

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И ПРИКЛАДНАЯ
МЕХАНИКА**

Научно-технический
сборник

Основан в 1970 г.

В Ы П У С К 45

Донецк
2009

УДК 539.3:539.376:534.1

В сборнике представлены новые результаты теоретических и экспериментальных исследований в области механики деформируемого твердого тела. Приведены решения пространственных и плоских задач теории упругости, термо-, электро- и вязкоупругости, концентрации напряжений в упругих телах, пластинах и оболочках с отверстиями и трещинами, динамических задач, задач о колебаниях упругих тел. Рассмотрено напряженное, термонапряженное, электро- и вязкоупругое состояния в изотропных, анизотропных, композиционных телах.

Для научных работников, преподавателей вузов и специалистов.

У збірнику подано нові результати теоретичних та експериментальних досліджень з механіки деформівного твердого тіла. Наведено розв'язання просторових і плоских задач теорії пружності, термо-, електро- та в'язкопружності, концентрації напружень у пружних тілах, пластинах та оболонках з отворами і тріщинами, динамічних задач, задач про коливання пружних тіл. Розглянуто напружений, термонапружений, електро- і в'язкопружний стани в ізотропних, анізотропних, композиційних тілах.

Для науковців, викладачів вузів і фахівців.

In the volume the new results of theoretical and experimental investigations in the field of the deformable solid mechanics are published. The solutions for space and plane problems of elasticity, thermo-, electro- and viscoelasticity, stress concentration in elastic solids, plates and shells with holes and cracks, dynamic problems, problems of elastic solids oscillations are given. Strained, thermo-, electro- and viscoelastic states of isotropic, anisotropic, composite solids are considered.

For researchers, teachers of higher education establishments and specialists.

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

В. П. Шевченко

ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С. А. Калоеров

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

*А. С. Гольцев, А. Н. Гузь, Г. С. Кит, Ф. В. Недопекин,
В. И. Сторожев, В. А. Шалдырван*

МЕЖДУНАРОДНЫЙ РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

*В. М. Александров (Россия), Д. И. Бардзокас (Греция), А. О. Ватулян (Россия),
И. А. Гузь (Шотландия), В. В. Зоуля (Мексика)*

Адрес редакции: Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24,
Донецк-55, 83055

Тел. (062) 302-92-71

E-mail: theoretam@matfak.dongu.donetsk.ua

УДК 539.3

М.О. ШУЛЬГА, д-р физ.-мат. наук

О ГАМИЛЬТОНОВОМ ФОРМАЛИЗМЕ В ТЕОРИИ ТИПА ТИМОШЕНКО ИЗГИБА ПЛАСТИН

В монографии [1] впервые смешанная система уравнений колебаний плоской задачи теории упругости была представлена в виде операторной гамильтоновой системы по пространственной координате. Во многих последующих публикациях [2, 3] гамильтонов формализм в подобной форме распространен на уравнения и задачи теории упругости, электроупругости, магнитоупругости. В работах [4, 5] канонические уравнения Гамильтона по пространственной координате были получены в задачах гармонических изгибных колебаний пластин с периодическими по одной координате параметрами. В настоящей статье гамильтонов формализм применен к общему случаю уравнений типа Тимошенко изгиба пластин. Также показано, как получить из редуцированного функционала типа Хеллингера-Рейсснера канонические операторные уравнения по одной пространственной координате в теории типа Тимошенко изгиба пластин.

В теории типа Тимошенко изгиба пластин изгибающие M_{11} , M_{22} и крутящий $M_{12} = M_{21}$ моменты, перерезывающие силы Q_1 , Q_2 , прогиб w и функции сдвига ψ_1 , ψ_2 связаны уравнениями изгибных колебаний

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} - Q_1 &= -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_2 &= -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

и материальными соотношениями

$$\begin{aligned} M_{11} &= -D \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right), \quad M_{22} = -D \left(\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right), \\ M_{12} &= -\frac{1-\nu}{2} D \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right), \\ Q_1 &= B_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - \psi_1 \right), \quad Q_2 = B_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2 \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ρ , E , ν , $G_{13} = G_{23} \neq 2(1-\nu)E$ – плотность, модуль Юнга, коэффи-

циент Пуассона, модули сдвига материала, $D = I_1 E / (1 - \nu^2)$ – изгибная жесткость, $B_3 = k_G G_{13} h = k_G G_{23} h$ – сдвиговая жесткость, k_G – коэффициент сдвига, h – толщина пластины, $I_1 = h^3 / 12$ – момент инерции поперечного сечения на единицу длины.

Следуя заложенной в монографии [1] идее и статье [4], систему уравнений (1), (2) запишем в следующем смешанном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} &= -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} + Q_1, & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} &= -\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{2}{(1-\nu)D} M_{12}, \\ \frac{\partial w}{\partial x_1} &= \psi_1 + \frac{Q_1}{B_3}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} &= -\frac{M_{11}}{D} - \nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} &= -\nu \frac{\partial M_{11}}{\partial x_2} + (1-\nu^2) D \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_2^2} - \rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - B_3 \psi_2 + B_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} &= B_3 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} - B_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

По двум остальным уравнениям системы (1), (2) определяются не вошедшие в систему (3) изгибающий момент M_{22} и перерезывающая сила Q_2 :

$$M_{22} = \nu M_{11} - (1-\nu^2) D \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, \quad Q_2 = B_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2 \right). \quad (4)$$

Система (3) записана в виде операторной нормальной формы Коши по пространственной координате x_1 , когда за разрешающие функции выбраны M_{11} , ψ_2 , w , ψ_1 , M_{12} , Q_1 , которые при совершенном механическом контакте остаются непрерывными на прямых $x_1 = const$.

Коэффициенты системы (3), а значит и уравнений (1), (2), могут быть произвольными функциями координаты x_1 с разрывами первого рода.

Аналогичным образом можно получить операторную нормальную систему в форме Коши по пространственной координате x_2 , выбрав за разрешающие функции M_{22} , ψ_1 , w , ψ_2 , M_{21} , Q_2 .

Покажем, что система (3) является операторной гамильтоновой системой [6] по пространственной координате x_1 , т.е.

$$\frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x_1} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}_i}, \quad \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial x_1} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{q}_i} \quad (i = \overline{1, 3}). \quad (5)$$

С этой целью операторную функцию Гамильтона возьмем в виде

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{q}}^* \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{p}}^* \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{p}}, \quad (6)$$

где симметричные операторные матрицы $\hat{\mathbf{P}}$ и $\hat{\mathbf{Q}}$ имеют следующие ненулевые элементы

$$\begin{aligned} -\hat{P}_{11} &= -\frac{1}{D}, \quad -\hat{P}_{12} = -\hat{P}_{21} = -v \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ -\hat{P}_{22} &= (1-v^2)D \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - B_3 - \rho I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad -\hat{P}_{23} = -\hat{P}_{32} = B_3 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ -\hat{P}_{33} &= -B_3 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \hat{Q}_{11} = -\rho I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \hat{Q}_{12} = \hat{Q}_{21} = -\frac{\partial}{\partial x_2}, \\ \hat{Q}_{13} &= \hat{Q}_{31} = 1, \quad \hat{Q}_{22} = -\frac{2}{(1-v)D}, \quad \hat{Q}_{33} = \frac{1}{B_3}. \end{aligned} \quad (7)$$

Канонические переменные определим так:

$$[\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3] = [M_{11}, \psi_2, w], \quad [\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3] = [\psi_1, M_{12}, Q_1]. \quad (8)$$

Очевидно, что система (5) с учетом (6) и (7) совпадает с системой (3), т.е. система (3) является операторной гамильтоновой системой.

Система уравнений (1), (2) и соответствующие граничные условия можно получить из условий стационарности по динамическим M_{11} , M_{22} , M_{12} , Q_1 , Q_2 и кинематическим ψ_1 , ψ_2 , w переменным функционалам типа Хеллингера-Рейсснера в теории типа Тимошенко изгиба пластин:

$$\begin{aligned} \Phi_{HR} = \iint \left\{ -M_{11} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - M_{22} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} - M_{12} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right) + \right. \\ \left. + Q_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - \psi_1 \right) + Q_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2 \right) - qw - m_1 \psi_1 - m_2 \psi_2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{(1-v^2)D} \left[\frac{1}{2} M_{11}^2 + \frac{1}{2} M_{22}^2 - v M_{11} M_{22} + \right. \right. \\ \left. \left. + (1+v) M_{12}^2 - \frac{1}{2B_3} (Q_1^2 + Q_2^2) \right] \right\} dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь не учтены инерционные слагаемые, т.е. рассматривается статический изгиб под действием нагрузок m_1 , m_2 , q . Силы инерции можно ввести в окончательные уравнения по принципу Даламбера.

Из функционала Φ_{HR} получим функционал Φ_{HR}^{3M} , которому будут со-

ответствовать смешанные уравнения (3), если из (9) исключить изгибающий момент M_{22} и перерезывающую силу Q_2 , пользуясь формулами (4):

$$\begin{aligned} \Phi_{HR}^{3M} = \iint \left\{ -M_{11} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{1}{(1-\nu^2)D} \left[\frac{1}{2} \left(\nu M_{11} - (1-\nu^2)D \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{1}{2} M_{11}^2 + (1+\nu)M_{12}^2 \right) \right] - M_{12} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right) + Q_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - \psi_1 \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2B_3} Q_1^2 + \frac{1}{2} B_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2 \right)^2 - qw - m_1 \psi_1 - m_2 \psi_2 \right\} dx_1 dx_2. \quad (10) \end{aligned}$$

Из условий стационарности по M_{11} , ψ_2 , w , ψ_1 , M_{12} , Q_1 функционала (10) получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} = m_1 - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} + Q_1, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{2}{(1-\nu)D} M_{12}, \\ \frac{\partial w}{\partial x_1} = \psi_1 + \frac{Q_1}{B_3}, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = -\frac{M_{11}}{D} - \nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} = -\nu \frac{\partial M_{11}}{\partial x_2} + (1-\nu^2)D \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_2^2} + m_2 - B_3 \psi_2 + B_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} = B_3 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} - B_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - q. \quad (11) \end{aligned}$$

Если в (11) согласно принципу Даламбера положить

$$m_1 = -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}, \quad m_2 = -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}, \quad q = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (12)$$

то система (11) совпадет с системой (3). Этот результат можно непосредственно получить вариационным путем, если соответствующим образом обобщить вариационный принцип Гамильтона-Остроградского.

РЕЗЮМЕ. Система рівнянь типу Тимошенка згинання пластин вперше представлена в операторній гамільтоновій формі шести рівнянь по просторовій координаті. Сформульовано варіаційний принцип для одержаної системи.

SUMMARY. The system of equations of Timoshenko type of plates bending is represented for the first time in the operator Hamilton form of six equations on a spatial coordinate. Variation principle for the system obtained is formulated.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. Шульга Н. А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с. 2. Шульга Н. А. Рас-

пространение упругих волн в периодически-неоднородных средах // Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 7. – С. 15–56. 3. *Шульга Н. А.* Распространение связанных волн в периодически-неоднородных средах при взаимодействии с электромагнитным полем // Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 10. – С. 38–68. 4. *Шульга О. М.* Построение решений уравнений колебаний классической теории пластин с периодическими по одной координате параметрами // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 109–113. 5. *Шульга О. М.* Волновые решения уравнений типа Тимошенко поперечных колебаний пластин с периодическими по одной координате параметрами // Теорет. и прикладная механика. – 1996. – Вып. 26. – С. 105–111. 6. *Кильчевский Н. А.* Курс теоретической механики. В 2-х т. Т.2. – М.: Наука, 1977. – 439 с.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 10.06.2009

УДК 539.3

А. Р. ГАЧКЕВИЧ, д-р физ.-мат. наук, Е. М. ИРЗА, канд. физ.-мат. наук,
В. Я. БОЙЧУК, канд. физ.-мат. наук

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ТЕРМОМЕХАНИКИ СТЕКЛЯННЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ТЕПЛОМ НАГРУЖЕНИИ

Стеклянные тела в процессе изготовления и обработки подвергаются разным тепловым и механическим воздействиям. Возникающие при таких воздействиях температурные напряжения (временные и остаточные) меняются в широком диапазоне в зависимости от параметров температурных полей. Значительные уровни напряжений могут приводить до разрушения конструкций или до ухудшения их эксплуатационных свойств. Поэтому важно знать уровни этих напряжений с целью их дальнейшей оптимизации. В данной работе предлагаются методики математического моделирования физико-механических процессов при различных тепловых нагрузках и алгоритмы определения деформаций и напряжений.

В отличие от существующих в литературе исследований в этом направлении [1–3] в настоящей статье предложены математические модели количественного описания напряженного состояния термочувствительных стеклянных тел вращения (форма которых отлична от канонической) в трехмерной постановке с учетом особенностей механического поведения стекла в зависимости от диапазона температур, в которых находится тело и специфики температурного нагружения. Рассмотрено четыре типовые модели, которые описывают поведение стеклянного тела вращения при различном тепловом нагружении в зависимости от диапазона температур нагрева: модель упругого термочувствительного тела; модель упругого термочувствительного тела с учетом остаточных напряжений, формирующихся в момент стеклования при охлаждении от высоких температур; модель термочувствительного упругого тела с учетом релаксации остаточных напряжений; модель вязкоупругого тела.

Постановка задачи. Рассмотрим отнесенное к цилиндрической системе координат $O r \varphi z$ стеклянное тело вращения при осесимметричном распределении в нем начальной температуры $t(r, z, 0) = t_0(r, z)$, занимающее область евклидова пространства R^3 и ограничено непрерывной по Липшицу поверхностью Γ . Тело подвержено температурному нагружению через конвективный теплообмен с внешней средой с температурой $t_c(\tau)$, через одну часть поверхности Γ_t , $(r, z) \in \Gamma_t$ и тепловым потоком $q(r, z, \tau)$ через другую часть Γ_q , $(r, z) \in \Gamma_q$, $\Gamma_t \cup \Gamma_q = \Gamma$, при наличии распределенных источников тепла мощности $Q(r, z, \tau)$, $(r, z) \in \Omega$. На

части Γ_u поверхности Γ тела заданы перемещения $\bar{u} = (u_r^0, u_z^0)$, на части Γ_σ – силовое нагружение с вектором $\bar{p} = (p_r, p_z)$, $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma$.

Температурное поле в теле будем описывать уравнением теплопроводности [4]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial t}{\partial z} \right) + Q = c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (1)$$

и такими начальным и граничными условиями:

$$t(r, z, 0) = t_0(r, z); \quad (2)$$

$$\left[k \left(\frac{\partial t}{\partial r} n_r + \frac{\partial t}{\partial z} n_z \right) + \alpha(t - t_c) \right]_{\Gamma_t} = 0; \quad \left[k \left(\frac{\partial t}{\partial r} n_r + \frac{\partial t}{\partial z} n_z \right) + q \right]_{\Gamma_q} = 0, \quad (3)$$

которые соответствуют имеющимся тепловым условиям. Здесь k – коэффициент теплопроводности; c – удельная теплоемкость; ρ – плотность; α – коэффициент теплоотдачи; n_r, n_z – компоненты внешней нормали к поверхности тела.

Связь между тензором напряжений $\{\sigma\}$ и тензором деформаций $\{\varepsilon\}$ соответствует виду тепловых нагружений и интервалам температур, в которых находится тело.

Для тепловых процессов в интервалах температур меньших за температуру стеклования t_g [1], когда имеют место в теле только упругие температурные деформации $\{\varepsilon_t\}$, уравнение состояния принимаем в виде [4]:

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_t\}). \quad (4)$$

При охлаждении изделия из стекла от температур больших за температуру стеклования t_g , в уравнении состояния учитываем остаточные $\{\varepsilon_0\}$ деформации, формирующиеся при охлаждении от высоких температур в момент стеклования [1]. Тогда

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_t\} - \{\varepsilon_0\}). \quad (5)$$

При нагревании изделий из стекла (с уровнем остаточных напряжений σ_0) от начальной температуры до верхней температуры отжига t_v^b [3] и выдержкой при этой температуре, и последующем охлаждении до натуральной температуры (когда характерны релаксационные процессы) уравнения состояния принимаем такими [3]:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_t\}) \text{ при } t < t_v^b, \\ \sigma_{екв} &= \sigma_0 \exp(-G\tau/\eta_c) \text{ при } t = t_v^b. \end{aligned} \quad (6)$$

При охлаждении (нагревании) стекла в широком диапазоне температур отдельно рассмотрено модель вязкоупругого тела. При этом:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [D_1] \frac{d\{\varepsilon\}}{d\tau} + [D_0] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_t\}) \text{ при } t \geq t_g \\ \{\sigma\} &= [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_t\}) \text{ при } t < t_g. \end{aligned} \quad (7)$$

Тензоры напряжений $\{\sigma\}$ и тензоры деформаций $\{\varepsilon\}$, $\{\varepsilon_t\}$, $\{\varepsilon_0\}$ для осесимметричного случая представим в цилиндрической системе координат в такой матричной форме:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= \{\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}\}^T; \quad \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{rz}\}^T; \\ \{\varepsilon_t\} &= \int_{t_0}^t \alpha_t(\xi) d\xi \cdot \{1, 1, 1, 0\}^T; \quad \{\varepsilon_0\} = -\alpha_t \Phi \{11\} \cdot \{1, 1, 1, 0\}^T. \end{aligned} \quad (8)$$

Функция нагружения $\Phi(r, z)$ в соответствии с гипотезой “замораживания” Бартенева [1] (модифицированной на трехмерный случай) определяется соотношением

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \text{ при } t(r, z, \tau_g) = t_g, \quad (9)$$

где α_t – коэффициент линейного температурного расширения; τ_g – момент времени, в который достигается температура стеклования t_g .

Матрицы физических характеристик $[D]$, $[D_0]$, $[D_1]$ имеют вид:

$$\begin{aligned} [D] &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5(1-2\nu) \end{bmatrix}, \\ [D_0] &= \frac{E}{3(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [D_1] = 1,5\eta \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; η – коэффициент динамической вязкости при сдвиге.

В области Ω выполняются уравнения равновесия (квазистатическая постановка) и граничные условия, т.е.:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0; \quad (10)$$

$$n_r \sigma_{rr} + n_z \sigma_{zr} - p_r = 0, \quad n_r \sigma_{rz} + n_z \sigma_{zz} - p_z = 0 \text{ на } \Gamma_\sigma, \quad (11)$$

$$u_r = u_r^0, \quad u_z = u_z^0 \text{ на } \Gamma_u.$$

Ограничимся случаем малых деформаций, т.е. когда

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}. \quad (12)$$

Задачи сформулируем в перемещениях. Зависимости (1)–(12) составляют полную систему соотношений для определения температурного поля, компонент вектора перемещений, компонент тензоров деформаций и напряжений при заданных температуре внешней среды t_c , коэффициенте теплообмена α , тепловом потоке q , внешнем силовом нагружении \bar{p} , перемещениях \bar{u} и мощности внутренних источников тепла Q .

Алгоритм решения прямых задач. Поскольку геометрическая конфигурация области, которую занимает тело, часто достаточно сложная, а система рассматриваемых дифференциальных уравнений нелинейная, при решении используется метод взвешенных невязок в сочетании с методом конечных элементов [5]. Такой подход позволяет получить эффективные приближенные решения сформулированных комплексных задач. Алгоритм решения данных задач включает разбиение области на элементы; аппроксимацию неизвестных функций на элементе разбиения; получение на этой основе системы алгебраических уравнений относительно неизвестных функций в узлах элементов и алгоритм решения этой системы.

Согласно концепции метода конечных элементов [5] проводим разбиение области Ω на конечное число n_e подобластей $\Omega^{(e)}$ (которые называют конечными элементами) таким образом, чтобы выполнялись условия:

$$a) \forall e, m: e = \overline{1, n_e}, \quad m = \overline{1, n_e}, \quad \Omega^{(e)} \cap \Omega^{(m)} = \emptyset, \quad e \neq m;$$

$$b) \Omega = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega^{(e)}.$$

Используем осесимметричные биквадратичные (8 узлов) изопараметрические конечные элементы. Скалярную функцию t (температуру) на конечном элементе представляем при помощи функций формы в виде [5]:

$$t^{(e)} = \left[N_1^{(e)} \dots N_8^{(e)} \right] \left\{ \begin{array}{l} T_1^{(e)} \\ \dots \\ T_8^{(e)} \end{array} \right\},$$

где $N_i^{(e)}$ – базовая функция элемента (которая называется функцией формы) причем $N_i^{(e)} = 1$ в узле i и равна нулю во всех других узлах; $T_i^{(e)}$ – значение функции t в i -м узле.

Векторная величина \bar{u} (перемещения) выражается через ее компоненты, которые рассматриваются как неизвестные скалярные величины. Тогда в каждом узле имеются две неизвестные, которые запишем так [5]:

$$\begin{Bmatrix} u_r^{(e)} \\ u_z^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 & \dots & N_8^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & \dots & 0 & N_8^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^{(e)} \\ \dots \\ U_{16}^{(e)} \end{Bmatrix},$$

где $U_1^{(e)}, \dots, U_{15}^{(e)}$ – значения компоненты u_r в узлах элемента; $U_2^{(e)}, \dots, U_{16}^{(e)}$ – значения компоненты u_z в узлах элемента.

Задача теплопроводности. Рассмотрим задачу теплопроводности (1)–(3). Используя метод взвешенных невязок (в частности метод Галеркина) в сочетании с методом конечных элементов уравнение теплопроводности (1) с учетом граничных условий (3), сводится к виду [5]:

$$[C_t] \frac{d\{T\}}{d\tau} + [K_t] \{T\} = \{f_t\}. \quad (13)$$

Здесь $[C_t]$, $[K_t]$, $\{f_t\}$ – соответствующие температурные матрицы “жесткости” и вектор “нагружения”, которые имеют следующий вид:

$$[C_t] = \sum_{j=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(j)}} \rho c [N^{(j)}]^T [N^{(j)}] d\Omega,$$

$$[K_t] = \sum_{j=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(j)}} [B^{(j)}]^T [D_t^{(j)}] [B^{(j)}] d\Omega + \int_{\Gamma_t^{(j)}} \alpha [N^{(j)}]^T [N^{(j)}] d\Gamma,$$

$$\{f_t\} = \sum_{j=1}^{n_e} [N^{(j)}]^T Q d\Omega + \sum_{j=1}^{n_{e1}} \int_{\Gamma_t^{(j)}} \alpha [N^{(j)}]^T t_c d\Gamma + \sum_{j=1}^{n_{e2}} [N^{(j)}]^T q d\Gamma,$$

$$[B^{(j)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(j)}}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_8^{(j)}}{\partial r} \\ \frac{\partial N_1^{(j)}}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_8^{(j)}}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad [D_t^{(j)}] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}.$$

Используя метод конечных разностей (разделив промежуток $[0, \tau_k]$ на дискретное множество точек τ_0, τ_1, \dots с шагом $\Delta\tau$), из (13) получим систему нелинейных алгебраических уравнений

$$([C_t] + \theta \Delta\tau [K_t]) \{T\}_{n+1} - ([C_t] - (1-\theta) \Delta\tau [K_t]) \{T\}_n = \{f_t\}_n, \quad (14)$$

где индексами n обозначены значения величин в момент времени τ_n соответственно.

За счет выбора точки коллокации θ соотношения (14) можно преобразовать в одну из следующих известных конечно-разностных схем для уравнения (13), а именно [5]: при $\theta = 0$ – схему Эйлера (схема с разницей вперед), $\theta = 0,5$ – схему Кранка-Никольсона (схема с центральной разностью), $\theta = 0,66667$ – метод Галеркина, $\theta = 1$ – схему с разницей назад. Систему (14) будем решать итерационными методами [6].

Определение напряженно-деформированного состояния. Рассмотрим четыре типовые модели, описывающие поведение стеклянного тела вращения при различном тепловом нагружении в зависимости от диапазона температур нагрева.

1. *Модель упругого термочувствительного тела.* При известном температурном поле $t(r, z, \tau)$ система уравнений (4), (10)–(12), с использованием метода взвешенных невязок в сочетании с методом конечных элементов, сводится (как и задача теплопроводности) к системе нелинейных алгебраических уравнений вида:

$$[K] \{U(\tau)\} = \{F_0(\tau)\}. \quad (15)$$

Здесь

$$[K] = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] d\Omega,$$

$$\{F_0\} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\epsilon_t^{(e)}\} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_l} [N^{(e)}]^T \{p^{(e)}\} d\Gamma,$$

$$[B^{(e)}] = \begin{bmatrix} \partial N_1^{(e)} / \partial r & 0 & \dots & \partial N_8^{(e)} / \partial r & 0 \\ N_1^{(e)} / r & 0 & \dots & N_8^{(e)} / r & 0 \\ 0 & \partial N_1^{(e)} / \partial z & \dots & 0 & \partial N_1^{(e)} / \partial z \\ \partial N_1^{(e)} / \partial z & \partial N_1^{(e)} / \partial r & \dots & \partial N_8^{(e)} / \partial z & \partial N_8^{(e)} / \partial r \end{bmatrix}.$$

2. Модель упругого термочувствительного тела с учетом остаточных напряжений, формирующихся при охлаждении от высоких температур в момент стеклования. При известном температурном поле на основе гипотезы "замораживания" (9) находим распределение градиентов функции нагружения Φ , а саму функцию нагружения находим с использованием метода простой итерации [6]:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} = & \frac{1}{4} [\Phi_{i+1j} + \Phi_{i-1j} + \Phi_{ij+1} + \Phi_{ij-1}] - \\ & - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{ij} (h_{i+1j} - h_{i-1j}) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{ij} (h_{ij+1} - h_{ij-1}) \right] - \\ & - \frac{1}{8(h_{i+1j} + h_{i-1j})} \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{i+1j} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{i-1j} \right) (h_{i+1j}^2 + h_{i-1j}^2) - \\ & - \frac{1}{8(h_{ij+1} + h_{ij-1})} \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{ij+1} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{ij-1} \right) (h_{ij+1}^2 + h_{ij-1}^2). \end{aligned}$$

Здесь $i, i+1, i-1, j, j+1, j-1$ – соответственно номера соседних узлов элементов разбиения; $h_{i+1j}, h_{i-1j}, h_{ij+1}, h_{ij-1}$ – расстояния между соответствующими соседствующими узлами.

При известных температурном поле $t(r, z, \tau)$ и функции нагружения $\Phi(r, z)$ система уравнений (5), (10)–(12), с использованием метода взвешенных невязок в сочетании с методом конечных элементов сводится, как и выше, к системе нелинейных алгебраических уравнений вида

$$[K]\{U(\tau)\} = \{\Phi_0(\tau)\}. \quad (16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \{\Phi_0\} = & \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_t^{(e)}\} d\Omega + \\ & + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_0^{(e)}\} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_1} [N^{(e)}]^T \{p^{(e)}\} d\Gamma. \end{aligned}$$

3. Модель термочувствительного упругого тела с учетом релаксации остаточных напряжений. Система уравнений (6), (10)–(12), как и выше сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений (15).

4. Модель вязкоупругого тела. Система уравнений (7), (10)–(12) сводится к виду:

$$[C] \frac{d}{d\tau} \{U\} + [K][U] = \{F\}, \quad [K_1]\{U\} = \{F_1\}. \quad (17)$$

Здесь

$$[C] = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D_1^{(e)}] [B^{(e)}] d\Omega,$$

$$[K] = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D_0^{(e)}] [B^{(e)}] d\Omega,$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_t^{(e)}\} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_l} [N^{(e)}]^T \{p^{(e)}\} d\Gamma,$$

$$[K_1] = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] d\Omega,$$

$$\{F_1\} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_t^{(e)}\} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_l} [N^{(e)}]^T \{p^{(e)}\} d\Gamma.$$

С использованием, как и в задаче теплопроводности, метода конечных разностей первое и второе уравнения системы (17) относительно неизвестных значений $U(\tau)$ в узлах элементов [5] сводим соответственно к виду:

$$\begin{aligned} ([C] + \theta \Delta\tau [K]) \{U\}_{n+1} &= ([C] - (1-\theta) \Delta\tau [K]) \{U\}_n + \\ &+ (1-\theta) \{F\}_n \Delta\tau + \theta \{F\}_{n+1} \Delta\tau; \end{aligned} \quad (18)$$

$$[K_1] \{U\}_{n+1} = (1-\theta) \{F_1\}_n + \theta \{F_1\}_{n+1}. \quad (19)$$

Анализ результатов численных исследований. Предложенные модели были использованы для нахождения распределения напряжений в цилиндре (с высотой 125 мм, внутренним радиусом 30 мм и толщиной 10 мм). Цилиндр изготовлен из стекла С-93 [4].

На рис. 1 показан режим нагрева цилиндра в интервале температур, когда стекло ведет себя как упругое тело. На рис. 1, а представлено изменение температуры на поверхностях цилиндра, а на рис. 1, б кривыми 1 и 2 соответствующие напряжения на срединной и внешней поверхностях цилиндра.

На рис. 2 представлено распределение остаточных напряжений, кото-

рые определяются с использованием второй модели, при конвективном теплообмене при температуре окружающей среды равной $t_c = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ и коэффициенте теплоотдачи $\alpha = 400\text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$.

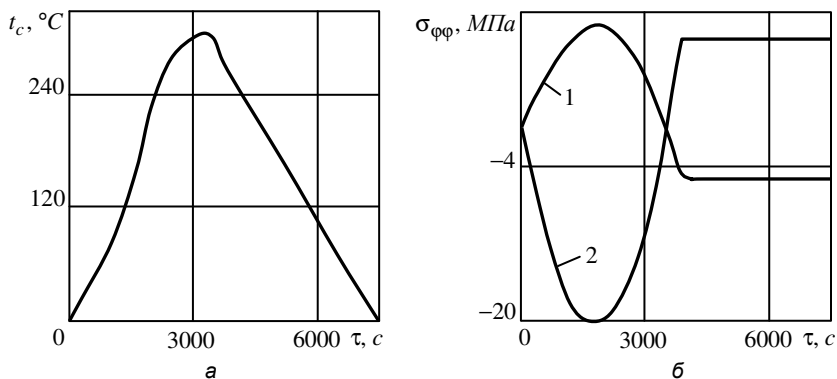


Рис. 1

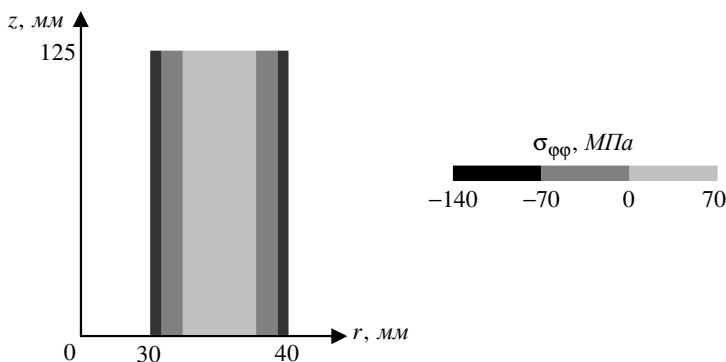


Рис. 2

На рис. 3 проиллюстрировано режим «нагрева–охлаждения» данного цилиндра с начальными остаточными напряжениями $\sigma_0 = 5\text{ МПа}$. На рис. 3, а представлена температура на поверхности цилиндра, а на рис. 3, б – соответствующие максимальные эквивалентные напряжения в процессе термообработки, определенные по третьей модели.

На рис. 4 показан режим охлаждения до натуральной температуры цилиндра с начальной температурой $t_0 = 800\text{ }^{\circ}\text{C}$. На рис. 4, а представлено температура на поверхности, а на рис. 4, б – изменение максимальных эквивалентных напряжений, которые определены по четвертой модели.

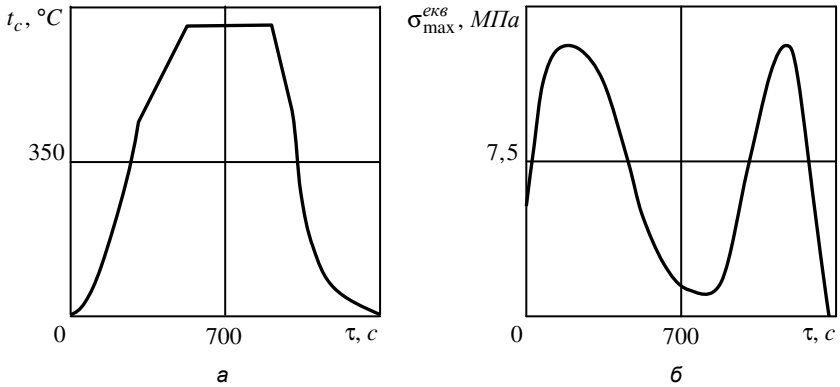


Рис. 3

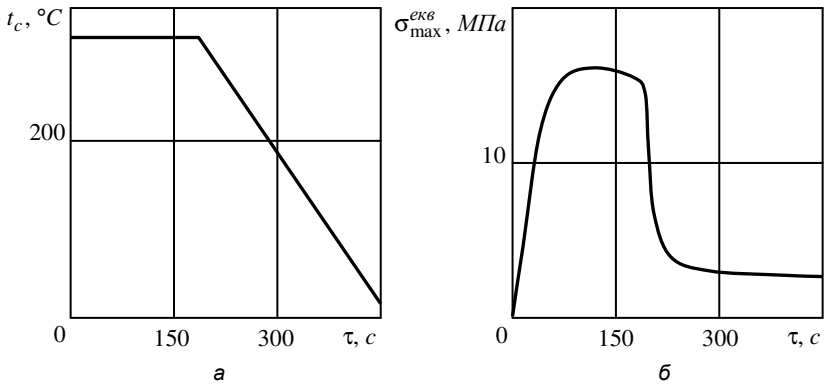


Рис. 4

Выше приведенные результаты, хорошо согласуются с известными в литературе исследованиями в данных областях температурного нагружения.

Предложенный подход к моделированию процессов термообработки, в зависимости от диапазона температур в которых находится тело, дает возможность существенно упростить расчеты термонапряженного состояния стеклянных тел вращения. В принципе для предложенных режимов нагрева достаточно использовать четвертую модель, но в этом случае расчеты существенно усложняются.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано моделі опису термомеханічної поведінки скляних тіл обертання при різних теплових режимах нагріву (охолодження) і числову методику розв'язання запропонованих задач.

SUMMARY. The models of description of thermomechanical behavior of glass sol-

ids of rotation under different heating (cooling) regimes and numerical procedure to solve the proposed problems are proposed.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ: 1. *Бартенев Г. М.* Механические свойства и тепловая обработка стекла. – М.: Стройиздат, 1960. – 283 с. 2. *Ковальчук Б. И., Лебедев А. А., Уманский С. Э.* Механика неупругого деформирования материалов и элементов конструкций. – К.: Наук. думка, 1987. – 277 с. 3. *Дяківський С. І., Житлинський Г. С., Ячишин Й. М.* Термічне оброблення і напруження у склі. – Львів, 2003. – 193 с. 4. *Ірза Є. М.* Математична модель формування залишкових напружень у скляних тілах обертання під час охолодження // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – № 2. – С. 14–19. 5. *Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.* Finite Element Method: Vol 1. The Basis. – London: “Butterwoth Heinemann”, 2000. – 689 p. 6. *Турчак Л. И.* Основы численных методов. – М.: Наука, 1987. – 320 с.

*Институт прикладных проблем механики
и математики НАН Украины, г. Львов
Политехника Опольская, г. Ополье, Польша*

Поступила 11.05.2009

УДК 539.3

Р. Ф. ТЕРЛЕЦКИЙ, д-р физ.-мат. наук, *О. П. ТУРИЙ***МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ
СЛОИСТЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ИЗЛУЧЕНИЯ
И ПОГЛОЩЕНИЯ ТЕПЛОВОЙ ЭНЕРГИИ**

Развитие и совершенствование современных приборостроения, электронной, космической, авиационной и других областей техники невозможно без применения новых конструкционных материалов на основе керамики, ситаллов, кварца, ферритов и других неметаллических материалов. Их часто используют в сочетании с металлическими материалами [1, 2], соединяя путем склеивания, сварки, пайки и т. п. При этом образуется промежуточный слой с отличными от основных материалов своими свойствами. Его структура, толщина и физические характеристики определяются способом соединения. В процессе изготовления или эксплуатации такие слоистые конструкции могут находиться под воздействием теплового излучения, а их составляющие иметь различную прозрачность для излучения. Высокие скорости нагрева и его локальный характер в слоистом теле при воздействии излучения, достижение высоких температур, условия теплообмена, отличие радиационных, теплофизических и механических характеристик составляющих и другие факторы могут вызывать значительные механические напряжения. Поэтому для построения рациональных режимов термообработки слоистых тел с использованием теплового излучения или эксплуатации при воздействии излучения необходима оценка их теплового и напряженного состояний.

Исследованию термонапряженного состояния кусочно-однородных или слоистых тел посвящены многочисленные работы. В большинстве из них эффекты излучения и поглощения тепловой энергии, в частности на границах раздела материалов, не учитываются. В литературе изучено достаточно полно перенос теплового излучения и тепла в однородных и многослойных частично-прозрачных телах. Однако слоистые системы с составляющими различной прозрачности не рассматривались. При исследовании термонапряженного состояния слоистых структур тонкие промежуточные слои, как правило, исключают из рассмотрения, учитывая их в обобщенных контактных тепловых и механических условиях. Такие условия, учитывающие перенос излучения в слоистых телах со слоями различной прозрачности, в литературе не получены. Данная работа посвящена постановке контактных задач теплопереноса и термоупругости в облучаемых слоистых телах с составляющими различной прозрачности (в частности, при наличии тонких промежуточных слоев) с учетом эффектов излучения на их поверхностях, в частично прозрачных областях и границах раздела слоев.

Постановка задачи. Создание эффективных моделей и методов рас-

чета теплопереноса и напряженного состояния в многослойных телах (с составляющими, обладающими различными радиационными свойствами) при тепловом облучении требует адекватного моделирования потоков излучения в них, учета специфики поглощения и излучения тепловой энергии составляющими при формулировании уравнений теплопереноса, граничных и контактных условий. При описании распространения теплового излучения в слоистых телах и взаимодействия с ними будем исходить из соотношений феноменологической теории излучения для частично прозрачных и непрозрачных тел [3, 4]. В частично прозрачные тела излучение рассматриваемого теплового спектра может проникать на конечные расстояния, а его поглощение имеет объемный характер. В непрозрачном теле полное поглощение теплового излучения происходит в тонком приповерхностном слое (порядка $100 \div 1000 \text{ \AA}$). Излучение и поглощение такими телами тепловой энергии принимается поверхностным, а поглощательные и излучательные свойства связываются с характеристиками граничной поверхности.

Внешнее тепловое излучение, как излучение нагретого тела, можно задать во внешней среде спектральной интенсивностью $I_{\lambda s}(\vec{x}, t, \vec{g}_0)$ падающего на рассматриваемое тело излучения от реального источника (λ – длина волны излучения). Эта интенсивность на поверхности тела является функцией точки (характеризуется радиус-вектором \vec{x}), времени (t) и направления (\vec{g}_0 – орт в направлении распространения луча) и может быть принята пропорциональной интенсивности $I_{b\lambda}$ излучения абсолютно черного тела при температуре T_s источника [5, 6].

$$I_{\lambda s}(\vec{x}, t, \vec{g}_0) = k_{\lambda}(\vec{x}, \vec{g}_0) I_{b\lambda}(\lambda, T_s), \quad (1)$$

где $k_{\lambda}(\vec{x}, \vec{g}_0)$ – заданная функция. Ее вид определяется в зависимости от характеристик источника и его расположения относительно тела.

Распространение теплового излучения в частично прозрачных областях слоистого тела опишем квазистационарным уравнением переноса [4]

$$\frac{\partial I_{\lambda}(\vec{x}, t, \vec{g}_0)}{\partial g} = a_{\lambda}(\vec{x}) [I_{m\lambda}(T(\vec{x}, t)) - I_{\lambda}(\vec{x}, t, \vec{g}_0)], \quad (2)$$

где $I_{\lambda}(\vec{x}, t, \vec{g}_0)$ – спектральная интенсивность излучения в области; g – расстояние в направлении распространения луча, отсчитываемое от границы раздела с соседними составляющими (в частности от границы тела, если область соприкасается с внешней средой); $a_{\lambda}(\vec{x})$ – известный из эксперимента спектральный коэффициент поглощения материала, определяющий ослабление излучения; $I_{m\lambda} = (n_{\lambda})^2 I_{b\lambda}[T(\vec{x}, t)]$ – спектральная интенсивность собственного теплового излучения, которая зависит от значения спектрального показателя преломления n_{λ} материала и температуры $T(\vec{x}, t)$ в области. Решение уравнения (3) запишем в виде [4, 6]

$$I_{\lambda}(\theta_{\lambda}, t, \bar{g}_0) = I_{\lambda}^{ef}(\bar{x}, t, \bar{g}_0) \exp(-\theta_{\lambda}) + \int_0^{\theta_{\lambda}} I_{m\lambda}(\lambda, T) \exp\left[-(\theta_{\lambda} - \theta_{\lambda}^*)\right] d\theta_{\lambda}^*. \quad (3)$$

Здесь $\theta_{\lambda}(\bar{x}) = \int_0^{g(x_i)} a_{\lambda}(g^*) dg^*$ – оптическая толщина пути в слое (x_i – декартовые координаты); I_{λ}^{ef} – интенсивности эффективного излучения, исходящего от элемента границы раздела с соседними составляющими в точке \bar{x} в направлении \bar{g}_0 во внутрь области. В рассматриваемом приближении феноменологической теории эффективные интенсивности на границах частично прозрачных областей находят (при определенных экспериментально коэффициентах преломления и отражения) используя граничные условия, которые выражают баланс всех потоков излучения, подводимых к границе (в том числе переотраженных внутри области) [3, 6]. Такие условия сводятся к системе двух или $2n$ (n – количество контактирующих частично прозрачных слоев) интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода. В общем случае каждое из уравнений можно записать в виде

$$I_{\lambda}^{ef}(\bar{x}, t, \bar{g}_0) = I_{\lambda}^{rf}(\bar{x}, t, \bar{g}_0) + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma=2\pi} R_{\lambda}''(\bar{x}, \bar{g}_0, \bar{g}'_0) \times I_{\lambda}^{inc}(\bar{x}, t, \bar{g}'_0) \cos(\bar{g}'_0 \wedge \bar{n}) d\Gamma_{\bar{g}'_0}, \quad (4)$$

в котором I_{λ}^{rf} – спектральная интенсивность преломленного из контактирующего частично прозрачного слоя (внешней среды) излучения или излученного с поверхности контактирующего непрозрачного слоя; $I_{\lambda}^{inc}(\bar{x}, \bar{g}'_0)$ – интенсивность излучения, падающего на границу изнутри слоя в направлении \bar{g}'_0 ; $R_{\lambda}''(\bar{x}, \bar{g}_0, \bar{g}'_0)$ – двунаправленная спектральная отражательная способность границы; \bar{n} – вектор внешней нормали к границе области. Интегрирование в (4) производится по телесному углу Γ ($d\Gamma_{\bar{g}'_0}$ – его элемент в направлении \bar{g}'_0). Так, если частично прозрачная область граничит с внешней средой (прозрачной), то

$$I_{\lambda}^{rf}(\bar{x}, t, \bar{g}_0) = (n_{\lambda})^2 [1 - R_{\lambda}'(\bar{x}, \bar{g}_0'')] I_{\lambda s}(\bar{x}, t, \bar{g}_0''),$$

где $R_{\lambda}'(\bar{x}, \bar{g}_0'')$ – однонаправленная отражательная способность границы. Направления \bar{g}_0 и \bar{g}'' связаны соотношением $\sin(\bar{g}_0 \wedge \bar{n}) / \sin(\bar{g}_0'' \wedge \bar{n}) = n_{\lambda}$. В случае контакта с другим частично прозрачным слоем

$$I_{\lambda}^{rf}(\bar{x}, t, \bar{g}'_0) = (n_{\lambda} / n_{\lambda c}) [1 - R'_{\lambda}(\bar{x}, \bar{g}''_0)] I_{\lambda}^{inc}(\bar{x}, t, \bar{g}''_0).$$

При этом $I_{\lambda}^{inc}(\bar{x}, t, \bar{g}''_0)$ – интенсивность излучения, падающего на границу в направлении \bar{g}''_0 со стороны соседнего слоя ($n_{\lambda c}$ – его показатель преломления). В случае контакта с непрозрачным слоем

$$I_{\lambda}^{rf}(\bar{x}, t, \bar{g}'_0) = (n_{\lambda})^2 I_{\lambda}^{op}(\bar{x}, t, \bar{g}'_0),$$

где $I_{\lambda}^{op}(\bar{x}, t, \bar{g}'_0)$ – интенсивность излучения с поверхности непрозрачного слоя. Интенсивность $I_{\lambda}^{op}(\bar{x}, t, \bar{g}'_0)$ собственного теплового излучения непрозрачного тела в прозрачную или частично прозрачную среду определяют по отношению к интенсивности $I_{m\lambda}$ излучения в такую среду абсолютно черного тела и характеризуют однонаправленной спектральной степенью черноты $\varepsilon'_{\lambda}(\bar{x}, \bar{g}'_0)$. Поэтому, выражение для интенсивности $I_{\lambda}^{op}(\bar{x}, t, \bar{g}'_0)$ излучения непрозрачного слоя в частично прозрачный (или во внешнюю среду) будет

$$I_{\lambda}^{op}(\bar{x}, \bar{g}'_0, t) = \varepsilon'_{\lambda}(\bar{x}, \bar{g}'_0) (n_{\lambda})^2 I_{b\lambda}[T(\bar{x}, t)]. \quad (5)$$

В условиях теплового равновесия поверхности ее поглощательные свойства также определяются параметром $\varepsilon'_{\lambda}(\bar{x}, \bar{g}'_0)$ [3]. Тогда спектральную интенсивность $I_{\lambda}^{abs}(\bar{x}, t, \bar{g}'_0)$ поглощенного поверхностью теплового излучения, падающего на поверхность с интенсивностью $I_{\lambda}^{inc}(\bar{x}, t, \bar{g}'_0)$, при учете закона Кирхгофа $\varepsilon'_{\lambda}(\bar{x}, \bar{g}'_0) = 1 - R'_{\lambda}(\bar{x}, \bar{g}'_0)$, можно выразить так

$$I_{\lambda}^{abs}(\bar{x}, t, \bar{g}'_0) = [1 - R'_{\lambda}(\bar{x}, \bar{g}'_0)] I_{\lambda}^{inc}(\bar{x}, t, \bar{g}'_0). \quad (6)$$

Поглощение и излучение тепловой энергии в частично прозрачных областях свяжем с объемными тепловыделениями, которые выразим через спектральную интенсивность $I_{\lambda}^{ef}(\bar{x}, t, \bar{g}'_0)$ эффективного излучения на поверхности [6]

$$Q = \int_{\lambda=0}^{\infty} \left[a_{\lambda}(\bar{x}) \int_{\Gamma=4\pi} I_{\lambda}^{ef}(\bar{x}, \bar{g}'_0, t) \exp(-\theta_{\lambda}) d\Gamma_{\bar{g}'_0} \right] d\lambda. \quad (7)$$

Здесь интегрирование производится по всему диапазону спектра излучения и в пределах телесного угла $\Gamma = 4\pi$.

В непрозрачных областях эти процессы, согласно феноменологической теории, будем считать поверхностными, а излученную и поглощенную энер-

гии характеризовать потоками q_{op} и q_{abs} на поверхности. Их выражения получим, интегрируя (5), (6) по спектру и в пределах угла $\Gamma = 2\pi$

$$q_{op}(\bar{x}) = \int_{\lambda=0}^{\infty} \left\{ \int_{\Gamma=2\pi} \varepsilon'_{\lambda}(\bar{x}, \bar{g}_0) (n_{\lambda})^2 I_{m\lambda}[T(\bar{x}, t)] d\Gamma_{\bar{g}_0} \right\} d\lambda, \quad (8)$$

$$q_{abs}(\bar{x}) = \int_{\lambda=0}^{\infty} \left\{ \int_{\Gamma=2\pi} [1 - R'_{\lambda}(\bar{x}, \bar{g}_0)] I_{\lambda}^{inc}(\bar{x}, t, \bar{g}_0) d\Gamma_{\bar{g}_0} \right\} d\lambda. \quad (9)$$

Если степень черноты поверхности принять независимой от направления \bar{g}_0 ($\varepsilon'_{\lambda} = \varepsilon_{\lambda}(\bar{x})$) и длины волны λ (диффузно-серая поверхность [3]), а показатель преломления – независимым от длины волны ($\varepsilon_{\lambda}(\bar{x}) = \varepsilon(\bar{x})$, $n_{\lambda} = n = const$), то из (8) получим выражение Стефана-Больцмана [3] $q_{op}(\bar{x}) = \varepsilon(\bar{x}) n^2 \sigma T^4(\bar{x}, t)$ (σ – постоянная Стефана-Больцмана) для потока излученной с поверхности тепловой энергии.

Тепловое состояние слоистого тела определим из системы уравнений теплопроводности, которые описывают теплоперенос в слоях. При этом объемные тепловыделения в частично прозрачных областях будем рассматривать как объемные источники тепла в уравнениях вида

$$(\kappa T_{,i})_{,i} + Q = \rho c_{\varepsilon} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (10)$$

где ρ , κ , c_{ε} – соответственно плотность, коэффициент теплопроводности и удельная теплоемкость. Запятая перед индексом обозначает дифференцирование по соответствующим координатам. Для непрозрачных областей в уравнениях (10) $Q = 0$. Систему уравнений теплопереноса дополним граничными и контактными условиями, которые сформулируем на основе условий непрерывности нормальных составляющих векторов потоков тепла на поверхности тела и на границах раздела слоев (условий баланса тепловых потоков), учитывая на границах раздела локальное тепловое равновесие между слоями (равенство их температур). При этом на границах раздела слоев различной прозрачности или на поверхности (если непрозрачный слой контактирует с внешней средой) рассмотрим также потоки q_{op} и q_{abs} , обусловленные излучением и поглощением тепловой энергии. Вид граничного условия на поверхности облучаемого слоистого тела зависит от радиационных свойств внешнего слоя. Для непрозрачного и частично прозрачного слоя такие условия соответственно будут

$$q_i^{(T)} + q^{ext} + q_{op} + q_{abs} = 0, \quad q_i^{(T)} + q^{ext} = 0. \quad (11)$$

Здесь q^{ext} – потоки, вызванные теплопроводностью и теплообменом с

внешней средой (в частности за законом Ньютона); $q_i^{(T)} = \kappa T_{,i} n_i$ (n_i – направляющие косинусы нормали). Потоки излученной и поглощенной энергии определим согласно (8), (9) (при $I_\lambda^{inc}(\bar{x}, t, \bar{g}_0) = I_{\lambda s}(\bar{x}, t, \bar{g}_0)$).

Вид контактных условий также зависит от радиационных свойств соприкасающихся j -го и k -го слоев. При контакте непрозрачного и частично прозрачного слоев такие условия будут

$$\left(\kappa_{(j)} T_{,i}^{(j)} \right) n_i + q_{op} - q_{abs} = \left(\kappa_{(k)} T_{,i}^{(k)} \right) n_i, \quad T^{(j)} = T^{(k)}. \quad (12)$$

Назовем их условиями идеального теплового контакта при учете эффектов излучения. В случае контакта двух частично прозрачных или непрозрачных слоев условия идеального контакта имеют обычный вид:

$$\left(\kappa_{(j)} T_{,i}^{(j)} \right) n_i = \left(\kappa_{(k)} T_{,i}^{(k)} \right) n_i, \quad T^{(j)} = T^{(k)}. \quad (13)$$

Заметим, что задачи определения поля излучения и температуры в слое теле, содержащем слои различной прозрачности, взаимосвязаны. В литературе часто используют уравнение переноса в приближении неизлучающего материала ($I_{m\lambda} = 0$) [3]. Такое приближение дает возможность разделить задачи определения поля излучения и температуры в однородном или слоестом частично прозрачном теле.

Термонапряженное состояние облучаемого слоестого тела будем определять на основе соотношений температурной контактной задачи теории упругости при условии идеального механического контакта слоев [7].

Методы решения. В качестве примера, рассмотрим задачу об определении термонапряженного состояния облучаемой двухслойной пластины, образованной слоями различной прозрачности, соединенными через тонкий промежуточный слой. Пусть бесконечная пластина состоит из основных частично прозрачного слоя толщиной h_1 , непрозрачного – h_2 и частично прозрачного промежуточного – h_0 . Толщина промежуточного слоя значительно меньше толщин основных ($h_0 \ll h_j, j = 1, 2$). Отметим, что частичная прозрачность характерна, в частности, для клеевых прослоек, толщины которых не превышают 0,3 мм). Со стороны поверхности $z = 0$ частично прозрачного основного слоя (ось z направлена вдоль нормали к слоям) пластина находится под воздействием теплового излучения от нагретой изотермической плоской параллельной ей поверхности (источника). Области $z < 0$ и $z > h$, ($h = h_1 + h_0 + h_2$) внешней среды (воздуха) примем прозрачными для теплового излучения. Считаем, что на поверхностях раздела слоев $z = h_1$, $z = h_{10}$ ($h_{10} = h_1 + h_0$) имеют место условия идеального механического контакта. Поверхности пластины $z = 0$, $z = h$ и края $x, y \rightarrow \pm\infty$ свободны от силового нагружения.

Согласно (1) интенсивность теплового излучения изотермической поверхности $I_{\lambda s} = kI_{b\lambda}(\lambda, T_s)$ [5]. Распространение излучения в основном и промежуточном частично прозрачных слоях опишем уравнением (2) в приближении неизлучающего материала [3, 5]. Учтем, что потоки теплового излучения от источника и с поверхности $z = h_{10}$ непрозрачного слоя в промежуточный (показатель преломления $n_{\lambda}^{(0)}$), интенсивность которого согласно (5) определяется температурой поверхности $z = h_{10}$ и степенью черноты $\varepsilon_{\lambda}^{- (0)} : I_{\lambda}^{op}(h_{10}) = \varepsilon_{\lambda}^{- (0)} I_{\lambda b}(T_2(h_{10}))$. Нахождение поля излучения в слоях сведем в соответствии с (3) к определению эффективных интенсивностей $I_{\lambda}^{+(1)}(0, \nu)$, $I_{\lambda}^{- (1)}(h_1, \nu)$, $I_{\lambda}^{+(0)}(h_1, \nu)$, $I_{\lambda}^{- (0)}(h_{10}, \nu)$ излучения на поверхностях, где $I_{\lambda}^{\pm(j)}(z, \nu)$ – спектральные интенсивности излучения в слоях в направлениях с острым углом β и углом $\pi - \beta$ с осью z ; $\nu = \cos \beta$. Считая поверхности слоев диффузно отражающими, из баланса всех потоков излучения, подводимых к поверхностям, для нахождения эффективных интенсивностей получим систему четырех интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned}
 & I_{\lambda}^{+(1)}(0, \nu) - 2R_{\lambda}^{+(1)} \int_0^1 I_{\lambda}^{- (1)}(h_1, w) w \exp\left(-\theta_{\lambda}^{(1)}/w\right) dw = I_{\lambda}^{(1)s}(\nu), \\
 & I_{\lambda}^{- (1)}(h_1, \nu) - 2R_{\lambda}^{- (1)} \int_0^{\nu_{*10}} I_{\lambda}^{+(1)}(0, \nu) \nu \exp\left(-\theta_{\lambda}^{(1)}/\nu\right) d\nu - \\
 & - 2 \int_{\nu_{*10}}^1 I_{\lambda}^{+(1)}(0, \nu) \nu \exp\left(-\theta_{\lambda}^{(1)}/\nu\right) d\nu = \\
 & = \begin{cases} \left(\frac{n_{\lambda}^{(1)}}{n_{\lambda}^{(0)}}\right)^2 \left(1 - R_{\lambda}^{+(0)}\right) I_{\lambda}^{- (0)}(h_{10}, \xi_{01}) \exp\left(-\frac{\theta_{\lambda}^{(0)}}{\xi_{01}}\right), & 0 \leq \nu \leq \nu_{*01}, \\ 0, & \nu_{*01} \leq \nu < 1; \end{cases} \\
 & I_{\lambda}^{+(0)}(h_1, \nu) - 2R_{\lambda}^{+(0)} \int_0^{\nu_{*01}} I_{\lambda}^{- (0)}(h_{10}, w) w \exp\left(-\theta_{\lambda}^{(0)}/w\right) dw - \\
 & - 2 \int_{\nu_{*01}}^1 I_{\lambda}^{- (0)}(h_{10}, w) w \exp\left(-\theta_{\lambda}^{(0)}/w\right) dw =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \left(\frac{n_\lambda^{(0)}}{n_\lambda^{(1)}} \right)^2 \left(1 - R_\lambda^{-(1)} \right) I_\lambda^{+(1)}(0, \nu) \exp \left(-\frac{\theta_\lambda^{(1)}}{\xi_{10}} \right), & 0 \leq \nu \leq \nu_{*10}, \\ 0, & \nu_{*10} < \nu \leq 1, \end{cases} \\
&I_\lambda^{+(0)}(h_1, \nu) - 2R_\lambda^{+(0)} \int_0^{\nu_{*01}} I_\lambda^{-(0)}(h_{10}, w) w \exp \left(-\theta_\lambda^{(0)} / w \right) dw - \\
&- 2 \int_{\nu_{*01}}^1 I_\lambda^{-(0)}(h_{10}, w) w \exp \left(-\theta_\lambda^{(0)} / w \right) dw = \\
&= \begin{cases} \left(\frac{n_\lambda^{(0)}}{n_\lambda^{(1)}} \right)^2 \left(1 - R_\lambda^{-(1)} \right) I_\lambda^{+(1)}(0, \nu) \exp \left(-\frac{\theta_\lambda^{(1)}}{\xi_{10}} \right), & 0 \leq \nu \leq \nu_{*10}, \\ 0, & \nu_{*10} < \nu \leq 1, \end{cases} \\
&I_\lambda^{-(0)}(h_{10}, \nu) = I_\lambda^{op}(h_{10}) + 2R_\lambda^{-(0)} \int_0^1 I_\lambda^{+(0)}(h_1, w) w \exp \left(-\frac{\theta_\lambda^{(0)}}{w} \right) dw, \quad (14)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
I_{\lambda s}^{(1)}(\nu) &= \begin{cases} \left(n_\lambda^{(1)} \right)^2 \left(1 - R_\lambda^{(s)} \right) I_{\lambda s}(\xi_1), & 0 \leq \nu \leq \nu_{*0}, \\ 0, & \nu_{*0} < \nu \leq 1, \end{cases} \\
\xi_{01} &= \sqrt{1 - \left(n_\lambda^{(0)} / n_\lambda^{(1)} \right)^2 (1 - \nu^2)}, \quad \xi_{10} = \sqrt{1 - \left(n_\lambda^{(1)} / n_\lambda^{(0)} \right)^2 (1 - \nu^2)}, \\
\nu_{*01} &= \begin{cases} 1, & n_\lambda^{(1)} < n_\lambda^{(0)}, \\ \sqrt{1 - \left(n_\lambda^{(0)} / n_\lambda^{(1)} \right)^2}, & n_\lambda^{(1)} > n_\lambda^{(0)}; \end{cases} \\
\nu_{*10} &= \begin{cases} 1, & n_\lambda^{(1)} > n_\lambda^{(0)}, \\ \sqrt{1 - \left(n_\lambda^{(1)} / n_\lambda^{(0)} \right)^2}, & n_\lambda^{(1)} < n_\lambda^{(0)}; \end{cases}
\end{aligned}$$

$n_\lambda^{(j)}$ – показатели преломления материалов слоев; R_λ^s , $R_\lambda^{+(1)}$, $R_\lambda^{-(1)}$,

$R_{\lambda}^{- (0)}$, $R_{\lambda}^{+ (0)}$ ($1 - R_{\lambda}^{- (0)} = \varepsilon_{\lambda}^{- (0)}$) – коэффициенты диффузного отражения поверхностей $z = 0 - 0$; $0 + 0$; $h_1 - 0$; $h_1 + 0$; $h_1 + h_0$; $\theta_{\lambda}^{(j)} = a_{\lambda}^{(j)} h_j$ – оптические толщины слоев, а $a_{\lambda}^{(j)}$ – их коэффициенты поглощения.

Ослабление излучения при прохождении через промежуточный слой малой толщины ($\theta_{\lambda}^{(0)} \ll 1$) незначительно, т. е. $\exp(-\theta_{\lambda}^{(0)} \xi_{12}) \approx 1$. При этом тепловое излучение непрозрачного слоя проникает через промежуточный. Тогда решение системы (1) можно свести к определению эффективных интенсивностей $I_{\lambda}^{+ (1)}(0, \nu)$, $I_{\lambda}^{- (1)}(h_1, \nu)$, вводя эффективный коэффициент R_{ef} отражения поверхности $z = h_1 - 0$, который учитывает радиационные характеристики промежуточного и непрозрачного слоев. При учете однократного переотражении в промежуточном слое для определения этих интенсивностей получим систему

$$\begin{aligned} I_{\lambda}^{+ (1)}(0, \nu) - 2R_{\lambda}^{+ (1)} \int_0^1 I_{\lambda}^{- (1)}(h_1, w) w \exp\left(-\theta_{\lambda}^{(1)} / w\right) dw &= I_{\lambda_s}^{(1)}(\nu), \\ I_{\lambda}^{- (1)}(h_1, \nu) - 2 \int_0^1 R_{ef}(w) I_{\lambda}^{+ (1)}(0, w) w \exp\left(-\theta_{\lambda}^{(1)} / w\right) dw &= \\ &= \begin{cases} \left(n_{\lambda}^{(1)} / n_{\lambda}^{(0)}\right)^2 \left(1 - R_{\lambda}^{+ (0)}\right) I_{\lambda}^{op} \exp\left(-\theta_{\lambda}^{(0)} / \xi_{01}\right), & 0 \leq \nu \leq \nu_{*01}, \\ 0, & \nu_{*01} < \nu \leq 1; \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$R_{ef}(w) = \begin{cases} R_{\lambda}^{- (1)} + R_{\lambda}^{- (0)} \left(1 - R_{\lambda}^{+ (0)}\right) \left(1 - R_{\lambda}^{- (1)}\right) \exp\left(-\frac{\theta_{\lambda}^{(1)}}{w}\right), & 0 \leq w \leq \nu_{*10}, \\ 1, & \nu_{*10} < w \leq 1; \end{cases}$$

Отметим, что система (15) имеет структуру, аналогичную системе уравнений для эффективных интенсивностей излучения на поверхностях облучаемого частично прозрачного слоя. В работах [5, 6] приведено ее решение.

Тепловое состояние пластины (при конкретных условиях теплообмена) свяжем с поглощением энергии излучения слоями, учитывая излучение тепловой энергии непрозрачным слоем. Через эффективные интенсивности $I_{\lambda}^{+ (1)}(0, \nu)$, $I_{\lambda}^{- (1)}(h_1, \nu)$ находим, согласно (7), выражения для тепловыделений $Q_j(z, t)$ ($j = \overline{0, 1}$) в частично прозрачных слоях

$$\begin{aligned}
Q_1(z, t) &= 2\pi \int_0^\infty a_\lambda^{(1)} \int_0^1 \left\{ I_\lambda^{+(1)}(0, v) \exp\left(-a_\lambda^{(1)} z/v\right) + \right. \\
&\quad \left. + I_\lambda^{-(1)}(h_1, v) \exp\left[-a_\lambda^{(1)}(h_1 - z)/v\right] \right\} dv d\lambda, \\
Q_0(z, t) &= 2\pi \int_0^\infty a_\lambda^{(0)} \int_0^1 \left[\left[I_\lambda^{+(10)} + 2R_\lambda^{+(0)} \int_0^1 I_\lambda^{op} w \exp\left(-\theta_\lambda^{(0)}/w\right) dw \right] \times \right. \\
&\quad \times \exp\left[-a_\lambda^{(0)}(h_1 + z)/v\right] + \left[I_\lambda^{op} + 2R_\lambda^{+(0)} \int_0^1 I_\lambda^{+(10)} w \exp\left(-\theta_\lambda^{(0)}/w\right) dw \right] \times \\
&\quad \left. \times \exp\left[-a_\lambda^{(0)}(h_{10} - z)/v\right] \right\} dv d\lambda, \\
I_\lambda^{+(10)} &= \begin{cases} \left(\frac{n_\lambda^{(0)}}{n_\lambda^{(1)}} \right)^2 \left(1 - R_\lambda^{-(1)} \right) I_\lambda^{+(1)}(0, \xi_{10}) \exp\left(-\frac{\theta_\lambda^{(1)}}{\xi_{10}}\right), & 0 \leq v \leq v_{*10}, \\ 0, & v_{*10} < v \leq 1; \end{cases} \quad (16)
\end{aligned}$$

Температуру в пластине определим из следующей системы уравнений теплопереноса

$$\frac{\partial^2 \theta_j(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{\varpi_j} \frac{\partial \theta_j(z, t)}{\partial t} = -\frac{Q_j(z, t)}{\kappa_j}, \quad Q_2(z, t) = 0 \quad (j = \overline{0, 2}), \quad (17)$$

где $\theta_j = T_j - T_0$ – отклонения температур от начальной T_0 ; $\varpi_j = \kappa_j / \rho_j c_{\epsilon j}$ – коэффициенты температуропроводности материалов слоев. Граничные и контактные условия сформулируем в соответствии с (11), (12). В частности, при конвективном теплообмене с внешней средой (температуры T_0) и диффузно-сером характере поверхностей непрозрачного слоя они имеют вид

$$\begin{aligned}
\kappa_1 \frac{\partial [\theta_1(0, t)]}{\partial z} &= H_1 \theta_1(0, t), \\
\kappa_2 \frac{\partial [\theta_2(h, t)]}{\partial z} &= -\sigma \varepsilon [\theta_2(h, t) + T_0]^4 - H_2 \theta_2(h, t), \\
\kappa_1 \frac{\partial [\theta_1(h_1, t)]}{\partial z} &= \kappa_0 \frac{\partial [\theta_0(h_1, t)]}{\partial z}, \quad \theta_1(h_1, t) = \theta_0(h_1, t),
\end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \kappa_0 \frac{\partial [\theta_0(h_{10}, t)]}{\partial z} &= -\sigma \varepsilon^{-(0)} n_0^2 [\theta_2(h_{10}, t) + T_0]^{-4} +, \\ &+ q + \kappa_2 \frac{\partial [\theta_2(h_{10}, t)]}{\partial z}, \quad \theta_0(h_{10}, t) = \theta_2(h_{10}, t); \\ q &= \int_0^\infty \left[\int_0^1 (1 - R_\lambda^{-(0)}) I_\lambda^{+(1)}(0, \nu) \exp(-\theta_\lambda^{(1)}/\nu) d\nu \right] d\lambda. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь H_j – коэффициенты теплоотдачи в области $z < 0$ и $z > h$.

Тонкий промежуточный слой можно исключить из рассмотрения и при исследовании теплопереноса в трехслойной системе, воспользовавшись, в частности, формальным операторным методом (при стягивании толщины слоя к нулю), который для задач теплопроводности и термомеханики однородных и слоистых оболочек развит в работах [8, 9] и др. В частности, этим методом установлены уравнения теплопроводности в тонких однородных оболочках при линейных [8] и нелинейных (за законом Стефана-Больцмана) [9] тепловых граничных условиях. Не излагая выкладок, приведем полученные обобщенные контактные условия теплообмена через частично прозрачный промежуточный слой в рассматриваемой пластине

$$\begin{aligned} 2 \left(\kappa_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} - \kappa_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) &= 2\sigma \varepsilon^{-(0)} n_0^2 \theta_2^4 + \\ &+ C \frac{\partial (\theta_1 + \theta_2)}{\partial z} - \frac{1}{h_0} \int_{-h_0/2}^{h_0/2} Q_0(\theta_2, t) dz_*, \\ 6 \left(\kappa_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} + \kappa_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) - 12D(\theta_2 - \theta_1) &= 6\sigma \varepsilon^{-(0)} n_0^2 \theta_2^4 + \\ &+ C \frac{\partial (\theta_1 - \theta_2)}{\partial t} - \frac{6}{h_0^2} \int_{-h_0/2}^{h_0/2} Q_0(\theta_2, t) z_* dz_*, \end{aligned} \quad (20)$$

где $C = h_0 \rho_0 c \varepsilon_0$, $D = \kappa_0 / h_0$ – приведенные теплоемкость и теплопроницаемость промежуточного слоя.

Таким образом, определение температуры в пластине сведено к решению системы уравнений теплопереноса (17) в основных слоях ($j = 1, 2$) при граничных (18) и обобщенных контактных (20) условиях.

Термонапряженное состояние пластины, как указано выше, определим на основе соотношений температурной задачи теории упругости [7]. При этом систему исходных соотношений для слоев запишем в напряжениях [5]

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}^{(j)}}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^{(j)}}{\partial z^2} + \frac{E_j}{1-\nu_j} \frac{\partial^2 M_j}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{yy}^{(j)}}{\partial z^2} + \frac{E_j}{1-\nu_j} \frac{\partial^2 M_j}{\partial z^2} = 0, \quad (21)$$

где $M_j(T_j) = \alpha_t^{(j)}(T_j - T_0)$; E_j , ν_j , $\alpha_t^{(j)}$ ($j = 0, 2$) – модули Юнга, коэффициенты Пуассона и коэффициенты линейного температурного расширения соответственно.

Граничные условия для пластины, поверхности которой свободны от нагружения, а края $x, y \rightarrow \pm\infty$ свободны от усилий и моментов, а также контактные условия, обеспечивающие равенство перемещений (идеальный контакт), приведены в работе [10]. На основе найденных решений системы (21) с учетом малости толщины промежуточного слоя (учитывая приведенные жесткостные характеристики на изгиб и растяжение промежуточного слоя) получено приближенные соотношения для определения напряжений в основных слоях

$$\sigma_{ll}^{(j)} = -\frac{\alpha_t^{(j)} E_j}{1-\nu_j} (T_j - T^0) + C_1^{(j)} z + C_2^{(j)} \quad (l = x, y; j = 1, 2), \quad (22)$$

где

$$C_1^1 = \frac{6K_{12}M(2K_{12}h_1 - g_0 + 2h_2) + 6K_{12}N(h_2^2 - K_{12}h_1^2)}{(2K_{12}h_1^3 + g_0^* + 2h_2^3)(2K_{12}h_1 - g_0 + 2h_2) - 3(h_2^2 - K_{12}h_1^2)^2},$$

$$C_2^1 = \frac{2K_{12}N(2K_{12}h_1 + g_0^* + 2h_2) - 6K_{12}M(h_2^2 - K_{12}h_1^2)}{(2K_{12}h_1^3 + g_0^* + 2h_2^3)(2K_{12}h_1 - g_0 + 2h_2) - 3(h_2^2 - K_{12}h_1^2)^2},$$

$$M = \frac{\alpha_{t1} E_1}{1-\nu_1} \int_0^{h_1} (z - h_1)(T_1 - T^0) dz + \frac{\alpha_{t2} E_2}{1-\nu_2} \int_{h_1}^h (z - h_1)(T_2 - T^0) dz,$$

$$N = \frac{\alpha_{t1} E_1}{1-\nu_1} \int_0^{h_1} (T_1 - T^0) dz + \frac{\alpha_{t2} E_2}{1-\nu_2} \int_{h_1}^h (T_2 - T^0) dz,$$

$$K_{10} = \frac{E_1}{(1-\nu_1)} \frac{(1-\nu_0)}{E_0}, \quad K_{02} = \frac{E_0}{(1-\nu_0)} \frac{(1-\nu_2)}{E_2}, \quad K_{12} = \frac{E_1}{(1-\nu_1)} \frac{(1-\nu_2)}{E_2},$$

$g_0^* = K_{02}h_0^3/2$, $g_0 = 2K_{02}h_0$ – приведенные жесткости на изгиб и растяжение промежуточного слоя.

РЕЗЮМЕ. Здійснено постановку контактних задач теплопереносу і термопружності в опромінюваних шаруватих тілах зі складниками різної прозорості (зокрема, при наявності тонких проміжкових шарів) за врахування ефектів випромінювання на їх поверхнях, частково прозорих областях і на межах поділу шарів.

SUMMARY. Heat transfer and thermoelastic contact problems for layered solids with different transparencies of layers are posed. Radiation from layers surfaces is taken into account. Specific cases of thin intermediate layers is investigated.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. *Бачин В. А.* Диффузионная сварка стекла и керамики с металлами. – М.: Машиностроение, 1986. – 184 с. 2. *Мусин Р. А., Конюшков Г. В.* Соединение металлов с керамическими материалами – М.: Машиностроение, 1991. – 224 с. 3. *Зигель Р., Хауэлл Д.* Теплообмен излучением. – М.: Мир, 1975. – 935 с. 4. *Рубцов Н. А.* Теплообмен излучением в сплошных средах. – Новосибирск: Наука, 1984. – 277 с. 5. *Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / О. Р. Гачкевич, Р. Ф. Терлецький, Т. Л. Курницький.* – Львів: СПОЛОМ, 2007. – 184 с. 6. *Гачкевич О.Р., Терлецький Р.Ф., Брухаль М.Б.* Деякі проблеми математичного моделювання в термомеханіці тіл різної прозорості за теплового опромінювання // *Мат. методи і фіз.-мех. поля.* – 2008. – Т. 51, № 3. – С. 202–219. 7. *Термоупругость электропроводных тел / Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская.* – К.: Наук. думка, 1977. – 248 с. 8. *Подстригач Я. С., Швець Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек – К.: Наук. думка, 1978. – 343 с. 9. *Подстригач Я. С., Чернуха Ю. А.* Задача теплопроводности для опроминюваних оболонок // *Доп. АН УРСР. Сер. А.* – 1974. – № 3. – С. 263–267. 10. *Турій О. П.* Нелінійна контактно-крайова задача термомеханіки для опромінюваної двохшарової пластини, з'єднаної проміжковим шаром. // *Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології.* – 2009. – № 9 – С. 118–132.

*Институт прикладных проблем механики
и математики НАН Украины, г. Львов*

Поступила 20.04.2009

УДК 539.3

*Р. М. МАРТЫНЯК, д-р физ.-мат. наук, К. А. ЧУМАК***ТЕРМОУПРУГОСТЬ КОНТАКТНОЙ ПАРЫ ПРИ НАЛИЧИИ ШЕРОХОВАТОСТИ НА ЛОКАЛЬНОМ УЧАСТКЕ СОПРЯЖЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

Вследствие шероховатости реальных поверхностей, возникающей в результате разнообразных технологических и эксплуатационных причин, контакт между твердыми телами всегда имеет дискретный характер. Согласно теории контактного теплообмена [1], с дискретностью контакта твердых тел связано контактное термическое сопротивление (КТС). Оно существенно зависит от контактного давления, поскольку с увеличением последнего фактическая площадь контакта шероховатых поверхностей увеличивается. При исследовании термоупругого контакта тел учет зависимости КТС от давления сопряженных поверхностей влечет за собой взаимосвязанность полей температуры и напряжений [2]. Задачи термоупругости для многослойных круговых цилиндров, двух сопряженных плоскопараллельных слоев и слоя, сопряженного с полуплоскостью при наличии межслойного КТС в такой постановке рассматривались в статьях [3–7]. Решены плоская [8] и осесимметричная [9] контактные задачи термоупругости с учетом зависимости КТС от контактного давления на площадке сопряжения поверхностей тел. Исследовано [10, 11] термонапряженное состояние однородной и биматериальной плоскости с закрытой трещиной, термическая проводимость которой является линейной функцией давления ее берегов. Заметим, что в вышеперечисленных работах рассматривался термоупругий контакт тел при условии, что КТС возникает на всей поверхности их сопряжения.

В настоящей статье предлагается методика решения плоской контактной задачи термоупругости для двух полуплоскостей, когда зависящее от контактного давления КТС возникает лишь на локальном участке контактирующих границ, а вне этого участка осуществляется их идеальный тепловой контакт.

Постановка задачи. Рассмотрим контакт двух изотропных полупространств под действием заданных на бесконечности сжимающих однородных усилий p^∞ и стационарного теплового потока q^∞ , перпендикулярных к поверхности раздела тел (рис. 1). Кроме того, для предотвращения глобального термического искривления тел, обусловленного тепловым потоком q^∞ , к ним на бесконечности приложены линейно зависящие от координаты y напряжения σ_{xk}^∞ . Вдоль бесконечной полосы ширины $2b$ поверхность одного из тел шероховатая, что обуславливает неидеальность теплового контакта с термосопротивлением $R(x)$, обратно пропорциональным

контактному давлению $P(x)$ [1]. В настоящей статье будем рассматривать случай, когда КТС описывается функцией

$$R(x) = r(1 - x^2/b^2)^{3/2} / P(x), \quad r = \text{const} > 0.$$

Вне полосы шероховатости осуществляется идеальный тепловой контакт тел. Механический контакт происходит без трения вдоль всей поверхности раздела. Предполагаем, что в полупространствах реализуется двумерное стационарное температурное поле и плоская деформация. Поэтому будем рассматривать контакт двух полуплоскостей D_1

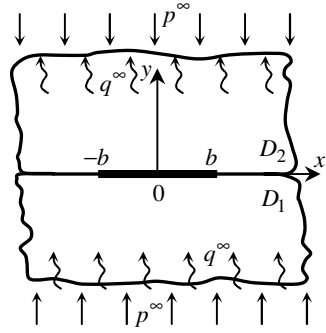


Рис. 1

и D_2 , образованных вследствие пересечения верхнего и нижнего тел произвольной плоскостью, параллельной к плоскости деформации.

Учитывая вышесказанное, условия теплового и механического контакта полуплоскостей запишем в виде

$$q_y^-(x, 0) = q_y^+(x, 0), \quad |x| < \infty, \quad T^-(x, 0) = T^+(x, 0), \quad |x| > b; \quad (1)$$

$$T^-(x, 0) - T^+(x, 0) = R(x)q_y^+(x, 0), \quad |x| \leq b; \quad (2)$$

$$\sigma_y^+(x, 0) = \sigma_y^-(x, 0), \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = \tau_{xy}^+(x, 0) = 0;$$

$$v^+(x, 0) = v^-(x, 0), \quad |x| < \infty. \quad (3)$$

На бесконечности выполняются условия

$$q_x^\infty = 0, \quad q_y^\infty = q^\infty; \quad (4)$$

$$\sigma_{xk}^\infty = \alpha_k E_k q^\infty y / (\lambda_k (1 - \nu_k)), \quad \sigma_y^\infty = -p^\infty, \quad \tau_{xy}^\infty = 0. \quad (5)$$

Здесь T – температура; q_x, q_y – компоненты вектора теплового потока; ν – перемещение в направлении оси Oy ; $E_k, \nu_k, \alpha_k, \lambda_k$ – модуль Юнга, коэффициенты Пуассона, линейного теплового расширения и теплопроводности полуплоскостей D_k ($k = 1, 2$); индексами «+» и «-» обозначены граничные значения функций на оси Ox в верхней и нижней полуплоскости.

Метод решения задачи. Используя метод комплексных потенциалов, температуру, тепловые потоки, напряжения и производные от перемещений представим через функцию скачка температуры $\gamma(x) = T^-(x, 0) - T^+(x, 0)$, возникающего между поверхностями тел вдоль участка с КТС $|x| \leq b$, в виде [11]:

$$T = \operatorname{Re}\left(F(z) + izq^\infty/\lambda_k\right), \quad q_x - iq_y = -\lambda_k F'(z) - iq^\infty; \quad (6)$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \Phi_k(z) - p^\infty + \sigma_{xk}^\infty,$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi_k(z) - \Phi_k(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi_k'(z)} - p^\infty,$$

$$2G_k(\partial u/\partial x + i\partial v/\partial x) = \kappa_k \Phi_k(z) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_k'(z)} + \\ + \Phi_k(\bar{z}) + \alpha_k E_k F(z) + \nu_k p^\infty; \quad (7)$$

$$\Phi_1(z) = -\Phi_2(z) = \frac{\lambda}{2K\pi i} (\delta_1 - \delta_2) \int_{-b}^b \frac{\gamma(t) dt}{t - z},$$

$$F(z) = -\frac{\lambda}{2\lambda_k \pi i} \int_{-b}^b \frac{\gamma(t) dt}{t - z}, \quad z \in D_k \quad (k=1,2). \quad (8)$$

Здесь $\kappa_k = 3 - 4\nu_k$; $\lambda = 2\lambda_1\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$; $K = 2(1 - \nu_1)/G_1 + 2(1 - \nu_2)/G_2$; u – перемещение в направлении оси Ox ; G_k – модуль сдвига; $\delta_k = \alpha_k(1 + \nu_k)/\lambda_k$ – термическая дистортивность (ТД) материала полуплоскости D_k .

Используя первые соотношения в (7) и (8), выразим контактное давление тел $P(x) = -\sigma_y^+(x, 0)$ через скачок температуры:

$$P(x) = p^\infty - [\lambda(\delta_2 - \delta_1)/K] \gamma(x), \quad |x| \leq b; \quad P(x) = p^\infty, \quad |x| > b. \quad (9)$$

Представления (6)–(8) удовлетворяют всем краевым условиям (1)–(5) сформулированной задачи, за исключением условия (2). Удовлетворив последнему с учетом выражения (9), получим нелинейное сингулярное интегро-дифференциальное уравнение (СИДУ) относительно функции $\gamma(x)$:

$$\frac{[Kp^\infty - \lambda(\delta_2 - \delta_1)\gamma(x)]}{Kr(1 - x^2/b^2)^{3/2}} \gamma(x) - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{\gamma'(t) dt}{t - x} = q^\infty, \quad |x| < b. \quad (10)$$

Решение уравнения (10) должно удовлетворять условиям [12]

$$\gamma(\pm b) = 0, \quad \gamma'(\pm b) = 0. \quad (11)$$

Первое условие (11) следует из непрерывности температуры границ тел; выполнение второго условия гарантирует непрерывность и ограниченность тепловых потоков на границах полуплоскостей.

Введя безразмерные величины $\tilde{x} = x/b$, $\tilde{t} = t/b$, $\tilde{r} = r\lambda K/b$,

$\tilde{\gamma} = \lambda\gamma/bq^\infty$, $\tilde{P} = KP$, $\tilde{p}^\infty = Kp^\infty$, $\tilde{q}^\infty = b\delta_1q^\infty$, $\tilde{\delta}_2 = \delta_2/\delta_1$, СИДУ (10) и условия (11) запишем в безразмерном виде

$$\frac{[\tilde{p}^\infty - \tilde{q}^\infty (\tilde{\delta}_2 - 1) \tilde{\gamma}(\tilde{x})] \tilde{\gamma}(\tilde{x})}{\tilde{r}(1 - \tilde{x}^2)^{3/2}} - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{\gamma}'(\tilde{t})}{\tilde{t} - \tilde{x}} d\tilde{t} = 1, \quad |\tilde{x}| < 1; \quad (12)$$

$$\tilde{\gamma}(\pm 1) = 0, \quad \tilde{\gamma}'(\pm 1) = 0. \quad (13)$$

Для решения нелинейного СИДУ (12) разработана следующая методика. Задаются значения \tilde{p}^∞ и \tilde{q}^∞ из интересующих нас диапазонов изменения внешней нагрузки и теплового потока соответственно. Для пары $\{\tilde{p}^\infty, \tilde{q}^\infty\}$ уравнение (12) решается методом последовательных приближений. Начальное приближение $\tilde{\gamma}_0(\tilde{x})$ функции скачка температуры определяется из уравнения

$$\frac{\tilde{p}^\infty \tilde{\gamma}_0(\tilde{x})}{\tilde{r}(1 - \tilde{x}^2)^{3/2}} - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{\gamma}'_0(\tilde{t})}{\tilde{t} - \tilde{x}} d\tilde{t} = 1, \quad |\tilde{x}| < 1, \quad (14)$$

которое физически соответствует пренебрежению влиянием скачка температуры на контактное давление. Каждое последующее приближение скачка температуры $\tilde{\gamma}_i(\tilde{x})$, $i = 1, 2, \dots$, определяется из линейного СИДУ

$$\frac{[\tilde{p}^\infty - \tilde{q}^\infty (\tilde{\delta}_2 - 1) \tilde{\gamma}_{i-1}(\tilde{x})] \tilde{\gamma}_i(\tilde{x})}{\tilde{r}(1 - \tilde{x}^2)^{3/2}} - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{\gamma}'_i(\tilde{t})}{\tilde{t} - \tilde{x}} d\tilde{t} = 1, \quad |\tilde{x}| < 1, \quad (15)$$

которое в левой части содержит определенную на предыдущем шаге функцию $\tilde{\gamma}_{i-1}(\tilde{x})$.

В соответствии с (13), функции $\tilde{\gamma}_i(\tilde{x})$ должны удовлетворять условиям

$$\tilde{\gamma}_i(\pm 1) = 0, \quad \tilde{\gamma}'_i(\pm 1) = 0. \quad (16)$$

Для решения СИДУ (14), (15) применяется аналитико-численный метод [12, 13], учитывающий наличие в левой части этих уравнений выражения $1/(1 - \tilde{x}^2)^{3/2}$ при искомым функциях $\tilde{\gamma}_i(\tilde{x})$.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока относительная погрешность очередного приближения $\varepsilon_i = |(\tilde{\gamma}_i(0) - \tilde{\gamma}_{i-1}(0))/\tilde{\gamma}_i(0)|$ в точке $\tilde{x} = 0$, где функции $|\tilde{\gamma}_i(\tilde{x})|$ достигают максимального значения, не станет меньше $\varepsilon = 10^{-5}$ ($\varepsilon_i \leq \varepsilon$). После достижения заданной точности искомой функции скачка $\tilde{\gamma}(\tilde{x})$ присваивается значение $\tilde{\gamma}_i(\tilde{x})$ на последней итерации.

Описание и анализ численных результатов. Численные расчеты проведены для тел, ТД одного из которых (верхнего) в два раза меньше ТД другого (нижнего): $\tilde{\delta}_2 = \delta_2/\delta_1 = 0,5$. Параметр \tilde{r} полагался равным 0,001. Анализировалось влияние направления и величины теплового потока, а также силовой нагрузки, на контактное давление поверхностей на участке с шероховатой поверхностью. Заметим, что определяющим термомеханическое поведение контактной пары фактором является не направление теплового потока вообще, а то, направлен ли он от материала с меньшей ТД к материалу с большей ТД (в этом случае входящий в уравнение (12) коэффициент $\tilde{q}^\infty (\tilde{\delta}_2 - 1)$ положительный), или к материалу с меньшей ТД ($\tilde{q}^\infty (\tilde{\delta}_2 - 1) < 0$).

На рис. 2 изображены графики распределения контактного давления тел $\tilde{P}(\tilde{x})$ при фиксированной внешней силовой нагрузке $\tilde{p}^\infty = 0,01$ и изменении величины теплового потока в двух случаях: когда он направлен к телу с меньшей ТД (1 – $\tilde{q}^\infty = 0,01$, 2 – $\tilde{q}^\infty = 0,02$) и когда направлен к телу с большей ТД (3 – $\tilde{q}^\infty = -0,01$, 4 – $\tilde{q}^\infty = -0,02$). Из графиков следует, что с возрастанием абсолютного значения теплового потока в первом случае контактное давление увеличивается, а во втором случае – убывает. При этом поток заданной интенсивности, направленный к материалу с большей ТД, приводит к большему отклонению давления от постоянного давления \tilde{p}^∞ , возникающего при сугубо механическом контакте, чем поток такой же интенсивности, направленный к материалу с меньшей ТД.

На рис. 3 проиллюстрировано влияние изменения внешней нагрузки (1 – $\tilde{p}^\infty = 0,011$, 2 – $\tilde{p}^\infty = 0,01$, 3 – $\tilde{p}^\infty = 0,0099$) на контактное давление тел при фиксированной величине теплового потока $|\tilde{q}^\infty| = 0,01$. Штриховым

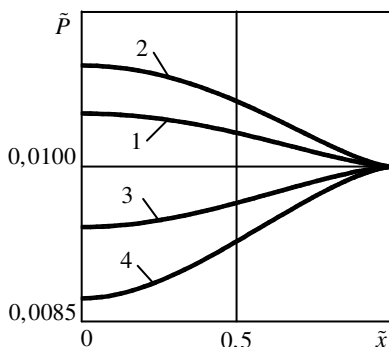


Рис. 2

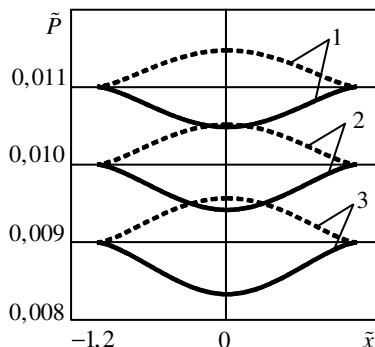


Рис. 3

линиям соответствует случай потока тепла к менее дистортивному материалу, сплошным – к более дистортивному материалу. Видно, что чем меньше силовая нагрузка, тем существеннее обусловленное термическими деформациями отклонение контактного давления от постоянного, причем амплитуда этого отклонения всегда выше в случае теплового потока, направленного к телу с большей ТД.

В статье [14] был обнаружен эффект локального расслоения тел на участке неидеального теплового контакта поверхностей при превышении тепловым потоком некоторой критической величины, если он направлен от материала с меньшей ТД к материалу с большей ТД. Проведенный в настоящей работе численный эксперимент выявил аналогичную тенденцию и при наличии локального КТС, обусловленного шероховатостью поверхностей. Однако изучение такого эффекта в рассмотренном случае требует более глубоких исследований.

РЕЗЮМЕ. Здійснено постановку плоскої контактної задачі термопружності для ізотропних півплощин, що перебувають під дією однорідних стискальних зусиль і теплового потоку, заданих на нескінченності. Границя одного з тіл є шорсткою на локальній ділянці, внаслідок чого на ній між тілами виникає контактний термоопір, обернено пропорційний контактному тиску. Задачу зведено до нелінійного сингулярного інтегро-диференціального рівняння відносно стрибка температури між поверхнями тіл на ділянці з шорсткістю, для розв'язання якої застосовано метод послідовних наближень. Проведено числовий аналіз контактного тиску в залежності від величини прикладених зусиль і теплового потоку, скерованого як від матеріалу з меншою термічною дистортивністю до матеріалу з більшою дистортивністю, так і в протилежному напрямі.

SUMMARY. Statement of the plane contact problem of thermoelasticity for isotropic half-planes under uniform compressive stresses and heat flux imposed at infinity is carried out. The boundary of one of the solids has a local roughness. It causes pressure-inversed contact thermal resistance between the solids. The problem is reduced to a nonlinear singular integrodifferential equation in a temperature jump between surfaces of the solids on the area with asperity. To solve the obtained equation the method of successive approximations is applied. A numerical analysis of contact pressure depending on the value of imposed pressure and heat flux is carried out for two cases: when heat flows from the material with the lower distortivity to the more distortive material, and vice versa.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. Шлыков Ю. П., Ганин Е. А., Царевский С. Н. Контактное термическое сопротивление. – М.: Энергия. – 1977. – 328 с. 2. Dundurs J., Comninou M. Stability considerations in thermoelastic contact // ASME J. Appl. Mech. – 1980. – Vol. 47. – P. 871–874. 3. Куликовская О. А. Термоупругие напряжения в многослойном цилиндре при теплопередаче, зависящей от давления на поверхности контакта // Прикладная механика. – 1973. – Т. 9, № 10. – С. 40–46. 4. Barber J. R. Nonuniqueness and stability for heat conduction through a duplex heat exchanger tube // J. Thermal Stresses. – 1986. – Vol. 9. – P. 69–78. 5. Chuan Li, Barber J. R. Thermoelastic stability of duplex heat exchanger tubes // Int. J. Mech. Sci. – 1998. – Vol. 40, № 6. – P. 575–588. 6. Chuan Li, Barber J. R. Stability of thermoelastic contact of two layers of dissimilar materials // J. Thermal Stresses. – 1997. – Vol. 20. – P. 169–184. 7. Taein Yeo, Barber J. R. Stability of thermoelastic contact of a layer and a half-plane // J. Thermal Stresses. – 1991. – Vol. 14. – P. 371–378. 8. Comninou M., Barber J. R. The thermoelas-

tic Hertz problem with pressure dependent contact resistance // Int. J. Mech. Sci. – 1984. – Vol. 26. – P. 549–554. 9. *Kulchytsky-Zhyhailo R. D., Olesiak Z. S., Yevtushenko O. O.* On thermal contact of two axially symmetric elastic solids // J. Elasticity. – 2001. – Vol. 63. – P. 1–17. 10. *Kim G. S., Мартиняк Р. М., Нагалка С. П.* Термопружні ефекти в тілі з тріщиною, закритою зосередженими силами // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, № 2. – С. 101–107. 11. *Мартиняк Р. М.* Механотермодифузійна взаємодія тіл з контактано-поверхневими неоднорідностями і дефектами: Дис. докт. фіз.-мат. наук: 01.02.04 – Львів, 2000. – 372 с. 12. *Мартиняк Р. М., Чумак К. А.* Термопружний контакт півпросторів, що мають однакові термічні дистортивності, за наявності теплопроникного міжповерхневого просвіту // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 3. – С. 163–175. 13. *Мартыняк Р. М., Чумак К. А.* Неполный контакт полупространств при воздействии теплового потока, направленного к материалу с меньшей термической дистортивностью // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 9–15. 14. *Швец Р. Н., Мартыняк Р. М.* Термоупругое контактное взаимодействие тел при наличии поверхностных теплофизических неоднородностей // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1988. – Т. 27. – С. 23–28.

*Институт прикладных проблем механики
и математики НАН Украины, г. Львов*

Поступила 15.04.2009

УДК 539.376

В. П. ГОЛУБ, д-р. техн. наук,
Ю. М. КОБЗАРЬ, канд. физ.-мат. наук, В. С. РАГУЛИНА

К ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЯДЕР НАСЛЕДСТВЕННОСТИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Одна из основных задач, решаемых в наследственной теории вязкоупругости, связана с выбором ядра. Эта задача сводится, как правило, к идентификации ядер ползучести, которые характеризуют вязкоупругие свойства материалов и входят в определяющие уравнения, устанавливающие зависимость между напряжениями, деформациями и временем. В некоторых задачах в качестве исходных характеристик вязкоупругих свойств материалов используются ядра релаксации. Как известно [1–3], выбор эффективного метода определения параметров ядер ползучести существенно зависит от физической интерпретации структуры ядра. В линейной теории вязкоупругости ядро ползучести пропорционально скорости ползучести и функция, задающая зависимость ядра от времени, может быть построена по результатам дифференцирования кривой ползучести. В нелинейной теории вязкоупругости ядро ползучести, по существу, не идентифицировано, поскольку при построении определяющих уравнений используется несколько видов нелинейности. В настоящей работе дается физическая интерпретация ядер наследственности в нелинейной теории с не зависящим от времени видом нелинейности, который задается нелинейностью диаграммы мгновенного деформирования.

1. Постановка задачи исследования. Определяющие уравнения в нелинейной теории вязкоупругости с независящим от времени видом нелинейности задаются соотношениями [4, 5]

$$\begin{aligned}\varphi_0(\varepsilon(t)) &= \sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau, \\ \sigma(t) &= \varphi_0(\varepsilon(t)) - \lambda \int_0^t R(t-\tau)\varphi_0(\varepsilon(\tau))d\tau,\end{aligned}\quad (1.1)$$

где $\varepsilon(t)$, $\varepsilon(\tau)$ – полная деформация, включающая упругую компоненту ε_e и компоненту ползучести ε_c в моменты времени t и τ ; $\sigma(t)$, $\sigma(\tau)$ – напряжения, действующие в моменты времени t и τ ; $\varphi_0(\cdot)$ – функция, задающая диаграмму мгновенного деформирования; $K(t-\tau)$ – ядро ползучести; λ – реологический параметр ($\lambda > 0$); t – время наблюдения; τ – время, предшествующее моменту наблюдения.

Величина λ устанавливает зависимость между ядрами ползучести $K(\cdot)$ и релаксации $R(\cdot)$ в форме

$$K(t) = R(t) - \lambda \int_0^t K(t-\tau)R(\tau)d\tau, \quad (1.2)$$

позволяющей по ядрам ползучести идентифицировать ядра релаксации.

Функция $\varphi_0(\cdot)$, определяющая вид нелинейности в (1.1), задается од-
ночленной степенной аппроксимацией

$$\varphi_0(\varepsilon_e) = \frac{H}{q} (\varepsilon_e)^q, \quad (1.3)$$

где H , q – коэффициенты, определяемые по результатам обработки экс-
периментальных данных испытаний образцов материала на одноосное рас-
тяжение.

Задача состоит в установлении физической сущности ядра ползучести
в определяющем уравнении (1.1) и связанного с ним посредством соотно-
шения (1.2) ядра релаксации, а также в формулировке процедур, исполь-
зуемых при определении параметров ядер.

2. Обоснование вида нелинейности исходной модели. Интеграль-
ное определяющее уравнение (1.1) устанавливает связь между деформа-
цией, напряжением и временем для нелинейно-вязкоупругих материалов с
независящим от времени видом нелинейности. Нелинейность процесса
ползучести определяется, как видно, нелинейностью диаграммы мгновен-
ного деформирования $\varphi_0(\cdot)$ и следует из условия существования единой
изохронной диаграммы деформирования. Единая изохронная диаграмма
отражает подобие изохронных диаграмм ползучести $\varphi_t(\varepsilon_i(t_j))$ и диаграм-
мы мгновенного деформирования $\varphi_0(\varepsilon_i(0))$.

Обобщенное условие подобия изохронных диаграмм ползучести,
включая и диаграмму мгновенного деформирования как изохрону для мо-
мента времени $t = 0$, записывается в виде

$$\varphi_0(\varepsilon_i(0)) = \left[1 + G(t_j)\right] \varphi_t(\varepsilon_i(t), t_j), \quad (2.1)$$

задающем подобие в плоскости (φ, ε) для каждого из фиксированных
уровней деформации $\varepsilon_i(t)$ в интервале $i = \overline{1, \ell}$ по параметру t_j . Здесь
 $1 + G(t_j)$ ($j = \overline{1, n}$) – функция подобия, определяемая для каждой изохрон-
ной диаграммы ползучести; $\varphi_0(\cdot)$, $\varphi_t(\cdot)$ – функции, задающие напряжения
 σ_i по диаграмме мгновенного деформирования и по изохронным диаграм-
мам ползучести соответственно для каждого из моментов времени t_j .

Существование единой изохронной диаграммы деформирования в соответствии с (2.1) может быть обосновано приведением исходных изохронных диаграмм ползучести (рис. 1, а тонкие сплошные линии) к диаграмме мгновенного деформирования (толстая сплошная линия) с помощью ос-

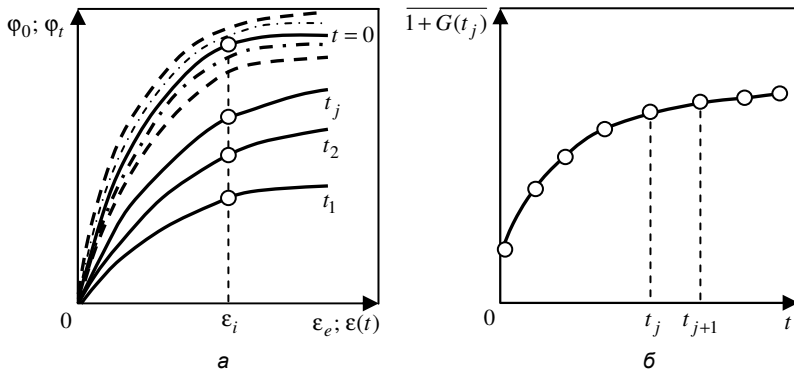


Рис. 1

редненной функции подобия $\overline{1+G(t_j)}$. Приведенные изохронные диаграммы ползучести показаны пунктирными линиями. Считается, что единая изохронная диаграмма деформирования обоснована с погрешностью δ , если приведенные изохронные диаграммы ползучести не выходят за пределы интервала, ограниченного величиной δ по отношению к диаграмме мгновенного деформирования. С достаточной для практических расчетов точностью величина δ может быть принята равной $\pm 5\%$. Интервал, соответствующий погрешности δ , на рис. 1, а показан штриховыми линиями.

Величина $\overline{1+G(t_j)}$ определяется из соотношения

$$\overline{1+G(t_j)} = \frac{\sum_{i=1}^l (\varphi_0(\varepsilon_i, 0)\varphi_t(\varepsilon_i, t_j))}{\sum_{i=1}^l (\varphi_t(\varepsilon_i, t_j))^2}, \quad (2.2)$$

которое осредняет функцию подобия $(1+G(t_j))$; она найдена для каждой j -й изохронной диаграммы ползучести, и позволяет рассчитывать дискретные значения функции подобия и соответственно дискретные значения приведенных изохронных диаграмм ползучести.

Характерная зависимость дискретных значений осредненной функции подобия от времени показана на рис. 1, б точками, а тонкой сплошной линией нанесена аппроксимация дискретных значений осредненной функции подобия. В качестве аппроксимирующей функции может быть использован кубический сглаживающий сплайн [6]

$$\overline{1+G(t_j)} = \overline{A_j} + \overline{B_j}(t-t_j) + \overline{C_j}(t-t_j)^2 + \overline{D_j}(t-t_j)^3, \quad (2.3)$$

коэффициент $\overline{A_j}$ и коэффициенты

$$\overline{B_j} = \frac{\tilde{G}_{j+1} - \tilde{G}_j}{h_j} - \frac{h_i}{6}(2k_j + k_{j+1}), \quad \overline{C_j} = \frac{k_j}{2}, \quad \overline{D_j} = \frac{k_{j+1} - k_j}{6h_j},$$

которого определяются по результатам аппроксимации численных значений осредненной функции подобия (точки на рис. 1, б). Здесь $\tilde{G}_j = \overline{1+G_j}$ и $\tilde{G}_{j+1} = \overline{1+G_{j+1}}$ – табличные значения осредненной функции подобия в точках t_j и t_{j+1} ; k_j, k_{j+1} – коэффициенты сплайна; $h_j = t_{j+1} - t_j$.

Единая изохронная диаграмма деформирования позволяет упругую компоненту $\varepsilon_i(0)$ в (2.1) заменить на деформацию $\varepsilon_i(t)$, зависящую от времени и отождествить нелинейность процесса ползучести с нелинейностью диаграммы мгновенного деформирования. В этом случае уравнение (2.1) преобразуется к виду

$$\varphi_0(\varepsilon(t)) = (1+G(t))\sigma, \quad (2.4)$$

где принято, что $\sigma = \varphi_t(\varepsilon_i(t))$, а индексы i и j опущены.

Уравнение (2.4) справедливо при постоянных напряжениях. Выбирая далее в качестве функции подобия интегральный оператор Вольтера и рассматривая переменный режим нагружения, уравнение (2.4) преобразуется к уравнению ползучести наследственного типа (1.1).

3. Идентификация ядер нелинейной ползучести. Математические, логические и экспериментальные процедуры, используемые при определении параметров ядер ползучести, формулируются обычно, исходя из их физического смысла. В нелинейной модели (1.1) физический смысл ядра $K(t-\tau)$ устанавливается при условии постоянства напряжений во времени. Для случая $\sigma(t) = \sigma = const$ уравнение (1.1) записывается в виде

$$\varphi_0[\varepsilon(t)] = \sigma \left[1 + \lambda \int_0^t \tilde{K}(\tau) d\tau \right], \quad (3.1)$$

который при $t=0$ описывает диаграмму мгновенного деформирования $\varphi_0[\varepsilon(0)] = \sigma$. Здесь принято, что $K(t-\tau) = \tilde{K}(\tau)$.

Дифференцируя обе части уравнения (3.1) по t и учитывая, что левая часть (3.1) представляет собой сложную функцию, для скорости нелинейной ползучести получаем соотношение

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \left\{ \frac{d\varphi_0(\varepsilon(t))}{d\varepsilon(t)} \right\}^{-1} \lambda \tilde{K}(t) \sigma, \quad (3.2)$$

откуда для ядра нелинейной ползучести $\tilde{K}(t)$ находим

$$\tilde{K}(t) = \frac{1}{\lambda \sigma} \frac{d\varphi_0(\varepsilon(t))}{d\varepsilon(t)} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{1}{\lambda} \frac{\tilde{E}(\varepsilon(t))}{\sigma} \frac{d\varepsilon(t)}{dt}. \quad (3.3)$$

Здесь $\tilde{E}(\varepsilon(t)) = d\varphi_0(\varepsilon(t))/d\varepsilon(t)$ – касательный модуль, определяемый по диаграмме мгновенного деформирования, зависящий от текущей деформации ползучести и изменяющийся в пределах от $\tilde{E}(\cdot) = E$ до $\tilde{E}(\cdot) = E_* < E$ или до $\tilde{E}(\cdot) = 0$.

В области деформаций ползучести, для которой $\tilde{E}(\varepsilon(t)) = E$, для величины $K(t)$ из (3.3) следует соотношение

$$K(t) = \frac{1}{\lambda} \frac{E}{\sigma} \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (3.4)$$

которое совпадает с зависимостью между ядром ползучести и скоростью ползучести, установленной в линейной теории вязкоупругости [2].

Из соотношения (3.3) видно, что ядро нелинейной ползучести, как собственно и ядро линейной ползучести (3.4), пропорционально скорости ползучести. Различие связано с величиной коэффициента пропорциональности. В линейной теории вязкоупругости коэффициент пропорциональности при $\sigma = const$ является величиной постоянной. В нелинейной теории вязкоупругости (1.1) коэффициент пропорциональности является величиной переменной, зависящей от величины касательного модуля, который в свою очередь зависит от величины текущей деформации ползучести $\varepsilon(t)$. В этом случае ядро ползучести $\tilde{K}(t)$ не может быть идентифицировано по результатам дифференцирования экспериментальной кривой ползучести, поскольку ядро определяется не только законом изменения скорости ползучести во времени, но и законом изменения касательного модуля в функции деформации ползучести.

Дифференцируя далее уравнение (2.4) по t как сложную функцию, для скорости нелинейной ползучести получаем уравнение

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \sigma \left\{ \frac{d\varphi_0[(1+G(t))\sigma]}{d[(1+G(t))\sigma]} \right\}^{-1} \frac{d(1+G(t))}{dt} \sigma, \quad (3.5)$$

где с целью обобщения символ осреднения опущен.

Из сопоставления уравнений (3.2) и (3.5) для ядра нелинейной ползучести $\tilde{K}(t)$ получаем соотношение

$$\tilde{K}(t) = \frac{1}{\lambda} \frac{d(1+G(t))}{dt}, \quad (3.6)$$

которое показывает, что ядро ползучести в нелинейной модели (1.1) пропорционально скорости изменения функции подобия $1+G(t)$ изохронных диаграмм ползучести и диаграммы мгновенного деформирования.

Из соотношения (3.6) следует, что функция, задающая ядро нелинейной ползучести, строится по результатам дифференцирования функции подобия. В этом случае, ядро нелинейной ползучести $\tilde{K}(t_j)$, исходя из (3.6) с учетом (2.3) определяется соотношением

$$\tilde{K}(t_j) = \frac{1}{\lambda} \left[B_j + 2C_j(t-t_j) + 3D_j(t-t_j)^2 \right], \quad (3.7)$$

которое задает дискретные значения ядра ползучести $\tilde{K}(t_j)$ для нескольких дискретных значений времени t_j .

Характерный вид дискретных значений ядра ползучести $\tilde{K}(t_j)$, построенных согласно (3.7), показан схематически на рис. 2, а точками. Тонкой сплошной линией нанесена одна из возможных аппроксимаций дис-

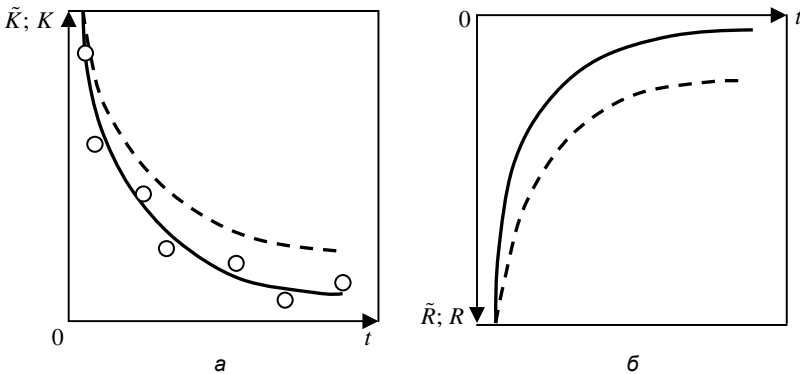


Рис. 2

кретных значений ядра $\tilde{K}(t_j)$ известным аналитическим выражением ядра.

В качестве аналитических выражений для ядер ползучести могут быть использованы экспоненциальная функция и сумма экспонент, степенная функция, комбинация степенной и экспоненциальной функций, а также дробно-экспоненциальная функция. Детальный анализ особенностей структур известных ядер ползучести представлен в [2, 3].

Ядра нелинейной ползучести (3.3) и линейной ползучести (3.4) являются мерой скорости ползучести. Между этими ядрами получаем нелинейную зависимость вида

$$\frac{\tilde{K}(t)}{K(t)} = \frac{\tilde{E}(\varepsilon(t))}{E} \Rightarrow \tilde{K}(t) = \frac{\tilde{E}(\varepsilon(t))}{E} K(t), \quad (3.8)$$

в которой коэффициент пропорциональности является функцией текущей деформации ползучести и, следовательно, функцией времени, причем $\tilde{E}(\varepsilon(t)) \leq E$. Очевидно, что для всех значений $t > 0$, значения ядра нелинейной ползучести $\tilde{K}(t)$ будут меньше значений ядра линейной ползучести $K(t)$. Если $\tilde{E}(\varepsilon(t)) = E$, то при $t \rightarrow 0$ величина $\tilde{K}(t) = K(t)$. Аппроксимация дискретных значений ядра $K(t)$, качественно удовлетворяющая зависимости (3.8), на рис. 2, а показана штриховой линией.

4. Идентификация ядер нелинейной релаксации. Физический смысл ядра релаксации $R(t - \tau)$ в нелинейной модели (1.1) устанавливается при условии постоянства деформации во времени. В случае, когда $\varepsilon(t) = \varepsilon = const$, уравнение релаксации в (1.1) записывается в виде

$$\sigma(t) = \varphi_0(\varepsilon) = \left(1 - \lambda \int_0^t \tilde{R}(\tau) d\tau \right), \quad (4.1)$$

где принято, что $R(t - \tau) = \tilde{R}(\tau)$.

Дифференцируя обе части уравнения (4.1) по t , для скорости нелинейной релаксации получаем соотношение

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = -\lambda \varphi_0(\varepsilon) \tilde{R}(t), \quad (4.2)$$

откуда для ядра нелинейной релаксации $\tilde{R}(t)$ находим

$$\tilde{R}(t) = -\frac{1}{\lambda \varphi_0(\varepsilon)} \frac{d\sigma(t)}{dt}, \quad (4.3)$$

где величина $\varphi_0(\varepsilon) = \sigma_0$ задает начальное значение приложенного напряжения согласно (1.3).

В области напряжений, для которых $\varphi_0(\varepsilon) = E\varepsilon$, для величины $R(t)$ из (4.3) получаем уравнение

$$R(t) = -\frac{1}{\lambda E \varepsilon} \frac{d\sigma(t)}{dt}, \quad (4.4)$$

которое соответствует зависимости между ядром релаксации и скоростью релаксации в линейной теории вязкоупругости. Здесь E – модуль линейной упругости.

Между ядрами релаксации $\tilde{R}(t)$ и $R(t)$ из уравнений (4.3) и (4.4) следует соотношение

$$\tilde{R}(t) = -E\varepsilon R(t)/\varphi_0(\varepsilon), \quad (4.5)$$

в котором, в отличие от (3.8), коэффициент пропорциональности не зависит от времени, причем $E\varepsilon \geq \varphi_0(\varepsilon)$. Очевидно, что для всех значений $t > 0$, значения ядра нелинейной релаксации $\tilde{R}(t)$ будут больше значений ядра линейной релаксации $R(t)$. В случае, когда $E\varepsilon = \varphi_0(\varepsilon)$, что справедливо при $t \rightarrow 0$, величина $\tilde{R}(t) = R(t)$. Соотношение между ядрами нелинейной $\tilde{R}(t)$ и линейной $R(t)$ релаксации, удовлетворяющее уравнению (4.5), показано на рис. 2, б. Зависимость ядра нелинейной релаксации от времени показана тонкой сплошной линией, а линейной релаксации – штриховой линией.

Из уравнений (4.3) и (4.4) видно, что ядро нелинейной релаксации $\tilde{R}(t)$, как и ядро линейной релаксации $R(t)$, пропорционально скорости релаксации. Коэффициенты пропорциональности являются величинами постоянными, что позволяет идентифицировать ядра $\tilde{R}(t)$ и $R(t)$ по результатам дифференцирования экспериментальных кривых релаксации.

5. Экспериментальная апробация. Основные процедуры идентификации ядер наследственности в нелинейной модели (1.1) могут быть апробированы экспериментально на основе анализа данных испытаний на кратковременное деформирование, на ползучесть при постоянных напряжениях и на релаксацию. В настоящей работе анализируются экспериментальные данные, полученные при испытании на кратковременное деформирование и на ползучесть при постоянных напряжениях. Используются заимствованные экспериментальные данные для фторопласта-4 [7] при одноосном растяжении и для стеклопластика ТС-8/3-250 [8] при растяжении под углом $\varphi = 45^\circ$ к направлению армирования.

На рис. 3 представлены первичные экспериментальные кривые ползу-

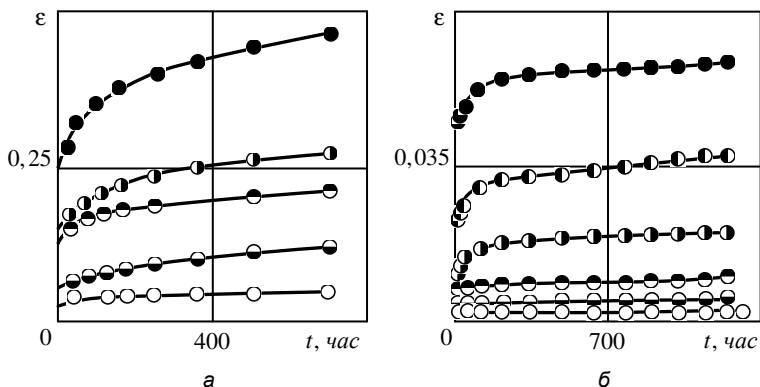


Рис. 3

части фторопласта-4 (а) и стеклопластика ТС-8/3-250 (б). Экспериментальные данные показаны точками, а линиями нанесена аппроксимация экспериментальных данных сглаживающими кубическими сплайнами вида (2.3). Кривые ползучести для фторопласта построены при напряжениях, $\sigma_k = 5,2$ (○), 8,7 (◐), 10,4 (◑), 12,1 (◒) и 14,4 (●) МПа, а для стеклопластика – при напряжениях $\sigma_k = 20,3$ (○), 40,6 (◐), 60,9 (◑), 81,2 (◒), 101,5 (◓), 121,8 (⊗) и 142,8 (●) МПа.

Существование единой изохронной диаграммы деформирования подтверждается на рис. 4 для фторопласта (а) и для стеклопластика (б). Приведенные (штрихпунктирные линии) к диаграмме мгновенного деформиро-

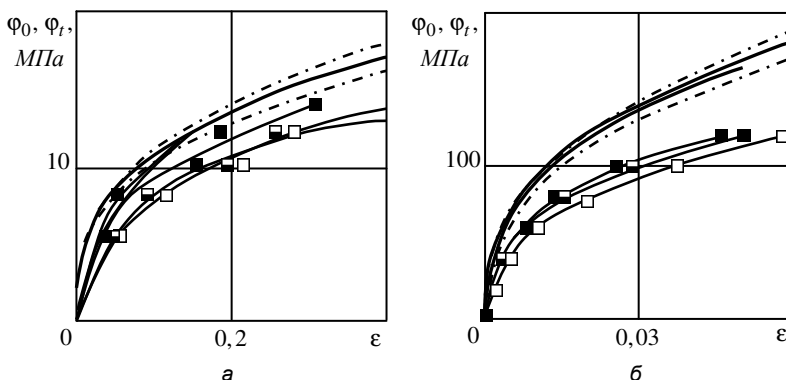


Рис. 4

вания (жирная сплошная линия) с помощью осредненной функции подобия (2.2) исходные изохронные диаграммы ползучести (тонкие сплошные линии) не выходят, как видно, за пределы интервала, ограниченного величиной погрешности $\delta = \pm 5\%$ (штриховые линии). Дискретные значения исходных и приведенных изохронных диаграмм ползучести нанесены квадратами. Для фторопласта квадраты соответствуют моментам времени $t_j = 40$ (■), 350 (◐), 650 (◑) часов, а для стеклопластика – моментам времени $t_j = 29$ (■), 72 (◐), 1206 (◑) часов.

Дискретные значения осредненной функции подобия $\overline{1+G(t)}$, удовлетворяющей условию подобия (2.1), показаны на рис. 5 точками, а на рис.6 также точками показаны дискретные значения ядер ползучести, полученные дифференцированием согласно (3.6) функции, аппроксимирующей дискретные значения осредненной функции подобия. Тонкими сплошными линиями на рис. 6 показан возможный вариант аппроксимации дискретных значений ядер ползучести аналитическим выражением ядра. Зависимость ядер ползучести фторопласта (рис. 6, а) и стеклопластика (рис. 6, б) от времени удовлетворяет, как видно, условию сингулярности ($K \rightarrow \infty$ при

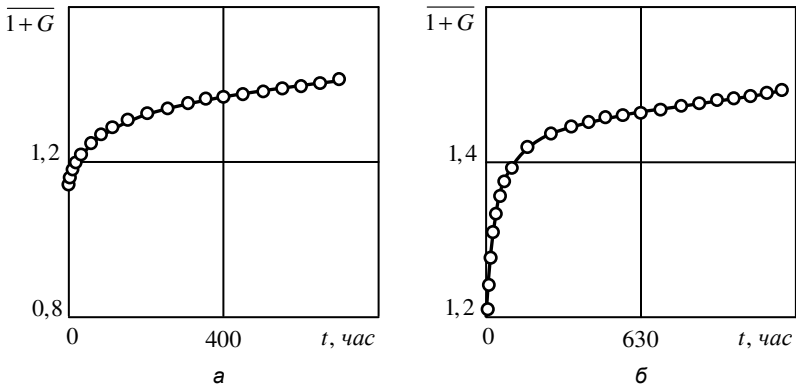


Рис. 5

$t \rightarrow 0$) и условию затухающей памяти ($K \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$).

Таким образом, концепция подобия изохронных диаграмм ползучести и диаграммы мгновенного деформирования позволяет построить нелинейную модель вязкоупругости наследственного типа с независимой от времени нелинейностью. Нелинейность модели определяется нелинейностью диаграммы мгновенного деформирования. Характеристики диаграммы мгновенного деформирования используются также при реализации аналитических и экспериментальных процедур идентификации ядер наследственно-

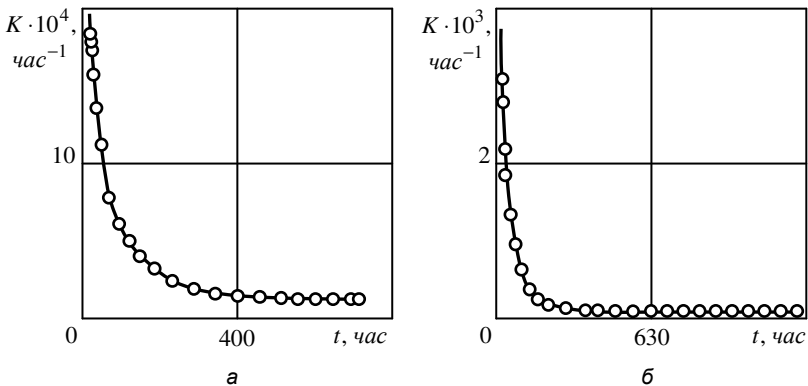


Рис. 6

сти нелинейной модели вязкоупругости. Это позволило установить, что ядра нелинейной ползучести и релаксации, как и ядра в линейной теории, пропорциональны скорости процесса. Коэффициент пропорциональности для ядра нелинейной ползучести является величиной переменной и зависит от касательного модуля, который в свою очередь зависит от времени. Коэффициент пропорциональности для ядра нелинейной релаксации явля-

ется величиной постоянной. В каждый фиксированный момент времени ядра нелинейной наследственности меньше ядер в линейной теории. Дискретные значения ядер наследственности в нелинейной теории вязкоупругости с независимой от времени нелинейностью, которая задается нелинейностью диаграммы мгновенного деформирования, определяется по результатам дифференцирования функции подобия изохронных диаграмм ползучести и диаграммы мгновенного деформирования.

РЕЗЮМЕ. Викладено аналітичні та експериментальні процедури ідентифікації ядер спадковості в нелінійній теорії в'язкопружності із незалежною від часу нелінійністю. Процедурами передбачено обґрунтування виду нелінійності визначальних рівнянь теорії, встановлення фізичного сенсу ядра нелінійної спадковості та визначення дискретних значень ядер спадковості. Показано, що ядра нелінійної повзучості та релаксації є мірами швидкостей відповідних процесів. Наведено експериментальне обґрунтування процедур ідентифікації ядер нелінійної спадковості на прикладі нелінійної повзучості фторопласту-4 та склопластику TC-8/3-250.

SUMMARY. Analytical and experimental procedures of the identification of heredity kernels in the nonlinear theory of viscoelasticity with the time independent nonlinearity has been stated. The justification of the nonlinearity form of the constitutive equations of the theory, the establishment of the physical sense of nonlinear heredity kernels as well as the determination of discrete values of heredity kernels have been provided using the procedures. The nonlinear creep and relaxation kernels were demonstrated to be a measure of the rate of corresponding processes. The experimental justification of the identification procedures of nonlinear heredity kernels has been presented by the example of nonlinear creep of fluoroplastic-4 and glass-fibre reinforced plastic TC-8/3-250.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. Кристенсен Р. М. Введение в теорию вязкоупругости // Пер. с англ. под ред. Г. С. Шапиро. – М.: Мир, 1974. – 340 с. 2. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. – М.: Высшая школа, 1976. – 279 с. 3. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с. 4. Голуб В. П. Длительная нелинейная ползучесть вязкоупругих волокнистых однонаправленных композитов при растяжении // Вісн. Донец. ун-ту. Серія А, Природ. науки. – 2006. – Вип. 1, ч. 1. – С. 97–101. 5. Голуб В. П., Кобзарь Ю. М., Фернати П. В. Нелинейная ползучесть волокнистых однонаправленных композитов при растяжении в направлении армирования // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 20–34. 6. Голуб В. П., Погребняк А. Д., Романенко И. Б. О применении сглаживающих сплайн-аппроксимаций в задачах идентификации параметров ползучести // Прикладная механика. – 1997. – Т. 33, № 6. – С. 52–61 7. Елсуфьев С. А. Исследование деформирования фторопласта-4 при линейном и плоском напряженном состоянии // Механика полимеров. – 1968. – № 4. – С. 742–746. 8. Работнов Ю. Н., Паперник А. Х., Степанычев Е. И. Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах // Механика полимеров. – 1971. – № 1. С. 74–87.

Институт механики НАН Украины, г.Киев

Поступила 25.03.2009

М. В. БАНЯС, И. К. СЕНЧЕНКОВ, д-р физ.-мат. наук

ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНАЯ НЕУПРУГАЯ ДЕФОРМАЦИЯ АЛЮМИНИЕВОГО СПЛАВА Д16 ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ: ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

Описание поведения материалов, работающих в условиях одновременного воздействия механических нагрузок и повышенной температуры, является одной из важнейших задач моделирования процессов, происходящих в различных элементах конструкций современной техники и объектах технологий. В данных процессах, помимо возникновения пластических деформаций, могут развиваться деформации ползучести, при которых поведение материала существенно зависит от скорости протекания процесса нагружения. Достаточно полный обзор результатов по моделированию термовязкопластического деформирования дан в работах [1, 2]. Большинство из них в той или иной степени используют концепцию поверхности текучести и представление скорости деформации в виде суммы слагаемых, отвечающих процессам упругой и мгновеннопластической деформации, и деформации ползучести. В последнее время для описания термомеханических процессов развивается альтернативный подход, основанный на применении так называемых унифицированных моделей течения, которые используют единый член неупругой деформации для описания как пластической деформации, так и деформации ползучести. Одной из таких моделей является модель Боднера-Партома, сформулированная в работах [3, 4]. По сравнению с аналогичными моделями [5] она характеризуется относительно небольшим количеством параметров, их устойчивостью к результатам экспериментов, а также хорошим описанием термовязкопластического поведения материалов. В данной статье на основе этой модели исследуется высокотемпературное поведение алюминиевого сплава Д16 при одноосном нагружении. Для данного материала развита методика нахождения параметров модели. Ее особенностью является определение параметров, отвечающих за мгновенное пластическое деформирование по диаграммам одноосного растяжения, и параметров теплового возврата по кривым ползучести. Для проверки качества модели проводится сравнение результатов, полученных по диаграммам, отвечающих мягкому и жесткому нагружению.

Уравнения модели Боднера-Партома. В рамках обобщенной модели течения Боднера-Партома примем гипотезу аддитивности упругих и неупругих деформаций, а для неупругих деформаций – условие несжимаемости:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad \varepsilon_{kk}^p = 0, \quad (1)$$

в котором $\dot{\varepsilon}_{ij}$, $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$, $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ – тензоры скоростей полной, упругой и пластической

деформации.

Для изотропного материала имеют место уравнения закона Гука

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^p), \quad \sigma_{kk} = 3K_V \varepsilon_{kk}, \quad (2)$$

где $s_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3 \sigma_{kk} \delta_{ij}$ и $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - 1/3 \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$ – девиаторы тензоров напряжений σ_{ij} и деформации ε_{ij} ; δ_{ij} – единичный тензор; G и K_V – сдвиговой и объемный упругие модули.

Для определения пластических деформаций используем закон течения Прандтля-Рейса

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda s_{ij}. \quad (3)$$

Здесь λ – скалярный параметр, зависящий от скорости нагружения, для конкретизации которого примем кинетическое уравнение

$$D_2^p = D_0^2 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{K+D}{\sqrt{3J_2}} \right)^{2n} \right]; \quad (4)$$

$D_2^p = 0,5 \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p$ и $J_2 = 0,5 s_{ij} s_{ij}$ – вторые инварианты скорости пластического деформирования и напряжений; K – параметр изотропного упрочнения; D – скалярный параметр направленного упрочнения. Далее направленное упрочнение не рассматривается, т.е. полагается $D = 0$.

Эволюционное уравнение для параметра изотропного упрочнения запишем в виде

$$\dot{K}(t) = m_1 (K_1 - K(t)) \dot{W}_p - A_k K_1 \left(\frac{K(t) - K_2}{K_1} \right)^{r_k}, \quad K(0) = K_0, \quad (5)$$

в котором $\dot{W}_p = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p$ – мощность пластической деформации.

В соотношениях (3) и (4) D_0 , n , K_0 , K_1 , m_1 , K_2 , A_k , r_k – параметры модели, подлежащие определению для каждого материала. В статье [4] приведена интерпретация параметров и переменных модели. Согласно этой модели D_0 – параметр, представляющий предельное значение скорости пластической деформации при сдвиге, который обычно для квазистатических задач принимается равным 10^4 c^{-1} ; n – параметр, контролирующий чувствительность предела текучести к скорости деформирования; $K(t)$ – параметр изотропного упрочнения, зависящий от истории нагружения и являющийся мерой общего сопротивления течения; m_1 – параметр, контролирующий скорость работы упрочнения; K_0 – начальное значение K , соответствующее отсчетному состоянию, с которого начинается изменение пластической работы W_p ; K_1 – насыщенное значение параметра упрочне-

ния K , т.е. максимальное значение K ; A_k – параметр, характеризующий скорость теплового возврата упрочнения; r_k – показатель скорости теплового возврата упрочнения; K_2 – параметр, отвечающий состоянию полного теплового возврата; W_p – пластическая работа.

Параметры модели найдем на основе экспериментальных диаграмм одноосного растяжения. Для этого случая система определяющих уравнений модели Боднера-Партома запишем следующим образом:

$$\dot{\varepsilon}_{11}^p = \frac{2D_0}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_{11}}{|\sigma_{11}|} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{K}{\sigma_{11}} \right)^{2n} \right], \quad \dot{\varepsilon}_{11}^p(0) = 0,$$

$$\dot{K} = m_1 (K_1 - K) \dot{W}_p - A_k K_1 \left(\frac{K - K_2}{K_1} \right)^{r_k}, \quad \dot{K}(0) = K_0. \quad (6)$$

Определение параметров пластического деформирования. Можно выделить две группы параметров [6]. Первая группа отвечает за пластическое (быстрое) деформирование материала, при котором ползучестью материала можно пренебречь. К ней относятся n , K_0 , K_1 , m_1 . Для их определения используются данные при больших скоростях деформирования. Методика нахождения этих параметров описана в работах [6, 7].

Набор параметров определяется отдельно для каждой температуры. Для двух скоростей деформирования $\dot{\varepsilon}_1$ и $\dot{\varepsilon}_2$ рассматривается отношение

$$k = \sigma_{0,2}^1 / \sigma_{0,2}^2, \quad (7)$$

где $\sigma_{0,2}^1$ и $\sigma_{0,2}^2$ – условные пределы текучести соответствующие скоростям $\dot{\varepsilon}_1$ и $\dot{\varepsilon}_2$. Параметр n подбирается таким образом, чтобы, при приблизительно выбранных значениях параметров K_0 , K_1 , m_1 , отношение k , полученное из расчетных и экспериментальных данных, совпадало. Значения K_0 и K_1 параметра упрочнения выбираются из условий аппроксимации значений условных пределов текучести $\sigma_{0,2}$ и пределов прочности σ_B для разных скоростей деформирования. Параметр m_1 , отвечающий за скорость упрочнения, выбирается из условия наилучшего соответствия экспериментальных и расчетных кривых в области упрочнения. Нами исследования проводились для случая одноосного растяжения отожженного алюминиевого сплава Д16 в диапазоне температур от $T = 20^\circ\text{C}$ до $T = 300^\circ\text{C}$ и для нахождения параметров пластического деформирования использовались диаграммы растяжения при постоянных скоростях деформирования $\dot{\varepsilon} = 0,39583 \text{ c}^{-1}$ и $\dot{\varepsilon} = 92,5 \text{ c}^{-1}$ [8]. Полученные значения параметров приведены в табл. 1. В указанном температурном интервале погрешность аппроксимации диаграмм нагружения при высоких скоростях деформирова-

ния по напряжениям не превышает 10% .

Таблица 1

T, C°	20,00	100,00	200,00	300,00
n	3,25	2,70	5,00	3,75
$K_0, МПа$	164,00	177,00	136,00	119,00
$K_1, МПа$	549,00	613,00	442,00	335,00
$m, МПа^{-1}$	0,48	0,55	0,40	0,40

В качестве контрольного примера модели с этими параметрами были исследованы диаграммы растяжения при постоянной скорости нагружения $\dot{\sigma} = 12,6 \text{ МПа/с}$. На рис. 1 представлены полученные результаты, а также экспериментальные данные [2]. При этом сплошная кривая и квадратики соответствуют температуре $T = 20^{\circ}\text{C}$, штриховая линия и ромбы – температуре $T = 200^{\circ}\text{C}$, пунктирная линия и кружочки – температуре $T = 300^{\circ}\text{C}$. Сплошная, штриховая и пунктирные линии соответствуют диаграммам, рассчитанным с помощью модели Б-П.

Вторая группа параметров (K_2, A_k, r_k) связана с эффектом теплового возврата, за который отвечает второе слагаемое эволюционного уравнения для параметра упрочнения (5). Поскольку материал отожженный, то принимается $K_2 = K_0$. При их оп-

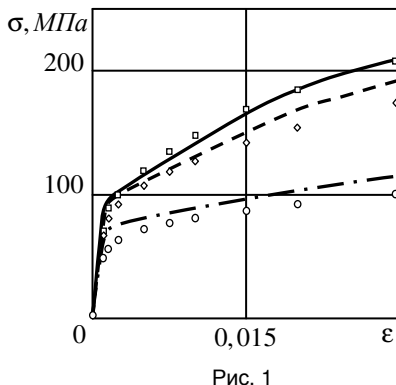


Рис. 1

ределении использовались экспериментальные данные на ползучесть. Для каждой температуры рассматривалась серия кривых ползучести для различных значений напряжения σ_l ($l = \overline{1, L}$) . Задавался набор параметров $K_2^{(i)}$,

$A_k^{(j)}$, которые изменялись в интервале $\left[A_k^{(0)}, A_k^{(I)}; r_k^{(0)}, r_k^{(J)} \right]$, причем

$$A_k^{(i)} = A_k^{(0)} + \frac{A_k^{(I)} - A_k^{(0)}}{I} i \quad (i = \overline{1, I}); \quad r_k^{(j)} = r_k^{(0)} + \frac{r_k^{(J)} - r_k^{(0)}}{J} j \quad (j = \overline{1, J}) .$$

Для этого набора расчетным путем определялись значения полной деформации $\epsilon_{lm}^{(i)}$ при заданных значениях напряжений σ_l в моменты времени $t_m = \Delta t \cdot m$ ($m = \overline{1, M}$) . Затем вычислялась величина относительной среднеквадратической ошибки по всей серии кривых ползучести

$$R^{(i)} = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \left(\frac{\varepsilon_{lm}^{\text{exp}} - \varepsilon_{lm}^{(i)}}{\varepsilon_{lm}^{(i)}} \right)^2, \quad (8)$$

где $\varepsilon_{lm}^{\text{exp}}$ – экспериментальные значения полной деформации, полученной для постоянного напряжения σ_l в момент времени t_m . Перебором всех комбинаций параметров определялась та, для которой ошибка $R^{(i)}$ была минимальной. Интервал изменения параметров A_k , r_k выбирался таким образом, чтобы минимум достигался в его внутренней точке. Принималось, что $M = 10$, $L = 4$.

В табл. 2 приведены значения параметров теплового возврата для материала Д16, вычисленные по данной методике. В качестве примера на

T, C°	100,000	200,000	300,000
A_k, c^{-1}	0,004	0,340	0,005
r_k	6,000	3,500	0,400

рис. 2 и 3 для температур $T = 100^\circ C$ и $T = 200^\circ C$ соответственно показаны кривые ползучести, полученные экспериментальным и расчетным способами. На рис. 2 сплошная линия и квадратики отвечают

напряжению $\sigma = 135,3 \text{ МПа}$; штриховая линия и треугольники – напряжению $\sigma = 172,1 \text{ МПа}$. На рис. 3 сплошная линия и квадратики отвечают напряжению $\sigma = 85,5 \text{ МПа}$; штриховая линия и треугольники – напряжению $\sigma = 103,4 \text{ МПа}$; пунктирная линия и ромбики – напряжению $\sigma = 121,4 \text{ МПа}$; штрих-пунктирная линия и кружочки – напряжению $\sigma = 139,3 \text{ МПа}$. Здесь линиями обозначены расчетные данные. Экспериментальные кривые ползучести взяты из работы [2].

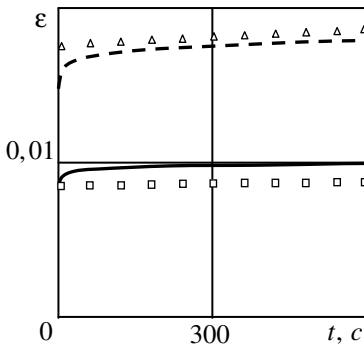


Рис. 2

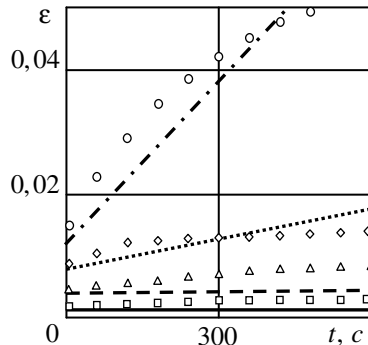


Рис. 3

На рис. 4 дано сопоставление расчетных и экспериментальных данных для диаграммы растяжения при температуре $T = 300^{\circ}\text{C}$ и скорости деформирования $\dot{\varepsilon} = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$, при которой влияние ползучести значительно. Сплошная линия соответствует расчетной кривой, полученной с учетом теплового возврата. Штриховая линия соответствует кривой, для которой принималось $A_k = 0$, т.е. слагаемым, отвечающим за тепловой возврат в уравнении (5), пренебрегалось. Квадратиками обозначены экспериментальные данные, взятые из работы [2]. Видно, что пренебрежение ползучестью приводит к увеличению значений напряжений с ростом деформаций.

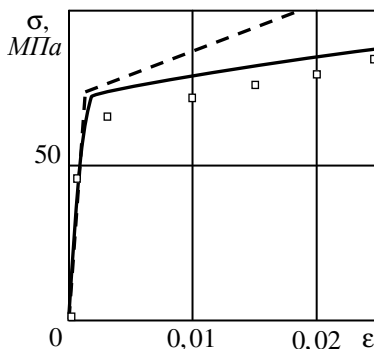


Рис. 4

При обосновании модели течения важное значение имеют перекрестные проверки расчетных и экспериментальных данных по схеме: параметры модели рассчитываются по одной системе базовых экспериментов, после чего сопоставляются расчетные и экспериментальные данные для другого типа нагружения. При этом качество самой модели объективно оценивается только в том случае, если базовые и контрольные эксперименты выполнены для образцов из одной партии материала с одинаковой термо-механической историей. К сожалению, термо-механические истории образцов из Д16 в базовых экспериментах, взятых из работ [2, 8], несколько отличаются. Этим частично можно объяснить расхождения экспериментальных и расчетных данных, приведенных на рис. 1–4.

Тем не менее, с учетом этого замечания, согласование данных можно считать удовлетворительным. Следовательно, рассматриваемая модель течения может быть использована для описания неупругого поведения металлов в широком интервале температур и инженерных расчетах термо-механического состояния элементов конструкций.

В соответствии с изложенным выше, в данной работе показано, что параметры модели, полученные на основе диаграмм растяжения с постоянной скоростью деформирования, также описывают диаграммы с постоянной скоростью напряжения. Параметры, определенные на основе экспериментальных кривых ползучести при постоянных напряжениях, описывают диаграммы нагружения при высоких температурах и низких скоростях деформирования, где ползучесть заметно влияет на диаграмму $\sigma - \varepsilon$. В качестве контрольного примера на рис. 4 дано сопоставление расчетных и экспериментальных данных для диаграммы растяжения при температуре $T = 300^{\circ}\text{C}$ и скорости деформирования $\dot{\varepsilon} = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$, при которой влияние ползучести значительно. Сплошная линия соответствует расчетной кривой, полученной с учетом влияния теплового возврата. Штриховая

линия соответствует кривой, для которой принималось $A_k = 0$, т.е. слагаемым, отвечающим за тепловой возврат в уравнении (5), пренебрегалось. Квадратиками обозначены экспериментальные данные, взятые из работы [2]. Видно, что пренебрежение ползучести приводит к существенно завышенным напряжениям при увеличении деформации.

Таким образом, при обосновании модели течения важное значение имеют перекрестные проверки расчетных и экспериментальных данных по схеме: параметры модели рассчитываются по одной системе базовых экспериментов, после чего сопоставляются расчетные и экспериментальные данные для другого типа нагружения. При этом качество самой модели может быть объективно установлено, только в том случае, если базовые и контрольные системы экспериментов выполнены для образцов из одной партии материала с одинаковой термомеханической историей. К сожалению, термомеханические истории образцов из Д16 в базовых экспериментах, взятых из работ [2, 8], несколько отличаются. Этим частично можно объяснить расхождение экспериментальных и расчетных данных, приведенных на рис. 1-4.

Тем не менее, с учетом этого замечания, согласование данных можно считать удовлетворительным. Следовательно, рассматриваемая модель течения может быть использована для описания неупругого поведения металлов в широком интервале температур и инженерных расчетах термомеханического состояния элементов конструкций.

Таким образом, в данной работе показано, что параметры модели, полученные с диаграмм растяжения с постоянной скоростью деформирования, также описывают диаграммы с заданной постоянной скоростью нагружения. Полный набор параметров модели описывает диаграммы нагружения при высоких температурах и низких скоростях деформирования, где влияние ползучести заметно влияет на уровень кривой $\sigma - \varepsilon$.

РЕЗЮМЕ. На основі уніфікованої моделі течії Б-П вивчається високотемпературна деформація алюмінієвого сплаву Д16. Параметри моделі отримані з експериментів на одноосний розтяг з постійною швидкістю деформації та повзучості при зазначених напруженнях. Для перевірки розраховувались діаграми для м'якого і жорсткого розтягу в пластичній області й діаграми повільного жорсткого розтягу при підвищених температурах. Отримано задовільну узгодженість експериментальних і чисельних даних.

SUMMARY. The high-temperature deformation of D16 aluminum alloy is studied using unified Bodner-Partom flow model. The parameters of the model were obtained from the data of the uniaxial tensile test at the prescribed strain rates and the creep test at the prescribed stresses. To examine the obtained results the stress-strain curves were calculate for the soft and rigid loadings in the plastic range and the slow rigid loadings at the high temperatures. The satisfied consistency both experimental and numerical data was received.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. Пэжина П. Основные вопросы вязкопластичности. – М.: Мир. – 1968. – 176 с. 2. Шевченко Ю. Н., Бабешко М. Е., Терехов Р. Г. Термовязкопластичные процессы сложного деформирования элементов

конструкций. – К.: Наук. думка, 1992. – 328 с. 3. *Bodner S.* Constitutive equations for dynamic material behavior. In *Mechanical behavior of materials under dynamic loads*, Ed. Lindholm U., New York: Springer-Verlag, 1968. – P. 176 – 190. 4. *Bodner S., Partom Y.* Constitutive equations for elastoviscoplastic strain hardening material // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1975. – Vol. 42. – P. 385–389. 5. Экспериментальное сравнение нескольких современных вязкопластических моделей материала при повышенных температурах / *Джеймс, Имбри, Хилл и др.* // *Теорет. основы инженерных расчетов.* – 1988. – № 1. – С. 52–58. 6. *Сенченко И. К., Табиева Г. А.* Определение параметров модели Боднера–Партома термовязкопластического деформирования материалов // *Прикладная механика.* – 1996. – Т. 32, № 2. – С. 64–72. 7. *Чжань К., Боднер С., Линдхольм У.* Феноменологическое моделирование упрочнения и теплового возврата в металлах // *Теорет. основы инж. расчетов.* – 1988. – № 4. – С. 1–14. 8. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / *И. И. Безухов, В. Л. Бажанов и др.* – М.: Машиностроение, 1965. – 568 с.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 12.05.2009

УДК 539.3

О. П. ЧЕРВИНКО, канд. физ.-мат. наук,
И. К. СЕНЧЕНКОВ, д-р физ.-мат. наук, Е. В. БОЙЧУК

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИМПУЛЬСНОГО ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ИЗ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО МАТЕРИАЛА

Элементы конструкций и объекты технологий из физически нелинейных материалов, в частности металлов, могут подвергаться быстрому термомеханическому нагружению, в результате чего в них возникают волновые динамические процессы и формируются остаточные напряжения и деформации. Классические результаты исследований таких процессов, полученные до 80-х годов прошлого столетия обобщены в монографиях [1–4]. 80-е годы ознаменовались прогрессом в разработке мощных коротко импульсных лазеров и внедрении в ряд технологий, таких как лазерный ударный наклеп (LSP), сварка (LW), формование (LSF) и т.п. Современный уровень экспериментальных исследований, физического и математического моделирования таких процессов отражены в работах [5, 6]. Однако в этих работах при математическом моделировании не учитываются в комплексе такие факторы, как физическая нелинейность, зависимость физико-механических характеристик от температуры, взаимодействие термических и механических импульсов, термомеханическая связанность и т.п. В настоящей статье с учетом указанных выше факторов проводится численное моделирование процессов в цилиндрических телах в осесимметричной постановке

Постановка и решение задачи. Постановка задачи включает в себя кинематические уравнения

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right); \quad (1)$$

уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = \rho \ddot{u}_r, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} = \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \ddot{u}_z; \quad (2)$$

уравнение теплопроводности

$$c_V \dot{\theta} + 3\alpha T K_V \dot{\varepsilon}_{kk} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = 0, \quad (3)$$

где u_i , ε_{ij} , σ_{ij} – компоненты вектора перемещения и тензоров деформации и напряжений ($i, j = r, z, \phi$); θ – температура ($T = 273^\circ C + \theta$); ρ – плотность; c_V , k и α – коэффициенты объемной теплоемкости, теплопро-

водности и линейного термического расширения; K_V – коэффициент объемного сжатия; $(\dot{\bullet}) = \frac{\partial}{\partial t}(\bullet)$.

Поведение материала описывается унифицированной моделью Боднера-Партома [7], модифицированной для случая быстрого нагрева. Рассматриваются процессы скоростного деформирования.

Соотношения модели включают уравнения аддитивности деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p; \quad (4)$$

уравнения закона Гука

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - e_{ij}^p), \quad \sigma_{kk} = 3K_V(\varepsilon_{kk} - \alpha(\theta - \theta_0)); \quad (5)$$

уравнения закона течения Прандтля-Рейсса с условиями текучести Мизеса и пластической несжимаемости

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = D_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{K_0 + K_1}{\sqrt{3}J_2}\right)\right]^{2n} \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \quad \varepsilon_{ij}^p(0) = 0, \quad \varepsilon_{kk}^p = 0; \quad (6)$$

уравнения эволюции для параметра изотропного упрочнения

$$\dot{K} = m_1(K_1 - K)\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^p, \quad K(0) = 0, \quad (7)$$

где $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$; $\sigma_{kk} = \sigma_{rr} + \sigma_{zz} + \sigma_{\varphi\varphi}$; $J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}$; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$;

G – модуль сдвига; D_0 , K_0 , K_1 , m_1 , n – параметры модели.

Начальные условия для задач динамики и теплопроводности имеют вид $u_i(\bar{x}) = 0$, $\dot{u}_i(\bar{x}) = 0$, $\theta = \theta_0$ при $t = 0$.

Рассматривается полупространство $z > 0$, $0 < r < \infty$, на поверхности $z = 0$ которого задаются граничные условия импульсного давления и теплового потока

$$\sigma_{zz} = -p_0 \sin \frac{\pi}{t_\sigma} t \text{ при } t \leq t_\sigma; \quad \sigma_{zz} = 0 \text{ при } t > t_\sigma; \quad \sigma_{rz} = 0; \quad (8)$$

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial z} = q_0 \sin \frac{\pi}{t_q} t \text{ при } t \leq t_q; \quad -k \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \text{ при } t > t_q, \quad (9)$$

в которых q_0 и p_0 – заданные параметры нагружения; t_σ и t_q – длительности импульсов, принимается $t_\sigma = 2t_q$.

В классических работах [8, 9] показано, что отличной от нуля является лишь компонента $u_z = u_z(z, t)$ и $\theta = \theta(z, t)$. Легко установить, что задача для полупространства эквивалентна задаче для тонкого стержня $0 < r < R$,

$z > 0$, на боковой поверхности которого ставятся условия гладкого контакта и теплоизоляции

$$u_r = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, \quad r = R, \quad z > 0, \quad (10)$$

а на торце $z = 0$ условия (8), (9).

Задача решается методом конечных элементов в сочетании с методами Ньюмарка и Эйлера интегрирования по времени и итерационных методов решения нелинейных задач на каждом временном шаге [10, 11].

Описание и анализ результатов численных исследований. При проведении расчетов параметры модели течения были конкретизированы для стали 35ХМА на основе экспериментальных данных [12] в интервале температур $20^\circ\text{C} < \theta < 1000^\circ\text{C}$ и скоростей $5 \cdot 10^{-4} \text{c}^{-1} < \dot{\epsilon} < 4 \cdot 10^4 \text{c}^{-1}$. Расчеты проводились для стержня $R = 10^{-6} \text{ м}$ и длиной до $z < 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. Конечно-элементная сетка, на которой достигалась практическая сходимость, содержала 1000 прямоугольников и 5003 узла. При этом сетка имела повышенную плотность вблизи поверхности нагружения $z = 0$.

Для исследования парциальных влияний теплового и механического нагружений были рассмотрены следующие задачи: задача 1 отвечает чисто термическому нагружению $q_0 \neq 0$, $p_0 = 0$, задача 2 – чисто механическому нагружению $q_0 = 0$, $p_0 \neq 0$; задача 3 – термомеханическому нагружению $q_0 \neq 0$, $p_0 \neq 0$. В расчетах принималось $q_0 = 2 \cdot 10^{11} \text{ квт/м}^2$, $p_0 = 8 \text{ ГПа}$, $t_2 = 10^{-8} \text{ с}$. Для интерпретации результатов использовались интенсивности

$$s_i = \left(\frac{s_{ij} s_{ij}}{2} \right)^{1/2}, \quad e_i = \left(\frac{e_{ij} e_{ij}}{2} \right)^{1/2}, \quad e_i^P = \left(\frac{e_{ij}^P e_{ij}^P}{2} \right)^{1/2}.$$

Расчеты для задачи 1 показали, что напряжения в волнах на несколько порядков ниже по сравнению с остаточными напряжениями, которые формируются при остывании вблизи поверхности $z = 0$. Эти напряжения локализованы в слое $0 < z \leq 10^{-6}$, являются растягивающими и по уровню близки к динамическому пределу текучести, который примерно в 2 раза выше статического.

Динамический процесс в задаче 2 иллюстрируется кинетикой распространения упруго-пластической волны сжатия для компоненты σ_{rr} (рис. 1) и формирования остаточного напряженного состояния (рис. 2). Последнее ассоциируется с напряжениями, остающимися после прохождения волны.

Для задачи 3 распределения остаточных напряжений и неупругих деформаций показаны на рис. 3 и 4 сплошными линиями. Для сравнения пунктирной и штриховой линиями показаны соответствующие распределения для задач 1 и 2.

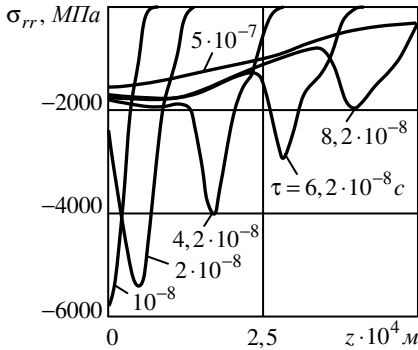


Рис. 1

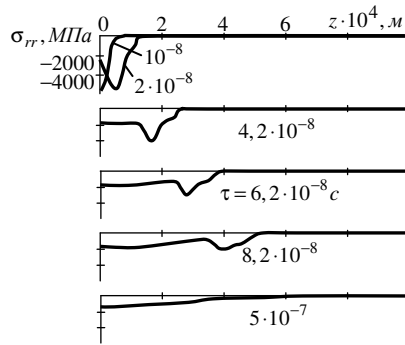


Рис. 2

Отметим следующие особенности приведенных результатов. Остаточное напряженно-деформированное состояние имеет двухмасштабную структуру. В поверхностном слое $0 < z < 10^{-6}$ м состояние определяется конкуренцией процессов, инициированных тепловой и механической составляющими нагружения. В результате взаимного подавления уровень напряжений относительно низкий $s_i \leq 200$ МПа, $e_i^P \leq 0,4\%$. Далее в глуп-

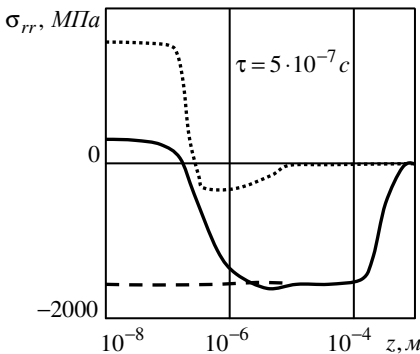


Рис. 3

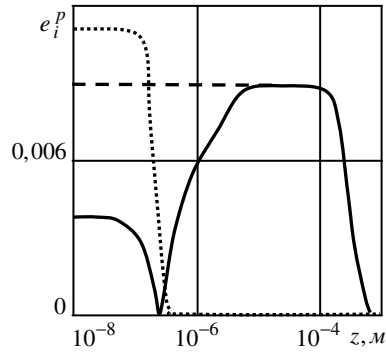


Рис. 4

бине тела формируется почти на три порядка большая область сжимающих напряжений $10^{-6} \leq z \leq 10^{-3}$ м, определяемая импульсом сжатия. Уровень напряжений отвечает динамическому пределу текучести $s_i = 1000$ МПа и пластической деформации $e_i^P = 0,9\%$. Распределение в этой области является благоприятным с точки зрения поверхностной прочности и формирования таких остаточных состояний является целью современных технологий, в частности, лазерных.

РЕЗЮМЕ. В осесиметричній постановці розглядається динамічна задача термомеханіки непружного півпростору під дією навантаження наносекундними імпульсами теплового потоку і тиску. Механічна поведінка матеріалу описується моделлю течії Боднера–Партома. Чисельне досліджено хвильові процеси і залишковий напружено-деформований стан.

SUMMARY. Dynamical problem of thermomechanics for half space under nano-second impulse of heat flux and pressure loading is numerically investigated within axisymmetrical statement. Unified Bodner-Partom flow theory is used to model deformation of material. Stress wave propagation as well as residual stress-strain state are examined.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений / Пер. с англ. под ред. Э. И. Григолюка. – М.: Мир, 1964. – 518 с. 2. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. – М.: Физматгиз, – 1963. – 252 с. 3. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. – К.: Наук. думка, 1970. – 240 с. 4. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика. – К.: Наук. думка, 1976. – 312 с. 5. Chen H., Kysar J. and Yao Y. L. Characterization of plastic deformation induced by microscale laser shock peening // ASME. J. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 71. – P. 713–723. 6. Yilbas B. S., Hyder S. J. Laser pulse heating and flexural wave generation during treatment of metallic surfaces // J. Mater. Proc. Tech. – 2003. – Vol. 141. – P. 1–8. 7. Bodner S., Partom Y. Constitutive equations for elastoviscoplastic strain hardening material // ASME. J. Appl. Mech. – 1975. – Vol. 42. – P. 385–389. 8. Даниловская В. И. Об одной задаче термоупругости. // Прикладная математика и механика. – 1952. – Т. 16, № 3. – С. 341–344. 9. Sternberg E., Chakravorty J. G. On inertial effects in a transient thermoelastic problem // ASME. J. Appl. Mech. – 1959. – Vol. 26, № 4. – P. 503–509. 10. Мотовиловец И. А., Козлов В. И. Термоупругость. – К.: Наук. думка, 1987. – 264 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т.; Т. 1). 11. Бойчук Е. В., Жук Я. А., Сенченко И. К. Волны напряжений в цилиндре, возбуждаемые термическим импульсом на торце // Акустичний вісник. – 2006. – Т. 9, № 3. – С. 7–15. 12. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Н. И. Безухов, И. И. Бажанов, И. И. Гольденблат и др. – М.: Машиностроение, 1965. – 568 с.

Институт механики НАН Украины, г. Киев
Николаевский государственный университет

Поступила 15.02.2009

УДК 539.3

В. С. КИРИЛЮК, канд. физ.-мат. наук

ЗАДАЧА ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ТЕЛА С ПЛОСКОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ АНТИСИММЕТРИЧНОМ ТЕПЛОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Пространственные задачи теории упругости для тел с трещинами при силовых и температурных воздействиях хорошо изучены в [1–3]. Для пьезокерамических тел в случае силовых, электрических и температурных воздействий в силу связанности силового и электрического полей решения задач усложняются [4–9]. Однако для отдельных классов задач электроупругости для тел с трещинами удается установить структурное соответствие решений задачам упругости, что позволяет существенно упростить процесс их решения [6]. Для задач термоэлектроупругости при симметричных температурных воздействиях такое соответствие найдено в [7]. Отметим, что важный результат по представлению решений уравнений электроупругости получен в [10]

В настоящей статье установлено, что и при тепловом потоке вдоль оси поляризации пьезокерамического тела с плоской трещиной произвольной формы (антисимметричная температурная нагрузка) также имеет место соответствие между решениями задач термоэлектроупругости и термоупругости. Найденное соответствие между решениями задач позволяет вычислять значения коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) K_{II} и K_{III} , пересчитав их из соответствующих формул КИН для изотропного материала, предварительно заменив в них выражение $\mu\alpha(1+\nu)/(1-\nu)$ и ν специальными значениями, которые зависят от упругих, электрических и тепловых свойств тела. Как частный случай из полученного соответствия следуют результаты работы [9] для трансверсально-изотропного тела. Ранее соответствие между решениями задач для тел с начальными напряжениями, содержащими трещины, при силовых нагрузках и решениями задач теории упругости для изотропных тел было установлено в [1]. Настоящая работа развивает подход [1] на случай электроупругого тела с трещиной при силовых, электрических и температурных нагрузках.

Постановка задачи. Рассмотрим пьезокерамическое тело с плоской трещиной Ω в плоскости изотропии трансверсально-изотропного электроупругого материала. Тело находится под действием теплового потока, направленного вдоль оси поляризации материала (ось Oz). Граничные условия для нахождения возмущения температурного поля, вызванного теплоизолированной поверхностью трещины, получаем в виде [3]

$$\partial T / \partial Z = Q(x, y) = q(x, y) / \lambda_{zz} \quad (x, y) \in \Omega; \quad T(x, y) = 0 \quad (x, y) \notin \Omega;$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = 0, \quad D_z = 0, \quad z = 0; \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (x, y) \in \Omega; \\ u_x = u_y = 0 \quad (x, y) \notin \Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

где $q(x, y)$ – плотность теплового потока; λ_{zz} – коэффициент теплопроводности материала вдоль Oz .

Основные соотношения и метод решения. Уравнения стационарной термоэлектроупругости для рассматриваемой пьезокерамической среды (при отсутствии массовых сил, зарядов и источников тепла в теле) можно записать в виде

$$\begin{aligned} c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{y,xy} + \\ + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,xz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,xz} = \beta_{11} T_{,x}; \\ c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{x,xy} + \\ + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,yz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,yz} = \beta_{11} T_{,y}; \\ (c_{13}^E + c_{44}^E) (u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E (u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + \\ + e_{15} (\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33} \Psi_{,zz} = \beta_{33} T_{,z}; \\ (e_{31} + e_{15}) (u_{x,xz} + u_{y,yz}) + e_{15} (u_{z,xx} + u_{z,yy}) + e_{33} u_{z,zz} - \\ - \epsilon_{11}^S (\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) - \epsilon_{33}^S \Psi_{,zz} = -p_3 T_{,z}; \\ \lambda_{xx} (T_{,xx} + T_{,yy}) + \lambda_{zz} T_{,zz} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$ – модули упругости; e_{31}, e_{15}, e_{33} – пьезомодули; $\epsilon_{11}^S, \epsilon_{33}^S$ – диэлектрические проницаемости; $\lambda_{xx}, \lambda_{zz}$ – коэффициенты теплопроводности; β_{11}, β_{33} – коэффициенты температурных напряжений; p_3 – пирозлектрическая постоянная.

Решение системы уравнений (2) можно представить через пять потенциальных функции Φ_j ($j = \overline{1, 5}$) [8]:

$$\begin{aligned} u_x = \sum_{j=1}^4 \Phi_{j,x} + \Phi_{5,y}; \quad u_y = \sum_{j=1}^4 \Phi_{j,y} - \Phi_{5,x}; \\ u_z = \sum_{j=1}^4 k_j \Phi_{j,z}; \quad \Psi = \sum_{j=1}^4 l_j \Phi_{j,z}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь k_j, l_j ($j = \overline{1, 3}$) – постоянные, подлежащие определению. После подстановки перемещений и потенциала (3) в равенства (2) для определения Φ_j получим уравнения

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + \nu_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j = \overline{1, 5}), \quad (4)$$

в которых $\nu_5 = 2c_{44}^E / (c_{11}^E - c_{12}^E)$; ν_i ($i = \overline{1, 3}$) – корни алгебраического уравнения третьего порядка [8], связанные с постоянными k_j, l_j соотношениями

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{e_{33} k_j - \epsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = \nu_j \quad (j = \overline{1, 3}); \quad (5)$$

$$a_j = c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j; \quad d_j = e_{15} (1 + k_j) - \epsilon_{11}^S l_j \quad (j = \overline{1, 4}). \quad (6)$$

Из (5) и (6) получим

$$k_j = \frac{\left[(\nu_j c_{11}^E - c_{44}^E) (e_{15} \nu_j - e_{33}) + \nu_j (c_{44}^E + c_{13}^E) (e_{31} + e_{15}) \right]}{\left[(c_{13}^E + c_{44}^E) (e_{15} \nu_j - e_{33}) - (c_{44}^E \nu_j - c_{33}^E) (e_{31} + e_{15}) \right]}; \quad (7)$$

$$l_j = \frac{\left[(\nu_j c_{11}^E - c_{44}^E) (\nu_j c_{44}^E - c_{33}^E) + \nu_j (c_{44}^E + c_{13}^E)^2 \right]}{\left[(\nu_j c_{44}^E - c_{33}^E) (\nu_j e_{31} - e_{15}) + (c_{13}^E + c_{44}^E) (e_{15} \nu_j - e_{33}) \right]} \quad (j = \overline{1, 3}). \quad (8)$$

Кроме того

$$\Phi_{4,zz} = \frac{m}{k^2} T; \quad \Phi_{4,xx} + \Phi_{4,yy} + k^2 \Phi_{4,zz} = 0; \quad T_{,xx} + T_{,yy} + k^2 T_{,zz} = 0,$$

где $k^2 = \lambda_{zz} / \lambda_{xx}$ (отношение коэффициентов теплопроводности); m – неизвестная постоянная. Для определения постоянных k_4, l_4 получена система двух линейных уравнений [8]

$$\begin{aligned} & \left(\beta_{33} (c_{13}^E + c_{44}^E) - \beta_{11} c_{33}^E + \beta_{11} c_{44}^E k^2 \right) k_4 + \left(\beta_{33} (e_{15} + e_{31}) - \beta_{11} e_{33} + \right. \\ & \left. + \beta_{11} e_{15} k^2 \right) l_4 + \left(\beta_{33} (c_{44}^E - c_{11}^E k^2) + \beta_{11} (c_{44}^E + c_{13}^E) k^2 \right) = 0; \\ & \left(-p_3 (e_{15} + e_{31}) + \beta_{11} \epsilon_{33}^S - \beta_{11} \epsilon_{11}^S k^2 \right) l_4 + \\ & \left(-p_3 (c_{13}^E + c_{44}^E) - \beta_{11} e_{33} + \beta_{11} e_{15} k^2 \right) k_4 + \Phi_5^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

а для m найдено выражение:

$$m = \frac{\beta_{11} k^2}{c_{44}^E + (c_{13}^E + c_{44}^E) k_4 + (e_{15} + e_{31}) l_4 - c_{11}^E k^2}.$$

Построение решения задачи. Представим возмущение температурного поля в виде производной от потенциала простого слоя по поверхности трещины с неизвестной плотностью:

$$T(x, y, z_4) = \frac{\partial}{\partial z_4} \Phi^*(x, y, z_4) = \frac{\partial}{\partial z_4} \iint_{\Omega} \frac{\alpha(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z_4^2}}. \quad (10)$$

Из граничных условий (1) для нахождения плотности потенциала получим

$$\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial z_4^2} = \frac{q(x, y)}{\lambda_{zz}/k} \quad (x, y) \in \Omega; \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial z_4} = 0 \quad (x, y) \notin \Omega. \quad (11)$$

Второе из условий (11) удовлетворяется автоматически в силу свойств производной от потенциала простого слоя, а из первого условия для плоской трещины произвольной формы приходим к интегро-дифференциальному уравнению относительно неизвестной плотности потенциала [2]. Представим термоэлектронапряженное состояние в пьезокерамическом теле суперпозицией состояний, для первого из которых потенциальные функции примем такими:

$$\begin{aligned} \Phi_4^{(1)}(x, y, z_4) &= F(x, y, z_4); \quad \Phi_5^{(1)} = 0; \\ \Phi_i^{(1)}(x, y, z_i) &= \alpha_i F(x, y, z_i) \quad (i = \overline{1, 3}); \\ F(x, y, z_4) &= m \iint_{\Omega} \alpha(\xi, \eta) \ln(\rho + z_4) d\xi d\eta, \\ \rho &= \sqrt{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z_4^2]}. \end{aligned} \quad (12)$$

где α_i ($i = \overline{1, 3}$) – постоянные, определяемые на основе граничных условий

$$u_x^{(1)} = u_y^{(1)} = 0, \quad (x, y) \notin \Omega; \quad \sigma_{zz}^{(1)} = D_z^{(1)} = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (13)$$

Но поскольку для первого состояния компоненты напряжений $\sigma_{zz}^{(1)}$ и электрической индукции $D_z^{(1)}$ в плоскости трещины пропорциональны температуре, то $\sigma_{zz}^{(1)} = D_z^{(1)} = 0$, $(x, y) \notin \Omega$. Тогда из условий (13) получим систему линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i = -1, \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i a_i = -a_4, \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i d_i = -d_4, \quad (14)$$

при выводе которой использованы выражения (6)–(9). Компоненты напряжений для первого состояния в плоскости трещины примут вид

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \gamma^{piezo-2} \times \frac{\partial \Phi^*}{\partial x}, \quad \sigma_{yz}^{(1)} = \gamma^{piezo-2} \times \frac{\partial \Phi^*}{\partial y},$$

$$\gamma^{piezo-2} = m \left[\left(\sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i a_i}{\sqrt{v_i}} \right) + \frac{a_4}{k} \right]. \quad (15)$$

Значения α_i определяются из системы (14). Остальные граничные условия (1) (кроме условий в отношении касательных напряжений) для первого состояния удовлетворяются автоматически.

Из условия непрерывности температурного поля вне трещины следует, что при поиске плотности потенциала простого слоя следует ограничиться классом функций, обращающихся в нуль на контуре области Ω [2]. Это ограничение обеспечивает непрерывность частных производных функции Φ^* по x и y в плоскости трещины. Следовательно, электронапряженное состояние, связанное с первым состоянием суперпозиции, при стремлении к контуру трещины извне не имеет сингулярных членов, и КИН K_{II} , K_{III} полностью определяются вторым состоянием.

Отметим, что при переходе к чисто упругому трансверсально-изотропному состоянию из выражения $\gamma^{piezo-2}$ следуют значения $\gamma^{Trans-2}$ [9], а также $\mu\alpha(1+\nu)/(1-\nu)$ для изотропного материала.

Для второго состояния суперпозиции получаем граничные условия

$$\sigma_{zz}^{(2)} = 0, \quad D_z^{(2)} = 0, \quad z = 0;$$

$$\sigma_{xz}^{(2)} = -\sigma_{xz}^{(1)}, \quad \sigma_{yz}^{(2)} = -\sigma_{yz}^{(1)} \quad (x, y) \in \Omega;$$

$$u_x = u_y = 0 \quad (x, y) \notin \Omega. \quad (16)$$

На основе решения задачи электроупругости для пьезокерамического тела с плоской трещиной при антисимметричных силовых нагрузках [6], задачу о нахождении второго состояния суперпозиции приводим к определению двух гармонических функций $g(x, y, z)$, $h(x, y, z)$, для которых должны выполняться условия

$$\frac{\sigma_{xz}^{(2)}}{N^*} = \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} + \nu^{PIEZO} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{\gamma^{piezo-2}}{N^*} \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \quad (x, y) \in \Omega;$$

$$\frac{\sigma_{yz}^{(2)}}{N^*} = \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + v^{PIEZO} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right) = - \frac{\gamma^{piezo-2}}{N^*} \frac{\partial \Phi^*}{\partial y} \quad (x, y) \in \Omega;$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \quad (x, y) \notin \Omega. \quad (17)$$

где v^{PIEZO} – известная величина [6]. Сравнивая выражения (17) с соответствующими граничными условиями для двух гармонических функций в случае изотропного упругого тела, заключаем, что при антисимметричном тепловом потоке в пьезокерамическом теле вдоль оси поляризации (при расположении теплоизолированной плоской трещины в плоскости изотропии материала) значения коэффициентов интенсивности напряжений K_{II} , K_{III} могут быть найдены на основе формул для этих величин в случае трещины той же формы в упругом изотропном теле следующим образом: в соответствующие выражения КИН для изотропного тела необходимо внести такие изменения: 1) заменить коэффициент теплопроводности $\lambda \rightarrow \sqrt{\lambda_{xx}\lambda_{zz}}$; 2) заменить в выражениях КИН K_{II} , K_{III} множитель $\mu\alpha(1+\nu)/(1-\nu) \rightarrow \gamma^{piezo-2}$; 3) в оставшихся выражениях КИН необходимо заменить коэффициент Пуассона ν на v^{PIEZO} .

Решения новых задач термоэлектроупругости. Рассмотрим пьезокерамическое тело с внешней круговой трещиной радиуса a в плоскости изотропии материала в случае действия однородного теплового потока Q_0 по кольцевой области $a \leq r \leq b$ поверхности трещины. На основе найденной связи между задачами и результатов работы [3] получаем

$$K_I = K_{III} = 0; \quad K_{II} = \gamma^{piezo-2} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{Q_0}{\sqrt{\lambda_{xx}\lambda_{zz}}} \sqrt{b^2/a^2 - 1}. \quad (18)$$

Если тепловой поток на поверхности внешней круговой трещины имеет вид $Q(r) = Q_0(r/a)^{-n} = \lambda_{zz} \partial T / \partial z$, где $n > 2$, то на основе [3] находим

$$K_I = K_{III} = 0; \quad K_{II} = \gamma^{piezo-2} \frac{Q_0}{\sqrt{\lambda_{xx}\lambda_{zz}}} a^{3/2} \frac{1}{n-2} \frac{\Gamma[(n-1)/2]}{\Gamma(n/2)}. \quad (19)$$

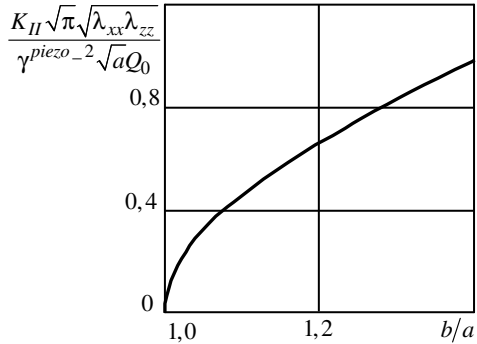
Здесь $\Gamma(n)$ – гамма функция.

Подобным образом могут быть найдены выражения КИН для теплоизолированных плоских трещин различной формы.

Анализ результатов численных исследований. Для тела с внешней круговой трещиной радиуса a при действии однородного потока тепла по кольцевой области $a \leq r \leq b$ поверхности были проведены численные ис-

следования. На рисунке показана зависимость значения КИН K_{II} от отношения b/a , характеризующего размер кольцевой области, под действием однородного теплового потока.

Для оценки влияния связанности силового и электрического полей вычислялись значения КИН K_{II} для внешней круговой трещины в пьезокерамическом материале PZT-5Н и чисто упругом трансверсально-изотропном материале (с теми же упругими и тепловыми характеристиками, но при отсутствии электрических свойств). Установлено, что связанность полей в конкретной задаче приводит к увеличению КИН K_{II} примерно на 16% по сравнению с чисто упругим материалом с теми же свойствами, что и PZT-5Н.



Следовательно, при тепловом потоке вдоль оси поляризации пьезокерамического тела с плоской теплоизолированной трещиной произвольной формы имеет место соответствие между решениями задач термоэлектроупругости и термоупругости. Оно позволяет вычислять значения КИН K_{II} и K_{III} для пьезокерамического пространства с трещиной на основе формул КИН для изотропного материала, предварительно заменив отдельные постоянные специальными значениями (зависят от свойств пьезокерамика).

РЕЗЮМЕ. Встановлено відповідність між розв'язками задач термоэлектропружності та термопружності для нескінченних тіл з теплоізолюваною плоскою тріщиною довільної форми у площині ізотропії для випадку дії теплового потоку. Це дозволяє одразу, не розв'язуючи задачу термоэлектропружності, знайти коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) з відповідних виразів КІН для ізотропного тіла, попередньо замінивши в них деякі сталі спеціально обчисленими величинами, що залежать від властивостей пружних, електричних та теплових властивостей п'єзокерамічного матеріалу. Як частинний випадок із знайдених виразів отримано результати для пружного трансверсально-ізоотропного матеріалу. Чисельними дослідженнями встановлено вплив зв'язаності силових та електричних полів на значення КІН.

SUMMARY. The correspondence between solutions of thermoelectroelasticity and thermoelasticity problems for infinite bodies with a plane crack of an arbitrary shape in the isotropy plane under the heat flow was established. It allows at once, do not solving the problem for piezoelectric body, to find the stress intensity factors (SIF) by means of SIF expressions for isotropic body by means of the replacement of some constants by the special calculated values that depend on elastic, electric and thermal properties of piezoelectric materials. The results for purely elastic transversally-isotropic materials were obtained as particular case from found data. Numerical researches carried out, the influence of connectedness of force and electric fields on the values of stress intensity factors.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. *Гузь А. Н.* Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1983. – 296 с. 2. *Kum Г. С., Хай М. В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1989. – 283 с. 3. *Kassir М. К., Sih G. C.* Three-dimensional crack problems. Mechanics of fracture. Vol. 2. – Leyden, 1975. – 452 p. 4. *Podil'chuk Yu. N.* Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelastostatic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems // Int. Appl. Mech. – 2003. – Vol. 39, № 2. – P. 132–170. 5. *Kaloerov S. A.* Determining the intensity factors for stresses, electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media // Int. Appl. Mech. – 2007. – Vol. 43, № 6. – P.631–637. 6. *Kirilyuk V. S.* Stress state of a piezoelectric ceramic body with a plane crack under antisymmetric loads // Int. Appl. Mech. – 2006. – Vol. 42, № 2. – P. 152–161. 7. *Kirilyuk V. S.* Thermostressed state of a piezoelectric body with a plane crack under symmetric thermal load // Int. Appl. Mech. – 2008. – Vol. 44, № 3. – P. 320–330. 8. *Shang F., Kuna M., Kitamura T.* Theoretical investigation of an elliptical crack in thermopiezoelectric material. Part 1: Analytical development // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2003. – Vol. 40. № 3. – P. 237–246. 9. *Кирилюк В.С.* О структурном соответствии между решениями задач термоупругости для изотропных и трансверсально-изотропных тел с плоской трещиной при тепловом потоке // Вісн. Донецького університету. Сер. А: Природничі Науки. – 2008. – Вип. 1. – С. 33–38. 10. *Шульга Н.А.* О волновых потенциалах электроупругости для пьезокерамических материалов // Теорет. и прикладная механика. – 1984. – Вып. 15. – С. 73–76.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 15.05.2009

УДК 539.374

М. Ф. СЕЛИВАНОВ, канд. физ.-мат. наук,
Ю. А. ЧЕРНОИВАН, канд. физ.-мат. наук, *А. В. РУДИС*

О РАЗВИТИИ ТРЕЩИНЫ СДВИГА В КОМПОЗИТЕ С ЛИНЕЙНОВЯЗКОУПРУГИМИ ФАЗАМИ

Теоретические исследования докритического развития трещин в вязкоупругих материалах, моделирующие процесс долговременного разрушения композитов, изложены в работах многих авторов (обзоры таких исследований приведены в работах [1–3]).

Экспериментальные данные, изложенные в работах [4, 5] показывают, что причиной выхода из строя элементов конструкций из полимерных композитных материалов могут быть вязкоупругие свойства компонентов таких материалов. В некоторых случаях причиной отказа конструкции может быть долговременное докритическое развитие трещины даже при незначительных нагрузках. Таким образом, отказоустойчивость полимерных композитных материалов невозможно рассчитать лишь на основе учёта положений теорий линейной механики разрушения упругих материалов.

Кроме того, большинство исследований докритического развития трещин в анизотропных вязкоупругих материалах выполнено для трещин нормального отрыва. В то же время для изучения процессов длительного разрушения многих материалов значительный интерес представляет исследование роста трещин при докритических сдвиговых нагрузках. В настоящей статье рассмотрен пример решения задачи о длительном распространении трещины поперечного сдвига в анизотропном линейно-вязкоупругом теле. В качестве исследуемого материала рассмотрен композит с анизотропными вязкоупругими свойствами, обусловленными наследственным поведением материалов компонент.

Постановка задачи. Трещину-щель в вязкоупругом материале можно представить как разрез, берега которого имеют два характерных участка – с не взаимодействующими и взаимодействующими берегами [6]. При этом взаимодействие берегов осуществляется в узких зонах предразрушения по краям трещины. При поперечном сдвиге распространение трещины сдерживается материалом в зоне устья трещины, пока здесь смещение берегов не превысит критического [1, 6, 7]

$$2u(t) \Big|_{x_1=a} \equiv \delta(t) \Big|_{x_1=a} = \delta_{IIc}, \quad (1)$$

где $2a$ – длина трещины; $u(t)$ – смещение вдоль оси x_1 ; t – время.

При моделировании противодействия материала в зоне устья трещины (зоне предразрушения) будем полагать, что соответствующие касательные напряжения τ равномерно распределены по берегам зоны предразруше-

ния $d(t)$ и постоянны во время докритического роста. В этом случае обычно полагают $\tau = \tau_s$, где τ_s – предел текучести при сдвиге. В общем случае эту характеристику необходимо определить экспериментально. Размер зоны предразрушения $d(t)$ определяется из условия ограниченности напряжений в конце этой зоны при $x_1 = a + d(t)$. Трещина расположена в плоскости симметрии механических свойств композита и при своем развитии не выходит из нее. Это предположение выполняется для композитов с высокой степенью адгезии, не склонных к расслаиванию. Таким образом, в нашей модели трещина расположена и развивается вдоль одной из осей ортотропии – оси Ox_1 . Распространение трещины определяется как процесс перехода точек области, где имеется взаимодействие берегов, в область, где его нет.

Будем исследовать длительное разрушение вязкоупругого композитного

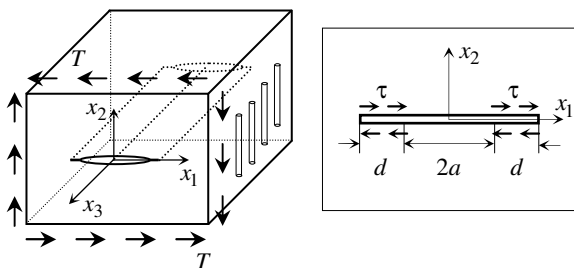


Рис. 1

тела со сквозной трещиной, находящейся под действием сдвигающих усилий T на бесконечности (рис. 1). Будем при этом полагать, что тело находится в условиях плоской деформации, направление сдвигающих усилий совпадает с одной из плоскостей упругой

симметрии и с плоскостью расположения трещины.

Релаксационные модули материалов компонент в общем случае заданы в виде ряда функций Миттаг-Леффлера

$$\lambda_{ij}(t) = \lambda_{\infty}^{(ij)} + \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k^{(ij)}}{\beta_k^{(ij)}} E_{\alpha^{(ij)}, 1} \left(-\beta_k^{(ij)} t^{\alpha^{(ij)}} \right), \quad E_{\alpha, \delta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma[\alpha n + \delta]}. \quad (2)$$

Упругое смещение берегов трещины. Исходя из симметрии задачи, трещину можно рассматривать как разрез вдоль оси x_1 , при этом на участке $a \leq x_1 \leq a + d$ стягивающие берега касательные напряжения распределены равномерно с интенсивностью τ . Общая длина разреза $2(a + d)$ определяется в ходе решения задачи. Поэтому краевая задача линейной теории упругости будет сформулирована следующим образом.

В упругой области имеется разрез по оси x_1 длиной $2(a + d)$ с центром в начале координат; на поверхности разреза действуют напряжения $\sigma_{11}(x, 0) = 0$, $\sigma_{22}(x, 0) = 0$ и $\tau_{12} = 0$ при $|x| \leq a$, $\tau_{12} = \tau$ при $a < |x| \leq a + d$. В бесконечно удаленных точках плоскости $\tau_{12}(x, \infty) = T$.

Смещение берегов макротрещины ($d < a$) длины $2a$ в точке $(x, 0)$ для исследуемой задачи имеет вид [8]

$$\delta(x, a) = L \frac{4d}{\pi} \tau F \left(\frac{x-a}{d} \right), \quad d = \frac{\pi}{2} \left(\frac{K_{II}}{2\tau} \right)^2,$$

$$F(s) = \sqrt{1-s} + \frac{s}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}}. \quad (3)$$

В выражении (3) характеристика L , связанная со свойствами материала, определяется выражением

$$L = L(b_{ij}) = -i b_{11} (s_1 + s_2), \quad (4)$$

где $s_1 = s_1(b_{ij})$, $s_2 = s_2(b_{ij})$ – чисто мнимые корни уравнения [9]

$$b_{11}s^4 + (2b_{12} + b_{66})s^2 + b_{22} = 0; \quad (5)$$

b_{ij} – компоненты тензора податливости ортотропного материала. Последние определим на основании модулей релаксации материалов компонент и упругого решения задачи о релаксации композита, армированного однонаправленными волокнами.

Учитывая, что для данной задачи $K_{II} = T\sqrt{\pi a}$, смещение запишем так

$$\delta(x, a) = L \frac{a}{\rho_3} T \zeta(\xi, \eta), \quad \rho_3 = \frac{2\rho_2}{\pi}, \quad \rho_2 = \frac{\tau}{T}, \quad (6)$$

где функция начальных и геометрических параметров имеет вид

$$\zeta(\xi, \eta) = \eta F \left(\frac{\xi - \eta}{\rho_4 \eta} \right), \quad \rho_4 = \frac{1}{2\rho_3^2}. \quad (7)$$

Раскрытие в вершине трещины, согласно выражениям (6) и (7), запишется в виде

$$\delta(x, a) = L \frac{a}{\rho_3} T \zeta(\eta), \quad \zeta(\eta) = \zeta(\eta, \eta) = \eta. \quad (8)$$

Из выражений (4) и (5) можно получить агрегат компонент тензора податливости L , присутствующий в выражениях для смещения берегов трещины:

$$L = \sqrt{b_{11} \left(2 \left(b_{12} + \sqrt{b_{11} b_{22}} \right) + b_{66} \right)}. \quad (9)$$

Вязкоупругое смещение берегов трещины. Для того чтобы на основе упругого решения, получить вязкоупругое смещение берегов трещины, воспользуемся принципом Вольтерра, получившего обоснование для аналогичных задач в [7]. С этой целью в выражении (9) заменим упругие модули

соответствующими преобразованными величинами.

Будем изучать качественную сторону задачи, поэтому оставим лишь одно слагаемое в выражении (2). К упрощению отнесем также описание релаксационных свойств обоих материалов компонент композита при помощи одного параметра α функции Миттаг-Леффлера. При этих условиях выражение (2) в области преобразования приобретет вид

$$\tilde{E}^{(i)}(s) = E_{\infty}^{(i)} + \left(E_0^{(i)} - E_{\infty}^{(i)} \right) \frac{s^{\alpha}}{s^{\alpha} + \beta^{(i)}},$$

где $\tilde{E}(s) = s\bar{E}(s)$, $\bar{E}(s)$ – преобразование Лапласа функции $E(t)$; E_0 – мгновенное значение модуля. Будем считать объемную деформацию упругой, что позволит записать коэффициенты Пуассона материалов в виде

$$\tilde{\nu}^{(i)} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(1 - 2\nu_0^{(i)} \right) \frac{E_0^{(i)}}{\tilde{E}^{(i)}} \right].$$

Зафиксируем характеристики материала наполнителя и введем коэффициенты, которые характеризуют взаимное расположение зависимостей от времени для модулей материалов армирования и наполнителя

$$k_E = \lg \frac{E_0^{(1)}}{E_0^{(2)}}, \quad k_1 = \lg \frac{E_0^{(1)}}{E_{\infty}^{(1)}}, \quad k_{\beta} = \frac{1}{\alpha} \lg \frac{\beta^{(1)}}{\beta^{(2)}}.$$

Первый из коэффициентов определяет соотношение между мгновенным модулем Юнга двух материалов, второй – отношение мгновенного и длительного модулей Юнга для материала армирования, третий – сдвиг в положительном направлении оси времени кривой, описывающей изменение во времени модуля материала армирования относительно зависимости изменения во времени модуля материала наполнителя.

Для получения эффективных упругих модулей композитного материала и агрегата вязкоупругих операторов воспользуемся результатами работы [10]. Согласно принципу упруго-вязкоупругой аналогии [11], заменяя зависящие от времени характеристики релаксации соответствующими преобразованными величинами, получим решение \tilde{L} в области преобразования. Агрегат L как функцию времени найдем при помощи обратного преобразования Лапласа (например, при помощи результатов работы [5]) в форме

$$L(t) = \sum_{i=1}^M u_i \exp(-v_i t), \quad t_0 \leq t \leq \Lambda t_0. \quad (10)$$

Отметим, что параметр Λ принимает значение порядка 10 и соответствующий ему интервал мал по сравнению с промежутками интегрирования в интегралах, присутствующих в уравнениях докритического роста трещины (см. следующий параграф). Поэтому возникает необходимость разбивать упомянутый промежуток интегрирования и получать решение в виде (10) на каждом из интервалов.

Развитие трещины. Процесс докритического стабильного роста трещины поперечного сдвига, как и для трещины нормального отрыва, условно разделим на три периода [7]: инкубационный, переходный и основной. Определяющие уравнения докритического роста трещины поперечного сдвига получим на основании подхода, изложенного в [1, 7], исходя из критерия разрушения (1) и упругого смещения берегов трещины в форме (6). Эти уравнения для трех периодов развития трещины соответственно имеют вид:

– инкубационный период

$$\delta(a_0) \left[1 + \int_0^{t_*} L(t_* - \tau) d\tau \right] = \delta_{IIc}, \quad (11)$$

где t_* – длительность инкубационного периода; a_0 – начальная длина трещины;

– переходный период

$$\begin{aligned} \delta[a(t)] + \int_0^{t_*} L(t - \tau) \delta(a(t), a_0) d\tau + \\ + \int_{t_*}^t L(t - \tau) \delta[a(t), a(\tau)] d\tau = \delta_{IIc}; \end{aligned} \quad (12)$$

– основной период

$$\delta[a(t)] + \int_{t'}^t L(t - \tau) \delta[a(t), a(\tau)] d\tau = \delta_{IIc}, \quad (13)$$

где t' находится из уравнения $a(t) - a(t') = d(t)$.

В качестве характеристик длительной трещиностойкости примем:

– силовой параметр, равный отношению интенсивности касательных напряжений в зоне предразрушения к интенсивности внешнего нагружения $\rho_2 = \tau/T$;

– геометрический параметр $\eta_c = a_*/a_0$, где a_0 и a_* – начальная и критическая полудлины трещины соответственно. Такой выбор параметров трещиностойкости позволяет при помощи выражения (6) записать величину, которая стоит в правой части уравнений (11)–(13), в форме

$$\delta_{IIc} = L_0 \frac{a_0}{\rho_3} T \zeta(\eta_c). \quad (14)$$

Определяющие уравнения докритического роста трещины (11)–(13) преобразуются в этом случае к виду

$$\zeta(1) \left[1 + \int_0^{t_*} L(t_* - \tau) d\tau \right] = \zeta(\eta_c), \quad (15)$$

$$\zeta[\eta(t)] + \zeta(\eta(t), 1) \int_0^{t_*} L(t - \tau) d\tau + \int_{t_*}^t L(t - \tau) \zeta[\eta(t), \eta(\tau)] d\tau = \zeta(\eta_c); \quad (16)$$

$$\zeta[\eta(t)] + \int_{t'}^t L(t - \tau) \zeta[\eta(t), \eta(\tau)] d\tau = \zeta(\eta_c) \quad (17)$$

на каждом из отмеченных этапов соответственно. В уравнениях $\eta(t) = a(t)/a_0$ – относительный размер трещины. В уравнении (17) величина t' находится из уравнения

$$\eta(t) - \eta(t') = d(t)/a_0. \quad (18)$$

Так как рассматриваемая задача решается в рамках концепции постоянства напряжений в зоне предразрушения, длина этой зоны зависит от времени. Постоянной во время роста трещины остается величина

$$d(t)/a(t) = \rho_4. \quad (19)$$

Таким образом, уравнение (18) принимает вид

$$\eta(t) - \eta(t') = \rho_4 \eta(t'). \quad (20)$$

Решая последовательно уравнения (15)–(17), можно исследовать кинетику развития трещины сдвига, а также определить долговечность вязкоупругого композита.

Численное решение уравнений роста трещины. Разобьем отрезок на продолжении трещины от точки a_0 до точки a_* на N отрезков Δa_i ($i = \overline{1, N}$). Тогда уравнения (15)–(17) могут быть использованы для определения времени прохождения трещиной K -го узла разбивки

$$\eta(t_K) = \eta_K = 1 + \sum_{i=1}^K \Delta \eta_i,$$

где $\Delta \eta_i = \Delta a_i/a_0$. В пределах каждого из них будем искать решение в форме показательной функции

$$\eta(t) = \eta_{K-1} (\eta_K / \eta_{K-1})^{(t-t_{K-1})/\Delta t_K}, \quad \Delta t_K = t_K - t_{K-1}, \quad (21)$$

удовлетворяющей условиям $\eta(t_{K-1}) = \eta_{K-1}$, $\eta(t_K) = \eta_K$.

Продолжительность инкубационного периода $t_0 = t_*$ можно определить из уравнения (15). Начальное отношение длины зоны предразрушения к половине длины трещины, согласно (18), $d_0/a_0 = \rho_4$. С учетом этого, время

прохождения K -го узла разбивки определим из уравнений

$$\begin{aligned} \zeta(\eta_K) + \zeta(\eta_K, 1) \int_{t_K - t_0}^{t_K} L(\theta) d\theta + \\ + \int_0^{t_K - t_0} L(\theta) \zeta[\eta_K, \eta(t_K - \theta)] d\theta = \zeta(\eta_c), \end{aligned} \quad (22)$$

если $1 < \eta_K \leq 1 + \rho_4$, и

$$\zeta(\eta_K) + \int_0^{t_K - t'} L(\theta) \zeta[\eta_K, \eta(t_K - \theta)] d\theta = \zeta(\eta_c), \quad (23)$$

если $\eta_K > 1 + \rho_4$; $\eta(t_K - \theta)$ определяется согласно (21).

При помощи (20) определим

$$t' = t_K - t_{I-1} - \Delta t_I \frac{\ln[(1 - \rho_4)\eta_K] - \ln \eta_{I-1}}{\ln \eta_I - \ln \eta_{I-1}}, \quad (24)$$

где I удовлетворяет условию $\eta_{I-1} \leq (1 - \rho_4)\eta_K \leq \eta_I$.

Для оптимальных расчетов необходимо так разбить отрезок $[1, \eta_c]$, чтобы промежутки времени Δt_i были соразмерными величинами. Исходя из того, что для исследованного класса задач наблюдается рост ускорения при достаточном приближении к началу нестабильного этапа роста трещины, выполним разбивку отрезка $[1, \eta_c]$, согласно которому каждый отрезок разбивки в q раз больший предыдущего:

$$\eta_i = 1 + (\eta_c - 1)(q^i - 1)/(q^N - 1), \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Отметим, что если M удовлетворяет равенству $\eta_M = 1 + \rho_4$, то время

$t_I = t_M - t_0$ является продолжительностью переходного периода, время $t_{II} = t_N - t_M$ — продолжительностью основного периода. Долговечность определяется величиной t_N .

На рис. 2 представлены кинетические диаграммы роста трещины в композитном материале, полученные на основании решений уравнений (15), (22)–(24) при следующих значениях параметров задачи: $\alpha = 0,5$, $v_0^{(1)} = 0,3$, $E_0^{(2)} = 4 \cdot 10^9 \text{ Па}$,

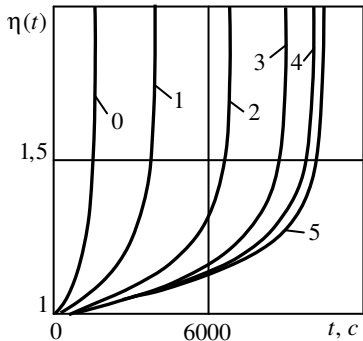


Рис. 2

$v_0^{(2)} = 0,35$, $\beta^{(2)} = 0,1 \text{ сек}^{-\alpha}$, $k_E = 1,3$, $k_1 = 1$, $\eta_c = 2$, $\rho_2 = 5$. Кривые рисунка соответствуют следующим значениям параметра k_β :
 0 ($t_N = 1,586 \cdot 10^3 \text{ c}$), 1 ($t_N = 3,898 \cdot 10^3 \text{ c}$), 2 ($t_N = 6,817 \cdot 10^3 \text{ c}$),
 3 ($t_N = 9,002 \cdot 10^3 \text{ c}$), 4 ($t_N = 1,006 \cdot 10^4 \text{ c}$), 5 ($t_N = 1,046 \cdot 10^4 \text{ c}$). Характер кинетических диаграмм развития трещины поперечного сдвига качественно соответствует аналогичным диаграммам для трещины нормального отрыва, полученным в работах [1, 6, 7, 12].

РЕЗЮМЕ. У роботі наведено розв'язання задачі щодо визначення характеристик тривалого розповсюдження тріщини поперечного зсуву для композиту з в'язкопружних анізотропних компонентів. Отримано рівняння, за допомогою яких можна визначити довжину тріщини у довільний момент часу на основі даних про питомий вміст компонентів та їх характеристик. Розглянуто приклад розрахунків для різних співвідношень між параметрами компонентів.

SUMMARY. In this work, the solution of the shear crack evolution parameters determination problem is given. The equation to determine crack length at the arbitrary time basing on the volume fractions and characteristics of components is derived. An example of calculation for the several values of composite parameters is shown.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. Каминский А. А. Механика разрушения вязкоупругих тел. – К.: Наук. думка, 1980. – 160 с. 2. Schapery R. A. Analysis of deforming and fracture of viscoelastic composites // In: Inelastic behavior of composite materials. – Vol. 13. – 1975 – P. 180–220. 3. Schapery R. A. Time-dependent fracture: Continuum aspect of crack growth. // In: Encyclopedia of materials science and engineering (Ed. M.V. Bever). – Oxford, New York: Pergamon Press, 1986 – P. 5043–5053. 4. Серенсен С. В., Зайцев Г. П. Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластиков с дефектами. – К.: Наук. думка, 1982. – 296 с. 5. Gamby D, Delaunay V. Measurment and modelling of crack propagation velocity in viscoelastic matrix composite // Composites, Part A. – 1997 – Vol. 28, № 9–10. – P. 875–881. 6. Каминский А. А., Гаевилов Д. А. Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. – К.: Наук. думка, 1992. – 248 с. 7. Каминский А. А. Разрушение вязкоупругих тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1990. – 310 с. 8. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с. 9. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Гостехиздат, 1950. – 299 с. 10. Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Шикун Е. Н., Назаренко Л. В. Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – К.: Наук. думка, 1993. – 390 с. 11. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Наука, 1982. – 336 с. 12. Каминский А. А., Селиванов М. Ф. Вязкоупругое деформирование армированной пластины с трещиной // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38, № 12. – С. 111–120.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 22.03.2009

УДК 539.3

С. А. КАЛОЕРОВ, д-р физ.-мат. наук, М. А. КОЛОМИЕЦ

ВЯЗКОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С УПРУГИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Во многих отраслях современного машиностроения, вычислительной и измерительной техники широко используются конструкции с элементами в виде пластинок с отверстиями и включениями из вязкоупругих полимерных и композиционных материалов. Под действием внешних сил в них могут возникать высокие концентрации напряжений, изменяющиеся во времени. Поэтому необходимо иметь достаточно простые и надежные методы определения напряженно-деформированного состояния таких элементов в любой момент времени. В работах [1–3] предложены некоторые методы исследования вязкоупругого состояния изотропных и анизотропных сред, на их основе решены конкретные задачи для односвязных областей. В статьях [4–6] разработаны методы определения вязкоупругого состояния многосвязных сред, решены конкретные задачи для пластин с жесткими включениями [4, 5], а для изотропных пластинок – и с упругими включениями [6]. В данной статье последние подходы распространены на случай анизотропных пластин с упругими включениями, исследовано вязкоупругое состояние пластинки с конечным числом включений.

Постановка задачи. Рассмотрим отнесенную к прямоугольной декартовой системе координат Oxy анизотропную пластинку-матрицу, занимающую бесконечную многосвязную область S , ограниченную контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с полуосями a_l и b_l (рис. 1). В отверстия без предварительного натяжения вклеены или впаяны включения из анизотропных материалов, находящиеся с пластинкой в условиях идеального контакта так, что в точках спая имеют место условия

$$X_n = -X_n^l, \quad Y_n = -Y_n^l, \quad u = u^l, \quad v = v^l \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}), \quad (1)$$

выражающие равенство в точках спая действия и противодействия контактирующих тел и совместное перемещение точек контактов. Здесь и далее величины со знаком “ l ” вверху относятся к включению S^l с внешней границей L_l , без такого индекса – к пластинке. На бесконечности пластинка находится под действием растягивающих усилий интенсивности p , состав-

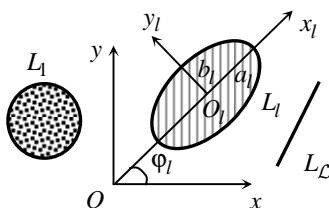


Рис. 1

ляющих с осью Ox угол α , т.е. имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\sigma_x^\infty &= p(1 + \cos 2\alpha)/2, & \sigma_y^\infty &= p(1 - \cos 2\alpha)/2, \\ \tau_{xy}^\infty &= p \sin 2\alpha, & \omega_3^\infty &= 0.\end{aligned}\quad (2)$$

Будем считать, что материал пластинки обладает свойствами, описываемыми линейной теорией вязкоупругости, ядра изготовлены из упругих материалов.

Решение задачи. Определение вязкоупругого состояния пластинки будем проводить на основе принципа Вольтерра, при использовании которого приходится решать соответствующую задачу теории упругости, а затем определять изменение напряженно-деформированного состояния в любой момент времени.

Решение задачи теории упругости в рассматриваемом случае при использовании комплексных потенциалов сводится к нахождению функций $\Phi_k(z_k)$ ($k=1,2$) для пластинки-матрицы и $\Phi_k^l(z_k^l)$ для включений из соответствующих граничных условий. Если эти потенциалы известны, то напряжения и перемещения в пластинке вычисляются по формулам [7]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}) \Phi_k'(z_k); \quad (3)$$

$$(u, v) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k) \Phi_k(z_k) + (-\omega_3 y + u_0, \omega_3 x + v_0), \quad (4)$$

где

$$\lambda_{1k} = \mu_k^2, \quad \lambda_{2k} = 1, \quad \lambda_{6k} = -\mu_k; \quad (5)$$

$$p_k = a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k, \quad q_k = a_{12}\mu_k + a_{22}/\mu_k - a_{26}; \quad (6)$$

μ_k – корни характеристического уравнения

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0;$$

a_{ij} – коэффициенты деформации материала пластинки; ω_3, u_0, v_0 – угол жесткого поворота и поступательные перемещения пластинки как целого. Аналогичные соотношения имеют место для величин с индексом “ l ” сверху.

Граничные условия (1) через производные комплексных потенциалов принимают вид [8]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left\{ g_{ki} \delta_k \Phi_k'(t_k) - g_{ki}^l \delta_k^l \Phi_k^l(t_k^l) \right\} = f_i^l(t) \quad (i = \overline{1,4}) \quad \text{на } L_l, \quad (7)$$

в котором

$$\begin{aligned} (g_{k1}, g_{k2}, g_{k3}, g_{k4}) &= (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, p_k, q_k), \\ f_i^l(t) &= \left(0, 0, -\omega_3^l \frac{dy}{ds}, \omega_3^l \frac{dx}{ds} \right), \quad \delta_k = \frac{dz_k}{ds}, \quad \delta_k^l = \frac{dz_k^l}{ds}. \end{aligned} \quad (8)$$

Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в бесконечных многосвязных областях S_k , получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями $z_k = x + \mu_k y$. В плоскостях z_k контурам L_l соответствуют контуры L_{kl} , а функции $\Phi_k(z_k)$ имеют вид [9]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \Phi_{k0}(z_k), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= \frac{\mu_k}{(\mu_k - \bar{\mu}_k)(\mu_k - \mu_{k+1})(\mu_k - \bar{\mu}_{k+1})} \left\{ \sigma_x^\infty + (\bar{\mu}_k + \mu_{k+1} + \bar{\mu}_{k+1}) \tau_{xy}^\infty + \right. \\ &+ (\bar{\mu}_k \mu_{k+1} + \bar{\mu}_k \bar{\mu}_{k+1} + \mu_{k+1} \bar{\mu}_{k+1}) \sigma_y^\infty - \bar{\mu}_k \mu_{k+1} \bar{\mu}_{k+1} \times \\ &\left. \times (+a_{16} \sigma_x^\infty + 3a_{26} \sigma_y^\infty + (2a_{12} + a_{66}) \tau_{xy}^\infty) / 2a_{22} \right\}; \end{aligned} \quad (10)$$

$\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в бесконечных многосвязных областях, ограниченных контурами L_{kl} ; k – индекс, принимающий значения 1, 2, причем значение индекса $k+1$ при $k=2$ формально полагается равным 1.

Функции $\Phi_k^l(z_k^l)$ определены и голоморфны в конечных односвязных областях S_k^l , ограниченных контурами L_k^l , получаемыми из L_l аффинными преобразованиями $z_k^l = x + \mu_k^l y$.

В задаче вязкоупругости коэффициенты деформации a_{ij} зависят от времени. Если рассматривать ортотропную пластинку, то эти коэффициенты выражаются через технические постоянные по формулам

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_2}{E_1} = -\frac{\nu_1}{E_2}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_{12}}, \quad (11)$$

где E_1, E_2 и ν_1, ν_2 – модули Юнга и коэффициенты Пуассона для главных направлений анизотропии вдоль осей Ox, Oy ; G_{12} – модуль сдвига для этих же направлений. Из-за зависимости a_{ij} от времени, следует зависимость технических постоянных от времени. Для реальных материалов из приведенных технических постоянных только коэффициенты Пуассона являются сравнительно малыми величинами (меньшими единицы) и со вре-

менем могут изменяться также на малую величину. Пусть для материала пластинки коэффициент Пуассона ν_2 со временем изменяется на некоторую малую величину λ :

$$\nu_2 = \nu_2^0 + \lambda, \quad (12)$$

где ν_2^0 – мгновенно-упругое значение коэффициента ν_2 ; λ – малый параметр, равный отклонению коэффициента ν_2 от его мгновенного значения ν_2^0 . Заметим, что при таком подходе коэффициент ν_1 на основании (11) также является линейной функцией от малого параметра λ :

$$\nu_1 = \nu_2 \frac{E_2}{E_1} = \nu_1^0 + \frac{E_2}{E_1} \lambda, \quad (13)$$

где $\nu_1^0 = E_2 \nu_2^0 / E_1$. Учитывая выражения (12), из соотношений (6), (10) и (11) найдем [10]

$$\begin{aligned} a_{12} &= a_{12}^0 - \lambda a_{11}, & p_k &= p_{k0} - \lambda a_{11}, \\ q_k &= q_{k0} - \lambda \mu_k a_{11}, & \Gamma_k &= \Gamma_{k0} + \lambda \Gamma_{k1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{12}^0 &= -\nu_2^0 a_{11}, & p_{k0} &= a_{11} \mu_k^2 + a_{12}^0 - a_{16} \mu_k, \\ q_{k0} &= a_{12}^0 \mu_k + a_{22} / \mu_k - a_{26}, \\ \Gamma_{k1} &= \frac{\mu_k \bar{\mu}_k \mu_{k+1} \bar{\mu}_{k+1}}{(\mu_k - \bar{\mu}_k)(\mu_k - \mu_{k+1})(\mu_k - \bar{\mu}_{k+1})} \frac{a_{11}}{a_{22}} \tau_{xy}^\infty; \end{aligned} \quad (15)$$

Γ_{k0} – постоянные, вычисляемые по формуле (10), в которой нужно заменить a_{12} на a_{12}^0 .

Представим функции $\Phi_{k0}(z_k)$, $\Phi_k^l(z_k^l)$ и углы поворотов включений ω_3^l рядами по степеням малого параметра λ :

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_k) &= (\Gamma_{k0} + \lambda \Gamma_{k1}) z_k + \sum_{j=0} \lambda^j \Phi_{jk}(z_k), \\ \Phi_k^l(z_k^l) &= \sum_{j=0} \lambda^j \Phi_{jk}^l(z_k^l), & \omega_3^l &= \sum_{j=0} \lambda^j \omega_{j3}^l. \end{aligned} \quad (16)$$

При этом $\Phi_{jk}(z_k)$ – функции, голоморфные в областях S_k вне L_{kl} , включая бесконечно удаленные точки; $\Phi_{jk}^l(z_k^l)$ – функции, голоморфные в S_k^l .

Подставив выражения (16) в граничные условия (7) и приравняв в полученных соотношениях коэффициенты при одинаковых степенях λ , найдем следующую рекуррентную последовательность граничных условий:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left\{ g_{ki0} \delta_k \Phi'_{jk}(t_k) - g_{ki}^l \delta_k^l \Phi'_{jk}(t_k^l) \right\} = f_{ji}^l(t), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} f_{ji}^l(t) &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left[\delta_j^0 g_{ki0} \delta_k \Gamma_{k0} + \delta_j^1 g_{ki0} \delta_k \Gamma_{k1} \right] \quad (i = \overline{1, 2}), \\ f_{ji}^l(t) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{1 - \delta_j^0}{E_1} (1, \mu_k) \delta_k \Phi'_{j-1,k}(t_k) + \frac{1}{E_1} (1, \mu_k) \delta_k \times \right. \\ &\times \left. \left(\delta_j^1 \Gamma_{k0} + \delta_j^2 \Gamma_{k1} \right) - g_{ki0} \delta_k \left(\delta_j^1 \Gamma_{k1} + \delta_j^0 \Gamma_{k0} \right) \right\} + \left(-\frac{dy}{ds}, \frac{dx}{ds} \right) \omega'_{j3} \quad (i = \overline{3, 4}); \\ (g_{k10}, g_{k20}, g_{k30}, g_{k40}) &= (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, p_{k0}, q_{k0}). \end{aligned} \quad (18)$$

Используя методы конформных отображений, производные комплексных потенциалов для пластинки, голоморфных вне отверстий L_{kl} и исчезающих на бесконечности, получаем [8]

$$\Phi'_{jk}(z_k) = \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} a_{jkl n} \Phi'_{kl n}(z_k), \quad (19)$$

где

$$\Phi'_{kl n}(z_k) = -\frac{n}{R_{kl} \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}; \quad (20)$$

ζ_{kl} – переменные, определяемые из конформных отображений

$$z_k = z_{0kl} + R_{kl} (\zeta_{kl} + m_{kl} / \zeta_{kl}); \quad (21)$$

$$z_{0kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = [a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)] / 2,$$

$$m_{kl} = [a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)] / 2R_{kl}; \quad (22)$$

$a_{jkl n}$ – постоянные, которые будем определять из граничных условий (17).

Функции Φ'_{jk} определены и голоморфны в эллипсах S_k^l , получаемых из S^l аффинными преобразованиями $z_k^l = x + \mu_k^l y$. Поэтому они могут

быть представлены рядами по полиномам Фабера, а следовательно, и степенными рядами вида [8]

$$\Phi_{jk}^l(z_k^l) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{jkn}^l \Phi_{kn}^l(z_k^l), \quad (23)$$

в которых

$$\Phi_{kn}^l(z_k^l) = (z_k^l - z_{0k}^l)^n, \quad (24)$$

$z_{0k}^l = x_{0l} + \mu_k^l y_{0l}$, b_{jkn}^l – неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий на контурах включений (17).

Исходя из граничных условий (17), составим функционал

$$I = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \left| \sum_{k=1}^2 \left[g_{ki0} \delta_{km} \Phi'_{jk}(t_{km}) + \bar{g}_{ki0} \bar{\delta}_{km} \overline{\Phi'_{jk}(t_{km})} - g_{ki}^l \delta_{km}^l \Phi'_{jk}(t_{km}^l) - \bar{g}_{ki}^l \bar{\delta}_{km}^l \overline{\Phi'_{jk}(t_{km}^l)} \right] - f_{jil}(t_m) \right|^2, \quad (25)$$

в котором t_m – система точек, выбираемых на контурах L_l ($l = \overline{1, L}$). Удовлетворяя условиям $\partial I / \partial a_{jklm} = 0$, $\partial I / \partial b_{jkn}^l = 0$ минимума функционала (25), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения a_{jklm} , b_{jkn}^l . Дополнив эту систему уравнениями, следующими из условий равенства нулю главного момента сил, приложенных к включениям, получим полную систему линейных алгебраических уравнений для определения a_{jklm} , b_{jkn}^l , ω_{j3}^l ($l = \overline{1, L}$, $n = 1, 2, \dots$). После решения этой дополненной системы станут известными функции (19) и (23), а следовательно (16), на основе которых с использованием принципа Вольтерра для любого момента времени, заменив λ^j ($j \geq 1$) соответствующими значениями [11], вычислим основные напряжения в пластинке и во включениях.

Анализ результатов численных исследований. Были проведены численные исследования распределения напряжений и изменения КИН для растяжения пластинки на бесконечности усилиями интенсивности p . Расчеты были выполнены для пластинки из изотропного материала алюминия (материал М1) [3] и композитных материалов на основе полиэтиленового связующего (М2) или эпоксидного связующего (М3) [2]. Постоянные для этих материалов представлены в табл. 1. Коэффициенты деформации a_{ij}^l для включений считались связанными с соответствующими коэффициентами пластинки соотношениями

$$a_{ij}^l = \lambda_a^l a_{ij}, \quad (26)$$

где λ_a^l – коэффициент связи соответствующих постоянных. При проведении расчетов количество членов в рядах (19), (23) и «коллокационных» точек, в которых вычислялся квадрат невязки, увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах включений не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (пока значения нормальных и касательных напряжений в точках спаев пластинки и включений не совпадали с высокой

Таблица 1

Материал	Постоянные материала						
	$E_1 \cdot 10^{-4}$, МПа	$E_2 \cdot 10^{-4}$, МПа	$G_{12} \cdot 10^{-4}$, МПа	ν_2	α	β_2 , $c^{\alpha-1}$	δ_2 , $c^{\alpha-1}$
M1	7,10	7,11	2,8400	0,25	0,500	0,00665	0,00615
M2	1,97	1,17	0,0637	0,14	0,717	0,12830	0,06080
M3	2,30	1,60	0,3080	0,11	0,846	0,27450	0,12950

степенью точности, например $\left| \frac{\sigma_n - \sigma_n^l}{p} \right| \leq 10^{-3}$ и $\left| \frac{\tau_{ns} - \tau_{ns}^l}{p} \right| \leq 10^{-3}$). Как по-

казали расчеты, для удовлетворения этим условиям в зависимости от расстояний между включениями в рядах (19), (23) оставлялось от 5 до 30 членов и бралось от 100 до 250 «коллокационных» точек. Количество приближений j по степеням малого параметра λ увеличивалось до тех пор, пока последующее приближение изменяло значения максимальных напряжений в предыдущем приближении более чем на 0,01%. Для удовлетворения этому условию необходимо было оставлять степени малого параметра λ от 5 до 10. Ниже описаны некоторые из полученных результатов для случая растяжения пластинки усилиями, параллельными оси Oy , т. е. когда $\sigma_y^\infty = p$. Все результаты даны с точностью до множителя p .

В табл. 2 для ортотропной пластинки из материала M3 с двумя однородными и одинаковыми круговыми включениями (рис. 2) радиуса a приведены значения напряжений в некоторых точках пластинки вблизи контуров спаев в зависимости от значения отношения c/a расстояния между включениями к их радиусу и коэффициента λ_a^l . Считалось, что $\lambda_a^1 = \lambda_a^2 = \lambda_a^l$.

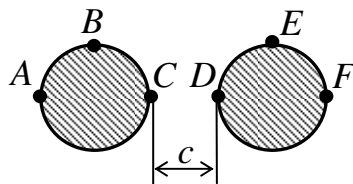


Рис. 2

Таблица 2

Точка	λ_a^l	Напря- жение	t , час.	c/a				
				∞	1	0,5	0,1	
A	0	σ_n	0	0,1114	0,0952	0,0928	0,0908	
			∞	0,0847	0,0630	0,0595	0,0558	
		σ_s	0	0,0085	0,0073	0,0072	0,0071	
			∞	0,0095	0,0071	0,0068	0,0066	
		0,5	σ_n	0	0,0393	0,0288	0,0266	0,0247
				∞	0,0209	0,0057	0,0023	-0,0006
	σ_s	0	0,5875	0,5842	0,5834	0,5825		
		∞	0,5850	0,5818	0,5812	0,5803		
	B	0	σ_n	0	-0,0361	-0,0237	-0,0212	-0,0183
				∞	-0,0443	-0,0338	-0,0318	-0,0295
			σ_s	0	1,5527	1,5700	1,5771	1,5872
				∞	1,5492	1,5669	1,5740	1,5841
0,5			σ_n	0	1,4186	1,3746	1,3591	1,3443
				∞	1,4096	1,3666	1,3510	1,3359
σ_s	0	0,1561	0,1512	0,1495	0,1481			
	∞	0,2282	0,2211	0,2186	0,2163			
C	0	σ_n	0	1,1719	1,1555	1,1487	1,1409	
			∞	1,1669	1,1508	1,1439	1,1359	
		σ_s	0	0,0841	0,0829	0,0841	0,0860	
			∞	0,1351	0,1324	0,1337	0,1357	
		0,5	σ_n	0	0,7750	0,7902	0,7978	0,8093
				∞	0,7737	0,7888	0,7964	0,8077
	σ_s	0	-0,1575	-0,1507	-0,1542	-0,1609		
		∞	-0,1337	-0,1281	-0,1314	-0,1376		
	2	0	σ_n	0	0,1114	-0,0025	-0,0652	-0,1936
				∞	0,0847	-0,0660	-0,1543	-0,3665
			σ_s	0	0,0085	-0,0002	-0,0049	-0,0197
				∞	0,0095	-0,0074	-0,0173	-0,0428
0,5			σ_n	0	0,0393	0,0113	0,0084	0,0350
				∞	0,0209	-0,0222	-0,0305	-0,0080
σ_s	0	0,5875	0,5618	0,5351	0,4520			
	∞	0,5850	0,5573	0,5296	0,4451			
2	0	σ_n	0	-0,0361	-0,0136	-0,0146	-0,0461	
			∞	-0,0443	-0,0256	-0,0277	-0,0607	
		σ_s	0	1,5527	1,6159	1,7000	2,0381	
			∞	1,5492	1,6142	1,6982	2,0343	

Значения напряжений приведены для начального ($t = 0$) и стационарного ($t = \infty$) состояний. Результаты для значений $\lambda_a^l = 0$ и $\lambda_a^l = \infty$ относятся к пластинке с абсолютно жесткими и абсолютно мягкими включениями (отверстиями), результаты для $c/a = \infty$ соответствуют пластинке с одним включением. Последние совпадают с известными для случая пластинки с одним упругим включением [11].

Из табл. 2 видно, что при переходе в стационарное состояние напряжения в пластинке претерпевают большие изменения. Эти изменения особенно велики в зоне между включениями для близких расстояний. Так, для $\lambda_a^l = 0,5$ при переходе в стационарное состояние напряжения σ_n в точке C перемычки, если $c/a = 1$, изменяется в 1,5 раза, а для $c/a = 0,1$ изменяются около 3 раз.

Как показали расчеты, для пластинки с отверстиями ($\lambda_a^l = 0$) значения напряжений с течением времени не изменяются. Это указывает на то, что принцип Вольтерра для этого случая не применим. Последний результат следует и из точного решения задачи теории упругости для пластинки с одним отверстием, которое не содержит упругих постоянных материала, а следовательно, по принципу Вольтерра значения напряжений с течением времени не изменяются.

Исследования, аналогичные описанным выше для материала МЗ, были проведены и для пластинки из материалов М1 и М2, причем полученные для алюминия (материал М1) результаты совпали с данными, найденными при решении задачи для изотропной пластинки [6].

В табл. 3 для пластинки из материала МЗ с двумя разнородными круговыми включениями (с разными значениями параметров λ_a^1 и λ_a^2) одинакового радиуса a приведены значения напряжений в некоторых точках пластинки вблизи контуров спаев включений в зависимости от отношения λ_a^1/λ_a^2 для начального ($t = 0$) и стационарного ($t = \infty$) состояний. Считалось, что отношение «жесткости» левого включения к «жесткости» пластинки $\lambda_a^1 = 0,5$, а отношение расстояния между включениями к их радиусу $c/a = 0,1$. Значения λ_a^1/λ_a^2 , равные 0, ∞ и 1, соответствуют случаям, когда правое включение является отверстием, абсолютно жестким включением и случаю однородных включений.

Из табл. 3 видно, что с увеличением отношения λ_a^1/λ_a^2 («жесткости» левого включения S^1 относительно «жесткости» правого включения S^2) значения напряжений вблизи левого включения уменьшаются, но влияние времени увеличивается. Так, для $\lambda_a^1/\lambda_a^2 = 2$, если значение напряжений σ_n в точке C в начальном состоянии равно 0,0334, то в стационарном со-

Таблица 3

Включение	Точка	Напряжение	t , час.	$\lambda_a^1 / \lambda_a^2$			
				0	0,5	2	∞
L_1	A	σ_n	0	0,1967	0,0393	0,0168	0,0079
			∞	0,1803	0,0161	-0,0101	-0,0213
		σ_s	0	0,6105	0,5875	0,5792	0,5752
			∞	0,6119	0,5854	0,5771	0,5732
	B	σ_n	0	1,3596	1,1719	1,1210	1,0969
			∞	1,3534	1,1667	1,1162	1,0923
	σ_s	0	0,0815	0,0839	0,0877	0,0903	
		∞	0,1399	0,1348	0,1367	0,1387	
L_2	C	σ_n	0	0,2139	0,0398	0,0334	0,0257
			∞	0,2148	0,0066	-0,0177	-0,0392
		σ_s	0	1,4741	0,5976	0,3590	0,2474
			∞	1,4887	0,5923	0,3514	0,2394
	D	σ_n	0	0,0000	0,0077	0,0537	0,0694
			∞	0,0000	-0,0251	0,0021	0,0026
	σ_s	0	2,5789	0,7617	0,2539	0,0169	
		∞	2,6150	0,7575	0,2465	0,0116	
E	σ_n	0	0,0000	0,9706	1,2517	1,3882	
		∞	0,0000	0,9676	1,2451	1,3794	
	σ_s	0	-1,1642	0,0029	0,1232	0,1522	
		∞	-1,1846	0,0389	0,1821	0,2227	
F	σ_n	0	0,0000	-0,0130	0,0563	0,1026	
		∞	0,0000	-0,0333	0,0279	0,0712	
	σ_s	0	3,4888	0,9870	0,3234	0,0083	
		∞	3,4944	0,9840	0,3224	0,0084	

стоянии оно равно -0,0177 (изменяется на 0,0511 или на 152,99%), а для $\lambda_a^1 / \lambda_a^2 = \infty$ эти значения равны соответственно 0,0257 и -0,0392 (изменяется на 0,0649 или более чем на 250%).

Результаты исследований для пластинки с двумя упругими эллиптическими включениями показывают, что с уменьшением отношения полуосей эллипса значения напряжений вблизи большей полуоси растут; эллиптические включения можно считать линейными, если это отношение не более 10^{-4} . В последнем случае можно говорить об особенности напряжений в

концах большей полуоси и считать КИН. Если линейные включения абсолютно жесткие или абсолютно мягкие, то значение КИН совпадают с полученными ранее для пластинки с жестким линейным включением или трещиной [4, 5, 10].

РЕЗЮМЕ. Методом малого параметра задачу в'язкоупружності для багатов'язної анізотропної пластинки з пружними включеннями приведено до рекурентної послідовності задач теорії пружності. Останні задачі розв'язано з використанням узагальнених комплексних потенціалів. Визначення невідомих коефіцієнтів, що входять у функції, методом найменших квадратів зведено до розв'язання послідовності систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Описано результати чисельних досліджень для пластинки з двома круговими включеннями. Показано суттєвий вплив на значення напружень часу прикладання навантаження, відстані між включеннями, матеріалу пластинки і включень.

SUMMARY. The problem of viscoelasticity for multiconnected anisotropic plate with rigid inclusions is reduced to the recurring sequence of elastic problems by the method of small parameter. The latter problems are solved with the use of generalized complex potentials. The determination of unknown coefficients in functions is reduced to the solving of series of systems of linear algebraic equations by the least-squares method. The results of numerical investigations are described for plate with two circular inclusions. The essential influence of applied loading period, distance between inclusions, plate material and material of inclusions on the stress value is shown.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. *Ван Фо Фы Г. А.* Теория армированных материалов с покрытиями. – К.: Наук. думка, 1971. – 332 с. 2. *Каминский А. А., Гаверлов Д. А.* Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. – К.: Наук. думка, 1992. – 248 с. 3. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с. 4. *Калоеров С. А., Мироненко А. Б.* Исследование вязкоупругого состояния пластинки с жесткими эллиптическими или линейными включениями // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2005. – Вип. 1, ч. 1. – С. 61–69. 5. *Калоеров С. А., Авдюшина Е. В., Коломиец М. А.* Задача вязкоупругости для пластинки с жесткими эллиптическими включениями // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 183–194. 6. *Калоеров С. А., Мироненко А. Б.* Исследование вязкоупругого состояния пластинки с упругими эллиптическими или линейными включениями // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 2. – С. 88–98. 7. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с. 8. *Калоеров С. А., Горянская Е. С.* Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений. – К.: А.С.К., 1998. – С. 10–26. (Механика композитов: В 12 т. Т. 7). 9. *Калоеров С. А.* Комплексные потенциалы плоской задачи теории упругости для многосвязного анизотропного тела с трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 1990. – № 21. – С. 24–34. 10. *Калоеров С. А., Коломиец М. А.* Определение вязкоупругого состояния анизотропной пластинки с жесткими включениями // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 4. – С. 202–211. 11. *Калоеров С. А., Коломиец М. А., Мысовский Ю. В.* Задача вязкоупругости для анизотропной пластинки с упругим включением // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2009. – Вип. 1. – С. 92–99.

Донецкий национальный университет

Поступила 10.06.2009

УДК 539.3

Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, Д. В. КУШНИР

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ МНОГОСВЯЗНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ

Одним из наиболее распространенных методов решения трехмерных задач теории упругости для слоя и цилиндрических тел с полостями является метод однородных решений. Основы этого метода были заложены в работах [1–4]. Приложения этого метода к решению разных классов задач даны в [5–8]. В данной статье на основе этого метода предлагается подход к изучению напряженно-деформированного состояния слоя со сквозными полостями и для многосвязных цилиндрических тел в случае комбинированных граничных условий на основаниях типа жесткой диафрагмы.

Постановка задачи. В декартовой прямолинейной системе координат $Ox_1x_2x_3$ рассмотрим упругий однородный изотропный слой $-\infty < x_1, x_2 < \infty, |x_3| \leq h$, ослабленный системой сквозных туннельных вдоль x_3 полостей с общей границей поперечного сечения $\Gamma = \bigcup \Gamma_l$ ($\bigcap \Gamma_l = \emptyset, l = \overline{1, N_l}$). Будем предполагать, что Γ_l – простые замкнутые контуры без точек самопересечения с непрерывными по Гельдеру кривизнами. На поверхности полостей $S = \bigcup S_l$ зададим вектор внешних сил $(X_{1n}, X_{2n}, X_{3n})(x_s)$, $x_s \in S$. На основаниях слоя примем однородные граничные условия смешанного типа

$$u_1 = u_2 = \sigma_{33} = 0, \quad x_3 = \pm h. \quad (1)$$

Для определения напряженно деформированного состояния слоя будем использовать систему уравнений равновесия в перемещениях

$$\Delta u_k + \frac{1}{1-2\nu} \partial_k \theta + \frac{1}{\mu} X_k = 0 \quad (k = \overline{1, 3}), \quad (2)$$

где μ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; X_k – интенсивность объемных сил; $\partial_k = \partial/\partial x_k$; $\theta = \partial_i u_i$. Здесь и далее принято обычное условие суммирования по повторяющимся индексам.

Метод решения. В слое без отверстий рассмотрим объемные силы, сосредоточенные вдоль отрезка $x_1 = 0, x_2 = 0, |x_3| \leq h$ с погонными интенсивностями $\{P_1, P_2, P_3\}(x_3)$, таким образом, что бы они согласовались с граничными условиями (1) Тогда в уравнениях (2) следует положить

$$X_k = P_k(x_3) \delta(x_1, x_2), \quad (3)$$

где $\delta(x_1, x_2)$ – двумерная дельта-функция Дирака.

Ограничимся рассмотрением симметричного относительно срединной плоскости слоя напряженного состояния. Исходя из структуры однородных решений для слоя, полученных в [7], целесообразно положить

$$\begin{aligned} \{u_j, P_j, \theta\} &= \sum_{m=1}^{\infty} \{u_j^{(m)}, P_j^{(m)}, \theta^{(m)}\} \cos \lambda_m x_3 \quad (j=1, 2); \\ \{u_3, P_3\} &= \sum_{m=1}^{\infty} \{u_3^{(m)}, P_3^{(m)}\} \sin \lambda_m x_3, \quad \lambda_m = \frac{\pi(2m-1)}{2h}; \\ \theta^{(m)} &= \partial_1 u_1^{(m)} + \partial_2 u_2^{(m)} + \lambda_m u_3^{(m)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда граничные условия (1) будут выполнены автоматически.

Представления (4) позволяют исключить толщинную координату в уравнениях (2) и перейти к счетному множеству систем уравнений относительно коэффициентов Фурье перемещений

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - \lambda_m^2) u_j^{(m)} + \frac{1}{1-2\nu} \partial_j \theta^{(m)} + \frac{1}{\mu} P_j^{(m)} \delta(x_1, x_2) &= 0 \quad (j=1, 2); \\ (\nabla^2 - \lambda_m^2) u_3^{(m)} - \frac{1}{1-2\nu} \lambda_m \theta^{(m)} + \frac{1}{\mu} P_3^{(m)} \delta(x_1, x_2) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$.

Решения уравнений (5) при действии объемных сил (3) будем называть Ф-решениями статической задачи для слоя.

Интегрирование (5) целесообразно проводить в пространстве обобщенных функций \mathcal{D}' . Продифференцировав каждое из уравнений по x_j и свернув результат по j , получим уравнение относительно $\theta^{(m)}$

$$(\nabla^2 - \lambda_m^2) \theta^{(m)} = -\frac{1-2\nu}{2\mu(1-\nu)} P_k^{(m)} \partial_k \delta(x_1, x_2). \quad (6)$$

Фундаментальным решением уравнения (6) является функция

$$E^{(m)} = -\frac{1}{2\pi} K_0(\lambda_m r), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

где $K_\nu(x)$ – цилиндрическая функция Макдональда порядка ν .

Учитывая, что функция $\delta(x_1, x_2)$ финитна и свертка

$$E^{(m)} * \partial_1 f = \partial_1 E^{(m)} * f$$

существует, из уравнения (6) получаем

$$\theta^{(m)} = -\frac{1-2\nu}{4\pi\mu(1-\nu)} P_k^{(m)} \partial_k K_0(\lambda_m r). \quad (7)$$

Формула (7) позволяет в системе (5) разделить уравнения так:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - \lambda_m^2) u_j^{(m)} &= -\frac{1}{4\pi\mu(1-\nu)} P_k^{(m)} \partial_k \partial_j K_0(\lambda_m r) - \frac{P_j^{(m)}}{\mu} \delta(x_1, x_2); \\ (\nabla^2 - \lambda_m^2) u_3^{(m)} &= \frac{1}{4\pi\mu(1-\nu)} \lambda_m P_k^{(m)} \partial_k K_0(\lambda_m r) - \frac{P_3^{(m)}}{\mu} \delta(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (8)$$

Интегрирование уравнения (8) дает

$$\begin{aligned} u_j^{(m)} &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \frac{1}{\lambda_m} P_k^{(m)} \partial_k \partial_j (rK_1(\lambda_m r)) + \frac{P_j^{(m)}}{2\pi\mu} K_0(\lambda_m r); \\ u_3^{(m)} &= -\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} P_k^{(m)} \partial_k (rK_1(\lambda_m r)) + \frac{P_3^{(m)}}{2\pi\mu} K_0(\lambda_m r). \end{aligned} \quad (9)$$

или

$$u_k^{(m)} = P_i^{(m)} g_{km}^i \quad (k, i = \overline{1, 3}), \quad (10)$$

где g_{km}^i – компоненты матрицы Ф-решений g_m для каждого $m = 1, 2, \dots$. Эти величины выражают перемещения в направлении x_k при действии единичной сосредоточенной силы в направлении x_i . Сама матрица имеет вид

$$g_m = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \begin{bmatrix} \lambda_m r K_{1m} \cos^2 \alpha + \kappa K_{0m} & \frac{\lambda_m}{2} r K_{1m} \sin 2\alpha & -\lambda_m r K_{0m} \cos \alpha \\ \frac{\lambda_m}{2} r K_{1m} \sin 2\alpha & \lambda_m r K_{1m} \sin^2 \alpha + \kappa K_{0m} & -\lambda_m r K_{0m} \sin \alpha \\ \lambda_m r K_{0m} \cos \alpha & \lambda_m r K_{0m} \sin \alpha & -\lambda_m r K_{1m} + (1 + \kappa) K_{0m} \end{bmatrix}.$$

Здесь $K_{sm} = K_s(\lambda_m r)$, $e^{i\alpha} = (x_1 + ix_2)/r$, $\kappa = 3 - 4\nu$.

Таким образом, при отсутствии объемных сил (10) представляет собой матрицу сингулярных решений уравнений статики (2) в каждой точке слоя, кроме отрезка $|x_3| \leq h$ для $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. При приближении к носителю сосредоточенного функционала, решение имеет логарифмическую особенность. Входящие в Ф-решения функции Макдональда экспоненциально затухают с ростом m , что обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость рядов Фурье для всех полевых величин при $r \neq 0$. Элементы g_{km}^i

однозначно определяют коэффициенты Фурье перемещения среды $u_k^{(m)}$, при действии распределенной вдоль отрезка силы P_i .

Пусть слой ослаблен системой сквозных туннельных вдоль x_3 полостей. Рассмотрим функцию $f \in C^2(\bar{G})$, где $G = R^2 \setminus \Gamma$ – физическое поле с линией разрыва Γ . Для обобщенных производных имеем

$$\begin{aligned} \partial_j f &= \{ \partial_j f \} + n_j [f] \delta_\Gamma, \\ (\partial_1^2 + \partial_2^2) f &= \{ (\partial_1^2 + \partial_2^2) f \} + \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right] \delta_\Gamma + \frac{\partial}{\partial n} ([f] \delta_\Gamma), \end{aligned}$$

где $\{ \cdot \}$ – соответствующая классическая производная; $[\cdot]$ – скачок функции на контуре Γ ; n_j – проекция орта нормали к контуру Γ на ось x_j ; $[\cdot] \delta_\Gamma$, $\frac{\partial}{\partial n} ([\cdot] \delta_\Gamma)$ – соответственно простой и двойной слои. Вводя эти соотношения в систему (5), при отсутствии массовых сил представим ее в виде

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - \lambda_m^2) u_j^{(m)} + \frac{1}{1-2\nu} \partial_j \theta^{(m)} &= f_j^{(m)} \quad (j = \overline{1, 3}); \\ f_j^{(m)} &= - \left[\frac{\partial u_j^{(m)}}{\partial n} \right] \delta_\Gamma - \frac{\partial}{\partial n} \left(\left[u_j^{(m)} \right] \delta_\Gamma \right) - \frac{1}{1-2\nu} \left[\theta^{(m)} \right] n_j \delta_\Gamma. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как полости располагаются вдоль x_3 , в (11) нужно принять $n_3 = 0$.

Используя матрицу Ф-решений (10), решение системы (11) можно представить в виде свертки

$$\left\{ u_1^{(m)}, u_2^{(m)}, u_3^{(m)} \right\} = g_m * \left\{ f_1^{(m)}, f_2^{(m)}, f_3^{(m)} \right\}.$$

В развернутом виде получаем интегральные представления поля перемещений (всюду далее, если не оговорено иное, интегрирование ведется по контуру Γ)

$$\begin{aligned} u_j^{(m)}(x) &= \int \left[u_k^{(m)} \right] (y) \frac{\partial}{\partial n_y} g_{jm}^k(x-y) dS_y - \\ &- \int \left(\left[\frac{\partial u_k^{(m)}}{\partial n} \right] + \frac{1}{1-2\nu} \left[\theta^{(m)} \right] n_k \right) (y) g_{jm}^k(x-y) dS_y, \end{aligned} \quad (12)$$

где dS_y – элемент дуги контура Γ .

Если контур Γ – совокупность разомкнутых дуг (математических разре-

зов) Γ_l и вектор напряжения непрерывно продолжим через все Γ_l , в правой части (12) достаточно оставлять первое слагаемое, т.е. разыскивать решение в виде обобщенных потенциалов двойного слоя. Для решения рассматриваемой задачи оставим только второе слагаемое и будем искать решение в виде обобщенных потенциалов простого слоя, которые в развернутом виде выглядят так:

$$\begin{aligned}
 u_1^{(m)}(z) &= \frac{1}{\mu} \int \left\{ \frac{1}{4(1-\nu)} \left[\frac{1}{\lambda_m} p_{1m}(\zeta) \partial_1^2 (rK_{1m}) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{\lambda_m} p_{2m}(\zeta) \partial_1 \partial_2 (rK_{1m}) - p_{3m}(\zeta) \partial_1 (rK_{1m}) \right] + p_{1m}(\zeta) K_{0m} \right\} dS ; \\
 u_2^{(m)}(z) &= \frac{1}{\mu} \int \left\{ \frac{1}{4(1-\nu)} \left[\frac{1}{\lambda_m} p_{1m}(\zeta) \partial_1 \partial_2 (rK_{1m}) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{\lambda_m} p_{2m}(\zeta) \partial_2^2 (rK_{1m}) - p_{3m}(\zeta) \partial_2 (rK_{1m}) \right] + p_{2m}(\zeta) K_{0m} \right\} dS ; \\
 u_3^{(m)}(z) &= \frac{1}{\mu} \int \left\{ \frac{1}{4(1-\nu)} \left[p_{1m}(\zeta) \partial_1 (rK_{1m}) + p_{2m}(\zeta) \partial_2 (rK_{1m}) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \lambda_m p_{3m}(\zeta) rK_{1m} \right] + p_{3m}(\zeta) K_{0m} \right\} dS .
 \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $\zeta \in \Gamma$; $\zeta - z = re^{i\alpha}$; $p_{im}(\zeta)$ – функции подлежащие определению; dS – элемент дуги контура $\Gamma = \bigcup \Gamma_\gamma$. Далее будем предполагать обход контуров так, чтобы область с упругой средой оставалась слева.

Система интегральных уравнений граничной задачи строится, исходя из граничных условий на поверхности полости

$$\sigma_{ij} n_j = X_{in} \quad (i = \overline{1, 3}; j = 1, 2). \tag{14}$$

Для исключения толщинной координаты из равенств (14) воспользуемся следующими представлениями для компонент тензора напряжения и вектора поверхностной нагрузки, согласованными с представлениями (4):

$$\begin{aligned}
 \{\sigma_{ij}, X_{in}\} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sigma_{ij}^{(m)}, X_{in}^{(m)} \right\} \cos \lambda_m x_3 ; \\
 \{\sigma_{i3}, X_{3n}\} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sigma_{i3}^{(m)}, X_{3n}^{(m)} \right\} \sin \lambda_m x_3 \quad (i, j = 1, 2).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Тогда с учетом (15) уравнения (14) распадутся на счетное множество ра-

венств вида $\sigma_{ij}^{(m)} n_j = X_{in}^{(m)}$, которые удобно представить в равносильной комплексной форме

$$\begin{aligned}\sigma_1^{(m)} - e^{2i\psi_0} \sigma_2^{(m)} &= 2 \left(N^{(m)} - iT^{(m)} \right), \\ \sigma_1^{(m)} - e^{-2i\psi_0} \bar{\sigma}_2^{(m)} &= 2 \left(N^{(m)} + iT^{(m)} \right), \\ e^{i\psi_0} \bar{\sigma}_3^{(m)} + e^{-i\psi_0} \sigma_3^{(m)} &= 2X_3^{(m)}.\end{aligned}\quad (16)$$

Здесь

$$\begin{aligned}e^{i\psi_0} &= n_1 + in_2, \quad \sigma_1^{(m)} = \sigma_{11}^{(m)} + \sigma_{22}^{(m)}, \\ \sigma_2^{(m)} &= \sigma_{22}^{(m)} - \sigma_{11}^{(m)} + 2i\sigma_{12}^{(m)}, \quad \sigma_3^{(m)} = \sigma_{13}^{(m)} + i\sigma_{23}^{(m)}, \\ \bar{\sigma}_2^{(m)} &= \sigma_{22}^{(m)} - \sigma_{11}^{(m)} - 2i\sigma_{12}^{(m)}, \quad \bar{\sigma}_3^{(m)} = \sigma_{13}^{(m)} - i\sigma_{23}^{(m)}, \\ N^{(m)} &= X_1^{(m)} n_1 + X_2^{(m)} n_2, \quad T^{(m)} = X_2^{(m)} n_1 - X_1^{(m)} n_2.\end{aligned}$$

Входящие в (16) комбинации напряжений получим из (13) при помощи закона Гука. Поскольку функции $K_1(\lambda_m r)$ при $z \rightarrow \zeta_0 \in \Gamma$ имеют особенность порядка $1/r$, то при подстановке комбинаций напряжений в граничные условия (16) в контурных интегралах необходимо выполнить предельный переход. В результате получим не более, чем счетное множество систем интегральных уравнений относительно неизвестных плотностей

$$q_{jm}(\zeta_0) + \frac{\lambda_m}{2\pi(1-\nu)} \int G_{jk}^{(m)}(\zeta, \zeta_0) q_{km}(\zeta) dS = Y_j^{(m)}(\zeta_0) \quad (k, j = \overline{1, 3}), \quad (17)$$

$$G_{11}^{(m)} = \left[\left(K_{1m} + \frac{\lambda_m}{2} r K_{0m} \right) \cos(\alpha - \psi_0) + (1 - 2\nu) e^{i(\alpha - \psi_0)} K_{1m} \right] e^{i(\psi - \psi_0)},$$

$$G_{12}^{(m)} = \left(K_{1m} + \frac{\lambda_m}{2} r K_{0m} \right) \cos(\alpha - \psi_0) e^{i(2\alpha - \psi - \psi_0)},$$

$$G_{13}^{(m)} = \lambda_m r K_{1m} \cos(\alpha - \psi_0) e^{i(\alpha - \psi_0)} - (1 - 2\nu) K_{0m},$$

$$G_{21}^{(m)} = \left(K_{1m} + \frac{\lambda_m}{2} r K_{0m} \right) \cos(\psi_0 - \alpha) e^{i(\psi + \psi_0 - 2\alpha)},$$

$$\begin{aligned}G_{22}^{(m)} &= \left[\left(K_{1m} + \frac{\lambda_m}{2} r K_{0m} \right) \cos(\psi_0 - \alpha) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - 2\nu) e^{i(\psi_0 - \alpha)} K_{1m} \right] e^{i(\psi_0 - \psi)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{23}^{(m)} &= \lambda_m r K_{1m} \cos(\psi_0 - \alpha) e^{i(\psi_0 - \alpha)} - (1 - 2\nu) K_{0m}, \\
G_{31}^{(m)} &= - \left[\lambda_m r K_{1m} \cos(\alpha - \psi_0) + (1 - 2\nu) K_{0m} e^{i(\alpha - \psi_0)} \right] e^{i(\psi - \alpha)}, \\
G_{32}^{(m)} &= - \left[\lambda_m r K_{1m} \cos(\psi_0 - \alpha) + (1 - 2\nu) K_{0m} e^{i(\psi_0 - \alpha)} \right] e^{i(\alpha - \psi)}, \\
G_{33}^{(m)} &= - \left[\lambda_m r K_{0m} - 2(1 - \nu) K_{1m} \right] \cos(\psi_0 - \alpha), \\
Y_1^{(m)} &= N^{(m)} + iT^{(m)}, \quad Y_2^{(m)} = N^{(m)} - iT^{(m)}, \quad Y_3^{(m)} = 2X_3^{(m)}.
\end{aligned}$$

Для численного решения системы (17) использовался метод механических квадратур [9]. Уравнения криволинейных контуров были записаны в параметрическом виде. Погрешность аппроксимации интегралов их дискретными значениями контролировалась при помощи проверки граничных условий на поверхности полости. Ниже представлены некоторые формулы для расчета напряжений на поверхности полости

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{(m)} &= \frac{q_{1m}^0}{8(1-\nu)} \left[2 + \kappa e^{2i\psi_0} - e^{-2i\psi_0} \right] + \frac{q_{2m}^0}{8(1-\nu)} \left[2 + \kappa e^{-2i\psi_0} - e^{2i\psi_0} \right] + \\
&+ \frac{\lambda_m}{4\pi(1-\nu)} \int \left\{ q_{1m} e^{i(\psi-\alpha)} \left[\frac{1}{2} K_{1m} \left(2 + \kappa e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha} \right) + \right. \right. \\
&+ \left. \lambda_m r K_{0m} \cos^2 \alpha \right] + q_{2m} e^{i(\alpha-\psi)} \left[\frac{1}{2} K_{1m} \left(2 + \kappa e^{-2i\alpha} + e^{2i\alpha} \right) + \right. \\
&+ \left. \lambda_m r K_{0m} \cos^2 \alpha \right] + q_{3m} \left[\lambda_m r K_{1m} \cos^2 \alpha - (1 - 2\nu) K_{0m} \right] \Big\} dS; \\
\sigma_{22}^{(m)} &= \frac{q_{1m}^0}{8(1-\nu)} \left[2 - \kappa e^{2i\psi_0} + e^{-2i\psi_0} \right] + \frac{q_{2m}^0}{8(1-\nu)} \left[2 - \kappa e^{-2i\psi_0} + e^{2i\psi_0} \right] + \\
&+ \frac{\lambda_m}{4\pi(1-\nu)} \int \left\{ q_{1m} e^{i(\psi-\alpha)} \left[\frac{1}{2} K_{1m} \left(2 - \kappa e^{2i\alpha} - e^{-2i\alpha} \right) + \right. \right. \\
&+ \left. \lambda_m r K_{0m} \sin^2 \alpha \right] + q_{2m} e^{i(\alpha-\psi)} \left[\frac{1}{2} K_{1m} \left(2 - \kappa e^{-2i\alpha} - e^{2i\alpha} \right) + \right. \\
&+ \left. \lambda_m r K_{0m} \sin^2 \alpha \right] + q_{3m} \left[\lambda_m r K_{1m} \sin^2 \alpha - (1 - 2\nu) K_{0m} \right] \Big\} dS; \\
\sigma_{12}^{(m)} &= \frac{q_{1m}^0}{8i(1-\nu)} \left[\kappa e^{2i\psi_0} + e^{-2i\psi_0} \right] - \frac{q_{2m}^0}{8i(1-\nu)} \left[\kappa e^{-2i\psi_0} + e^{2i\psi_0} \right] + \\
&+ \frac{\lambda_m}{8\pi i(1-\nu)} \int \left\{ q_{1m} e^{i(\psi-\alpha)} \left[K_{1m} \left(\kappa e^{2i\alpha} - e^{-2i\alpha} \right) + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + i\lambda_m r K_{0m} \sin 2\alpha] + q_{2m} e^{i(\alpha-\psi)} \left[K_{1m} (e^{2i\alpha} - \kappa e^{-2i\alpha}) + \right. \\
& \left. + i\lambda_m r K_{0m} \sin 2\alpha] + q_{3m} i\lambda_m r K_{1m} \sin 2\alpha \right] dS ; \\
\sigma_{rr} &= \sigma_{11} \cos^2 \psi + \sigma_{22} \sin^2 \psi + \sigma_{12} \sin 2\psi ; \\
\sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{11} \sin^2 \psi + \sigma_{22} \cos^2 \psi - \sigma_{12} \sin 2\psi ; \\
\sigma_{r\theta} &= \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 2\psi + \sigma_{12} \cos 2\psi ,
\end{aligned}$$

где ψ – угол между нормалью к контуру Γ и положительным направлением оси Ox_1 .

Численные результаты и их анализ. Поскольку полученные Ф-решения удовлетворяют уравнениям равновесия во всей рассматриваемой области, то система (17) применима для рассмотрения как неограниченного слоя с системой отверстий, так и для ограниченной толстой плиты, когда одна из граничных поверхностей охватывает все остальные, расположенные вне друг друга. Приведем некоторые из полученных результатов.

На рис. 1, 2 для слоя с двумя одинаковыми эллиптическими отверстиями приведены графики распределения окружного нормального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ в срединной плоскости слоя вдоль контура левого отверстия для различных значений расстояния d между отверстиями при двух способах

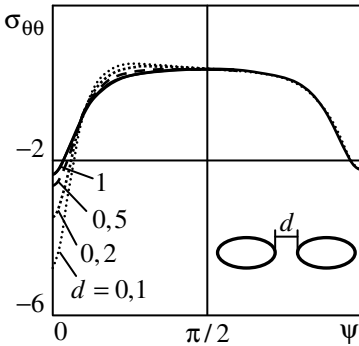


Рис. 1

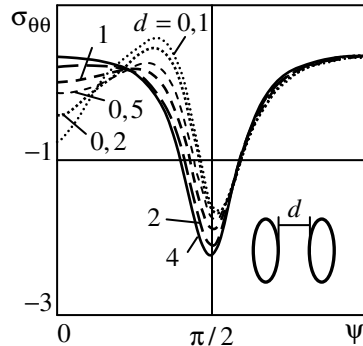


Рис. 2

ориентации эллипсов. Считалось, что $a/b = 3$, $(a+b)/2 = R = 1$; $h = 1$; на поверхности полостей действует давление, постоянное в плоскости Ox_1x_2 и изменяющееся вдоль координаты x_3 по параболическому закону $N(x_3) = N_0(1 - (x_3/h)^2)$, $N_0 = 1(H/M^2)$; $\nu = 0,3$. Точность вычисления контролировалась при помощи проверки граничных условий на поверхности

полости так, чтобы максимальная относительная погрешность не превышала 0,001. Из рисунков видно, что максимальные напряжения возникают при ориентации больших полуосей вдоль линии центров эллипсов, но при увеличении расстояния между эллипсами взаимное влияние достаточно быстро уменьшается. Так уже при $d = 1$ его можно не учитывать. При ориентации больших полуосей перпендикулярно линии центров, взаимное влияние становится несущественным лишь при $d > 4$. Важно, что такая ориентация несколько уменьшает максимальные напряжения. Таким образом, можно говорить о более высоких градиентах напряжений в первом случае, и о большем расстоянии взаимодействия отверстий во втором.

Для слоя с круговой полостью и двумя симметричными эллиптическими отверстиями, центры которых находятся на одной линии, на рис. 3, 4 приведены распределения окружного нормального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ в срединной плоскости слоя вдоль контура кругового и правого эллиптического от-

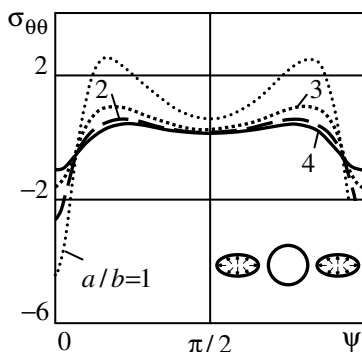


Рис. 3

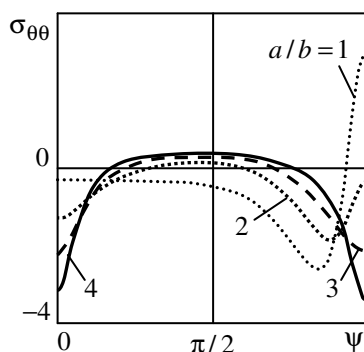


Рис. 4

верстий для различных отношений полуосей эллипсов. Считалось, что $d = 0,2$, $h = 1$, $\nu = 0,3$; эллиптические отверстия нагружены нормальным давлением по параболическому закону, круговое отверстие не нагружено. Как видим, взаимное влияние отверстий на распределение напряжений тем больше, чем ближе отношение полуосей эллипсов к единице. При этом на свободном отверстии возникают максимальные напряжения. С увеличением кривизны эллипсов напряжения на круговом отверстии уменьшаются.

Для квадратного цилиндра с высотой $2h = 2$, ослабленного круговой туннельной полостью единичного радиуса вдоль x_3 на рис. 5, 6 изображены распределения напряжения $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} в срединной плоскости слоя и $\sigma_{\theta z}$ на основании, для внешнего и внутреннего контуров соответственно. Считалось, что кривизна контура в вершинах квадрата равна 30, сторона квадрата – 1,2, $\nu = 0,3$; на внутренней поверхности цилиндра действует

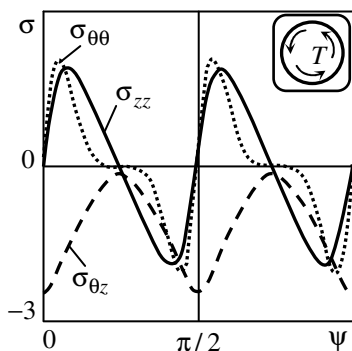


Рис. 5

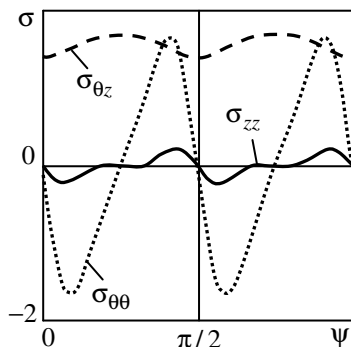


Рис. 6

касательное напряжение $T = T_0(1 - (x_3/h)^2)$, $T_0 = 1(H/m^2)$. Получено, что напряжения на внешнем контуре превышают соответствующие значения на внутреннем. Отметим, что при таком виде нагрузки, возникают достаточно значительные сдвиговые напряжения на основаниях цилиндра.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано новий підхід до вивчення напружено-деформованого стану шару з тунельними порожнинами, а також багатозв'язних циліндричних тіл з граничними умовами типу діафрагми на основах.

SUMMARY. A new approach to analysis of deflected mode of thick plate with tunnel cavities and multi-connected cylindrical solids is proposed. Boundary conditions on the flat faces are given as "diaphragm"-type conditions.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. *Ворович И. И., Аксентян О. К.* Напряженное состояние плиты малой толщины // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т. 27, вып. 6. – С. 1057–1074. 2. *Лурье А. И.* К теории толстых плит // Прикладная математика и механика. – 1942. – Т. 6, вып. 2/3. – С. 151–168. 3. *Космодамианский А. С., Шалдырван В. А.* Толстые многосвязные пластины. – К.: Наук. думка, 1978. – 240 с. 4. *Шалдырван В. А.* Некоторые результаты и проблемы трехмерной теории пластин (обзор) // Прикладная механика. – 2002. – Т. 43, №2. – С. 45–69. 5. *Алтухов Е. В.* Напряженное состояние толстых пластин при однородных граничных условиях смешанного типа на торцах // Теорет. и прикладная механика. – 1992. – Вып. 23. – С. 3–8. 6. *Алтухов Е. В.* Упругое равновесие слоя с полостью для граничных условий смешанного типа на торцах // Теорет. и прикладная механика. – 1993. – Вып. 24. – С. 3–7. 7. *Алтухов Е. В.* Однородные решения трехмерных динамических задач изотропных пластин с граничными условиями типа диафрагмы // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49, № 2. – С. 137–141. 8. *Фильштинский Л. А., Ковалев Ю. Д.* Смешанная кососимметричная задача об упругом слое, ослабленном сквозными полостями // Физ.-хим. механика материалов. – 2001. – № 5. – С. 114–116. 9. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. – М.: Наука, 1985. – 235 с.

О. И. ЛЕВЧУК, канд. физ.-мат. наук

ЗАДАЧА О СЖАТИИ ДВУХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ, ОДНО ИЗ КОТОРЫХ СОДЕРЖИТ ВЫЕМКУ ПОД ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

Возрастающее использование пьезокерамических материалов, которые отличаются хрупкостью, приводит к необходимости детального изучения распределения напряжений как в упругих, так и в электроупругих телах вблизи концентраторов напряжений, в том числе отверстий, трещин, штампов [1–7]. Однако, при исследовании задач электроупругости возникают трудности математического характера, вызванные сложностью решения связанной системы дифференциальных уравнений [2]. Тем не менее выполнены определенные исследования по решению контактных задач электроупругости [1, 2, 4, 6].

В настоящей статье решена задача о контактном взаимодействии двух пьезокерамических полупространств с различными свойствами, одно из которых содержит пологой осесимметричную выемку специальной формы под внутренним давлением.

Основные соотношения и постановка задачи. Связанная система уравнений электроупругости относительно перемещений u_x , u_y , u_z и электрического потенциала Ψ имеет вид [2]

$$\begin{aligned} & c_{11}^E u_{x,xx} + 0,5(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + 0,5(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{y,xy} + \\ & + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,xz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,xz} = 0; \\ & c_{11}^E u_{y,yy} + 0,5(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + 0,5(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{x,xy} + \\ & + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,yz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,yz} = 0; \\ & (c_{13}^E + c_{44}^E) (u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E (u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + \\ & + e_{15} (\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33} \Psi_{,zz} = 0; \\ & (e_{31} + e_{15}) (u_{x,xz} + u_{y,yz}) + e_{15} (u_{z,xx} + u_{z,yy}) + e_{33} u_{z,zz} + \\ & - \varepsilon_{11}^S (\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) - \varepsilon_{33}^S \Psi_{,zz} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где c_{11}^E , c_{12}^E , c_{13}^E , c_{33}^E , c_{44}^E – модули упругости; e_{31} , e_{15} , e_{33} – пьезомодуль

ли; $\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$ – диэлектрические проницаемости.

Для решения уравнений (1) используем представление решений [4]

$$\begin{aligned} u_x &= \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,x} + \Phi_{4,y}; & u_y &= \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,y} - \Phi_{4,x}; \\ u_z &= \sum_{j=1}^3 k_j \Phi_{j,z}; & \Psi &= \sum_{j=1}^3 l_j \Phi_{j,z}, \end{aligned} \quad (2)$$

где k_j, l_j – постоянные, подлежащие определению; Φ_j – функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + \nu_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j = \overline{1,4}); \quad (3)$$

$\nu_4 = 2c_{44}^E / (c_{11}^E - c_{12}^E)$; ν_i ($i = \overline{1,3}$) – корни уравнения третьего порядка [4];

k_j, l_j ($j = \overline{1,3}$) – постоянные, связанные с ν_j соотношениями

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{e_{33} k_j - \varepsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = \nu_j; \quad (4)$$

$$a_j = c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j; \quad d_j = e_{15} (1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j.$$

Рассмотрим пьезокерамические полупространства, одно из которых содержит осесимметричную выемку с формой, описываемой формулой

$$f(r) = h_0 \left(1 - r^2 / b^2\right)^{3/2}, \quad r \leq b, \quad (h_0 \ll b). \quad (5)$$

Пусть на бесконечности к полупространствам приложены сжимающие усилия p , а полость нагружена давлением газа P_0 . Непосредственный контакт осуществляется не по всей поверхности раздела, а по некоторой ее части $r > a$, где a – неизвестный радиус области контакта, который зависит от значений усилий p , давления P_0 , первоначальной геометрии выемки, свойств электроупругих полупространств и характера контактного взаимодействия.

Дополним функцию $f(r)$ нулевым значением в области $r > b$. Тогда

$$f(r) = \begin{cases} h_0 (1 - r^2 / b^2)^{3/2}, & r \leq b; \\ 0, & r > b. \end{cases} \quad (6)$$

Граничные условия в плоскости $z = 0$ примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(i)} &= -P_0, \quad 0 < r < a; & u_z^{(1)} &= u_z^{(2)} + f(r), \quad a < r < \infty; \\ \sigma_{zr}^{(i)} &= 0, \quad 0 < r < \infty; & \sigma_{zz}^{(1)} &= \sigma_{zz}^{(2)}, \quad a < r < \infty; & D_z^{(i)} &= 0, \quad 0 < r < \infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Индексы “1” и “2” соответствуют первому и второму полупространствам. Последнее граничное условие по электрическому состоянию соответствует случаю неэлектродриванной поверхности полупространств. При удалении от области контактного взаимодействия должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(i)} &\rightarrow -p, \quad D_z^{(i)} \rightarrow 0, \quad \sigma_{zr}^{(i)} \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty; \\ \sigma_{rr}^{(i)} &\rightarrow 0, \quad \sigma_{zr}^{(i)} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8)$$

Построение решения задачи. Представим решение задачи в виде суперпозиции двух электронапряженных состояний, первое из которых имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{0(i)} &= -p, \quad \sigma_{rr}^{0(i)} = \sigma_{rz}^{0(i)} = 0, \quad D_z^{0(i)} = D_r^{0(i)} = 0; \\ u_r^{0(i)} &= A^{0(i)} pr, \quad u_z^{0(i)} = -B^{0(i)} pz, \end{aligned} \quad (9)$$

где $A^{0(i)}$, $B^{0(i)}$ – постоянные, определяемые из свойств пьезокерамических материалов [2].

Для получения второго члена суперпозиции, что отвечает возмущенному состоянию и носит локальный характер (исчезает на бесконечности), воспользуемся представлением (2) и потенциальными функциями

$$\begin{aligned} \Phi_j^{(i)}(x, y, z_j), \quad (i = 1, 2; j = \overline{1, 4}): \\ \Phi_j^{(i)}(x, y, z_j) &= \alpha_j^{(i)} \int_0^\infty \frac{A^{(i)}(\lambda)}{\lambda} e^{(-1)^{i+1} \lambda z_j} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (i = 1, 2; j = \overline{1, 3}); \\ \Phi_4^{(i)} &= 0. \end{aligned}$$

Согласно [6] выражения постоянных $\alpha_j^{(i)}$ для случая неэлектродриванных поверхностей полупространств выберем в виде

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \alpha_j^{(i)} \left[c_{44}^{E(i)} (1+k_j^{(i)}) + e_{15}^{(i)} l_j^{(i)} \right] &= 1; \\ \sum_{j=1}^3 \alpha_j^{(i)} \left[c_{44}^{E(i)} (1+k_j^{(i)}) + e_{15}^{(i)} l_j^{(i)} \right] / \sqrt{v_j^{(i)}} &= 0; \\ \sum_{j=1}^3 \alpha_j^{(i)} \left[e_{15}^{(i)} (1+k_j^{(i)}) - \varepsilon_{11}^{S(i)} l_j^{(i)} \right] &= 0 \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10) получим $\alpha_j^{(i)} = \Delta_j^{(i)} / \Delta^{(i)}$, где

$$\Delta^{(i)} = \begin{vmatrix} a_1^{(i)} & a_2^{(i)} & a_3^{(i)} \\ \frac{a_1^{(i)}}{\sqrt{v_1^{(i)}}} & \frac{a_2^{(i)}}{\sqrt{v_2^{(i)}}} & \frac{a_3^{(i)}}{\sqrt{v_3^{(i)}}} \\ d_1^{(i)} & d_2^{(i)} & d_3^{(i)} \end{vmatrix}; \quad \Delta_1^{(i)} = \begin{vmatrix} a_2^{(i)} & a_3^{(i)} \\ \sqrt{v_2^{(i)}} & \sqrt{v_3^{(i)}} \\ d_2^{(i)} & d_3^{(i)} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2^{(i)} = - \begin{vmatrix} a_1^{(i)} & a_3^{(i)} \\ \sqrt{v_1^{(i)}} & \sqrt{v_3^{(i)}} \\ d_1^{(i)} & d_3^{(i)} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3^{(i)} = \begin{vmatrix} a_1^{(i)} & a_2^{(i)} \\ \sqrt{v_1^{(i)}} & \sqrt{v_2^{(i)}} \\ d_1^{(i)} & d_2^{(i)} \end{vmatrix}.$$

При таком выборе $\alpha_j^{(i)}$ на поверхности $z=0$ удовлетворяются граничные условия $\sigma_{zr}^{(i)} = 0$, $D_z^{(i)} = 0$, $0 < r < \infty$. Из оставшихся граничных условий, используя преобразования, описанные в [8, 9], получаем систему уравнений

$$\int_0^{\infty} \lambda A^{(1)}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = p - P_0 \quad \text{при } 0 < r < a;$$

$$M^* \int_0^{\infty} A^{(1)}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = f(r) \quad \text{при } a < r < \infty, \quad (11)$$

где $M^* = \sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_j^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} + \sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_j^{(2)}}{\Delta^{(2)}} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}}$. Отметим, что при переходе к упругому изотропному материалу $M^* \rightarrow (1 - \nu_1)/\mu_1 + (1 - \nu_2)/\mu_2$.

С помощью решения уравнения Абеля, к которому сводится система (11), найдем перемещения в плоскости контакта. Далее вычислим размер зазора, образовавшегося в результате контактного взаимодействия (при неизменной величине давления в нем) с помощью соотношения

$$u_z^{(2)}|_{z=0} - u_z^{(1)}|_{z=0} = -h(r) + f(r).$$

Отсюда получим

$$h(r) = \frac{3h_0}{2b} \left(1 - \frac{a^2 + 2r^2}{3b^2} \right) \sqrt{a^2 - r^2} - \frac{2}{\pi} M^* (p - P_0) \sqrt{a^2 - r^2}, \quad 0 < r < a. \quad (12)$$

Для нахождения неизвестного радиуса зазора a из условий ограниченно-

сти контактного давления получаем

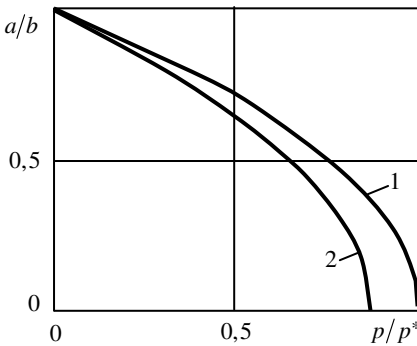
$$a = b \sqrt{1 - \frac{4(p - P_0) b M^*}{3\pi h_0}}. \quad (13)$$

Отметим, что к этим выражениям приводит и требование гладкости закрытия зазора $h'(a) = 0$. Для определения сжимающих усилий p^* , при которых зазор полностью закрывается, положим $a = 0$. В результате находим

$$p^* = 3\pi h_0 / (4bM^*) + P_0. \quad (14)$$

С помощью формул (12)-(14) легко вычислить величину зазора, его радиус и значение давления полного закрытия зазора, которые зависят от свойств пьезокерамических полупространств, сжимающих усилий, давления в выемке и ее геометрии.

Анализ результатов численных исследований. Для сжатия двух пьезокерамических полупространств с одинаковыми свойствами (материал BaTiO₃), одно из которых содержит пологую осесимметричную выемку, на рисунке показана зависимость радиуса контакта от сжимающей нагрузки



p / p^* для пьезокерамических полупространств (кривая 1) и зависимость радиуса контакта для упругих трансверсально-изотропных тел с теми же упругими свойствами, что и у материала BaTiO₃, но при отсутствии у него электрических свойств (кривая 2). Считалось, что $P_0 = 0$ (давление в выемке отсутствует). Видно, что связанность силового и электрического полей увеличивает размеры зазора по сравнению с чисто упругим случаем и для его

закрытия требуются большие сжимающие усилия, чем для чисто упругого материала (с теми же упругими свойствами).

Следовательно, при сжатии двух пьезокерамических полупространств, одно из которых содержит пологую осесимметричную выемку специальной формы под внутренним давлением, в виде элементарных формул получены выражения величины зазора между телами, его радиус и значение давления полного закрытия зазора, которые зависят от свойств пьезокерамических полупространств, сжимающих усилий, давления в выемке и ее геометрии. Исследовано влияние связанности полей на величину зазора между телами.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу про стискання двох п'єзокерамічних півпросторів, один з яких містить похилу осесиметричну виїмку спеціальної форми (під внутрішнім тиском). Припускається, що площина контактної взаємодії є площиною ізотропії

п'єзокерамічних матеріалів. У вигляді елементарних формул отримано вирази величини зазору між тілами, його радіуса та знайдено значення величини стискання до повного закриття зазору, які залежать від властивостей п'єзокерамічних півпросторів, стискаючих зусиль, тиску у виїмці та її геометрії.

SUMMARY. It was considered the problem on the compression of two piezoelectric half-spaces one of it contains of sloping axially symmetric groove of the special form (under inner pressure). It was supposed that plane of contact interaction is the plane of isotropy of piezoelectric materials. As the elementary formulas it was obtained the expressions of values of groove between of the bodies, its radius and there was found the compression magnitude for full closing of the groove which depend on properties of piezoelectric half-spaces, compression loadings and pressure in the groove and its geometry.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. *Бабич С. Ю., Гузь А. Н., Рудницький В. Б.* Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями применительно к жестким и упругим штампам // Прикладная механика. – 2004. – Т. 40, № 7. – С. 41–69. 2. *Грінченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 279 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 6-ти т.; Т. 1). 3. *Chen W. Q, Lim C. W.* 3D point force solution for a permeable penny-shaped crack embedded in an infinite transversely isotropic piezoelectric medium // Int. J. Fract. – 2005. – Vol. 131, № 3. – P. 231–246. 4. *Podil'chuk Yu. N.* Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelastostatic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems // Int. Appl. Mech. – 2003. – Vol. 39, № 2. – P. 132–170. 5. *Kaloerov S. A.* Determining the intensity factors for stresses, electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media // Int. Appl. Mech. – 2007. – Vol. 43, № 6. – P. 631–637. 6. *Kirilyuk V. S.* On correlation the solutions of a static contact problems of the theory of elasticity and theory of electroelasticity for the half-space // Int. Appl. Mech. – 2006. – Vol. 42, № 11. – P. 1269–1284. 7. *Kirilyuk V. S.* Thermostressed state of a piezoelectric body with a plane crack under symmetric thermal load // Int. Appl. Mech. – 2008. – Vol. 44, № 3. – P. 320–330. 8. *Мартиняк Р. М., Маланчук Н. І., Монастирський Б. Є.* Зсув притиснутих одна до одної півплощин з поверхневою виїмкою. Ч. 1. Повний контакт. // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2005. – Т. 41, № 2. – С. 39–41. 9. *Монастирський Б. Є.* Осесиметрична контактна задача для півпросторів з геометричним збуренням поверхні // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1999. – Т. 35, № 6. – С. 22–26.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 14.06.2009

УДК 539.3

Н. П. СЕМЕНЮК, д-р техн. наук, *Н. Б. ЖУКОВА*, канд. физ.-мат. наук,
И. Ю. БАБИЧ, д-р физ.-мат. наук

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОПЕРЕЧНО ГОФРИРОВАННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ РАВНОМЕРНОМ ПОВЕРХНОСТНОМ ДАВЛЕНИИ

Гофрированные оболочки широко применяются в различных областях техники и строительстве. Впервые возможность использования характерных особенностей оболочек с волнистой поверхностью в дирижаблестроении отметил К. Э. Циолковский [1]. Основное привлекательное свойство гофрированных оболочек состоит в том, что они обладают высокой жесткостью на изгиб и сжатие в направлении гофров.

Расчет напряженно-деформированного состояния и устойчивости гофрированных тонкостенных элементов базируется в основном на двух моделях. Первая из них учитывает различие в жесткостях, порождаемое геометрическими свойствами поверхности, с помощью упругих характеристик эквивалентного анизотропного материала [2]. Вторая построена на строгом учете параметров геометрии с помощью дифференциальной геометрии [3-5]. Известно, что приведение гофрированной тонкостенной конструкции к анизотропной упрощает решение задач, но такой подход имеет ограниченное применение. Переменность параметров геометрии гофрированных пластин и оболочек усложняет получение решений в точной постановке. В этом случае необходимо применять численные методы. Известны решения нелинейных задач статики гофрированных оболочек, в частности, сильфонов методом дискретной ортогонализации [3]. Рядом авторов применялся метод конечных элементов. Расчет продольно гофрированных оболочек при осевом сжатии с применением рядов Фурье для аппроксимации геометрических параметров оболочки методом Бубнова-Галеркина сделан в работах [4, 5]. Ниже рассматривается устойчивость поперечно гофрированных цилиндрических оболочек при равномерном поверхностном давлении. Для учета нелинейного характера докритического деформирования оболочки с переменной геометрией используется численный метод, предложенный в [6].

Постановка задачи. Рассматривается устойчивость при внешнем давлении оболочек, срединная поверхность которых образуется при вращении вокруг оси x кривой, заданной в плоскости y, x уравнением

$$y = R_0 + H \sin(m\pi x / L), \quad (1)$$

где постоянная R_0 равна радиусу цилиндрической поверхности, которой придана синусоидальная волнистость с количеством продольных полуволн m и с амплитудой H . Система ортогональных координат на поверхности

вращения α_1 , α_2 совпадает с сетью меридианов и параллелей, причем

α_1 – длина дуги меридиана, α_2 – длина дуги параллели, отсчитываемые соответственно от принятых за начальные параллели и меридиана (рис. 1). Учитывая, что $d\alpha_1^2 = dy^2 + dx^2$, длину элемента дуги меридиана можно представить как $d\alpha_1 = A_1 dx$, а параллели как $d\alpha_2 = A_2 d\varphi$, где A_1 и A_2 – параметры Ляме; φ – центральный угол, отсчитываемый от плоскости, проходящей через начальный меридиан. В данном случае

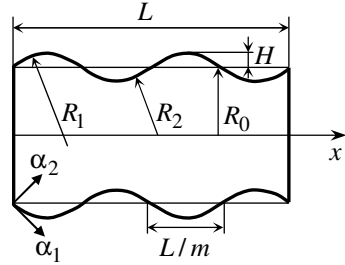


Рис. 1

$$A_1 = \sqrt{1 + H^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \frac{m\pi x}{L}}, \quad A_2 = y. \quad (2)$$

Нормальные кривизны поверхности в направлениях меридиана и параллели равны

$$k_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{A_1^3} H \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{m\pi z}{L}, \quad k_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{A_1 A_2}, \quad (3)$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны координатных линий. Кривизна k_1 у рассматриваемой оболочки знакопеременная. Так как $k_2 > 0$, то знакопеременной в этом случае будет также гауссова кривизна $k = k_1 k_2$.

Исследование устойчивости оболочек такого типа возможно на основе нелинейной теории, более полно учитывающей особенности их деформирования по сравнению с известными упрощенными вариантами, применимость которых правомочна к оболочкам положительной кривизны [7]. Разрешающая система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\varepsilon_{11}(u) - A_{11}T_{11} - A_{12}T_{12} - A_{13}M_{11} + d_{11}\varepsilon_{22} + d_{12}k_{22} + d_{13}k_{12} = 0;$$

$$\varepsilon_{12}(u) - A_{12}T_{11} - A_{22}T_{12} - A_{23}M_{11} + d_{21}\varepsilon_{22} + d_{22}k_{22} + d_{23}k_{12} = 0;$$

$$k_{11}(u) - A_{13}T_{11} - A_{23}T_{12} - A_{33}M_{11} + d_{31}\varepsilon_{22} + d_{32}k_{22} + d_{33}k_{12} = 0;$$

$$\theta_1(u) + \theta = 0;$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{11}^*}{\partial x} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{21}^*}{\partial \varphi} + a_1 (T_{12}^* + T_{21}^*) + a_2 (T_{11} - T_{22}) - \frac{1}{R_1} T_{13}^* + q_1 = 0;$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{12}^*}{\partial x} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{22}^*}{\partial \varphi} + a_2 (T_{12}^* + T_{21}^*) - a_1 (T_{11} - T_{22}) - \frac{1}{R_2} T_{23}^* + q_1 = 0;$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{13}^*}{\partial x} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{23}^*}{\partial \varphi} + a_2 T_{13}^* + a_1 T_{23}^* + \frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{23}}{R_2} + q_3 = 0;$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi} + 2a_1 M_{12} + a_2 (M_{11} - M_{22}) - T_{13} = 0. \quad (4)$$

Присутствующие в этих уравнениях коэффициенты A_{ij} и d_{ij} выражаются через жесткостные параметры соотношений обобщенного закона Гука, записанного в стандартном виде [7]. Для компонентов деформации ε_{ij} , приращений кривизн и кручения κ_{ij} в уравнениях (4) используются выражения, принятые в [8].

Для рассматриваемой оболочки

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{A_1 A_2} H \frac{m\pi}{L} \cos \frac{m\pi z}{L}.$$

Учет в этих выражениях нелинейных членов, обусловленных вращением малых элементов не только вокруг касательных к осям координат на поверхности, но и вокруг вертикальной оси, приводит к таким проекциям усилий T_{ij}^* на направления осей до деформации:

$$T_{12}^* = T_{12} + T_{11}\omega_1 - \frac{2}{R_2} M_{12},$$

$$T_{21}^* = T_{12} + T_{22}\omega_2, \quad T_{13}^* = T_{13} + T_{11}\theta_1 + T_{12}\theta_2,$$

$$T_{23}^* = \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \varphi} - a_1 (M_{11} - M_{22}) + 2a_2 M_{12} + T_{12}\theta_1 + T_{22}\theta_2. \quad (5)$$

Разрешающая система дифференциальных уравнений (4) в частных производных и соотношения для компонентов деформации ε_{ij} , приращений кривизн и кручения κ_{ij} представлены в виде, позволяющем после разделения переменных получить нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Для ее решения воспользуемся методом дискретной ортогонализации [3].

Граничные условия, которые также вытекают из вариационного принципа, формулируются относительно четырех функций, взятых по одной из четырех пар:

$$(T_{11}, w), \quad (T_{12}^*, v), \quad (T_{13}^*, w), \quad (M_{11}, \theta). \quad (6)$$

Расчет критических нагрузок и форм потери устойчивости. Пусть оболочка находится в состоянии равновесия при осесимметричном внешнем давлении интенсивностью q_0 . Устойчиво ли это состояние можно про-

верить, приложив малое неосесимметричное давление $\delta q \cos n\varphi$. Амплитуда δq считается неизвестной, но достаточно малой, чтобы реакция оболочки на эту нагрузку была линейной. Разрешающие функции в возмущенном состоянии будут равны сумме их значений в исходном состоянии $(T_{1,c}, \theta_{1,c}, \dots)$ и малых приращений в близком неосесимметричном состоянии, для которых новых обозначений вводить не будем. Запишем каждое из уравнений (4) в виде $\Pi_i = 0$ ($i = \overline{1, 8}$), линеаризовав присутствующие в них нелинейные слагаемые. Ввиду замкнутости оболочки по окружной координате усилия, моменты и перемещения являются периодическими функциями координаты φ . Решение представляем в виде рядов Фурье

$$\begin{aligned} (T_{11}, T_{13}^*, M_{11}, u, w, \theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (T_{11,n}, T_{13,n}, M_{11,n}, u_n, w_n, \theta_n) \cos n\varphi, \\ (T_{12}^*, v) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (T_{12,n}, v_n) \sin n\varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставив разложения (7) в линеаризованные уравнения $\Pi_i = 0$ и выполнив интегрирование в соответствии с методом Бубнова-Галеркина, получим систему из восьми обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{d\alpha_1} = F_i(y_{i,c}, y_i), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} y_1 &= T_{11,n}, \quad y_2 = T_{12,n}^*, \quad y_3 = T_{13,n}^*, \quad y_4 = M_{11}; \\ y_5 &= u, \quad y_6 = v, \quad y_7 = w, \quad y_8 = \theta. \end{aligned} \quad (9)$$

Граничные условия формулируются относительно y_i ($i = \overline{1, 8}$). Если ввести вектор Y , компонентами которого являются функции y_i и матрицы B_1 и B_2 размером 4×8 , то граничные условия удобно сформулировать в виде $B_1 Y = b_1$, $B_2 Y = b_2$ соответственно при $x = 0$ и $x = L$.

Для решения системы уравнений (8) при соответствующих граничных условиях используем метод дискретной ортогонализации [6].

Весь интервал интегрирования $\alpha_{1,0} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{1,l}$ делится на k участков. На j -м участке полное решение записывается в виде:

$$Y^{(j)} = \bar{Y}^{(j)} C^{(j)}, \quad (10)$$

где $\bar{Y}^{(j)}$ – матрица решений, состоящая из четырех векторов-решений однородной системы и одного – неоднородной. Решение при $x = 0$ удовле-

творяет граничным условиям независимо от значения констант C_i . Для определения этих констант используются граничные условия при $x = L$. Подставив (10) в (9), получим

$$B_2 \bar{Y}^{(k)} C^{(k)} = 0. \quad (11)$$

Матрица $B_2 \bar{Y}^{(k)}$ имеет размер 4×5 . Учитывая, что последний компонент вектора $C^{(k)}$ равен 1 [3, 6], система (11) относительно четырех неизвестных компонент будет неоднородной и ее решение существует, если $\text{rang}(B_2 \bar{Y}) = 4$. Видоизменим процедуру нахождения решения, учитывая то, что компоненты столбца матрицы, являющиеся решением неоднородной задачи, пропорциональны значению возмущающей нагрузки δq (или δP).

Будем считать величину δq заданной с некоторым коэффициентом c^j .

Тогда вектор $C^{(j)}$ будет определяться пятью компонентами [9]

$$C^{(j)} = (c_1^j, c_2^j, c_3^j, c_4^j, c_5^j). \quad (12)$$

Система уравнений

$$B_2 \bar{y}^j C^{(j)} = 0 \quad (13)$$

при этом состоит из четырех уравнений относительно пяти неизвестных.

Дополнительное уравнение примем в таком же виде, как при шаговом нагружении вдоль кривой множества решений системы [9]. Указанное уравнение выражает тот факт, что вектор $C^{(j)}$ – единичный:

$$(c^j, c^j) = 1. \quad (14)$$

Решение системы (13) при условии (14) имеет вид

$$c_i^j = \frac{\pm \Delta_i}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta^2}}, \quad c_5^j = \frac{\pm \Delta}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta^2}}, \quad (15)$$

где Δ_i – определители 4-го порядка, которые образуются из основного определителя Δ путем замены i -го столбца столбцом коэффициентов при неизвестном c_5^j с обратным знаком. Если ранг расширенной матрицы B_2 равен 4, то решение в виде (15) существует независимо от того, равен определитель Δ нулю или нет. При критической нагрузке $\Delta = 0$, поэтому

$$c_i^j = \frac{\Delta_i}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta^2}}, \quad c_5^j = 0. \quad (16)$$

Отсюда следует, что c_i^j не зависят от изменения значения δq , а сис-

тема уравнений (13) будет однородной.

Если нагрузка q_0 равна критической, то амплитуда возмущения $\delta q = 0$. Подтверждается справедливость критерия Эйлера с одной стороны, а с другой – что применение указанного подхода не противоречит традиционной постановке задачи устойчивости. Преимущество предлагаемого варианта заключается в том, что упрощается расчет формы выпучивания.

Результаты расчета и их обсуждение. Выполним расчет устойчивости изотропных и ортотропных оболочек, образованных вращением кривой, заданной уравнением (1), вокруг оси x , которая отдалена на расстояние R_0 от оси абсцисс синусоиды. Будем варьировать количество полуволн m и амплитуду H , влияние которых на критическое значение интенсивности внешнего давления q представляют наибольший интерес. Механические характеристики материала изотропной оболочки соответствуют алюминиевому сплаву, для которого модуль упругости $E = 72 \text{ ГПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 3$. В случае ортотропной оболочки необходимые при расчете модули материала E_1, E_2, G_{12} и коэффициент Пуассона ν_1 будем определять с помощью известных формул [8] при заданных модуле $E_a = 70 \text{ ГПа}$ и коэффициенте $\nu_a = 0,2$ армирующих волокон и $E = 3,15 \text{ ГПа}$ и $\nu = 0,382$ связующего при объемном содержании волокон $\xi = 0,7$. Геометрические параметры оболочки $R_0 = 1 \text{ м}$, толщина $t = 0,01 \text{ м}$ и длина $L = 2 \text{ м}$ не изменяются. Изотропная цилиндрическая оболочка с такими параметрами теряет устойчивость при $q_c = 0,352 \text{ МПа}$ для шарнирно-подвижного закрепления торцов, при $q_c = 0,470 \text{ МПа}$ – для шарнирно-неподвижного и при $q_c = 0,477 \text{ МПа}$ – для жесткого закрепления. На рис. 2 приведены кривые, которые показывают, как зависят критические значения интенсивности внешнего давления от количества и амплитуды полуволн синусоиды. Номера кривых равны количеству полуволн $m = 1, m = 2, m = 4$. По оси абсцисс отложены отношения амплитуды H к толщине t , по оси ординат – отношения критических нагрузок волнообразных оболочек $q(H)$ к критическому значению давления цилиндрической оболочки – $q_H = q(H)/q(0)$. Кривая 1 при $H < 0$ лежит ниже прямой $q_H = 1$, при $H > 0$ это отношение больше единицы, непрерывно возрастает в приведенном диапазоне значений H . При $m = 2$ и $m = 4$ кривые испытывают значительные флуктуации в интервалах $-8 < H < 8$ (кривая 2) и $-4 < H < 4$ (кривая 4). Вне этих интервалов наблюдается резкое увеличение критических нагрузок при росте $|H/t|$, которое заканчивается в некоторой точке, где кривые терпят излом, принимая вид волнистых кривых с медленно уменьшающимися амплитудами. Это говорит о том, что даль-

нейшее увеличение амплитуд волн уже не только не приводит к увеличению критических нагрузок, но способствует их снижению. Аналогичные зависимости при $m = 12$, $m = 18$ и $m = 24$ представлены в виде графиков на рис. 3. Эти кривые симметричны относительно оси ординат, поэтому их значения при отрицательных амплитудах не приводятся. Начальные участки указанных кривых почти сливаются. Однако они представляют интерес, так как иллюстрируют влияние многоволновой волнистой поверхности оболочки с малыми амплитудами. О том, какую деформацию испытывает меридиан оболочки в критической точке иллюстрируют кривые на рис. 4. Они построены для исходной волнистой поверхности с $m = 12$ при $H/t = 2$ (кривая 1), $H/t = 3$ (кривая 2), $H/t = 10$ (кривая 3). Сплошные тонкие кри-

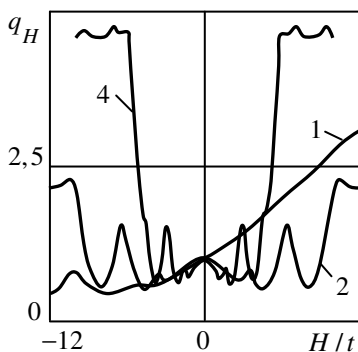


Рис. 2

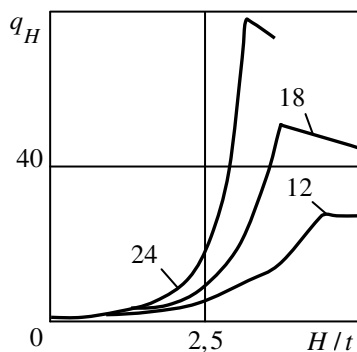


Рис. 3

вые – это исходная форма меридиана, толстые кривые – их вид в начальном состоянии после бифуркации. Общая форма, характерная для потери устойчивости цилиндрических оболочек при внешнем давлении (1) с ростом амплитуды H изменяется (2), переходя в локальную форму (3), когда теряют устойчивость гофры. Дальнейшее увеличение высоты гофров не может дать увеличение критических нагрузок. Этим объясняется наличие точки излома на кривых, описывающих зависимость $q(H)$.

Приведенные расчеты относятся к случаю бокового внешнего давления. Однако как показывают вычисления, наличие торцевой составляющей давления весьма существенно сказывается на устойчивости рассматриваемых оболочек. На рис. 5 приведены графики, иллюстрирующие зависимость критических нагрузок от амплитуды H для оболочек с синусоидальным ($m = 12$) гофрированием. По оси абсцисс отложены значения отношения амплитуды H к толщине оболочки t , по оси ординат – отношения критической нагрузки ($q_c(H)$) для гофрированной оболочки с амплитудой гофра H к критической нагрузке гладкой цилиндрической оболочки $q_c(0)$. Прерывистые кривые получены при внешнем давлении, действующем на боковую поверхность оболочки, сплошные – при всестороннем. Видно, что меж-

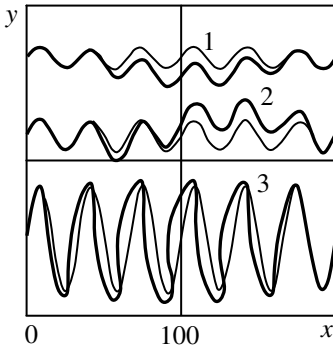


Рис. 4

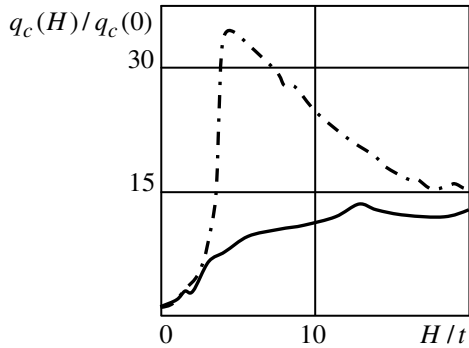


Рис. 5

ду этими кривыми существует в целом значительное различие, свидетельствующее о степени влияния давления, приложенного к днищам, на критическое значение всестороннего давления. Для гладких цилиндрических оболочек критическое значение всестороннего давления незначительно меньше того, которое действует только на боковую поверхность.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто стійкість ізотропних та ортотропних циліндричних оболонок з синусоїдальною формою меридіану при зовнішньому боковому та гідростатичному тиску. Показано, що при належному виборі амплітуд і кількості полухвиль можливо значно збільшити стійкість таких оболонок у порівнянні з циліндричними.

SUMMARY. The stability of isotropic and orthotropic cylindrical shells with sinusoidal shape of a meridian under external lateral and hydrostatic pressure are considered. It is shown, that by suitable selection of a number of half-waves and amplitude the stability of corrugated shells may be appreciably more than of cylindrical shells.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. Циолковский К. Э. Дирижабль, стратоплан и звездолет // Гражданская авиация. – 1933. – № 9. – С. 7–8. 2. Андреева Л. Е. Расчет гофрированных мембран, как анизотропных пластинок // Инженерный сборник. – 1955. – Т. 31. – С. 128–141. 3. Григоренко Я. М., Крюков Н. Н. Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. – К.: Наук. думка, 1988. – 264 с. 4. Semenyuk N. P., Babich I. Yu. Stability of Longitudinally Corrugated Cylindrical Shells under Uniform Surface Pressure // Int. Appl. Mech. – 2007. – Vol. 43, № 11. – P. 1236–1247. 5. Semenyuk N. P., Zhukova N. B., Ostapchuk V. V. Stability of Corrugated Composite Noncircular Shells under External Pressure // Int. Appl. Mech. – 2007. – Vol. 43, № 12. – P. 1380–1389. 6. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1961. – Т. 16, вып. 3. – С. 171–174. 7. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448 с. 8. Ванин Г. А., Семенов Н. П. Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами. – К.: Наук. думка, 1987. – 200 с. 9. Semenyuk N. P., Trach V. M., Zhukova N. B. Incremental Analysis of the Nonlinear Behavior of Thin Shells // Int. Appl. Mech. – 2008. – Vol. 44, № 9. – P. 1025–1031.

УДК 539.3

В. Г. КАРНАУХОВ, д-р физ.-мат.наук,
Т. В. КАРНАУХОВА, канд. физ.-мат.наук,
В. Ф. ЗРАЖЕВСКАЯ, канд. физ.-мат.наук

АКТИВНОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ГИБКОЙ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ПОМОЩИ ПЬЕЗОАКТУАТОРОВ

Как конструктивные элементы, тонкие круглые пластины из пассивных (без пьезоэффекта) и активных вязкоупругих материалов широко используются во многих областях современной техники. При действии на них гармонических во времени нагрузок с частотой, близкой к резонансной, возникает опасность их разрушения из-за усталости, высокого уровня напряжений, температуры диссипативного разогрева и др. В связи с этим возникает необходимость в демпфировании резонансных колебаний таких пластин. Для этой цели используются как пассивные [1, 2], так и активные методы [3, 4]. Одним из основных недостатков пассивных методов, базирующихся на включении в конструкцию компонент с высокими демпфирующими характеристиками, является невозможность управлять коэффициентом демпфирования после изготовления конструкции. Этому недостатка лишены активные методы, базирующиеся на включении в конструкцию пьезокомпонент, выполняющих функции сенсоров и актуаторов. Эти методы позволяют изменять коэффициент демпфирования в процессе работы конструкции. Одним из основных методов активного демпфирования колебаний является метод, основанный на использовании пьезоэлектрических включений, выполняющих функции актуаторов. Главной задачей при использовании этого метода является расчет разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации действия механической нагрузки. При резонансных колебаниях, высоких уровнях механической нагрузки, а также при малых толщинах амплитуда колебаний может стать сравнимой с толщиной пластины. При этом возникает необходимость в учете геометрической нелинейности при исследовании активного демпфировании колебаний пластины. Обзор исследований по активному демпфированию колебаний круглых пластин представлен в статье [5], в которой рассмотрена задача об осесимметричных колебаниях круглой пластины с актуаторами. В этой работе принимается предположение о равенстве нулю нормальной составляющей вектора индукции, что при наличии электродов на поверхностях пластины не отвечает действительности. Кроме того, в ней при рассмотрении жесткого защемления торца рассматривается полное покрытие пьезослоя электродами, что не позволяет управлять колебаниями пластины. В этой работе не учитываются диссипативные свойства материалов и температура диссипативного разогрева.

В данной статье рассматривается задача о вынужденных изгибных колебаниях шарнирно опертой гибкой круглой пассивной вязкоупругой пластины, на поверхности которой нанесены одинаковые пьезослои, отличающиеся лишь направлением поляризации.

Постановка задачи. Рассмотрим сплошную круглую пластину радиуса a и толщины h_0 из пассивного вязкоупругого материала. На ее внешних поверхностях размещены трансверсально-изотропные пьезоэлектрические слои толщиной h_1 , отличающиеся друг от друга лишь направлением поляризации. На пластину действует изменяющееся по гармоническому закону давление $p = p_0 \cos \omega t$. Нанесенные на пьезослои бесконечно тонкие электроды коротко замкнуты. Для описания электромеханического состояния пластины используются гипотезы Кирхгоффа–Лява и дополнительные гипотезы относительно электрических полевых величин: тангенциальные составляющие векторов напряженности электрического поля и индукции считаются малыми по сравнению с их нормальными составляющими. Тогда из уравнения электростатики $\partial D_z / \partial z = 0$ следует, что нормальная составляющая вектора индукции для каждого пьезослоя не зависит от толщинной координаты. Интегрируя упрощенные согласно этим гипотезам уравнения состояния для пассивного и пьезоактивных слоев, получим уравнения состояния для усилий и моментов [6]

$$N_r = D_N * (\varepsilon_r + \nu_N \varepsilon_\theta), \quad N_\theta = D_N * (\varepsilon_\theta + \nu_N \varepsilon_r); \quad (1)$$

$$M_r = D_M * (\kappa_r + \nu_M \kappa_\theta) + M_0, \quad M_\theta = D_M * (\kappa_\theta + \nu_M \kappa_r) + M_0. \quad (2)$$

Здесь принято, что $\nu_N = const$, $\nu_M = const$, и введены обозначения [6]

$$M_0 = \frac{1}{2} \gamma_{31} (h_1 + h_0) V_0; \quad (3)$$

$$D * f = D^0 \left[1 - \int_{-\infty}^t D_1(t - \tau) f(\tau) d\tau \right] = D^0 \bar{D} * f. \quad (4)$$

При учете геометрической нелинейности [7]

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \kappa_r = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \kappa_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \quad (5)$$

нелинейные уравнения движения и совместности деформаций имеют вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial (rM_r)}{\partial r} - M_\theta \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[(rN_r) \frac{\partial w}{\partial r} \right] - \tilde{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p(r, t) = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r\varepsilon_\theta) - \varepsilon_r + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 = 0, \quad (7)$$

где $\tilde{\rho}$ – приведенная плотность; $p(r, t)$ – нормальное давление.

Вводя функцию усилий, тождественно удовлетворяющую линейным уравнениям равновесия для усилий:

$$N_r = \frac{\Phi}{r}, \quad N_\theta = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (8)$$

из (1) и (7) получим нелинейное уравнение для этой функции

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \frac{\Phi}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 = \frac{1}{2} (1 - \nu_N^2) D_N * \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2. \quad (9)$$

Граничные условия шарнирного опирания для w имеют вид

$$w = 0, \quad -D_M * \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_M \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + M_0 = 0 \quad \text{при } r = a. \quad (10)$$

Для функции усилий рассмотрим два типа граничных условий

$$N_r = 0 \quad \text{и} \quad u = 0 \quad \text{при } r = a. \quad (11)$$

С использованием (1), (5), (8) они могут быть представлены в виде

$$\Phi(a) = 0 \quad \text{при } r = a; \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \nu_N \frac{1}{r} \Phi = 0 \quad r = a. \quad (13)$$

Для устранения неоднородности в условиях (10) используем подход, основанный на применении аппарата дельта-функций. Введем замену

$$\hat{M}_r = M_r - M_0, \quad \hat{M}_\theta = M_\theta - M_0, \quad (14)$$

где

$$\hat{M}_r = D_M * (\kappa_r + \nu_M \kappa_\theta); \quad \hat{M}_\theta = D_M * (\kappa_\theta + \nu_M \kappa_r). \quad (15)$$

Тогда уравнение (6) запишется в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial (r \hat{M}_r)}{\partial r} - \hat{M}_\theta \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[(r N_r) \frac{\partial w}{\partial r} \right] - \hat{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p(r, t) + \Delta M_0 = 0, \quad (16)$$

где Δ – гармонический оператор в полярной системе координат. Граничные условия (10) становятся однородными:

$$w = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_M \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{при } r = a. \quad (17)$$

Однако необходимо иметь в виду, что актуаторы, как правило, наносятся на пластину в виде пятен. Поэтому применение гармонического оператора к M_0 приводит к появлению в уравнении движения дельта-функций и их производных.

Введем безразмерные величины [5]

$$\hat{w} = w/h, \quad r = \rho a, \quad D_{11}^0 = \frac{D_M^0}{E_0 h^3}, \quad \hat{\Phi} = \frac{a}{E_0 h^3} \Phi, \quad \hat{M}_0 = \frac{a^2 M_0}{E_0 h^4},$$

$$\tau = \sqrt{E_0 h^3 / (\tilde{\rho} a^4)} t, \quad A_{11}^0 = \frac{E_0 h}{D_N^0 (1 - \nu_N^2)}, \quad q = \rho a^4 / (E_0 h^4). \quad (18)$$

Тогда уравнения совместности деформаций (9), уравнения движения (16) и граничные условия (12), (13), (17) дают следующую систему интегро-дифференциальных уравнений и граничных условий для \hat{w} , $\hat{\Phi}$:

$$D_{11}^0 \bar{D}_M * \Delta \Delta w - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\Phi \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) - q - \Delta M_0 + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0; \quad (19)$$

$$A_{11}^0 \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) - \frac{\Phi}{\rho} \right] = -\frac{1}{2} \bar{D}_N * \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} \right)^2; \quad (20)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_M \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{при } \rho = 1; \quad (21)$$

$$\Phi = 0 \quad \text{при } \rho = 1; \quad (22)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \nu_N \frac{1}{\rho} \Phi = 0 \quad \text{при } \rho = 1. \quad (23)$$

Здесь и в дальнейшем скобка над буквами опускается. К последним равенствам необходимо присоединить стандартные начальные условия.

Вывод обыкновенного интегро-дифференциального уравнения. Ограничимся исследованием вынужденных гармонических колебаний круглой пластины по наиболее энергоемкой первой моде. Решение задачи будем искать методом Бубнова-Галеркина [8]. Поперечный прогиб, резонансные составляющие механической и электрической нагрузок представим в виде

$$w = \eta(\tau) w_1(\rho), \quad q = q_1 w_1(\rho), \quad \Delta M_0 = M_1 w_1(\rho). \quad (24)$$

Здесь $w_1(\rho)$ – некоторая функция, аппроксимирующая форму колебаний пластины, в качестве которой можно выбрать первую собственную функцию задачи на собственные значения для упругой пластины, которая для круглой пластины выражается через бесселевы функции. Однако использование этих функций при решении нелинейных задач сопряжено с большими трудностями. Поэтому собственную функцию обычно аппроксимируют более простыми, например, полиномиальными функциями. В качестве такой выберем функцию [5]

$$w_1(\rho) = 1 + C_1 \rho^2 + C_2 \rho^4, \quad (25)$$

где

$$C_1 = -2(3 + \nu_M) / (5 + \nu_M), \quad C_2 = (1 + \nu_M) / (5 + \nu_M). \quad (26)$$

Эта функция тождественно удовлетворяет граничным условиям (21). В [5] показано, что такая аппроксимация хорошо совпадает с результатами, получаемыми методом коллокаций. Тогда одномодовое приближение (24) примет вид

$$\begin{aligned} w &= \eta(\tau) \left[1 + C_1 \rho^2 + C_2 \rho^4 \right], \quad q = q_1(\tau) \left[1 + C_1 \rho^2 + C_2 \rho^4 \right], \\ \Delta M_0 &= M_1(\tau) \left[1 + C_1 \rho^2 + C_2 \rho^4 \right], \end{aligned} \quad (27)$$

в котором для однородного давления

$$\begin{aligned} q_1 &= q \int_0^1 \left(1 + C_1 \rho^2 + C_2 \rho^4 \right) \rho d\rho \Big/ \int_0^1 \left(1 + C_1 \rho^2 + C_2 \rho^4 \right)^2 \rho d\rho, \\ M_1 &= \int_0^1 \Delta M_0 \left(1 + C_1 \rho^2 + C_2 \rho^4 \right) \rho d\rho \Big/ \int_0^1 \left(1 + C_1 \rho^2 + C_2 \rho^4 \right)^2 \rho d\rho. \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя первое из выражений (27) в правую часть (20) и интегрируя полученное неоднородное дифференциальное уравнение с известной правой частью, найдем выражение для функции усилий

$$\Phi = \Phi_1 \rho^3 + \Phi_2 \rho^5 + \Phi_3 \rho^7 + \Phi_4 \rho, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= -\frac{C_1^2}{4A_{11}^0} \varphi(\tau), \quad \Phi_2 = -\frac{C_1 C_2}{3A_{11}^0} \varphi(\tau), \\ \Phi_3 &= -\frac{C_1^2}{6A_{11}^0} \varphi(\tau), \quad \varphi(\tau) = \bar{D}_N * \eta^2(\tau). \end{aligned} \quad (30)$$

При этом для граничных условий (22) и (23) имеем

$$\Phi_4 = \frac{1}{A_{11}^0} \left(\frac{1}{4} C_1^2 + \frac{1}{3} C_1 C_2 + \frac{1}{6} C_2^2 \right); \quad (31)$$

$$\Phi_4 = \frac{1}{A_{11}^0 (1 - \nu_N)} \left[\frac{3 - \nu_N}{4} C_1^2 + \frac{5 - \nu_N}{3} C_1 C_2 + \frac{7 - \nu_N}{6} C_2^2 \right]. \quad (32)$$

С использованием (27) и (29) находим

$$\Phi \frac{\partial w}{\partial \rho} = \sum_{k=1}^5 \varphi_{2k} \rho^{2k}, \quad \varphi_{2k} = \gamma_{2k} \Psi(\tau), \quad \Psi(\tau) = \eta \bar{D}_N * \eta^2. \quad (33)$$

Здесь

$$\gamma_2 = 2C_1 d_1, \quad \gamma_4 = \left(2C_2 d_1 - C_1^3 / 2A_{11}^0 \right), \quad \gamma_6 = -5C_1^2 C_2 / 3A_{11}^0,$$

$$\gamma_8 = -5C_1C_2/3A_{11}^0, \quad \gamma_{10} = -2C_2^3/3A_{11}^0. \quad (34)$$

Для граничных условий (22), (23) соответственно имеем

$$d_1 = \frac{1}{A_{11}^0(5+v_N)^2} \left[(3+v_M)^2 - \frac{2}{3}(1+v_M)(3+v_M) + \frac{1}{6}(1+v_M)^2 \right],$$

$$d_1 = \frac{1}{A_{11}^0(1+v_M)(5+v_N)^2} \left[(3-v_M)(3+v_M)^2 - \frac{2}{3}(1+v_M)(3+v_M)(5-v_M) + \frac{1}{6}(1-v_M)(1+v_M)^2 \right]. \quad (35)$$

Зная $\Phi \frac{\partial w}{\partial \rho}$, методом Бубнова-Галеркина решим уравнение (19). В результате приходим к интегро-дифференциальному уравнению

$$m\ddot{\eta} + \mu_1 \bar{D}_M * \eta - \mu_2 \eta \bar{D}_N * \eta^2 = Q. \quad (36)$$

Здесь

$$\beta_2 = \frac{7+v_M}{3(5+v_M)}, \quad \beta_4 = \frac{9+v_M}{6(5+v_M)}, \quad \beta_6 = \frac{11+v_M}{10(5+v_M)},$$

$$\beta_8 = \frac{13+v_M}{15(5+v_M)}, \quad \beta_{10} = \frac{15+v_M}{21(5+v_M)},$$

$$m = \frac{1}{2} \left[1 + C_1 + \frac{1}{3}(C_1^2 + 2C_2) + \frac{1}{2}C_1C_2 + \frac{1}{5}C_2^2 \right] = \frac{113+36v}{30(5+v)^2},$$

$$\mu_1 = 32D_{11}^0 C_2 \left(1 + \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{3}C_2 \right) = \frac{32}{3} D_{11}^0 \frac{7+8v+v^2w}{(5+v)},$$

$$\mu_2 = \sum_{k=1}^5 \beta_{2k} \gamma_{2k}, \quad Q = \frac{1}{2} q \left(1 + \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{3}C_2 \right) + 2M_0(C_1 + 2C_2). \quad (37)$$

При вычислении Q учитывалось, что $M_0(\rho) = M_0[H(\rho) - H(\rho - \rho_1)]$,

$$\Delta M_0 = M_0 \left\{ \left[\delta'(\rho) - \delta'(\rho - \rho_1) \right] + \frac{1}{\rho} \left[\delta(\rho) - \delta(\rho - \rho_1) \right] \right\}. \text{ Также учитывались}$$

свойства интегралов, содержащих дельта-функции, а в полученном таким образом конечном выражении полагалось $\rho_1 \rightarrow a$. Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (36) дает возможность исследовать свободные и вынужденные резонансные колебания вязкоупругой гибкой круглой пластины при действии на нее механической и электрической нагрузки и

найти ту разность потенциалов, которая необходима для компенсации механической нагрузки.

Решение обыкновенного интегро-дифференциального уравнения методом гармонического баланса [9]. Пусть

$$q = q' \cos \omega t - q'' \sin \omega t, \quad M_0 = M' \cos \omega t - M'' \sin \omega t, \quad (38)$$

где частота механической и электрической нагрузки близка к резонансной частоте упругой пластины, определяемой из соотношения

$$\omega = \sqrt{\mu_1/m}. \quad (39)$$

В соответствии с методом гармонического баланса положим

$$\eta = \eta' \cos \omega t - \eta'' \sin \omega t \quad (40)$$

и из уравнения (36) получим систему двух нелинейных алгебраических уравнений относительно η' , η''

$$\begin{aligned} -m\omega^2 \eta' + \mu_1 (D' \eta' - D'' \eta'') - f_1 &= Q', \\ -m\omega^2 \eta'' + \mu_1 (D'' \eta' + D' \eta'') - f_2 &= Q'', \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= \mu_2 \left[\frac{1}{2}(1 - D_\infty) \eta' + \frac{1}{4}(1 - D_C) \eta' - \frac{1}{4} D_S \eta'' \right] |\eta|^2, \\ f_2 &= \mu_2 \left[\frac{1}{2}(1 - D_\infty) \eta'' + \frac{1}{4}(1 - D_C) \eta'' - \frac{1}{4} D_S \eta' \right] |\eta|^2, \end{aligned} \quad (42)$$

$1 - D_\infty \left(D_\infty = \int_0^\infty D_1(z) dz \right)$ – безразмерный длительный модуль;

$D_{11}^0(1 - D_C)$, $D_{11}^0 D_S$ – механические характеристики пассивного вязкоупругого материала, отвечающие удвоенной частоте электромеханической нагрузки; $D' = D'_M$, $D'' = D''_M$ – механические характеристики пассивного вязкоупругого материала, отвечающие частоте электромеханической нагрузки; $|\eta|^2$ – квадрат амплитуды колебаний.

Из уравнений (41), (42) легко получить кубическое уравнение для квадрата амплитуды $x = |\eta|^2$ (амплитудно-частотную характеристику – АЧХ)

$$\left(a_{12}^2 + a_{21}^2 \right) x^3 + 2 \left(a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} \right) x^2 + \left(a_{11}^2 + a_{21}^2 \right) x - [Q] = 0, \quad (43)$$

в котором

$$a_{11} = -m\omega^2 + \mu_1 D', \quad a_{12} = \mu_2 \left[\frac{1}{2}(1 - D_\infty) + \frac{1}{4}(1 - D_C) \right],$$

$$a_{21} = \mu_1 D'' , \quad a_{22} = \frac{\mu_2}{4} D_S .$$

Уравнение (43) можно упростить, считая влияние геометрической нелинейности и вязкости величинами одного порядка малости. Тогда в (43) следует положить $D_\infty = D_S = D_C = 0$

Расчет температуры диссипативного разогрева. Для расчета температуры диссипативного разогрева примем указанную выше гипотезу о малости влияния геометрической нелинейности и вязкости. При этом установившаяся (максимальная) температура диссипативного разогрева находится из решения уравнения энергии

$$\frac{\tilde{\lambda}}{a^2} \Delta \theta - \alpha \theta + Ax (d_0 + d_2 \rho^2 + d_4 \rho^4) = 0 , \quad (44)$$

где $\tilde{\lambda}$ – приведенный коэффициент теплопроводности трехслойной пластины; α – коэффициент, характеризующий теплообмена с внешней средой [10]; $A = 4\omega D''$; $d_0 = (1 + \nu_M) C_1^2$; $d_2 = 8(1 + \nu_M) C_1 C_2$; $d_4 = 20 + 12\nu_M$.

Пусть на торце пластины $\rho = 1$ задана постоянная температура. Решение задачи получим методом Бубнова-Галеркина, полагая

$$\theta = \theta_0 (1 - \rho^2) . \quad (45)$$

Применяя к (44) процедуру Бубнова-Галеркина, получим решение

$$\theta_0 = \frac{Bx}{1 + \beta/6} \left(\frac{1}{4} d_0 + \frac{1}{4} d_2 + \frac{1}{12} d_4 \right) , \quad (46)$$

в котором $\beta = a^2 \alpha / \tilde{\lambda}$, $B = a^2 A / \tilde{\lambda}$.

Анализ результатов. Анализ решения нелинейного алгебраического уравнения (43) показывает, что, как и для случая прямоугольной пластины [11], при механическом и электрическом нагружении амплитудно-частотная характеристика будет неоднозначной и жесткой ($\mu_2 < 0$). Приравнявая в уравнении (43) электромеханическую нагрузку нулю, получим выражение для разности потенциалов, компенсирующей механическую нагрузку

$$V_A = - \frac{q(1 + C_1/2 + C_2/3)}{2\gamma_{31}(h_1 + h_0)(C_1 + 2C_2)} = \frac{7 + \nu_M}{24\gamma_{31}(h_1 + h_0)} q . \quad (47)$$

При подводе к актуатору разности потенциалов (47) амплитуда вынужденных колебаний становится равной нулю, и поэтому пластина не будет совершать поперечных колебаний. Из этой формулы также следует очень важный результат: при резонансных колебаниях в одномодовом приближении геометрическая нелинейность не влияет на величину разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации меха-

нической нагрузки. Этот результат позволяет при расчете указанной разности потенциалов не решать сложных нелинейных задач, а ограничиться решением линейной задачи о резонансных колебаниях пластины.

Второй важный результат следует из анализа формулы (46): максимальная температура диссипативного разогрева достигается в центре пластины; при достижении температурой точки Кюри θ_K коэффициент электромеханической связи становится равным нулю; при этом из формулы (47) следует, что $V_A = \infty$ и пьезоактуатор перестает выполнять свое функциональное назначение. Приравняв выражение (46) точке Кюри θ_K , получим значение амплитуды вынужденных механических колебаний x_K , при котором активный материал теряет пьезоэффект и становится пассивным:

$$x_K = \frac{x_1}{x_2}, \quad x_1 = \theta_K \left(1 + \frac{\beta}{6} \right), \quad x_2 = B \left(\frac{1}{4} d_0 + \frac{1}{4} d_2 + \frac{1}{12} d_4 \right).$$

При этом имеет место специфический тип теплового разрушения, когда пластина не разделяется на части, но пьезоматериал теряет свое функциональное назначение, связанное с реализацией активного демпфирования колебаний. Для определения того максимального давления q_{\max} , при котором будет иметь место этот тип разрушения, подставим выражение для механической нагрузки $Q = \frac{1}{2} q \left(1 + \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{3} C_2 \right)$ в уравнение (43). В результате получим

$$q_{\max} = \left\{ \frac{4}{1 + C_1/2 + C_2/3} \left[\left(a_{12}^2 + a_{21}^2 \right) \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^3 + 2 \left(a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} \right) \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 + \left(a_{11}^2 + a_{21}^2 \right) \left(\frac{x_1}{x_2} \right) \right] \right\}^{1/2}. \quad (48)$$

В силу соотношения (46) температурно–частотная характеристика также будет неоднозначной и жесткой, так как она отличается от амплитуды колебаний только постоянным множителем.

РЕЗЮМЕ. Методом Бубнова–Галеркина розв’язано задачу про вимушені резонансні згинні коливання і дисипативний розігрів шарнірно обпертої гнучкої круглої пасивної в’язкопружної пластини з розподіленими п’єзоелектричними актуаторами. Досліджено вплив геометричної нелінійності та температури дисипативного розігріву на ефективність активного демпфування резонансних коливань такої пластини за допомогою п’єзоелектричних актуаторів.

SUMMARY. By Bubnov–Galerkin method the problem of the forced resonant vibrations and dissipative heating of flexible circular viscoelastic plate with distributed actua-

tors is solved. The influence of geometrical nonlinearity and dissipative heating on effectiveness of active damping vibrations of the plate with simply supported edge by the piezoelectric actuators is studied.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. *Матвеев В. В.* Демпфирование колебаний деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1985. – 264 с. 2. *Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж.* Демпфирование колебаний. – М.: Мир, 1988. – 448 с. 3. *Gabbert U., Tzou H. S.* Smart Structures and Structronic Systems. – Kluwer Academic Pub.: Dordrecht/Boston/London. – 2001. – 384 p. 4. *Tzou H. S., Bergman L. A.* Dynamics and control of distributed systems. – Cambridge: Cambridge University Press. – 1998. – 400 p. 5. *Santosh Kapuria, Dumir P. C.* Geometrically nonlinear axisymmetric response of thin circular plate piezoelectric actuation // Nonlinear Sci. Numer. Simulation. – 2005. – Vol. 10. – P. 411–423. 6. *Карнаухова Т. В., Пятецкая Е. В.* Основные соотношения теории термовязкоупругих пластин с распределенными актуаторами при моногармоническом нагружении // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 2. – С. 107–123. 7. *Григоренко Я. М., Мукоєд А. П.* Розв'язання лінійних і нелінійних задач теорії оболонок на ЕОМ. – К.: Либідь, 1992. – 152 с. 8. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. – М.: Мир, 1988. – 352 с. 9. *Митропольский Ю. А.* Нелинейная механика. Одночастотные колебания. – К., 1997. – 344 с. 10. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. – К.: Наук. думка, 1970. – 308 с. 11. *Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т. В.* Моделювання вимушених резонансних коливань і дисипативного розігріву гнучких в'язкопружних пластин із розподіленими актуаторами // Фіз.-мат. моделювання інформаційні техн. – 2008. – Вип. 8. – С. 48–68.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Национальный технический университет Украины "КПИ", г. Киев

Поступила 11.03.2009

В. Г. КАРНАУХОВ, д-р физ.-мат.наук,
Т. В. КАРНАУХОВА, канд. физ.-мат.наук,

РЕЗОНАНСНЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГИБКОЙ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СЕНСОРАМИ

Пьезоэлектрические сенсоры широко используются во многих областях современной техники для исследования резонансных колебаний тонкостенных элементов, при активном демпфировании колебаний и др. [1]. Обзор последних достижений по колебаниям круглых пластин с нанесенными на них сенсорами представлен в [2]. При этом, как правило, используются линейные модели электроупругости. Для резонансных колебаний, высоких уровнях механической нагрузки, а также при малых толщинах амплитуда колебаний может стать сравнимой с толщиной пластины и возникает необходимость в учете влияния геометрической нелинейности, диссипативных свойств материалов и температуры диссипативного разогрева на показатели сенсора.

В данной статье решена задача о вынужденных изгибных резонансных колебаниях гибкой шарнирно опертой круглой пассивной вязкоупругой пластины с сенсорами, на поверхности которой нанесены одинаковые пьезослои, отличающиеся лишь направлением поляризации и выполняющие функции сенсора.

Постановка задачи. В статье [3] представлена постановка задачи о колебаниях гибкой пассивной круглой вязкоупругой пластины с пьезоэлектрическими слоями, выполняющими роль актуаторов. При подводе к актуатору соответствующей разности потенциалов можно компенсировать действие механической нагрузки и устранить колебания пластины на некоторой частоте, близкой к резонансной. При таком подходе необходимо знать механическую нагрузку, действующую на пластину. Однако существует и другой метод активного демпфирования резонансных колебаний пластин, основанный на использовании пьезоэлектрических включений. Этот метод базируется на совместном использовании двух типов пьезоэлектрических включений. Одни из них выполняют функции актуатора, другие – функции так называемых сенсоров, дающих информацию о механическом поведении пассивной пластины. При таком подходе к актуатору подводится разность потенциалов, пропорциональная скорости разности потенциалов или току, снимаемых с сенсора. Соответствующее соотношение называют уравнением обратной связи, а коэффициент пропорциональности – коэффициентом обратной связи. В результате в уравнении движения появляется член, пропорциональный скорости изменения поперечного прогиба пластины. Таким образом, в пластине с сенсорами и актуаторами кроме диссипации, обусловленной вязкоупругими свойствами материала, появляется

дополнительная диссипация, которой можно управлять за счет выбора коэффициента обратной связи. При таком подходе необязательно иметь информацию о механической нагрузке. Механические колебания будут уменьшаться при любой нагрузке за счет как диссипативных свойств материала, так и за счет указанной выше дополнительной диссипации. При использовании этого метода возникает необходимость в исследовании влияния различных факторов на эффективность работы сенсоров, в частности, влияние геометрической нелинейности, температуры диссипативного разогрева, механических и тепловых граничных условий и т.п. В связи с этим рассмотрим сплошную круглую пластину радиуса a и толщиной h_0 из пассивного вязкоупругого материала. На ее внешних поверхностях размещены трансверсально–изотропные пьезоэлектрические слои толщиной h_1 , отличающиеся друг от друга лишь направлением поляризации. На пластину действует изменяющееся по гармоническому закону давление $p = p_0 \cos \omega t$. Нанесенные на пьезослои бесконечно тонкие электроды – коротко замкнуты. Для описания электромеханического состояния пластины используются гипотезы Кирхгоффа–Лява и дополнительные гипотезы относительно электрических полевых величин: тангенциальные составляющие векторов напряженности электрического поля и индукции считаются малыми по сравнению с их нормальными составляющими. Тогда из уравнения электростатики $\partial D_z / \partial z = 0$ следует, что нормальная составляющая вектора индукции для каждого пьезослоя не зависит от толщинной координаты. Интегрируя упрощенные согласно этим гипотезам уравнения состояния для пассивного и пьезоактивных слоев, получим уравнения состояния для усилий и моментов [3]

$$N_r = D_N * (\epsilon_r + v_N \epsilon_\theta), \quad N_\theta = D_N * (\epsilon_\theta + v_N \epsilon_r), \quad (1)$$

$$M_r = D_M * (\kappa_r + v_M \kappa_\theta), \quad M_\theta = D_M * (\kappa_\theta + v_M \kappa_r). \quad (2)$$

Эти уравнения отличаются от представленных в статье [3] отсутствием дополнительного члена M_0 в уравнениях состояния для моментов. В (1)–(2) принимается, что $v_N = const$, $v_M = const$ и введено обозначение [3]

$$D * f = D^0 \left[1 - \int_{-\infty}^t D_1(t - \tau) f(\tau) d\tau \right] = D^0 \bar{D} * f. \quad (3)$$

При учете геометрической нелинейности [3]

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \kappa_r = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad r = a\rho \quad (4)$$

нелинейные уравнения движения и совместности деформаций имеют вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial(rM_r)}{\partial r} - M_\theta \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[(rN_r) \frac{\partial w}{\partial r} \right] - \tilde{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p(r, t) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r\varepsilon_\theta) - \varepsilon_r + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 = 0. \quad (6)$$

Введением функции усилий $N_r = \Phi / r$, $N_\theta = \partial \Phi / \partial r$ [3] и безразмерных величин [5]

$$\hat{w} = w/h, \quad r = \rho a, \quad D_{11}^0 = \frac{D_M^0}{E_0 h^3}, \quad \hat{\Phi} = \frac{a}{E_0 h^3} \Phi,$$

$$\tau = \sqrt{E_0 h^3 / (\tilde{\rho} a^4)} t, \quad A_{11}^0 = \frac{E_0 h}{D_N^0 (1 - \nu_N^2)}, \quad q = p a^4 / (E_0 h^4)$$

для \hat{w} , $\hat{\Phi}$ получим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$D_{11}^0 \bar{D}_M * \Delta \Delta w - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\Phi \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) - q + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0 \quad (7)$$

$$A_{11}^0 \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) - \frac{\Phi}{\rho} \right] = -\frac{1}{2} \bar{D}_N * \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} \right)^2. \quad (8)$$

Как видно, представленные уравнения отличаются от соответствующих уравнений для пластины с актуаторами отсутствием члена ΔM_0 в уравнении (7) и совпадают с уравнениями движения пассивной пластины с модифицированными жесткостными характеристиками.

Механические граничные условия шарнирного опирания для свободных ($N_r = 0$ при $r = a$) и защемленных ($u = 0$ при $r = a$) в планарном направлении торцов пластины запишутся в виде [3]

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_M \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{при } \rho = 1, \quad (9)$$

$$\Phi = 0 \quad \text{при } \rho = 1, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \nu_N \frac{1}{\rho} \Phi = 0 \quad \text{при } \rho = 1. \quad (11)$$

Здесь и в дальнейшем скобка над буквами опущена. К приведенным уравнениям необходимо присоединить стандартные начальные условия.

Для вывода соотношений, характеризующих показания сенсоров, необходимо использовать упрощенное согласно указанным в работе [3, 4] гипотезам Кирхгоффа-Лява и дополнительным гипотезам относительно электрических полевых величин определяющее уравнение для индукции

$$\frac{D_3}{\gamma_{33}} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\gamma_{31}}{\gamma_{33}} [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + z(\kappa_1 + \kappa_2)]. \quad (12)$$

Для круглой пластины указанной выше структуры в случае коротко замкнутых электродов снимаемый с сенсора заряд вычисляется путем интегрирования соотношения (12) по толщине пластины, что приводит к следующему выражению для снимаемого с сенсоров заряда

$$Q = 2\pi(h_0 + h_1) \int_0^{\rho_1} \gamma_{31} \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) \rho d\rho. \quad (13)$$

Здесь использованы обозначения [3–5]. Если характеристики сенсора не зависят от температуры, то выражение (13) принимает вид

$$Q = 2\pi(h_0 + h_1) \gamma_{31} \int_0^{\rho_1} \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) \rho d\rho. \quad (14)$$

Это соотношение дает информацию об амплитуде вынужденных резонансных колебаний круглой вязкоупругой пластины. Оно является основой для оценки влияния различных факторов на эффективность работы сенсоров.

Вывод обыкновенного интегро-дифференциального уравнения. В дальнейшем ограничимся исследованием вынужденных гармонических колебаний круглой пластины по наиболее энергоемкой первой моде. Решение задачи будем искать методом Бубнова–Галеркина, выбирая аппроксимацию моды колебаний в виде [3]

$$w_1(\rho) = 1 + C_1 \rho^2 + C_1 \rho^4, \quad (15)$$

где

$$C_1 = -\frac{2(3 + \nu_M)}{(5 + \nu_M)}, \quad C_2 = \frac{(1 + \nu_M)}{(5 + \nu_M)}. \quad (16)$$

Тогда одномодовое приближение принимает вид

$$w = \eta(\tau) w_1(\rho), \quad q = q_1(\tau) w_1(\rho), \quad (17)$$

в котором для однородного давления имеем

$$q_1 = q \int_0^1 (1 + C_1 \rho^2 + C_2 \rho^4) \rho d\rho \bigg/ \int_0^1 (1 + C_1 \rho^2 + C_2 \rho^4)^2 \rho d\rho. \quad (18)$$

На основе результатов [3] приходим к обыкновенному интегро-дифференциальному уравнению

$$m\ddot{\eta} + \mu_1 \bar{D}_M * \eta - \mu_2 \eta D_N * \eta^2 = P. \quad (19)$$

Здесь

$$\beta_2 = \frac{7 + v_M}{3(5 + v_M)}, \quad \beta_4 = \frac{9 + v_M}{6(5 + v_M)}, \quad \beta_6 = \frac{11 + v_M}{10(5 + v_M)},$$

$$\beta_8 = \frac{13 + v_M}{15(5 + v_M)}, \quad \beta_{10} = \frac{15 + v_M}{21(5 + v_M)},$$

$$m = \frac{1}{2} \left[1 + C_1 + \frac{1}{3} (C_1^2 + 2C_2) + \frac{1}{2} C_1 C_2 + \frac{1}{5} C_2^2 \right] = \frac{113 + 36v}{30(5 + v)^2}$$

$$\mu_1 = 32D_{11}^0 C_2 \left(1 + \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{3} C_2 \right) = \frac{32}{3} D_{11}^0 \frac{7 + 8v + v^2}{(5 + v)^2},$$

$$\mu_2 = \sum_{k=1}^5 \beta_{2k} \gamma_{2k} \quad P = \frac{1}{2} q \left(1 + \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{3} C_2 \right). \quad (20)$$

Решив нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (19), при помощи (14)–(17) можно исследовать влияние геометрической нелинейности на показания сенсора при вынужденных резонансных колебаниях вязкоупругой гибкой круглой пластины при действии на нее механической нагрузки.

Решение обыкновенного интегро-дифференциального уравнения методом гармонического баланса. Для решения обыкновенного нелинейного интегро-дифференциального уравнения применим метод гармонического баланса, полагая [3]

$$\eta = \eta' \cos \omega \tau - \eta'' \sin \omega \tau, \quad q = q' \cos \omega \tau - q'' \sin \omega \tau. \quad (21)$$

где частота механической и электрической нагрузки близка к резонансной частоте упругой пластины, определяемой из соотношения

$$\omega = \sqrt{\mu_1 / m}. \quad (22)$$

Проделав соответствующие выкладки, получим кубическое алгебраическое уравнение относительно квадрата амплитуды $x = |\eta|^2$

$$\left(a_{12}^2 + a_{21}^2 \right) x^3 + 2 \left(a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} \right) x^2 + \left(a_{11}^2 + a_{21}^2 \right) x - [P]^2 = 0, \quad (23)$$

где

$$a_{11} = -m\omega^2 + \mu_1 D', \quad a_{12} = \mu_2 \left[(1 - D_\infty) / 2 + (1 - D_C) / 4 \right],$$

$$a_{21} = \mu_1 D'', \quad a_{22} = \mu_2 D_S / 4.$$

Уравнение (23) можно упростить, считая влияние геометрической нелинейности и вязкости величинами одного порядка малости. При этом в (23) следует положить $D_\infty = D_S = D_C = 0$.

С использованием формул (14)–(17) получим следующее выражение для снимаемого с сенсора заряда

$$Q = -2\gamma_{31}h_1(h_0 + h_1)(C_1 + 2C_2)\eta(\tau) = \frac{8\gamma_{31}h_1(h_0 + h_1)}{5 + \nu_M}\eta(\tau). \quad (24)$$

Если считать пьезоматериал упругим, то модуль заряда равен

$$|Q| = \frac{8\gamma_{31}h_1(h_0 + h_1)}{5 + \nu_M}|\eta(\tau)|, \quad (25)$$

а фаза заряда определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha = \eta''/\eta'. \quad (26)$$

Расчет температуры диссипативного разогрева. Для расчета температуры диссипативного разогрева примем указанную выше гипотезу о малости влияния геометрической нелинейности и вязкости. При этом все результаты, представленные в [3], остаются без изменений. Поэтому температура определяется по формуле

$$\theta = \theta_0(1 - \rho^2), \quad (27)$$

где

$$\theta_0 = \frac{Bx}{1 + \beta/6} \left(\frac{1}{4}d_0 + \frac{1}{4}d_2 + \frac{1}{12}d_4 \right). \quad (28)$$

Анализ результатов. Анализ решения нелинейного алгебраического уравнения (23) показывает, что, как и для случая прямоугольной пластины [5], при механическом нагружении амплитудно-частотная характеристика будет неоднозначной и жесткой ($\mu_2 < 0$). В работе [3] показано, что геометрическая нелинейность не влияет на эффективность работы актуатора при активном демпфировании вынужденных резонансных колебаний пластины. В противоположность этому, соотношения (24)–(26) показывают, что геометрическая нелинейность существенно влияет на эффективность работы сенсора, поскольку амплитуда заряда пропорциональна амплитуде колебаний пластины, которая определяется из нелинейного алгебраического уравнения (23). Поэтому амплитуда заряда также будет неоднозначной функцией частоты с типичными для нелинейных колебаний перескоками с одной ветви на другую.

Температура диссипативного разогрева оказывает существенное влияние на работу сенсора. Это следует из формул (24)–(25). Из них видно, что при достижении температурой точки Кюри θ_K сенсор перестает выполнять свое функциональное назначение, поскольку при этой температуре $\gamma_{31}(\theta_K) = 0$. Представленные в [3] формулы и выводы относительно влияния температуры на работу актуатора остаются без изменений и при оценке влияния температуры на работу сенсора. Остается без изменения и формула для определения той максимальной механической нагрузки, после достижения которой пьезоматериал становится пассивным и сенсор теряет свое функциональное назначение. Как и амплитудно-частотная характери-

стика, температурно-частотная характеристика будет неоднозначной и жесткой, так как она отличается от амплитуды колебаний только постоянным множителем.

РЕЗЮМЕ. Методом Бубнова–Галеркина розв'язано задачу про вимушені резонансні згинні коливання і дисипативний розігрів шарнірно опертої гнучкої круглої пасивної в'язкопружної пластини з розподіленими п'єзоелектричними сенсорами. Досліджено вплив геометричної нелінійності і температури дисипативного розігріву на ефективність роботи п'єзоелектричного сенсора.

SUMMARY. By Bubnov–Galerkin method the problem of forced resonance vibrations and dissipative heating of flexible circular viscoelastic plate with distributed sensors is solved. The edge of the plate is simply supported. The influence of geometrical nonlinearity and dissipative heating on effectiveness of work of sensor is studied.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. Шульга М.О., Карлаш В.Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних тіл. – К.: Наук. думка, 2008. – 270 с. 2. Donoso A., Bellido J. C. Distributed piezoelectric modal sensors for circular plates // J. Sound and Vibration. – 2009. – Vol. 319, № 1–2. – P. 50–57. 3. Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В., Зражевская В. Ф. Активное демпфирование резонансных изгибных колебаний гибкой шарнирно опертой вязкоупругой пластины при помощи пьезоактуаторов // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. С. 114–123. 4. Карнаухова Т. В., Пятецкая Е. В. Основные соотношения теории термовязкоупругих пластин с распределенными сенсорами // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 6. – С. 125–140. 5. Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т. В. Моделирование вимушених резонансних коливань і дисипативного розігріву гнучких в'язкопружних пластин із розподіленими актуаторами // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні техн. – 2008. – Вип. 8. – С. 48–68.

Институт механики НАНУ, г. Киев

Национальный технический университет Украины “КПИ”, г. Киев

Поступила 11.03.2009

Я. А. ЖУК, д-р физ.-мат. наук

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ БАЛКИ С ПЬЕЗОАКТИВНЫМИ СЛОЯМИ ПРИ МЕХАНИЧЕСКОМ ИЛИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Проведенные на протяжении двух десятилетий интенсивные исследования в области адаптивных и интеллектуальных систем, доказали их жизнеспособность и эффективность [1]. В последние годы особое внимание уделяется развитию новых принципов управления колебаниям сложных конструкций. Современный подход к проблеме состоит во внедрении в конструкцию дополнительных активных элементов (сенсоров, дающих информацию о состоянии конструкции, и актуаторов, оказывающих непосредственное механическое воздействие), способных влиять тем или иным образом на колебания системы, усиливая либо подавляя их. Как правило, в качестве материалов таких элементов используются материалы, обладающие пьезоэлектрическими, электрострикционными, электромагнитоупругими и другими электрореологическими свойствами или материалы с памятью формы. В частности, распределенные пьезоэлектрические сенсоры/актуаторы пользуются пристальным вниманием исследователей в связи со своими эффективными свойствами и широкой областью потенциального применения.

Исследованию поведения адаптивных конструкций с пьезоэлектрическими элементами, посвящено большое количество работ [1]. Как правило, и материал основной конструкции, и материал пьезоэлемента при этом предполагаются упругими. Однако при интенсивных нагрузках возможны ситуации, когда электрически пассивный материал основной конструкции демонстрирует неупругое поведение. Исследование такого поведения в случае многоцикловых режимов требует значительных затрат компьютерного времени в силу необходимости моделирования существенно нелинейной реакции материала для длительных историй деформирования. Этот подход применялся, например, в работах [2, 3]. Было показано [4], что в частном случае гармонического нагружения конструкции, содержащей пьезоактивные элементы и состоящей из циклически стабильных материалов, даже при существенно нелинейном деформировании после некоторого переходного процесса, как правило, устанавливается колебательный режим на частоте внешнего воздействия. Более того, в некоторых случаях оказывается возможным пренебречь вкладом высших гармоник в амплитуды колебаний основных полевых величин. В таких ситуациях удобно пользоваться всеми преимуществами классического или модифицированного метода эквивалентной линеаризации [5]. Используя концепцию комплексных модулей и решая задачу в комплексной постановке, удается существенно упростить процедуру отыскания решения для стационарных колебаний. В работах [4, 6] в предположении справедливости стандартных гипотез типа Кирх-

гофа-Лява, обобщенных на случай электромеханики и плоского напряженного состояния и оболочек, получены общие соотношения электромеханики для тонкостенных элементов, состоящих из физически нелинейных пьезоактивных слоев.

В данной статье электромеханическая модель тонкостенных элементов конструкций, развитая на основании метода моногармонического приближения, применяется для исследования связанного электромеханического поведения слоистой балки, содержащей упругие или вязкоупругие пьезоактивные слои и физически нелинейные электрически пассивные слои при гармоническом механическом или электрическом нагружении. В качестве примера рассматривается модельная задача о вынужденных колебаниях шарнирно опертой трехслойной балки, средний слой которой изготовлен из алюминиевого сплава, а внешние – из пьезокерамики. Задача решается в двух постановках: приближенной моногармонической и полной, включающей эволюционные уравнения для описания полной истории неупругого деформирования материала электрически пассивных слоев. Изучаются особенности влияния физической и геометрической нелинейностей на реакцию конструкции, определяются точность и границы применимости приближенного подхода.

Постановка задачи. Рассматриваются вынужденные колебания шарнирно опертой трехслойной балки, средний слой которой изготовлен из алюминиевого сплава АМг-6, а внешние – из пьезокерамики ЦТС-19. Толщины слоев постоянные. Вводится прямоугольная декартова система координат $Oxyz$ таким образом, что ось абсцисс совпадает с осью балки, толщинная координата отсчитывается вдоль оси ординат, а ширина – вдоль оси аппликат. Геометрические параметры балки: длина – L , толщина – H_s (верхняя и нижняя грани $z = H_s / 2$, $z = -H_s / 2$ соответственно), ширина – b_y . Толщины индивидуальных слоев h_i ($i = \overline{1, n}$). Электрические потенциалы φ_{zi} определены на электродированных поверхностях пьезоактивных слоев. Полная постановка задачи приведена в работах [2, 3]. При этом поведение алюминиевого сплава описывается при помощи модели, учитывающей физически нелинейную реакцию материала. Модель основана на концепции внутренних параметров состояния. Принимается предположение об аддитивности деформации: полная деформация представима в виде суммы упругой и неупругой составляющих. Модель также включает уравнения закона Гука, закон течения с условием пластической несжимаемости, кинетическое уравнение, эволюционные уравнения для внутренних переменных изотропного и направленного упрочнения и начальные значения для внутренних параметров состояния. Пьезокерамические слои считаются упругими трансверсально изотропными. Приведем постановку задачи в моногармоническом приближении, основываясь на результатах работы [4].

Применение концепции комплексных модулей приводит к определяющим уравнениям для пьезоактивных слоев в виде

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_x &= \tilde{c}_{11}^D \tilde{\epsilon}_x + \tilde{c}_{12}^D \tilde{\epsilon}_y + \tilde{c}_{13}^D \tilde{\epsilon}_z - \tilde{h}_{31} \tilde{D}_z, & \tilde{\sigma}_{xy} &= 0,5 \left(\tilde{c}_{11}^D - \tilde{c}_{12}^D \right) \tilde{\epsilon}_{xy}, \\
\tilde{\sigma}_y &= \tilde{c}_{12}^D \tilde{\epsilon}_x + \tilde{c}_{11}^D \tilde{\epsilon}_y + \tilde{c}_{13}^D \tilde{\epsilon}_z - \tilde{h}_{31} \tilde{D}_z, & \tilde{\sigma}_{yz} &= \tilde{c}_{44}^D \tilde{\epsilon}_{yz} - \tilde{h}_{15} \tilde{D}_y, \\
\tilde{\sigma}_z &= \tilde{c}_{13}^D \tilde{\epsilon}_x + \tilde{c}_{12}^D \tilde{\epsilon}_y + \tilde{c}_{33}^D \tilde{\epsilon}_z - \tilde{h}_{33} \tilde{D}_z, & \tilde{\sigma}_{xz} &= \tilde{c}_{44}^D \tilde{\epsilon}_{xz} - \tilde{h}_{15} \tilde{D}_x, \\
\tilde{E}_x &= -\tilde{h}_{15} \tilde{\epsilon}_{xz} + \tilde{\beta}_{11}^s \tilde{D}_x, & \tilde{E}_y &= -\tilde{h}_{15} \tilde{\epsilon}_{yz} + \tilde{\beta}_{11}^s \tilde{D}_y, \\
\tilde{E}_z &= -\tilde{h}_{31} \left(\tilde{\epsilon}_x + \tilde{\epsilon}_y \right) - \tilde{h}_{33} \tilde{\epsilon}_z + \tilde{\beta}_{33}^s \tilde{D}_z,
\end{aligned}$$

где использованы стандартные обозначения для механических и электрических параметров [6]. Волной сверху обозначены комплексные величины. Использование стандартных гипотез Кирхгофа-Лява, обобщенных на случай электромеханики и плоского напряженного состояния, приводит к следующим определяющим соотношениям для каждого пьезоактивного слоя

$$\tilde{\sigma}_x = \tilde{C}_{11} \tilde{\epsilon}_x - p \tilde{H}_{31} \tilde{D}_z, \quad \tilde{E}_z = -p \tilde{H}_{31} \tilde{\epsilon}_x + \tilde{B}_{33}^s \tilde{D}_z, \quad (1)$$

в которых

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{11} &= \tilde{c}_{11}^D - \left(\tilde{A}_1 \tilde{c}_{12}^D - \tilde{A}_2 \tilde{c}_{13}^D \right) / \tilde{\Delta}, & \tilde{H}_{31} &= \tilde{h}_{31} - \left(\tilde{A}_1 \tilde{h}_{31} - \tilde{A}_2 \tilde{h}_{33} \right) / \tilde{\Delta}, \\
\tilde{B}_{33}^s &= \tilde{\beta}_{33}^s - \left(\tilde{A}_3 \tilde{h}_{31} - \tilde{A}_4 \tilde{h}_{33} \right) / \tilde{\Delta}, & \tilde{\Delta} &= \tilde{c}_{11}^D \tilde{c}_{33}^D - \left(\tilde{c}_{13}^D \right)^2, \\
\tilde{A}_1 &= \tilde{c}_{12}^D \tilde{c}_{33}^D - \left(\tilde{c}_{13}^D \right)^2, & \tilde{A}_2 &= \tilde{c}_{12}^D \tilde{c}_{13}^D - \tilde{c}_{13}^D \tilde{c}_{11}^D, \\
\tilde{A}_3 &= \tilde{h}_{31} \tilde{c}_{33}^D - \tilde{h}_{33} \tilde{c}_{13}^D, & \tilde{A}_4 &= \tilde{h}_{31} \tilde{c}_{13}^D - \tilde{h}_{33} \tilde{c}_{11}^D
\end{aligned}$$

и p равен 1 при совпадении вектора предварительной поляризации материала с положительным направлением Oz и -1 в противном случае.

Моногармоническое приближение в классическом виде не позволяет исследовать поведение геометрически нелинейного варианта теории пластин и оболочек. Поэтому здесь будет анализироваться только геометрически линейный вариант теории и изучаться границы его применимости. Переходя к комплексным аналогам перемещений \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{w} и других кинематических параметров, деформации $\tilde{\epsilon}_{xx}$ произвольной точки балки выразятся через деформационные параметры ее оси следующим образом

$$\tilde{\epsilon}_{xx} = \tilde{\epsilon} + z \tilde{\kappa}, \quad (2)$$

где z – толщинная координата; $\tilde{\epsilon}$ и $\tilde{\kappa}$ – комплексные деформация и кривизна срединной оси балки соответственно.

Интегрированием второго соотношения в (1) по толщине каждого слоя с учетом (2) можно получить

$$\tilde{n}^{(s)} \tilde{\epsilon} + \tilde{m}^{(s)} \tilde{\kappa} - \tilde{l}^{(s)} \tilde{D}_z^{(s)} = \tilde{V}^{(s)}, \quad (3)$$

где верхний индекс указывает номер слоя, и

$$\tilde{V}^{(s)} = \tilde{\varphi}(z_s) - \tilde{\varphi}(z_{s-1}), \quad \tilde{n}^{(s)} = \int_{z_{s-1}}^{z_s} \tilde{H}_{31} dz,$$

$$\tilde{m}^{(s)} = \int_{z_{s-1}}^{z_s} \tilde{H}_{31} z dz, \quad \tilde{l}^{(s)} = \int_{z_{s-1}}^{z_s} \tilde{B}_{33}^s dz.$$

По аналогии с [4], после простых преобразований можно получить комплексный аналог физических соотношений для каждого активного слоя

$$\begin{aligned} \tilde{N}_x^{(s)} &= \tilde{C}_1^{(s)} \tilde{\varepsilon} + \tilde{K}_1^{(s)} \tilde{\kappa} - \tilde{n}^{(s)} \tilde{D}_z^{(s)}, \\ \tilde{M}_x^{(s)} &= \tilde{K}_1^{(s)} \tilde{\varepsilon} + \tilde{D}_1^{(s)} \tilde{\kappa} - \tilde{m}^{(s)} \tilde{D}_z^{(s)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\left(\tilde{C}_1^{(s)}, \tilde{K}_1^{(s)}, \tilde{D}_1^{(s)} \right) = \int_{z_{s-1}}^{z_s} \tilde{C}_{11}^{(s)}(1, z, z^2) dz.$$

Исключение $\tilde{D}_z^{(s)}$ из (3), (4) и суммирование усилий и моментов по всему пакету слоев (как активных, так и пассивных) приводят к окончательной форме физических соотношений в комплексной форме:

$$\tilde{N}_x = \tilde{C}_1 \tilde{\varepsilon} + \tilde{K}_1 \tilde{\kappa} - \tilde{N}_E, \quad \tilde{M}_x = \tilde{K}_1 \tilde{\varepsilon} + \tilde{D}_1 \tilde{\kappa} - \tilde{M}_E. \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 &= \sum_{sa} \left(\tilde{C}_1^{(s)} - \frac{\tilde{n}^{(s)} \tilde{n}^{(s)}}{\tilde{l}^{(s)}} \right) + \sum_{sp} \tilde{C}_1^{(s)}, \quad \tilde{N}_E = - \sum_{sa} \frac{\tilde{n}^{(s)}}{\tilde{l}^{(s)}} \tilde{V}^{(s)}, \\ \tilde{K}_1 &= \sum_{sa} \left(\tilde{K}_1^{(s)} - \frac{\tilde{n}^{(s)} \tilde{m}^{(s)}}{\tilde{l}^{(s)}} \right) + \sum_{sp} \tilde{K}_1^{(s)}, \quad \tilde{M}_E = - \sum_{sa} \frac{\tilde{m}^{(s)}}{\tilde{l}^{(s)}} \tilde{V}^{(s)}, \\ \tilde{D}_1 &= \sum_{sa} \left(\tilde{D}_1^{(s)} - \frac{\tilde{m}^{(s)} \tilde{m}^{(s)}}{\tilde{l}^{(s)}} \right) + \sum_{sp} \tilde{D}_1^{(s)}. \end{aligned}$$

Здесь под суммированием по sa и sp подразумевается суммирование по активным и пассивным слоям соответственно. Выражения для коэффициентов $\tilde{C}_1^{(s)}$, $\tilde{K}_1^{(s)}$ и $\tilde{D}_1^{(s)}$ для пассивных слоев приведены в [4].

Постановка задачи для балки также включает комплексные аналоги уравнений колебаний

$$\frac{\partial \tilde{N}_x}{\partial x} + \bar{\rho} \omega^2 H_s \tilde{u} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{Q}_x}{\partial x} + \bar{\rho} \omega^2 H_s \tilde{w} = 0, \quad \bar{\rho} = H_s^{-1} \sum_s \int_{z_j}^{z_{j+1}} \rho_j dz, \quad (6)$$

выражений для компонент деформационных параметров оси балки

$$\tilde{\varepsilon} = \partial \tilde{u} / \partial x, \quad \tilde{\kappa} = \partial \tilde{\vartheta} / \partial x, \quad \tilde{\vartheta} = -\partial \tilde{w} / \partial x \quad (7)$$

и замыкается заданием соответствующих граничных условий.

Метод решения задачи. Система уравнений механики (5)–(7) может быть представлена в нормальной форме

$$\frac{d\vec{Y}}{dx} = [\tilde{A}] \vec{Y} + \vec{B}, \quad (8)$$

где $\vec{Y}^T = \{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3, \tilde{y}_4, \tilde{y}_5, \tilde{y}_6\} = \{\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{M}_x, \tilde{N}_x, \tilde{Q}_x, \tilde{\vartheta}\}$, $[\tilde{A}]$ – комплекснозначная матрица размера 6×6 , отличными от нуля элементами которой являются $\tilde{a}_{13} = \tilde{a}_{64} = -\tilde{Q}_2$, $\tilde{a}_{14} = \tilde{Q}_1$, $\tilde{a}_{26} = -1$, $\tilde{a}_{35} = 1$, $\tilde{a}_{41} = \tilde{a}_{52} = -\omega^2 \bar{\rho} H_s$ и $\tilde{a}_{63} = \tilde{Q}_3$; $\vec{B}^T = \{\tilde{Q}_1 \tilde{N}_E - \tilde{Q}_2 \tilde{M}_E, 0, 0, 0, 0, \tilde{Q}_3 \tilde{M}_E - \tilde{Q}_2 \tilde{N}_E\}$ – вектор-столбец, причем $\tilde{Q}_1 = \tilde{D}_1 / (\tilde{C}_1 \tilde{D}_1 - \tilde{K}_1^2)$, $\tilde{Q}_2 = \tilde{K}_1 / (\tilde{C}_1 \tilde{D}_1 - \tilde{K}_1^2)$, $\tilde{Q}_3 = \tilde{C}_1 / (\tilde{C}_1 \tilde{D}_1 - \tilde{K}_1^2)$.

Рассматриваются два способа нагружения балки. Согласно первому колебания возбуждаются моментами, приложенными на концах $x = 0, L$ и изменяющимися во времени по закону

$$M = \frac{\sigma_{xx}^0 H_s^2}{6} \sin \omega t = M_0 \sin \omega t,$$

где σ_{xx}^0 – максимальная амплитуда напряжения, распределенного по линейному закону вдоль торцов $x = 0, L$ балки. Соответствующие условия в комплексной форме имеют вид

$$\tilde{M}_x = -iM_0 = -i\sigma_{xx}^0 H_s^2 / 6, \quad \tilde{N}_x = \tilde{Q}_x = 0; \quad x = 0, L. \quad (9)$$

При втором способе нагружения задается изменяющаяся по гармоническому закону во времени разность потенциалов $V^{(s)}$ на каждом пьезослое $V^{(s)} = V_0^{(s)} \sin \omega t$, где $V_0^{(s)}$ – амплитуда электрического напряжения. В комплексной форме соответствующее условие записывается в виде

$$\tilde{V}^{(s)} = -iV_0^{(s)}, \quad \tilde{N}_x = \tilde{Q}_x = 0; \quad x = 0, L. \quad (10)$$

Задачи электромеханики (8), (9) или (8), (10) решались численно при помощи итерационной процедуры метода переменных параметров упругости в сочетании с методом ортогональной прогонки.

Результаты расчетов и выводы. Физико-механические свойства и параметры модели Боднера-Партома для АМг-6 и ЦТС-19 взяты из работ [2, 3]. Комплексные модули для этих материалов приведены в [4, 7].

Расчеты проводились для модельной задачи о вынужденных колеба-

ниях шарнирно закрепленной трехслойной балки, состоящей из центрального слоя и двух пьезоактивных слоев. Толщины пьезоактивных слоев равны $h_1 = h_3$, полная толщина балки $h = H_s = h_1 + h_2 + h_3$, где h_2 – толщины алюминиевого слоя. Длина балки $L = 0,826$ м, толщина $h = 0,06$ м, ширина балки $b_y = 0,03$ м, толщины слоев $h_1 = h_3 = 0,002$ м, $h_2 = 0,056$ м.

Решение подобной нестационарной задачи приведено в [3], поэтому в данной статье остановимся детально на результатах решения приближенной задачи, а решение нестационарной задачи будем использовать для сравнения и проверки. Отметим только, что для обоих типов нагружения (9), (10) и моменты, приложенные на концах балки, и разность электрических потенциалов, подаваемая на электроды пьезослоев, на начальной стадии изменяются по гармоническому закону, модулированному линейной функцией таким образом, чтобы заданная амплитуда нагружения достигалась за 50 циклов колебаний. Такой подход обеспечил симметричные прогибы балки относительно оси.

Отметим, что при рассмотренной схеме и граничных условиях для балки механическое и электрическое нагружения оказались эквивалентными в том смысле, что они обеспечивают одинаковые прогибы и равные значения основных механических и электрических величин. Поэтому далее графики представлены только для случая механического возбуждения, поскольку для электрического нагружения они имеют аналогичный вид.

На рис. 1–3 представлены амплитудно-частотные характеристики прогиба, напряжения, полной (сплошные линии на рис. 3) и неупругой (штриховые линии на рис.3) деформаций в точке $x = 0,413$ м, $z = 0,028$ м (точка максимальных напряжений и деформаций в алюминиевом слое) соответст-

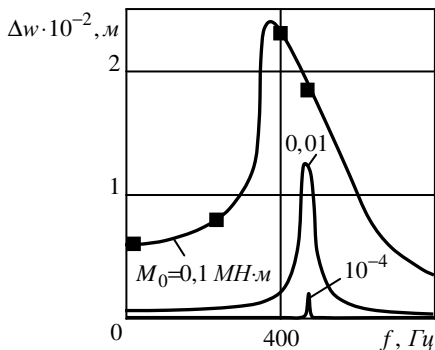


Рис. 1

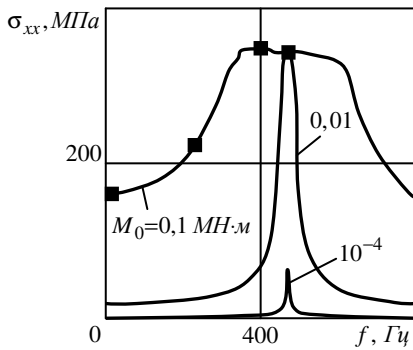


Рис. 2

венно для трех значений параметра нагружения $M_0 = 0,1; 0,01; 10^{-4}$ МН·м. Стационарные амплитуды, полученные в результате решения задачи в полной нестационарной постановке, для частот 10, 200, 400

и 500 Гц показаны маркерами. Отмечается хорошее согласование результатов. Максимальное расхождение наблюдается для амплитуды неупругой деформации. Однако в рассмотренном интервале значений параметра нагружения оно не превосходило 10% . При этом задача в моногармоническом приближении требовала на два порядка меньше расчетного времени.

Результаты исследования применимости приближенного метода для широкого интервала значений параметра нагружения представлены на рис. 4-6. Здесь данные, полученные в моногармоническом приближении,

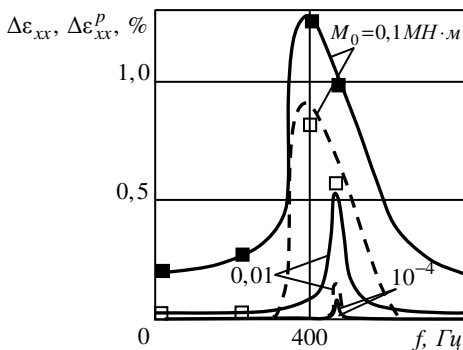


Рис. 3

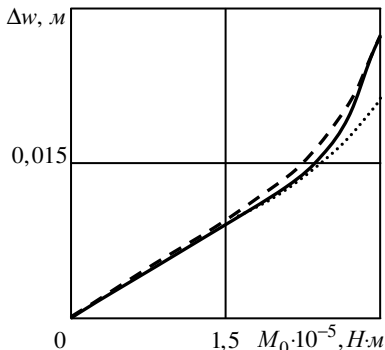


Рис. 4

показаны сплошными линиями; амплитуды, рассчитанные в рамках полной нестационарной постановки задачи с учетом только физической нелинейности, представлены штриховыми, а с учетом как физической, так и геометрической нелинейностей – пунктирными линиями. Анализ рис. 4-6 пока-

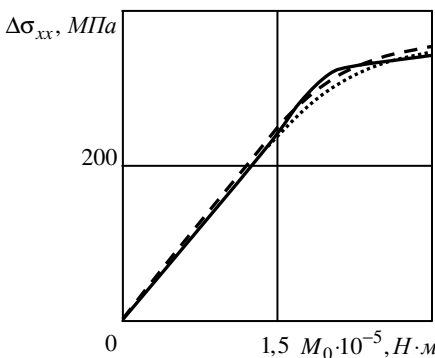


Рис. 5

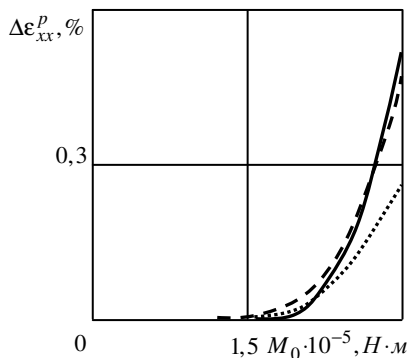


Рис. 6

зывает, что приближенная теория хорошо предсказывает поведение балки, в тех случаях, когда влияние геометрической нелинейности мало либо его можно пренебречь.

Таким образом, метод моногармонического приближения, оказывается мощным и надежным средством определения амплитуд вынужденных колебаний электромеханических систем при механическом или электрическом нагружении даже для уровней нагрузок, приводящих к неупругому деформированию материала электрически пассивного слоя. В случае малого влияния геометрической нелинейности метод позволяет получать результаты с высокой точностью. Он является чрезвычайно эффективным с точки зрения затрат машинного времени при допустимом для инженерной практики уровне погрешности.

РЕЗЮМЕ. Розглядається задача про вимушені коливання шарнірно опертої тришарової балки, середній шар якої виготовлено з електрично пасивного, а зовнішні – з п'єзоактивного матеріалу. Задача розв'язується в двох постановках: наближеній моногармонічній і повній. Досліджуються особливості впливу фізичної і геометричної нелінійностей на реакцію конструкції, визначається точність і межі застосовності наближеного підходу.

SUMMARY. The problem on forced vibration of hinged three-layer beam with electrically passive inner layer and piezoactive outer ones is investigated. The problem is solved in the frame of two statements: the approximate monoharmonic statement and the complete one. Regularities of the geometrical and physical nonlinearities influence on the structure response are studied and the limitations on the approximate technique application are determined.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. *Tani J., Takagi T., Qui J.* Intelligent material systems: Application of functional materials // *Appl. Mech. Rev.* – 1998. – Vol. 51. – P. 505–521. 2. *Жук Я. А., Гузь И. А.* Влияние геометрической и физической нелинейностей на вынужденные колебания шарнирно опертой балки, содержащей пьезоактивные слои // *Теорет. и прикладная механика.* – 2008. – Вып. 44. – С. 114–119. 3. *Жук Я. А., Гузь И. А.* Активное демпфирование вынужденных колебаний шарнирно опертой балки, содержащей пьезоактивные слои, при учете геометрической и физической нелинейностей // *Прикладная механика.* – 2009. – Т. 45, № 1. – С. 118–136. 4. *Жук Я. А., Сенченко И. К.* Моделирование стационарных колебаний и диссипативного разогрева тонкостенных неупругих элементов, содержащих пьезоактивные слои // *Прикладная механика.* – 2004. – Т. 40, № 5. – С. 80–91. 5. *Сенченко И. К., Жук Я. А., Карнаухов В. Г.* Моделирование термомеханического поведения физически нелинейных материалов при моногармоническом нагружении // *Прикладная механика* – 2004. – Т. 40, № 9. – С. 3–34. 6. *Шульга Н. А., Болкисев А. М.* Колебания пьезоэлектрических тел. – К.: Наук. думка, 1990. – 228 с. 7. *Пьезокерамические преобразователи: Справочник / Под ред. Пугачева С. И.* – Л.: Судостроение, 1984. – 256 с.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 01.07.2009

УДК 539.3:534.1

В. И. СТОРОЖЕВ, д-р физ.-мат. наук, А. В. БАЙ

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И МНИМЫЕ ВЕТВИ ДИСПЕРСИОННЫХ СПЕКТРОВ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В СЛОЕ АТ-СРЕЗА ПЬЕЗОКРИСТАЛЛА КВАРЦА

Исследования в области анализа свойств нормальных электроупругих волн в пьезоэлектрических анизотропных пластинах с использованием трехмерной модели динамического электроупругого деформирования имеют сравнительно недавнюю историю. Обзор основных работ и результатов по проблемам распространения электроупругих объемных, поверхностных и нормальных волн в пластинчатых волноводах пространственной геометрии из срезов наиболее широко используемых пьезокристаллов (кварца, ниобата лития, танталата лития) содержится в работах [1–5]. Отдельные результаты расчетов дисперсионных спектров нормальных волн для одно- и двухповоротных срезов пьезокристалла α -кварца в направлениях, не совпадающих с кристаллографическими, были представлены в работах [6, 7]. В настоящей статье представлены и систематизированы результаты исследований трансформации действительных и мнимых мод дисперсионных спектров электроупругих волн, распространяющихся вдоль варьируемого ряда направлений в плоскости кварцевых пластин АТ-среза, являющегося наиболее часто используемым срезом пьезокристалла α -кварца.

Постановка задачи и получение аналитической формы дисперсионных соотношений. Рассматривается пластина АТ-среза пьезокристалла α -кварца, занимающая область

$$V = \{ |x_3| \leq h, -\infty < x_1, x_2 < \infty \} \quad (1)$$

в системе безразмерных декартовых координат $Ox_1x_2x_3$, $x_j = \tilde{x}_j R_*^{-1}$ с нормирующим масштабным параметром R_* линейной размерности. Плоские грани пластины считаются свободными от механических напряжений и покрытыми тонкими безинерционными короткозамкнутыми электродами.

Уравнения связи характеристик упругого динамического деформирования пластины в тензорной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{kl} &= c_{ijkl}^E u_{i,j} + e_{mkl} \varphi_{,m}; \\ D_n &= e_{nij} u_{i,j} - \varepsilon_{mn}^S \varphi_{,m} \quad (i, j, k, l, m, n = \overline{1, 3}). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь σ_{kl} , $u_{i,j}$, D_i – компоненты тензора механических напряжений, вектора упругих перемещений и вектора электрической индукции; φ – потенциал

квазистатического электрического поля; c_{ijkl}^E , e_{ikl} , ε_{ij}^S – соответственно компоненты тензоров упругих постоянных, измеренных при постоянной напряженности электрического поля, пьезоэлектрических постоянных и диэлектрических проницаемостей среды, измеренных при постоянных деформациях; ρ – плотность пьезокристалла.

Описание множества свободных бегущих и краевых стоячих нормальных волн в рассматриваемой пластине сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений динамической электроупругости

$$c_{ijkl}^E u_{i,jl} + e_{mkl} \Phi_{,ml} = \rho \ddot{u}_k; \quad e_{nij} u_{i,jn} - \varepsilon_{mn}^S \Phi_{,mn} = 0 \quad (3)$$

с граничными условиями на гранях пластины

$$\sigma_{3j} \Big|_{x_3=\pm h} = \left(c_{ij3l}^E u_{i,j} + e_{m3l} \Phi_{,m} \right) \Big|_{x_3=\pm h} = 0; \quad \varphi \Big|_{x_3=\pm h} = 0. \quad (4)$$

Для компонент комплексного вектора волновых перемещений и потенциала квазистатического электрического поля в трехпарциальной нормальной волне, распространяющейся вдоль произвольного направления в плоскости Ox_1x_2 , введем представления

$$u_j(x_1, x_2, x_3, t) = f_{uj}(x_3) E(x_1, x_2, t); \\ \varphi(x_1, x_2, x_3, t) = f_\varphi(x_3) E(x_1, x_2, t), \quad (5)$$

в которых $E(x_1, x_2, t) = \exp(I(k(n_1x_1 + n_2x_2) - \omega t))$ – волновая экспонента; ω – круговая частота волны; k – безразмерное нормированное волновое число; n_1, n_2 – компоненты вектора волновой нормали \vec{n} в плоскости Ox_1x_2 , составляющего угол θ с осью Ox_1 ; $f_{uj}(x_3)$, $f_\varphi(x_3)$ – комплексные амплитудные функции. При этом спектральная задача (3), (4) может быть записана в следующей тензорной форме

$$c_{i3q3}^E f_{u_i}''(x_3) + Ik \left(n_{\tilde{j}} c_{\tilde{i}\tilde{j}q3}^E + n_{\tilde{j}} c_{i3\tilde{j}q}^E \right) f_{u_i}'(x_3) + \\ + \left(\delta_{iq} \rho \omega^2 - k^2 n_{\tilde{j}} n_{\tilde{j}} c_{\tilde{i}\tilde{j}q\tilde{l}}^E \right) f_{u_i}(x_3) + e_{3q3} f_\varphi''(x_3) + \\ + Ik \left(n_{\tilde{m}} e_{\tilde{m}q3} + n_{\tilde{j}} e_{3q\tilde{l}} \right) f_\varphi'(x_3) - k^2 n_{\tilde{m}} n_{\tilde{j}} e_{\tilde{m}q\tilde{l}} f_\varphi(x_3) = 0; \\ e_{3i3} f_{u_i}''(x_3) - Ik \left(n_{\tilde{j}} e_{3\tilde{i}\tilde{j}} + n_{\tilde{n}} e_{\tilde{n}i3} \right) f_{u_i}'(x_3) - k^2 n_{\tilde{n}} n_{\tilde{j}} e_{\tilde{n}\tilde{i}\tilde{j}} f_{u_i}(x_3) - \\ - \varepsilon_{33}^S f_\varphi''(x_3) - Ik \left(n_{\tilde{m}} \varepsilon_{\tilde{m}3}^S + n_{\tilde{n}} \varepsilon_{3\tilde{n}}^S \right) f_\varphi'(x_3) + k^2 n_{\tilde{m}} n_{\tilde{n}} \varepsilon_{\tilde{m}\tilde{n}}^S f_\varphi(x_3) = 0; \\ (i, j, l, m, n, q = \overline{1,3}; \tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n} = \overline{1,2}), \quad (6)$$

$$c_{i33l}^E f_{u_i}'(\pm h) - I c_{\bar{i}j3l}^E k n_{\bar{i}} f_{u_j}(\pm h) - e_{33l} f_{\varphi}'(\pm h) + I k n_{\bar{m}} e_{\bar{m}3l} f_{\varphi}(\pm h) = 0, \\ f_{\varphi}(\pm l) = 0 \quad (i, j, l = \overline{1,3}; \bar{m}, \bar{n} = \overline{1,2}). \quad (7)$$

Характеристическое уравнение системы (6) имеет форму равенства нулю определителя матрицы $A(p)$ четвертого порядка:

$$\det A(p) = \begin{vmatrix} [a_{ij}] & \{a_{i4}\} \\ \{a_{j4}\}^T & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

с элементами

$$a_{11} = p^2 c_{55} + 2 p n_2 c_{56} k + (c_{11} n_1^2 + c_{66} n_2^2) k^2 - \rho \omega^2, \\ a_{22} = p^2 c_{44} + 2 p n_2 c_{24} k + (c_{66} n_1^2 + c_{22} n_2^2) k^2 - \rho \omega^2, \\ a_{33} = p^2 c_{33} + 2 p n_2 c_{34} k + (c_{55} n_1^2 + c_{44} n_2^2) k^2 - \rho \omega^2, \\ a_{12} = a_{21} = p (c_{14} + c_{56}) n_1 k + (c_{12} + c_{66}) n_1 n_2 k^2, \\ a_{13} = a_{31} = p (c_{13} + c_{55}) n_1 k + (c_{14} + c_{56}) n_1 n_2 k^2, \\ a_{23} = a_{32} = p^2 c_{34} + p (c_{23} + c_{44}) n_2 k + (c_{56} n_1^2 + c_{24} n_2^2) k^2, \\ a_{14} = a_{41} = p^2 e_{34} + p (e_{25} + e_{36}) n_2 k + (e_{11} n_1^2 + c_{26} n_2^2) k^2, \\ a_{24} = a_{42} = p (e_{14} + e_{36}) n_1 k + (e_{12} + e_{26}) n_1 n_2 k^2, \\ a_{34} = a_{43} = p (e_{13} + e_{35}) n_1 k + (e_{14} + e_{25}) n_1 n_2 k^2, \\ a_{44} = -p^2 \varepsilon_{33} - 2 p n_2 \varepsilon_{23} k - (\varepsilon_{11} n_1^2 + \varepsilon_{22} n_2^2) k^2. \quad (9)$$

Здесь и в дальнейшем верхние индексы E и S в обозначениях упругих и диэлектрических постоянных не приводятся.

Для амплитудных функций $f_{uj}(x_3)$, $f_{\varphi}(x_3)$ при решении системы (6) получаются представления

$$f_{u_j}(x_3) = \sum_{i=1}^8 [K_j \beta_{ji} \exp(I p_i x_3)] \quad (j = \overline{1,3}); \\ f_{\varphi}(x_3) = \sum_{i=1}^8 [K_4 \beta_{4i} \exp(I p_i x_3)], \quad (10)$$

в которых p_i – корни характеристического уравнения (8); K_i – произволь-

ные постоянные интегрирования; β_{ij} – алгебраические дополнения к элементам $a_{ri}(p_i)$ произвольной строки с номером r матрицы $A(p)$.

Окончательно на основе представлений (10) искомое дисперсионное соотношение для электроупругих волн исследуемого типа может быть получено из однородных краевых условий (7) в виде определителя

$$\Delta(k, \omega) = |s_{ij}| = 0 \quad (11)$$

функциональной матрицы восьмого порядка с элементами

$$\begin{aligned} s_{1j} &= Ie^{pj} \left[(kc_{56}n_2 + p_jc_{55})\beta_{1j} + kc_{56}n_1\beta_{2j} + \right. \\ &\quad \left. + kc_{55}n_1\beta_{3j} + (ke_{25}n_2 + p_je_{35})\beta_{4j} \right], \\ s_{2j} &= Ie^{pj} \left[kc_{14}n_1\beta_{1j} + (kc_{24}n_2 + p_jc_{44})\beta_{2j} + \right. \\ &\quad \left. + (kc_{44}n_2 + p_jc_{34})\beta_{3j} + ke_{14}n_1\beta_{4j} \right], \\ s_{3j} &= Ie^{pj} \left[kc_{13}n_1\beta_{1j} + (kc_{23}n_2 + p_jc_{34})\beta_{2j} + \right. \\ &\quad \left. + (kc_{34}n_2 + p_jc_{33})\beta_{3j} + ke_{13}n_1\beta_{4j} \right], \\ s_{4j} &= e^{pj}\beta_{4j}, \quad s_{i+4j} = s_{ij}e^{-2pj} \quad (i = \overline{1,4}, j = \overline{1,8}). \end{aligned} \quad (12)$$

Первоначальным этапом анализа исследуемых дисперсионных спектров является определение критических частот бегущих нормальных волн. Спектральная краевая задача (6), (7) в случае $k = 0$ распадается на две независимых подзадачи:

$$\begin{aligned} c_{55}f_{u_1}''(x_3) + \rho\omega^2 f_{u_1}(x_3) + e_{35}f_{\varphi}''(x_3) &= 0, \\ e_{35}f_{u_1}''(x_3) - \varepsilon_{33}f_{\varphi}''(x_3) &= 0, \\ c_{55}f_{u_1}'(\pm h) + e_{23}f_{\varphi}''(\pm h) = 0, \quad f_{\varphi}(\pm h) &= 0; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} c_{44}f_{u_2}''(x_3) + \rho\omega^2 f_{u_2}(x_3) + c_{34}f_{u_3}''(x_3) &= 0, \\ c_{34}f_{u_2}''(x_3) + c_{33}f_{u_3}''(x_3) + \rho\omega^2 f_{u_3}(x_3) &= 0, \\ c_{44}f_{u_2}'(\pm h) + c_{34}f_{u_3}''(\pm h) = 0, \quad c_{34}f_{u_2}'(\pm h) + c_{33}f_{u_3}''(\pm h) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Из решений краевых задач (13) и (14) находятся соответственно множества критических частот $\{\omega_1^{(n)}\}$ и $\{\omega_2^{(n)}\}$, $\{\omega_3^{(n)}\}$:

$$\omega_1^{(n)} = \frac{\pi n}{2h} \sqrt{\rho^{-1} (c_{55} + e_{35}^2 / \epsilon_{33})} \quad (n = 0, 1, \dots); \quad (15)$$

$$\omega_{2,3}^{(n)} = \frac{\pi n}{2h} \sqrt{\frac{\rho^{-1}}{2} \left[(c_{33} + c_{44}) \mp \left((c_{33} - c_{44})^2 + 4c_{34}^2 \right)^{1/2} \right]} \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (16)$$

Анализ численных результатов. При численном анализе построенного дисперсионного уравнения использовались значения компонент тензоров c_{ijkl}^E , e_{ijk}^S , ϵ_{ij}^S для α -кварца, приведенные в работе [3]. Пересчет физико-механических постоянных для АТ-среза проводился по формулам преобразования тензоров при повороте системы координат с углами Эйлера α , β , γ равными 0° , $125^\circ 15'$, 0° [1, 9]. Безразмерные значения волнового числа и частотного параметра были введены соотношениями $\tilde{k} = 2kh / \pi$, $\Omega = 2\omega h / \pi v^*$, $v^* = \sqrt{\rho^{-1} (c_{55} + e_{35}^2 / \epsilon_{33})}$. При таком варианте нормировки низшая приведенная критическая частота $\Omega_1^{(1)}$ для пластины АТ-среза имеет значение 1,0, а частоты $\Omega_{2,3}^{(1)}$ соответственно получаются такими $\Omega_2^{(1)} = 1,1475$, $\Omega_3^{(1)} = 2,1163$. Приведенные значения мало отличаются от частот запирания $\tilde{\Omega}_2^{(1)} = 1,1483$, $\tilde{\Omega}_3^{(1)} = 2,1178$ для пластины АТ-среза, рассматриваемой без учета пьезоэффекта [8].

С помощью расчетов исследовано распределение действительных и мнимых ветвей спектров нормальных волн для варьируемого ряда направлений распространения. Эти распределения для значений углового параметра θ , равных 5° , 25° , 45° , 65° , 75° и 85° , приведены на рис. 1–6 соответственно.

Мнимая часть дисперсионного спектра в отсутствие электромеханической связи представляется двумя рядами пересекающихся ветвей. Первый ряд составляют вертикальные мнимые ветви, описывающие "частотные" зависимости для характеристик несвязанного квазистатического электрического поля. Второй ряд представлен криволинейными ветвями, описывающими чисто упругие краевые стоячие волны. Наличие электромеханической связи приводит к трансформации точек пересечения указанных ветвей и превращение их в точки сближения и расталкивания мнимых дисперсионных кривых для сопряженных электроупругих волн. Как следует из анализа приведенных на рис. 1–6 диаграмм дисперсионных кривых, высокая степень электромеханической связи в поле краевых стоячих волн свойственна для направлений распространения θ , равных 25° , 45° и 65° .

Представленная на рис. 1 картина дисперсионных кривых для направления $\theta = 5^\circ$ имеет высокую степень подобия с картиной спектра, полу-

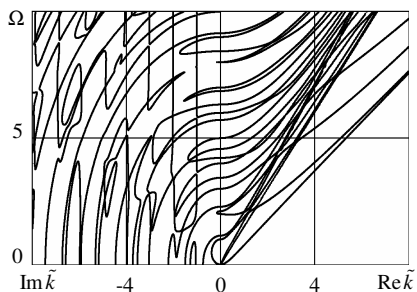


Рис. 1

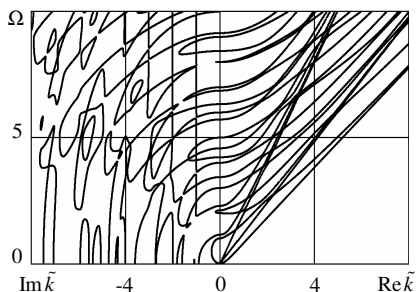


Рис. 2

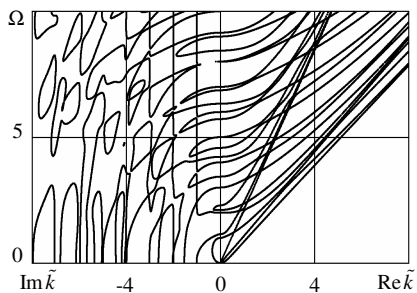


Рис. 3

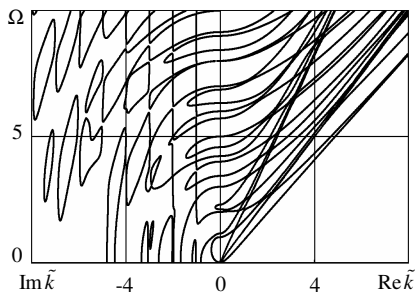


Рис. 4

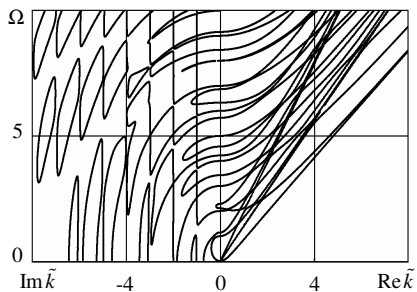


Рис. 5

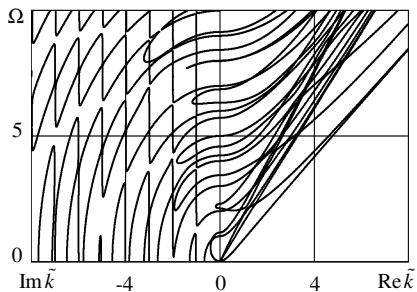


Рис. 6

чаемой при формальном объединении дисперсионных кривых симметричных и антисимметричных волн, рассчитанных в работе [3] для направления $\theta = 0^\circ$. Эта картина также хорошо согласуется с диаграммами дисперсионных кривых симметричных и антисимметричных нормальных упругих волн в слое АТ-срезы кварца, рассматриваемом как непьезоактивный [8]. Картина

дисперсионных кривых на рис. 6, соответствующая направлению $\theta = 85^\circ$, по существу образована наложением трансформированных фрагментов спектра нормальных электроупругих SH-волн с направлением распространения $\theta = 90^\circ$ [3] и трансформированных фрагментов спектра чисто упругих нормальных P-SV волн для $\theta = 90^\circ$.

Таким образом, в результате проведенных исследований получено описание топологической картины действительных и мнимых ветвей дисперсионного спектра нормальных электроупругих волн в пластине АТ-среза пьезокристалла кварца, а также дана характеристика уровня электромеханической связи в нормальных волнах с неупругоэквивалентным направлением распространения.

РЕЗЮМЕ. Представлені результати детальних досліджень трансформації структури дійсних та уявних гілок дисперсійних спектрів електропружних хвиль, що поширюються вздовж множини різних довільних напрямків у площині пластин АТ-зрізу п'єзокристалла кварца. Наведено характеристику рівня електромеханічного зв'язку у нормальних хвилях, які поширюються у напрямках, що не співпадають з пружно-еквівалентними. Проведено порівняння отриманих результатів з результатами попередніх опублікованих досліджень.

SUMMARY. Article is focused on spectra of electroelastic waves which propagate along variable set of directions, not aligned with crystal symmetry axes, in AT-cut quartz plate space. Results of in-depth investigation of particular transformation behavior of real and imaginary branches of those spectra in context of different propagation directions are presented. Comparison of new results with older published works with same target setting is conducted.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. *Зеленка И.* Пьезоэлектрические резонаторы на объемных и поверхностных акустических волнах: Материалы, технология, конструкция, применение. – М.: Мир. – 1990. – 584 с. 2. *Lee P. C. Y., Singellakis S.* Waves and vibrations in an infinite piezoelectric plate // Proc. 29th Ann. Symp. on Freq. Control. – Washington: DC, 1975. – P. 65–70. 3. *Singellakis S., Lee P. C. Y.* Piezoelectric wave dispersion curves for infinite anisotropic plates. // J. Appl. Phys. – 1993. – Vol. 73, № 11. – P. 7152–7161. 4. *Joshi S. G., Jin Y.* Propagation of ultrasonic Lamb waves in piezoelectric plates // J. Appl. Phys. – 1991. – Vol. 70, № 8. – P. 4113–4120. 5. *Бородин А. А., Джоши С. Г., Зайцев Б. Д., Кузнецова И. Е.* Акустические волны в тонких пластинах ниобата лития // Акуст. журнал. – 2000. – Т. 46, № 1. – С. 42–46. 6. *Сторожев В. И., Бай А. В., Шлак В. А.* Спектр нормальных электроупругих волн в слое из пьезокристалла кварца // Теорет. и прикладная механика. – 2002. – Вып. 36. – С. 125–130. 7. *Бай А. В.* Полные дисперсионные спектры электроупругих волн в пластинах из сложных срезов пьезокристалла кварца // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 148–152. 8. *Kaul R. K., Mindlin R. D.* Frequency spectrum of monoclinic crystal plate // J. Acoust. Soc. Amer. – 1962. – Vol. 34, № 12. – P. 1902–1910. 9. *Mindlin R. D.* An introduction to the mathematical theory of vibrations of elastic plates / Edited by Yang J. – Hackensack, NJ: World Scientific. – 2006. – 211 p.

УДК 539.3:534.1

Е. В. АЛТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, М. В. ФОМЕНКО

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИНАХ СО СВОБОДНЫМИ ОТ НАПРЯЖЕНИЙ ПЛОСКИМИ ГРЯНЯМИ

Слоистые конструкции широко применяются в современной технике [1]. Нередко модель многослойного основания используется в сейсмологии, геофизике, механике горных пород [2]. Многослойные изотропные пластины в механике композитов моделируются трансверсально-изотропной средой [3]. Среди многослойных конструкций трехслойные пластины занимают особое место [1, 4–6]. Решение прикладных и некоторых трехмерных задач теории упругости для неоднородных изотропных пластин приведены в монографиях [1–3, 7, 8]. Многие проблемы равновесия и колебания слоистых пластин отражены в обзорных статьях [9–11]. Важную роль в развитии аналитических методов решения трехмерных задач теории упругости неоднородных пластин сыграли однородные решения. В работе [6] на основе трехмерных уравнений теории упругости рассмотрена задача равновесия трехслойной плиты симметричного строения и впервые получена полная система однородных решений. Здесь аналогичная задача решается в случае установившихся симметричных (растяжение-сжатие) колебаний трехслойной пластины.

Постановка и решение задачи. Рассмотрим трехслойную пластину

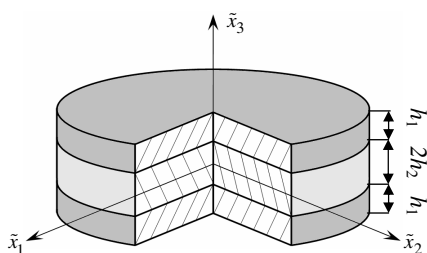


Рис. 1

симметричного строения относительно ее срединной плоскости (рис. 1). Внешние одинаковые и внутренний слои пластины находятся в условиях идеального контакта и являются изотропными. Торцы пластины свободны от напряжений, а распространение симметричных волн вызвано внешними усилиями, гармонически изменяющимися во времени и прило-

женными к боковой поверхности.

Отнесем пластину к размерным координатам \tilde{x}_1 , \tilde{x}_2 , \tilde{x}_3 . Тогда $|\tilde{x}_3| \leq (h_1 + h_2)$, причем h_1 – толщина внешних слоев, $2h_2$ – толщина внутреннего слоя. В дальнейшем величины, относящиеся к внешнему слою, будем обозначать индексом (1), к внутреннему – индексом (2). Физико-механические характеристики материалов слоев обозначим через \tilde{G}_m , ν_m , ρ_m ($m=1, 2$), где \tilde{G}_m – модуль сдвига, а ν_m – коэффициент Пуассона, ρ_m – плотность материала. Введем безразмерные величины:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \tilde{x}_1/R, & x_2 &= \tilde{x}_2/R, & x_3 &= \tilde{x}_3/h = \tilde{x}_3/(\lambda R), \\
\lambda &= h/R, & h &= h_1 + h_2, & \lambda_1 &= h_1/h, & \lambda_2 &= h_2/h, \\
u_{i(m)} &= \tilde{u}_{i(m)}/R, & \sigma_{ij(m)} &= \tilde{\sigma}_{ij(m)}/(2\tilde{G}_2) \quad (i, j = \overline{1, 3}; m = 1, 2); \\
G_m &= \tilde{G}_1/\tilde{G}_2, & G_1 &= G, & G_2 &= 1.
\end{aligned}$$

Задача об установившихся колебаниях рассматриваемой пластины сводится к интегрированию системы уравнений движения [5]

$$\begin{aligned}
\lambda^{-2} \partial_3^2 u_{j(m)} + \left(D^2 + \Omega_m^2 / \lambda^2 \right) u_{j(m)} + v_{0(m)} \partial_j \theta_m &= 0 \quad (j = 1, 2), \\
\lambda^{-2} \partial_3^2 u_{3(m)} + \left(D^2 + \Omega_m^2 / \lambda^2 \right) u_{3(m)} + \lambda^{-1} v_{0(m)} \partial_3 \theta_m &= 0
\end{aligned} \quad (1)$$

с учетом граничных условий

$$\begin{aligned}
\sigma_{i3(1)}(x_1, x_2, 1) &= 0, & u_{i(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) &= u_{i(2)}(x_1, x_2, \lambda_2), \\
\sigma_{i3(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) &= \sigma_{i3(2)}(x_1, x_2, \lambda_2) \quad (i = \overline{1, 3}).
\end{aligned} \quad (2)$$

Однородные решения задачи (1), (2) можно представить в виде суммы вихревого и потенциального состояний [12]

$$\begin{aligned}
u_{1(m)B}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k}(x_3) \partial_2 B_k(x_1, x_2), \\
u_{2(m)B}(x_1, x_2, x_3) &= -\sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k}(x_3) \partial_1 B_k(x_1, x_2), & u_{3(m)B} &= 0. \\
u_{j(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{p=1}^{\infty} n_{(m)p}(x_3) \partial_j C_p(x_1, x_2) \quad (j = 1, 2), \\
u_{3(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{p=1}^{\infty} q_{(m)p}(x_3) C_p(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
p_{(1)k}(x_3) &= l_{(2)k}^{-1} \cos l_{(2)k} \lambda_2 \cdot \cos l_{(1)k} (\lambda_2 - x_3) - \\
&\quad - \left(G \cdot l_{(1)k} \right)^{-1} \sin l_{(2)k} \lambda_2 \cdot \sin l_{(1)k} (\lambda_2 - x_3), \\
p_{(2)k}(x_3) &= l_{(2)k}^{-1} \cos l_{(2)k} x_3, & l_{(m)}^2 &= \Omega_m^2 + \delta^2; \\
D^2 B(x_1, x_2) - (\delta/\lambda)^2 B(x_1, x_2) &= 0;
\end{aligned}$$

$$n_1(x_3) = H_1 \cos \gamma_{1(1)} x_3 + H_2 \sin \gamma_{1(1)} x_3 + H_3 \cos \gamma_{2(1)} x_3 + H_4 \sin \gamma_{2(1)} x_3,$$

$$q_1(x_3) = Q_1 \sin \gamma_{1(1)} x_3 + Q_2 \cos \gamma_{1(1)} x_3 + Q_3 \sin \gamma_{2(1)} x_3 + Q_4 \cos \gamma_{2(1)} x_3,$$

$$n_2(x_3) = H_5 \cos \gamma_{1(2)} x_3 + H_6 \cos \gamma_{2(2)} x_3,$$

$$q_2(x_3) = Q_5 \sin \gamma_{1(2)} x_3 + Q_6 \sin \gamma_{2(2)} x_3;$$

$$\gamma_{1(m)}^2 = \Omega_m^2 / (1 + \nu_{0(m)}) + \gamma^2, \quad \gamma_{2(m)}^2 = \Omega_m^2 + \gamma^2;$$

$$Q_i = A_i H_i, \quad A_1 = -\gamma_{1(1)} / \lambda, \quad A_2 = \gamma_{1(1)} / \lambda, \quad A_3 = -\gamma^2 / (\lambda \gamma_{2(1)}),$$

$$A_4 = \gamma^2 / (\lambda \gamma_{2(1)}), \quad A_5 = \gamma_{1(2)} / \lambda, \quad A_6 = \gamma^2 / (\lambda \gamma_{2(2)});$$

$$D^2 C(x_1, x_2) - (\gamma / \lambda)^2 C(x_1, x_2) = 0;$$

δ – корень уравнения

$$l_{(2)} \sin l_{(2)} \lambda_2 \cos l_{(1)} \lambda_1 + G l_{(1)} \cos l_{(2)} \lambda_2 \sin l_{(1)} \lambda_1 = 0, \quad (3)$$

причем если $\omega \rightarrow 0$, то уравнение (3) преобразуется к известному виду [6]

$$(1 + 1/G) \sin \delta - (1 - 1/G) \sin (2\lambda_2 - 1) \delta = 0;$$

γ – корни дисперсионного уравнения (собственные числа)

$$\begin{aligned} F(\gamma, \Omega) = & \eta \alpha^2 \left((\zeta^2 S_{21} C_{11} - 4T_{11}^2 C_{21} S_{11}) \gamma_{2(2)}^2 C_{22} C_{12} - \right. \\ & \left. - (\zeta^2 C_{21} S_{11} - 4T_{21}^2 S_{21} C_{11}) S_{22} S_{12} \right) + \left(\frac{\eta \alpha}{G} \right)^2 \left((\gamma^2 + \gamma_{2(2)}^2) S_{22} C_{12} - \right. \\ & \left. - 4T_{22}^2 C_{22} S_{12} \right) + (\zeta^2 (C_{21} C_{11} - 1) + 4T_{11} T_{21} \gamma_{1(1)} \gamma_{2(1)} S_{21} S_{11}) \times \\ & \times (y^2 S_{22} C_{12} - 4(G-1)^2 T_{22}^2 C_{22} S_{12}) - (\zeta^2 S_{21} S_{11} + 4\gamma^2 (C_{21} C_{11} - 1)) \times \\ & \times (\gamma_{2(2)}^2 x^2 C_{22} S_{12} - \gamma^2 z^2 S_{22} C_{12}); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\alpha = \Omega_2^2, \quad \eta = \rho_1 / \rho_2, \quad \zeta = \gamma^2 + \gamma_{2(1)}^2;$$

$$T_{11} = \gamma \cdot \gamma_{1(1)}, \quad T_{21} = \gamma \cdot \gamma_{2(1)}, \quad T_{22} = \gamma \cdot \gamma_{2(2)};$$

$$S_{11} = \frac{\sin \gamma_{1(1)} \lambda_1}{\gamma_{1(1)}}, \quad S_{21} = \frac{\sin \gamma_{2(1)} \lambda_1}{\gamma_{2(1)}}, \quad S_{12} = \sin \gamma_{1(2)} \lambda_2,$$

$$S_{22} = \sin \gamma_{2(2)} \lambda_2, \quad C_{11} = \cos \gamma_{1(1)} \lambda_1, \quad C_{21} = \cos \gamma_{2(1)} \lambda_1,$$

$$C_{12} = \frac{\cos \gamma_{1(2)} \lambda_2}{\gamma_{1(2)}}, \quad C_{22} = \frac{\cos \gamma_{2(2)} \lambda_2}{\gamma_{2(2)}};$$

$$x = 2\gamma^2 (G-1) + \eta\alpha, \quad y = 2\gamma^2 (G-1) - \alpha,$$

$$z = 2\gamma^2 (G-1) + (\eta-1)\alpha.$$

Для длинных волн при $\gamma = 0$ уравнение (4) принимает вид

$$F(\Omega) = (k_1 \Omega_1 c_{11} c_{12} - \eta k_2 \Omega_2 s_{11} s_{12}) (\Omega_1 c_{21} s_{22} + \eta \Omega_2 s_{21} c_{22}), \quad (5)$$

где

$$k_m = \sqrt{(1-2\nu_m)/(2-2\nu_m)};$$

$$s_{1m} = \sin(k_m \Omega_m \lambda_m), \quad s_{2m} = \sin(\Omega_m \lambda_m),$$

$$c_{1m} = \cos(k_m \Omega_m \lambda_m), \quad c_{2m} = \cos(\Omega_m \lambda_m) \quad (m=1, 2).$$

Уравнение (5) определяет две независимые системы частот запираания:

$$F_1(\Omega) = \Omega_1 c_{21} s_{22} + \eta \Omega_2 s_{21} c_{22} = 0, \quad (6)$$

$$F_2(\Omega) = k_1 \Omega_1 c_{11} c_{12} - \eta k_2 \Omega_2 s_{11} s_{12} = 0. \quad (7)$$

Частоты уравнения (6) не зависят от значений коэффициентов Пуассона ν_1, ν_2 , в отличие от корней уравнения (7), образующих второе семейство частот запираания. При некоторых ν_1, ν_2 частоты соседних семейств могут совпадать.

Из (3) для нахождения частот запираания дисперсионного вихревого состояния получаем уравнение

$$\Omega_1 c_{21} s_{22} + \eta \Omega_2 s_{21} c_{22} = 0. \quad (8)$$

Видно, что частоты уравнения (8) совпадают с первым семейством частот запираания потенциального решения (6), т.е. множество частот запираания вихревого состояния является подмножеством множества частот запираания потенциального состояния.

Анализ результатов численных исследований. Расчеты были проведены для пластин со слоями из алюминия, для которого $\rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\tilde{G} = 2,61 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,35$ и вольфрама, с постоянными $\rho = 18,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\tilde{G} = 15,3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,29$. Считалось, что $\lambda_1 / \lambda_2 = 1/2$. Рассмотрены два варианта: вариант I – внешний слой из алюминия, внутренний из вольфрама; вариант II – внешний слой из вольф-

рама, внутренний из алюминия. Ниже описаны некоторые из полученных результатов. При этом входящие в приведенное решение частоты вычислялись по формулам

$$\Omega_1^2 = \Omega^2 \rho_1 \frac{\lambda_1 + \lambda_2 / G}{\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2}, \quad \Omega_2^2 = \Omega^2 \rho_2 \frac{\lambda_1 G + \lambda_2}{\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2},$$

где

$$\Omega = h\omega\sqrt{\rho_{cp}/\tilde{G}_{cp}}, \quad \rho_{cp} = \lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2, \quad \tilde{G}_{cp} = \lambda_1\tilde{G}_1 + \lambda_2\tilde{G}_2.$$

Тогда уравнения (3), (4) определяют счетное множество дисперсионных кривых зависимости частоты Ω от параметра δ , γ . В каждой точке ветви кривой фазовая скорость представляется в виде $c_f = \omega/k = ic\Omega/\gamma$, где

$c = \sqrt{(\lambda_1\tilde{G}_1 + \lambda_2\tilde{G}_2)/(\lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2)}$, $k = -i\gamma/h$, $i = \sqrt{-1}$. Групповая скорость c_g распространяющихся мод согласно кинематическому определению задается равенством $c_g = d\omega/dk = ic d\Omega/d\gamma$ и представляет собой тангенс угла наклона касательной к мнимому участку ветви в данной точке.

Для вихревого состояния на рис. 2 и рис. 3 соответственно для варианта I и варианта II приведены дисперсионные кривые зависимостей частоты Ω от параметра δ (рис. 2, а и рис. 3, а) и графики изменения безразмерных фазовых $v_f = c_f/c$ (рис. 2, б и рис. 3, б) и групповых $v_g = c_g/c$ (рис. 2, в и рис. 3, в) скоростей распространяющихся мод. Для потенциаль-

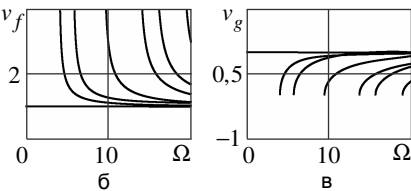
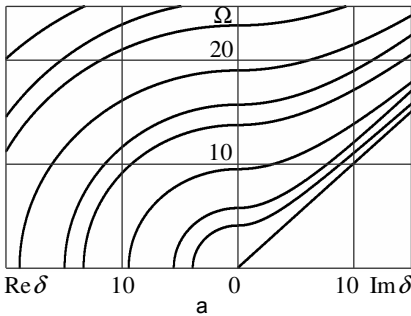


Рис. 2

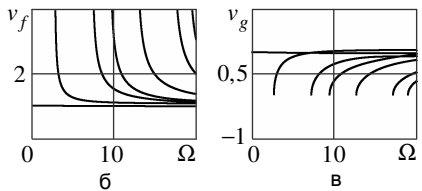
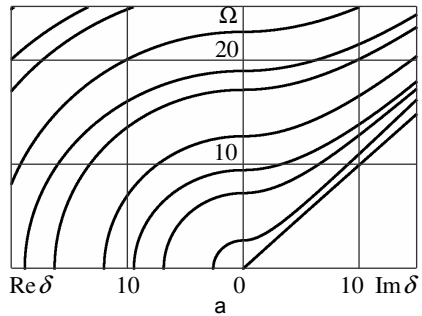


Рис. 3

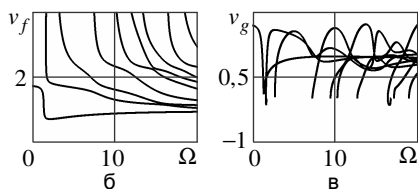
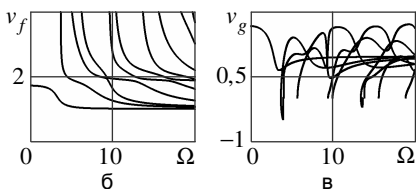
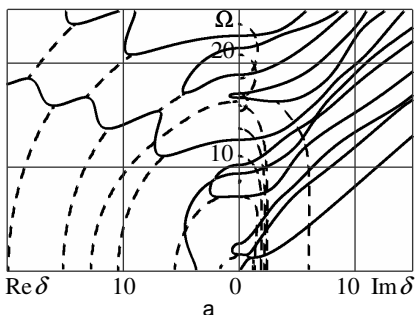
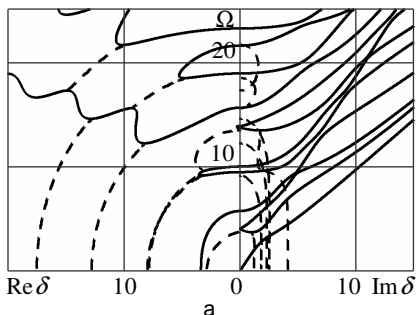


Рис. 4

Рис. 5

ного состояния на рис. 4 и рис. 5 приведены результаты, аналогичные данным рис. 2 и рис. 3. На диаграммах спектральных кривых сплошные линии соответствуют вещественным и чисто мнимым корням, штриховые – комплексным корням. В таблице приведены первые десять частот запираения: столбец 1 соответствует данным рис. 2, а; столбец 2 – рис. 3, а; столбец 4 – рис. 4, а; столбец 5 – рис. 5, а; столбец 3 – частоты запираения дисперсионного уравнения вихревого решения для однородной пластины; столбцы 6, 7 соответствуют частотам запираения дисперсионного уравнения потенциального решения для однородных пластин из вольфрама ($\nu = 0,29$) и алюминия ($\nu = 0,35$).

Из приведенных рисунков и таблицы следует, что по сравнению с однослойной пластиной в трехслойной значительно изменяется характер рас-

Номер частоты	Значения частот запираения						
	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	4,035382	2,701225	3,141593	3,981507	1,680820	2,888281	3,141593
3	5,705777	7,227646	6,283185	4,035382	2,701225	3,141593	3,269873
4	9,423497	9,425904	9,424778	5,705777	7,227646	6,283185	6,283185
5	13,63862	12,66078	12,56637	9,423497	9,425904	8,664842	9,424778
6	15,58095	17,09508	15,70796	9,958838	10,25310	9,424778	9,809620
7	18,85299	18,89807	18,84956	13,63862	12,66078	12,56637	12,56637
8	23,15068	22,63473	21,99115	13,82403	16,68740	14,44140	15,70796
9	25,53396	26,85179	25,13274	15,58095	17,09508	15,70796	16,34937
10	28,29685	28,47437	28,27433	18,85299	18,89807	18,84956	18,84956

пространения волн. В области низких частот появляется действительная мода; изменяются значения и количество критических частот (в частности, частот запирания); имеет место более сильное сближение мод. В тоже время трехслойный волновод при фиксированной частоте, аналогично однослойному, имеет конечное число мнимых, соответствующих бегущим волнам, и счетное число комплексных корней, отвечающих нераспространяющимся модам; количество действительных корней может быть конечным или счетным в зависимости от физико-механических характеристик материалов слоев. В отличие от колебаний трехслойных пластин с жестко заземленными плоскими гранями [5] характерным является то, что при малых частотах возбуждается бегущая симметричная нормальная волна.

С увеличением жесткости внешнего слоя и уменьшением его толщины спектр колебаний трехслойной пластины трансформируется к аналогичному для однослойной пластины с жестко заземленными торцами. При увеличении жесткости и уменьшении толщины внутреннего слоя характеристики колебаний пластины приближаются к однослойной пластине, у которой одна плоская грань жестко заземлена, другая свободна от усилий. Если толщина одного из слоев стремится к нулю, то результаты стремятся к соответствующим данным для однослойной пластины со свободными плоскими гранями.

Комплексные дисперсионные кривые, пересекающие плоскость $\Omega = 0$ под прямым углом, оканчиваются в точках относительного минимума действительных или мнимых кривых; остальные кривые начинаются в точках относительного максимума и оканчиваются в точках относительного минимума действительных дисперсионных кривых. Действительные ветви кривых ортогональны оси $\text{Re } \gamma$. Фазовая скорость на ненулевых частотах запирания стремится к бесконечной, а групповая скорость равна нулю; на нулевой частоте запирания групповая и фазовая скорости равны между собой. Поведение групповых скоростей носит более сложный характер. В частности, четко выражены относительные максимумы и минимумы. С ростом номера мнимой ветви количество таких экстремумов увеличивается. При некоторых частотах Ω групповая скорость c_g принимает отрицательные значения, что связано с явлением «обратной» волны.

РЕЗЮМЕ. У просторовій постановці розглянута задача про усталені коливання тришарової пластини. Вважається, що зовнішні грані пластини вільні від зусиль, а в площинах контакту шарів виконуються умови жорсткого зчеплення. Отримані однорідні розв'язки задачі, та на їх основі досліджені дисперсійні спектри зсувних і поздовжніх хвиль, фазові та групові швидкості, їх частоти запирання.

SUMMARY. In spatial statement the problem of steady-state vibrations of a three-layer plate is considered. It is supposed, that external faces of a plate are free from efforts, and conditions of rigid coupling are executed in planes of layers contact. Homogeneous solutions of a problem are constructed, and on their basis the dispersion spectrums of shear and longitudinal modes, phase and group velocity, their cut-off frequencies are obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. *Кобелев В. Н., Коварский Л. М., Тимофеев С. И.* Расчет трехслойных конструкций: Справочник. – М.: Машиностроение, 1984. – 304 с. 2. *Руппелейт К. В., Либерман Ю. М.* Введение в механику горных пород. – М.: Госгортехиздат, 1960. – 356 с. 3. *Молотков Л. А.* Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. – Л.: Наука, 1984. – 201 с. 4. *Алтухов Е. В., Кулиш И. Е.* Равновесие трехслойной пластины с жесткими торцами // *Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природ. науки* – 2001. – № 1.– С. 314–321. 5. *Алтухов Е. В., Фоменко М. В.* Упругие колебания трехслойных пластин симметричного строения // *Тр. Ин-та прикл. матем. и мех. НАНУ.* – 2009. – Т. 18. – С. 3–10. 6. *Ворович И. И., Кадомцев И. Г.* Качественное исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной плиты // *Прикладная математика и механика.* – 1970. – Т. 34, вып. 5. – С. 870–876. 7. *Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А.* Колебания и волны в слоистых средах. – К.: Наук. думка, 1990. – 224 с. 8. *Устинов Ю. А.* Математическая теория поперечно-неоднородных плит. – Ростов н/Д.: ООО ЦВВР, 2006. – 257 с. 9. *Пискунов В. Г.* Итерационная аналитическая теория в механике слоистых композитных систем // *Механика композитных материалов.* – 2003. – Т. 39, № 1. – С. 3–24. 10. *Пискунов В. Г., Рассказов А. О.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек // *Прикладная механика.* – 2002. – Т. 38, № 2. – С. 22–56. 11. *Шульга Н. А.* Распространение упругих волн в периодически-неоднородных средах // *Прикладная механика.* – 2003. – Т. 39, № 7. – С. 15–56. 12. *Ворович И. И., Малкина О. С.* Напряженное состояние толстой плиты // *Прикладная математика и механика.* – 1967. – Т. 37, № 2. – С. 230–241.

Донецкий национальный университет

Поступила 05.07.2009

УДК 539.3

*А. И. ЯЦКИВ, Р. Н. ШВЕЦ, канд. физ.-мат. наук, Б. Я. БОБЫК***ТЕРМОНАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ ВАЛА
ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УСЛОВИЯХ ФРИКЦИОННОГО
КОНТАКТА С ОБОЙМОЙ ЧЕРЕЗ ТОНКИЙ СЛОЙ**

Процессы трения, фрикционного тепловыделения и деформирования тел в зоне контакта взаимосвязаны, а во время интенсивного взаимодействия этих процессов могут изменяться структура и физико-механические свойства приповерхностных слоев контактирующих тел [1]. Это требует уточнения существующих моделей механики контактного взаимодействия и создания новых, а также разработки подходов к нахождению решений соответствующих задач [2]. В работах [3, 4] проанализировано поведение узла трения в виде двух длинных цилиндров, один из которых вращается относительно другого при идеальном и неидеальном тепловом контакте соответственно, и исследовано фрикционную термоупругую неустойчивость контакта (ТУНК). С целью более адекватного моделирования контакта трибологические пары предлагалось вводить между ними так называемое «третье тело» [5]. Также рассматривался фрикционный контакт многослойных тел [6, 7]. Более полный обзор фрикционных контактных задач механики приведен в работе [2]. В данной статье решена контактная задача термоупругости для трибологического соединения, состоящего из цилиндра с тонким приповерхностным слоем и жесткой обоймы.

Постановка задачи и схема решения. Рассмотрим длинный упругий изотропный цилиндр, вращающийся в жесткой обойме с трением. Вследствие трения в контактной области выделяется тепло, которое отводится в цилиндр и обойму. Будем считать, что теплофизические и механические свойства тонкого приповерхностного слоя цилиндра отличаются от свойств основного материала. Выделяющееся тепло, направленное в цилиндр, может вызывать его расширение и возрастание контактного давления, приводящего в свою очередь к увеличению силы трения, т.е. температура цилиндра, контактное давление и сила трения являются взаимозависимыми величинами и влияют на его термоупругое состояние.

Тонкий приповерхностный слой будем моделировать изотропной оболочкой, задавая между ней и цилиндром идеальный физико-механический контакт. Цилиндр с оболочкой вставлен без зазора в жесткую обойму, температура которой поддерживается равной нулю. Он вращается с переменной угловой скоростью $\omega(\tau)$. Будем исследовать зависимость температурного и напряженного состояний цилиндра от скорости вращения и теплофизических параметров цилиндра и оболочки.

Для исследования характерных особенностей поведения узла трения рассмотрим одномерную задачу термоупругости. Осесимметричное рас-

пределение температуры в цилиндре опишем нестационарным уравнением теплопроводности [8]

$$\Delta T(r, \tau) = \alpha^2 \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau}, \quad r \in [0, r_1], \quad (1)$$

где α – коэффициент температуропроводности цилиндра; Δ – оператор Лапласа в цилиндрической системе координат. Зададим произвольное начальное распределение температуры

$$T(r, 0) = T^{(0)}(r), \quad r \in [0, r_1] \quad (2)$$

и условия ограниченности и симметричности

$$T(0, \tau) < \infty, \quad \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial r} = 0, \quad r = 0. \quad (3)$$

Тонкую изотропную цилиндрическую оболочку приведем к идеализированной физической поверхности, наделенной усредненными физико-механическими параметрами оболочки [8]. Математически влияние этой поверхности на контакт цилиндра с обоймой отображается специальными обобщенными нестационарными условиями контакта, которые при допущении идеальности условий контакта цилиндра и оболочки, равномерного распределения тепловыделения по ее толщине [9], а также линейной зависимости тепловыделения от коэффициента трения, угловой скорости вращения и контактного давления, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(r_1, \tau)}{\partial r} + bT(r_1, \tau) + d \frac{\partial T(r_1, \tau)}{\partial \tau} = \\ = -r_1(2h)^{-1} f \omega(\tau) \sigma_{rr}(r_1, \tau), \quad r = r_1, \end{aligned} \quad (4)$$

в котором $\sigma_{rr}(r_1, \tau)$ – радиальные напряжения на поверхности контакта; b , d – коэффициенты, определяемые теплофизическими свойствами цилиндра и оболочки; f – коэффициент трения контактирующих поверхностей.

Запишем уравнения равновесия цилиндра в перемещениях [8]

$$\Delta \bar{u} + (1 - 2\nu)^{-1} \text{grad div } \bar{u} = 2(1 + \nu)(1 - 2\nu)^{-1} \alpha_T \text{grad } T, \quad r \in [0, r_1], \quad (5)$$

при условии их отсутствия на поверхности контакта:

$$u_r(r_1) = 0 \quad (6)$$

и ограниченности напряжений в центре цилиндра:

$$\sigma_{rr}(0, \tau) < \infty, \quad \sigma_{\theta\theta}(0, \tau) < \infty. \quad (7)$$

Здесь \bar{u} – вектор перемещений; ν – коэффициент Пуассона; α_T – коэффициент линейного температурного расширения.

Для определения напряжений используем закон Дюамеля-Неймана [8]. Взаимозависимость температуры и напряжений для сформулированной связанной краевой задачи контактной термоупругости осуществляется через уравнения равновесия (5) и тепловые контактные условия при теплооб-

разовании вследствие трения (4). Для решения задачи (1)–(7) используем предложенный в [10] подход к решению связанных краевых задач, состоящий в расщеплении связанных нестационарных гранично-контактных условий с помощью ввода в эти условия связывающих функций и получении на них интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

Выбираем в качестве граничной связывающей функции характеристику температуры поверхности цилиндра

$$\Phi(\tau) = bT(r_1, \tau), \quad (8)$$

Запишем структуру решения краевой задачи теплопроводности (1)–(3), (8). Для этого используем представление температуры в виде двух составляющих

$$T(r, \tau) = g(r, \tau) + T_1(r, \tau), \quad (9)$$

где $g(r, \tau)$ – стандартизирующая функция

$$g(r, \tau) = b^{-1}r_1^{-2}r^2\Phi(\tau), \quad (10)$$

позволяющая преобразовать граничное условие (8) к однородному, что необходимо для формулирования задачи Штурма-Лиувилля на собственные функции и собственные значения.

После использования представления (9) для составляющей $T_1(r, \tau)$ получим краевую задачу с однородным граничным условием, но с неоднородным уравнением и измененным начальным условием:

$$\Delta T_1(r, \tau) = \alpha^2 \frac{\partial T_1(r, \tau)}{\partial \tau} - \Omega(r, \tau), \quad r \in [0, r_1]; \quad (11)$$

$$T(r_1, \tau) = 0; \quad (12)$$

$$T_1(r, 0) = T^{(0)}(r) - g(r, 0) = T_1^{(0)}(r); \quad (13)$$

$$T_1(0, \tau) < \infty, \quad \frac{\partial T_1(0, \tau)}{\partial r} = 0, \quad r = 0. \quad (14)$$

Здесь

$$\Omega(r, \tau) = \Delta g(r, \tau) - \alpha^2 \frac{\partial g(r, \tau)}{\partial \tau}. \quad (15)$$

Для решения краевой задачи (11)–(14) будем использовать его разложение в ряды Фурье по собственным функциям:

$$T_1(r, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} E_j(\tau) J_0(\alpha \mu_j r), \quad (16)$$

в котором

$$E_j(\tau) = A_j \exp(-\mu_j^2 \tau) + \int_0^{\tau} g_j(t) \exp(-\mu_j^2(\tau-t)) dt; \quad (17)$$

$$A_j = \|J_0(\alpha\mu_j r)\|^{-2} \int_0^{\eta} r T_1^{(0)}(r) J_0(\alpha\mu_j r) dr ; \quad (18)$$

$$g_j(\tau) = \|J_0(\alpha\mu_j r)\|^{-2} \int_0^{\eta} r \Omega(r, \tau) J_0(\alpha\mu_j r) dr ; \quad (19)$$

$$\|J_0(\alpha\mu_j r)\|^{-2} = \int_0^{\eta} r J_0^2(\alpha\mu_j r) dr ; \quad (20)$$

$J_0(\alpha\mu_j r)$, μ_j – функция Бесселя и ее нули.

После подстановки разложения (16) в представление (9) для температуры цилиндра получим выражение

$$T(r, \tau) = g(r, \tau) + \sum_{j=1}^{\infty} E_j(\tau) J_0(\alpha\mu_j r), \quad (21)$$

на основе которого найдем перемещения и напряжения в цилиндре. Так, для перемещений используем представление Папковича-Нейбера [8]

$$u_r(r, \tau) = \Lambda_r(r) + [4(1-\nu)]^{-1} \frac{\partial}{\partial r} (\Lambda(r, \tau) - r\Lambda_r(r) - z\Lambda_z(z)),$$

$$u_z(r, \tau) = \Lambda_z(z) + [4(1-\nu)]^{-1} \frac{\partial}{\partial r} (\Lambda(r, \tau) - r\Lambda_r(r) - z\Lambda_z(z)), \quad (22)$$

где вследствие осесимметричности задачи и ограниченности решения на оси цилиндра

$$\Lambda_z(z) = K_1(\tau)z, \quad \Lambda_r(r) = K_2(\tau)r, \quad (23)$$

а $\Lambda(r, \tau)$ является частным решением уравнения

$$\Delta\Lambda(r, \tau) = 4(1+\nu)\alpha_T T(r, \tau); \quad (24)$$

$K_1(\tau)$, $K_2(\tau)$ – произвольные функции времени, конкретизирующиеся на основе механических условий (6) и (7) и условия равновесия произвольного поперечного сечения цилиндра:

$$\int_0^{\eta} r \sigma_{zz}(r, \tau) dr = r_1 N_1; \quad (25)$$

N_1 – осевое усилие в оболочке.

Зная функцию $\Lambda(r, \tau)$ и коэффициенты $K_1(\tau)$, $K_2(\tau)$, на основе закона Дюамеля-Неймана [8] найдем напряжения в цилиндре

$$\sigma_{rr}(r, \tau) = \frac{G}{(1-\nu)} \left(\nu K_1(\tau) + K_2(\tau) - 0,5r^{-1} \frac{\partial \Lambda(r, \tau)}{\partial r} \right),$$

$$\sigma_{zz}(r, \tau) = \frac{G}{(1-\nu)} \left((1-\nu)K_1(\tau) + 2\nu K_2(\tau) - 2(1+\nu)\alpha_T T(r, \tau) \right),$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \tau) = \frac{G}{(1-\nu)} \left(\nu K_1(\tau) + K_2(\tau) + 0,5r^{-1} \frac{\partial \Lambda(r, \tau)}{\partial r} - 2(1+\nu)\alpha_T T(r, \tau) \right). \quad (26)$$

Определив $K_1(\tau)$, $K_2(\tau)$ из условий (6), (7) и подставив напряжения (26) и температуру (21) в связанное гранично-контактное условие (4), для неизвестной функции $\Phi(\tau)$ получим интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра

$$\frac{2}{b}\Phi(\tau) \left(1 + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2c - (\alpha\mu_j)^2) \left((\alpha\mu_j r_1)^2 - 4 \right)}{(\alpha\mu_j)^4 r_1^3} \right) +$$

$$+ \frac{d}{b} \frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \tau} + \frac{2}{b} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2c}{\alpha\mu_j} - \alpha\mu_j \right) \frac{\mu_j}{\alpha r_1} \int_0^{\tau} \Phi(t) e^{-\mu_j^2(\tau-t)} dt +$$

$$+ 2T^{(0)} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2c}{\alpha\mu_j} - \alpha\mu_j \right) \frac{e^{-\mu_j^2 \tau}}{\alpha\mu_j r_1} = 0, \quad (27)$$

где $c = 4f\omega G\alpha_t(1+\nu)/(1-\nu)$.

Анализ результатов численных исследований. При проведении численных исследований интегро-дифференциальное уравнение (27) решалось аппроксимацией функции $\Phi(\tau)$ кубическими сплайнами [11]. Временной интервал разбивался на N промежутков, на каждом из которых $\Phi(\tau)$ пред-

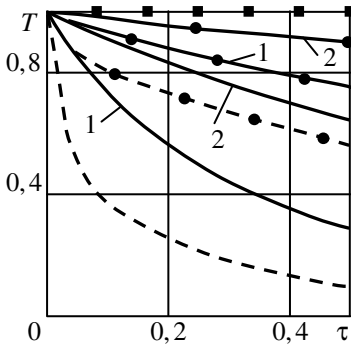


Рис. 1

ставлялась в виде полинома третьей степени. Число N выбиралось таким образом, чтобы обеспечить удовлетворительную точность решения. По найденной характеристике температуры поверхности цилиндра $\Phi(\tau)$ определялась температура в цилиндре (21) и напряжения (26) в последнем. На рис. 1–6 показано изменение во времени безразмерных температуры T , радиальных σ_{rr} и кольцевых $\sigma_{\theta\theta}$ напряжений на поверхности цилиндра в зависимости от приведенных безразмер-

ных теплофизических параметров b^* , d^* и c^* , при постоянной скорости вращения цилиндра ω .

На рис. 1–3 для $b^* = 5$ при различных значениях параметров d^* и c^* изображены графики изменений температуры и напряжений. Сплошные кривые и кривые с кружочками относятся к значениям c^* , равным 1 и 4.

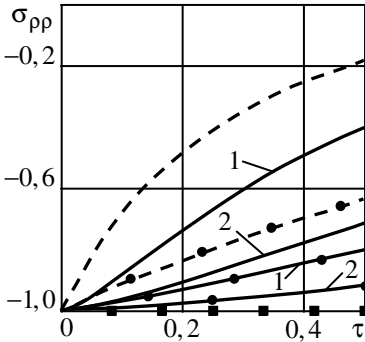


Рис. 2

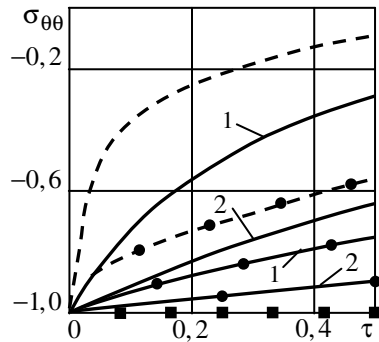


Рис. 3

Кривые 1, 2 соответствуют значениям d^* , равным 1 и 2. Пунктирная кривая отвечает случаю $d^* = 0$. Видно, что уменьшение приведенной теплоемкости оболочки d^* приводит к большему охлаждению цилиндра и к уменьшению радиальных и кольцевых напряжений; для обоих значений параметра c^* температура цилиндра со временем стремится к нулю, к температуре обоймы. Однако характерной особенностью приведенной модели контактного взаимодействия вращательного цилиндра с обоймой является неограниченное повышение температуры и увеличение напряжений (ТУНК) при превышении параметром c^* (произведение угловой скорости вращения и коэффициента трения) некоторого критического значения, которому на рис. 1–3 соответствуют горизонтальные прямые, обозначенные квадратиками.

На рис. 4 при постоянном $c^* = 1$ приведено изменение температуры для различных значений параметра b^* при постоянном d^* , а также для различных значений d^* при постоянном b^* . Пунктирные кривые 1–3 соответствуют значе-

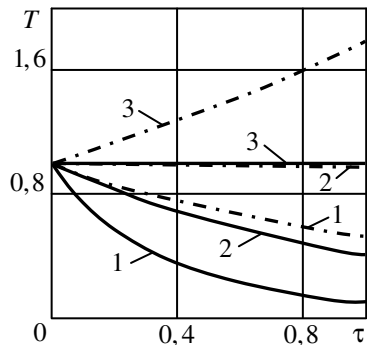


Рис. 4

ниям $d^* = 1$ и b^* , равным 2, 1 и 0,1. Сплошные кривые соответствуют значениям $b^* = 5$ и d^* , равным 1, 4 и 1000. Видно, что уменьшение параметра b^* также приводит к ТУНК. Увеличение же d^* при постоянных b^* и c^* не вызывает ТУНК, а только подводит температуру и напряжения к границе устойчивости термонапряженного состояния, которой соответствует равновесие между тепловыделением и теплоотдачей.

На рис. 5–6 показано изменения температуры и напряжений для некоторых существенно различных наборов параметров b^* и d^* , при которых кривые будут расположены достаточно близко друг от друга. Кривая 1 отвечает случаю $b^* = 8, d^* = 2$; кривая 2 – $b^* = 5, d^* = 1$; кривая 3 – $b^* = 3, d^* = 0,15$. Выявлены множества таких наборов параметров, обеспечивающих близкие изменения во времени термонапряженного состояния.

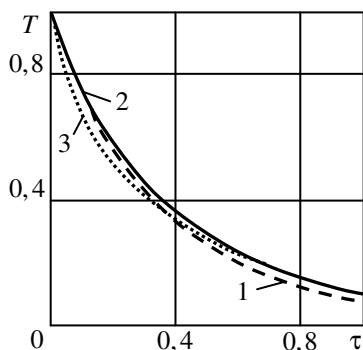


Рис. 5

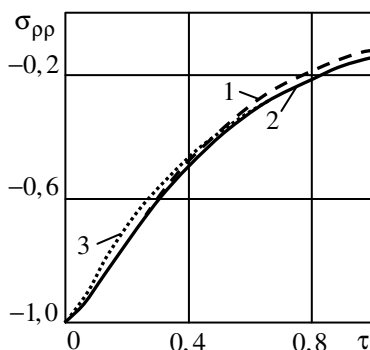


Рис. 6

Рассмотренный подход к исследованию контактного взаимодействия трибологических пар при применении предложенной в [10] методики построения решений краевых задач теплопроводности с неклассическими условиями для многослойных тел может быть распространен на случай многослойных трибосистем с тонкими прослойками.

РЕЗЮМЕ. Для трибологічного з'єднання, складеного з циліндра який має поверхневу неоднорідність у вигляді тонкого приповерхневого шару, та жорсткої обойми, записано неklasичні нестационарні умови контакту з тепловиділенням від тертя та знайдено розв'язки відповідної зв'язаної неklasичної контактної задачі термопружності. Проаналізовано вплив зведених параметрів циліндра і шару, а також кутової швидкості обертання на термонапружений стан циліндра, зокрема на термопружну нестійкість контакту.

SUMMARY. The formulation and corresponding solution to the transient contact problem of thermoelasticity for tribological system assembled with circular coated cylinder

and rigid clip are considered. The nonclassical transient contact boundary conditions taking into account frictional heat generation and thin coating are presented. The solution to the corresponding coupled nonclassical contact problem of thermoelasticity is obtained. The influence of the cylinder and coating thermal parameters and angular velocity on the temperature and stresses are analyzed. The instability of thermoelastic contact with friction is investigated.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. *Основы трибологии* (Трение, износ, смазка) / Под. ред. А. В. Чичинадзе. – М.: Наука и техника, 1995. – 779 с. 2. *Коваленко Е. В.* Контактные задачи с учетом тепловыделения от трения // *Механика контактных взаимодействий*. – М.: Физматлит, 2001. 3. *Пир'єв Ю. О., Грилицький Д. В., Мокрик Р. І.* Нестационарне температурне поле та термопружний стан двошарового порожнистого циліндра при фрикційному нагріванні // *Прикл. механіка*. – 1995. – т. 31, № 1. – С. 44-50. 4. *Грилицький Д. В., Пир'єв Ю. О., Мандзук Ю. І.* Квазістатична контактна задача термопружності для двошарового циліндра при фрикційному нагріві та неідеальному тепловому контакті // *Мат. методи і фіз.-мех. поля*. – 1997. – № 1. – С. 104–110. 5. *Majcherczak D., Dufrenoy P., Nait-Abdelaziz M.* Third Body Influence on Thermal Friction Contact Problems: Application to Braking // *J. of Tribology*. – 2005. – V. 127. – P. 89–95. 6. *Кушнір Р. М., П'янило Я. Д.* Дослідження термонапруженого стану кусково-однорідних вузлів тертя // *Мат. методи і фіз.-мех. поля*. – 1998. – 41, № 3. – С. 98–102. 7. *Процюк Б., Синюта В.* Квазістатичний термопружний стан багатшарових циліндрів при фрикційному нагріві // *Машинознавство*. – 2003. – № 1. – С. 21–26. 8. *Підстригач Я. С.* Вибрані праці. – К.: Наук. думка, 1995. – 460 с. 9. *Мартиняк Р. М., Швець Р. М.* Умови теплового контакту тіл через тонкі неоднорідні за товщиною прошарки // *Доп. НАН України*. – 1996. – № 9. – С. 74–76. 10. *Швець Р. М., Яцків О. І.* Поширення методу власних функцій на крайові задачі механо дифузії для багатшарових тіл з прошарками // *Мат. методи і фіз.-мех. поля*. – 1998. – № 4. – С. 155–161. 11. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справочное пособие. – К.: Наук.думка, 1986. – 544 с.

*Институт прикладных проблем механики
и математики НАН Украины, г. Львов*

Поступила 17.06.2009

Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук

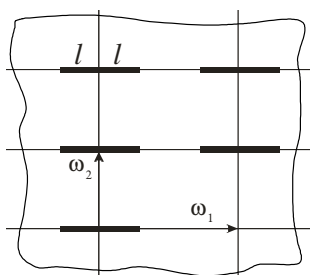
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ НАНОСТЕРЖНЯ

Проблема определения механических характеристик наноразмерных объектов интенсивно обсуждается в литературе. Описываются как теоретические [1–4], так и экспериментальные процедуры [3]. Ниже предлагается новая процедура определения характеристик наностержней.

Методика определения жесткостных характеристик наностержня.

Пусть на подложке в виде тонкой металлической пластинки-полоски или пленки, выращена система наностержней (нанотрубок). Растянув полоску в направлении оси стержня и замерив ее удлинение, можно определить среднюю деформацию системы в этом направлении. С другой стороны, теория регулярных структур [5–7] дает возможность вычислить средние деформации системы подложка-наностержни в зависимости от микроструктуры фундаментальной ячейки. Сравнив экспериментальные и теоретические значения средних деформаций, получим функциональное уравнение для определения жесткостных характеристик наностержня. Возникает обратная задача, решение которой может оказаться не единственным и неустойчивым. В качестве примера рассмотрим задачу о растяжении подложки, скрепленной с двоякопериодической системой стержней.

Пусть на подложке, которая представляет собой тонкую пластинку или достаточно жесткую пленку, выращена регулярная (двоякопериодическая)



система наностержней (нанотрубок), ориентированных вдоль оси x , непрерывно скрепленных с подложкой (рисунок). Обозначим через ω_1 и ω_2 ($\text{Im } \omega_1 = 0$, $\text{Im}(\omega_2 / \omega_1) > 0$) основные периоды структуры. Стержень представляет собой отрезок L длиной $2l$ с концевыми точками a , b ($\text{Im } a = \text{Im } b$). Центры стержней образуют двоякопериодическую систему точек $P = m\omega_1 + n\omega_2$.

В области, занимаемой указанной системой, имеют место средние напряжения $\langle \sigma_{ik} \rangle$ ($i, k = 1, 2$). В рамках принимаемой модели передача нагрузки от подложки к стержню осуществляется с помощью касательных напряжений $q_0(t)$. Составляя уравнение равновесия элемента стержня единичной длины в направлении оси x , выражаем погонное нормальное усилие в стержне через контактное усилие $q_0(t)$

$$P(t_0) = -\int_{t_0}^b q_0(t) dt, \quad P(b) = 0, \quad P(a) = -\int_a^b q_0(t) dt = 0.$$

На основе модели плоского напряженного состояния можно выразить смещения и напряжения в подложке через две аналитические в рассматриваемой области функции по формулам

$$\begin{aligned} h(z) &= 2\mu\delta(u_1 + iu_2) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\Psi(z)}, \\ \delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) &= 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \\ \delta(\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) &= 2[\overline{z}\Phi'(z) + \Psi'(z)], \\ \Phi(z) &= \varphi'(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z), \end{aligned} \quad (1)$$

где δ – толщина пластинки.

Главный вектор сил, действующих вдоль произвольной дуги AB , определяется формулой

$$(X + iY) = \delta \int_{AB} (X_n + iY_n) ds = -i\delta g(z) \Big|_A^B. \quad (2)$$

Здесь

$$g(z) = \varphi(z) + z\overline{\Phi(z)} + \overline{\Psi(z)}.$$

Интегральные представления аналитических функций, обеспечивающие двоякопериодическое распределение тензора напряжений в пластине, возьмем в виде [5]

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi(\kappa+1)} \int_L q_0(t) \zeta(t-z) dt + A_1, \\ \Psi(z) &= \frac{\kappa}{2\pi(\kappa+1)} \int_L q_0(t) \zeta(z-t) dt - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi(\kappa+1)} \int_L q_0(t) \{ \wp_1(z-t) + \bar{i}\wp(z-t) \} dt + A_2, \end{aligned} \quad (3)$$

в котором $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$; ν – коэффициент Пуассона материала подложки; A_1, A_2 – постоянные, определяемые из условия существования в структуре заданных средних напряжений $\langle \sigma_{ik} \rangle$; $\wp(z)$ и $\zeta(z)$ – двоякопериодическая и квазипериодическая функции Веерштрасса [7]; $\wp_1(z)$ – специальная меморфная функция [5].

Квазипериодичность вектора перемещения и главного вектора сил на дуге. Интегрируя функции (3), находим

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= -\frac{1}{2\pi(\kappa+1)} \int_L q_0(t) v(t-z) dt + A_1 z, \quad \varphi'(z) = \Phi(z), \\ \psi(z) &= \frac{\kappa}{2\pi(\kappa+1)} \int_L q_0(t) v(z-t) dt - \frac{1}{2\pi(\kappa+1)} \int_L q_0(t) \left\{ \wp_1^{(-1)}(z-t) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{t} \wp^{(-1)}(z-t) \right\} dt + A_2 z, \quad \psi'(z) = \Psi(z),\end{aligned}\quad (4)$$

где [6, 7]

$$\begin{aligned}v'(z) &= \zeta(z), \quad \wp^{(-1)} = -\zeta(z), \quad \wp_1^{(-1)}(z) = \int \wp_1(z) dz, \\ v(z + \omega_v) - v(z) &= \pi i + \delta_v \left(z + \frac{1}{2} \omega_v \right), \quad \delta_v = 2\zeta \left(\frac{\omega_v}{2} \right) \quad (v = 1, 2), \\ \wp_1^{(-1)}(z + \omega_v) - \wp_1^{(-1)}(z) &= -\bar{\omega}_v \zeta(z) + \gamma_v z + \gamma_v^*, \\ \gamma_2 \omega_1 - \gamma_1 \omega_2 &= \delta_1 \bar{\omega}_2 - \delta_2 \bar{\omega}_1.\end{aligned}$$

Условия существования в структуре средних напряжений $\langle \sigma_{ik} \rangle$ приводят к системе уравнений относительно постоянных A_1 и A_2 , решение которой имеет вид

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} A_1 &= \frac{\langle \sigma_{11} \rangle + \langle \sigma_{22} \rangle}{4} \delta + \left(\frac{\pi(1+\kappa)}{2F} - \frac{\operatorname{Re} \delta_1}{\omega_1} \right) B, \\ A_2 &= \frac{\delta}{2} (\langle \sigma_{22} \rangle - \langle \sigma_{11} \rangle + 2i \langle \sigma_{12} \rangle) + \left(\frac{\kappa \delta_1 - \gamma_1}{\omega_1} - \frac{\pi(1+\kappa)}{F} \right) B, \\ B &= \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \int_L t q_0(t) dt, \quad F = \omega_1 \operatorname{Im} \omega_2.\end{aligned}\quad (5)$$

Таким образом, интегральные представления (3) при наличии равенств (5) корректны в том смысле, что они обеспечивают: двоякую периодичность поля напряжений в структуре; квазипериодичность вектора перемещений и главного вектора усилий на дуге, соединяющей конгруэнтные точки; существование заданных средних напряжений $\langle \sigma_{11} \rangle$, $\langle \sigma_{12} \rangle$, $\langle \sigma_{22} \rangle$ при любой плотности $q_0(t) \in H(L)$, удовлетворяющей условию

$$\int_L q_0(t) dt = 0.$$

Интегральные уравнения структуры подложка–наностержни. Приравнивая деформацию e_{11} подложки деформации стержня на L , получаем сингулярное интегродифференциальное уравнение

$$\int_L q_0(t) K(t-t_0) dt + \beta(t_0) \int_{t_0}^b q_0(t) dt + M\{q_0(t)\} = N, \quad t_0 \in L,$$

$$K(t-t_0) = \operatorname{Re} \left\{ \zeta(t-t_0) + \frac{(t-t_0) \overline{\rho(t-t_0)} - \overline{\rho_1(t-t_0)}}{2\kappa-1} \right\},$$

$$M\{q_0(t)\} = \left[\frac{\pi(1+\kappa)^2}{2(2\kappa-1)F} - \frac{(2\kappa-1)\operatorname{Re} \delta_1 - \operatorname{Re} \gamma_1}{(2\kappa-1)\omega_1} \right] \int_L t q_0(t) dt,$$

$$\beta\{t_0\} = \frac{8\pi E \delta}{(1+\nu)(5-3\nu)E_0 F_0(t_0)},$$

$$N = \frac{\pi(\kappa+1)\delta}{2(2\kappa-1)} \left[(3-\kappa)\langle \sigma_{22} \rangle - (1+\kappa)\langle \sigma_{11} \rangle \right]. \quad (6)$$

Здесь E , E_0 – модули упругости материалов подложки и наностержня; δ и ν – толщина и коэффициент Пуассона подложки; $F_0(t)$ – площадь поперечного сечения наностержня. Уравнение (6) в совокупности с дополнительным условием

$$\int_L q_0(t) dt = 0$$

однозначно определяет решение $q_0(t)$ на L .

Вводя безразмерные координаты $\xi = t/l$, $\lambda = 2l/\omega_1$, уравнение (6) приведем к виду

$$\int_{-1}^1 \frac{q(\xi)}{\xi - \xi_0} d\xi + \int_{-1}^1 K(\xi_0 - \xi) q(\xi) d\xi + \beta(\xi_0) \int_{\xi_0}^1 q(\xi) d\xi = \pi f_1, \quad (7)$$

где

$$K(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{2j+2} \Lambda_j \xi^{2j+1},$$

$$\Lambda_0 = \frac{\omega_1}{2\kappa} \left\{ (2\kappa-1)\operatorname{Re} \delta_1 - \operatorname{Re} \gamma_1 - \frac{\pi}{2H} (1+\kappa)^2 \right\}, \quad H = |\omega_2| \sin \alpha,$$

$$\Lambda_j = \frac{1}{\kappa} \left\{ (j+1) \operatorname{Re} g_{2j+3}^{(1)} - (j+1-\kappa) \operatorname{Re} g_{2j+2}^0 \right\} \left(\frac{\omega_1}{2} \right)^{2j+2} \quad (j=1, 2, \dots),$$

$$\beta(\xi) = \frac{4\pi E \delta l}{(3-\nu)(1+\nu) E_0 F_0}, \quad q(\xi) = q_0(l\xi),$$

$$g_{2j+2} = \sum_{m,n} \left(\frac{1}{T} \right)^{2j+2}, \quad g_{2j+3}^{(1)} = \sum_{m,n} \frac{\bar{T}}{(T)^{2j+3}},$$

$$T = \frac{1}{2} (m\omega_1 + n\omega_2),$$

$$f_1 = \frac{(1+\kappa)\delta}{4\kappa} \left\{ (3-\kappa) \langle \sigma_{22} \rangle - (1+\kappa) \langle \sigma_{11} \rangle \right\}.$$

Уравнение (7) необходимо рассматривать совместно с дополнительным условием

$$\int_{-1}^1 q(\xi) d\xi = 0. \quad (8)$$

Макромодель нанокompозита. Пусть $q^c(\xi)$ – стандартное решение уравнений (7), (8), определяемое формулой (при $\langle \sigma_{11} \rangle \neq 0$, $\langle \sigma_{22} \rangle \neq 0$, $\langle \sigma_{12} \rangle = 0$)

$$q_0(t) = q(\xi) = \left[\langle \sigma_{11} \rangle + \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \langle \sigma_{22} \rangle \right] \delta q^c(\xi). \quad (9)$$

Соответственно (9) функционал B из (5) примет вид

$$B = \frac{l^2 b_{11}^c \delta}{2\pi(\kappa+1)} \left[\langle \sigma_{11} \rangle + \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \langle \sigma_{22} \rangle \right].$$

Здесь

$$b_{11}^c = \int_{-1}^1 \xi q^c(\xi) d\xi.$$

Средние деформации в структуре можно найти по формулам [6]

$$\langle e_{11} \rangle = \frac{1}{\omega_1} u_1(z) \Big|_z^{z+\omega_1}, \quad \langle e_{22} \rangle = \frac{1}{\operatorname{Im} \omega_2} u_2(z) \Big|_z^{z+\omega_2} - \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\omega_1} u_2(z) \Big|_z^{z+\omega_1},$$

$$2\langle e_{12} \rangle = \frac{1}{\omega_1} \left[u_2(z) - u_1(z) \operatorname{ctg} \alpha \right] \Big|_z^{z+\omega_1} + \frac{1}{\operatorname{Im} \omega_2} u_1(z) \Big|_z^{z+\omega_2}.$$

Выполняя предписанные операции взятия приращении от перемещений в конгруэнтных точках и, учитывая, что в рассматриваемом здесь случае $\text{Re } \omega_2 = 0$, приходим к уравнениям макромодели структуры

$$\begin{aligned}\langle e_{11} \rangle &= \langle a_{11} \rangle \langle \sigma_{11} \rangle + \langle a_{12} \rangle \langle \sigma_{22} \rangle, \\ \langle e_{22} \rangle &= \langle a_{12} \rangle \langle \sigma_{11} \rangle + \langle a_{22} \rangle \langle \sigma_{22} \rangle,\end{aligned}\tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}\langle a_{11} \rangle &= \frac{1}{\langle E_1 \rangle} = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{l^2 b_{11}^c}{\delta F} \right), \quad \langle a_{22} \rangle = \frac{1}{\langle E_2 \rangle} = \frac{1}{E} \left(1 + \nu^2 \frac{l^2 b_{11}^c}{\delta F} \right), \\ \langle a_{12} \rangle &= -\frac{\nu}{E} \left(1 + \frac{l^2 b_{11}^c}{\delta F} \right).\end{aligned}$$

При этом следует учитывать, что при достаточно плотной упаковке решетки площадь ячейки F должна иметь порядок l^2 . Только в этом случае можно рассчитывать на устойчивость решения обратной задачи.

Из (10) видно, что наиболее существенно изменяется макромодуль $\langle a_{11} \rangle$, величина $\langle a_{12} \rangle$ по абсолютной величине равна $\nu \langle a_{11} \rangle$, величина $\langle a_{22} \rangle \cdot E$ изменяется как $1 + O(\nu^2)$. Это объясняется тем, что стержни ориентированы вдоль оси Ox и их присутствие не влияет на сдвиговые деформации системы. Функционал b_{11}^c содержит в себе информацию о структуре фундаментальной ячейки (в данном случае о жесткости и геометрических параметрах наностержня). Поэтому, определив $\langle E_1 \rangle$ из эксперимента, получаем уравнение для определения модуля упругости наностержня

$$b_{11}^c = \frac{\delta F}{l^2} \left(\frac{E}{\langle E_1 \rangle} - 1 \right).$$

Из анализа результатов следует, что симбиоз аналитического алгоритма и эксперимента может иметь успех, т.е. привести к определению модуля упругости наностержня в зависимости от его геометрических параметров, только при достаточно плотной упаковке их в системе подложка–наностержни.

РЕЗЮМЕ. Запропонована процедура математичного супроводження експерименту за визначенням модуля пружності нанострижня. Для цього використана теорія регулярних структур, яка дає змогу визначити ефективний модуль пружності системи підкладка - нанострижні.

SUMMARY. The procedure of mathematical follow-up of experiment for nanorod elasticity module determination is proposed. For this purpose regular structures theory

which allows to estimate effective elasticity module for system "base – nanorod" is used.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. *Krivtsov A. M., Morozov N. F.* On Mechanical Characteristics of Nanocrystals // *Phys. Sol. St.* – 2002. – Vol. 44, № 12. – P. 2260–2265. 2. *Krivtsov A. M., Morozov N. F.* Anomalies in Mechanical Characteristics of Nanometer – Size Objects // *Doklady Physics.* – 2001. – Vol. 46, № 11. – P. 825–827. 3. *Eremeyev V. A., Ivanova E. A., Morozov N. F., Soloviev A. N.* Method of Determining the Eigenfrequencies of an Ordered System of Nanoobjects // *Tech. Phys.* – 2007. – Vol. 52, № 1. – P. 1–6. 4. *Азаренков Н. А., Береснев В. М., Погребняк А. Д., Маликов Л. В., Турбин Т. В.* Нано-материалы, нано-покрытия, нано-технологии. Учебное пособие. – Харьков, 2009. – 210 с. 5. *Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А.* Перфорированные пластины и оболочки. – М.: Наука, 1970. – 556 с. 6. *Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А.* Периодические кусочно-однородные структуры. – М.: Наука, 1992. – 288 с. 7. *Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А.* Регулярные кусочно-однородные структуры с дефектами. – М.: Физматгиз, 1994. – 335 с.

Сумский государственный университет

Поступила 01.07.2009

УДК 539.3

С. А. КАЛОЕРОВ, д-р физ.-мат. наук, Ю. С. ШИПОША

ЗАДАЧА О ВЯЗКОУПРУГОМ ИЗГИБЕ ИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ С УПРУГИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

В связи с широким применением полимерных материалов для изготовления элементов конструкций в настоящее время большое внимание уделяется исследованиям напряженно-деформированного состояния вязкоупругих многосвязных пластин. В статьях [1, 2] разработаны методы решения таких задач для изотропных пластинок с жесткими или упругими включениями, находящихся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния. Для изгиба тонких плит с неподкрепленными отверстиями аналогичный метод решения задач предложен в работах [3, 4]. В данной статье последний метод распространен на случай исследования вязкоупругого состояния плит с упругими включениями, даны решения конкретных задач.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропную плиту, ограниченную внешним контуром L_0 и контурами эллиптических отверстий L_l ($l = 1, \mathcal{L}$) с

полуосями a_l, b_l (рис. 1). В отверстия без предварительного натяжения клеены или впаяны включения из другого материала. Область, занятую плитой, обозначим через S , конечные односвязные области включений – через S^l .

Будем считать, что материал плиты обладает свойствами, описываемыми линейной теорией вязкоупругости, включения изготовлены из упругих материалов. На внешнем контуре плиты действует равномерно распределенный изгибающий момент интенсивности m , включения находятся в условиях идеального контакта с плитой. В связи с этим на контурах плиты имеют место условия [5, 6]

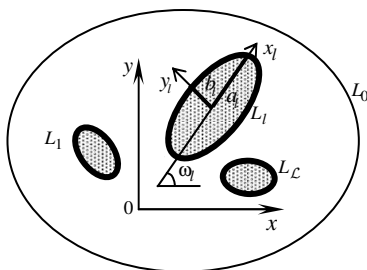


Рис. 1

$$M_n = m, \quad N_n + \frac{\partial H_{ns}}{\partial s} = 0 \quad \text{на } L_0; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w^l}{\partial x} + i \frac{\partial w^l}{\partial y},$$

$$M_n = M_n^l, \quad N_n + \frac{\partial H_{ns}}{\partial s} = N_n^l + \frac{\partial H_{ns}^l}{\partial s} \quad \text{на } L_l, \quad (1.2)$$

где M_n , $N_n + \partial H_{ns} / \partial s$ – изгибающий момент и обобщенная перерезывающая сила; w – прогиб плиты. Здесь и далее величины с индексом l вверх относятся к включению S^l , без такого индекса – к плите. В качестве частного случая, когда контур L_0 уходит в бесконечность, будем рассматривать бесконечную плиту с эллиптическими включениями. В этом случае на бесконечности заданы моменты M_x^∞ , M_y^∞ , а $H_{xy}^\infty = 0$.

2. Комплексные потенциалы задачи вязкоупругости. Если для решения задач вязкоупругости использовать метод малого параметра [3, 4] и в качестве него брать отклонение коэффициента Пуассона материала плиты ν от его мгновенного значения ν_0 , т. е.

$$\lambda = \nu - \nu_0, \quad (2.1)$$

то задачу можно приводить [2, 4] к решению последовательности задач теории изгиба плит. Если последние задачи решать с использованием комплексных потенциалов, то на основе (1.1) и (1.2) эти задачи сводятся к определению комплексных потенциалов приближений $\Phi_j(z)$, $\Psi_j(z)$ для плиты и $\Phi_j^l(z)$, $\Psi_j^l(z)$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) для включений из соответствующих граничных условий. В дифференциальной форме эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_0 \delta \Phi_j(t) - \delta \overline{\Phi_j(t)} - t \delta \overline{\Phi_j'(t)} - \delta \overline{\Psi_j(t)} &= \frac{\delta_j^0 - 1}{1 - \nu_0} \left[\delta \Phi_{j-1}(t) + \right. \\ &\left. + \delta \overline{\Phi_{j-1}(t)} + t \delta \overline{\Phi_{j-1}'(t)} + \delta \overline{\Psi_{j-1}(t)} \right] - \frac{\delta_j^0 \delta m}{1 - \nu_0} \text{ на } L_0; \quad (2.2) \\ \delta \Phi_j(t) + \delta \overline{\Phi_j(t)} + t \delta \overline{\Phi_j'(t)} + \delta \overline{\Psi_j(t)} - \frac{Q(1 - 2\nu_0)}{1 - \nu_0^2} &\left[\delta \Phi_j^l(t) + \delta \overline{\Phi_j^l(t)} + \right. \\ &\left. + t \delta \overline{\Phi_j^{l'}(t)} + \delta \overline{\Psi_j^l(t)} \right] = \frac{1 - \delta_j^0 - \delta_j^1}{1 - \nu_0^2} \left\{ \delta \Phi_{j-2}(t) + \delta \overline{\Phi_{j-2}(t)} + \right. \\ &\left. + t \delta \overline{\Phi_{j-2}'(t)} + \delta \overline{\Psi_{j-2}(t)} \right\} + \frac{1 - \delta_j^0}{1 - \nu_0^2} \left\{ 2\nu_0 \left[\delta \Phi_{j-1}(t) + \delta \overline{\Phi_{j-1}(t)} + \right. \right. \\ &\left. \left. + t \delta \overline{\Phi_{j-1}'(t)} + \delta \overline{\Psi_{j-1}(t)} \right] - 2Q \left[\delta \Phi_{j-1}^l(t) + \delta \overline{\Phi_{j-1}^l(t)} + t \delta \overline{\Phi_{j-1}^{l'}(t)} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \delta \overline{\Psi_{j-1}^l(t)} \right] \right\} - \frac{\delta_j^1}{2(1 - \nu_0^2)} \left((M_x^\infty + M_y^\infty) \delta + (M_y^\infty - M_x^\infty) \bar{\delta} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\delta_j^0}{2(1-\nu_0^2)} \left((M_x^\infty + M_y^\infty)(1-\nu_0)\delta - (M_y^\infty - M_x^\infty)(1+\nu_0)\bar{\delta} \right), \\
& \alpha_0 \delta \Phi_j(t) - \delta \overline{\Phi_j(t)} - t \delta \overline{\Phi_j'(t)} - \bar{\delta} \overline{\Psi_j(t)} - \alpha^l \delta \Phi_j^l(t) + \overline{\delta \Phi_j^l(t)} + \\
& + t \bar{\delta} \overline{\Phi_j^{l'}(t)} + \bar{\delta} \overline{\Psi_j^l(t)} = \frac{\delta_j^0 - 1}{1-\nu_0} \left\{ \delta \overline{\Phi_{j-1}(t)} + \delta \overline{\Phi_{j-1}^l(t)} + t \bar{\delta} \overline{\Phi_{j-1}^{l'}(t)} + \right. \\
& \left. + \bar{\delta} \overline{\Psi_{j-1}^l(t)} + \alpha^l \delta \overline{\Phi_{j-1}^l(t)} - \delta \overline{\Phi_{j-1}^l(t)} - t \bar{\delta} \overline{\Phi_{j-1}^{l'}(t)} - \bar{\delta} \overline{\Psi_{j-1}^l(t)} \right\} + \\
& + \frac{\delta_j^0}{2(1-\nu)_0} \left((M_x^\infty + M_y^\infty)\delta + (M_y^\infty - M_x^\infty)\bar{\delta} \right) \text{ на } L_l, \quad (2.3)
\end{aligned}$$

где $\alpha_0 = (3 + \nu_0)/(1 - \nu_0)$; $Q = K(1 - \nu^{l^2})/K^l(1 - 2\nu^l)$; $\delta = dt/ds$; K – модуль объемного расширения.

После определения указанных комплексных потенциалов приближений изгибающие моменты и перерезывающие силы в плите вычисляются по формулам [3, 4]

$$M_x + M_y = M_x^\infty + M_y^\infty - 4(1 + \nu) \operatorname{Re} \sum_{j=0} \lambda^j \Phi_j(z),$$

$$M_y - M_x + 2iH_{xy} = M_y^\infty - M_x^\infty + 2(1 - \nu) \sum_{j=0} \lambda^j \left[\bar{z} \Phi_j'(z) + \Psi_j(z) \right]; \quad (2.4)$$

$$N_x - iN_y = -4 \sum_{j=0} \lambda^j \Phi_j'(z). \quad (2.5)$$

Комплексные потенциалы приближений для плиты можно представить в виде

$$\varphi_j(z) = \varphi_{j0}(z) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \varphi_{jl}(z), \quad \psi_j(z) = \psi_{j0}(z) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \psi_{jl}(z), \quad (2.6)$$

где $\varphi_{j0}(z)$, $\psi_{j0}(z)$ и $\varphi_{jl}(z)$, $\psi_{jl}(z)$ – функции, голоморфные внутри L_0 и вне L_l , включая бесконечно удаленную точку. Поэтому первые функции можно разложить в ряды по полиномам Фабера для L_0 (или все равно, что в степенные ряды), а вторые, после конформных отображений

$$z = e^{i\omega_l} R_l (\zeta_l + m_l/\zeta_l) \quad (2.7)$$

внешности единичного круга $|\zeta_l| \geq 1$ на внешности эллипсов L_l – в ряды Лорана по отрицательным степеням ζ_l . При этом $R_l = (a_l + b_l)/2$; $m_l = (a_l - b_l)/(a_l + b_l)$; ω_l – угол между осью Ox и полуосью a_l эллипса L_l , отсчитываемый против часовой стрелки. Производные комплексных потенциалов для плиты окончательно получим в виде [2, 3]

$$\Phi_j(z) = \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{jln} \Phi_{ln}, \quad \Psi_j(z) = \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} [a_{jln} \Psi_{ln} + b_{jln} \Phi_{ln}], \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{0n} &= z^{n-1}, \quad \Psi_{0n} = 0, \quad \Phi_{ln}(z) = \frac{1}{\zeta_l^{n-1} (\zeta_l^2 - m_l)}, \\ \Psi_{ln}(z) &= -\frac{1}{\zeta_l^{n-1} (\zeta_l^2 - m_l)^3} \left\{ c_{l3} \zeta_l^3 + c_{l2} \zeta_l^2 + c_{l1} \zeta_l + \right. \\ &\quad \left. + n [d_{l4} \zeta_l^4 + c_{l3} \zeta_l^3 + d_{l2} \zeta_l^2 - c_{l1} \zeta_l + d_{l0}] \right\}; \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$c_{l2} = -2(m_l^2 + 1), \quad c_{l1} = m_l c_{l3},$$

$$d_{l4} = -m_l, \quad d_{l2} = m_l^2 - 1, \quad d_{l0} = m_l. \quad (2.10)$$

Комплексные потенциалы приближений $\Phi_j^l(z)$, $\Psi_j^l(z)$ для включения S^l , голоморфные в этой области, разложим в ряды по полиномам Фабера для этой области. После дифференцирования имеем

$$\Phi_j^l(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{jn}^l \Phi_n^l, \quad \Psi_j^l(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{jn}^l \Phi_n^l. \quad (2.11)$$

Здесь $\Phi_n^l = (z - z_{0l})^{n-1}$.

3. Определение неизвестных постоянных, входящих в комплексные потенциалы. Учитывая вид функций (2.8) и (2.11) граничные условия (2.3) запишем в виде

$$\begin{aligned} s_k \delta \Phi_j(t) - \delta \overline{\Phi_j(t)} - t \delta \overline{\Phi_j'(t)} - \delta \overline{\Psi_j(t)} + r_k^l \left[s_k^l \delta \Phi_j^l(t) + \delta \overline{\Phi_j^l(t)} + \right. \\ \left. + t \delta \overline{\Phi_j^{l'}(t)} + \delta \overline{\Psi_j^l(t)} \right] = f_{kjl} \quad (k=1, 2, 3), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned}
s_1 &= \mathfrak{a}_0, \quad r_1^l = s_1^l = 0, \quad s_2 = -1, \quad r_2^l = \frac{Q(1-2\nu_0)}{1-\nu_0^2}, \quad s_2^l = 1, \\
s_3 &= \mathfrak{a}_0, \quad r_3^q = 1, \quad s_3^q = -\mathfrak{a}^q, \\
f_{1jl} &= \frac{\delta_j^0 - 1}{1-\nu_0} \left[\delta \Phi_{j-1}(t) + \overline{\delta \Phi_{j-1}(t)} + t \overline{\delta \Phi'_{j-1}(t)} + \overline{\delta \Psi_{j-1}(t)} \right] - \frac{\delta_j^0 \delta m}{1-\nu_0}, \\
f_{2jl} &= \frac{\delta_j^0 + \delta_j^l - 1}{1-\nu_0^2} \left\{ \delta \Phi_{j-2}(t) + \overline{\delta \Phi_{j-2}(t)} + t \overline{\delta \Phi'_{j-2}(t)} + \overline{\delta \Psi_{j-2}(t)} \right\} + \\
&+ \frac{\delta_j^0 - 1}{1-\nu_0^2} \left\{ 2\nu_0 \left[\delta \Phi_{j-1}(t) + \overline{\delta \Phi_{j-1}(t)} + t \overline{\delta \Phi'_{j-1}(t)} + \overline{\delta \Psi_{j-1}(t)} \right] - \right. \\
&- 2Q \left[\delta \Phi_{j-1}^l(t) + \overline{\delta \Phi_{j-1}^l(t)} + t \overline{\delta \Phi_{j-1}^{l'}(t)} + \overline{\delta \Psi_{j-1}^l(t)} \right] \left. \right\} + \\
&+ \frac{\delta_j^l}{2(1-\nu_0^2)} \left((M_x^\infty + M_y^\infty) \delta + (M_y^\infty - M_x^\infty) \overline{\delta} \right) - \frac{\delta_j^0}{2(1-\nu_0^2)} \times \\
&\times \left((M_x^\infty + M_y^\infty)(1-\nu_0) \delta - (M_y^\infty - M_x^\infty)(1+\nu_0) \overline{\delta} \right), \\
f_{3jl} &= \frac{\delta_j^0 - 1}{1-\nu_0} \left\{ \delta \Phi_{j-1}(t) + \overline{\delta \Phi_{j-1}(t)} + t \overline{\delta \Phi'_{j-1}(t)} + \overline{\delta \Psi_{j-1}(t)} + \right. \\
&+ \mathfrak{a}^l \delta \Phi_{j-1}^l(t) - \overline{\delta \Phi_{j-1}^l(t)} - t \overline{\delta \Phi_{j-1}^{l'}(t)} - \overline{\delta \Psi_{j-1}^l(t)} \left. \right\} + \\
&+ \frac{\delta_j^0}{2(1-\nu_0)} \left((M_x^\infty + M_y^\infty) \delta + (M_y^\infty - M_x^\infty) \overline{\delta} \right). \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Исходя из граничных условий (3.1), составим функционал

$$\begin{aligned}
J &= \sum_{s=0}^{\mathcal{L}} \sum_{m=1}^{M_s} \sum_{k=1}^3 \left| s_k \delta_m \Phi_j(t_m) - \delta_m \overline{\Phi_j(t_m)} - t_m \overline{\delta_m \Phi'_j(t_m)} - \right. \\
&- \overline{\delta_m \Psi_j(t_m)} + r_k^s \left[s_k^s \delta_m \Phi_j^s(t_m) + \delta_m \overline{\Phi_j^s(t_m)} - \right. \\
&\left. \left. + t_m \overline{\delta_m \Phi_j^{s'}(t_m)} + \overline{\delta_m \Psi_j^s(t_m)} \right] - f_{kjs}(t_m) \right|^2, \tag{3.3}
\end{aligned}$$

в котором t_m – система точек, выбираемых на контуре L_0 плиты и на контурах L_l всех эллипсов. Удовлетворяя условиям минимума функционала

(3.3), для определения неизвестных постоянных получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s=0}^{\mathcal{L}} \sum_{m=1}^{M_s} \sum_{k=1}^3 \left\{ \sum_{r=0}^{\mathcal{L}} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\left(\Phi_{ikjsmln}(t_m) \Psi_{1kjsmrp}(t_m) + \Psi_{ikjsmln}(t_m) \times \right. \right. \right. \\
 & \quad \times \Phi_{1kjsmrp}(t_m) \Big) a_{jrp} + \left(\Phi_{ikjsmln}(t_m) \bar{\Phi}_{1kjsmrp}(t_m) + \Psi_{ikjsmln}(t_m) \times \right. \\
 & \quad \times \bar{\Psi}_{1kjsmrp}(t_m) \Big) \bar{a}_{jrp} + \Phi_{ikjsmln}(t_m) \Psi_{2kjsmrp}(t_m) \bar{b}_{jrp} + \\
 & \quad + \Psi_{ikjsmln}(t_m) \bar{\Psi}_{2kjsmrp}(t_m) \bar{b}_{jrp} + \delta_r^s \left(\Phi_{ikjsmln}(t_m) \Psi_{3kjsmsp}(t_m) + \right. \\
 & \quad + \Psi_{ikjsmln}(t_m) \Phi_{3kjsmsp}(t_m) \Big) c_{jp}^s + \delta_r^s \left(\Phi_{ikjsmln}(t_m) + \bar{\Phi}_{3kjsmsp}(t_m) + \right. \\
 & \quad + \Psi_{ikjsmln}(t_m) \bar{\Psi}_{3kjsmsp}(t_m) \Big) \bar{c}_{jp}^s + \delta_r^s \Phi_{ikjsmln}(t_m) \Psi_{4kjsmsp}(t_m) d_{jp}^s + \\
 & \quad \left. + \delta_r^s \Psi_{ikjsmln}(t_m) \bar{\Psi}_{4kjsmsp}(t_m) \bar{d}_{jp}^s \right] = \sum_{s=1}^{\mathcal{L}} \sum_{m=1}^{M_s} \sum_{k=1}^2 \left[\Phi_{ikjsmln}(t_m) \times \right. \\
 & \quad \times \bar{f}_{kjs}(t_m) + \Psi_{ikjsmln}(t_m) f_{kjs}(t_m) \Big] \quad (i = \overline{1, 4}, l = \overline{1, \mathcal{L}}, n = 1, 2, \dots), \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 & \Phi_{1kjsmln}(t_m) = s_k \delta_m \Phi_{ln}(t_m), \quad \Phi_{2kjsmln}(t_m) = 0, \\
 & \Phi_{3kjsmln}(t_m) = r_k^s s_k^s \delta_m \delta_l^s \Phi_{ln}^s(t_m), \quad \Phi_{4kjsmln}(t_m) = 0; \\
 & \Psi_{1kjsmln}(t_m) = -\bar{\delta}_m \Phi_{ln}(t_m) - t_m \bar{\delta}_m \Phi'_{ln}(t_m) - \delta_m \Psi_{ln}(t_m), \\
 & \Psi_{2kjsmln}(t_m) = -\delta_m \Psi_{ln}(t_m), \\
 & \Psi_{3kjsmln}(t_m) = \delta_l^s r_k^s \left[\bar{\delta}_m \Phi_n^l(t_m) + t_m \bar{\delta}_m \Phi_n^l(t_m) \right], \\
 & \Psi_{4kjsmln}(t_m) = \delta_l^s r_k^s \delta_m \Phi_n^l(t_m). \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

После решения системы (3.5) функции $\Phi_j(z)$, $\Psi_j(z)$, $\Phi_j^l(z)$, $\Psi_j^l(z)$ станут известными, что позволит заменить степени λ^j ($j \geq 1$) значениями функции $T_j(t)$ [2, 7]:

$$\lambda^j = T_j(t) = \frac{v_0^j \delta_*^j}{\beta^j} \left[1 - e^{-\beta \tau} \sum_{r=0}^{j-1} \frac{(\beta \tau)^r}{r!} \right], \quad (3.6)$$

где $\tau = [(1-\alpha)t]^{1-\alpha}$; α , β , δ_* – реологические постоянные материала.

3. Численные результаты. Были проведены численные исследования распределения изгибающих моментов в бесконечной плите с упругими включениями в зависимости от геометрических и упругих характеристик включений и времени приложения нагрузки. Плита считалась изготовленной из алюминия, для которого $\nu_0 = 0,25$, $\alpha = 0,5$, $\beta = 6,65 \cdot 10^{-3}$, $\delta_* = 6,15 \cdot 10^{-3}$ [8]; для включений принималось $\nu^l = 1/3$. При проведении

расчетов варьировалось отношение K^l / K модулей объемной деформации материалов упругих включений и самой плиты. Заметим, что при заданном $\lambda_K = K^l / K$ легко найти и отношение $\frac{E^l}{E} = \frac{(1-2\nu^l)K^l}{(1-2\nu_0)K}$, где E^l ,

E – модули Юнга материалов включений и плиты соответственно. В данном случае (когда $\nu_0 = 0,25$, $\nu^l = 1/3$) это отношение $\frac{E^l}{E} = \frac{2K^l}{3K}$. В рас-

четах количество приближений j по степеням малого параметра λ увеличивалось до тех пор, пока последующее приближение изменяло значения максимальных моментов предыдущего приближения более чем на 0,01%. Для этого необходимо было для различных времен оставлять степени малого параметра λ от 6 до 10. Для удовлетворения граничным условиям с достаточно высокой степенью точности в зависимости от геометрических параметров отверстий в рядах (2.8), (2.11) оставлялось от 5 до 25 членов и бралось от 100 до 250 “коллокационных” точек t_m , в которых вычислялась невязка функционала (3.3).

В таблице при действии на бесконечности моментов $M_y^\infty = m$ для плиты с двумя однородными ($K^1 = K^2$) круговыми включениями (рис. 2) радиуса R с точностью до множителя m даны значения изгибающих моментов M_s в некоторых точках плиты вблизи контура левого включения для различных значений отношения c/R расстояния между включениями к их радиусу и отношения λ_K объемных модулей деформаций материалов включений и плиты. Результаты для λ_K , равных 0 и ∞ , относятся к плите с абсолютно мягкими включениями (отверстиями) и абсолютно жесткими включениями. Результаты даны для двух значений времени отсчета: $t = 0$ час. и $t = 900$ час. Это связано с тем, что, как показали проведенные расчеты, практически для всех рассмотренных случаев уже через 700 – 800 час. после

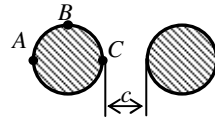


Рис. 2

Точки	λ_K	Время, t час.	c/R						
			∞	10	2	1	0,5	0,1	
A	0	0	1,7690	1,7800	1,8460	1,8960	1,9470	2,0390	
		900	1,8510	1,8620	1,9320	1,9840	2,0400	2,1460	
	0,1	0	1,6480	1,6570	1,7110	1,7520	1,7930	1,8590	
		900	1,3100	1,3130	1,3310	1,3420	1,3510	1,3580	
	10	0	0,1339	0,1323	0,1216	0,1140	0,1070	0,0965	
		900	-1,2650	-1,2570	-1,2450	-1,2620	-1,2920	-1,3660	
	∞	0	-0,4667	-0,4612	-0,4466	-0,4490	-0,4577	-0,4824	
		900	-1,5300	-1,5180	-1,4930	-1,5100	-1,5450	-1,6310	
	B	0	0	0,2308	0,2285	0,2187	0,2187	0,2231	0,2338
			900	0,1490	0,1473	0,1404	0,1405	0,1435	0,1504
		0,1	0	0,1553	0,1533	0,1469	0,1495	0,1570	0,1730
			900	-0,1048	-0,1045	-0,0997	-0,0942	-0,0884	-0,0822
10		0	0,3724	0,3680	0,3438	0,3316	0,3234	0,3148	
		900	1,9210	1,8880	1,7370	1,6920	1,6750	1,6720	
∞		0	0,8667	0,8510	0,7795	0,7585	0,7506	0,7489	
		900	2,1800	2,1390	1,9580	1,9090	1,8960	1,9200	
C		0	0	1,7690	1,7850	2,0020	2,3400	2,9460	5,8140
			900	1,8510	1,8670	2,0890	2,4360	3,0600	6,0460
		10^{-2}	0	1,7560	1,7710	1,9830	2,3110	2,8920	5,5160
			900	1,7510	1,7670	1,9760	2,2650	2,7570	4,6280
	0,1	0	1,6480	1,6610	1,8320	2,0860	2,5050	3,9410	
		900	1,3100	1,3140	1,3630	1,4220	1,4840	1,4810	
	0,5	0	1,3310	1,3370	1,4110	1,5100	1,6450	1,9050	
		900	0,6156	0,6110	0,5569	0,4920	0,4181	0,3365	
	2	0	0,8273	0,8253	0,8030	0,7768	0,7472	0,7109	
		900	-0,3744	-0,3769	-0,4049	-0,4559	-0,5627	-0,9635	
	10	0	0,1339	0,1319	0,1104	0,0815	0,0370	-0,0952	
		900	-1,2650	-1,2510	-1,1060	-1,0650	-1,2620	-2,6480	
	10^2	0	-0,3777	-0,3706	-0,3001	-0,2674	-0,3157	-0,7130	
		900	-1,5050	-1,4840	-1,2740	-1,2040	-1,4300	-3,1150	
	∞	0	-0,4667	-0,4573	-0,3638	-0,3179	-0,3697	-0,8344	
		900	-1,5300	-1,5080	-1,2910	-1,2190	-1,4480	-3,1660	

приложения нагрузки моменты в плите с течением времени практически не изменяются, т.е. устанавливается стационарное состояние.

Из таблицы видно, что при сближении включений друг с другом происходит существенное увеличение значений изгибающих моментов в зоне между включениями как в начальном, так и в стационарном состоянии. Чем

ближе включения друг к другу, тем больше в указанной зоне изменяются моменты при переходе в стационарное состояние. Так, для случая $\lambda_K = 0,1$ значения момента M_s в точке C при переходе в стационарное состояние для $c/R = 1$ изменяются на 46%, а при $c/R = 0,1$ – более 160%. Значительно влияние и жесткости включений: чем жестче материал включения (больше параметр λ_K), тем значительнее изменения значений моментов при переходе в стационарное состояние. Так, для $c/R = 0,1$ при переходе в стационарное состояние моменты в точке C для $\lambda_K = 10^{-2}$ изменяются на 16%, а при $\lambda_K = 10^2$ – изменяются более 4 раз.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано підхід визначення в'язкопружного стану багато-зв'язної ізотропної плити з пружними включеннями, який використовує методи малого параметру, комплексних потенціалів і найменших квадратів. Надано рішення задачі для плити з кінченим числом включень. Описано результати чисельних досліджень для плити з двома включеннями. Досліджено вплив відстані між включеннями, пружних властивостей плити і включень на значення моментів згину та ступінь їх зміни при переході в стаціонарний стан.

SUMMARY. The approach of definition the viscoelastic state of a multiconnected isotropic plate with elastic inclusions, using the methods of small parameter, the complex potentials and the least squares are recorded. The solution for plates with a finite number of elliptic inclusions are given. The results of numerical investigations for the plate with two inclusions are described. The influence of the distance between the inclusions, the elastic properties of materials plate and inclusions on the values of bending moments and the degree of change in the transition to steady state are conducted.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. Калоеров С. А., Мироненко А. Б. Исследование вязкоупругого состояния пластинки с жесткими эллиптическими или линейными включениями // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2005. – Вип. 1', ч. 1. – С. 71–78. 2. Калоеров С. А., Мироненко А. Б. Исследование вязкоупругого состояния пластинки с упругими эллиптическими или линейными включениями // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 2. – С. 88–98. 3. Калоеров С. А., Шипова Ю. С. Вязкоупругий изгиб многосвязных изотропных плит // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2007. – Вип. 2. – С. 58–65. 4. Калоеров С. А., Баева А. И., Шипова Ю. С. Определение вязкоупругого состояния многосвязных изотропных плит // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 80–95. 5. Фридман М. М. Изгиб тонкой изотропной прямоугольной плиты с впадной круглой изотропной шайбой из другого материала // Прикладная математика и механика. – 1950. – Т. 14, № 4. – С. 429–432. 6. Комодамианский А. С., Иванов Г. М. Изгиб тонких многосвязных плит. – Донецк, 1973. – 264 с. 7. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием // Прикладная математика и механика. – 1948. – Т. 12, № 1. – С. 53–62. 8. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.

Донецкий национальный университет

Поступила 10.06.2009

УДК 539.3

О гамильтоновом формализме в теории типа Тимошенко изгиба пластин / М. О. Шул ьга // Теорет. и прикладная механика. – 2009. Вып. 45 – С. 3–7.

Система уравнений типа Тимошенко изгиба пластин впервые представлена в операторной гамильтоновой форме шести уравнений по пространственной координате. Сформулирован вариационный принцип для полученной системы.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 539.3

Математические модели и методы термомеханики стеклянных тел вращения при тепловом нагружении / А. Р. Гачкевич, Е. М. Ирза, В. Я. Бойчук // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 8–18.

Предложена модель описания термомеханического поведения стеклянных тел вращения при различных тепловых режимах нагрева (охлаждения) и численную методику решения предложенных задач.

Ил. 4. Библиогр.: 6 назв.

УДК 539.3

Моделирование термомеханического поведения слоистых тел с учетом эффектов излучения и поглощения тепловой энергии / Р. Ф. Терлецкий, О. П. Турий // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 19–31.

Предложены постановки контактных задач теплопереноса и термоупругости в облучаемых слоистых телах с составляющими различной прозрачности (в частности, при наличии тонких промежуточных слоев) с учетом эффектов излучения на их поверхностях, в частично прозрачных областях и границах раздела слоев. Для описания распространения теплового излучения использованы соотношения феноменологической теории излучения для частично прозрачных и непрозрачных тел. При формулировании тепловых граничных и контактных условий рассмотрены потоки, обусловленные излучением и поглощением тепловой энергии. Получены условия идеального теплового контакта при учете эффектов излучения. В качестве примера решена задача для двухслойной пластины со слоями различной прозрачности, соединенными через тонкий промежуточный слой.

Библиогр.: 10 назв.

УДК 539.3

Термоупругость контактной пары при наличии шероховатости на локальном участке сопряженных поверхностей / Р. М. Мартыняк, К. А. Чу ма к // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 32–38.

Осуществлена постановка плоской контактной задачи термоупругости для изотропных полуплоскостей, которые находятся под действием однородных сжимающих усилий и теплового потока, заданных на бесконечности. Граница одного из тел является шероховатой на локальном участке, вследствие чего на нем между телами возникает контактное термосопротивление, обратно пропорциональное контактному давлению. Задача сведена к нелинейному сингулярному интегро-дифференциальному уравнению относительно скачка температуры между поверхностями тел на участке с шероховатостью, для решения которой применен метод последовательных приближений. Проведен численный анализ контактного давления в зависимости от величины приложенных усилий и теплового потока, направленного как от материала с меньшей термической дистортивностью к материалу с большей дистортивностью, так и в обратном направлении.

Ил. 2. Библиогр.: 14 назв.

УДК 539.376

К задаче идентификации ядер наследственности в нелинейной теории вязкоупругости / В. П. Голуб, Ю. М. Кобзарь, В. С. Рагулина // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 39–49.

Изложены аналитические и экспериментальные процедуры идентификации ядер наследственности в нелинейной теории вязкоупругости с независимой от времени нелинейностью. Процедурами предусмотрено обоснование вида нелинейности определяющих уравнений теории, установление физического смысла ядер нелинейной наследственности и определение дискретных значений ядер наследственности. Показано, что ядра нелинейной ползучести и релаксации являются мерами скоростей соответствующих процессов. Приведено экспериментальное обоснование процедур идентификации ядер нелинейной наследственности на примере нелинейной ползучести фторопласта-4 и стеклопластика ТС-8/3-250.

Ил. 6. Библиогр.: 8 назв.

УДК 539.3

Высокотемпературная неупругая деформация алюминиевого сплава Д16 при одноосном растяжении: теория и эксперимент / М. В. Баня с, И. К. Сенченков // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 50–57.

На основе унифицированной модели течения Боднера-Партома исследу-

дуются высокотемпературная деформация алюминиевого сплава Д16 при одноосном нагружении. Для определения параметров модели используются диаграммы нагружения при постоянных скоростях деформации и кривым ползучести. Для проверки качества конкретизированной модели рассчитывались диаграммы мягкого и жесткого растяжения в пластической области и диаграммы медленного жесткого растяжения при повышенных температурах. Получено удовлетворительное согласование экспериментальных и расчетных данных.

Ил. 4. Табл. 2. Библиогр.: 8 назв.

УДК 539.3

Численное моделирование импульсного термомеханического нагружения полупространства из физически нелинейного материала / О.П.Червинко, И.К.Сенченков, Е.В.Бойчук // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 58–62.

В осесимметричной постановке рассматривается динамическая задача термомеханики неупругого полупространства под действием нагрузки наносекундными импульсами теплового потока и давления. Механическое поведение материала описывается моделью течения Боднера-Партома. Численно исследовано волновые процессы и остаточное напряженно-деформированное состояние.

Ил. 4. Библиогр.: 12 назв.

УДК 539.3

Задача термоэластопругости для пьезокерамического тела с плоской трещиной при антисимметричном тепловом воздействии / В.С.Кириллюк // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. С. 63–70.

Установлено соответствие между решениями задач термоэластопругости и термоупругости для бесконечных тел с теплоизолированной плоской трещиной произвольной формы в плоскости изотропии для случая действия теплового потока. Это позволяет сразу, не решая задачу термоэластопругости, найти коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) из соответствующих выражений КИН для изотропного тела, предварительно заменив в них некоторые постоянные специально вычисленными величинами, зависящими от упругих, электрических и тепловых свойств материала. Как частный случай из полученных выражений следуют результаты для упругого трансверсально-изотропного материала. Численными исследованиями установлено влияние связанности силовых и электрических полей на значения КИН.

Ил. 1. Библиогр.: 10 назв.

УДК 539.3

О развитии трещины сдвига в композите с линейновязкоупругими фазами / М. Ф. Селиванов, Ю. А. Черноиван, А. В. Рудис // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 71–78.

Решена задача об определении закономерностей развития трещины поперечного сдвига в композитном материале, компоненты которого проявляют вязкоупругие свойства. Процесс развития трещины разделён на три последовательных этапа: инкубационный, переходной и основной. Для каждого из периодов на основе данных об объёмном содержании компонентов и соотношении между их вязкоупругими характеристиками определены уравнения относительно длины трещины.

На основе результатов теоретических исследований поставлена и численно решена задача о построении кинетических кривых роста трещины для набора значений соотношений между параметрами компонентов.

Ил. 2. Библиогр.: 12 назв.

УДК 539.3

Вязкоупругое состояние анизотропной пластинки с упругими включениями / С. А. Калоеров, М. А. Коломиец // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 79–89.

Методом малого параметра задача вязкоупругости для многосвязной анизотропной пластинки с упругими включениями сведена к рекуррентной последовательности задач теории упругости. Последние задачи решены с использованием обобщенных комплексных потенциалов. Определение неизвестных постоянных, входящих в функции, методом наименьших квадратов сведено к решению последовательности систем линейных алгебраических уравнений. Описаны результаты численных исследований для пластинки с двумя круговыми включениями. Показано существенное влияние на значения напряжений времени приложения нагрузки, расстояния между включениями, материалов пластинки и включений.

Ил. 2. Табл. 3. Библиогр.: 11 назв.

УДК 539.3

Упругое равновесие многосвязных цилиндрических тел / Л. А. Фильштинский, Д. В. Кушнир // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 90–99.

Решена задача о равновесии упругого многосвязного тела, находящегося под действием нормального давления вдоль граничной поверхности. Решение построено на основе известных однородных решений для слоя с граничными условиями типа диафрагмы. Получена матрица Ф-решений, позволяющая записать разрешающую систему сингулярных интегральных

уравнений. Приведены результаты расчетов для толстостенного цилиндра и слоя с двумя и тремя полостями.

Ил. 6. Библиогр.: 12 назв.

УДК 539.3

Задача о сжатии двух пьезокерамических полупространств, одно из которых содержит выемку под внутренним давлением / О. И. Левчук // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 100–105.

Решена задача о сжатии двух пьезокерамических полупространств, одно из которых содержит пологую осесимметричную выемку специальной формы. Предполагается, что плоскость контактного взаимодействия является плоскостью изотропии пьезокерамических материалов. Получены выражения для размера зазора между телами, его радиуса, найдено значение давления при полном закрытии зазора.

Ил. 1. Библиогр.: 9 назв.

УДК 539.3

Устойчивость поперечно гофрированных цилиндрических оболочек при равномерном поверхностном давлении / Н. П. Семенюк, Н. Б. Жукова, И. Ю. Бабич // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 106–113.

Приведена методика решения задачи об устойчивости волнообразных цилиндрических оболочек при равномерном поверхностном давлении. Применяется строгое описание геометрии поверхности, учитывается нелинейный характер докритического деформирования. Критические нагрузки определяются путем решения неоднородной краевой задачи с неизвестной амплитудой возмущения по ортогональной форме. На примерах расчета показано, что при надлежащем выборе параметров волнистости можно существенно повысить устойчивость оболочек.

Ил. 5. Библиогр.: 9 назв.

УДК 539.3

Активное демпфирование резонансных изгибных колебаний гибкой шарнирно опертой вязкоупругой круглой пластины при помощи пьезоактуаторов / В. Г. Карнаухов, Т. В. Карнаухова, В. Ф. Зражевская // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 114–123.

Методом Бубнова-Галеркина решена задача о вынужденных резонансных изгибных колебаниях и диссипативном разогреве шарнирно опертой гибкой круглой пассивной вязкоупругой пластины с пьезоэлектрическими актуаторами. Исследовано влияние геометрической нелинейности и темпе-

ратуры диссипативного разогрева на эффективность активного демпфирования резонансных колебаний такой пластины при помощи пьезоэлектрических актуаторов.

Библиогр. 11 назв.

УДК 539.3

Резонансные изгибные колебания гибкой шарнирно опертой вязкоупругой круглой пластины с пьезоэлектрическими сенсорами / В.Г.Карнаухов, Т.В.Карнаухова // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 124–130.

Методом Бубнова-Галеркина решена задача о вынужденных резонансных изгибных колебаниях и диссипативном разогреве шарнирно опертой гибкой круглой пассивной вязкоупругой пластины с пьезоэлектрическими сенсорами. Исследовано влияние геометрической нелинейности и диссипативного разогрева на эффективность работы сенсора.

Библиогр. 11 назв.

УДК 539.3

Метод приближенного решения задачи о колебаниях балки с пьезоактивными слоями при механическом или электрическом нагружении / Я.А.Жук // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 131–138.

Решена задача о вынужденных колебаниях шарнирно опертой трехслойной балки, средний слой которой изготовлен из электрически пассивного, а внешние из пьезоактивных материалов. Задача решается в двух постановках: приближенной моногармонической и полной. Изучаются особенности влияния физической и геометрической нелинейностей на реакцию конструкции, определяются точность и границы применимости приближенного подхода.

Ил. 6. Библиогр.: 7 назв.

УДК 539.3:534.1

Действительные и мнимые ветви дисперсионных спектров электроупругих волн в слое АТ-среза пьезокристалла кварца / В.И.Сторожев, А.В.Бай // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 139–145.

Представлены результаты исследований трансформации структуры действительных и мнимых ветвей дисперсионных спектров электроупругих волн, распространяющихся вдоль варьируемого ряда направлений в плоскости пластины АТ-среза пьезокристалла кварца. Дана характеристика

уровня электромеханической связи в нормальных волнах с направлением распространения, не совпадающим с упругоэквивалентным.

Ил. 6. Библиогр.: 9 назв.

УДК 539.3:534.1

Распространение волн в трехслойных пластинах со свободными от напряжений плоскими гранями / Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 146–153.

Решена задача об установившихся колебаниях трехслойной пластины с жестко сцепленными слоями в случае незагруженных внешних граней. Получены однородные решения задачи, исследованы дисперсионные спектры сдвиговых и продольных волн, фазовые и групповые скорости, их частоты запираания.

Ил. 5. Табл. 1. Библиогр.: 12 назв.

УДК 539.3

Термонапряженное состояние вала при нестационарных условиях фрикционного контакта с обоймой через тонкий слой / А. И. Яцкив, Р. Н. Швец, Б. Я. Бобык // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 154–161.

Для трибологического соединения, составленного из цилиндра, имеющего поверхностную неоднородность в виде тонкого приповерхностного слоя, и жесткой обоймы, записано неклассические нестационарные условия контакта с тепловыделением от трения и найдено решения соответствующей связанной неклассической контактной задачи термоупругости. Проанализировано влияние приведенных параметров цилиндра и слоя, а также угловой скорости вращения на термонапряженное состояние цилиндра, в частности на термоупругую неустойчивость контакта.

Ил. 6. Библиогр.: 11 назв.

УДК 539.3

Математическое моделирование эксперимента по определению модуля упругости наностержня / Л. А. Фильштинский // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 162–168.

Предлагается математическое сопровождение эксперимента по определению зависимости модуля упругости наностержня от его геометрических параметров. Используется разработанная автором структурная теория волокнистого композитного материала. Симбиоз аналитического алгоритма и эксперимента даст возможность получить искомый результат.

Ил. 1. Библиогр.: 7 назв.

УДК 539.3

Задача о вязкоупругом изгибе изотропной плиты с упругими включениями / С.А.Калоеров, Ю.С.Шипоша // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 169–177.

Предложен подход определения вязкоупругого состояния многосвязной изотропной плиты с упругими включениями, использующий методы малого параметра, комплексных потенциалов и наименьших квадратов. Дано решение задачи для плиты с конечным числом эллиптических включений. Описаны результаты численных исследований для плиты с двумя включениями. Изучено влияние расстояния между включениями, упругих свойств материалов плиты и включений на значения изгибающих моментов и степень их изменения при переходе в стационарное состояние.

Ил. 2. Табл. 1. Библиогр.: 8 назв.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Шульга М. О.</i> О гамильтоновом формализме в теории типа Тимошенко изгиба пластин.	3
<i>Гачкевич А. Р., Ирза Е. М., Бойчук В. Я.</i> Математические модели и методы термомеханики стеклянных тел вращения при тепловом нагружении.	8
<i>Терлецкий Р. Ф., Турий О. П.</i> Моделирование термомеханического поведения слоистых тел с учетом эффектов излучения и поглощения тепловой энергии.	19
<i>Мартыняк Р. М., Чумак К. А.</i> Термоупругость контактной пары при наличии шероховатости на локальном участке сопряженных поверхностей.	32
<i>Голуб В. П., Кобзарь Ю. М., Рагулина В. С.</i> К задаче идентификации ядер наследственности в нелинейной теории вязкоупругости.	39
<i>Баняс М. В., Сенченков И. К.</i> Высокотемпературная неупругая деформация алюминиевого сплава Д16 при одноосном растяжении: теория и эксперимент.	50
<i>Червинко О. П., Сенченков И. К., Бойчук Е. В.</i> Численное моделирование импульсного термомеханического нагружения полупространства из физически нелинейного материала.	58
<i>Кирилук В. С.</i> Задача термоэлектроупругости для пьезокерамического тела с плоской трещиной при антисимметричном тепловом воздействии.	63
<i>Селиванов М. Ф., Черноиван Ю. А., Рудис А. В.</i> О развитии трещины сдвига в композите с линейновязкоупругими фазами.	71
<i>Калоеров С. А., Коломиец М. А.</i> Вязкоупругое состояние анизотропной пластинки с упругими включениями.	79
<i>Фильштинский Л. А., Кушнир Д. В.</i> Упругое равновесие много-связных цилиндрических тел.	90
<i>Левчук О. И.</i> Задача о сжатии двух пьезокерамических полупространств, одно из которых содержит выемку под внутренним давлением.	100
<i>Семенюк Н. П., Жукова Н. Б., Бабич И. Ю.</i> Устойчивость поперечно гофрированных цилиндрических оболочек при равномерном поверхностном давлении.	106
<i>Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В., Зражевская В. Ф.</i> Активное демпфирование резонансных изгибных колебаний гибкой шарнирно опертой вязкоупругой круглой пластины при помощи пьезоактуаторов.	114

<i>Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В.</i> Резонансные изгибные колебания гибкой шарнирно опертой вязкоупругой круглой пластины с пьезоэлектрическими сенсорами.	124
<i>Жук Я. А.</i> Метод приближенного решения задачи о колебаниях балки с пьезоактивными слоями при механическом или электрическом нагружении.	131
<i>Сторожев В. И., Бай А. В.</i> Действительные и мнимые ветви дисперсионных спектров электроупругих волн в слое АТ-среза пьезокристалла кварца.	139
<i>Алтухов Е. В., Фоменко М. В.</i> Распространение волн в трехслойных пластинах со свободными от напряжений плоскими гранями.	146
<i>Яцкив А. И., Швец Р. Н., Бобык Б. Я.</i> Термонапряженное состояние вала при нестационарных условиях фрикционного контакта с обоймой через тонкий слой.	154
<i>Фильштинский Л. А.</i> Математическое моделирование эксперимента по определению модуля упругости наностержня.	162
<i>Калоеров С. А., Шипоша Ю. С.</i> Задача о вязкоупругом изгибе изотропной плиты с упругими включениями.	169
<i>Рефераты.</i>	178

ЗМІСТ

<i>Шульга М. О.</i> Про гамільтонів формалізм в теорії типу Тимошенка згинання пластин.	3
<i>Гачкевич О. Р., Ірза Є. М., Бойчук В. Я.</i> Математичні моделі та методи термомеханіки скляних тіл обертання при тепловому навантаженні.	8
<i>Терлецький Р. Ф., Турій О. П.</i> Моделювання термомеханічної поведінки шаруватих тіл за врахування ефектів випромінення та поглинання теплової енергії.	19
<i>Мартиняк Р. М., Чумак К. А.</i> Термопружність контактної пари за наявності шорсткості на локальній ділянці спряжених поверхонь.	32
<i>Голуб В. П., Кобзар Ю. М., Рагуліна В. С.</i> До задачі ідентифікації ядер спадковості в нелінійній теорії вязкопружності.	39
<i>Баняк М. В., Сенченков І. К.</i> Високотемпературна непружна деформація алюмінієвого сплаву Д16 при одновісному розтягу: теорія та експеримент.	50
<i>Червінко О. П., Сенченков І. К., Бойчук О. В.</i> Чисельне моделювання імпульсного термомеханічного навантаження півпростору із фізично нелінійного матеріалу.	58
<i>Кирилюк В. С.</i> Задача термоелектропружності для п'єзокерамічного тіла з плоскою тріщиною при антисиметричному тепловому впливі.	63
<i>Селіванов М. Ф., Черноіван Ю. О., Рудіс О. В.</i> Про розвиток тріщини зсуву в композиті з лінійно в'язкопружними фазами.	71
<i>Калоєров С. О., Коломиєць М. О.</i> В'язкопружний стан анізотропної пластинки с пружними включеннями.	79
<i>Фильштинський Л. А., Кушнір Д. В.</i> Пружна рівновага багатозв'язних циліндричних тіл.	90
<i>Левчук О. І.</i> Задача про стискання двох п'єзокерамічних півпросторів, одне з яких містить виїмку під внутрішнім тиском.	100
<i>Семенюк М. П., Жукова Н. Б., Бабич І. Ю.</i> Стійкість поперечно гофрованих циліндричних оболонок при рівномірному поверхневому тиску.	106
<i>Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В., Зражевська В. Ф.</i> Активне демпфування резонансних згинальних коливань гнучкої шарнірно обпертої в'язкопружної круглої пластини за допомогою п'єзоактуаторів.	114
<i>Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В., Зражевська В. Ф.</i> Резонансні згинальні коливання гнучкої шарнірно обпертої в'язкопружної круглої пластини з п'єзоелектричними сенсорами.	124

Жук Я. О. Метод наближеного розв'язування задачі про коливання балки з п'єзоактивними шарами при механічному або електричному навантаженні.	131
Сторожев В. І., Бай О. В. Дійсні та уявні гілки дисперсійних спектрів електропружних хвиль у шарі АТ-зрізу п'єзокристала кварца.	139
Алтухов Є. В., Фоменко М. В. Поширення хвиль в тришарових пластинах з вільними від напружень плоскими гранями.	146
Яцків О. І., Швець Р. М., Бобик Б. Я. Термонапружений стан валу за нестационарних умов фрикційного контакту з обоймою через тонкий шар.	154
Фильштинський Л. А. Математичне моделювання експерименту з визначення модуля пружності нанострижня.	162
Калоєров С. О., Шипоша Ю. С. Задача о в'язкопружном згині ізотропної плити з пружними включеннями.	169
Реферати.	178

CONTENT

<i>Shulga M. O.</i> Hamilton formalism in the Tymoshenko type theory of plates bending.	3
<i>Hachkevych O. R., Irza Y. M., Boichuk V. Ya.</i> Mathematical models and thermomechanical methods of glass solids of rotation under thermal loading.	8
<i>Terletskii R. F., Turiy O. P.</i> Thermomechanical behavior of layered solids with consideration of radiant energy exchange.	19
<i>Martynyak R. M., Chumak K. A.</i> Thermoelasticity of contact pair with roughness on local area of mated surfaces.	32
<i>Golub V. P., Kobzar' Yu. M., Ragulina V. S.</i> On the identification problem of creep heredity kernels in the nonlinear theory of viscoelasticity.	39
<i>Banyas M. V., Senchenkov I. K.</i> High temperature inelastic deformation of D16 aluminum alloy under uniaxial tension: theory and experiment.	50
<i>Chervinko O. P., Senchenkov I. K., Boychuk O. V.</i> Numerical simulation of pulse thermomechanical loading of the physically nonlinear half-space.	58
<i>Kirilyuk V. S.</i> Problem of thermoelectroelasticity for a piezoelectric body with a plane crack under the antisymmetric thermal influence.	63
<i>Selivanov M. F., Chornoivan Y. O., Rudis A. V.</i> On the shear crack evolution in the composite of linear viscoelastic phases.	71
<i>Kaloerov S. A., Kolomyiets M. O.</i> The viscoelastic state of anisotropic plate with elastic inclusions.	79
<i>Filshtinskii L. A., Kushnir D. V.</i> Elastic equilibrium of multi-connected cylindrical bodies.	90
<i>Levchuk O. I.</i> Problem on the compression of two piezoelectric half-spaces one of it consists of the groove under inner pressure.	100
<i>Semenyuk N. P., Zhukova N. B., Babich I. Yu.</i> Stability of cross corrugated cylindrical shells under uniform surface pressure.	106
<i>Karnaukhov V. G., Karnaukhova T. V., Zrazsevskaja V. F.</i> Active damping of the resonant bending vibrations of a flexible viscoelastic simply supported circular plate by piezoactuators.	114
<i>Karnaukhov V. G., Karnaukhova T. V., Zrazsevskaja V. F.</i> The resonant bending vibrations of a flexible viscoelastic simply supported circular plate with piezoelectric sensors.	124
<i>Zhuk Ya. A.</i> Approximate technique for the solution of the vibration problem for the beam containing piezoactive layers.	131

<i>Storozhev V. I., Baj A. V.</i> Real and imaginary branches of spectra of electroelastic waves in AT-cut quartz plate.	139
<i>Altukhov E. V., Fomenko M. V.</i> Wave propagation in the three-layer plates with stress-free planar faces.	146
<i>Yatskiv A. I., Shvets R. M., Bobyk B. Ya.</i> Thermoelastic state in a long cylinder under nonstationary conditions of friction contact with rigid clip through a thin layer.	154
<i>Fil'shtinskii L. A.</i> Mathematical modelling of experiment for nanorod elasticity module determination.	162
<i>Kaloerov S. A., Shiposha J. S.</i> The problem about viscoelastic bend of an isotropic plate with elastic inclusions.	169
<i>Abstracts.</i>	178