подход к определению механических свойств слоистых композитных пластин / Б.М.Дивеев, И.Б.Бутитер, Н.Н.Щербина // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 102–107.

На основании измерений собственных частот выполнена идентификация упругих свойств слоистых композитных пластин. Модули упругости ламинатов определялись на основании многоуровневого моделирования и двухшаговой процедуры идентификации. На первом шаге идентификации с использованием генетического алгоритма определяются модули Юнга и сдвига, а на втором шаге в результате минимизации функции ошибки уточняются значения трансверсальных модулей.

Ил. 6. Библиогр.: 11 назв.

УДК 539.3

Частоты колебаний гладких цилиндрических оболочек с осесимметричными прогибами / Г. Д. Гавриленко, В. И. Мацнер // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 108–113.

Предложен аналитический метод определения частот свободных колебаний гладких цилиндрических оболочек с локальными осесимметричными прогибами. Используются уравнения в перемещениях. Проведено сравнение полученных результатов с известными теоретическими решениями и экспериментальными данными для гладких цилиндрических оболочек.

Ил. 4. Библиогр.: 6 назв.

УДК 539.3

Влияние геометрической и физической нелинейностей на вынужденные колебания шарнирно опертой балки, содержащей пьезоактивные слои / Я. А. Жук, И. А. Гузь // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 114–119.

Для шарнирно опертой трехслойной балки с внешними пьезоактивными слоями изучены особенности механического и электрического возбуждения колебаний. Исследована возможность гашения механически возбуждаемых колебаний при помощи противофазного электрического возбуждения. Изучено взаимодействие физической и геометрической нелинейностей, их влияние на электромеханические характеристики нестационарных колебаний.

Ил. 3. Библиогр.: 5 назв.

УДК 539.3+536.424

Методика определения обусловленных термомеханическим нагружением остаточных напряжений в стержне из материала с памятью формы / В. И. Асташкин, Б. Л. Боженко, Ю. И. Няшин, А. Е. Онышко // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 120–125.

С использованием ранее построенного авторами варианта модели для количественного описания обусловленных тепловыми и механическими нагружениями физико-механических процессов в телах из материала с эффектом памяти формы, анализируется напряженно-деформированное состояние и изменение фазового состава стержня кругового сечения из сплава с памятью формы при кручении и нагреве в интервале температур фазового превращения. Считается, что степень полноты превращения зависит от инвариантов тензоров напряжений и деформаций. Это позволяет учесть влияние как изменения объема, так и формоизменения на фазовый состав системы. После снятия силового нагружения фазовый состав не возвращается в исходное состояние, вследствие чего в стержне существуют остаточные напряжения. Последующий подогрев создает условия для протекания

ния обратного превращения, вызывающего существенное понижение уровня этих напряжений.

Ил. 2. Библиогр.: 8 назв.

УДК 581+519.61+539.3+624.04

Напряженное состояние армированной упруговязкопластической пластины при сложном нагружении / В.М. Левин, В.С. Гудрамович, В.А. Митраков, И.Г. Гевлич, Ю.В. Грицук // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 126–132.

Дано решение задачи о напряженном состоянии армированной упруговязкопластической пластины, учитывающее наличие прямоугольного проема. Дискретизация области выполнена методом Канторовича-Власова в сочетании с методом Галеркина. Линеаризация упруго-пластической задачи осуществлялась методом продолжения по параметру нагрузки с итерационным уточнением, модифицированным методом Ньютона, а решение задачи длительного деформирования – методом продолжения по параметру времени с использованием специального представления ядра релаксации матрицы и метода вырожденных ядер.

Ил. 4. Библиогр.: 9 назв.

УДК 539.3

Применение сплайн-аппроксимации и метода дискретной ортогонализации для решения задач о свободных колебаниях полых пьезокерамических цилиндров / А.Я. Григоренко, Т.Л. Ефимова, И.А. Лоза // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 133–137.

Решена осесимметричная задача о собственных продольных колебаниях полых цилиндров с жестко заземленными торцами. Боковые поверхности свободны от внешних усилий и покрыты тонкими электродами. Методом разделения переменных и сплайн-коллокаций по длине цилиндра задача сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решаемой методом дискретной ортогонализации. Приведены результаты численных расчетов для цилиндра из пьезокерамики ЦТСтБС-2.

Ил. 2. Библиогр.: 6 назв.

УДК 539.3

Плоская задача термоэлектромагнитоупругости для неограниченного пьезоэлектрического/пьезомагнитного тела с трещиной / Т.В. Ходанен, В.В. Лобода // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 138–143.

Рассмотрена плоская задача для трещины в пьезоэлектриче-

ском/пьезомагнитном пространстве под действием механической нагрузки, электрического, магнитного и теплового потоков на бесконечности. Путем сведения поставленной задачи к векторной и скалярной задачам линейного сопряжения и построения их точного решения получены аналитические выражения для всех электромагнитных и механических факторов. Найдены также их коэффициенты интенсивности и скорость освобождения энергии.

Ил. 2. Библиогр.: 9 назв.

УДК 539.3

О давлении нагретого жесткого кругового штампа на пьезокерамическое полупространство с отслоением материала под штампом / В.С.Кириллюк // Теорет. и прикладная механика. – 2008. Вып. 44. – С. 144–151.

Решена задача о давлении нагретого плоского жесткого кругового штампа без трения на пьезоэлектрическое полупространство с возможностью отделения материала под штампом. В виде простых неравенств, в которые входят значения силы вдавливания, температурный нагрев и термоэлектроупругие свойства материала, получены условия возникновения отслоения материала под нагретым штампом. Показано, что с увеличением нагрева область контакта уменьшается. Как частный случай из найденных выражений следуют результаты для чисто упругого трансверсально-изотропного материала. Проведены числовые исследования контактного давления под нагретым штампом при отслоении и без него.

Рис. 1. Библиогр.: 10 назв.

УДК 539.3

Априорная оценка погрешности вычисления напряжений при замене многослойного основания слоистым полупространством регулярной структуры / Е.В.Стеганцев, И.Г.Величко // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 152–157.

Предложен способ априорной оценки погрешности определения напряжений в первом слое при замене многослойного основания слоистым полупространством регулярной структуры. Рассмотрен случай, когда оба объекта находятся под действием сосредоточенной нормальной силы. Получены оценки для двадцати- и сорокаслойных оснований.

Ил. 2. Библиогр.: 6 назв.

УДК 539.3

Обобщенный вариант теории микродеформаций / А. С. Полищук, Ю. А. Черняков // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 158–163.

Сформулирован обобщенный вариант теории микродеформаций, позволяющий учитывать влияние третьего инварианта на необратимое деформирование материалов. На основании обобщенных соотношений предложены различные варианты теории микродеформаций без перестройки всех соотношений. Предложенное обобщение позволяет унифицировать алгоритмы численного интегрирования определяющих соотношений теории микродеформаций различных модификаций.

Ил. 2. Библиогр.: 5 назв.

УДК 539.3

Задача о скольжении штампа с трением по границе шероховатого не-изотермического полупространства / О. Г. Гоман, Е. В. Шашкова // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 164–171.

Решена квазистатическая пространственная контактная задача о скольжении по границе шероховатого упругого полупространства жесткого квадратного в плане штампа с плоским основанием при наличии температурного фактора методом последовательных приближений и механических квадратур. В результате скольжения штамп получает определённый наклон и может иметь с полупространством как полный номинальный контакт, так и неполный. Исследовано влияние коэффициентов шероховатости, трения, температуры и высоты приложения касательной силы на контактные характеристики, угол наклона штампа и форму площадки контакта.

Ил. 4. Табл. 1. Библиогр.: 7 назв.

УДК 539.3+534.1

Волноводные свойства упругих материалов орторомбической структуры / В. А. Моисеенко // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 172–179.

В трехмерной постановке проведено исследование волноводных свойств упругих материалов орторомбической структуры и сравнение полученных аналитических и численных результатов с предельными случаями. Дано сравнение материалов по волноводным свойствам. Приведены расчетные формулы для фазовых скоростей и численные их значения.

Табл. 5. Библиогр.: 4 назв.

УДК 539.3

Исследование термоупругого состояния ортотропных оболочек при локальном тепловом нагреве / Н. В. Дергачева // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 180–186.

Для решения задачи о локальном тепловом нагреве ортотропной оболочки использовано фундаментальное решение уравнений термоупругого равновесия пластин и оболочек и формула свертки. Исследовано поведение усилий и моментов в области нагрева и за ее пределами в зависимости от изменения параметров ортотропии материала. Показано, что геометрия оболочки значительно влияет на поведение усилий и моментов.

Ил. 5. Библиогр.: 5 назв.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Гачкевич А. Р., Мусий Р. С., Мельник Н. Б., Шимчак И. И.</i> Методика прогнозирования напряженного состояния контактного соединения биметаллических пластин при импульсном электромагнитном воздействии	3
<i>Зиновеев И. В., Приварников А. К.</i> Способ определения напряженно-деформированного состояния многослойных оснований с дефектами	16
<i>Назаренко Л.В.</i> Деформирование и кратковременная повреждаемость материала армированного бесконечными ортотропными волокнами	29
<i>Соловьев А. Н., Курбатова П. С., Сапрунов Н. И.</i> О реконструкции дефектов в упругих телах с помощью сочетания искусственных нейронных сетей и МКЭ	39
<i>Стасюк Б. М.</i> Приближенное аналитическое решение задачи о взаимодействии компланарных дискообразных трещин в упругом пространстве	48
<i>Бобылев А. А., Шпорта А. А.</i> Вычислительный алгоритм решения задач о соударении упругих тел методом расщепления с использованием схем Рунге-Кутты	55
<i>Калоеров С.А., Сорочан О.А.</i> Двумерные задачи термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред	61
<i>Калоеров С. А., Баева А. И., Шипоша Ю. С.</i> Определение вязкоупругого состояния многосвязных изотропных плит	80
<i>Быстров В. М., Зеленский В. С.</i> Затухание краевого эффекта в слоистом композитном материале с тонким изотропным покрытием	96
<i>Дивеев Б. М., Бутитер И. Б., Щербина Н. Н.</i> Теоретико-экспериментальный подход к определению механических свойств слоистых композитных пластин	102
<i>Гавриленко Г. Д., Мацнер В. И.</i> Частоты колебаний гладких цилиндрических оболочек с осесимметричными прогибами	108
<i>Жук Я. А., Гузь И. А.</i> Влияние геометрической и физической нелинейностей на вынужденные колебания шарнирно опертой балки, содержащей пьезоактивные слои	114
<i>Асташкин В. И., Боженко Б. Л., Няшин Ю. И., Онышко А. Е.</i> Методика определения обусловленных термомеханическим нагружением остаточных напряжений в стержне из материала с памятью формы	120
<i>Левин В. М., Гудрамович В. С., Митраков В. А., Гевлич И. Г., Грицук Ю. В.</i> Напряженное состояние армированной упруговязкопластической пластины при сложном нагружении	126

<i>Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л., Лоза И. А.</i> Применение сплайн-аппроксимации и метода дискретной ортогонализации для решения задач о свободных колебаниях полых пьезокерамических цилиндров .	133
<i>Ходанен Т. В., Лобода В. В.</i> Плоская задача термоэлектромагн-тупругости для неограниченного пьезоэлектрического / пьезомагнит-ного тела с трещиной	138
<i>Кирилюк В. С.</i> О давлении нагретого жесткого кругового штампа на пьезокерамическое полупространство с отслоением материала под штампом	144
<i>Стеганцев Е.В., Величко И.Г.</i> Априорная оценка погрешности вычисления напряжений при замене многослойного основания слоистым полупространством регулярной структуры	152
<i>Полищук А. С., Черняков Ю. А.</i> Обобщенный вариант теории мик-родеформаций	158
<i>Гоман О. Г., Шашкова Е. В.</i> Задача о скольжении штампа с трени-ем по границе шероховатого неизотермического полупространства	164
<i>Моисеенко В. А.</i> Волноводные свойства упругих материалов ор-торомбической структуры	172
<i>Дергачова Н. В.</i> Исследование термоупругого состояния орто-тропных оболочек при локальном тепловом нагреве	180
<i>Рефераты</i>	187

ЗМІСТ

<i>Гачкевич О. Р., Мусій Р. С., Мельник Н. Б., Шимчак Й. І.</i> Методика прогнозування напруженого стану контактного з'єднання біметалевих пластин за імпульсної електромагнітної дії	3
<i>Зіновєєв І. В., Приварников А. К.</i> Спосіб визначення напружено-деформованого стану багатошарових основ з дефектами	16
<i>Назаренко Л. В.</i> Деформування і миттєва мікропошкоджуваність матеріалу, армованого нескінченними ортотропними волокнами	29
<i>Соловійов А. Н., Курбатова П. С., Сапрунов Н. І.</i> Про реконструкцію дефектів у пружних тілах за допомогою поєднання штучних нейронних мереж та МСЕ	39
<i>Стасюк Б. М.</i> Наближений аналітичний розв'язок задачі про взаємодію компланарних дископодібних тріщин в пружному тілі	48
<i>Бобильов О. О., Шпорта А. О.</i> Обчислювальний алгоритм розв'язання задач співудару пружних тіл методом розщеплення з використанням схем Рунге-Кутта	55
<i>Калоєров С. О., Сорочан О. А.</i> Двовимірні задачі термоелектромагнітопружності для багатозв'язних середовищ	61
<i>Калоєров С. О., Баєєва А. І., Шипоша Ю. С.</i> Визначення в'язкопружного стану багатозв'язних ізотропних плит	80
<i>Бистров В. М., Зеленський В. С.</i> Згасання крайового ефекту у шаруватому композитному матеріалі з тонким ізотропним покриттям	96
<i>Дівеєв Б. М., Бутитер І. Б., Щербина Н. М.</i> Теоретико-експериментальний підхід до визначення механічних властивостей шаруватих композитних пластин	102
<i>Гавриленко Г. Д., Мацнер В. Й.</i> Частоти коливальних гладких циліндричних оболонок з осесиметричними прогинами	108
<i>Жук Я. О., Гузь І. О.</i> Вплив геометричної і фізичної нелінійностей на вимушені коливання шарнірно опертої балки, яка містить п'єзоактивні шари	114
<i>Асташкін В. І., Боженко Б. Л., Няшин Ю. І., Онишко О. Є.</i> Методика визначення обумовлених термомеханічним навантаженням залишкових напружень в стрижні з матеріалу з пам'яттю форми	120
<i>Левін В. М., Гудрамович В. С., Мітраков В. А., Геєліч І. Г., Грицук Ю. В.</i> Напружений стан армованої пружнов'язкопластичної пластини при складному навантаженні	126
<i>Григоренко О. Я., Єфимова Т. Л., Лоза І. А.</i> Застосування сплайн-апрокси-мації та методу дискретної ортогоналізації для розв'язання задачі про вільні коливання порожнистих п'єзокера-мічних циліндрів	133
<i>Ходанен Т. В., Лобода В. В.</i> Плоска задача термоелектромагнітопружності для необмеженого п'єзоелектричного / п'єзомагнітного тіла	

з тріщиною	138
<i>Кирилюк В. С.</i> Про тиск нагрітого жорсткого кругового штампю на п'єзокерамічний півпростір з відшаруванням матеріалу під штампом	144
<i>Стеганцев Є. В., Величко І. Г.</i> Априорна оцінка похибки обчислення напружень при заміні багат шарової основи шаруватим півпростором регулярної структури	152
<i>Поліщук О. С., Черняков Ю. А.</i> Узагальнений варіант теорії мікродеформацій	158
<i>Гоман О. Г., Шашкова Є. В.</i> Задача про ковзання штампю з тертям по межі шорсткого неізотермічного півпростору	164
<i>Моїсеєнко В. О.</i> Хвилеводні властивості пружних матеріалів ортотропної структури	172
<i>Дергачова Н. В.</i> Дослідження термопружного стану ортотропних оболонок при локальному тепловому нагріванні	180
<i>Реферати</i>	187

CONTENT

<i>Hachkevych O., Musiy R., Melnyk N., Szymczak J.</i> The methodology of forecasting thermoelastic state of contact joint of bimetallic plate under the effect of impulse electromagnetic action.	3
<i>Zinoveyev I. V., Privarnikov A. K.</i> The technique of the determination of the stressed-deformed state of the multilayer foundation with the defects. . .	16
<i>Nazarenko L.V.</i> Deformation and short-term microdamaging of the material strengthened by infinite orthotropic fibers.	29
<i>Soloviev A. N., Kurbatova P. S., Saprunov N. I.</i> Faults Reconstruction in Elastic Solids using combination of artificial neural network and FEM. . .	39
<i>Stasyuk B. M.</i> An approximate analytical solution of the problem on coplanar penny-shaped cracks interacting in elastic solid.	48
<i>Bobylov A. A., Shporta A. A.</i> The computational algorithm for solving elastic impact problems with the splitting method based on Runge-Kutt's schemes.	55
<i>Kaloerov S. A., Sorochan O. A.</i> Tow-dimensional thermoelectromagnetoelastic problems for multi-connected solid	61
<i>Kaloerov S. A., Baeva A. I., Shiposha J. S.</i> The determination viscoelastic state of multiconnected isotropic plates	80
<i>Bystrov V. M., Zelensky V. S.</i> The decay of end effect in laminated composite material with thin isotropic covering.	96
<i>Diveyev B. M., Butyter I. B., Shcherbyna N. N.</i> Theoretical-experimental approach to determination of mechanical properties of laminated composite plates.	102
<i>Gavrylenko G. D., Matsner V. I.</i> Frequencies of vibration of smooth cylindrical shell having axisymmetrical deflections.	108
<i>Zhuk Ya. A., Guz I. A.</i> Influence of geometrical and physical nonlinearities on the forced vibration of hinged beam containing piezoelectric layers.	114
<i>Astashkin V. I., Bozhenko B. L., Niashin Y. I., Onyshko O. Y.</i> Determination of residual stresses caused by thermomechanical loading in the rod of shape memory alloy.	120
<i>Levin V. M., Hudramovych V. S., Mitrakov V. A., Gevlich I. G., Gritsuk Yu. V.</i> Stress state of reinforced elastoviscoplastic plate under complex load.	126
<i>Grigorenko A. Ya., Efimova T. L., Loza I. A.</i> Application the method of splines-approximation and method of discrete orthogonalisation to solution a problem free oscillations of hollow piezoceramic cylinders.	133
<i>Khodanen T. V., Loboda V. V.</i> Plane thermoelectromagnetoelastic problem for an infinite piezoelectric/piezomagnetic body with a crack. . . .	138

<i>Kirilyuk V. S.</i> On a pressure of a heated hard circular punch on a transversally-isotropic piezoelectric half-space with a separation material under the punch.	144
<i>Stegantsev E. V., Velichko I. G.</i> A priori estimation of the error of the stress determination in the case of the replacement of the multilayer foundation by the layered semispace of the regular structure.	152
<i>Polischuk A. S., Chernyakov Yu. A.</i> A generalized variant of the theory of microstrains.	158
<i>Goman O. G., Shashkova Ye. V.</i> The problem about sliding of a punch with friction on border rough unisothermal half-space.	164
<i>Moiseenko V. A.</i> Waveguide properties of elastic materials of orthorhombic structure.	172
<i>Dergachova N. V.</i> The thermoelastic state researching of orthotropic shells on local thermal heating.	180
<i>Abstracts.</i>	187