

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И ПРИКЛАДНАЯ
МЕХАНИКА**

Научно-технический
сборник

Основан в 1970 г.

В Ы П У С К 46

Донецк
2009

УДК 539.3:539.374:539.376:534.1:519.6:537.226.86

В сборнике представлены новые результаты теоретических и экспериментальных исследований в области механики деформируемого твердого тела. Приведены решения пространственных и плоских задач теории упругости, термо-, электро-, магнито- и вязкоупругости, концентрации напряжений в упругих телах, пластинах и оболочках с отверстиями и трещинами, динамических задач, задач о колебаниях упругих тел. Рассмотрено напряженное, термонапряженное, электро-, магнито- и вязкоупругое состояние в изотропных, анизотропных, композиционных телах.

Для научных работников, преподавателей вузов и специалистов.

У збірнику подано нові результати теоретичних та експериментальних досліджень з механіки деформівного твердого тіла. Наведено розв'язання просторових і плоских задач теорії пружності, термо-, електро-, магніто- та в'язкопружності, концентрації напружень у пружних тілах, пластинах та оболонках з отворами і тріщинами, динамічних задач, задач про коливання пружних тіл. Розглянуто напружений, термонапружений, електро-, магніто- і в'язкопружний стани в ізотропних, анізотропних, композиційних тілах.

Для науковців, викладачів вузів і фахівців.

In the volume the new results of theoretical and experimental investigations in the field of the deformable solid mechanics are published. The solutions for space and plane problems of elasticity, thermo-, electro-, magneto- and viscoelasticity, stress concentration in elastic solids, plates and shells with holes and cracks, dynamic problems, problems of elastic solids oscillations are given. Strained, thermo-, electro-, magneto- and viscoelastic states of isotropic, anisotropic, composite solids are considered.

For researchers, teachers of higher education establishments and specialists.

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

В. П. Шевченко

ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С. А. Калоеров

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

*А. С. Гольцев, А. Н. Гузь, Г. С. Кит, Ф. В. Недопекин,
В. И. Сторожев, В. А. Шалдырван*

МЕЖДУНАРОДНЫЙ РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

*В. М. Александров (Россия), Д. И. Бардзокас (Греция), А. О. Ватулян (Россия),
И. А. Гузь (Шотландия), В. В. Зоуля (Мексика)*

Адрес редакции: Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24,
Донецк-55, 83055

Тел. (062) 302-92-71

E-mail: theoretam@matfak.dongu.donetsk.ua

Д. В. БАБИЧ, д-р техн. наук

О ВЛИЯНИИ ГЕОМЕТРИИ ПЛОСКИХ МИКРПОВРЕЖДЕНИЙ МАТЕРИАЛА НА ЕГО ДЕФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА

Многие конструкционные материалы имеют различные механические характеристики при растяжении и сжатии. Одному из феноменологических вариантов разномодульной теории упругости посвящена монография [1], основное содержание которой составляют методы решения задач упругости для различных механических объектов из разномодульных материалов. Корректные уравнения состояния таких материалов отсутствуют в связи с невыясненной физической природой их разносопротивляемости растяжению и сжатию. Основания указанной разномодульной теории упругости носят частный характер и безотносительны к причинам указанного явления. Ниже рассматривается одна из возможных причин разномодульности достаточно широкого класса материалов, связанная с наличием технологических либо эксплуатационных повреждений типа трещин отрыва.

Существуют различные подходы к учету поврежденности материала в задачах механики деформируемого твердого тела [2–7]. Из указанного многообразия особый интерес представляют структурные модели поврежденных материалов, одна из которых является предметом рассмотрения в настоящей статье. В данной работе даны вывод уравнений состояния для материалов с нарушением сплошности в виде рассеянных по объему микротрещин с последующим использованием их для анализа качественного и количественного влияния геометрических параметров микротрещин на деформационные свойства поврежденного материала.

Энергетический вывод уравнений состояния для трещиноватых сред. Рассматривается изотропная макрооднородная среда с заданной системой поврежденности в виде стохастически рассеянных по объему плоских эллиптических трещин. Трещины можно идентифицировать с разрывами структурных элементов, если предположить, что материал состоит из плотно упакованных зерен эллипсоидальной формы с различными размерами соответственно большей и меньшей полуосей a' , b' , часть из которых претерпела разрыв, образовав дефект в виде круговой либо эллиптической трещины с размерами $a \leq a'$, $b \leq b'$. Для описания влияния поврежденности материала на упругие свойства применяется энергетический метод [5]. Сущность метода состоит в привлечении модели континуальной среды для описания деформирования неоднородной трещиноватой среды на основании эквивалентности их энергий. Для этой цели используется принцип Эшелби [8], в соответствии с которым имеет место соотношение

$$W = W^0 + \bar{W}, \quad (1)$$

где $W = \frac{1}{2} a_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}$ – плотность энергии деформирования непрерывной

среды, моделирующей поврежденный материал; $W^0 = \frac{1}{2} a_{ijkl}^0 \sigma_{ij} \sigma_{kl}$ – плот-

ность энергии сплошной неповрежденной среды; \bar{W} – приращение плотности энергии деформирования поврежденной среды, связанное с освобождением внутренней энергии вследствие нарушения связей при нормальном отрыве и сдвиге поверхностей трещин в структурных элементах.

Плотность освобожденной энергии поврежденного материала на основании принципа Эшелби [8] определяется в виде работы взаимного смещения поверхностей трещин, вызываемого напряжениями, которые имели бы место при заданной нагрузке в сплошной среде в местах, занимаемых трещинами

$$\bar{W} = \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{i=1}^3 \bar{W}_i^n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{i=1}^3 \int_{S_n} U_i^n \sigma_{i3}^n dS_n. \quad (2)$$

Здесь N_0 – количество трещин в единице объема; U_i^n $i = \overline{1, 3}$ – перемещения в точках поверхности n -ой трещины; S_n – полная поверхность n -ой трещины; σ_{i3}^n ($i = \overline{1, 3}$) – компоненты тензора заданных напряжений в собственной системе координат n -ой трещины $O^n x_1^n x_2^n x_3^n$. В случае эллиптической трещины оси $O^n x_i^n$ ($i = 1, 2$) соответственно направлены по большей (a^n) и меньшей (b^n) полуосям, а ось $O^n x_3^n$ – по нормали к их поверхностям. \bar{W}_i^n ($i = \overline{1, 3}$) – работы взаимного смещения поверхностей n -ой трещины в направлениях осей $O^n x_i^n$. Локальные напряжения σ_{i3}^n и заданные в теле средние напряжения σ_{kl} связаны преобразованием $\sigma_{i3}^n = \sigma_{kl} \alpha_{ik}^n \alpha_{3l}^n$; α_{ik}^n , α_{3l}^n – определяемые углами Эйлера ($0 \leq \vartheta^n \leq \pi$ – угол нутации; $0 \leq \psi^n \leq 2\pi$ – угол прецессии; $0 \leq \varphi^n \leq 2\pi$ – угол собственного вращения) направляющие косинусы собственной системы координат n -ой трещины по отношению к лабораторной системе координат [9]

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta, & \alpha_{13} &= \sin \varphi \sin \vartheta, \\ \alpha_{12} &= \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta, & \alpha_{23} &= \cos \varphi \sin \vartheta, \\ \alpha_{21} &= -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta, & \alpha_{31} &= \sin \psi \sin \vartheta, \\ \alpha_{22} &= -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta, & \alpha_{32} &= -\cos \psi \sin \vartheta, \end{aligned}$$

$$\alpha_{33} = \cos \vartheta. \quad (3)$$

В случае шероховатых поверхностей трещин для описания сдвигового взаимодействия берегов трещин по закону сухого трения вводятся эффективные сдвигающие напряжения

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{i3}^n &= \left| \sigma_{i3}^n \right| - f \left| \sigma_{33}^n \right| \text{ при } \left| \sigma_{i3}^n \right| > f \left| \sigma_{33}^n \right|, \\ \bar{\sigma}_{i3}^n &= 0 \text{ при } \left| \sigma_{i3}^n \right| \leq f \left| \sigma_{33}^n \right| \quad (i=1, 2), \end{aligned} \quad (4)$$

в которых f – коэффициент трения скольжения.

Перемещения на поверхностях трещин U_i^n находятся путем решения задач о напряженно-деформированном состоянии неограниченной изотропной среды с изолированной трещиной при однородных поперечном, продольном сдвигах и нормальном к поверхности трещины растяжении напряжениями на бесконечности, с которыми отождествляются средние напряжения в представительном объеме. Полученные в [5] выражения для работ взаимного смещения берегов индивидуальной эллиптической трещины \bar{W}_i' при сдвигах и раскрытии трещины имеют вид

$$\bar{W}_i' = \frac{4\pi a' b'^2}{3} B_i', \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} B_i' &= A_i' (\sigma_{i3}')^2, \quad A_i' = \left(\frac{1 - \nu_0^2}{E_0} \right) Q_i' \quad (i = \overline{1, 3}); \\ Q_1' &= k'^2 \left[(k'^2 - \nu_0) E(k') + \nu_0 k_1'^2 K(k') \right]^{-1}, \\ Q_2' &= k'^2 \left[(k'^2 + \nu_0 k_1'^2) E(k') - \nu_0 k_1'^2 K(k') \right]^{-1}, \quad Q_3' = 1/E(k'); \end{aligned} \quad (6)$$

$k'^2 = 1 - b'^2/a'^2$; $k_1'^2 = 1 - k'^2$; $K(k')$; $E(k')$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода; E_0 , ν_0 – модуль Юнга и коэффициент Пуассона неповрежденной среды. В (5), (6) вместо индекса n введено обозначение штрихом. Обозначение штрихом здесь и далее указывает на непрерывную зависимость их от углов ориентации трещин в связи с предположением о континуальном распределении последних по объему.

В случае круговой трещины работа взаимного смещения берегов трещины будет определяться формулой (5) при $a' = b'$ и

$$A_1' = A_2' = \frac{4(1 - \nu_0^2)}{\pi(2 - \nu_0)E_0}, \quad A_3' = \frac{2(1 - \nu_0^2)}{\pi E_0}. \quad (7)$$

Уравнения состояния для поврежденной среды

$$\varepsilon_{ij} = a_{ijkl} \sigma_{kl} . \quad (8)$$

получаются из равенства (1). Для этой цели составляющие равенства (1) записываются в компонентах тензора средних напряжений σ_{ij} в теле. Приравнивание коэффициентов при одинаковых выражениях относительно напряжений σ_{ij} в (1) дает выражение для определения податливостей среды a_{ijkl} , моделирующей повреждающийся материал

$$a_{ijkl} = a_{ijkl}^0 + a'_{ijkl} . \quad (9)$$

Здесь a_{ijkl}^0 – податливости неповрежденной среды, a'_{ijkl} – результат осреднения плотности освобожденной энергии \bar{W} , который зависит от количества трещин в единице объема, функции распределения их по размерам и ориентациям $F(Y)$, в которой $Y(a', b', \varphi, \psi, \theta)$ обозначает совокупность параметров, определяющих характерные размеры и углы ориентации трещин в представительном объеме [5].

Осредненное значение плотности освобожденной энергии деформирования при заданной функцией $F(Y)$ системе трещиноватых дефектов определяется формулой

$$\bar{W} = \frac{1}{8\pi^2} \int_Y F(a, b, \varphi, \psi, \theta) (\bar{W}'_1 + \bar{W}'_2 + \bar{W}'_3) \sin \theta \, d\varphi \, d\psi \, d\theta . \quad (10)$$

Остановимся более подробно на случае всестороннего растяжения и сжатия изотропной среды, ослабленной стохастически рассеянными по объему эллиптическими трещинами.

При изотропном широком распределении трещин по ориентациям функция распределения $F(Y)$ от углов Эйлера не зависит. Пределы интегрирования в (10) по углам Эйлера задаются интервалами $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$. При заданной функции распределения трещин по размерам $Y(a', b')$ пределы интегрирования определяются минимальным и максимальным размерами полуосей эллиптических трещин. При условии $k'_1 = const$, что соответствует наличию в среде системы подобных трещин (это предположение вводится с целью упрощения операции статистического осреднения (10)), имеем

$$\bar{W} = \frac{\varepsilon}{8\pi^2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi A'_i(\sigma'_{i3})^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\psi \, d\theta ,$$

$$\varepsilon = \frac{4\pi}{3} \int \int_{a'b'} F(a', b') a'b'^2 da' db' = \frac{4\pi}{3} N_0 \langle a'b'^2 \rangle, \quad (11)$$

Здесь $F(a', b')$ – плотность распределения трещин по размерам; ε – малый параметр трещиноватости, который можно рассматривать как отношение осредненного значения области возмущения ($v' = \frac{4\pi}{3} \langle a'b'^2 \rangle$), вызываемого трещиной, к объему материала, содержащего одну трещину ($1/N_0$) [5]. Для систем одинаковых трещин – $\varepsilon = N_0 \frac{4\pi}{3} \langle a'b'^2 \rangle$.

В случае хаотического статистически однородного распределения трещин в представительном объеме в результате интегрирования (11) в зависимости от характера взаимодействия берегов трещин получаются следующие соотношения для вторых составляющих податливостей в (9):

1) раскрытие трещин ($\sigma'_{33} > 0$)

$$\begin{aligned} a'_{iiii} &= \frac{2}{5} \left[\frac{1}{3} (A_1 + A_2) + A_3 \right] \varepsilon, \quad a'_{ijij} = \frac{1}{15} [-(A_1 + A_2) + 2A_3] \varepsilon, \\ a'_{ijij} &= \frac{2}{5} (A_1 + A_2) \varepsilon + \frac{8}{15} A_3 \varepsilon \quad (i, j = \overline{1, 3}; i \neq j); \end{aligned} \quad (12)$$

2) идеальное проскальзывание ($\sigma'_{33} \leq 0, f = 0$)

$$\begin{aligned} a'_{iiii} &= \frac{2}{15} (A_1 + A_2) \varepsilon, \quad a'_{ijij} = -\frac{1}{15} (A_1 + A_2) \varepsilon, \\ a'_{ijij} &= \frac{2}{5} (A_1 + A_2) \varepsilon \quad (i, j = \overline{1, 3}; i \neq j); \end{aligned} \quad (13)$$

3) трение скольжения ($\sigma'_{33} < 0, |\sigma'_{3j}| > f |\sigma'_{33}|, j = 1, 2$)

$$\begin{aligned} a'_{iiii} &= \frac{2}{15} (1 - 3f^2) (A_1 + A_2) \varepsilon, \quad a'_{ijij} = -\frac{1}{15} (1 + 2f^2) (A_1 + A_2) \varepsilon, \\ a'_{ijij} &= \frac{2}{15} (3 - 4f^2) (A_1 + A_2) \varepsilon \quad (i, j = \overline{1, 3}; i \neq j). \end{aligned} \quad (14)$$

Постоянные A_i ($A_i = A'_i$) определяются формулами (6), (7).

Технические постоянные поврежденного материала через податливости определяются соотношениями [8]

$$\frac{1}{E_{ii}} = a_{iiii}, \quad -\frac{\nu_{ij}}{E_{ii}} = a_{jjii}, \quad \frac{1}{G_{ij}} = a_{ijij} \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad (15)$$

где E_{ij} , G_{ij} , ν_{ij} – модули упругости, модули сдвига и коэффициенты Пуассона. Из соотношений (12)–(15) следует, что изотропный материал с поврежденностью в виде хаотически рассеянных микротрещин, при всестороннем равномерном растяжении либо сжатии моделируется изотропной средой с эффективными постоянными упругости вида

$$E_+ = \frac{E_0}{1 + E_0 \left[\frac{2}{15}(A_1 + A_2) + \frac{2}{5}A_3 \right] \varepsilon},$$

$$\nu_+ = E_+ \left\{ \frac{\nu_0}{E_0} + \left[\frac{1}{15}(A_1 + A_2) - \frac{2}{15}A_3 \right] \varepsilon \right\}; \quad (16)$$

$$E_- = \frac{E_0}{1 + E_0 \left[\frac{2}{15}(A_1 + A_2) \varepsilon \right]}, \quad \nu_- = E_- \left[\frac{\nu_0}{E_0} + \frac{1}{15}(A_1 + A_2) \varepsilon \right]. \quad (17)$$

Приведенные выше соотношения позволяют решать следующие задачи: 1) определение эффективных характеристик упругости трещиноватого материала при растяжении и сжатии (E_+ , E_- , ν_+ , ν_-) по заданным характеристикам сплошной среды и функции распределения трещин по размерам и ориентациям E_0 , ν_0 , $F(Y)$; 2) определение параметров трещиноватости (ε , k) по заданным значениям параметров упругости сплошной и трещиноватой среды (E_0 , ν_0 , E_+ , E_- , ν_+ , ν_-); 3) приближенное определение параметров упругости сплошной среды (E_0 , ν_0) по заданным параметрам упругости трещиноватой среды (E_+ , E_- , ν_+ , ν_-).

Связь эффективных постоянных упругости с микропараметрами трещиноватости материала. Безотносительно к конкретному материалу указанные соотношения позволяют провести теоретический анализ влияния геометрии трещин на деформационные характеристики поврежденного материала.

Из (6), (16) и (17) следует, что при всех прочих равных условиях значения постоянных упругости рассматриваемого изотропного трещиноватого материала зависят от геометрической формы и отношения характерных размеров трещин $k'_1 = b'_1 / a'_1$.

Рассмотрим различные ансамбли одинаковых эллиптических трещин, отличающиеся характерными размерами трещин (a'_i , b'_i) при одинаковых значениях параметра трещиноватости

$$\varepsilon = \frac{4\pi}{3} N_0 (a'_i b_i{}^2) = \frac{4\pi}{3} N_0 (a_i{}^3 k_1'^2) = const$$

и плотности трещин N_0 . В этом случае область возмущения трещины

$v_i = 4\pi a_i' b_i'^2 / 3 = 4\pi k_1^{i2} a_i'^3 / 3 = \varepsilon / N_0$ – также постоянная. Для круговой трещины ($k_1^1 = 1$) значения радиуса и площади определяются выражениями

$$a_1' = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{4\pi N_0}}, \quad S_1 = \pi a'^2 = \sqrt[3]{\frac{9\pi\varepsilon^2}{16N_0^2}}. \quad (18)$$

При $0 \leq k_1^i < 1$ ($i > 1$) имеют место соотношения

$$a_i' = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{4\pi N_0} (k_1^i)^{-2}}, \quad b_i' = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon k_1^i}{4\pi N_0}}, \quad S_i = \pi a_i' b_i'^2 = \sqrt[3]{\frac{9\pi\varepsilon^2}{16 k_1^i N_0^2}}. \quad (19)$$

В случае систем трещин различных размеров приведенные соотношения относятся к трещинам со средними размерами.

Таким образом, одинаковые значения N_0 , ε , v (плотность трещин, параметр трещиноватости и объем области возмущения трещины) могут иметь место в системах различных трещин материала за счет вариации значений длин полуосей трещин ($b_i' = k_1^i a_i'$). Из (6), (7), (12)–(15) следует, что при заданных условиях постоянные упругости трещиноватого материала (16), (17) зависят от параметра k_1 , которым описывается геометрия трещин. При этом указанная зависимость проявляется в том, что степень влияния трещиноватости на значения постоянных упругости повышается с уменьшением значений параметра k_1 , т. е. с увеличением, как следует из (18), (19), площади эллиптической трещины.

Обсуждаемое явление иллюстрируется таблицей, где приведены значения постоянных упругости трещиноватого углеродного материала при $\varepsilon = 0,1$ в зависи-

мости от параметра k_1 для трещин эллиптической и круговой формы при растяжении (E_+, v_+) и сжатии (E_-, v_-). Упругие свойства сплошного углеродного материала принимались равными $E_0 = 4,2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $v_0 = 0,2$. Первая строка таблицы

$k_1^i =$ $= b_i' / a_i'$	$E_+ \cdot 10^{-11}$ <i>Па</i>	v_+	$E_- \cdot 10^{-11}$ <i>Па</i>	v_-
1,00000	4,02856	0,19270	4,12530	0,20348
0,94868	4,02427	0,19252	4,12338	0,20547
0,89443	4,01954	0,19232	4,12126	0,20562
0,83666	4,01433	0,19210	4,11893	0,20579
0,77459	4,00849	0,19185	4,11629	0,20598
0,70711	4,00187	0,19158	4,11330	0,20619
0,63245	3,99425	0,19125	4,10984	0,20664
0,54772	3,98511	0,19089	4,10574	0,20673
0,44721	3,97423	0,19043	4,10067	0,20709
0,31623	3,95979	0,18985	4,09395	0,20757
0,14142	3,94276	0,18918	4,08585	0,20815
0,00000	3,93553	0,18891	4,08243	0,20839

соответствует трещинам круговой формы, последняя – эллиптическим трещинам удлинненной формы. Приведенные результаты свидетельствуют о более существенном влиянии трещиноватости материала на деформационные свойства материала при растяжении. Качественно различно влияние трещиноватости на значения коэффициента Пуассона при растяжении и сжатии. В первом случае – коэффициент Пуассона уменьшается, во втором – увеличивается. Физическая природа указанных эффектов очевидна. Она связана с раскрытием и закрытием трещин в зависимости от растяжения либо сжатия тела.

Изложенная методика учета трещиноватости материала дает возможность проследить связь между параметрами микроструктуры и макросвойствами материала, а также предложить процедуру определения осредненных параметров микроструктуры с помощью макроэкспериментов.

Трещиноватость материала определяется структурными параметрами a' , b' , N_0 . Связь между ними устанавливается соотношениями (16), (17), которые доопределяются посредством соответствующих экспериментов по определению макропараметров E_+ , E_- , ν_+ , ν_- . Из соотношений (16), (17) следуют выражения

$$\frac{1-2\nu_0}{E_0} = \frac{1-2\nu_-}{E_-}, \quad \frac{1+3\nu_+}{E_+} = \frac{1+3\nu_-}{E_-}; \quad (20)$$

$$\varepsilon = \frac{5}{2} \frac{E_0 Q_3(k)}{1-\nu_0^2} \left(\frac{1}{E_+} - \frac{1}{E_-} \right); \quad (21)$$

$$\varepsilon = \frac{15}{2(1-\nu_0^2)} \left(\frac{E_0}{E_-} - 1 \right) \frac{1}{Q_1(k) + Q_2(k)}; \quad (22)$$

$$\varepsilon = \frac{15}{1-\nu_0^2} \left(\frac{\nu_- E_0}{E_-} - \nu_0 \right) \frac{1}{Q_1(k) + Q_2(k)}; \quad (23)$$

$$\varepsilon = \frac{15}{2(1-\nu_0^2)} \left(\frac{E_0}{E_+} - 1 \right) \frac{1}{Q_1(k) + Q_2(k) + 6Q_3(k)}; \quad (24)$$

$$\varepsilon = \frac{15}{1-\nu_0^2} \left(\frac{\nu_+ E_0}{E_+} - \nu_0 \right) \frac{1}{Q_1(k) + Q_2(k) - 2Q_3(k)}. \quad (25)$$

В предельных случаях ($k = 0$, $k = 1$) соответственно имеем

$$\varepsilon = \frac{5\pi E_0}{4(1-\nu_0^2)} \left(\frac{1}{E_+} - \frac{1}{E_-} \right), \quad \varepsilon = \frac{5E_0}{2(1-\nu_0^2)} \left(\frac{1}{E_+} - \frac{1}{E_-} \right); \quad (26)$$

$$\varepsilon = \frac{15\pi(2-\nu_0)}{16(1-\nu_0^2)} \left(\frac{E_0}{E_-} - 1 \right), \quad \varepsilon = \frac{15}{2(1+\nu_0)(2-\nu_0)} \left(\frac{E_0}{E_-} - 1 \right); \quad (27)$$

$$\varepsilon = \frac{15\pi(2-\nu_0)}{8(1-\nu_0^2)} \left(\frac{\nu_- E_0}{E_-} - \nu_0 \right), \quad \varepsilon = \frac{15}{(1+\nu_0)(2-\nu_0)} \left(\frac{\nu_- E_0}{E_-} - \nu_0 \right); \quad (28)$$

$$\varepsilon = \frac{15\pi(2-\nu_0)}{8(1-\nu_0^2)(8-3\nu_0)} \left(\frac{E_0}{E_+} - 1 \right), \quad \varepsilon = \frac{15}{\nu_0(1+\nu_0)} \left(\frac{\nu_+ E_0}{E_+} - \nu_0 \right). \quad (29)$$

В силу неоднозначной зависимости макропараметров упругих свойств поврежденного материала от параметров трещиноватости a , k , N_0 , задание макропараметров E_0 , ν_0 , E_+ , ν_+ , E_- , ν_- недостаточно для определения микропараметров трещиноватости. Необходима конкретизация значения одного из трех параметров.

Для определения параметров ε , k можно воспользоваться соотношением

$$Q_3(k) \left(\frac{1}{E_+} - \frac{1}{E_-} \right) = \frac{6(\nu_- - \nu_0)}{E_- (1 - 2\nu_0) [Q_1(k) + Q_2(k)]}. \quad (30)$$

Это уравнение, являющееся результатом приравнивания выражений (24) и (22) с последующим исключением из полученного уравнения с помощью первого выражения (20) параметра E_0 , позволяет определить параметр k для заданных значений ν_0 , E_+ , ν_+ , E_- , ν_- .

Решение уравнения (30) неоднозначно в силу его трансцендентности. Физический смысл имеют все значения корней в интервале $[0, 1]$. Соответствующие значения параметра $\varepsilon = \frac{4\pi}{3} N_0 < a^3 k_1^2 >$ определяются из любого

выражения (21)–(29). Для определения характерных значений a , N_0 необходима дополнительная информация об одном из этих параметров, например, о характерных размерах структурных элементов, если трещины представляют собой плоскости разрыва элементов.

Зачастую, экспериментально определяются параметры упругости материалов при растяжении либо сжатии, которые затем отождествляются с таковыми для сплошного материала. В случае разномодульных материалов, как правило [1], информация об упругих свойствах сплошного материала отсутствует. Изложенная выше методика позволяет определять постоянные упругости сплошного материала при заданных параметрах упругости при растяжении и сжатии, если причиной разномодульности материала является трещиноватость. Критерием последнего является выполнение второго равенства из (20).

Процедуру определения постоянных упругости сплошного материала проиллюстрируем на примере разномодульного материала [1] типа чугуна СЧ12-28 с макрохарактеристиками упругости

$$\begin{aligned} E_+ &= 11,17695 \times 10^{10} \text{ Па}, \quad \nu_+ = 0,22, \\ E_- &= 12,18728 \times 10^{10} \text{ Па}, \quad \nu_- = 0,27. \end{aligned} \quad (31)$$

Для этой цели воспользуемся уравнением относительно неизвестной ν_0 (30). В предельных случаях по параметру k ($k=0$, $k=1$) это уравнение соответственно принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{3(2-\nu_0)}{2E_-} \left(\frac{\nu_- - \nu_0}{1-2\nu_0} \right) &= \left(\frac{1}{E_+} - \frac{1}{E_-} \right), \\ \frac{6(1-\nu_0)}{E_- (1-2\nu_0)} \left(\frac{\nu_- - \nu_0}{2-\nu_0} \right) &= \left(\frac{1}{E_+} - \frac{1}{E_-} \right). \end{aligned}$$

Решения этих уравнений с учетом (31) дают для ν_0 следующие значения: $\nu_0 = 0,25298$ при $k=0$ и $\nu_0 = 0,25258$ при $k=1$. На основании первой формулы из (20) следуют соответствующие значения модуля упругости: $E_0 = 13,08913 \times 10^{10} \text{ Па}$, $E_0 = 13,11025 \times 10^{10} \text{ Па}$. В данном случае, как уже указывалось выше, имеем неединственное решение поставленной задачи в силу неоднозначной зависимости его от параметра k . С учетом полученных результатов из формул (21)–(29) следуют значения параметров трещиноватостей: $\varepsilon = 0,40878$, $\varepsilon = 0,25960$. Указанным значениям соответствуют следующие значения принятых в литературе [6] параметров трещиноватости $N_0 < a'b'^2 > = 0,09759$; $0,06198$. Постоянные упругости сплошного материала в случае других возможных промежуточных значений параметра k можно вычислить, воспользовавшись уравнением (30) путем задания промежуточного значения параметра k из интервала возможных значений $[0, 1]$. Однако в данном случае такой необходимости не существует, поскольку их значения будут изменяться в границах приведенных выше достаточно близких предельных значений.

Для получения однозначного решения рассмотренной задачи необходима конкретизация характерных размеров структурных элементов материала, т.е. задания соответствующего данным (31) значения параметра k .

Таким образом, изложенная выше методика учета поврежденности среды при соответствующих данных о трещиноватых дефектах и их распределении по объему позволяет находить эффективные характеристики упругости трещиноватого материала, а при наличии макрохарактеристик упругости поврежденного материала при растяжении и сжатии – характеристики сплошного материала.

РЕЗЮМЕ. На основі енергетичного методу з врахуванням взаємодії берегів тріщин отримані вирази для ефективних характеристик пружності для матеріалів, послаблених системою хаотично розподілених по об'єму еліптичних тріщин. Досліджується вплив геометрії мікротріщин на ефективні постійні пружності пошкодженого матеріалу.

SUMMARY. On the basis energetic method with allowance for interaction of crack edges, expressions for effective characteristics of elasticity of materials weakened by a system of elliptical cracks chaotically distributed over the volume have been obtained. It was researched the influence of microcracks geometry on effective deformative properties of damage material.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ: 1. Амбарцумян С. А. Разномодульная теория уругости. – М.: Наука, 1982. – 317 с. 2. Болотин В. В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с. 3. Волков С. Д. Статистическая теория прочности. – М.: Машгиз, 1960. – 176 с. 4. Германович Л. Н., Дыскин А. В. Модель разрушения хрупкого материала с трещинами при одноосном нагружении // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1988. – № 2. – С. 118–131. 5. Салганик Р. Л. Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 149–158. 6. Тамуж В. П., Куксенко В. С. Микро-механика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с. 7. Khoroshun L. P. Principles of the Micromechanics of Material Damage. 1. Short-Term Damage // Int. Appl. Mech. – 1998. – Vol. 34, № 10. – P. 1120–127. 8. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1983. – 334 с. 9. Кильчевский Н. А. Курс теоретической механики. Т. 2. – М.: Наука, 1977. – 479 с.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 14.04.2009

И. Ю. ХОМА, д-р физ.-мат. наук

О СВЕДЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ИЗГИБА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН К ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Для определения напряженно-деформированного состояния упругих трансверсально-изотропных пластин привлекаются разные прикладные теории, учитывающие деформации поперечного сдвига. К прикладным можно отнести вариант аналитической теории И. Н. Векуа [1] в случае первого приближения $N = 1$. Развитие ее на анизотропные пластины и оболочки изложено в [2–4]. В данной работе для приближения $N = 1$ излагается способ сведения краевых задач изгиба трансверсально-изотропных пластин к задачам теории функций комплексного переменного.

Постановка задачи и вывод исходных уравнений. Рассмотрим трансверсально изотропную пластину постоянной толщины $2h$ ($h = const$), отнесенную к декартовой системе координат x_i ($i = \overline{1, 3}$). Пластина находится под действием нормальных поперечных напряжений σ_{33}^+ , σ_{33}^- , приложенных к лицевым граничным плоскостям $x_3 = h$, $x_3 = -h$. Вводя обозначения

$$2\left(u_3^{(0)}, \sigma_{\alpha 3}^{(0)}\right) = (w, Q_\alpha), \quad \frac{2}{3}h\left(u_\alpha^{(1)}, \sigma_{\alpha\beta}^{(1)}\right) = (\vartheta_\alpha, M_{\alpha\beta}), \quad (1)$$

запишем систему уравнений для приближения $N = 1$ в виде [5]

$$\partial_\alpha Q_\alpha + p = 0, \quad \partial_\alpha M_{\alpha\beta} - Q_\beta = 0 \quad (\beta = 1, 2), \quad (2)$$

где $\partial_\alpha = \partial / \partial x_\alpha$; $p = \sigma_{33}^+ - \sigma_{33}^-$; w – прогиб срединной плоскости Ω ; ϑ_α ($\alpha = 1, 2$) – углы поворота нормали к Ω ; Q_α – поперечная сила; $M_{\alpha\beta}$ – изгибающие и крутящие моменты.

Соотношения упругости, связывающие усилия и моменты с перемещениями, определяются равенствами

$$\begin{aligned} M_{11} &= h(c_{11}\partial_1\vartheta_1 + c_{12}\partial_2\vartheta_2), & M_{12} &= c_{66}h(\partial_1\vartheta_2 + \partial_2\vartheta_1), \\ M_{22} &= h(c_{12}\partial_1\vartheta_1 + c_{11}\partial_2\vartheta_2), & Q_\alpha &= c_{44}h(\partial_\alpha w + 3h^{-2}\vartheta_\alpha). \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (3) в равенства (2), получаем систему уравнений относительно перемещений

$$c_{44}(\Delta w + 3h^{-2}\theta) + h^{-1}p = 0,$$

$$c_{66}\Delta\vartheta_\alpha + (c_{12} + c_{66})\partial_\alpha\theta - c_{44}(\partial_\alpha w + 3h^{-2}\vartheta_\alpha) = 0, \quad (4)$$

в которой Δ – оператор Лапласа; $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{66}$ – упругие постоянные материала; $\theta = \partial_1\vartheta_1 + \partial_2\vartheta_2$.

Если положить

$$3\vartheta_1 = -h^2 \left[\partial_1 w + \alpha h^2 \partial_1 (\Delta w + p/c_{44}h) - \partial_2 \omega \right],$$

$$3\vartheta_2 = -h^2 \left[\partial_2 w + \alpha h^2 \partial_2 (\Delta w + p/c_{44}h) + \partial_1 \omega \right], \quad (5)$$

где ω – произвольная достаточно гладкая вещественная функция, то система уравнений (4) приведет к двум равенствам

$$\Delta\Delta w = 3(p - \alpha h^2 \Delta p) / c_{11} h^3, \quad \Delta\omega - \lambda h^{-2}\omega = 0, \quad (6)$$

в которых $\alpha = c_{11} / 3c_{44}$; $\lambda = 3c_{44} / c_{66}$.

Уравнения (6) дополняются соответствующими граничными условиями, заданными на краю пластины. Край в общем случае будем считать криволинейным с нормалью n и дугой контура s . Эти условия следующие.

При жестко защемленном крае

$$w = 0, \quad \vartheta_n = 0, \quad \vartheta_s = 0, \quad (7)$$

где ϑ_n и ϑ_s – углы поворота нормали.

При шарнирно опертом крае

$$w = 0, \quad M_n = 0, \quad M_{ns} = 0. \quad (8)$$

Если край свободен от усилий, то

$$Q_n = 0, \quad M_n = 0, \quad M_{ns} = 0. \quad (9)$$

Возможны и другие виды граничных условий [6].

Метод решения. Для решения задачи воспользуемся методами теории функций комплексного переменного. Умножим второе равенство (5) на i и сложим с первым. В результате будем иметь

$$3\vartheta_+ = -2h^2 \partial_{\bar{z}} \left[w + \alpha h^2 (\Delta w + p/c_{44}h) + i\omega \right], \quad (10)$$

где $\partial_{\bar{z}} = \partial / \partial \bar{z}$. Отсюда следует, что

$$\theta = \partial_z \vartheta_+ + \partial_{\bar{z}} \bar{\vartheta}_+ = -h^2 (\Delta w + p/c_{44}h) / 3.$$

Соотношения упругости (3) в комплексной форме записываются таким образом

$$\begin{aligned}
M_{11} + M_{22} &= -2(c_{12} + c_{66})h^3 (\Delta w + p/c_{44}h)/3, \\
M_{11} - M_{22} + 2iM_{12} &= -8c_{66}h^3 \partial_{\bar{z}}^2 \left[w + \alpha h^2 (\Delta w + p/c_{44}h) + i\omega \right] / 3, \\
Q_+ = Q_1 + iQ_2 &= -2c_{44}h \partial_{\bar{z}} \left[i\omega + \alpha h^2 (\Delta w + p/c_{44}h) \right]. \quad (11)
\end{aligned}$$

Примем общее решение уравнения (6) в форме $w = w_0 + u$, где w_0 – частное решение неоднородного уравнения, u – бигармоническая функция в области Ω , которую представим формулой

$$u = \bar{z}\phi(z) + z\overline{\phi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}, \quad (12)$$

$\phi(z)$ и $\chi(z)$ – произвольные аналитические функции.

Согласно (12) перемещение ϑ_+ примет вид

$$3\vartheta_+ = -2h^2 \left[\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + v_1^* h^2 \overline{\phi''(z)} + \overline{\chi'(z)} + i\partial_{\bar{z}}\omega \right] + 3\vartheta_+^0, \quad (13)$$

где $v_1^* = 4\alpha$; $3\vartheta_+^0 = -2h^2 \partial_{\bar{z}}(w_0 + \alpha h^2 \tilde{w}_0)$.

Полагая $u_0 = w_0 + \alpha h^2 \tilde{w}_0$, $\tilde{w}_0 = \Delta w_0 + p/c_{44}h$, будем иметь

$$\vartheta_n^0 = -\frac{h^2}{3} \frac{du_0}{dn}, \quad \vartheta_s^0 = -\frac{h^2}{3} \frac{du_0}{ds}.$$

Поперечные усилия Q_n изгибающий M_n и крутящий M_{ns} моменты определяются формулами

$$\begin{aligned}
Q_n &= -\text{Im} \left(Q_+ \frac{d\bar{z}}{ds} \right), \\
M_n + iM_{ns} &= \frac{1}{2} \left[M_{11} + M_{22} + (M_{11} - M_{22} + 2iM_{12}) \left(\frac{d\bar{z}}{ds} \right)^2 \right]. \quad (14)
\end{aligned}$$

На основании (11) и (12) последние выражения преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
Q_n &= c_{44}h \frac{d}{ds} \left\{ \omega + iv_1^* h^2 \left[\phi'(z) - \overline{\phi'(z)} \right] \right\} - Q_n^0, \\
M_n + iM_{ns} &= \frac{4c_{66}h^3}{3} \left\{ -v^* \left[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)} \right] + \left[z\overline{\phi''(z)} + v_1^* h^2 \overline{\phi'''(z)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \overline{\chi'(z)} + i\partial_{\bar{z}}^2 \omega \right] \left(\frac{d\bar{z}}{ds} \right)^2 \right\} + \frac{4c_{66}h^3}{3} (M_n^0 + iM_{ns}^0), \quad (15)
\end{aligned}$$

в котором

$$v^* = 1 + c_{12}/c_{66}, \quad Q_n^0 = c_{44}\alpha h^3 \frac{dw_0}{dn},$$

$$M_n^0 + iM_{ns}^0 = -\frac{1}{4}v^* \tilde{w}_0 + \partial_{\bar{z}}^2 u_0 \left(\frac{d\bar{z}}{ds} \right)^2. \quad (16)$$

При жестко защемленном крае задача сводится к определению двух аналитических функций $\phi(z)$, $\chi(z)$ и вещественного решения ω уравнения (6) по граничным условиям

$$\bar{z}\phi(z) + z\overline{\phi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)} = -w_0,$$

$$\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + v_1^* h^2 \overline{\phi''(z)} + \overline{\chi'(z)} + i\partial_{\bar{z}}\omega = -it' \left(\vartheta_n^0 + i\vartheta_s^0 \right). \quad (17)$$

В случае шарнирно опертого края указанные функции определяются из условий

$$\bar{z}\phi(z) + z\overline{\phi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)} = -w_0,$$

$$-v^* \left[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)} \right] + \left[z\overline{\phi''(z)} + v_1^* \overline{\phi'''(z)} + \overline{\chi'(z)} + i\partial_{\bar{z}}^2 \omega \right] \left(\frac{d\bar{z}}{ds} \right)^2 = -\left(M_n^0 + M_{ns}^0 \right). \quad (18)$$

Приравнявая нулю правые части равенств (15), получаем граничные условия при свободном крае пластины. Им можно придать иной вид, если ввести в рассмотрение значения главного вектора Z_n и главного момента $X_n + iY_n$ согласно формул

$$Z_n = \int_L Q_n ds, \quad X_n + iY_n = -i \int_L z Q_n ds + \int_L (M_n + iM_{ns}) dz. \quad (19)$$

Подставив в (19) значения функций (15), будем иметь

$$-(1 + 2v^*)\phi(z) + (1 + v^*)z\phi'(z) - v^*z\overline{\phi'(z)} + v_1^* h^2 \overline{\phi''(z)} + \overline{\chi'(z)} + i\partial_{\bar{z}}\omega - \frac{i\lambda}{4h^2}z\omega = f_1 + if_2 + c_1 + ic_2,$$

$$\omega + iv_1^* h^2 \left[\phi'(z) - \overline{\phi'(z)} \right] = f_3 + c, \quad (20)$$

где

$$f_1 + if_2 = -\frac{1}{4}(1 + v^*) \int_L it' \frac{d\tilde{w}_0}{dn} ds + \frac{1}{4}v^* \int_L \tilde{w}_0 ds - \int_L \frac{\partial^2 u_0}{\partial \bar{z}^2} \left(\frac{d\bar{z}}{ds} \right)^2 d\bar{z},$$

$$f_3 = \alpha h^3 \int_L \frac{d\tilde{w}_0}{dn} ds.$$

Здесь c , c_1 , c_2 – вещественные постоянные.

Для разрешимости задачи (20) необходимо выполнение условий равенства нулю главного вектора и главного момента. Эти условия равносильны требованиям

$$\iint_{\Omega} p(x_1, x_2) d\Omega = 0, \quad \iint_{\Omega} x_{\alpha} p(x_1, x_2) d\Omega = 0 \quad (\alpha = 1, 2). \quad (21)$$

В частности, первое равенство следует из выполнения тождества Грина, т.е.

$$\begin{aligned} \int_L Q_n^0 ds &= c_{44} \alpha h^3 \int_L \frac{d\tilde{w}_0}{dn} ds = c_{44} \alpha h^3 \iint_{\Omega} \Delta \tilde{w}_0 d\Omega = \\ &= \iint_{\Omega} p(x_1, x_2) d\Omega = 0. \end{aligned}$$

Аналогичным способом доказывается второе равенство (20).

РЕЗЮМЕ. На основі аналітичної теорії І.Н.Векуа для першого наближення $N = 1$ викладено метод зведення крайових задач згину трансверсально ізотропних пластин до задач теорії функцій комплексної змінної.

SUMMARY. By use of Vekua' analytical theory for the first approximation $N = 1$ the method of a reduction of boundary problems of a bending of transversely isotropic plates to the problem of the theory of a complex variable is propounded.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. Векуа И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – М.: Наука, 1982. – 285 с. 2. Хома И. Ю. Об общем решении системы уравнений изгиба пластин постоянной толщины // Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 213, № 1. – С. 59–62. 3. Khoma I. Yu. Complex representation of the equations of a transversely isotropic spherical shell with prestresses // Int. Appl. Mech. – 2007. – Vol. 43, № 2. – P. 228–237. 4. Khoma I. Yu., Kondratenko O.A. Stress distribution around a circular cylindrical cavity in a prestressed plate // Int. Appl. Mech. – 2008. – Vol. 44, № 1. – P. 23–34. 5. Khoma I. Yu. Representation of solution of the deflection equilibrium equation for thick transversely isotropic plates // J. Math. Sci. – 2001. – Vol. 103, № 3. – P. 306–313. 6. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1967. – 266 с.

Институт механики НАН Украины, г.Киев

Поступила 10.09.2009

УДК 539.3

А. Р. ГАЧКЕВИЧ, д-р физ.-мат. наук, *В. И. АСТАШКИН*, канд. физ.-мат. наук,
Б. Д. ДРОБЕНКО, д-р физ.-мат. наук, *Т. В. КОЗАКЕВИЧ*

К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ ВЛИЯНИЯ ЛЕГИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ФАЗОВОЕ И НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СТАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ НАГРЕВЕ ПОДВИЖНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Технологические режимы получения, термической обработки и эксплуатации стальных изделий часто связаны с изменением структуры материала и возникновением временных и остаточных напряжений, что, в свою очередь, влияет на прочность, надежность и долговечность изделий. В общем случае задача количественной оценки фазового состава стальных тел и обусловленных ими структурных напряжений требует построения кинетических уравнений, которые описывают эволюцию фазового состава с учетом влияния на нее температуры, напряжений и времени. Для изделий из низколегированных сталей, подвергающихся простому монотонному охлаждению, можно использовать статистические модели для количественного расчета фазового состава. При помощи этих моделей сложная термическая история в каждой точке материала заменяется простым параметром – длительностью охлаждения от температуры $A_{c3} \approx 850^\circ\text{C}$ до температуры минимальной устойчивости аустенита (500°C). Кроме того, если в известных моделях, базирующихся на уравнениях кинетики фазовых превращений, выделяется только одна неравновесная фаза – мартенсит, то в статистической модели [1, 2] – мартенсит и бейнит, что более полно описывает структуру стальных тел. Найденный на основании статистической модели фазовый состав может быть использован для прогнозирования свойств изделия и количественной оценки возникающих при этом остаточных структурных напряжений, которые для сталей вносят значительный вклад в величину суммарных эксплуатационных напряжений [3, 4].

В данной работе ограничимся рассмотрением режимов и условий охлаждения, при которых термопластические деформации отсутствуют или ими можно пренебречь в силу их малости. Для описания фазового состава, образующегося при различных условиях охлаждения низколегированных сталей, используют регрессионные модели, базирующиеся на статистической обработке опытных данных, что позволяет учесть влияние различных технологических факторов и химического состава материала [3, 4].

Модель. В работах [3, 4] фазовые превращения в низколегированных сталях при монотонном охлаждении предложено описывать такой моделью:

$$M(\tau^*) = 100\beta \left[1 - \Phi \left(\frac{\ln(\tau^*/\tau_M)}{\ln S_M} \right) \right]; \quad (1)$$

$$(\Phi\Pi)(\tau^*) = 100\beta \left[1 - \Phi \left(\frac{\ln(\tau^*/\tau_{\Phi\Pi})}{\ln S_{\Phi\Pi}} \right) \right] + (1-\beta)100 ; \quad (2)$$

$$B(\tau^*) = 100 - M(\tau^*) - (\Phi\Pi)(\tau^*) , \quad (3)$$

где $M(\tau^*)$ – процентное содержание мартенсита в данной точке; $(\Phi\Pi)(\tau^*)$ – процентное содержание ферито-перлита в данной точке; $B(\tau^*)$ – процентное содержание бейнита в данной точке; Φ – интегральная функция нормального распределения; τ – время охлаждения в диапазоне температур $850^\circ\text{C} - 500^\circ\text{C}$; β – относительное содержание аустенита при температуре, от которой начинается охлаждение.

На параметры $\ln \tau_M$, $\ln S_M$, $\ln \tau_{\Phi\Pi}$, $\ln S_{\Phi\Pi}$, зависящие от химического состава сталей, влияние оказывают многие факторы технологического характера, в связи с чем при использовании одного и того же подхода финальный фазовый состав сталей одинакового состава описывается при помощи различных соотношений. В работах [3, 4] исследовано около 150 термокинетических диаграмм [5, 6], которые получены на образцах сталей следующего химического состава (в скобках приведен химический состав для второй модели): $C \leq 0,4$ ($0,05 \leq C \leq 0,4$), $Mn \leq 2$ ($Mn \leq 2$), $Si \leq 0,8$ ($Si \leq 0,8$), $Cr \leq 2$ ($Cr \leq 2$), $Mo \leq 1$ ($Mo \leq 1$), $Ni \leq 1,5$ ($Ni \leq 1,5$), $V \leq 0,3$ ($V \leq 0,2$), $Ti \leq 0,06$ ($V \leq 0,03$), $Al \leq 0,06$ ($Al \leq 0,05$), $Nb \leq 0,1$ ($Nb \leq 0,03$), $W \leq 0,5$ ($W = 0$), $Cu \leq 0,5$ ($Cu = 0$). С использованием методов многомерного регрессионного анализа с последовательным исключением регрессоров были получены следующие интерполяционные модели, а также оценки множественных коэффициентов корреляции R и среднеквадратичных отклонений $\sqrt{d_0}$ (модель 1, [3]):

$$\ln \tau_M = -2,1 + 15,5C + 0,96Mn + 0,84Si + 0,77Cr + 0,74Mo + \\ + 0,70Ni + 0,30V + 4,0Al + 0,50W + 0,80Cu - 13,5C^2 ,$$

$$R = 0,95 , \quad \sqrt{d_0} = 0,70 ,$$

$$\ln S_M = 0,56 - 0,41C + 0,10Mn + 0,14Cr - 0,30Mo + \\ + 2,70Ti - 1,10Nb + 0,50Cu + 1,7C \cdot Mo ,$$

$$R = 0,70 , \quad \sqrt{d_0} = 0,32 ,$$

$$\ln \tau_{\Phi\Pi} = 0,34 + 5,2C + 1,8Mn + 0,53Si + 0,33Cr + \\ + 2,9Mo + 1,3Ni + 1,5W + 1,0Cu - 5,1C^2 ,$$

$$R = 0,83 , \quad \sqrt{d_0} = 0,96 ,$$

$$\begin{aligned} \ln S_{\Phi\Pi} &= 0,91 - 0,90C + 0,09Mn + 0,08Cr + \\ &\quad + 0,34Mo + 0,15Ni + 0,85V + 2,2Ti + 0,43W, \\ R &= 0,61, \quad \sqrt{d_0} = 0,43. \end{aligned} \quad (4)$$

Согласно работе [4] (модель 2):

$$\begin{aligned} \ln \tau_M &= -1,49 + 13,6C + 1,0Mn + 0,33Si + 0,48Cr + \\ &\quad + 0,94Mo + 0,87Ni - 14,2C^2, \quad R = 0,90, \\ \ln S_M &= 0,65 - 0,52C + 0,23Mn + 0,16Cr + 0,18Mo, \quad R = 0,50, \\ \ln \tau_{\Phi\Pi} &= 0,85 + 7,43C + 1,84Mn + 0,55Cr + \\ &\quad + 3,2Mo + 0,95Ni - 9,2C^2, \quad R = 0,75, \\ \ln S_{\Phi\Pi} &= 1,42 - 1,6C + 0,23Mn + 0,42Si + \\ &\quad + 0,32Mo + 0,22Ni, \quad R = 0,46. \end{aligned} \quad (5)$$

Методика расчета фазового и напряженного состояний. В работах [7, 8] предложена методика трехэтапного определения остаточных структурных напряжений, базирующаяся на вышеупомянутой статистической теории формирования фазового состава стали. Сущность ее проиллюстрируем на примере определения фазового состава и структурных напряжений в тонкой пластине при действии на нее подвижного нормально распределенного источника нагрева.

Рассмотрим тонкостенную пластину из низколегированной стали, которая в исходном перед нагревом состоянии материал пластины имеет феррито-перлитную равновесную структуру. Температура пластины постоянная и равна температуре внешней среды. Ограничиваемся малой толщиной пластины (10 мм), когда можно пренебречь неоднородностью распределения температуры по ее толщине.

На первом этапе ставится и решается задача теплопроводности. При сформулированных предположениях распределение температуры в пластине описывается двумерным уравнением теплопроводности:

$$c\rho \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \alpha^*(T - t_c) + \bar{Q} \quad (j = \overline{1, 2}) \quad (6)$$

при таких граничных и начальных условиях:

$$\partial T / \partial x_1 = 0 \quad \text{при } x_1 \rightarrow \pm\infty, \quad \partial T / \partial x_2 = 0 \quad \text{при } x_2 \rightarrow \pm\infty; \quad (7)$$

$$T(x_1, x_2, \tau) = t_0 \quad \text{при } \tau = 0, \quad (8)$$

где $T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} t dx_3$ – усредненная по толщине h пластины температура; τ

– время; x_1, x_2 – координаты точек срединной поверхности пластины; λ – коэффициент теплопроводности; c – удельная теплоемкость; ρ – плотность материала; t_c – температура внешней среды; t_0 – начальная температура пластины; $\alpha^* = \alpha/h$; α – коэффициент теплообмена; \bar{Q} – приведенная (отнесенная к единице толщины) мощность источника. Влияние фазовых превращений в стали на процессы распространения тепла в модели учитываются путем включения тепловых эффектов превращений в теплоемкость в соответствующих для них температурных диапазонах.

В данной работе рассматривается подвижный нормально распределенный источник тепла вида

$$\bar{Q} = \frac{Q_1^*}{2\pi h \sigma} \exp\left(\frac{x_2^2 - (x_1 - x_1^*)^2}{2\sigma}\right), \quad (9)$$

в котором $x_1^* = v\tau$; σ – параметр рассеивания; v – скорость движения источника нагрева; Q_1^* – приведенная мощность источника. Здесь ограничимся схемой гауссового кругового распределения потоков энергии под источником.

Используя решение задачи (6)–(9), находим приведенную длительность τ^* охлаждения от температуры 850°C до температуры 500°C , либо от максимальной температуры T_{\max} , $A_{c1} < T_{\max} < 850^\circ$ до 500°C . С этой целью решим дополнительные уравнения:

$$T(x, \tau_1) = 850^\circ\text{C}, \quad T(x, \tau_2) = 500^\circ\text{C}, \quad \tau^* = \tau_2 - \tau_1; \quad (10)$$

$$T(x, \tau'_1) = T_H, \quad T(x, \tau_2) = 500^\circ\text{C}, \quad \tau^{**} = \tau_2 - \tau'_1, \quad (11)$$

где τ_1, τ_2, τ'_1 – моменты времени температуры $850^\circ\text{C}, 500^\circ\text{C}$ или максимальной температуры T_H , с которой началось охлаждение, если $A_{c1} < T_H < 850^\circ\text{C}$ соответственно.

Для охлаждения от температуры T_H в формулах (1)–(3) будем считать [8], что

$$\tau^* = \begin{cases} \tau^*, & \text{если } T_H > 850^\circ\text{C}, \\ \tau', & \text{если } A_{c1} < T_H < 850^\circ\text{C}, \end{cases} \quad (12)$$

где $\tau' = \tau^{**} \frac{350^\circ\text{C}}{T_H - A_{c1}}$.

На втором этапе найденные для каждой точки тела длительность охлаждения τ^* используем формулы (1)–(3) для расчета процентного содержания мартенсита M , бейнита B и феррито-перлита $ФП$.

Уравнения (1)–(3) при $\beta = 0$ известны в литературе [3, 4] для условий однородного охлаждения от температур, больших $T = A_{c3}$. В предложенной модели принято, что они имеют место и при определении фазового состава тела, у которого каждая точка имеет свой индивидуальный закон изменения температуры во времени. Это возможно при условии, что фазовый состав в физически малом элементе тела (в «точке») не зависит от параметров термомеханического состояния соседних физически малых элементов тела (сформулированное условие – аналог известного постулата о локальном термодинамическом равновесии, обобщенного на случай фазовых превращений).

На третьем этапе по найденным распределениям фаз определим остаточные напряжения. С этой целью используем обобщенный закон Гука [7]:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[e_{ij} + \frac{1}{(1-2\nu)} \left(\nu e - (1+\nu) \frac{e_a}{3} \right) \delta_{ij} \right], \quad (13)$$

где σ_{ij} , e_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций; $e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости. При этом линейная деформация (13), обусловленная отличием фазового состава от равновесного, согласно с [8] определяется формулой

$$e_a = \beta_M \xi_M + \beta_B \xi_B, \quad (14)$$

в которой $\xi_M = 0,01 M$, $\xi_B = 0,01 B$ – относительное содержание мартенсита и бейнита в заданной точке стального тела; $\beta_M = 0,21$; $\beta_B = 0,11$ – коэффициенты, учитывающие отличие удельных объемов мартенсита, и бейнита от удельного объема феррито-перлита. Как меру напряженного состояния в точках тела используем интенсивность напряжений $\sigma_{инт}$:

$$\sigma_{инт} = \sqrt{1,5 \left[(\sigma_{x_1x_1} - \sigma_0)^2 + (\sigma_{x_2x_2} - \sigma_0)^2 + (\sigma_{x_3x_3} - \sigma_0)^2 + \sigma_{x_1x_2}^2 \right]}, \quad (15)$$

которая инвариантна относительно выбранной при решении задачи геометрической системы отсчета, здесь $\sigma_0 = 1/3(\sigma_{x_1x_1} + \sigma_{x_2x_2} + \sigma_{x_3x_3})$

При решении задачи определения остаточных напряжений в пластине к системе (10)–(11) присоединим уравнения равновесия и совместности деформаций. По формальным признакам эта система подобна известной системе уравнений термоупругости [9]. Качественное отличие данной системы от системы в [9] состоит в том, что в законе Гука учитывается изменение объема от фазовых превращений, в то время как в термоупругости – от

термической дилатации. В термоупругости термическую дилатацию находят, используя решение задачи теплопроводности (6)–(8); в описываемом случае функцию распределения объема от фазовых превращений – при помощи решения уравнения теплопроводности и соотношений (1)–(3). В предложенной модели не ставится граничные условия на фазовый состав, так как он определяется законом изменения температуры в подобластях тела. Найденные напряжения являются остаточными в том смысле, что они существуют в теле без внешнего термомеханических нагрузок и не меняются в течении всего времени эксплуатации стального изделия. Во многих случаях длительность существования неравновесного состава сравнима или равна времени эксплуатации стального изделия.

При проведении расчетов на первом и третьем этапе вычислений использовался метод конечных элементов.

Решения частных задач. Рассмотрим пластину из низколегированной стали, состав которой находится в пределах: $C = 0,15\%$, $Si = 0,3\%$,

$Mn = 0,0 \div 1,0\%$, $Cr = 0,0 \div 1,0\%$. Рассчитаем фазовый состав и напряженное состояние по двум моделям: применяя формулы (4) – модель 1 и формулы (5) – модель 2.

На рис. 1 изображены изотермы вокруг подвижного источника нагрева при $Q_1^* = 800 \text{ KBm/m}$ и $v = 0,002 \text{ м/с}$ (стрелка указывает направление движения источника, \bullet – положение источника, кривая 1 – 500°C ; кривая 2 – 723°C ; кривая 3 – 850°C).

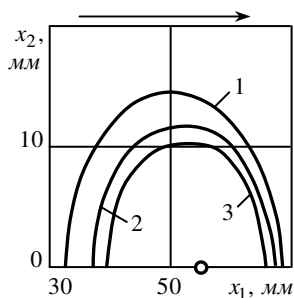


Рис. 1

На рис. 2 при использовании модели 1 представлены результаты исследования влияния Cr на фазовый состав и напряжения в пластине. На рис. 3 приведены те же распределения, полученные при помощи модели 2. Состав стали изменяется: $C = 0,15\%$, $Si = 0,3\%$, $Mn = 1,0\%$, $Cr = 1,0\%$ (а, б), $Cr = 0,9$ (в, г) (4 – мартенсит, %; 5 – феррито-перлит, %; 6 – бейнит, %, 7 – $\sigma_{инт}$, 8 – $\sigma_{x_2x_2}$).

На рис. 4 и 5 изображены результаты определения фазового состава и напряжений для сталей с различным содержанием Mn . Графики на рис. 4 получены с использованием модели 1, на рис. 5 – модели 2. Химический состав стали: $C = 0,15\%$, $Si = 0,3\%$, $Cr = 1,0\%$, $Mn = 0,1\%$ (а, б), $Mn = 1,0\%$ (в, г).

Данные рис. 6 и 7 иллюстрируют влияние относительного содержания легирующих элементов Cr и Mn на максимальное относительное содержание мартенсита в зоне термического влияния и максимальную интенсивность напряжений. Результаты на рис. 6, а и рис. 7, а получены с использованием модели 1, а на рис. 6, б и рис. 7, б – модели 2 соответственно.

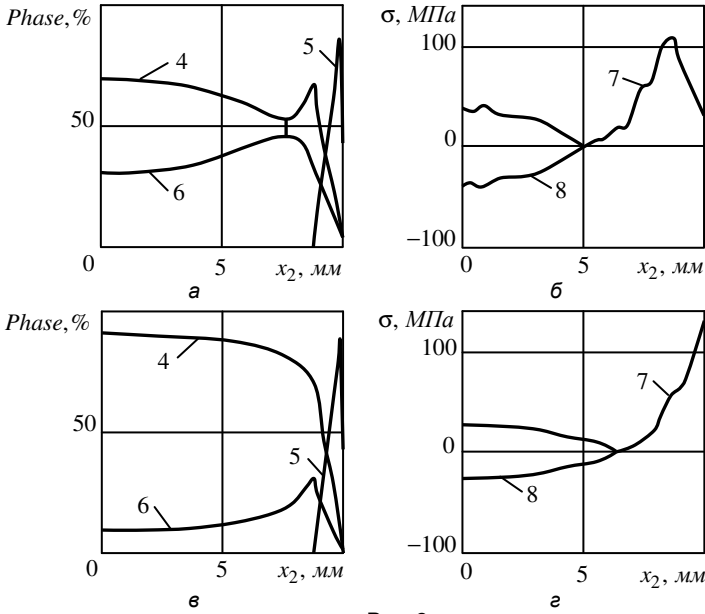


Рис. 2

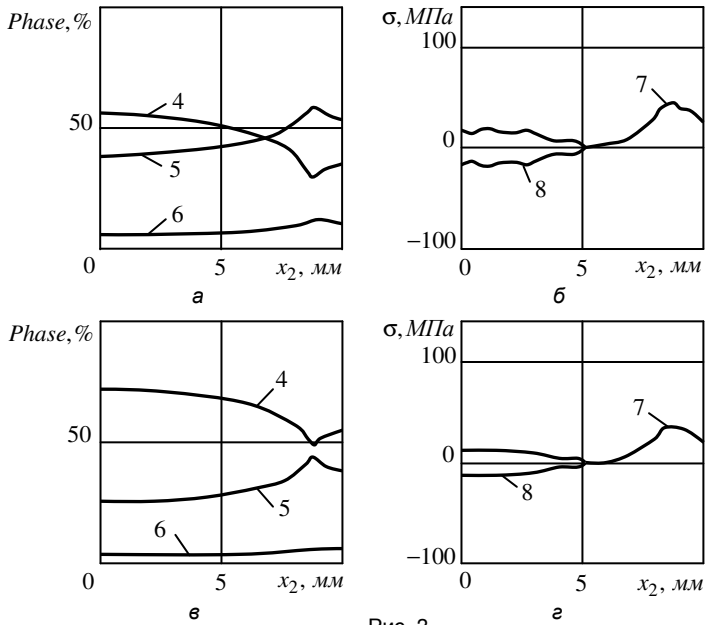


Рис. 3

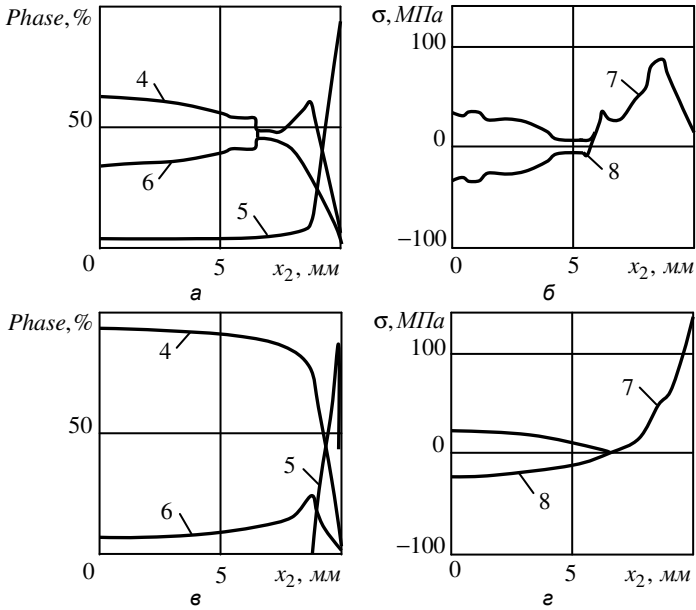


Рис. 4

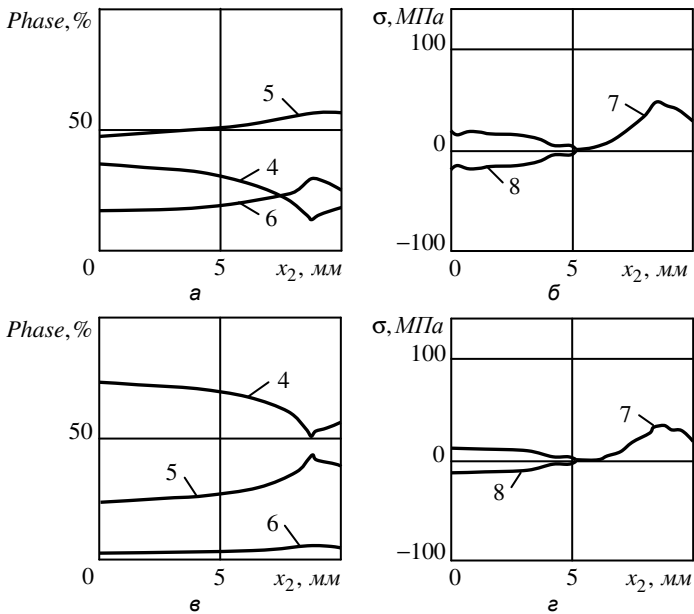


Рис. 5

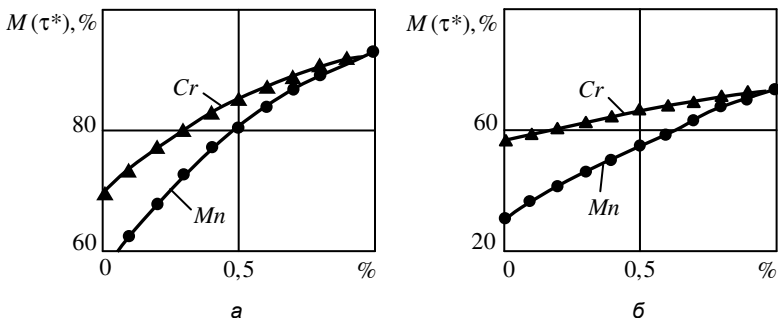


Рис. 6

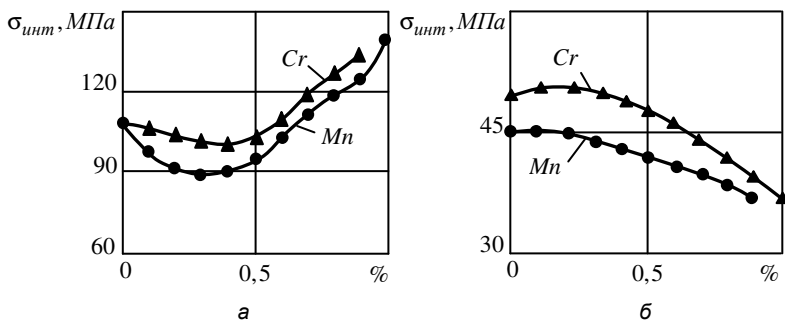


Рис. 7

Таким образом, количественные значения показателей фазового состава и напряжений в пластине существенно зависят от используемой статистической модели. В этой связи при расчете фазового состава и напряженного состояния стального изделия необходимо использовать статистические модели адаптированные под материал, для которого производится расчет.

РЕЗЮМЕ. Запропонована модель для кількісного розрахунку фазового складу і напруженого стану сталевієї пластини при нагріві рухомим нормально розподієним джерелом. У роботі досліджується вплив хімічних елементів Mn і Cr на величину і розподіл залишкових структурних напружень. Проведено порівняльний аналіз результатів розрахунку при використанні різних статистичних моделей для визначення фазового складу.

SUMMARY. The model for the numerical calculation of the phase content and stress state of a plate subjected heating by moving normally distributed source is proposed. The action of Mn and Cr on the value and distribution of structural residual stress is investigated. Comparative analyses of the result archived by using different statistical models for determination of the phase content been done.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. Жукевич-Стоша А. В. Процесс закалки и метод численного определения возникающих напряжений // Журн. тех. физика. –

1940. – Т. 10, вып. 6. – С. 478–490. 2. *Ломакин В. А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел – М.: Наука, 1970. – 175 с. 3. *Касаткин О. Г., Зайффарт П.* Интерполяционные модели для оценки фазового состава зоны термического влияния при дуговой сварке низколегированных сталей // Автоматическая сварка. – 1984. – № 1. – С. 7–11. 4. *Зайффарт П., Касаткин О. Г.* Расчетные модели для оценки механических свойств металла ЗТВ при сварке низколегированных сталей // Микроструктура и свойства. – 2002. – № 2. – С. 103–106. 5. *Seyffarth P.* Schweiss-ZTU-Schaubilder. – Berlin: Verlag Technik, 1982. – 233 s. 6. *Seeffarth P., Meyer B., Scharff A.* Großer Atlas Schweiß-ZTU-Schaubilder. – Düsseldorf: Deutscher Verlag für Schweißtechnik DVS. – Verlag Gmb, 1992. – 175 s. 7. *Hachkevych O., Astashkin V., Kozakevych T., et al.* Calculation of the phase content of a steel plate at local heating // Kovove Mater. – 2007 – № 45. – P. 319–325. 8. Uniform phase content optimal local heating of thin steel plates / V. Astashkin, O. Hachkevych, R. Kushnir, T. Kozakevych, J. Szymczak and S. Szymura // Optimization of production processes / Ed. M. Gajek. – Opole: OWPO, 2008. – P. 11-21. 9. *Новацикий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1985. – 872 с.

*Институт прикладных проблем механики
и математики НАН Украины, г. Львов,*

Поступила 02.11.2009

УДК 539.3

В. С. КИРИЛЮК, канд. физ.-мат. наук

**О ВЛИЯНИИ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НА КОНТАКТНОЕ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НАГРЕТОГО ПЛОСКОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО
ШТАМПА С ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ**

Использование пьезокерамических материалов при изготовлении элементов измерительных приборов, преобразователей энергии и др. стимулирует интерес к изучению распределения силовых, электрических и температурных полей в электроупругих телах с учетом связанности физических полей [1–6]. В работах [1, 3, 4] рассматривались контактные задачи термоэлектроупругости, задачи о давлении нагретого плоского жесткого штампа на упругое изотропное полупространство решены в работах [7, 8]. В работе [9] приведены результаты исследований по контактным задачам для тел с начальными напряжениями, а в [10] даны представления решений связанной системы уравнений электроупругости. В данной статье решена задача о вдавливании нагретого плоского эллиптического штампа в электроупругое полупространство. Найдена взаимосвязь между значениями силы вдавливания, температуры нагрева и свойствами пьезокерамического материала, которая позволяет прогнозировать появление отслоения материала под штампом. Изучено влияние связанности силового и электрического полей, а также величины нагрева штампа на характеристики его контактного взаимодействия с полупространством.

Постановка задачи. Рассмотрим занимающее область $z \leq 0$ пьезокерамическое полупространство, в которое без трения вдавливается нагретый плоский штамп эллиптического сечения. Будем считать, что ось Oz совпадает с осью поляризации тела.

Граничные условия на поверхности полупространства принимают вид

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \text{ при } z = 0, \quad \sigma_{zz} = 0 \text{ при } (x, y) \notin \Omega;$$

$$T(x, y, 0) = T_q \left(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2\right)^q, \quad (x, y) \in \Omega;$$

$$T(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \notin \Omega; \quad u_z(x, y, 0) = \delta, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

где $\Omega: x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$; $T(x, y, 0) > 0$ – температура нагрева штампа; δ – неизвестное значение перемещения. Сила вдавливания штампа связана с контактным давлением соотношением

$$P = \iint_{\Omega} -\sigma_{zz}(x, y) dx dy.$$

При отсутствии электродного покрытия на поверхности полупространства

$$D_z(x, y) = 0 \text{ при } z = 0, \quad (2)$$

где D_z – нормальная компонента вектора электрических перемещений.

Метод решения. Уравнения термоэлектроупругости для рассматриваемой среды имеют вид

$$\begin{aligned} c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{y,xy} + \\ + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,xz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,xz} = \beta_{11} T_{,x}, \\ c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{x,xy} + \\ + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,yz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,yz} = \beta_{11} T_{,y}, \\ (c_{13}^E + c_{44}^E)(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + \\ + e_{15}(\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33} \Psi_{,zz} = \beta_{33} T_{,z}, \\ (e_{31} + e_{15})(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + e_{15}(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + e_{33} u_{z,zz} - \\ - \epsilon_{11}^S (\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) - \epsilon_{33}^S \Psi_{,zz} = -p_3 T_{,z}, \\ \lambda_{11}(T_{,xx} + T_{,yy}) + \lambda_{33} T_{,zz} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$ – модули упругости; e_{31}, e_{15}, e_{33} – пьезомодули; $\epsilon_{11}^S, \epsilon_{33}^S$ – диэлектрические проницаемости; $\lambda_{11}, \lambda_{33}$ – коэффициенты теплопроводности; β_{11}, β_{33} – коэффициенты температурных напряжений; p_3 – пирозлектрическая постоянная.

Решение системы уравнений (3) можно представить через пять потенциальных функций Φ_i ($i = \overline{1, 5}$) [6]:

$$\begin{aligned} u_x = \sum_{j=1}^4 \Phi_{j,x} + \Phi_{5,y}, \quad u_y = \sum_{j=1}^4 \Phi_{j,y} - \Phi_{5,x}, \\ u_z = \sum_{j=1}^4 k_j \Phi_{j,z}, \quad \Psi = \sum_{j=1}^4 l_j \Phi_{j,z}, \end{aligned} \quad (4)$$

где k_j, l_j – постоянные, подлежащие определению. При этом после подстановки выражений перемещений и потенциала (4) в уравнения (3) можно

убедиться, что функции Φ_j удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + \nu_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 5), \quad (5)$$

в которых $\nu_5 = 2c_{44}^E / c_{11}^E - c_{12}^E$; ν_i ($i = \overline{1, 3}$) – корни алгебраического уравнения третьего порядка

$$\begin{aligned} & \nu^3 (A_1 B_2 - C_1 D_2) + \nu^2 (A_1 B_3 + A_2 B_2 - C_1 D_3 - C_2 D_2) + \\ & + \nu (A_2 B_3 + A_3 B_2 - C_2 D_3 - C_3 D_2) + A_3 B_3 - C_3 D_3 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Постоянные k_j , l_j ($j = \overline{1, 3}$) в формулах (4) связаны со значениями ν_j соотношениями

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{e_{33} k_j - \epsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = \nu_j \quad (j = 1, 3), \quad (7)$$

где

$$a_j = c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j, \quad d_j = e_{15} (1 + k_j) - \epsilon_{11}^S l_j \quad (j = \overline{1, 4}). \quad (8)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} k_j &= \frac{\left[(\nu_j c_{11}^E - c_{44}^E) (e_{15} \nu_j - e_{33}) + \nu_j (c_{44}^E + c_{13}^E) (e_{31} + e_{15}) \right]}{\left[(c_{13}^E + c_{44}^E) (e_{15} \nu_j - e_{33}) - (c_{44}^E \nu_j - c_{33}^E) (e_{31} + e_{15}) \right]}, \\ l_j &= \frac{\left[(\nu_j c_{11}^E - c_{44}^E) (\nu_j c_{44}^E - c_{33}^E) + \nu_j (c_{44}^E + c_{13}^E)^2 \right]}{\left[(\nu_j c_{44}^E - c_{33}^E) (e_{31} + e_{15}) - (c_{13}^E + c_{44}^E) (e_{15} \nu_j - e_{33}) \right]} \quad (j = \overline{1, 3}). \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Phi_{4,zz} = \frac{m}{k^2} T, \quad \Phi_{4,xx} + \Phi_{4,yy} + k^2 \Phi_{4,zz} = 0, \quad T_{,xx} + T_{,yy} + k^2 T_{,zz} = 0,$$

где $k^2 = \lambda_{33} / \lambda_{11}$ (отношение коэффициентов теплопроводности), а m – неизвестная постоянная. Для определения неизвестных постоянных k_4 , l_4 получаем систему двух линейных уравнений [6]

$$\begin{aligned} & \left(\beta_{33} (c_{13}^E + c_{44}^E) - \beta_{11} c_{33}^E + \beta_{11} c_{44}^E k^2 \right) k_4 + \left(\beta_{33} (e_{15} + e_{31}) - \beta_{11} e_{33} + \right. \\ & \left. + \beta_{11} e_{15} k^2 \right) l_4 + \left(\beta_{33} (c_{44}^E - c_{11}^E k^2) + \beta_{11} (c_{44}^E + c_{13}^E) k^2 \right) = 0, \\ & \left(-p_3 (c_{13}^E + c_{44}^E) - \beta_{11} e_{33} + \beta_{11} e_{15} k^2 \right) k_4 + \left(-p_3 (e_{15} + e_{31}) + \beta_{11} \epsilon_{33}^S - \right. \end{aligned}$$

$$-\beta_{11}\epsilon_{11}^S k^2)l_4 + (-p_3(c_{44}^E - c_{11}^E k^2) + \beta_{11}(e_{15} + e_{31})k^2) = 0. \quad (10)$$

Далее находим

$$m = \frac{\beta_{11}k^2}{c_{44}^E + (c_{13}^E + c_{44}^E)k_4 + (e_{15} + e_{31})l_4 - c_{11}^E k^2}.$$

Если ввести обозначения $z_j = z\sqrt{v_j^{-1/2}}$ ($j = \overline{1, 5}$), то $\Phi_j(x, y, z_j)$ будут гармоническими функциями в соответствующих системах координат.

Построение решения задачи. Выбирая функций $\Phi_j(x, y, z_j)$ специальным образом [3], рассматриваемую контактную задачу термоэлектроупругости можно привести к поиску неизвестной плотности потенциала простого слоя. При этом получаем

$$u_z(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi} B_1^{Piezo} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}. \quad (11)$$

Напряжения под штампом имеют вид

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = -p(x, y) - \gamma_S^{Piezo1} T_q \left(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2\right)^q \quad (x, y) \in \Omega. \quad (12)$$

Постоянные B_1^{Piezo} и γ_S^{Piezo1} зависят от термоэлектроупругих свойств материала [3].

Для нагретого плоского жесткого эллиптического штампа значения напряжений и перемещений под штампом находим в виде

$$\begin{aligned} -\sigma_{zz}(x, y) &= \frac{P - Q_3}{2\pi ab} \left(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2\right)^{-1/2} + \\ &\quad + \gamma_S^{Piezo1} T_q \left(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2\right)^q, \\ \delta &= \frac{P - Q_3}{2\pi a} B_1^{Piezo} K(e), \\ Q_3 &= \gamma_S^{Piezo1} \iint_{\Omega} T_q \left(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2\right)^q dx dy, \quad P \geq Q_3. \end{aligned} \quad (13)$$

Как следует из (13), если $P \geq Q_3$, то штамп прижат к материалу по всей области контакта и не возникает областей отделения материала. После интегрирования получаем неравенство

$$P \geq \frac{1}{q+1} T_q \gamma_S^{Piezo1} \pi ab. \quad (14)$$

В случае же выполнения противоположного неравенства

$$P < \frac{1}{q+1} T_q \gamma_S^{Piezol} \pi ab$$

за счет первого слагаемого в (13) при приближении к краю штампа возникают растягивающие напряжения и зона отслоения материала.

В работах [7, 8] для задачи о контакте нагретого плоского кругового штампа с упругим изотропным полупространством предложено искать новую зону контакта, которая меньше размеров самого штампа, из решения задачи для неплоского штампа, устремляя $R \rightarrow \infty$. На основе такого подхода и результатов работы [3], рассматривая для этого задачу о параболоидальном штампе эллиптического сечения, вдавливаемого в пьезокерамическое полупространство без трения, получаем геометрические параметры новой области контакта. Она меньше размеров основания штампа, однако остается эллиптической. При этом $b_* / a_* = b / a$, т.е. отношение полуосей области контакта с отслоением равно отношению полуосей эллипса основания штампа. В результате исследований получаем

$$a_* = \sqrt{\frac{P(q+1)}{\gamma_S^{Piezol} T_q \pi \sqrt{1-e^2}}}, \quad b_* = a_* \sqrt{1-e^2}. \quad (15)$$

Контактные напряжения под нагретым штампом в случае отслоения материала вблизи края штампа принимает вид

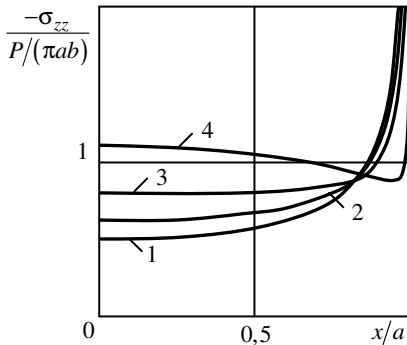
$$-\sigma_{zz}(x, y) = \gamma_S^{Piezol} T_q \left(1 - x^2/a_*^2 - y^2/b_*^2\right)^q, \quad (16)$$

что отличается от выражения напряжений в формулах (13) отсутствием сингулярного слагаемого. Следовательно, увеличение нагрева штампа при превышении некоторого порогового значения, что зависит от силы P и термоэлектродупругих свойств пьезокерамического материала, приводит к отслоению материала под штампом. Размеры области контакта (с отслоением), отвечающие формулам (15), можно получить более простым способом, заменяя неравенство (14) равенством.

Анализ результатов численных исследований. Рассмотрим случай распределения температурного поля под штампом в виде $T_0(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)^{1/4}$, т.е. при $q = 1/4$ и $T_0 > 0$. Положим $T_0 = P / [(\pi ab) \gamma_S^{Piezol} \alpha^*]$. Рассмотрим случаи нагрева штампа, когда α^* равно 1000; 4; 2; 1. Поскольку величина T_0 обратно пропорциональна значению α^* , в последнем случае получаем наибольший нагрев штампа. Для этих значений параметра α^* отслоение материала под штампом не происходит, и выражение напряжений под штампом принимает вид

$$-\frac{\sigma_{zz}\alpha^*}{[P/(\pi ab)]} = \frac{1}{2} \left[\alpha^* - \frac{4}{5} \right] \left(1 - x^2/a^2 - x^2/b^2 \right)^{-1/2} + \left(1 - x^2/a^2 - x^2/b^2 \right)^{1/4}.$$

На рисунке показано изменение напряжений под нагретым эллиптическим штампом. Линии 1–4 на рисунке отвечают значениям α^* , равным 1000; 4; 2; 1 соответственно. Видно, что при увеличении значения температурного нагрева плоского штампа напряжения увеличиваются в центре штампа и уменьшаются при приближении к его границе.



Из полученных результатов, полагая пьезомодули и диэлектрические проницаемости пьезокерамического материала равными нулю, получим подобные соотношения для чисто упругого трансверсально-изотропного материала. При этом величина γ_S^{Piezo1} переходит в соответствующее выражение γ^{Trans} .

Осуществляя дальнейший переход к изотропному материалу, находим, что $\gamma^{Trans} \rightarrow \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha \mu$, где ν – коэффициент Пуассона; μ – модуль сдвига; α – коэффициент линейного температурного расширения материала.

Для материала PZT-5H [6] в результате вычислений получаем, что отношение $\gamma_S^{Piezo1} / \gamma^{Trans} = 1,063$. Это означает, что связанность силового и электрического полей увеличивает влияние температурного поля на распределение напряжений под штампом для этого материала примерно на 6%.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу про тиск нагрітого плоского еліптичного штампу (без тертя) на п'єзокерамічний півпростір. Досліджено можливість виникнення відшарування матеріалу під нагрітим штампом. У вигляді простих нерівностей, до яких входять величина сили, що діє на штамп, розподіл температурного поля та термоелектропружні властивості матеріалу, отримано умови контакту нагрітого штампу з півпростором без відшарування матеріалу та при його появі. У замкненому вигляді знайдено розв'язок задачі та отримано контактні характеристики взаємодії штампу з п'єзокерамічним півпростором. Виявлено вплив зв'язаності силового і електричного поля, а також температури нагріву штампу на параметри контакту. Як частинний випадок із знайдених виразів випливають результати контактної взаємодії нагрітого штампу з чисто пружним трансверсально-ізоотропним півпростором. Проведено числові дослідження контактного тиску під нагрітим штампом.

SUMMARY. The problem on pressure of a heated plane elliptical punch (without friction) on piezoelectric half-space was considered. It was researched the possibility of material separation under the heated punch. As simple inequalities, which contain the values of stamping force, temperature distribution and thermoelastoelectricity properties of material, it was obtained the conditions of contact of the heated punch without separation of materials and with separation. In closed form the solution of the problem was found and it was obtained the contact parameters of interaction punch with the piezoelectric half-space. The influence of connectedness of force and electrical fields, and also temperature distribution of the punch on contact parameters was shown. The results of contact interaction of the heated punch with purely elastic transversally-isotropic half-space follow from obtained expressions as a special case. The numerical researches of contact pressure under the heated punch were carried out.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. *Podil'chuk Yu. N.* Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelastoelectric Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – Vol. 39, № 2. – P. 132–170. 2. *Kaloerov S. A.* Determining the intensity factors for stresses, electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – Vol. 43, № 6. – P. 631–637. 3. *Кирилюк В. С.* О соответствии между решениями специального класса контактных задач термоупругости и термоэлектроупругости для полупространства // *Вісн. Донец. ун-ту.* – 2006. – Вип. 2. – С. 69–76. 4. *Кирилюк В. С.* О давлении нагретого жесткого кругового штампа на пьезокерамическое полупространство с отслоением материала под штампом // *Теорет. и прикладная механика.* – 2008. – Вып. 44. – С. 144–151. 5. *Chen W. Q, Lim C. W.* 3D point force solution for a permeable penny-shaped crack embedded in an infinite transversely isotropic piezoelectric medium // *Int. J. Fract.* – 2005. – Vol. 131, № 3. – P. 231–246. 6. *Shang F., Kuna M., Kitamura T.* Theoretical investigation of an elliptical crack in thermopiezoelectric material. Part 1: Analytical development // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 2003. – Vol. 40, № 3. – P. 237–246. 7. *Barber J. R.* Indentation of an elastic half space by a cooled flat punch // *Q. J. Mech. Appl. Math.* – 1982. – Vol. 35. – P. 141–154. 8. *Pauk V.* Plane Contact of Hot Flat-Ended Punch and Thermoelastic Half-Space Involving Finite Friction // *J. Appl. Mech.* – 2007. – Vol. 74, № 6. – P. 1172–1177. 9. *Бабич С. Ю., Гузь А. Н., Рудницький В. Б.* Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями применительно к жестким и упругим штампам // *Прикладная механика.* – 2004. – Т. 40, № 7. – С. 41–69. 10. *Шульга Н. А.* О волновых потенциалах электроупругости для пьезокерамических материалов // *Теорет. и прикладная механика.* – 1984. – Вып. 15. – С. 73–76.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 03.10.2009

УДК 539.3

Б. Е. МОНАСТЫРСКИЙ, канд. физ.-мат. наук, М. М. МЫКЫТЫН

КОНТАКТ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА И ЖЕСТКОГО ОСНОВАНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОГО ИСТОЧНИКА ОХЛАЖДЕНИЯ

В работе [1] решена задача о локальном расслоении двух трансверсально-изотропных полупространств под действием сосредоточенных сил. Образование межповерхностных зазоров между упругим слоем и жестким или упругим основанием изучалось в [2–4]. Локальное нарушение контакта тел под действием термических факторов рассматривалось в [5–7]. В настоящей работе изучается контакт упругого полупространства и жесткого основания под действием сосредоточенного источника охлаждения, который вызывает локальное расслоение тел.

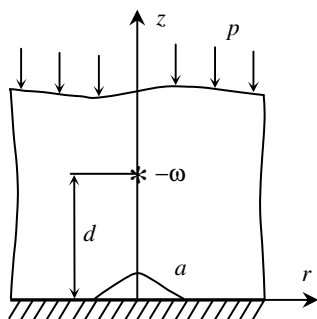


Рис. 1

Постановка задачи. Рассмотрим одно-сторонний бесфрикционный контакт упругого изотропного полупространства и жесткого термоизолированного основания под действием равномерно распределенного на бесконечности давления p . На расстоянии d от границы в упругом теле (рис. 1) помещен сосредоточенный источник охлаждения интенсивности $(-\omega)$. Вследствие деформаций полупространства, вызванных тепловым фактором, может произойти локальное расслоение контактирующих тел с образованием кругового зазора. Радиус зазора a заранее неизвестен.

Граничные условия соответствующей осесимметричной задачи термоупругости запишутся в виде

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \sigma_{rz}(r, 0) = 0, \quad \sigma_{zz}(r, 0) = 0 \quad (1)$$

на зазоре ($z = 0, 0 < r < a$);

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \sigma_{rz}(r, 0) = 0, \quad u_z(r, 0) = 0 \quad (2)$$

на участках контакта ($z = 0, a < r < \infty$);

$$T = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{zz} = -p \quad (3)$$

на бесконечности. Здесь T – температура; u_z – компонента вектора перемещений; σ_{rz} , σ_{zz} – компоненты тензора напряжений; k – коэффициент теплопроводности. Кроме того, должно выполняться условие плавного смыкания берегов зазора [7]

$$u'_z(a, 0) = 0, \quad (4)$$

которое служит для определения радиуса зазора a .

Метод решения. Распределение температуры в полупространстве с термоизолированной границей, в котором действует сосредоточенный тепловой источник, получено в [8]:

$$T(r, z) = -\frac{\omega}{4\pi k} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+d)^2}} \right). \quad (5)$$

Для определения напряженно-деформированного состояния используем метод суперпозиции.

Представим решение задачи в виде суммы

$$u = u^{(0)} + u^{(1)}, \quad \sigma = \sigma^{(0)} + \sigma^{(1)}, \quad (6)$$

где индексом «(0)» обозначены величины для решения задачи о полном контакте тел без учета образования зазора; индекс «(1)» – величины, соответствующие возмущенному напряженно-деформированному состоянию за счет локального расслоения.

Решение задачи о полном контакте может быть получено на основании результатов [8]. В частности, для нормальных перемещений и напряжений на поверхности $z = 0$ имеем

$$u_z^{(0)}(r, 0) = 0, \quad \sigma_{zz}^{(0)}(r, 0) = -p + \frac{\omega\alpha_t(1+\nu)\mu}{2\pi k(1-\nu)} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2}} + \frac{d^2}{\sqrt{r^2 + d^2}^3} \right]. \quad (7)$$

Для определения полей локальных возмущений $u^{(1)}$, $\sigma^{(1)}$, вызванных образованием зазора, используем интегральное представление компонент вектора перемещений и тензора напряжений для полупространства, граница которого свободна от касательных напряжений [9]. В частности, компоненты $u_z^{(1)}$, $\sigma_{zz}^{(1)}$ имеют вид

$$u_z^{(1)}(r, z) = \int_0^\infty \left[\left(-\frac{1}{2(1-\nu)} z\xi + 1 \right) \xi B(\xi) e^{-\xi z} J_0(\xi r) \right] d\xi,$$

$$\sigma_{zz}^{(1)}(r, z) = \frac{\mu}{1-\nu} \int_0^{\infty} [(-z\xi + 1)\xi^2 B(\xi) e^{-\xi z} J_0(\xi r)] d\xi. \quad (8)$$

Производ функции $B(\xi)$ служит для удовлетворения оставшихся граничных условий, а именно, третьего из условий (1) и третьего из условий (2). В результате получаем парные интегральные уравнения вида

$$\int_0^{\infty} \xi^2 B(\xi) J_0(\xi r) d\xi = \frac{(1-\nu)p}{\mu} - \frac{\omega\alpha_t(1+\nu)}{2\pi k} \times \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2}} + \frac{d^2}{\sqrt{r^2 + d^2}^3} \right], \quad 0 \leq r < a; \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} \xi B(\xi) J_0(\xi r) d\xi = 0, \quad a < r < \infty. \quad (10)$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона; μ – модуль сдвига; α_t – коэффициент линейного теплового расширения.

Для решения уравнения (9)–(10) используем подстановку [10]

$$B(\xi) = \frac{1}{\xi} \int_0^a \varphi(t) \sin(\xi t) dt. \quad (11)$$

Подстановка (11) тождественно удовлетворяет уравнению (10), а равенство (9) сводит к уравнению Абея

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^r \frac{t\varphi(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt = f(r), \quad (12)$$

где $f(r)$ – правая часть уравнения (9).

Используя формулу обращения [11] уравнения (12)

$$\varphi(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\rho f(\rho)}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} d\rho \quad (13)$$

и вычисляя соответствующие интегралы, находим

$$\varphi(r) = -\frac{2p(1-\nu)}{\pi\mu} r + \frac{\omega\alpha_t(1+\nu)}{\pi^2 k} \left(\arctg \frac{r}{d} + \frac{rd^2}{d(r^2 + d^2)} \right). \quad (14)$$

После определения функции $\varphi(r)$ решение задачи может быть получено на основании соотношений (6), (7), (8), (11). Так, для компонент u_z и σ_{zz} на поверхности $z = 0$ находим

$$u_z(r, 0) = -\frac{2p(1-\nu)}{\pi\mu}\sqrt{a^2-r^2} + \frac{\omega\alpha_t(1+\nu)}{\pi^2k} \int_r^a \frac{\operatorname{arctg} \frac{t}{d}}{\sqrt{t^2-r^2}} dt +$$

$$+ \frac{\omega\alpha_t(1+\nu)d}{\pi^2k\sqrt{r^2+d^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2-r^2}}{\sqrt{r^2+d^2}},$$

$$0 < r < a, \quad u_z(r, 0) = 0, \quad a \leq r < \infty; \quad (15)$$

$$\sigma_{zz}(r, 0) = 0, \quad 0 < r < a,$$

$$\sigma_{zz}(r, 0) = -p + \frac{\mu\omega\alpha_t(1+\nu)}{2\pi k(1-\nu)} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2}} + \frac{d^2}{\sqrt{r^2+d^2}^3} \right) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{r^2-a^2}} \left[\frac{2pa}{\pi} - \frac{\mu\omega\alpha_t(1+\nu)}{\pi^2k(1-\nu)} \left(\operatorname{arctg} \frac{a}{d} + \frac{ad}{a^2+d^2} \right) \right] -$$

$$- \frac{2p}{\pi} \operatorname{arcsin} \frac{a}{r} + \frac{\mu\omega\alpha_t(1+\nu)}{\pi^2k(1-\nu)} \left(\frac{\operatorname{arctg} \frac{a\sqrt{d^2+r^2}}{d\sqrt{r^2-a^2}}}{\sqrt{r^2+d^2}} + \frac{ad\sqrt{r^2-a^2}}{r^2(d^2+a^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{d^2 \operatorname{arctg} \frac{a\sqrt{d^2+r^2}}{d\sqrt{r^2-a^2}}}{\sqrt{r^2+d^2}^3} - \frac{ad^3\sqrt{r^2-a^2}}{r^2(d^2+a^2)(r^2+d^2)} \right), \quad a \leq r < \infty. \quad (16)$$

Для определения неизвестного радиуса зазора a из условия (4) получим трансцендентное уравнение:

$$-p + \frac{\mu\omega\alpha_t(1+\nu)}{2\pi k(1-\nu)} \left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{d} + \frac{d}{a^2+d^2} \right) = 0. \quad (17)$$

Заметим, что уравнение (17) не имеет решения в области физически

допустимых неотрицательных значений радиуса зазора $a \in [0, +\infty)$, если интенсивность источника охлаждения $\omega < \frac{p\pi k(1-\nu)d}{\mu\alpha_t(1+\nu)}$. Это означает, что для такого соотношения параметров расслоение между телами не имеет места.

Анализ числовых результатов. На основании построенного решения проанализированы контактные нормальные напряжения $\sigma_{zz}(r, 0)$ и высота зазора $u_z(r, 0)$ при $0 < r < a$. Трансцендентное уравнение (17) решалось численно, предварительно локализовался корень, затем он уточнялся методом секущих. Ниже приведены графики для безразмерных величин:

$$\bar{a} = \frac{a}{d}, \quad \bar{r} = \frac{r}{d}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega a_t (1 + \nu)}{2\pi k d},$$

$$\bar{p} = \frac{p(1-\nu)}{\mu}, \quad \bar{u}_z = \frac{u_z}{d}, \quad \bar{\sigma}_{zz} = \frac{\sigma_{zz}(1-\nu)}{\mu}.$$

На рис. 2 изображены графики распределения контактных напряжений σ_{zz} . Как видно, они на участке зазора равны нулю, а на участке непосредственного касания тел – сжимающие. При удалении от зоны расслоения напряжения σ_{zz} асимптотически стремятся к значению нормальных напряжений, действующих на бесконечности. На рис. 3 показана форма зазо-

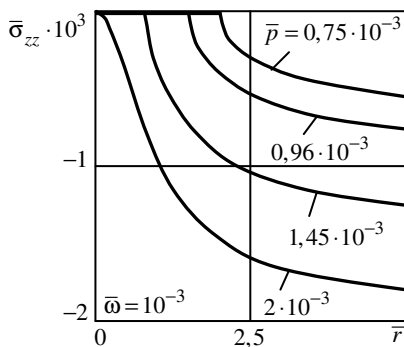


Рис. 2

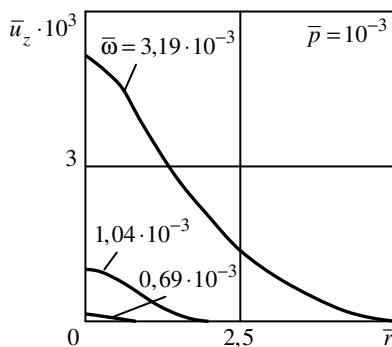


Рис. 3

ра. Видим, что радиус и высота зазора синхронно увеличиваются с ростом интенсивности источника охлаждения.

РЕЗЮМЕ. Вивчається явище відшарування пружного півпростору від жорсткої термоізолюваної основи під дією точкового підповерхневого джерела охолодження. Методом парних інтегральних рівнянь отримано аналітичний розв'язок сформульованої осесиметричної задачі термопружності. Проаналізовано форму і розміри зазору, розподіл контактних напружень.

SUMMARY. The local separation of the elastic semi-infinite solid from thermally insulated rigid substrate due to concentrated heat sink is studied. The corresponding axially symmetric problem of thermoelasticity is solved by dual integral equations method. The contact parameters of the problem, i.e. the shape and size of separation and the contact stress distribution, have been analyzed.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. *Selvandurai A. P. S.* The body force induced separation at a frictionless precompressed transversely isotropic elastic interface // *Trans. CSME.* – 1983. – Vol. 7. – P. 154–157. 2. Приварников А. К. О контакте слоя с упругим полупространством // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* – 1972. – № 4. – С. 163–167. 3. *Keer L. M., Chantaramunkorn K.* Loss of contact between an elastic layer and half-space // *J. Elast.* – 1979. – Vol. 2. – P. 191–197. 4. *Александров В. М.* Устойчивость системы покрытие подложка при продольном сжатии покрытия // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* – 2001. – № 4. – С. 76–79. 5. *Мартиняк Р. М.* Порушення контакту півпросторів при термомеханічній дії підповерхневого включення // *Доп. НАН України.* 1998. – № 12. – С. 71–77. 6. *Мартиняк Р., Криштафович А., Мачишин І.* Односторонній контакт тіл з узгодженими поверхнями за дії джерел і стоків тепла // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* – 1999. – Вип. 55. – С. 169–173. 7. *Kit H. S., Monastyrskyu B. Ye.* Thermoelastic interaction of two semi-infinite bodies under condition of local contact absence // *Proc. the 3 Int. Congress on Thermal Problem "Thermal Stress'99", Cracow (Poland), June 13–17, 1999.* – Cracow, 1999. – P. 123–126. 8. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с. 9. *Кит Г. С., Моностирський Б. Є.* Контактна задача для півпростору та жорсткої основи з осесиметричною виїмкою // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1998. – Т. 41, № 4. – С. 7–11. 10. *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. – Л.: Наука, 1977. – 220 с. 11. *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – М.: Наука, 1970. – 672 с.

*Институт прикладных проблем механики
и математики НАН Украины, г. Львов*

Поступила 29.03.2009

УДК 539.3

С. А. КАЛОЕРОВ, д-р физ.-мат. наук, А. В. ПЕТРЕНКО

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИНКИ С ТРЕЩИНАМИ МЕТОДОМ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ

В последние десятилетия в связи с бурным развитием техники, электроники и приборостроения всевозрастающий интерес ученых вызывает исследование напряженно-деформированного состояния элементов конструкций, изготовленных из пьезоматериалов [1–4]. Чаще всего эти элементы имеют концентраторы напряжений типа отверстий, трещин, включений. Под действием механических сил и электромагнитных полей вблизи этих концентраторов возникают запредельные напряжения или электромагнитные поля, которые могут привести к разрушению элемента конструкции. Но к настоящему времени достаточно полно решены лишь вопросы исследования электроупругого или магнитоупругого состояния многосвязных тел, когда не учитываются магнитные или электрические свойства материалов [4]. В работе [5] предложен метод исследования электромагнитоупругого состояния многосвязных тел, дано решение задачи для тела с одним эллиптическим отверстием. Этим же методом в статье [6] решены задачи для многосвязной области с отверстиями и трещинами. В данной статье предложен метод решения задач электромагнитоупругости для пьезопластин с трещинами вдоль одной прямой. Он основан на решении задач Римана-Гильберта для комплексных потенциалов и обеспечивает точное удовлетворение граничных условий на берегах трещин.

Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную пластинку из пьезоматериала с трещинами $[c_n, d_n]$ ($n = \overline{1, N}$) вдоль одной прямой, принимаемой за ось Ox прямоугольной системы координат Oxy . Обозначим прерывистую линию из разрезов $c_n d_n$ через L' , область, занимаемую пластинкой, – через S . Будем считать, что на бесконечности задано однородное электромагнитоупругое состояние (ЭМУС), характеризуемое значениями напряжений $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$, компонентов векторов индукций D_x^∞, D_y^∞ (или напряженности E_x^∞, E_y^∞) электрического поля и B_x^∞, B_y^∞ (или H_x^∞, H_y^∞) магнитного поля. На берегах трещин действуют усилия σ_y, τ_{xy} , главный вектор которых равен нулю на каждой из них. В точках z_j^0 ($j = \overline{1, J}$) области S действуют сосредоточенные силы $P_j^0(X_j^0, Y_j^0)$, электрические за-

ряды $Q_{эj}^0$ или заряды магнитных диполей Q_{mj}^0 . Будем считать, что на берегах трещин индукции электромагнитного поля равны нулю ($D_y = B_y = 0$), т.е. трещины обладают пренебрежимо малой диэлектрической и магнитной проницаемостями. Угол поворота всей пластинки как целой равен нулю.

При использовании обобщенных комплексных потенциалов определение ЭМУС рассматриваемой пластинки сводится к нахождению четырех функций $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) из соответствующих граничных условий. После определения $\Phi_k(z_k)$ основные характеристики ЭМУС (напряжения, перемещения, индукции, напряженности и потенциалы электромагнитного поля) вычисляются по формулам [4, 5]

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}) \Phi_k'(z_k), \\
 (u, v, \varphi, \psi) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k) + (0, 0, \varphi_0, \psi_0), \\
 (D_x, D_y) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{7k}, \lambda_{8k}) \Phi_k'(z_k), \\
 (E_x, E_y) &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (r_k^0, \mu_k r_k^0) \Phi_k'(z_k), \\
 (B_x, B_y) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{9k}, \lambda_{10k}) \Phi_k'(z_k), \\
 (H_x, H_y) &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi_k'(z_k).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь μ_k – корни известного характеристического уравнения; λ_{ik} – постоянные, зависящие от параметров μ_k ; p_k, q_k, r_k^0, h_k^0 – величины, зависящие от физико-механических свойств материала и параметров μ_k ; φ_0 и ψ_0 – нулевые уровни потенциалов электрического и магнитного полей соответственно.

На линии L' функции должны удовлетворять условиям [4, 5]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ki}^0 \Phi_k(t_k) = F_i(t) \quad (i = \overline{1, 4}) \tag{2}$$

или в дифференциальной форме

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ki}^0 \Phi_k'(t_k) = f_i(t), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} (g_{k1}^0, g_{k2}^0, g_{k3}^0, g_{k4}^0) &= (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}), \\ (F_1, F_2, F_3, F_4) &= - \int_{L'} (\tau_{xy}, \sigma_y, 0, 0) dt + (c_1, c_2, c_3, c_4), \\ (f_1, f_2, f_3, f_4) &= (-\tau_{xy}, -\sigma_y, 0, 0). \end{aligned}$$

Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в областях S_k , получаемых из области S аффинными преобразованиями $z_k = x + \mu_k y$. При этом разрезы $[c_n, d_n]$ в S_k совпадают с разрезами L' области S . В данном случае для комплексных потенциалов имеют место выражения [4, 5]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{j=1}^J A_{kj}^0 \ln(z_k - z_{kj}^0) + \Phi_{k0}(z_k), \quad (4)$$

где Γ_k – постоянные, определяемые из системы уравнений

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{7k}, \lambda_{8k}, \lambda_{9k}, \lambda_{10k}, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k = \\ = (\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty, D_x^\infty, D_y^\infty, B_x^\infty, B_y^\infty, 0), \end{aligned}$$

если на бесконечности заданы механические усилия и индукции электромагнитного поля, или из

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}, -r_k^0, -\mu_k r_k^0, -h_k^0, -\mu_k h_k^0, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k = \\ = (\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty, E_x^\infty, E_y^\infty, H_x^\infty, H_y^\infty, 0), \end{aligned}$$

когда вместо индукций на бесконечности заданы напряженности поля; A_{kj}^0 – постоянные, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}, p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) i A_{kj}^0 = \\ = \left(\frac{X_j^0}{2\pi}, \frac{Y_j^0}{2\pi}, \frac{Q_{\partial j}^0}{2\pi}, \frac{Q_{mj}^0}{2\pi}, 0, 0, 0, 0 \right); \end{aligned} \quad (5)$$

X_j^0, Y_j^0 – компоненты сосредоточенной силы в точке z_j^0 ; Q_{zj}^0 и Q_{mj}^0 – действующие в этой же точке сосредоточенные заряды; $z_{kj}^0 = x_j^0 + \mu_k y_j^0$; $\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, кусочно-голоморфные в областях S_k и имеющие линию скачков L' .

Сведение к задачам линейного сопряжения. Решая равенства (3) как систему четырех уравнений относительно $\Phi'_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) и учитывая, что на L' имеют место равенства $t_k = t_{k+j} = t = x$, получаем

$$\Phi'_k(t) + \overline{r_k} \overline{\Phi'_k(t)} + \overline{s_{k+1}} \overline{\Phi'_{k+1}(t)} + \overline{e_{k+2}} \overline{\Phi'_{k+2}(t)} + \overline{m_{k+3}} \overline{\Phi'_{k+3}(t)} = h'_k(t). \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} h'_k(t) &= (-\tau_{xy} M_{6k} - \sigma_y M_{2k}) / \Delta_k, \\ \overline{r_k} &= \left[\overline{g_{k1}^0} M_{6k} + \overline{g_{k2}^0} M_{2k} + \overline{g_{k3}^0} M_{8k} + \overline{g_{k4}^0} M_{10k} \right] / \Delta_k, \\ \overline{s_{k+1}} &= \left[\overline{g_{k+1,1}^0} M_{6k} + \overline{g_{k+1,2}^0} M_{2k} + \overline{g_{k+1,3}^0} M_{8k} + \overline{g_{k+1,4}^0} M_{10k} \right] / \Delta_k, \\ \overline{e_{k+2}} &= \left[\overline{g_{k+2,1}^0} M_{6k} + \overline{g_{k+2,2}^0} M_{2k} + \overline{g_{k+2,3}^0} M_{8k} + \overline{g_{k+2,4}^0} M_{10k} \right] / \Delta_k, \\ \overline{m_{k+3}} &= \left[\overline{g_{k+3,1}^0} M_{6k} + \overline{g_{k+3,2}^0} M_{2k} + \overline{g_{k+3,3}^0} M_{8k} + \overline{g_{k+3,4}^0} M_{10k} \right] / \Delta_k, \\ h_k(t) &= \left[F_1(t) M_{6k} + F_2(t) M_{2k} + F_3(t) M_{8k} + F_4(t) M_{10k} \right] / \Delta_k; \\ \Delta_{k+1} &= -\Delta_k, \quad \Delta_k = g_{k1}^0 M_{6k} + g_{k2}^0 M_{2k} + g_{k3}^0 M_{8k} + g_{k4}^0 M_{10k}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{6k} &= \begin{vmatrix} g_{k+1,2}^0 & g_{k+2,2}^0 & g_{k+3,2}^0 \\ g_{k+1,3}^0 & g_{k+2,3}^0 & g_{k+3,3}^0 \\ g_{k+1,4}^0 & g_{k+2,4}^0 & g_{k+3,4}^0 \end{vmatrix}, & M_{2k} &= - \begin{vmatrix} g_{k+1,1}^0 & g_{k+2,1}^0 & g_{k+3,1}^0 \\ g_{k+1,3}^0 & g_{k+2,3}^0 & g_{k+3,3}^0 \\ g_{k+1,4}^0 & g_{k+2,4}^0 & g_{k+3,4}^0 \end{vmatrix}, \\ M_{8k} &= \begin{vmatrix} g_{k+1,1}^0 & g_{k+2,1}^0 & g_{k+3,1}^0 \\ g_{k+1,2}^0 & g_{k+2,2}^0 & g_{k+3,2}^0 \\ g_{k+1,4}^0 & g_{k+2,4}^0 & g_{k+3,4}^0 \end{vmatrix}, & M_{10k} &= - \begin{vmatrix} g_{k+1,1}^0 & g_{k+2,1}^0 & g_{k+3,1}^0 \\ g_{k+1,2}^0 & g_{k+2,2}^0 & g_{k+3,2}^0 \\ g_{k+1,3}^0 & g_{k+2,3}^0 & g_{k+3,3}^0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

При этом k – индекс, принимающий значения 1, 2, 3, 4, причем значение индекса $k + j$, когда он больше 4, формально полагается равным $k + j - 4$.

Исходя из (6), введем функции [7]

$$\Omega_k(z_k) = r_k \Phi'_k(z_k) + s_{k+1} \Phi'_{k+1}(z_k) + e_{k+2} \Phi'_{k+2}(z_k) + m_{k+3} \Phi'_{k+3}(z_k). \quad (7)$$

Тогда условия (6) примут вид

$$\left[\Phi'_k(t) + \overline{\Omega_k(t)} \right]^\pm = h_k^\pm(t). \quad (8)$$

При этом знак «+» относится к верхним берегам разрезов, «-» – к нижним.

Учитывая, что на L' имеют место равенства $\left[\overline{\Omega_k(t)} \right]^\pm = \overline{\Omega_k^\mp(t)}$ [7], после сложения уравнений (8) друг с другом и вычитания из первого второго, получаем следующую систему задач линейного сопряжения:

$$\begin{aligned} \left[\Phi'_k(t) - \overline{\Omega_k(t)} \right]^+ - \left[\Phi'_k(t) - \overline{\Omega_k(t)} \right]^- &= 2v_k(t), \\ \left[\Phi'_k(t) + \overline{\Omega_k(t)} \right]^+ + \left[\Phi'_k(t) + \overline{\Omega_k(t)} \right]^- &= 2g_k(t), \end{aligned} \quad (9)$$

где $v_k(t) = \left[h_k^{'+}(t) - h_k'^-(t) \right] / 2$; $g_k(t) = \left[h_k^{'+}(t) + h_k'^-(t) \right] / 2$.

Решение задач сопряжения. Производные комплексных потенциалов (4) в данном случае представим в виде [7]

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + 2A'_k(z_k) + \Phi'_{k0}(z_k). \quad (10)$$

Здесь

$$A'_k(z_k) = \sum_{j=1}^J \frac{A_{kj}^0}{2(z_k - z_{kj}^0)};$$

$\Phi'_{k0}(z_k)$ – функции, кусочно-голоморфные в расширенных областях S_k и имеющие линию скачков L' . При этом имеют место условия разрешимости задачи [7]

$$\int_{l_{kn}} \Phi'_k(\tau_k) d\tau_k = 0 \quad (n = \overline{1, N}), \quad (11)$$

где l_{kn} – контур, охватывающий только разрез $c_n d_n$, не задевая остальных разрезов и не имеющий внутри себя точек z_{kj}^0 .

Подставляя выражения (10) в (7), находим

$$\begin{aligned} \Omega_k(z_k) &= r_k \Gamma_k + s_{k+1} \Gamma_{k+1} + e_{k+2} \Gamma_{k+2} + m_{k+3} \Gamma_{k+3} + \\ &+ 2r_k A'_k(z_k) + 2s_{k+1} A'_{k+1}(z_k) + 2e_{k+2} A'_{k+2}(z_k) + \\ &+ 2m_{k+3} A'_{k+3}(z_k) + \Omega_0(z_k). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $\Omega_{k0}(z_k)$ – функции, кусочно-голоморфные в расширенных областях S_k , причём

$$\int_{l_{kn}} \Omega_k(\tau_k) d\tau_k = 0. \quad (13)$$

На основании (7) и (10) функция $\bar{\Omega}_k(z_k)$, как и $\Omega_k(z_k)$, является кусочно-голоморфной на расширенной плоскости S_k , кроме полюсов первого порядка в точках \bar{z}_{kj}^0 , \bar{z}_{k+1j}^0 , \bar{z}_{k+2j}^0 , \bar{z}_{k+3j}^0 , и удовлетворяет условия (13). Исходя из этих свойств функций $\Phi'_k(z_k)$ и $\bar{\Omega}_k(z_k)$, получаем, что кусочно-голоморфными в расширенной области S_k с полюсами в точках z_{kj}^0 , \bar{z}_{kj}^0 , \bar{z}_{k+1j}^0 , \bar{z}_{k+2j}^0 , \bar{z}_{k+3j}^0 будут также сумма и разность этих функций, т.е. (10) являются задачами линейного сопряжения для функций $[\Phi'_k(t) - \bar{\Omega}_k(t)]$ и $[\Phi'_k(t) + \bar{\Omega}_k(t)]$ ($t \in L'$) и их решения имеют вид [7, 8]

$$\begin{aligned} \Phi'_k(z_k) &= X^{-1}(z_k)F_k(z_k) + f_{k0}(z_k) + R_k(z_k) + c_{k0}, \\ \bar{\Omega}_k(z_k) &= X^{-1}(z_k)F_k(z_k) - f_{k0}(z_k) - R_k(z_k) - c_{k0}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь

$$F_k(z_k) = f_{k1}(z_k) + D_k(z_k) + P_{kN}(z_k);$$

$$X(z_k) = \prod_{n=1}^N \sqrt{(z_k - c_n)(z_k - d_n)};$$

$$f_{k0}(z_k) = \frac{1}{4\pi i} \int_{L'} \frac{v_k(t) dt}{t - z_k}, \quad f_{k1}(z_k) = \frac{1}{4\pi i} \int_{L'} \frac{X(t) g_k(t) dt}{t - z_k};$$

$$\begin{aligned} R_k(z_k) &= A'_k(z_k) - \bar{r}_k \bar{A}'_k(z_k) - \bar{s}_{k+1} \bar{A}'_{k+1}(z_k) - \\ &\quad - \bar{e}_{k+2} \bar{A}'_{k+2}(z_k) - \bar{m}_{k+3} \bar{A}'_{k+3}(z_k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_k(z_k) &= B'_k(z_k) + \bar{r}_k \bar{B}'_k(z_k) + \bar{s}_{k+1} \bar{B}'_{k+1}(z_k) + \\ &\quad + \bar{e}_{k+2} \bar{B}'_{k+2}(z_k) + \bar{m}_{k+3} \bar{B}'_{k+3}(z_k); \end{aligned}$$

$$B'_k(z_k) = \sum_{j=1}^J \frac{A_{kj}^0 X(z_{kj}^0)}{2(z_k - z_{kj}^0)}; \quad P_{kN}(z_k) = \sum_{p=0}^N d_{kp} z_k^p;$$

c_{k0}, d_{kp} ($p = \overline{0, N}$) – неизвестные постоянные.

Постоянные c_{k0}, d_{kN} и d_{kN-1} определим из условий на бесконечности. Используя (10) и (12), в окрестности бесконечно удаленной точки будем иметь

$$\begin{aligned}\Phi'_k(z_k) - \bar{\Omega}_k(z_k) &= \Gamma_k - \bar{r}_k \bar{\Gamma}_k - \bar{s}_{k+1} \bar{\Gamma}_{k+1} - \bar{e}_{k+2} \bar{\Gamma}_{k+2} - \\ &\quad - \bar{m}_{k+3} \bar{\Gamma}_{k+3} + \frac{R_{k0}}{z_k} + o\left(\frac{1}{z_k}\right), \\ \Phi'_k(z_k) + \bar{\Omega}_k(z_k) &= \Gamma_k + \bar{r}_k \bar{\Gamma}_k + \bar{s}_{k+1} \bar{\Gamma}_{k+1} + \bar{e}_{k+2} \bar{\Gamma}_{k+2} + \\ &\quad + \bar{m}_{k+3} \bar{\Gamma}_{k+3} + \frac{D_{k0}}{z_k} + o\left(\frac{1}{z_k}\right).\end{aligned}\tag{15}$$

Здесь

$$\begin{aligned}R_{k0} &= \sum_{j=1}^J \left[A_{kj}^0 - \bar{r}_k \bar{A}_{kj}^0 - \bar{s}_{k+1} \bar{A}_{k+1,j}^0 - \bar{e}_{k+2} \bar{A}_{k+2,j}^0 - \bar{m}_{k+3} \bar{A}_{k+3,j}^0 \right], \\ D_{k0} &= \sum_{j=1}^J \left[A_{kj}^0 + \bar{r}_k \bar{A}_{kj}^0 + \bar{s}_{k+1} \bar{A}_{k+1,j}^0 + \bar{e}_{k+2} \bar{A}_{k+2,j}^0 + \bar{m}_{k+3} \bar{A}_{k+3,j}^0 \right].\end{aligned}$$

С другой стороны, на основании (14) на бесконечности

$$\begin{aligned}\frac{1}{X(z_k)} &= \frac{1}{z_k^N} + \frac{c_1 + d_1 + c_2 + d_2 + \dots + c_N + d_N}{2z_k^{N+1}} + \dots; \\ \Phi'_k(z_k) - \bar{\Omega}_k(z_k) &= 2c_{k0} + \frac{R_{k0}}{z_k} + \frac{1}{2\pi i z_k} \int_{L'} v_k(t) dt + o\left(\frac{1}{z_k}\right), \\ \Phi'_k(z_k) + \bar{\Omega}_k(z_k) &= 2d_{kN} + \\ &\quad + \frac{d_{kN}(c_1 + d_1 + \dots + c_N + d_N) + 2d_{kN-1}}{z_k} + o\left(\frac{1}{z_k}\right).\end{aligned}\tag{16}$$

Сравнивая (15) и (16), находим

$$\begin{aligned}c_{k0} &= \frac{\Gamma_k - \bar{r}_k \bar{\Gamma}_k - \bar{s}_{k+1} \bar{\Gamma}_{k+1} - \bar{e}_{k+2} \bar{\Gamma}_{k+2} - \bar{m}_{k+3} \bar{\Gamma}_{k+3}}{2}, \\ d_{kN} &= \frac{\Gamma_k + \bar{r}_k \bar{\Gamma}_k + \bar{s}_{k+1} \bar{\Gamma}_{k+1} + \bar{e}_{k+2} \bar{\Gamma}_{k+2} + \bar{m}_{k+3} \bar{\Gamma}_{k+3}}{2},\end{aligned}$$

$$d_{kN-1} = \frac{D_{k0} - d_{kN} (c_1 + d_1 + \dots + c_N + d_N)}{2}. \quad (17)$$

Из равенств (13) и (11) следует, что интегралы по контурам l_{kn} от функции $\Phi'_k(z_k) + \bar{\Omega}_k(z_k)$ равны нулю. Учитывая это, для вычисления коэффициентов d_{kp} полинома $P_{kN}(z_k)$ получаем систему интегральных уравнений

$$\int_{l_{kn}} X^{-1}(z_k) F_k(z_k) d\tau_k = 0 \quad (k = \overline{1, 4}; n = \overline{1, N}), \quad (18)$$

где l_{kn} – контур, который охватывает разрез $c_n d_n$, не содержащий внутри себя точек z_{kj}^0 , \bar{z}_{kj}^0 , $\bar{z}_{k+1,j}^0$, $\bar{z}_{k+2,j}^0$, $\bar{z}_{k+3,j}^0$ и не задевающий других разрезов. Заметим, что если d_{kN-1} , d_{kN} вычислены по формулам (17), то в (18) нужно составлять $N-1$ уравнение ($n = \overline{1, N-1}$), т.к. последнее на основе вычисления d_{kN-1} удовлетворяется автоматически.

Вблизи концов разреза $c_n d_n$

$$\begin{aligned} X(z_k) &= \sqrt{(z_k - c_n)(z_k - d_n)} X^*(z_k) = \pm \sqrt{2l_n z_k^*} X^*(z_k), \\ \Phi'_k(z_k) &= \frac{M_k}{2\sqrt{2z_k^*}} + O(1), \end{aligned} \quad (19)$$

где $X^*(z_k)$ – функция $X(z_k)$ без множителя $\sqrt{(z_k - c_n)(z_k - d_n)}$; l_n – полудлина разреза, равная $(d_n - c_n)/2$; z_k^* – малая по модулю величина;

$$M_k = \pm \frac{2F_k(z_k)}{X^*(c)\sqrt{l_n}};$$

c – аффикс выбранного конца (c_n или d_n); $O(1)$ – ограниченная величина. Знаки «+» и «-» относятся к правому и левому концам разреза. Заменяя в (1) функции $\Phi'_k(z_k)$ на (19), а напряжения σ_y , τ_{xy} , индукцию D_y и напряженность E_y электрического поля и индукцию B_y и напряженность H_y магнитного поля на коэффициенты интенсивности напряжений, индукций и напряженностей (КИНИН) соответственно нормального отрыва (k_1), поперечного сдвига (k_2), индукции (k_D), напряженности (k_E) электриче-

ского поля и индукции (k_B), напряженности (k_H) магнитного поля для их определения находим

$$\begin{aligned} & \left(k_1^\pm, k_2^\pm, k_D^\pm, k_E^\pm, k_B^\pm, k_H^\pm \right) = \\ & = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(\lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{8k}, -\mu_k r_k^0, \lambda_{10k}, -\mu_k h_k^0 \right) M_k. \end{aligned} \quad (20)$$

Пластика с одной трещиной. Пусть пластинка имеет одну трещину длиной $2l$ и с центром в начале координат. В этом случае в приведенных выше формулах

$$N = 1, \quad c_1 = -l, \quad d_1 = l; \quad X(z_k) = \sqrt{z_k^2 - l^2}.$$

Рассмотрим частные случаи внешних воздействий.

1. *Задание однородного электромагнитоупругого состояния на бесконечности.* Если на бесконечности задано однородное электромагнитоупругое состояние, а берега трещины свободны от механических и электромагнитных воздействий, то в приведенном решении

$$\begin{aligned} R_k(z_k) = D_k(z_k) = 0, \quad f_{k0}(z_k) = f_{k1}(z_k) = 0, \quad d_{k0} = 0; \\ \Phi'_k(z_k) = \frac{d_{k1} z_k}{X(z_k)} + c_{k0}; \quad M_k = 2d_{k1} \sqrt{l}, \end{aligned}$$

где d_{k1} – постоянные, определяемые из условий на бесконечности.

Если на бесконечности действует растягивающие усилия $\sigma_y^\infty = p$, а $\sigma_x^\infty = \tau_{xy}^\infty = D_x^\infty = D_y^\infty = B_x^\infty = B_y^\infty = 0$, то из (21) для d_{k1} получим

$$d_{k1} = \frac{M_{2k} \sigma_y^\infty}{2\Delta_k}.$$

Тогда для КИНН будем иметь

$$\begin{aligned} k_1^\pm &= \sigma_y^\infty \sqrt{l}, \quad k_2^\pm = k_D^\pm = k_B^\pm = 0, \\ k_E^\pm &= -\sigma_y^\infty \sqrt{l} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[\frac{1}{\Delta_k} \left(g_{21}^{\sigma, D} \mu_k^2 + g_{22}^{\sigma, D} \right) M_{2k} \right], \\ k_H^\pm &= -\sigma_y^\infty \sqrt{l} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[\frac{1}{\Delta_k} \left(p_{21}^{\sigma, B} \mu_k^2 + p_{22}^{\sigma, B} \right) M_{2k} \right]. \end{aligned}$$

Здесь $g_{21}^{\sigma, D}$, $g_{22}^{\sigma, D}$ и $p_{21}^{\sigma, D}$, $p_{22}^{\sigma, D}$ – пьезоэлектрические и пьезомагнитные

коэффициенты материала соответственно. Как видно, при таких условиях нагружения коэффициент k_1 не зависит от свойств материала.

Если на бесконечности задано однородное электрическое поле, характеризуемое напряженностью E_y^∞ , а $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = D_x^\infty = B_x^\infty = B_y^\infty = 0$, то

для постоянных d_{k1} получим

$$d_{k1} = \frac{M_{8k} E_y^\infty}{2\beta_{22}^\sigma \Delta_k},$$

в которых β_{22}^σ – коэффициент диэлектрической восприимчивости материала. Для КИНИН будем иметь

$$\begin{aligned} k_1^\pm &= k_2^\pm = k_B^\pm = 0, \quad k_D^\pm = E_y^\infty \sqrt{l} / \beta_{22}^\sigma, \\ k_E^\pm &= \beta_{22}^\sigma - \frac{g_{21}^{\sigma,D}}{\beta_{22}^\sigma} E_y^\infty \sqrt{l} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \frac{\mu_k^2}{\Delta_k} M_{8k}, \\ k_H^\pm &= \frac{1}{\beta_{22}^\sigma} \left(v_{11}^\sigma - p_{21}^{\sigma,D} E_y^\infty \sqrt{l} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \frac{\mu_k^2}{\Delta_k} M_{8k} \right), \end{aligned}$$

где v_{11}^σ – коэффициент электромагнитной восприимчивости материала.

Если же на бесконечности задано однородное магнитное поле с напряженностью H_y^∞ , а $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = D_x^\infty = D_y^\infty = B_x^\infty = 0$, то

$$\begin{aligned} d_{k1} &= \frac{M_{10k} H_y^\infty}{2\chi_{22}^\sigma \Delta_k}; \quad k_1^\pm = k_2^\pm = k_D^\pm = 0, \quad k_B^\pm = H_y^\infty \sqrt{l} / \chi_{22}^\sigma, \\ k_E^\pm &= \frac{1}{\chi_{22}^\sigma} \left(v_{11}^\sigma - g_{21}^{\sigma,D} H_y^\infty \sqrt{l} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \frac{\mu_k^2}{\Delta_k} M_{10k} \right), \\ k_H^\pm &= \chi_{22}^\sigma - \frac{p_{21}^{\sigma,D}}{\chi_{22}^\sigma} H_y^\infty \sqrt{l} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \frac{\mu_k^2}{\Delta_k} M_{10k}. \end{aligned}$$

Здесь χ_{22}^σ – коэффициент магнитной восприимчивости материала.

Для данного случая были проведены численные исследования ЭМУС рассматриваемой пластинки. При этом на бесконечности задавались усилия $\sigma_y^\infty = p$, электрическое поле с напряженностью $E_y^\infty = \varepsilon$ и магнитное поле с напряженностью $H_y^\infty = \mu$. Исследования проводились для пласти-

нок, изготовленных из феррит-пьезоактивных композитов [6, 9]

1) М1, для которого

$$\begin{aligned}
 s_{11}^{DB} = s_{33}^{DB} &= 7,15 s_0, & s_{22}^{DB} &= 6,83 s_0, & s_{12}^{DB} = s_{23}^{DB} &= -2,33 s_0, \\
 s_{13}^{DB} &= -2,73 s_0, & s_{44}^{DB} = s_{66}^{DB} &= 19,91 s_0, & s_{55}^{DB} &= 19,80 s_0; \\
 g_{21}^{\sigma,D} = g_{23}^{\sigma,D} &= -4,94 g_0, & g_{22}^{\sigma,D} &= 11,63 g_0, & g_{16}^{\sigma,D} = g_{34}^{\sigma,D} &= 20,48 g_0; \\
 p_{21}^{\sigma,D} = p_{23}^{\sigma,D} &= 5,8 p_0, & p_{22}^{\sigma,D} &= 11,85 p_0, & p_{16}^{\sigma,D} = p_{34}^{\sigma,D} &= 18,44 g_0; \\
 \beta_{11}^{\epsilon} = \beta_{33}^{\epsilon} &= 1,56 \beta_0, & \beta_{22}^{\epsilon} &= 1,37 \beta_0; \\
 \nu_{11}^{\epsilon} = \nu_{33}^{\epsilon} &= -1,9 \nu_0, & \nu_{22}^{\epsilon} &= -1,85 \nu_0; \\
 \chi_{11}^{\epsilon} = \chi_{33}^{\epsilon} &= 3,35 \chi_0, & \chi_{22}^{\epsilon} &= 11,89 \chi_0;
 \end{aligned}$$

2) М2, когда

$$\begin{aligned}
 s_{11}^{DB} = s_{33}^{DB} &= 22,66 s_0, & s_{22}^{DB} &= 14,99 s_0, & s_{12}^{DB} = s_{23}^{DB} &= -6,35 s_0, \\
 s_{13}^{DB} &= -11,94 s_0, & s_{44}^{DB} = s_{66}^{DB} &= -114,07 s_0, & s_{55}^{DB} &= 57,47 s_0; \\
 g_{21}^{\sigma,D} = g_{23}^{\sigma,D} &= -43,37 g_0, & g_{22}^{\sigma,D} &= 80,08 g_0, & g_{16}^{\sigma,D} = g_{34}^{\sigma,D} &= 2452,23 g_0; \\
 p_{21}^{\sigma,D} = p_{23}^{\sigma,D} &= 177,84 p_0, & p_{22}^{\sigma,D} &= 311,96 p_0, & p_{16}^{\sigma,D} = p_{34}^{\sigma,D} &= 5171,04 g_0; \\
 \beta_{11}^{\epsilon} = \beta_{33}^{\epsilon} &= 471,15 \beta_0, & \beta_{22}^{\epsilon} &= 106,13 \beta_0; \\
 \nu_{11}^{\epsilon} = \nu_{33}^{\epsilon} &= 7067,50 \nu_0, & \nu_{22}^{\epsilon} &= -56,70 \nu_0; \\
 \chi_{11}^{\epsilon} = \chi_{33}^{\epsilon} &= 141,84 \chi_0, & \chi_{22}^{\epsilon} &= 57,53 \chi_0,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 s_0 &= 10^{-6} \text{МПа}^{-1}, & g_0 &= 10^{-3} \text{м}^2 / \text{МКл}, & p_0 &= 10^{-6} \text{МТл}^{-1}, \\
 \beta_0 &= 10^2 \text{МН} \text{м}^2 / \text{МКл}^2, & \nu_0 &= 10^{-2} \text{МКл} \text{м} \text{МА}^{-1}, \\
 \chi_0 &= 10^{-3} \text{МПа} \text{МТл}^{-2}.
 \end{aligned}$$

Ниже описаны некоторые из полученных результатов. Значения k_1 и k_2 даны в $\text{МПа}\sqrt{\text{м}}$, k_D – в $\text{МКл}/\text{м}\sqrt{\text{м}}$, k_E – в $\text{МВ}/\sqrt{\text{м}}$, k_B – в $\text{МТл}/\sqrt{\text{м}}$, k_H – в $\text{МА}/\sqrt{\text{м}}$. При таком подходе интенсивность внешних усилий p нужно задавать МПа , напряженность электрического поля ϵ – в $\text{МВ}/\text{м}$, напряженность магнитного поля μ – в $\text{МА}/\text{м}$.

В табл. 1 приведены значения КИНИН для различных случаев задания

нагрузки на бесконечности. Из приведенных данных видно, что при действии электрического и магнитного полей значения КИНИН значительно больше, чем в случае действия механических сил. Также из табл. 1 следует, что на значения k_E и k_H влияют физико-механические свойства материала независимо от вида приложенной нагрузки. Так, например, в случае действия растягивающего усилия чем больше значения пьезоэлектрических ($g_{ij}^{\sigma,D}$) и пьезомагнитных ($p_{ij}^{\sigma,D}$) коэффициентов материала, тем выше по модулю получаются значения k_E и k_H .

Таблица 1

Нагрузка	Величина	Материал	
		M1	M2
$\sigma_y^\infty = p$	k_1^\pm	1,00000	1,00000
	$k_E^\pm \cdot 10^2$	-0,64199	-2,74528
	$k_H^\pm \cdot 10^4$	-0,17964	-5,27763
$E_y^\infty = \varepsilon$	k_E^\pm	0,99743	0,98489
	$k_D^\pm \cdot 10^2$	0,72999	0,00942
	$k_H^\pm \cdot 10^4$	-1,32000	0,08516
$H_y^\infty = \mu$	k_E^\pm	-2,09013	-31,89090
	k_H^\pm	1,00063	1,09035
	k_B^\pm	84,12490	17,38170

2. Действие внутреннего давления на берегах трещины. Если на бесконечности внешние воздействия не приложены, а на берегах трещины действует равномерное внутреннее давление интенсивности q , то

$$d_{k1} = d_{k0} = c_{k0} = 0, \quad v_k(t) = 0, \quad g_k(t) = -q M_{2k} / \Delta_k;$$

$$f_{k0}(z_k) = 0, \quad f_{k1}(z_k) = -\frac{q M_{2k}}{2\Delta_k} (X(z_k) - z_k);$$

$$\Phi'_k(z_k) = \frac{q M_{2k}}{2\Delta_k} \left(\frac{z_k}{X(z_k)} - 1 \right); \quad M_k = \frac{q M_{2k} \sqrt{l}}{2\Delta_k}.$$

Значения КИНИН для этого случая получаются такими же, как и при действии растягивающих усилий σ_y^∞ на бесконечности. Отличие заключается лишь в том, что в формулах σ_y^∞ нужно заменить на q .

3. Действие сосредоточенной силы или заряда. Пусть в точке z_1^0 пластинки с трещиной действуют сосредоточенная сила $P_1^0(X_1^0, Y_1^0)$ либо сосредоточенный электрический заряд $Q_{\sigma 1}^0$ или заряд магнитных диполей Q_{m1}^0 . В этом случае

$$c_{k0} = d_{k1} = 0, \quad f_{k0}(z_k) = f_{k1}(z_k) = 0,$$

$$A'_k(z_k) = \frac{A_{k1}^0}{2(z_k - z_{k1}^0)}, \quad B'_k(z_k) = \frac{A_{k1}^0 X(z_{k1}^0)}{2(z_k - z_{k1}^0)};$$

$$d_{k0} = \frac{D_{k0}}{2} = \frac{A_{k1}^0 + \bar{r}_k \bar{A}_{k1}^0 + \bar{s}_{k+1} \bar{A}_{k+1,1}^0 + \bar{e}_{k+2} \bar{A}_{k+2,1}^0 + \bar{m}_{k+3} \bar{A}_{k+3,1}^0}{2}.$$

Для потенциалов будем иметь

$$\Phi'_k(z_k) = \frac{D_k(z_k) + d_{k0}}{X(z_k)} + R_k(z_k).$$

Коэффициенты интенсивности получим по формулам (20), где

$$M_k = \pm 2 [D_k(\pm l) + d_{k0}] / \sqrt{l}.$$

Приведенное решение легко распространяется на случай действия сосредоточенных сил и зарядов в конечном числе точек.

Проведены численные исследования для пластинки с одной трещиной полудлины l при действии сосредоточенной силы $P_0(0, Y_1^0)$ и сосредоточенного электрического заряда $Q_{\pm 1}^0$, приложенных в точке $z_1^0(0, a)$. Величина сосредоточенной силы P_0 задавалась в МПа, заряда $Q_{\pm 1}^0$ – в МКл.

В табл. 2 приведены значения КИНИН для концов трещины при действии сосредоточенной силы в зависимости от отношения a/l расстояния a от точки приложения силы до центра трещины к полудлине трещины l . Значение коэффициента касательного сдвига k_2 приведено для правого конца трещины, т.к. для левого конца, получаемое значение совпадает по

Таблица 2

Материал	Величина	a/l							
		100	10	5	2	1	0,5	0,1	0
M1	k_1^\pm	0,002	0,026	0,051	0,109	0,149	0,161	0,159	0,159
	k_2^+	0,000	-0,001	-0,005	-0,024	-0,052	-0,068	-0,060	-0,55
	$k_E^\pm \cdot 10^2$	0,000	-0,007	-0,014	-0,034	-0,059	-0,084	-0,101	-0,102
M2	k_1^\pm	0,000	0,004	0,015	0,084	0,146	0,160	0,159	0,159
	k_2^+	0,000	0,000	-0,001	-0,027	-0,069	-0,087	-0,082	-0,078
	$k_E^\pm \cdot 10^2$	-0,101	-0,958	-1,650	-1,583	-0,691	-0,554	-0,450	-0,436

модулю со значение для правого, но противоположно по знаку. Из таблицы видно, что с удалением точки приложения сосредоточенной силы значения КИНИН уменьшаются. Для близких расстояний значение коэффициента нормального отрыва k_1 слабо зависит от свойств материала. Если же сосредоточенная сила действуют на берегах трещины, то значение последнего вообще не зависит от физико-механических особенностей материала. В тоже время свойства материала оказывают значительное влияние на значение коэффициента k_E . Так чем выше значения пьезоэлектрических ($g_{ij}^{\sigma,D}$) и пьезомагнитных ($p_{ij}^{\sigma,D}$) постоянных (материал М2), тем больше значения этого коэффициента.

В табл. 3 приведены значения КИНИН для концов трещины при действии сосредоточенного заряда в зависимости от отношения a/l расстояния a от точки приложения силы до центра трещины к полудлине трещины l . Как следует из табл. 3, при действии сосредоточенного заряда значения

Таблица 3

Материал	Величина	a/l							
		1000	100	10	5	1	0,5	0,1	0
М1	k_1^\pm	0,07	0,66	6,53	12,38	20,58	9,96	0,54	0,00
	k_2^+	0,00	0,00	-0,32	-1,19	-2,52	12,88	46,56	57,45
	k_E^\pm	0,02	0,24	2,35	4,61	16,00	19,76	21,66	21,75
	k_D^\pm	0,00	0,00	0,02	0,03	0,12	0,15	0,16	0,16
	k_B^\pm	0,00	0,00	0,01	0,02	0,07	0,06	0,00	0,00
М2	k_1^\pm	3,84	38,39	364,55	621,38	85,51	10,16	1,40	0,00
	k_2^+	0,00	-0,19	-17,74	-55,01	305,67	398,00	437,47	466,30
	k_E^\pm	3,44	34,37	336,03	628,58	1311,18	1511,69	1654,94	1663,55
	k_D^\pm	0,00	0,00	0,03	0,06	0,13	0,15	0,16	0,16
	k_B^\pm	0,00	0,04	0,41	0,78	0,90	0,42	0,04	0,01
	k_H^\pm	0,10	0,98	9,57	17,53	14,88	6,63	0,43	0,00

всех КИНИН по модулю значительно превышают аналогичные значения, получаемые в случае действия сосредоточенной силы. Отметим, что при действии электрического заряда возникают, хоть и незначительные, коэффициенты интенсивности k_B^\pm и k_H^\pm , которые в предыдущем случае равнялись нулю. Из данных табл. 3 также видно, что на значения КИНИН значительное влияние оказывают физико-механические свойства материала. Так

для более жесткого материала M2 значения k_1 и k_2 в десятки раз превышают аналогичные значения для материала M1; зависимость коэффициента k_E от свойств материала остается такой же как и в случае действия сосредоточенной силы. В тоже время для малых расстояний свойства материала практически не влияют на значения коэффициента k_D .

РЕФЕРАТ: Розв'язана задача електромагнітопружності для нескінченної пластинки, коли вздовж однієї прямої знаходяться концентратори напружень та щільності внутрішньої енергії у вигляді тріщин. Для дослідження використовуються метод, заснований на розв'язанні задач Рімана-Гілберта для комплексних потенціалів та надає змогу точно задовольнити граничним умовам на берегах тріщин. Для пластинки з однією тріщиною приведені розв'язки часткових задач, описані результати чисельних досліджень.

SUMMARY: The plane problem of electro-magneto-elasticity for the infinite plate with the thickeners of stresses and the self-energy density is solved. The method based on Riemann-Gilbert problems solutions for complex potentials are used. It provides the exact satisfaction of boundary conditions on cracks faces. For the plate with one crack particular problems solutions are given. The results of numeric investigations are described.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ: 1. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. Т. 5). 2. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. – М.: Мир, 1991. – 560 с. 3. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 472 с. 4. Калоеров С. А., Баева А. И., Бороненко О. И. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных сред. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 270 с. 5. Калоеров С. А., Петренко А. В. Двумерная задача электромагнитоупругости для многосвязных сред // Матем. методы та фіз.-мех. поля. – 2008. – Вып. 51. – С. 208–221. 6. Калоеров С. А., Петренко А. В. Двумерная и плоская задачи электромагнитоупругости для тел с отверстиями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 50–62. 7. Калоеров С. А. Решение двумерных задач теории трещин методом линейного сопряжения // Концентрация напряжений. – К.: А.С.К., 1998. – С. 51–91. (Механика композитов: В 12 т. Т. 7). 8. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с. 9. Peng-Fei Hou, Gao-Hang Teng, Hao-Ran Chen. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material // Mech. Mat. – 2009. – Vol. 41. – P. 329–338.

Донецкий национальный университет

Поступила 20.09.2009

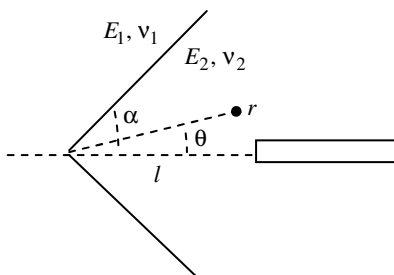
УДК 539.375

А. А. КАМИНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, Л. А. КИПНИС, д-р физ.-мат. наук,
Г. А. ХАЗИН, канд. физ.-мат. наук, Т. В. ПОЛИЩУК

ТРЕЩИНА ВБЛИЗИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД

В большинстве задач механики разрушения о трещинах в кусочно-однородных телах рассматриваются случаи, когда трещины расположены на границах раздела сред [1–5]. Значительно меньше таких работ посвящено решению соответствующих задач в других случаях расположения трещин. В данной работе строится решение задачи о трещине, расположенной вблизи границы раздела сред.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоскую статическую симметричную задачу теории упругости для кусочно-однородной изотропной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, которая в одной из частей содержит трещину на биссектрисе. Пусть расстояние между угловой точкой и ближайшим к ней концом трещины значительно меньше длины трещины. Берега трещины находятся под действием нормального давления, распределенного по закону F/r^2 , $r \geq l$, F – заданная положительная постоянная, имеющая размерность силы. Из-за того, что напряженное состояние будет исследоваться лишь вблизи угловой точки, трещину будем считать полубесконечной (рисунок). Граничные условия задачи можно записать так:



$$\begin{aligned} \theta = \alpha, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle U_\theta \rangle = \langle U_r \rangle = 0, \\ \theta = \pi, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad U_\theta = 0; \quad \theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0; \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\theta = 0, \quad r < l, \quad U_\theta = 0; \quad \theta = 0, \quad r > l, \quad \sigma_\theta = -F/r^2. \quad (1.2)$$

Здесь $0 \leq \theta \leq \pi$; $\langle a \rangle$ – скачок a .

2. Решение уравнения Винера-Хопфа задачи и определение коэффициента интенсивности напряжений. Для построения решения рассматриваемой задачи используем метод Винера-Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина [6, 7]. Применяя преобразование Меллина к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука, условиям (1.1) и учитывая равенства (1.2), приходим к следующему функциональному уравнению Винера-Хопфа:

$$\Phi^-(p) + \frac{\sigma}{p-1} = \operatorname{ctg} p\pi G(p) \Phi^+(p), \quad G(p) = \frac{\tilde{\Delta}(p) \sin p\pi}{2\Delta(p) \cos p\pi},$$

где

$$\Delta(p) = \delta_0(p) + \delta_1(p)e + \delta_2(p)e^2,$$

$$\tilde{\Delta}(p) = \tilde{\delta}_0(p) + \tilde{\delta}_1(p)e + \tilde{\delta}_2(p)e^2,$$

$$\delta_0(p) = (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) [\alpha_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha],$$

$$\begin{aligned} \delta_1(p) = & (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \sin^2 p\pi - (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \times \\ & \times [\alpha_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] - [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] \times \\ & \times (\alpha_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha), \end{aligned}$$

$$\delta_2(p) = [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] (\alpha_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha),$$

$$\tilde{\delta}_0(p) = -4(\sin^2 p\alpha - p^2 \sin^2 \alpha) [\alpha_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha],$$

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_1(p) = & (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \sin 2p\pi + 4(\sin^2 p\alpha - p^2 \sin^2 \alpha) \times \\ & \times [\alpha_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] - [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] \times \\ & \times [(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) - 4(\alpha_2 \sin^2 p\alpha + p^2 \sin^2 \alpha)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_2(p) = & [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] \times \\ & \times [(1 + \alpha_2)^2 - 4(\alpha_2 \sin^2 p\alpha + p^2 \sin^2 \alpha)], \end{aligned}$$

$$e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} e_0, \quad e_0 = \frac{E_1}{E_2}, \quad \alpha_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}, \quad \sigma = \frac{F}{l^2},$$

$$\Phi^-(p) = \int_0^1 \sigma_\theta(\rho l, 0) \rho^p d\rho, \quad \Phi^+(p) = \frac{E_2}{2(1 - \nu_2^2)} \int_1^\infty \left. \frac{\partial U_\theta}{\partial r} \right|_{\substack{r=\rho l \\ \theta=0}} \rho^p d\rho; \quad (2.1)$$

$-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$ ($\varepsilon_{1,2}$ – достаточно малые положительные числа); $E_{1,2}$ – модули Юнга; $\nu_{1,2}$ – коэффициенты Пуассона.

Подобные уравнения решены, например, в [8, 9]. В данном случае

$$\Phi^+(p) = \frac{\sigma G^-(1) p}{K^-(1)(p-1)K^+(p)G^+(p)} \quad (\operatorname{Re} p < 0),$$

$$\Phi^-(p) = \frac{\sigma K^-(p)}{(p-1)G^-(p)} \left[\frac{G^-(1)}{K^-(1)} - \frac{G^-(p)}{K^-(p)} \right], \quad (\operatorname{Re} p > 0),$$

$$\exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0, \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0; \end{cases}$$

$$K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1/2 \mp p)}, \quad (2.2)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Исходя из известных асимптотик

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow l-0, \quad \sigma_\theta \sim \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(l-r)}},$$

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow l+0, \quad \frac{\partial U_\theta}{\partial r} \sim \frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(r-l)}},$$

в которых K_I – коэффициент интенсивности напряжений в конце трещины, по теореме абелева типа получаем

$$p \rightarrow \infty, \quad \Phi^+(p) \sim \frac{K_I}{\sqrt{-2pl}}, \quad \Phi^-(p) \sim \frac{K_I}{\sqrt{2pl}}. \quad (2.3)$$

С помощью (2.2) находим асимптотику

$$p \rightarrow \infty, \quad \Phi^+(p) \sim \frac{\sigma G^-(1)}{K^-(1)\sqrt{-p}}. \quad (2.4)$$

Согласно (2.3), (2.4) получаем следующую формулу для коэффициента интенсивности напряжений в конце трещины:

$$K_I = \sqrt{\frac{\pi}{2}} G^-(1) \frac{F}{l^{3/2}}.$$

3. Анализ поведения напряжений вблизи угловой точки. Используя (2.1), (2.2) и формулу обращения Меллина, приходим к выражению для нормального напряжения

$$\sigma_\theta(r, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\sigma G^-(1) p \tilde{\Delta}(p) l^{p+1}}{2K^-(1)(p-1)\Delta(p)K^+(p)G^+(p)} r^{-p-1} dp, \quad (3.1)$$

где γ – произвольная прямая, параллельная мнимой оси и лежащая в полосе $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < 0$.

В полосе $-1 \leq \operatorname{Re} p < 0$ подинтегральная функция в (3.1) имеет единственную особенность – простой полюс в точке $p = -\lambda_0 - 1$, где λ_0 – единственный на интервале $(-1; 0)$ корень уравнения $\Delta(-\lambda - 1) = 0$. Заметим, что при $\alpha = 0; \pi/2; \pi$, а также в случае одинаковых материалов функция $\lambda_0(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2)$ равна нулю. В таблице приведены некоторые значения корня $\lambda_0(\nu_1 = \nu_2 = 0,3)$. Используя эту информацию об особой точке по-

α^0	e_0							
	0,1	0,2	0,3	0,5	2	3	5	10
15	-0,318	-0,241	-0,168	-0,104	-0,036	-0,068	-0,122	-0,215
30	-0,278	-0,228	-0,173	-0,117	-0,075	-0,132	-0,232	-0,310
45	-0,202	-0,168	-0,130	-0,089	-0,112	-0,180	-0,258	-0,332
60	-0,124	-0,104	-0,081	-0,054	-0,112	-0,184	-0,248	-0,308
75	-0,059	-0,049	-0,037	-0,025	-0,086	-0,127	-0,167	-0,203
105	-0,203	-0,167	-0,127	-0,086	-0,025	-0,037	-0,049	-0,059
120	-0,308	-0,248	-0,184	-0,112	-0,054	-0,081	-0,104	-0,124
135	-0,332	-0,258	-0,180	-0,112	-0,089	-0,130	-0,168	-0,202
150	-0,310	-0,232	-0,132	-0,075	-0,117	-0,173	-0,228	-0,278
165	-0,215	-0,122	-0,068	-0,036	-0,104	-0,168	-0,241	-0,318

динтегральной функции в (3.1) и применяя к интегралу (3.1) теорему о вычетах, получаем следующую формулу:

$$\sigma_\theta(r, 0) = \sum r^{\lambda_0} + f(r) \quad (r \rightarrow 0),$$

$$\sum = \frac{\sqrt{\pi} \tilde{\Delta}(-\lambda_0 - 1) \tilde{A}(\lambda_0 + \frac{3}{2}) G^-(1)}{4(\lambda_0 + 2) \Delta'(-\lambda_0 - 1) \tilde{A}(\lambda_0 + 1) G^+(-\lambda_0 - 1)} \frac{F}{l^{\lambda_0 + 2}}. \quad (3.2)$$

При этом $f(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. Формулы, аналогичные (3.2), имеют место для $\sigma_\theta(r, \theta)$, $\tau_{r\theta}(r, \theta)$, $\sigma_r(r, \theta)$.

Из полученных результатов следует, что угловая точка представляет собой концентратор напряжений со степенной особенностью; показатель степени сингулярности напряжений зависит от угла, отношения модулей Юнга и от коэффициентов Пуассона; он является единственным на интервале $(-1; 0)$ корнем определенного трансцендентного уравнения. С ростом угла α от нуля до $\pi/2$ и от $\pi/2$ до π интенсивность напряжений вблизи угловой точки сначала усиливается, а затем ослабевает. Если, например, $E_1 = 2E_2$; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, то значения угла, соответствующие минимумам функции $\lambda_0(\alpha)$, приблизительно равны 57° и 153° . При этом интенсив-

ность напряжений будет наибольшей, когда угол равен 57° . Чем больше отличаются друг от друга материалы, тем сильнее интенсивность напряжений вблизи угловой точки. Интенсивность напряжений вблизи угловой точ-

ки усиливается с уменьшением расстояния между концом трещины и угловой точкой.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто статичну симетричну задачу теорії пружності для кусково-однорідної ізотропної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, що містить в одній з частин напівнескінченну тріщину, на берегах якої задано нормальні напруження. Задачу зведено до функціонального рівняння Вінера – Хопфа. На основі розв'язку рівняння визначено коефіцієнт інтенсивності напружень у кінці тріщини і досліджено поведінку напружень біля кутової точки.

SUMMARY. The static symmetric problem of the theory of elasticity for piece-homogeneous isotropic plane with the interface of media in the form of the sides of angle which contains a semi-infinite crack is considered. The problem is reduced to the Wiener – Hopf equation. The stress intensity factor is determined and the stress near the corner point is investigated on the basis of the solution of equation.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. Бакиров В. Ф., Гольдштейн С. В. Модель Леонова-Панасюка-Дагдейла для трещины на границе соединения материалов // Прикладная математика и механика. – 2004. – Т. 68, вып. 1. – С. 170–179. 2. Вайншельбаум В. М., Гольдштейн Р. В., Холманский М. Л. Плоская задача о трещине на границе соединения двух упругих клиньев // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. – №5. – С. 77–85. 3. Дундурс Дж., Комниноу М. Обзор и перспектива исследования межфазной трещины // Механика композитных материалов. – 1979. – № 3. – С. 387 – 396. 4. Лобода В. В., Шевелева А. Е. Определение зон предразрушения у края трещины между двумя упругими ортотропными телами // Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 5. – С. 76–82. 5. Leblond T. B., Frelat T. Crack kinking from an interface crack with initial contact between the crack lips // Europ. T. mech. A/Solids. – 2001. – Vol. 20. – P. 937–951. 6. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнения в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с. 7. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402 с. 8. Каминский А. А., Кипнис Л. А., Хазин Г. А. Об анализе напряжений в угловой точке жесткого включения при наличии пластической зоны, моделируемой линиями скольжения // Теорет. и прикладная механика. – 2001. – Вып. 32. – С. 93–102. 9. Кипнис Л. А. Упругое равновесие клина с трещиной // Прикладная математика и механика. – 1979. – Т. 43, вып. 1. – С. 153–159.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Уманский государственный педагогический университет Поступила 02.11.2009

УДК 539.3

Н. И. МАЛАНЧУК, канд. физ.-мат. наук,
Р. М. МАРТЫНЯК, д-р физ.-мат. наук

О ВЛИЯНИИ ЛОКАЛЬНОГО ФРИКЦИОННОГО ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ НА КОНТАКТНУЮ ПРОЧНОСТЬ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ Тел

Решения контактных задач теории упругости с учетом проскальзывания и трения являются теоретическим основанием для расчетов различных подвижных и неподвижных соединений на износ, фреттинг-усталость и контактную прочность [1–3]. Обзор работ, посвященных исследованию влияния фрикционного проскальзывания на контактное поведение тел несогласованной формы (согласно классификации К. Джонсона [3]) приведен в монографиях [4, 5].

Начало изучению локального проскальзывания тел согласованной формы положено в статье [6]. В работах [7–9] развит метод решения плоских контактных задач с учетом сцепления и проскальзывания для полубесконечных тел с согласованными поверхностями, имеющими неглубокие выемки. Ниже этот метод применен для исследования влияния локального проскальзывания границ полуплоскостей в пределах поверхностной выемки

на контактные напряжения и контактную прочность.

Постановка задачи. Рассмотрим полуплоскости D_1 и D_2 (рис. 1), материалы которых имеют одинаковые модули сдвига ($G_1 = G_2 = G$) и коэффициенты Пуассона ($\nu_1 = \nu_2 = \nu$). Граница полуплоскости D_2 прямолинейна, а граница полуплоскости D_1 на участке $x \in [-b, b]$ имеет малую, пологую выемку, форму которой описывает гладкая

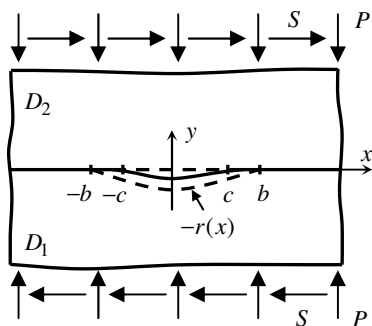


Рис.1

функция

$$r(x) = -r_0 \left(1 - x^2/b^2\right)^{5/2} \quad (0 < r_0 \ll b). \quad (1)$$

Здесь b , r_0 – полудлина и максимальная глубина выемки. Форма границ тел на участке до нагружения на рис. 1 изображена штриховой линией.

Пусть на бесконечности полуплоскости нагружаются сжимающими усилиями $\sigma_y(x, \pm\infty) = -P$, превышающими нагрузку $P_{cls} = 15Gr_0/16(1-\nu)b$, при которой начальный межконтактный зазор полностью закрывается.

Сплошная линия (рис. 1) на участке первоначального зазора $x \in [-b, b]$ отвечает границам тел после приложения сжимающих усилий. Далее контактная пара подвергается воздействию монотонно возрастающих касательных усилий $\tau_{xy}(\pm\infty, y) = S$. Границы тел удерживаются от проскальзывания, пока контактные напряжения в каждой точке удовлетворяют условию сцепления $|\tau_{xy}(x, 0)| < f |\sigma_y(x, 0)|$, где f – коэффициент трения.

Известно [7], что в зависимости от величины касательных усилий при полном контакте полуплоскостей может реализовываться один из трех вариантов: 1) полное сцепление тел при $S < S_0$, где $S_0 = f(P - P_{cls})$ – критическое значение касательных усилий, при котором в центре выемки касательные усилия достигают уровня нормальных, умноженных на коэффициент трения ($|\tau_{xy}(x, 0)| = f |\sigma_y(x, 0)|$); 2) локальное проскальзывание в области выемки при $S_0 \leq S < fP$; 3) глобальное скольжение вдоль всей поверхности сопряжения тел при $S \geq fP$.

В данной статье рассмотрен второй, наиболее интересный с точки зрения практических приложений, вариант, когда приложены касательные усилия из диапазона $S_0 \leq S < fP$. В этом случае возникает участок проскальзывания $[-c, c]$ в области выемки ($c < b$), на котором действуют касательные напряжения $\tau_{xy}(x, 0) = -f\sigma_y(x, 0)$, обусловленные трением. Вне участка проскальзывания выполняются условия механического сцепления границ.

Требуется определить напряженно-деформированное состояние полуплоскостей, контактные напряжения и длину участка проскальзывания.

Граничные условия рассматриваемой задачи запишутся в виде

$$\sigma_y^+(x, 0) = \sigma_y^-(x, 0), \quad \tau_{xy}^+(x, 0) = \tau_{xy}^-(x, 0) \quad (|x| < \infty); \quad (2)$$

$$v^-(x, 0) - v^+(x, 0) = \begin{cases} 0, & |x| \geq b, \\ r_0 \left(1 - x^2/b^2\right)^{5/2}, & |x| \leq b; \end{cases} \quad (3)$$

$$\tau_{xy}^-(x, 0) = -f\sigma_y^-(x, 0) \quad (|x| \leq c); \quad (4)$$

$$u^-(x, 0) - u^+(x, 0) = 0 \quad (|x| \geq c) \quad (5)$$

на линии сопряжения полуплоскостей $y = 0$,

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, \pm\infty) &= -P, \quad \tau_{xy}(x, \pm\infty) = S \quad (-\infty < x < \infty), \\ \sigma_x(\pm\infty, y) &= 0, \quad \tau_{xy}(\pm\infty, y) = S \quad (-\infty < y < \infty) \end{aligned} \quad (6)$$

на бесконечности в каждой из полуплоскостей D_l ($l = 1, 2$). Здесь u , v –

компоненты вектора перемещений, индексы «+» и «-» обозначают граничные значения функций на линии сопряжения в нижней и верхней полуплоскостях.

Метод решения. В соответствии с условием (3) на участке выемки $|x| < b$ возникает известный скачок нормальных перемещений, равный высоте выемки. На участке же $|x| < c$ вследствие проскальзывания возникает относительный сдвиг границ полуплоскостей $U(x) = u^-(x, 0) - u^+(x, 0)$, который заранее неизвестен и подлежит определению.

Используя метод комплексных потенциалов, представим напряжения и производные от перемещений через функции $r(x)$, $U(x)$ в виде [7]

$$\begin{aligned}\sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi_l(z) - \Phi_l(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_l'(z)} - P - iS, \\ 2G(u' + iv') &= \kappa\Phi_l(z) + \Phi_l(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_l'(z)} + \frac{3-\kappa}{4}P, \\ \Phi_1(z) &= \frac{(-1)^l G}{\pi i(1+\kappa)} \left\{ \int_{-c}^c \frac{U'(t)dt}{t-z} - i \int_{-b}^b \frac{r'(t)dt}{t-z} \right\}, \\ \Phi_2(z) &= -\Phi_1(z) \quad (z \in D_l, l=1, 2),\end{aligned}\tag{7}$$

где $z = x + iy$; $\kappa = 3 - 4\nu$.

Представления (7) удовлетворяют всем граничным условиям (2)–(6) задачи, за исключением условия (4). Чтобы удовлетворить ему, определим из (7) контактные нормальные и касательные напряжения

$$\begin{aligned}\sigma_y(x, 0) &= \frac{10Gr_0}{b(1+\kappa)} \left(\frac{x^4}{b^4} - \frac{3x^2}{2b^2} + \frac{3}{8} - \frac{|x|}{b} \left(\frac{x^2}{b^2} - 1 \right)^{3/2} \right) - P \quad (|x| \geq b), \\ \sigma_y(x, 0) &= \frac{10Gr_0}{b(1+\kappa)} \left(\frac{x^4}{b^4} - \frac{3x^2}{2b^2} + \frac{3}{8} \right) - P \quad (|x| < b),\end{aligned}\tag{8}$$

$$\tau_{xy}^-(x, 0) = -\frac{2G}{\pi(1+\kappa)} \int_{-c}^c \frac{U'(t)dt}{t-x} + S \quad (|x| < \infty).\tag{9}$$

Подставив выражения (8), (9) в условие (4), для определения функции $U'(x)$ получим сингулярное интегральное уравнение (СИУ)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{U'(t)dt}{t-x} = \frac{1+\kappa}{2G} (S - fP) + \frac{5fr_0}{b} \left(\frac{x^4}{b^4} - \frac{3x^2}{2b^2} + \frac{3}{8} \right) \quad (|x| \leq c).\tag{10}$$

Функция $U(x)$ удовлетворяет условиям

$$U(\pm c) = 0, \quad U'(\pm c) = 0. \quad (11)$$

Первое условие (11) обеспечивает непрерывность касательных перемещений границ тел, второе условие (11) – ограниченность касательных контактных напряжений.

Определив неограниченное решение СИУ (10) и проинтегрировав его с учетом первого условия из (11), найдем относительный сдвиг границ полуплоскостей

$$U(x) = -\sqrt{c^2 - x^2} \left[\frac{1+\kappa}{2G}(S - fP) + \frac{fr_0}{8b^5} (8x^4 + 4x^2c^2 - 20x^2b^2 - 10c^2b^2 + 3c^4 + 15b^4) \right] \quad (|x| < c). \quad (12)$$

Удовлетворив теперь второму условию в (11), используя выражение (12), найдем полудлину участка проскальзывания

$$c = b\sqrt{1 - 2\sqrt{(1+\kappa)b(fP - S)/15r_0fG}}. \quad (13)$$

На основании соотношений (9), (12), (13) определим контактные касательные напряжения

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, 0) &= f \left(P - \frac{10r_0G}{(1+\kappa)b} \left(\frac{x^4}{b^4} - \frac{3x^2}{2b^2} + \frac{3}{8} \right) \right) \quad (|x| < c), \\ \tau_{xy}(x, 0) &= fP - \frac{10fr_0G}{(1+\kappa)b} \left(\frac{x^4}{b^4} - \frac{3x^2}{2b^2} + \frac{3}{8} \right) + \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - c^2}} (S - fP + \\ &+ \frac{10fr_0G}{(1+\kappa)b} \left(\frac{3}{8} - \frac{1c^4}{8b^4} + \left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{c^2}{2b^2} \right) \left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{3}{2} \right) \right) \quad (|x| \geq c). \end{aligned} \quad (14)$$

Если сдвигающая нагрузка достигнет величины $S = fP$, то участок проскальзывания, как следует из (13), распространится на всю выемку ($c = b$). В этом случае, как следует из формул (8), (14) находим, что в каждой точке контакта полуплоскостей имеет место равенство $|\tau_{xy}(x, 0)| = f |\sigma_y(x, 0)|$, которое означает глобальное проскальзывание тел. Таким образом, при достижении касательными усилиями уровня $S = fP$ осуществляется переход от локального проскальзывания на участке в пределах выемки к глобальному проскальзыванию тел вдоль всей границы сопряжения.

Для анализа прочности контактирующих сопряженных тел определим возникающие на их границах главные нормальные напряжения σ_1 , σ_2 и

максимальные касательные напряжения τ_{\max} :

$$\sigma_{1,2}(x, 0) = \frac{\sigma_x(x, 0) + \sigma_y(x, 0)}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x(x, 0) - \sigma_y(x, 0))^2}{4} + \tau_{xy}^2(x, 0)},$$

$$\tau_{\max}(x, 0) = \sqrt{\frac{(\sigma_x(x, 0) - \sigma_y(x, 0))^2}{4} + \tau_{xy}^2(x, 0)}. \quad (15)$$

Здесь знак «+» относится к $\sigma_1(x, 0)$, а знак «-» – к $\sigma_2(x, 0)$.

В случае хрупких тел, следуя первой классической теории прочности (критерию наибольших нормальных напряжений), будем полагать, что поверхностное разрушение начинается при достижении главным напряжением σ_1 предела прочности на растяжение σ_B . В случае пластичных материалов, в соответствии с третьей классической теорией прочности (критерием наибольших касательных напряжений), предельное поверхностное состояние достигается тогда, когда максимальные касательные напряжения τ_{\max} достигают предела текучести материала τ_T .

Анализ результатов численных исследований. Были проведены расчеты для безразмерных величин $\bar{x} = x/b$, $\bar{c} = c/b$, $\bar{r}_0 = r_0/b$, $\bar{P} = P/G$, $\bar{S} = S/G$, $\bar{\tau}_{xy} = \tau_{xy}/G$, $\bar{\sigma}_y = \sigma_y/G$, $\bar{\tau}_{\max} = \tau_{\max}/G$, $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1/G$ в случае коэффициента трения $f = 0,1$, коэффициента Пуассона $\nu = 0,25$, максимальной глубины выемки $\bar{r}_0 = 0,01$ и действия нормальных усилий $\bar{P} = 15 \cdot 10^{-3}$.

На рис. 2 показана зависимость полудлины участка проскальзывания \bar{c} от касательных усилий \bar{S} . С возрастанием \bar{S} размеры участка проскальзывания монотонно возрастают, причем эта зависимость нелинейная. Горизонтальный участок графика соответствует полному сцеплению тел для диапазона касательных усилий $\bar{S} < \bar{S}_0$ (при заданных входных параметрах $\bar{S}_0 = 0,25 \cdot 10^{-3}$). Если касательные усилия достигнут уровня нормальных напряжений, умноженных на коэффициент трения ($\bar{S} = f\bar{P}$), то начнется глобальное скольжение по всей поверхности (вертикальная прямая на графике).

На рис. 3 изображено распределение контактных нормальных напряжений, умноженных на коэффициент трения, $f|\bar{\sigma}_y|$ (штриховая кривая), и касательных напряжений $\bar{\tau}_{xy}$ (сплошные кривые) для разных значений касательных усилий \bar{S} . Кривые 1–3 соответствуют значениям \bar{S} , равным $\bar{S} = 0,25 \cdot 10^{-3}$, $\bar{S} = 0,8 \cdot 10^{-3}$, $\bar{S} = 1,2 \cdot 10^{-3}$. Как видно, на участке про-

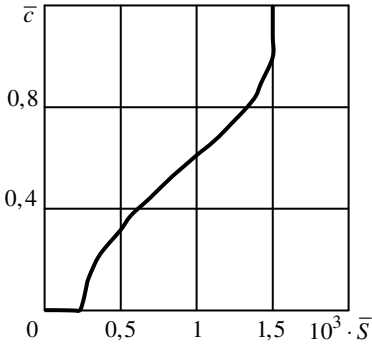


Рис. 2

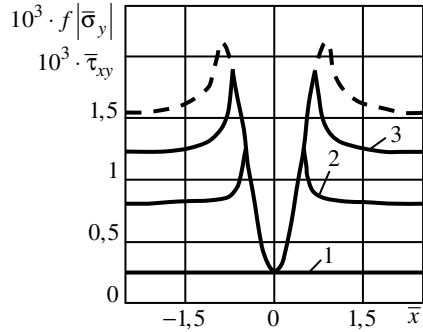


Рис. 3

скальзывания графики касательных напряжений и нормальных напряжений, умноженных на коэффициент трения, совпадают. Вне этого участка графики касательных напряжений лежат ниже графика нормальных напряжений, умноженных на коэффициент трения. Своего максимума нормальные напряжения достигают не на концах выемки, а возле них с внутренней стороны выемки в точках $\pm x_0 = \pm \sqrt{3}b/2$. Касательные напряжения достигают максимума на концах участка проскальзывания, пока он лежит в пределах отрезка $(-x_0, x_0)$. Когда же $c \geq x_0$, максимум $\bar{\tau}_{xy}$ достигается в точках $\pm x_0$ и его величина не изменяется с возрастанием касательных усилий.

Рис. 4 иллюстрирует распределение максимальных касательных поверхностных напряжений $\bar{\tau}_{\max}$ при воздействии касательных усилий $\bar{S} = 0,8 \cdot 10^{-3}$. Штриховая прямая изображает $\bar{\tau}_{\max}$ при полном сцеплении полуплоскостей, сплошная кривая – при проскальзывании тел в области выемки. Видим, что максимальные касательные напряжения при полном сцеплении постоянные вдоль всей поверхности сопряжения. При наличии проскальзывания в области выемки $\bar{\tau}_{\max}$ достигают своего минимального и максимального значений возле левого и правого концов участка проскальзывания с внутренней его стороны. Таким образом, в случае взаимодействия тел из пластичных материалов опасная область поверхности, в пределах которой может начаться пластическое течение при $\tau_{\max} \geq \tau_T$, размещена у правого конца участка фрикционного проскальзывания.

Распределение главных нормальных поверхностных напряжений $\bar{\sigma}_1$, возникающих при действии касательных усилий $\bar{S} = 0,8 \cdot 10^{-3}$, изображено на рис. 5. Штриховая кривая соответствует полному сцеплению тел, сплошная – проскальзыванию в области выемки. Незначительное отличие этих кривых можно заметить лишь на участке проскальзывания. Таким об-

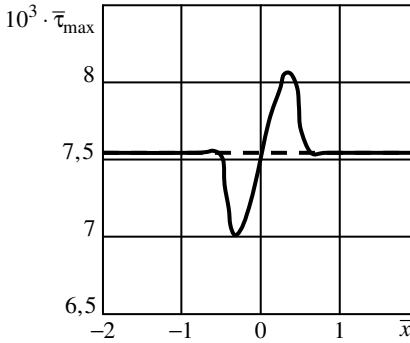


Рис. 4

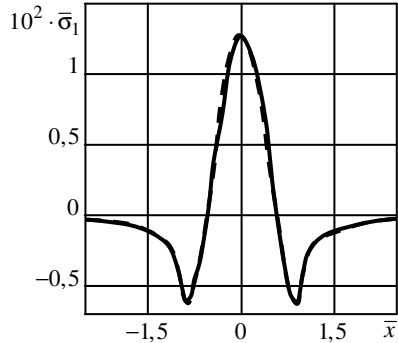


Рис. 5

разом, проскальзвання оказує дуже слабе впливання на головні поверхнові напруження. Замітимо, що в області виїмки головні нормальні напруження розтягуючі, а свого максимуму досягають в центрі виїмки. Следователно, при взаємодії тіл из хрупкого матеріала руйнування почнеться саме в центрі виїмки, якщо поверхнові головні напруження σ_1 тут перевищать межу міцності на розтягнення σ_B цього матеріала.

РЕЗЮМЕ. Використовуючи метод сингулярних інтегральних рівнянь, побудовано аналітичний розв'язок контактної задачі про локальне фрикційне проковзування взаємно притиснутих півплощин, одна з яких має плитку пологу виїмку, під дією монотонно зростаючого зсувного навантаження. Визначено контактні напруження і проаналізовано вплив проковзування на контактну міцність тіл.

SUMMARY. The contact problem of local frictional sliding of two pre-pressed half-planes, one of which has a surface recess of small height, under monotonically increasing shear loading is considered. Using singular integral equations method, the analytical solution of the problem is obtained. The contact stresses and the influence of sliding on contact strength of mated bodies are analysed.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. Goryacheva I. G., Rajeev P. T., Farris T. N. Wear in partial slip contact // J. Tribology. – 2001. – Vol. 123. – P. 848–856. 2. Дацун О. П., Кадира В. М. Розвиток крайових тріщин під час фретинг-втоми за умов зчеплення/проковзування в контакті між тілами // Машинознавство. – 2006. – № 3. – С. 9–15. 3. Джонсон К. Механіка контактної взаємодії. – М.: Мир, 1989. – 510 с. 4. Hills D., Nowell D., Sackfield A. Mechanics of elastic contact – Butterworth-Heinemann, Oxford, 1993. – 506 p. 5. Острык В. И., Улитко А. Ф. Метод Винера–Хопфа в контактних задачах теорії пружості. – К.: Наук. думка, 2006. – 328 с. 6. Connipou M., Schmueser D., Dundurs J. Frictional slip between a layer and a substrate caused by a normal load // Int. J. Eng. Sci. – 1980. – Vol. 18. – P. 131–137. 7. Мартиняк Р. М., Маланчук Н. І., Монастирський Б. Є. Зсув притиснутих одна до одної півплощин з поверхневою виїмкою. Ч. 1. Повний контакт // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2005. – Т. 41, № 2. – С. 39–44. 8. Мартиняк Р. М., Маланчук Н. І., Монастирський Б. Є. Зсув при-

тиснутих одна до одної півплощин з поверхневою виїмкою. Ч. 2. Неповний контакт // Фіз.-хім. мех. матеріалів.– 2006. – Т. 42, № 4.– С. 114–120. 9. *Маланчук Н. И., Мартыняк Р. М., Нагалка С. П.* Термомеханическое проскальзывание границ полуплоскостей в окрестности зазора между ними // Теорет. и прикладная механика. – 2006. – Вып. 42. – С. 52–56.

Институт прикладных проблем механики и математики НАН Украины, г. Львов

Поступила 31.05.2009

УДК 539.376

В. П. ГОЛУБ, д-р техн. наук,
Ю. М. КОБЗАРЬ, канд. физ.-мат. наук, *В. С. РАГУЛИНА*

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЯДЕР НАСЛЕДСТВЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ

При решении прикладных задач линейной и нелинейной теории вязкоупругости важное место занимают методы определения вязкоупругих характеристик материала, которые в случае определяющих уравнений наследственного типа сводятся к отысканию ядер ползучести и релаксации. Нахождение параметров ядер наследственности по экспериментальным данным проводится на основе независимых испытаний, число которых равно кратности рассматриваемого ядра [1].

В настоящей работе предлагается метод определения параметров ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов с независимым от времени видом нелинейности, в котором, экспериментальные данные, полученные в области малых времен не отбрасываются, а задаются с помощью весовых функций.

1. Постановка задачи. Исходные соотношения. Определяющие уравнения в нелинейной теории вязкоупругости с независимым от времени видом нелинейности задаются парными интегральными уравнениями [2]

$$\begin{aligned}\varphi_0(\varepsilon(t)) &= \sigma(t) + \lambda \int_0^t \tilde{K}(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau, \\ \sigma(t) &= \varphi_0(\varepsilon(t)) - \lambda \int_0^t \tilde{R}(t-\tau) \varphi_0(\varepsilon(\tau)) d\tau,\end{aligned}\quad (1.1)$$

где первое уравнение описывает процесс ползучести, а второе – процесс релаксации.

Независящая от времени нелинейность процессов ползучести и релаксации в (1.1) определяется видом функции $\varphi_0(\cdot)$, которая в работе задается одночленной степенной аппроксимацией

$$\varphi_0(\varepsilon) = \frac{H}{q} (\varepsilon)^q, \quad (1.2)$$

где H , q – коэффициенты, определяемые по результатам обработки экспериментальных данных испытаний образцов материала на одноосное растяжение.

В качестве ядер наследственности рассматриваются степенные функ-

ции [1] комбинация степенных и экспоненциальных функций [3], а также дробно-экспоненциальные функции [1]

$$\begin{aligned}\tilde{K}(t-\tau) &= \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{(1-\alpha)n}}{\Gamma[(1-\alpha)(1+n)]}, \\ \tilde{R}(t-\tau) &= \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[-(\lambda+\beta)]^n (t-\tau)^{(1-\alpha)n}}{\Gamma[(1-\alpha)(1+n)]}.\end{aligned}\quad (1.3)$$

Здесь α, β – параметры ядер наследственности.

В работе предлагается метод и решается задача определения параметров ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов на основе нелинейной наследственной модели (1.1). Параметры ядер определяются по результатам испытаний на одноосную ползучесть при постоянных напряжениях. Метод апробируется на задачах расчета деформаций ползучести при постоянных напряжениях, при полной разгрузке, а также релаксации напряжений.

2. Идентификация ядер нелинейной наследственности. Как известно [1], выбор эффективного метода определения параметров ядер наследственности в теории вязкоупругости существенно зависит от физической сущности ядра. Для ядер ползучести и релаксации в нелинейной модели вязкоупругости (1.1), физическая сущность устанавливается при $\sigma(t) = \sigma(0) = const$ и соответственно при $\varepsilon(t) = \varepsilon(0) = const$ путем дифференцирования каждого из уравнений в (1.1) по времени. В этом случае, учитывая, что функция $\varphi_0(\cdot)$ является сложной функцией от t , для ядер нелинейной ползучести $\tilde{K}(t)$ и релаксации $\tilde{R}(t)$ получаем с учетом (1.2) соотношение

$$\tilde{K}(t) = \frac{1}{\lambda} \frac{H(\varepsilon(t))^{q-1}}{\sigma} \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad \tilde{R}(t) = -\frac{1}{\lambda} \frac{q}{H\varepsilon^q} \frac{d\sigma(t)}{dt}, \quad (2.1)$$

показывающие, что ядра нелинейной наследственности, как и ядра в линейной теории, являются мерами скоростей соответствующих процессов.

Из (2.1) следует, что ядро нелинейной релаксации $\tilde{R}(t)$ пропорционально скорости релаксации, причем коэффициент пропорциональности при $\varepsilon = const$ является величиной постоянной. Это позволяет параметры ядер релаксации в нелинейной модели (1.1) находить по результатам дифференцирования экспериментальных кривых релаксации.

Ядро нелинейной ползучести $\tilde{K}(t)$, как видно из (2.1) также пропорционально скорости ползучести. Однако, коэффициент пропорциональности при $\sigma = const$ является величиной переменной. В этом случае параметры ядра ползучести в нелинейной модели (1.1) не могут быть определены по результатам дифференцирования экспериментальной кривой ползучести.

Эта задача решается в работе исходя из условия подобия изохронных диаграмм ползучести и диаграммы мгновенного деформирования, которое использовано при построении нелинейной модели вязкоупругости (1.1). Условие подобия записывается в виде

$$\varphi_0(\varepsilon(0)) = (1+G(t)) \varphi_t(\varepsilon(t)), \quad (2.2)$$

где множитель

$$1+G(t) = 1 + \int_0^t \tilde{K}(\tau) d\tau$$

задает функцию подобия. Функция $\varphi_0(\cdot)$ в (2.2) задает диаграмму мгновенного деформирования, а функция $\varphi_t(\cdot)$ – изохронную диаграмму ползучести для произвольного момента времени t .

Дифференцируя далее (2.2) по t для скорости нелинейной ползучести получаем уравнение

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \sigma \left\{ \frac{d\varphi_0^{-1}[(1+G(t))\sigma]}{d[(1+G(t))\sigma]} \right\} \frac{d(1+G(t))}{dt}, \quad (2.3)$$

решая которое совместно с первым уравнением в (2.1), находим, что ядро нелинейной ползучести

$$\tilde{K}(t) = \frac{1}{\lambda} \frac{d(1+G(t))}{dt} \quad (2.4)$$

пропорционально скорости изменения функции подобия $1+G(t)$.

3. Дискретизация ядер нелинейной ползучести. Функция подобия $(1+G(t))$, скорость изменения которой задает согласно (2.4) зависимость ядра нелинейной ползучести \tilde{K} от времени t , определяется исходя из условия подобия (2.2) изохронных диаграмм ползучести $\varphi_t(\cdot)$ и диаграмм мгновенного деформирования $\varphi_0(\cdot)$.

Подобие диаграмм $\varphi_t(\cdot)$ и $\varphi_0(\cdot)$ устанавливается в плоскости « $\varphi - \varepsilon$ » (рис.1,а) для каждого из фиксированных уровней деформации ε_i в интервале $i = \overline{1, \ell}$ по параметру t_j в интервале $j = \overline{1, m}$.

Осредненная функция подобия $1+G(t_j)$, находится путем минимизации функционала

$$\Phi(1+G(t_j)) = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\varphi_0(\varepsilon_i, 0) - \overline{(1+G(t_j))} \varphi_t(\varepsilon_i, t_j) \right)^2, \quad (3.1)$$

где процедура минимизации осуществляется по методу Ньютона-Гаусса и имеет вид

$$\overline{1+G(t_j)} = \frac{\sum_{i=1}^{\ell} (\varphi_0(\varepsilon_i, 0)\varphi_t(\varepsilon_i, t_j))}{\sum_{i=1}^{\ell} (\varphi_t(\varepsilon_i, t_j))^2}. \quad (3.2)$$

Характерная зависимость дискретных значений осредненной функции подобия $\overline{1+G(t_j)}$ от времени показана на рис. 1, б точками. Тонкой сплошной-

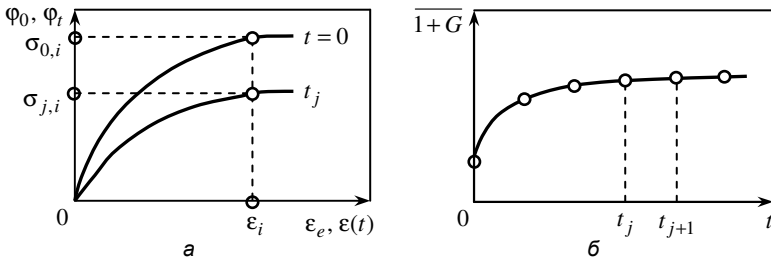


Рис. 1

ной линией нанесен один из возможных вариантов аппроксимации дискретных значений функции подобия подходящим аналитическим выражением.

В качестве аппроксимирующей функции использован сглаживающий кубический сплайн

$$\overline{1+G(t)} = \overline{A}_j + \overline{B}_j(t-t_j) + \overline{C}_j(t-t_j)^2 + \overline{D}_j(t-t_j)^3, \quad (3.3)$$

коэффициенты \overline{A}_j , \overline{B}_j , \overline{C}_j , \overline{D}_j , которого определяются по результатам аппроксимации численных значений функции подобия.

Подставляя (3.3) в (2.4), для определения дискретных значений $\tilde{K}(t_j)$ получаем соотношение

$$\tilde{K}(t_j) = \frac{1}{\lambda} \left[B_j + 2C_j(t-t_j) + 3D_j(t-t_j)^2 \right], \quad (3.4)$$

где количество уровней t_j в общем случае не совпадает с используемым в (3.3).

4. Реализация процедуры аппроксимации. Весовые функции. Дискретные значения ядра нелинейной ползучести $\tilde{K}(t)$ рассчитываются по уравнению (3.4). Характерный вид зависимости дискретных значений ядра

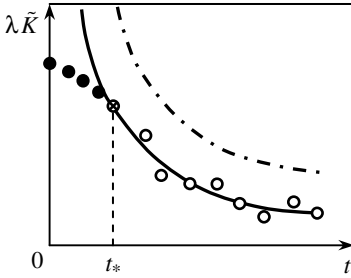


Рис. 2

\tilde{K} от времени t , показан на рис. 2 точками. Тонкой сплошной линией нанесен наиболее оптимальный вариант аппроксимации дискретных значений ядра $\tilde{K}(t_j)$ его аналитическим выражением, например (1.3). Аппроксимация должна удовлетворять свойствам сингулярности ядра и при $t \rightarrow 0$ отражать условие $d\varepsilon(t)/dt \rightarrow \infty$ и соответственно

$\tilde{K}(t) \rightarrow \infty$.

Критерием наилучшего согласования аналитического выражения ядра $\tilde{K}(t)$ с дискретными значениями ядра $\tilde{K}(t_j)$ является минимум функционала

$$F(\lambda, q_s) = \sum_{j=1}^{n_*-1} \left\{ p_j(t) \left[\tilde{K}(t_j) - \lambda \tilde{K}(t, q_s) \right] \right\}^2 + \sum_{j=n_*}^n \left[\tilde{K}(t_j) - \lambda \tilde{K}(t, q_s) \right]^2, \quad (4.1)$$

где весовая функция $p_j(t)$ задается соотношением

$$p_j(t) = \left[1 + \left| \frac{\tilde{K}(t_j) - \lambda \tilde{K}(t, q_s)}{\tilde{K}(t_*) - \lambda \tilde{K}(t_*, q_s)} \right|^m \right]^{-1}, \quad (4.2)$$

причем $p_j(\cdot) \rightarrow 0$, когда $K(t, q_s) \rightarrow \infty$, и $p_j(\cdot) = 1$, когда $\tilde{K}(t_j) = \lambda \tilde{K}(t, q_s)$. Здесь n_* – число дискретных значений ядер ползучести в области $\{0, t_*\}$; m – порядок моментов разностей ($m = 2, 3, 4, \dots$).

Параметр λ и параметры ядер ползучести q_s в (4.2) определяются в два этапа. На первом этапе определяются начальные значения λ_0 и q_{s0} искомых параметров в (4.2) без учета дискретных значений ядер $\tilde{K}(t_j)$ из области $\{0, t_*\}$. На втором этапе значения параметров λ_0 и q_{s0} , используются для определения весовых функций $p_j(t)$. Подставляя значения λ_0 и q_{s0} в (4.2), для весовых функций $p_j(t)$ получаем соотношение

$$p_j(t) = \left[1 + \left| \frac{\tilde{K}(t_j) - \lambda_0 \tilde{K}(t_j, q_s)}{\tilde{K}(t_*) - \lambda_0 \tilde{K}(t_*, q_s)} \right|^m \right]^{-1}, \quad (4.3)$$

которое позволяет варьировать значения $p_j(t)$ при варьировании моментов разностей m . Окончательные значения весовых функций $p_j(t)$ устанавливаются исходя из величины суммарной квадратичной ошибки

$$\delta = \sum_{j=n}^{n_*} \left\{ p_j(t) \left[\tilde{K}(t_j) - \lambda_0 \tilde{K}(t, q_{s0}) \right] \right\}^2, \quad (4.4)$$

которая соответствует квадратичной ошибке первого слагаемого в (4.1).

Сумма в (4.4) является убывающей при возрастании величины m . Как результат определяются значения $p_j(t)$, соответствующие минимальной ошибке δ_{\min} , и далее в функционале (4.2) используются для определения окончательных значений параметров λ и q_s .

5. Экспериментальная апробация метода. В работе апробация метода определения параметров ядер осуществляется на задачах расчета деформаций ползучести при постоянных напряжениях, полной разгрузке и релаксации напряжений.

5.1. Выбор структуры ядра ползучести. Определение параметров ядра. Исходной характеристикой вязкоупругих свойств материала в нелинейной модели (1.1), является ядро ползучести $\tilde{K}(t - \tau)$. Структура и параметры ядра определяются по результатам обработки экспериментальных данных, полученных при одноосном растяжении и нескольких уровнях постоянных напряжений. Ядра релаксации $R(t - \tau)$ являются резольвентами ядер ползучести $\tilde{K}(t - \tau)$ и значения параметров ядер совпадают.

Для обоснования структуры ядра ползучести и определения его параметров в работе используются заимствованные экспериментальные данные для фторопласта-4 (М1) [4] и стеклопластика ТС-8/3-250 (М2) [5] при растяжении под углом $\varphi = 45^\circ$ к направлению армирования.

На рис. 3 представлены дискретные значения ядер ползучести (точки) для фторопласта-4 (а) и для стеклопластика ТС-8/3-250 (б), рассчитанные по изложенной в разделе 3 методике. Значения ядер ползучести рассчитаны на основе экспериментальных кривых ползучести, полученных при напряжениях $\sigma_k = 5,1, 8,5, 10,2, 11,8$ и $14,1$ МПа для фторопласта и при напряжениях $\sigma_k = 19,9, 39,8, 59,7, 79,6, 99,5$ и $119,4$ МПа для стеклопластика. Линиями нанесена аппроксимация дискретных значений ядер аналитическими выражениями ядер. Аппроксимация степенным ядром по-

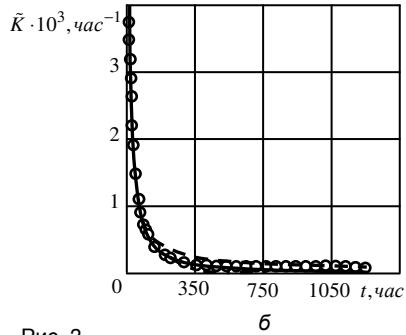
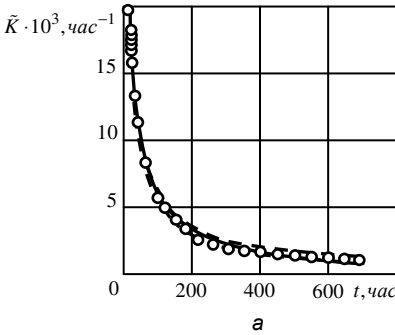


Рис. 3

казана штриховой линией, экспоненциально-степенным ядром штрихпунктирной линией, а ядром (1.3) – тонкой сплошной линией.

Значения параметров α , β и λ ядер наследственности, рассчитанных исходя из минимизации функционала (4.1) с учетом (4.3) и соответствующих аппроксимации на рис.3, приведены в таблице. Здесь же приведе-

Материалы	q	H , МПа	α			β , час $^{-(1+\alpha)}$		λ , час $^{-(1+\alpha)}$		
			(С.)	(Э.-С.)	(Д.-Э.)	(Э.-С.)	(Д.-Э.)	(С.)	(Э.-С.)	(Д.-Э.)
M1	$3,4 \cdot 10^{-1}$	8,0	$7,8 \cdot 10^{-1}$	$3,3 \cdot 10^{-1}$	$4,0 \cdot 10^{-1}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$7,0 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$2,0 \cdot 10^{-2}$
M2	$3,9 \cdot 10^{-1}$	211,7	$8,7 \cdot 10^{-1}$	$3,6 \cdot 10^{-1}$	$6,5 \cdot 10^{-1}$	$5,2 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$2,7 \cdot 10^{-1}$	$2,0 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-1}$

ны значения коэффициентов q и H в уравнении (1.2), задающим диаграмму мгновенного деформирования $\varphi_0(\cdot)$.

Из данных, приведенных на рис. 3, следует, что наилучшая аппроксимация дискретных значений ядер ползучести достигается с использованием дробно-экспоненциального ядра (1.3). Максимальная погрешность в этом случае не превышает 9% и дальнейший расчет ведется на основе дробно-экспоненциального ядра.

5.2. Ползучесть при постоянных напряжениях. Напряжение $\sigma(t)$, зададим условием

$$\sigma(t) = h(t) \sigma_k \quad (k = \overline{1, m}), \quad (5.1)$$

где $h(t)$ – единичная функция Хевисайда ($h(t) = 0$ при $t < 0$ и $h(t) = 1$ при $t \geq 0$), $\sigma_k = const$.

Разрешение первого уравнения в (1.1) относительно деформации ползучести $\varepsilon(t)$, будет

$$\varepsilon(t) = \left\{ \frac{q}{H} \sigma_k \left[1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1-\alpha)(1+n)}}{(1-\alpha)(1+n) \Gamma[(1-\alpha)(1+n)]} \right] \right\}^{1/q}, \quad (5.2)$$

где принято $h(t) = 1$.

Деформации ползучести $\varepsilon(t)$, рассчитанные по уравнению (5.2) с использованием параметров ядра (1.3), приведенных в таблице, сопоставлены на рис. 4 с экспериментальными данными для фторопласта-4 (а) и для стеклопластика ТС-8/3-250 (б). Здесь и далее экспериментальные данные

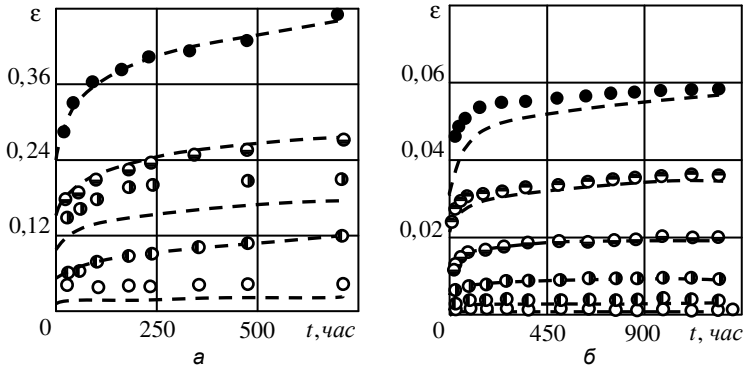


Рис. 4

нанесены точками, а результаты расчетов – штриховыми линиями. Уровни напряжений σ_k соответствуют значениям напряжений, приведенным в разделе 5.1. Максимальная погрешность между результатами расчетов и экспериментальными данными составила 20% и получена для стеклопластика ТС-8/3-250 при $\sigma = 119,4$ МПа для 48 часов.

5.3. Обратная ползучесть при полной разгрузке. Условие нагружения при реализации режима полной разгрузки записывается в виде

$$\sigma(t) = h(t)\sigma_1 - h(t-t_1)\sigma_1, \quad (5.3)$$

где σ_1 – напряжение, приложенное в момент времени $\tau = 0$; t_1 – момент полной разгрузки; $h(\cdot)$ – функция Хевисайда.

Разрешая первое уравнение в (1.1) с учетом (1.2) и (5.3) относительно $\varepsilon(t)$, подставляя ядро ползучести (1.3), получаем уравнение

$$\varepsilon(t) = \left\{ \frac{q\sigma_1 h(t)}{H} \left[1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1-\alpha)(1+n)}}{(1-\alpha)(1+n)\Gamma[(1-\alpha)(1+n)]} \right] - \frac{q\sigma_1 h(t-t_1)}{H} \left[1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-t_1)^{(1-\alpha)(1+n)}}{(1-\alpha)(1+n)\Gamma[(1-\alpha)(1+n)]} \right] \right\}^{1/q}. \quad (5.4)$$

Значения деформаций обратной ползучести $\varepsilon(t)$, рассчитанных по уравнению (5.4) с использованием параметров ядра (1.3), приведенных в таблице, сопоставлены на рис. 5 для фторопласта-4 (а) и для стеклопластика ТС-8/3-250 (б). Режим нагружения фторопласта включал нагружение с начальным напряжением $\sigma_1 = 5 \text{ МПа}$ (○) и полную разгрузку в момент

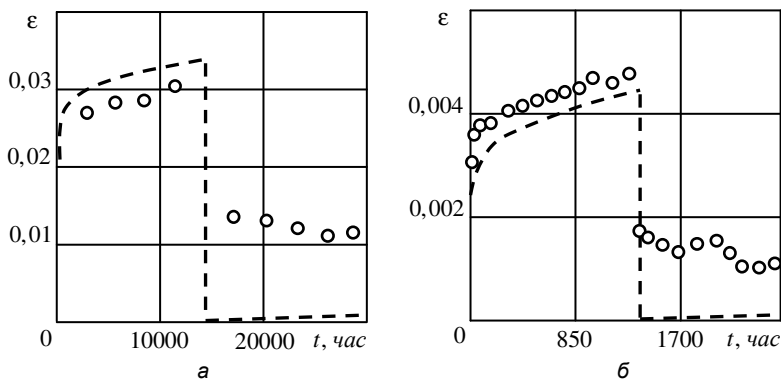


Рис. 5

времени $t_1 = 14400$ часа, а стеклопластика – нагружение с начальным напряжением $\sigma_1 = 19,9 \text{ МПа}$ (○) и полную разгрузку в момент времени $t_1 = 1300$ часов. В этом случае, как видно из рис. 5, результаты расчетов с экспериментальными данными не согласуются. Это, по-видимому, объясняется тем обстоятельством, что исследованные материалы являются не полностью вязкоупругими. После разгрузки возникают остаточные деформации, которые нелинейной моделью (1.1) не учитываются.

5.4. Релаксация напряжений. В режиме релаксации напряжений начальное условие нагружения $\tau = 0$ задается соотношением (5.1). Для всех $t > \tau$, начальная деформация

$$\varepsilon_k(0) = \frac{\sigma_k h(0)}{E} = const \quad (5.5)$$

удерживается постоянной.

Зависимость напряжения σ_k от времени t , исходя из второго соотношения в (1.1) с учетом (1.3) и (5.5), записывается в виде

$$\sigma_k(t) = \frac{H\varepsilon_k(0)}{q} \left\{ 1 - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n t^{(1-\alpha)(1+n)}}{(1-\alpha)(1+n)\Gamma[(1-\alpha)(1+n)]} \right\}, \quad (5.6)$$

где принято, что $\tau = 0$, а $h(0) = 1$.

Кривые релаксации напряжений, рассчитанные по уравнению (5.6), сопоставлены на рис. 6 с экспериментальными данными для фторопласта-4

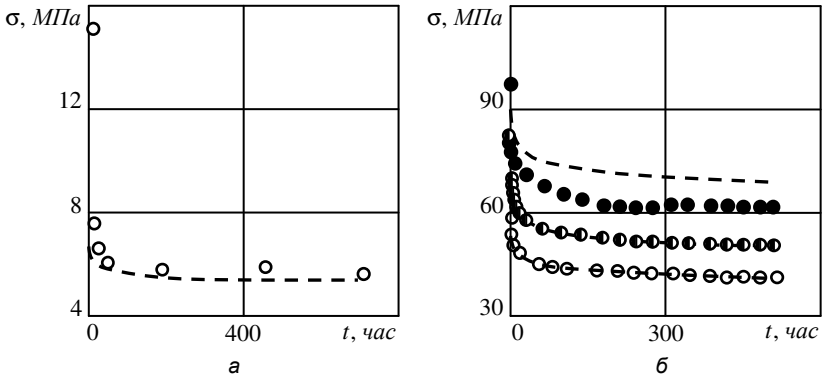


Рис. 6

(а) и для стеклопластика ТС-8/3-250 (б). Начальные значения напряжений (при $t = 0$) для фторопласта составили $\sigma_k(0) = 15,3$ МПа (○), а для стеклопластика – $\sigma_k(0) = 59,7$ (○), $79,6$ (◐) и $99,5$ (●) МПа. При этих значениях напряжения удерживались согласно (5.5) для фторопласта постоянными значения деформаций $\varepsilon_k(0) = 2,8 \cdot 10^{-1}$ (○), а для стекло-пластика – $\varepsilon_k(0) = 3,5 \cdot 10^{-3}$ (○), $7,3 \cdot 10^{-3}$ (◐) и $1,3 \cdot 10^{-2}$ (●). Максимальная погрешность между результатами расчетов и экспериментальными данными составила 16% и получена для ТС-8/3-250 при $\sigma = 99,5$ МПа при $t = 200$ часов.

Параметры ядер нелинейной наследственности определяются по результатам аппроксимации их дискретных значений соответствующим аналитическим выражением. В процессе, значения ядер в области сингулярности учитываются с использованием весовых функций.

Метод определения параметров ядер нелинейной наследственности апробируется экспериментально на задачах расчета деформаций ползучести при постоянных напряжениях, полной разгрузке и релаксации напряжений. В качестве ядра ползучести выбрана дробно-экспоненциальная функция Работнова, наилучшим образом аппроксимирующая значения ядер. В целом получено вполне удовлетворительное согласование результатов расчета деформаций ползучести и релаксаций напряжений с экспериментальными данными для фторопласта-4 при одноосном растяжении и для стеклопластика ТС-8/3-250 при растяжении под углом $\varphi = 45^\circ$ к направлению армирования.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано метод та викладено основні процедури визначення ядер спадковості в нелінійній теорії в'язкопружності із незалежною від часу нелінійністю. Метод ґрунтується на подібності ізохронних діаграм повзучості та діаграми миттєвого деформування. Параметри ядер визначаються шляхом аппроксиматії дис-

кретних значень ядер і отримані диференціюванням осередненої функції подібності. Дискретні значення ядер в області сингулярності враховано за допомогою вагових функцій. Метод апробовано експериментально на задачах розрахунку деформацій повзучості за умов сталих напружень, повного розвантаження та релаксації напружень на прикладі фторопласту-4 та склопластику TC-8/3-250.

SUMMARY. The method and the basic procedures of the determination of heredity kernel parameters of non-linear viscoelastic materials with the time independent nonlinearity have been suggested. The method is based on the realization of the similarity condition of the isochronous creep diagrams and the momentary deformation diagram. The kernel parameters are determined as an approximation result of kernel discrete values that have been obtained by the differentiation of the averaged similarity function. The discrete values of kernel are taken into account using weight functions in the singularity range. The method has been approved experimentally on the calculation problems of creep strains under constant stresses, creep strains under full offloading as well as stress relaxation as an example of fluoroplastic-4 and glass-fibre reinforced plastic TC-8/3-250.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. – М.: Высшая школа, 1976. – 279 с. 2. Голуб В. П. Длительная нелинейная ползучесть вязкоупругих волокнистых однонаправленных композитов при растяжении // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – Вип. 1, ч. 1. – 2006. – С. 97–101. 3. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформируемых во времени. – М.: Гостехиздат, 1969. – 252 с. 4. Елсуфьев С. А. Исследование деформирования фторопласта-4 при линейном и плоском напряженном состояниях // Механика полимеров. – 1968. – № 4 – С. 742–746. 5. Работнов Ю. Н., Паперник А. Х., Степанычев Е. И. Нелинейная ползучесть стеклопластика TC8/3-250 // Механика полимеров. – 1971. – №3. – С. 391–397.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 15.05.2009

УДК 539.375

М. В. ДУДИК, канд. физ.-мат. наук**ВЛИЯНИЕ ТРЕНИЯ БЕРЕГОВ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ
НА РАЗВИТИЕ НАЧАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ**

Исследования напряженно-деформированного состояния вблизи межфазной трещины обнаружили существование в окрестности ее вершины осциллирующей особенности, одним из следствий которой является физически недопустимое перекрытие берегов трещины. Данный результат трактуется как невозможность прямого перехода от адгезии к разделению материалов и необходимость введения вблизи вершины промежуточной зоны контакта берегов, размер которой зависит от характера нагрузки и свойств контактирующих материалов [1]. Соответствующая модель межфазной трещины с контактной зоной рассмотрена в работах Комниноу [1–3], где показано, что контакт берегов вблизи вершины трещины устраняет осцилляции напряжений и смещений, сохраняя, тем не менее, степенную особенность напряжений. В различных версиях модели Комниноу предполагается как гладкий контакт берегов, так и наличие трения между ними. В частности, при сдвиге учет трения приводит к увеличению длины контактной зоны и отклонению показателя сингулярности напряжений от $r^{-1/2}$. В работе [4] показано также влияние трения берегов на отклонение межфазной трещины от границы раздела сред.

Изменение характера напряженно-деформированного состояния вблизи вершины трещины вследствие контакта берегов должно повлиять на конфигурацию начальной зоны предразрушения, образующейся в конце трещины сразу же после нагружения тела из-за возникающей в нем концентрации напряжений. В работе [5] в рамках бесфрикционной модели Комниноу выполнен расчет начальной пластической зоны предразрушения. При этом оказалось, что используемые обычно критерии выбора направления пластической зоны (условие максимума скорости диссипации энергии, условие максимума длины пластической зоны и др.) предсказывают ее развитие вдоль границы раздела сред, что лишь частично согласуется с результатами аналогичных расчетов в случае межфазной трещины без контактной зоны [6], а также с результатами компьютерного моделирования пластической зоны в конце межфазной трещины [7]. Предполагая причину указанных расхождений в пренебрежении трением между контактирующими берегами, в данной работе выполнен расчет начальной пластической зоны с учетом трения.

1. Постановка задачи. В условиях плоской деформации рассматривается статическая задача о расчете начальной пластической зоны в кусочно-однородном теле, которая выходит из вершины трещины, расположенной на плоской границе раздела двух различных изотропных упруго-пластических сред. В соответствии с моделью Комниноу, предполагается

частичный контакт примыкающих к вершине трещины берегов, взаимодействующих по закону сухого трения Кулона.

Согласно гипотезе локализации [8], пластическая зона на начальном этапе ее развития представляет собой тонкий слой материала – узкую полосу пластичности, которую ниже будем моделировать исходящей из вершины трещины под углом α к границе раздела сред прямой линией разрыва касательного смещения, на которой касательное напряжение равно пределу текучести τ_s материала, в котором она образуется. На исследуемом этапе развития пластической зоны ее длина l значительно меньше длины контактной зоны, размер которой при сдвиге сравним с длиной трещины. Поскольку для определения конфигурации и размеров пластической зоны достаточно знать напряженно-деформированное состояние лишь в ее непосредственной окрестности, то в качестве решения соответствующей статической задачи теории упругости можно рассматривать решение задачи для кусочно-однородной упруго-пластической плоскости, составленной из двух полуплоскостей и содержащей на их границе полубесконечный разрез, берега которого взаимодействуют по закону сухого трения, с исходящей из его конца линией разрыва, расположенной в материале с упругими постоянными E_1, ν_1 , который предполагается более пластичным, чем материалы второго тела и связующего. На бесконечности главные члены разложения напряжений в асимптотические ряды представляют собой удовлетворяющие условию затухания напряжений доминирующие слагаемые решения аналогичной задачи без линии разрыва, которое содержит произвольную постоянную k_{II} – коэффициент интенсивности напряжений в конце контактной зоны, характеризующий интенсивность внешнего поля. Постоянная k_{II} считается заданной по условию задачи.

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} \theta = 0, \quad < \sigma_\theta > < \tau_{r\theta} > = 0, \quad < u_\theta > < u_r > = 0, \\ \theta = \alpha, \quad < \sigma_\theta > < \tau_{r\theta} > = 0, \quad < u_\theta > = 0, \\ \theta = \pm\pi \quad < \sigma_\theta > < \tau_{r\theta} > = 0, \quad < u_\theta > = 0, \quad \tau_{r\theta} = -\mu\sigma_\theta; \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\theta = \alpha, \quad r < l, \quad \tau_{r\theta} = \pm\tau_s; \quad \theta = \alpha, \quad r > l, \quad < u_r > = 0; \quad (1.2)$$

$$\theta = \alpha, \quad r \rightarrow \infty, \quad \tau_\theta = k_{II} F(\alpha) r^\lambda + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad (1.3)$$

$$F(\alpha) = \frac{(2\pi)^\lambda}{2} \{ [2 + \lambda(1 + \beta)] \cos(2 + \lambda)\alpha - \lambda(1 + \beta) \cos \lambda\alpha \},$$

$$\beta = \frac{(1 + e\chi_2) - (e + \chi_1)}{(1 + e\chi_2) + (e + \chi_1)} \left(-\frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{1}{2} \right),$$

β – параметр Дундурса, причем $e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} \frac{E_1}{E_2}$, $\chi_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}$; λ – един-

ственный на интервале $(-1, 0)$ корень уравнения $\operatorname{ctg} \lambda\pi + \mu\beta = 0$; $\langle f \rangle$ – скачок величины f ; E_1 , E_2 и ν_1 , ν_2 – модули Юнга и коэффициенты Пуассона контактирующих сред, μ – коэффициент трения берегов.

Для контакта берегов требуются сжимающие усилия вблизи вершины трещины, что накладывает ограничение на знак коэффициента интенсивности напряжений в конце контактной зоны: $\beta k_{II} \geq 0$. Вблизи конца линии разрыва в силу общих положений о поведении напряжений в окрестностях угловых точек упругих тел реализуется асимптотика, представляющая собой удовлетворяющее условию непрерывности смещений доминирующее слагаемое решения однородной задачи теории упругости для плоскости, содержащей полубесконечную прямую линию разрыва касательного смещения. В частности, справедливы асимптотики

$$\theta = \alpha, \quad r \rightarrow l+0, \quad \tau_{r\theta} \sim \frac{K}{\sqrt{2\pi(r-l)}}; \quad (1.4)$$

$$\theta = \alpha, \quad r \rightarrow l-0, \quad \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \sim -\frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1} \frac{K}{\sqrt{2\pi(l-r)}},$$

где K – коэффициент интенсивности напряжений в конце линии разрыва, который должен быть определен в ходе решения задачи.

Решение сформулированной краевой задачи теории упругости представим в виде суммы решений следующих двух задач. Первая отличается от нее тем, что в (1.2) вместо первого условия считается, что

$$\theta = \alpha, \quad r < l, \quad \tau_{r\theta} = \tau_1 - k_{II} F(\alpha) r^\lambda \quad (\tau_1 = \pm \tau_s), \quad (1.5)$$

а на бесконечности напряжения затухают как $o(1/r)$. Вторая задача – аналогичная задача без линии разрыва, решение которой известно. Поэтому достаточно найти решение лишь первой задачи.

2. Решение уравнения Винера-Хопфа задачи. Решение рассматриваемой задачи получим методом Винера-Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина [9, 10]. Применив преобразование Меллина к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука, условиям (1.1) и учтя второе условие (1.2) и условие (1.5), приходим к функциональному уравнению Винера-Хопфа первой задачи:

$$\Phi^+(p) + \frac{\tau_1}{p+1} + \frac{\tau_2}{p+\lambda+1} = \operatorname{ctg} p\pi \cdot G(p) \Phi^-(p), \quad (2.1)$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho l, \alpha) \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \Big|_{r=\rho l} \rho^p d\rho, \quad \theta=\alpha$$

$$\tau_2 = -k_{II} F(\alpha) l^\lambda, \quad G(p) = \frac{D_1(p)}{\cos(p\pi) D_0(p)},$$

$$D_0(p) = 2(e + \chi_1)(1 + e\chi_2) \{ [(e + \chi_1) + (1 + e\chi_2)] \cos p\pi - \mu [(1 + e\chi_2) - (e + \chi_1)] \sin(p\pi) \};$$

$$D_1(p) = D_{10}(p) + \mu D_{11}(p),$$

$$D_{10}(p) = (1 + \chi_1)^3 \delta_1 + e(1 + \chi_2)(1 + \chi_1)^2 \delta_2 + (1 - e)(1 + \chi_1)^2 \delta_3 + (1 - e)^2 (1 + \chi_1) \delta_4 + e^2 (1 + \chi_2)^2 (1 + \chi_1) \delta_5 + e(1 + \chi_2)(1 - e)^2 \delta_6 + e^2 (1 + \chi_2)^2 (1 - e) \delta_6 + e(1 + \chi_2)(1 + \chi_1)(1 - e) \delta_7,$$

$$\delta_1(p) = \sin^2 \alpha - \sin^2 p(\pi - \alpha),$$

$$\delta_2(p) = p \sin 2\alpha \sin 2p\alpha + 2 [\sin^2 \alpha \cos 2p\alpha + \sin^2 p\alpha - \sin^2 p\pi],$$

$$\delta_3 = 4 \sin^2 p\alpha [\sin^2 p(\pi - \alpha) - \sin^2 \alpha] + \sin 2p\alpha \times \\ \times [p \sin 2\alpha - \sin 2p(\pi - \alpha)],$$

$$\delta_4 = 4 [\sin^2 \alpha \sin^2 p\alpha + \sin p\alpha \sin p(\pi - \alpha) \cos p\pi - p^2 \sin^2 \alpha \cos^2 p(\pi - \alpha)] - p \sin 2\alpha [\sin 2p\alpha - \sin 2p(\pi - \alpha)],$$

$$\delta_5 = \sin^2 \alpha (1 - 4p^2 \sin^2 p\alpha) + p \sin 2\alpha \sin 2p\alpha - \sin p(\pi - \alpha) [\sin p(\pi + \alpha) + 2 \cos p\pi \sin p\alpha],$$

$$\delta_6 = 2 \cos p\pi [2 \sin p(\pi - \alpha) \sin p\alpha + p \sin 2\alpha \sin p(\pi - 2\alpha) - 2p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi - 2\alpha)],$$

$$\delta_7 = -4p^2 \sin^2 \alpha [\sin^2 p\alpha + \cos^2 p(\pi - \alpha)] + p \sin 2\alpha \sin 2p(\pi - \alpha) + 4 \sin^2 \alpha \sin^2 p\alpha;$$

$$D_{11}(p) = -(1 + \chi_1) \bar{D}_{11}(p) - 2(1 - e) \tilde{D}_{11}(p),$$

$$\bar{D}_{11}(p) = (1 + \chi_1)^2 \bar{\delta}_1 + e^2 (1 + \chi_2)^2 \bar{\delta}_2 + 4(1 - e)^2 \sin p\pi \bar{\delta}_3 + (1 + \chi_1) e (1 + \chi_2) 2\bar{\delta}_4 + (1 - e)(1 + \chi_1) 2\bar{\delta}_5 + e(1 + \chi_2)(1 - e) \bar{\delta}_6,$$

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_{11}(p) &= (1+\chi_1)^2 \tilde{\delta}_1 + \left[e^2(1+\chi_2)^2 + 2(1-e)^2 + 3e(1+\chi_2)(1-e) \right] \times \\
&\quad \times \sin p\pi \tilde{\delta}_2 + (1+\chi_1)e(1+\chi_2) \tilde{\delta}_3 + 2(1-e)(1+\chi_1) \tilde{\delta}_4, \\
\bar{\delta}_1(p) &= 0,5 \left[\sin 2\alpha - \sin 2p(\pi-\alpha) \right], \\
\bar{\delta}_2(p) &= 2p^2 \sin^2 \alpha \sin 2p\alpha + (1-2p \cos 2p\alpha) \sin \alpha \cos \alpha + \\
&\quad + \sin p(\pi-\alpha) \left[\cos p(\pi+\alpha) - 2 \sin p\pi \sin p\alpha \right], \\
\bar{\delta}_3(p) &= 2p^2 \sin^2 \alpha \sin p(\pi-\alpha) \sin p\alpha - p \sin \alpha \cos p\alpha \sin(p(\pi-\alpha)-\alpha) + \\
&\quad + \sin p\alpha \left[\sin \alpha \cos(p(\pi-\alpha)+\alpha) - \sin p(\pi-\alpha) \right], \\
\bar{\delta}_4(p) &= -p \sin \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha \sin 2p\alpha) + \sin \alpha \cos \alpha \cos 2p\alpha + \\
&\quad + 2 \sin p\alpha \sin p\pi \sin p(\pi-\alpha), \\
\bar{\delta}_5(p) &= -p \sin \alpha \left[\sin \alpha \sin 2p\alpha + \sin p(\pi-\alpha) \sin(p(\pi-\alpha)+\alpha) \right] - \sin 2\alpha \times \\
&\quad \times \sin^2 p\alpha + \sin p(\pi-\alpha) \left[2 \sin p\alpha \sin p\pi + \sin \alpha \sin(p(\pi-\alpha)+\alpha) \right], \\
\bar{\delta}_6(p) &= 2p^2 \sin^2 \alpha \sin p\alpha \left[2 \cos p\alpha - \cos p(2\pi-\alpha) \right] + p \sin \alpha \times \\
&\quad \times \left[2 \cos \alpha (\sin^2 p\alpha - \sin^2 p(\pi-\alpha)) - \sin p(\pi+\alpha) \sin(p(\pi-\alpha)-\alpha) \right] + \\
&\quad + \sin \alpha \left[\cos \alpha - \cos(p(\pi-\alpha)+\alpha) \right] - 4 \sin p\alpha \sin p\pi \sin p(\pi-\alpha); \\
\tilde{\delta}_1(p) &= \cos(p\pi - p\alpha + \alpha) \left[\cos \alpha \sin p(\pi-\alpha) - p \sin \alpha \cos p(\pi-\alpha) \right], \\
\tilde{\delta}_2(p) &= p \sin 2\alpha \sin p(\pi-2\alpha) - 2p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi-2\alpha) + \\
&\quad + 2 \sin p\alpha \sin p(\pi-\alpha), \\
\tilde{\delta}_3(p) &= p^2 \sin^2 \alpha \left[\sin 2p\alpha + \sin 2p\pi \right] + p \sin \alpha \left[2 \cos \alpha \sin^2 p\alpha - \right. \\
&\quad \left. - \cos p(\pi+\alpha) \cos(p(\pi-\alpha)-\alpha) \right] + \sin p(\pi-\alpha) \times \\
&\quad \times \left[\cos \alpha \cos(p(\pi+\alpha)+\alpha) - 2 \sin p\pi \sin p\alpha \right], \\
\tilde{\delta}_4(p) &= 0,5 p^2 \sin^2 \alpha \left[\sin 2p\alpha + \sin 2p\pi \right] + p \sin \alpha \left[\cos p\pi \sin p(\pi-\alpha) \times \right. \\
&\quad \times \sin(p-1)\alpha + 2 \cos \alpha \sin^2 p\alpha \left. \right] - \sin p(\pi-\alpha) \sin p\alpha \times \\
&\quad \times \left[\sin p\pi + \cos \alpha \sin(p\pi+\alpha) \right];
\end{aligned}$$

$-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$, ε_1 и ε_2 – достаточно малые положительные числа.

Функция $G(it)$ ($-\infty < t < \infty$) при $\mu \operatorname{ctg} \alpha < 1$ имеет четную положительную вещественную и нечетную мнимую части, которые при $t \rightarrow \pm\infty$ стремятся соответственно к 1 и 0. Поэтому функция $G(p)$ имеет индекс 0 по мнимой оси и может быть факторизована с помощью формулы Гахова [11]:

$$G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p = 0),$$

$$\exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0; \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Кроме того, имеет место факторизация

$$p \operatorname{ctg} p\pi = K^+(p)K^-(p), \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1/2 \mp p)}, \quad (2.3)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция. Тогда уравнение (2.1) можно привести к виду

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi^+(p)}{K^+(p)G^+(p)} + \frac{\tau_1}{p+1} \left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)} - \frac{1}{K^+(-1)G^+(-1)} \right] + \\ & + \frac{\tau_2}{p+\lambda+1} \left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)} - \frac{1}{K^+(-\lambda-1)G^+(-\lambda-1)} \right] = \\ & = \frac{\Phi^-(p)K^-(p)}{pG^-(p)} - \frac{\tau_1}{(p+1)K^+(-1)G^+(-1)} - \\ & - \frac{\tau_2}{(p+\lambda+1)K^+(-\lambda-1)G^+(-\lambda-1)} \quad (\operatorname{Re} p = 0). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Функция в левой части уравнения (2.4) аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$, а функция в его правой части аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. Тогда в соответствии с принципом аналитического продолжения должна существовать единая функция, аналитическая во всей плоскости комплексной переменной p , которой будут равны в соответствующих полуплоскостях левая и правая части (2.4). Для ее нахождения применим теорему абелева типа [9] к асимптотикам (1.4), получим

$$\Phi^+(p) = \frac{K}{\sqrt{-2pl}} \quad (p \rightarrow \infty, \operatorname{Re} p < 0),$$

$$\Phi^{-}(p) = -\frac{K}{\sqrt{2pl}} \quad (p \rightarrow \infty, \operatorname{Re} p > 0). \quad (2.5)$$

С помощью (2.2), (2.3) и (2.5) легко убедиться, что левая и правая части уравнения (2.4) стремятся к нулю при $p \rightarrow \infty$. Тогда по теореме Лиувилля единая аналитическая функция тождественно равна нулю во всей плоскости p , откуда находим точное решение уравнения (2.4):

$$\begin{aligned} \Phi^{+}(p) &= -K^{+}(p)G^{+}(p) \left\{ \frac{\tau_1}{p+1} \left[\frac{1}{K^{+}(p)G^{+}(p)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{K^{+}(-1)G^{+}(-1)} \right] + \frac{\tau_2}{p+\lambda+1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{1}{K^{+}(p)G^{+}(p)} - \frac{1}{K^{+}(-\lambda-1)G^{+}(-\lambda-1)} \right] \right\} \quad (\operatorname{Re} p < 0), \\ \Phi^{-}(p) &= \frac{pG^{-}(p)}{K^{-}(p)} \left[\frac{\tau_1}{(p+1)K^{+}(-1)G^{+}(-1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau_2}{(p+\lambda+1)K^{+}(-\lambda-1)G^{+}(-\lambda-1)} \right] \quad (\operatorname{Re} p > 0). \quad (2.6) \end{aligned}$$

Из (2.6) находим асимптотику трансформанты $\Phi^{-}(p)$:

$$\Phi^{-}(p) \sim \frac{1}{\sqrt{p}} \left[\frac{\tau_1}{K^{+}(-1)G^{+}(-1)} + \frac{\tau_2}{K^{+}(-\lambda-1)G^{+}(-\lambda-1)} \right] \quad (p \rightarrow \infty),$$

откуда путем сравнения с (2.5) определим коэффициент интенсивности напряжений в конце линии разрыва:

$$K = -\sqrt{2l} \left[\frac{\tau_1}{K^{+}(-1)G^{+}(-1)} + \frac{\tau_2}{K^{+}(-\lambda-1)G^{+}(-\lambda-1)} \right]. \quad (2.7)$$

3. Определение конфигурации начальной пластической зоны. При заданной внешней нагрузке пластическая зона растет, пока локальная интенсивность напряжений в ее конце не достигнет предельного значения K_{2c} , представляющего собой вязкость скольжения материала, в котором она развивается. При условии $K_{2c} = \tau_s \sqrt{l}$ правую часть (2.7) можно приравнять к нулю и получить следующее выражение для длины зоны:

$$l = R(\alpha)l_0, \quad l_0 = \left(\frac{|k_{II}|}{\tau_s} \right)^{-1/\lambda}, \quad R(\alpha) = \left[\frac{2|F(\alpha)|G_1}{\sqrt{\pi}K^+(-\lambda-1)G_2} \right]^{-1/\lambda}, \quad (3.1)$$

$$G_1 = \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln |G(it)| + t \cdot \arg(G(it))}{t^2 + 1} dt \right],$$

$$G_2 = \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda+1) \ln G(it) + t \cdot \arg(G(it))}{t^2 + (\lambda+1)^2} dt \right].$$

Согласно (3.1) размер пластической зоны-полоски нелинейно растет с увеличением внешней нагрузки, входящей в выражение для длины только через КИН k_{II} в конце контактной зоны. Кроме того, ее длина тем больше, чем пластичнее материал, в котором происходит ее развитие. Степень $-1/\lambda$ отношения k_{II}/τ_s в l отличается от соответствующей бесфрикционному контакту берегов степени 2, причем $-1/\lambda > 2$ при $\mu\beta > 0$ и $-1/\lambda < 2$ при $\mu\beta < 0$.

Определение длины зоны должно осуществляться согласованно с выбором направления ее развития, поскольку от угла отклонения зоны α от линии раздела сред зависит множитель R в (3.1). Для определения угла наклона начальной пластической зоны используем критерий максимальной скорости диссипации энергии. Величина диссипации упругой энергии называется связанной с трансформантой Меллина $\Phi^-(1)$:

$$W(t, \alpha) = -\frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1} l^2 \tau_s \Phi^-(1).$$

Используя найденное выше решение (2.6), получаем

$$W(t, \alpha) = -\frac{\pi(1-\nu_1^2)\tau_s^2}{2E_1} \frac{\lambda}{\lambda+2} \left(\frac{k_{II}(t)}{\tau_s} \right)^{-2/\lambda} w(\alpha),$$

$$w(\alpha) = \frac{G_3}{G_1} R^2(\alpha), \quad G_3 = \exp \left[\frac{-1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln |G(it)| - t \cdot \arg(G(it))}{t^2 + 1} dt \right].$$

Отсюда находим скорость диссипации энергии:

$$\frac{dW(t, \alpha)}{dt} = \frac{\pi(1-\nu_1^2)\tau_s^2}{(\lambda+2)E_1} \left(\frac{k_{II}(t)}{\tau_s} \right)^{-2/\lambda} \frac{1}{k_{II}(t)} \frac{dk_{II}(t)}{dt} w(\alpha). \quad (3.2)$$

Пусть $k_{II}(t)$ является возрастающей положительной или убывающей

отрицательной функцией времени, так что $\frac{1}{k_{II}(t)} \frac{dk_{II}(t)}{dt} > 0$. Тогда условие максимума скорости диссипации энергии эквивалентно требованию максимума функции $w(\alpha)$.

Расчеты показывают, что функция $w(\alpha)$ имеет максимум при $\alpha = 0^\circ$, что соответствует распространению начальной пластической зоны вдоль границы раздела сред в одном из материалов тела или в связующем в зависимости от уровня их пластичности. Вместе с тем, в случае $\mu > 0$ существует второй максимум при $\alpha > 90^\circ$, который можно трактовать как возможность образования боковой пластической зоны, если сдвиг в исследуемом материале происходит в направлении от границы раздела сред к трещине. Этот результат полностью согласуется с выводами работ [6, 7], в которых на основании как аналитических, так и числовых исследований в зависимости от конфигурации внешней нагрузки предсказывается существование боковой пластической зоны в конце межфазной трещины в кусочно-однородном твердом теле.

Результаты расчетов угла наклона α пластической зоны-полоски к границе раздела сред и соответствующая ему длина в единицах l_0 , выполненных по формулам (3.1) и (3.2) для отношений модулей Юнга $E_1/E_2 = 0,5$, $E_1/E_2 = 2$ и коэффициентов Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, представлены в таблице. Здесь же для сравнения приведены значения угла α_1 , определяемого из условия максимума касательного напряжения (1.3), и угла α_2 , соответствующего максимуму длины пластической зоны (3.1).

Представленные в таблице значения углов наклона пластической зоны, найденных по трем различным критериям, согласуются между собой и со

μ	α°	l/l_0	α_1°	α_2°	α°	l/l_0	α_1°	α_2°
	$E_1/E_2 = 0,5$				$E_1/E_2 = 2$			
0,25	127,8	0,1127	124,1	126,4	125,9	0,0975	123,4	124,9
0,50	128,1	0,1127	124,9	127,1	124,2	0,0941	122,6	123,7
0,75	128,6	0,1127	125,7	127,9	122,7	0,0911	121,8	122,5
1,00	129,2	0,1128	126,6	128,8	121,3	0,0884	120,9	121,4
1,50	130,7	0,1136	128,3	130,8	118,9	0,0838	119,4	119,4
2,00	132,7	0,1151	130,0	133,2	116,7	0,0801	118,0	117,6
3,00	138,0	0,1206	133,6	139,0	113,0	0,0747	115,3	114,3
4,00	146,5	0,1299	137,2	146,4	109,8	0,0709	112,9	111,5

значениями, полученными в [7] в рамках модели межфазной трещины без контакта берегов. Это свидетельствует о большей адекватности рассмотренной в данной работе модели пластической зоны в конце межфазной трещины, берега которой взаимодействуют по закону сухого трения, в от-

личие от аналогичной модели без трения, исследованной в [6]. По-видимому, за счет включения в модель трения стало возможным до определенной степени учесть влияние внешней нагрузки на конфигурацию пластической зоны, что было невозможно в рамках модели [6]. Согласно полученным результатам, угол наклона и длина пластической полосы растут с увеличением коэффициента трения при $E_1/E_2 < 1$ и убывают при $E_1/E_2 > 1$. При этом влияние трения на угол наклона пластической полосы оказывается сильнее, чем выявленное в [4] его влияние на начальный поворот межфазной трещины.

РЕЗЮМЕ. В умовах плоскої деформації методом Вінера-Хопфа здійснено розрахунок початкової пластичної зони біля кінця міжфазної тріщини в кусково-однорідному ізотропному пружно-пластичному тілі, береги якої контактують з тертям. Пластична зона моделюється прямою лінією розриву дотичного зміщення, що виходить з кінця тріщини під кутом до межі розділу середовищ. Досліджені залежності довжини пластичної зони і кута її нахилу від пружних параметрів тіла та коефіцієнта тертя.

SUMMARY. The calculation of the initial plastic zone near the end of the interfacial crack with friction between the crack lips in piece-homogeneous isotropic elasto-plastic body under plane strain by the Wiener-Hopf method is presented. The plastic zone is modeled by the direct line of tangential displacement rupture emerging from the end of the crack. The dependences of the length of the plastic zone and of the angle of the slope on the elastic parameters of the body and on the friction coefficient are investigated.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. Дундурс Дж., Комніноу М. Обзор и перспективы исследования межфазной трещины // Механика композиционных материалов. – 1979. – № 3. – С. 387–396. 2. Comninou M. The interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – Vol. 44. – P. 631–636. 3. Comninou M., Dundurs J. Effect of friction on the interface crack loaded in shear // Journ. of Elasticity. – 1980. – Vol. 10, № 2. – P. 203–212. 4. Leblond J. B., Frelat J. Crack kinking from an initially closed, ordinary on interface crack, in the presence of friction // Eng. Fract. Mech.. – 2004. – Vol. 71. – P. 289–307. 5. Дудик М., Дякон В., Красильников А. Розрахунок пластичної зони передруйнування в кінці міжфазної тріщини з гладким контактом берегів // машинознавство. – 2009. – № 1. – С. 24–27. 6. Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А. О направлении развития тонкой пластической зоны предразрушения в вершине трещины на границе раздела различных сред // Прикладная механика. – 2006. – Т. 42, № 2. – С. 14–23. 7. Shih C. F., Asaro R. J. Elasto-plastic analysis of cracks on biomaterial interfaces: Part I – Small scale Yielding // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1988. – Vol. 55. – P. 299–316. 8. Панасюк В. В., Саврук М. П. Модель смуг пластичності в пружно-пластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – № 1. – С. 49–68. 9. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с. 10. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402 с. 11. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

Уманский государственный педагогический университет Поступила 01.10.2009

М. О. ШУЛЬГА, д-р физ.-мат. наук, С. А. ГРИГОРЬЕВ

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ УПРУГОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ВНУТРЕННЕЙ ГРАНИЦЕЙ

В связи с широким применением пьезоэлектрических преобразователей как элементов конструкций возникает повышенный интерес к исследованию их поведения при динамических нагрузках. Условия эксплуатации пьезоэлектрических элементов конструкций достаточно разнообразны и возможны различные способы закрепления и нагружения. Анализ динамического электромеханического состояния пьезоэлектрических элементов конструкций при разных типах закрепления необходим для их оптимального применения. В работах [1, 2] изучались колебания полого пьезоэлектрического шара со свободными внешними поверхностями при возбуждении электрическим потенциалом. В данной статье исследуются колебания поляризованного по толщине пьезоэлектрического шара с закрепленной внутренней поверхностью. Внешняя поверхность шара свободна от механических нагрузок. Рассматриваются колебания шара при возбуждении электрическим потенциалом, приложенным к электродированным внешним поверхностям шара.

Постановка задачи. Рассмотрим полый поляризованный по толщине пьезоэлектрический шар с радиусом срединной поверхности R и толщиной стенки $2h$. Колебания шара описываются уравнением движения и квазистатическим уравнением для электрической индукции [3, 5]

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}, \quad \frac{\partial D_r}{\partial r} + 2 \frac{D_r}{r} = 0 \quad (1)$$

при материальных соотношениях

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{33}^E \frac{\partial u}{\partial r} + 2c_{13}^E \frac{u}{r} + e_{33} \frac{\partial \phi}{\partial r}, \\ \sigma_{\alpha\alpha} &= c_{13}^E \frac{\partial u}{\partial r} + (c_{11}^E + c_{21}^E) \frac{u}{r} + e_{13} \frac{\partial \phi}{\partial r}, \\ D_r &= e_{33} \frac{\partial u}{\partial r} + 2e_{13} \frac{u}{r} - \epsilon_{33}^S \frac{\partial \phi}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2)$$

Начальные условия накладываются на перемещения и их скорости [4]

$$u(r, 0) = u^0(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, t=0) = u^1(r). \quad (3)$$

Внутренняя поверхность шара $R-h$ жестко закреплена, внешняя по-

верхность $R+h$ свободна от механических нагрузок и к электродам на внешних электродированных поверхностях шара подводится разность электрического потенциала, т. е.:

$$\begin{aligned} u(R-h) &= 0, \quad \sigma_{rr}(R+h, t) = 0, \\ \phi(R \pm h, t) &= \pm V(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Начально-краевую задачу (1)–(4) сведем к безразмерному виду с помощью обозначений

$$\begin{aligned} r &= R+x, \quad \bar{x} = \frac{x}{h}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_h}, \quad \bar{u} = \frac{u}{h}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{c_{00}}, \\ \bar{\phi} &= \phi \sqrt{\frac{\epsilon_{00}}{c_{00}h^2}}, \quad \bar{D}_i = \frac{D_i}{\sqrt{c_{00}\epsilon_{00}}}, \quad \bar{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{00}\epsilon_{00}}}, \\ \bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_{00}}, \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}^E}{c_{00}}, \quad \bar{\epsilon}_{ii} = \frac{\epsilon_{ii}^S}{\epsilon_{00}}, \quad \epsilon = \frac{h}{R}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\rho_{00} = \rho$; $c_{00} = c_{33}^E$; $\epsilon_{00} = \epsilon_{33}^S$; $t_h = h\sqrt{\rho_{00}/c_{00}}$ – нормирующие величины. В дальнейшем знаки безразмерности опускаются.

Исключая из (1) механические напряжения и электрическую индукцию, получаем систему дифференциальных уравнений относительно перемещения и электрического потенциала в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= c_{11} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + \frac{2c_{11}\epsilon}{1+\epsilon x} \frac{\partial u_r}{\partial x} + (c_{13} - c_{33} - c_{23}) \frac{2\epsilon^2}{(1+\epsilon x)^2} u_r + \\ &+ e_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + (e_{11} - e_{31}) \frac{2\epsilon}{1+\epsilon x} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ e_{11} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} &+ (e_{31} + e_{11}) \frac{2\epsilon}{1+\epsilon x} \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{2e_{31}\epsilon^2}{(1+\epsilon x)^2} u_r - \epsilon_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{2\epsilon_{11}\epsilon}{1+\epsilon x} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, колебания пьезокерамического шара описываются соотношениями (6) при начальных (3) и граничных (4) условиях с учетом материальных соотношений (2).

Численный метод решения. Для решения полученной начально-краевой задачи на основе разностных аппроксимаций построим численную схему. В интервале интегрирования $x \in [-1, 1]$ введем разбиение Ω таким образом, что крайние точки разбиения находились на расстоянии $\Delta_x/2$ от концов интервала:

$$\Omega = \{x_i = (i - n - 0,5)\Delta x, i = 0, 1, \dots, 2n + 1; \Delta x = 1/n\}. \quad (7)$$

Механические перемещения и электрический потенциал будем искать в узлах разбиения, а механические напряжения и электрическую индукцию – в центрах отрезков разбиения. Разностная форма уравнений электроупругости (6), записанная для внутренних точек разбиения, принимает вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = & \frac{c_{11}}{\Delta x^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + \frac{c_{11}\xi_i}{\Delta x} (u_{i+1} - u_{i-1}) + 2(c_{13} - c_{33} - \\ & - c_{23}) \xi_i^2 u_i + \frac{e_{11}}{\Delta x^2} (\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) + (e_{11} - e_{31}) \frac{\xi_i}{\Delta x} (\phi_{i+1} - \phi_{i-1}), \\ \frac{e_{11}}{\Delta x^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + & (e_{31} + e_{11}) \frac{\xi_i}{\Delta x} (u_{i+1} - u_{i-1}) + 2e_{31} \xi_i^2 u_i - \\ - \frac{\varepsilon_{11}}{\Delta x^2} (\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) - & \frac{\varepsilon_{11}\xi_i}{\Delta x} (\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\xi_i = \varepsilon / (1 + \varepsilon x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Исключив из уравнений значения перемещений и электрического потенциала в законтурных точках разбиения, получаем

$$\begin{aligned} \phi_0 = -\phi_1 - 2V_0(t), \quad \phi_{2n+1} = -\phi_{2n} + 2V_0(t), \\ u_0 = - \left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} - \frac{c_{33}}{\Delta x} \right)^{-1} \left(\left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} + \frac{c_{33}}{\Delta x} \right) u_1 + 2e_{33} \frac{\phi_1 + V_0(t)}{\Delta x} \right), \\ u_{2n+1} = - \left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{c_{33}}{\Delta x} \right)^{-1} \left(\left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} - \frac{c_{33}}{\Delta x} \right) u_{2n} + 2e_{33} \frac{V_0(t) - \phi_{2n}}{\Delta x} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Разрешающую систему уравнений получим путем подстановки соотношений (9) в (8). Для интегрирования по времени вводим разбиение ω_t интервала времени $t \in [0, T]$ с шагом Δt . Решение ищется с помощью явной разностной схемы

$$\ddot{u}^{k+1} = \frac{u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1}}{\Delta t^2}, \quad (10)$$

или неявной разностной схемы (алгоритм Ньюмарка)

$$\ddot{u}^{k+1} = \frac{\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k}{\xi \Delta t} - \frac{1-\xi}{\xi} \ddot{u}^k, \quad \dot{u}^{k+1} = \frac{u^{k+1} - u^k}{\xi \Delta t} - \frac{1-\xi}{\xi} \dot{u}^k, \quad (11)$$

где ξ – параметр схемы.

Количественные результаты. Рассмотрим нестационарные колеба-

ния шара из керамики PZT-4 [3] с параметром кривизны $\varepsilon = 0,1$ при нулевых начальных условиях. Возмущение зададим в виде

$$\phi(R \pm h, t) = \pm V_0 H(t). \quad (12)$$

При вычислениях используем значение $\xi = 0,5$. Полученные результаты представлены в безразмерном виде с точностью до коэффициента нагружения \bar{V}_0 .

На рис. 1 даны значения перемещений, которые возникают в разных точках стенки шара. Колебания определяются движением связанной электроупругой волны в направлении поляризации, и область изменения перемещений значительно меньше, чем в шарах со свободными поверхностями [1, 2], в связи с отсутствием колебаний стенки шара и распространением только одной электроупругой волны.

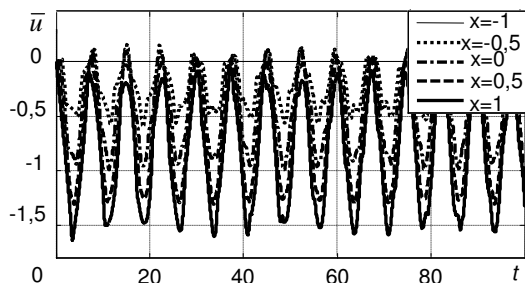


Рис. 1

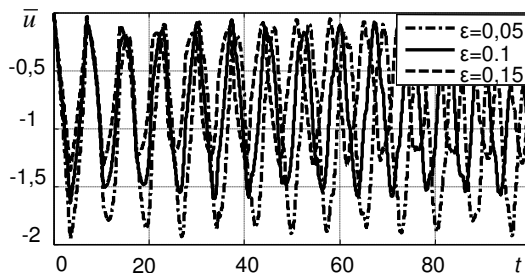


Рис. 2

электроупругой волны на поверхность $x = 1$. Амплитуда перемещений растет с уменьшением ε и ограничивается амплитудой колебаний для плоского слоя ($\varepsilon = 0$), которая равна $\bar{u}_{\max} = -2,3$.

Динамика изменения радиальных напряжений в точках закрепления и на срединной поверхности проиллюстрирована рис. 3. Растягивающие напряжения выше сжимающих напряжений больше чем в 1,5 раза. Напряжения на закрепленной поверхности принимают значительно большие значения, чем напряжения на срединной поверхности, достигают значения

Сравнить перемещения, которые возникают в шарах с разным параметром кривизны $\varepsilon = h/R$, можно с помощью рис. 2. С увеличением параметра ε значения экстремумов кривых перемещений поверхности и промежутки времени между экстремумами уменьшаются.

Как видно, перемещения достигают экстремальных значений в момент возвращения отраженной

$\bar{\sigma}_{r \max} = 1,6$. Закономерность изменения во времени окружных напряжений $\sigma_{\alpha\alpha}$ можно проследить с помощью рис. 4. Окружные напряжения практически все время являются сжимающими и, как и радиальные напряжения, достигают максимального значения $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha \max} = -1,15$ на внутренней поверхности $x = -1$. Кривые окружных напряжений на поверхности $x = 1$ близкие к гладким, в других точках сечения кривые имеют разрывы.

Изменение во времени электрического потенциала ϕ проиллюстрировано на рис. 5. Электрический потенциал возникает в сечениях пьезокерамического шара мгновенно и вызывает возникновение механических напряжений, которые линейно зависят от производной $\partial\phi/\partial x$.

Динамические кривые электрической индукции (рис. 6) в начальный момент времени получают значения, которые предопределяются значением электрического потенциала в начальный момент времени. Электрическая индукция достигает максимального значения $\bar{D}_{r \max} = -1,77$ и носит монотонный характер по сечению шара. Моменты времени, в которые возникают экстремумы кривых электрической индукции, близки к моментам экстремумов кривых перемещений (рис. 1).

Определим параметры электромеханического состояния пьезокерамического шара с толщиной

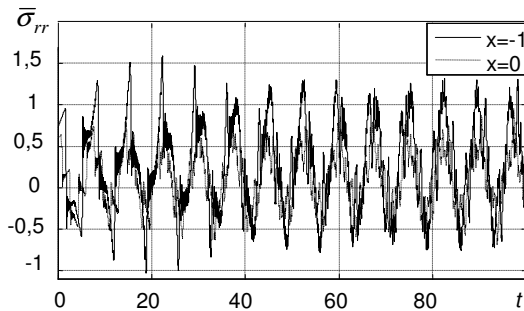


Рис. 3

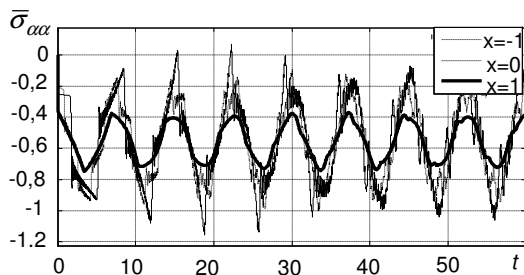


Рис. 4

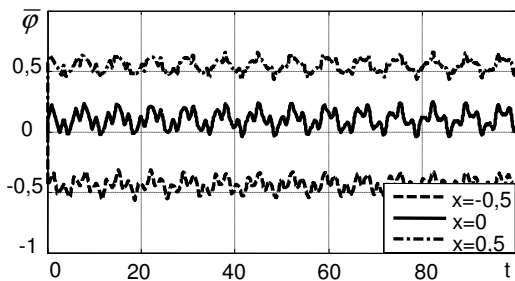


Рис. 5.

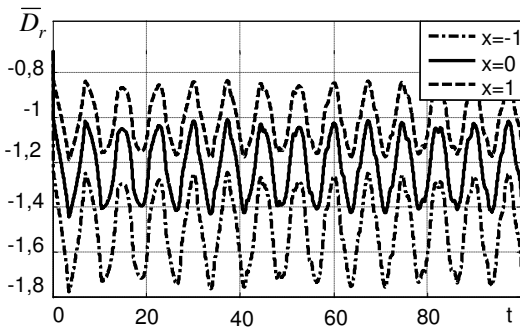


Рис. 6.

стенки $2h = 2 \text{ мм}$ и радиусом срединной поверхности $R = 10 \text{ мм}$ при нагружении разницей потенциалов $2V(t) = 200V$. Имеем безразмерный коэффициент нагружения $\bar{V}_0 = 2,2 \cdot 10^{-5}$, $t_h = 2,55 \cdot 10^{-7} \text{ с}$. Рассматривается интервал времени $2,55 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ (хотя схема позволяет получать результаты на в несколько раз больших интервалах времени).

Максимальные перемещения возникают на внутренней поверхности шара и равны $u_{\max} = \bar{V}_0 h \bar{u}_{\max} = -3,6 \cdot 10^{-5} \text{ мм}$. Максимальные нормальные напряжения на срединной поверхности $\sigma_{r\max} = \bar{V}_0 c_{00} \bar{\sigma}_{r\max} = 1,84 \text{ МПа}$, окружные напряжения – $\sigma_{\alpha\max} = \bar{V}_0 c_{00} \bar{\sigma}_{\alpha\max} = -1,32 \text{ МПа}$. Электрическая индукция на внутренней поверхности шара достигает значения $D_{r\max} = \bar{V}_0 \bar{D}_{r\max} \sqrt{c_{00} \epsilon_{00}} = 9,89 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/м}^2$.

В связи с отсутствием необходимых экспериментальных исследований оценки прочности в условиях динамического деформирования воспользуемся экспериментальными данными [6] при статическом растяжении пьезо-керамического стержня из ЦТС-19, когда предел прочности равен $\sigma_{\epsilon}^+ = 36,0 \pm 1,4 \text{ МПа}$. Для PZT-4 предел прочности можно приблизительно принять на 10-20% больше. Проводя оценку прочности по максимальным нормальным напряжениям, можно сделать вывод, что в нашем случае $\sigma_{r\max} = 1,84 \text{ МПа}$ значительно меньше статического предела прочности, что следует ожидать и при динамическом нагружении.

РЕЗЮМЕ. Розв'язана задача про осесиметричні нестационарні коливання п'єзокерамічної радіально поляризованої кулі з закріпленою внутрішньою поверхнею при електричних збуреннях. Досліджено динамічний пружноелектричний стан кулі, встановлено залежність коливань від параметра кривизни, проведено оцінку міцності розмірного стану для п'єзокерамічної кулі при навантаженні різницею потенціалів.

SUMMARY. A task about axisymmetrical unstationary vibrations of the piezoceramic radially polarized ball with the fixed internal surface at electric excitations is decided. The dynamic elasto-electric state of ball is explored, dependence of vibrations on the parameter of curvature is set, the strength assessment for dimensional state of the concrete ball at loading by the difference of potentials is done.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ: 1. Григор'єв С. А. Товщинні нестационарні коливання п'єзокерамічної кулі при електричному збуренні // Системні технології. – 2008. – Т. 4(57). – С. 82–86. 2. Шульга М. О., Григор'єв С. А. Радіальні пружноелектричні нестационарні коливання п'єзокерамічної порожнистої кулі // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2007. – Вип. 81. – С. 159–166. 3. Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезоэлектрических тел. – К: Наук. думка, 1990. – 228 с. 4. Шульга М. О. Про варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського і початково-крайові динамічні задачі електропружності // Доп. НАН України. – 2008. – № 6. – С. 36-45. 5. Шульга М. О., Карлаш В. Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – К.: Наук. думка, 2008. – 280 с. 6. Писаренко Г. Г. Прочность пьезокерамики. – К.: Наук. думка, 1987. – 232 с.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев
Киевский национальный университет строительства
и архитектуры*

Поступила 03.09.2009

УДК 539.3

Л. Я. ВАСИЛЬЕВ, Я. А. ЖУК, д-р физ.-мат. наук;
И. К. СЕНЧЕНКОВ, д-р физ.-мат. наук;
О. П. ЧЕРВИНКО, канд. физ.-мат. наук

ОСОБЕННОСТИ ГЕНЕРАЦИИ УПРУГИХ ВОЛН ПРИ ТЕПЛОМ ОБЛУЧЕНИИ СТАЛЬНОГО ОБРАЗЦА И УЧЕТЕ АУСТЕНИТНО-МАРТЕНСИТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Импульсная обработка является эффективным методом повышения прочности, износоустойчивости и усталостной долговечности металлических элементов конструкций посредством создания областей остаточных сжимающих напряжений в приповерхностной зоне материала [1, 2]. Наряду с этим непосредственным технологическим применением облучение металлических поверхностей интенсивными тепловыми источниками используется для генерации коротких зондирующих импульсов, распространяющихся во внутрь тонких образцов и позволяющих оценивать структуру и механические свойства последних в рамках классического акустического подхода. Физическая сторона процесса состоит в кратковременном облучении поверхности конструкции источником энергии высокой плотности (лазерным импульсом, пучком заряженных частиц и т.п.) и создании зоны быстрого нагрева с большим градиентом температуры на поверхности либо в приповерхностной зоне. В этой области формируются тепловые напряжения, образуется фронт ударной волны, а при высоких температурах, может наблюдаться даже плавление материала. Вопросы генерации термоупругих импульсов напряжения обсуждались в работах [3]. При последующем остывании картина распределений остаточных напряжений может изменяться [3]. При этом выбором режима облучения и остывания можно сформировать желательную зону сжимающих напряжений в приповерхностной области. В сталях следующее за нагревом остывание может сопровождаться фазовыми переходами, характеризующимися распадом переохлажденного аустенита в мартенситную, ферритную, бейнитную, перлитную и т.д. фракции [4]. Если охлаждение образца происходит достаточно быстро, то наряду с импульсом напряжения, вызванным термоупругими эффектами, возникнет импульс напряжения, обусловленный микроструктурными превращениями, поскольку удельные объемы фаз различны.

В данной статье рассматриваются вопросы, связанные с образованием и распространением волн напряжений в теле, подверженном воздействию кратковременного теплового импульса с последующим быстрым охлаждением. В связи с этим особое внимание уделяется описанию связанного термомеханического поведения материала в области действия теплового импульса, микроструктурным преобразованиям, вызванным нагревом и последующим охлаждением, распространению волн напряжений и сопровождающих их изменений температуры.

Постановка задачи. Рассмотрим модельную задачу об облучении торца тонкого кругового цилиндра (стержня) радиуса R и длины L из мартенситной стали 35ХМ тепловым импульсом. На торце $z = 0$ действует кратковременный тепловой импульс длительностью t_p , который моделируется тепловым потоком через границу. По окончании действия импульса происходит принудительное охлаждение облученного торца, которое осуществляется по механизму конвективного теплообмена при высоком коэффициенте теплоотдачи. Вся остальная поверхность стержня, включая торцы, считается теплоизолированной и свободной от напряжений.

Математическая постановка задачи включает в себя соотношения Коши для осесимметричного случая, а также уравнения движения и и уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = \rho \ddot{u}_r, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \ddot{u}_z; \quad (1)$$

$$c_v \dot{\theta} + 3\alpha\theta K_V (\dot{\epsilon}_{kk} - 3\alpha\dot{\theta}) - D' - k\Delta\theta = r_s. \quad (2)$$

Здесь u_r и u_z – компоненты перемещения; ρ – плотность материала; θ – температура; c_v и k – коэффициенты объемной теплоемкости и теплопроводности соответственно; K_V – модуль объемного сжатия; D' – скорость диссипации механической энергии и r_s – внутренние источники тепла, $\Delta = \partial^2(\cdot)/\partial r^2 + \partial(\cdot)/r\partial z^2$.

При интенсивном тепловом воздействии материал ведет себя неупруго, поэтому для описания его реакции используем термомеханическую модель физически нелинейного поведения материала, описывающую как упругое, так и неупругое поведения при больших скоростях деформации. В рамках модифицированной модели полная деформация представляется в виде суммы упругой, неупругой и термоструктурной составляющей $\epsilon_{ij}^{\theta ph}$ [4, 5]

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^{in} + \epsilon_{ij}^{\theta ph}. \quad (3)$$

Напряжения и неупругая деформация определяются законом Гука и следующими эволюционными уравнениями для собственно неупругой деформации и параметра изотропного упрочнения K :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left(\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^{in} - \epsilon_{ij}^{\theta ph} \right) + \lambda \left(\epsilon_{kk} - \epsilon_{kk}^{\theta ph} \right) \delta_{ij},$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{in} = D_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\bar{K}_0 + K \right)^2 / 3J_2 \right]^n \right\} s_{ij} / J_2^{1/2}, \quad \epsilon_{ij}^{in}(0) = 0,$$

$$\dot{K} = m_1 \left(\bar{K}_1 - K \right) \dot{w}^p, \quad K(0) = 0, \quad (4)$$

где $\bar{K}_0 = C^\xi K_0^\xi$, $\bar{K}_1 = C^\xi K_1^\xi$; λ , μ – параметры Ляме; C^ξ – объемные концентрации фаз, $\xi = f, p, b, m$ соответственно феррита, перлита, бейнита и мартенсита; $K_0^\xi, K_1^\xi, m_1, n, D_0$ – параметры модели; s_{ij} – девиатор тензора напряжений, $s_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3 \sigma_{kk} \delta_{ij}$; \dot{w}^p – пластическая мощность, J_2 – второй инвариант тензора напряжений $\dot{w}^p = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{in}$, $J_2 = 1/2 s_{ij} s_{ij}$.

Деформация $\epsilon_{ij}^{\theta ph}$ определяется через удельные объемы фаз V_ξ :

$$\epsilon_{ij}^{\theta ph}(\theta, \theta_r, C^\xi) = \frac{V_\xi(\theta) C^\xi(\theta) - V_\xi(\theta_r) C^\xi(\theta_r)}{3V_\xi(\theta_r) C^\xi(\theta_r)}. \quad (5)$$

Здесь θ – текущая температура, θ_r – некоторая отсчетная температура. В уравнении (5) производится суммирование по повторяющемуся индексу ξ .

Температурные зависимости удельных объемов $V_\xi(\theta)$ в $m^3/кг$, относенные к $\theta = 20^\circ C$, принимаются в виде [4, 5]

$$V_a(\theta, C_p) \cdot 10^3 = 0,12282 + 8,56 \cdot 10^{-6} (\theta - 20) + 2,15 \cdot 10^{-3} C_p; \quad (6)$$

$$V_{f,p,b}(\theta, 20^\circ, C_p) \cdot 10^3 = 0,12708 + 5,528 \cdot 10^{-6} (\theta - 20); \quad (7)$$

$$V_m(\theta, 20^\circ, C_p) \cdot 10^3 = 0,12708 + 4,448 \cdot 10^{-6} (\theta - 20) + 2,79 \cdot 10^{-3} C_p, \quad (8)$$

в котором C_p – концентрация углерода в процентах. Начальные и граничные условия имеют соответственно вид

$$u_r = \dot{u}_r = 0, \quad u_z = \dot{u}_z = 0, \quad \theta = \theta_0 \text{ при } t = 0, \quad \sigma_{ij} = 0 \text{ на } S,$$

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial z} = \begin{cases} q_0 \sin(\pi t / t_p), & 0 \leq t \leq t_p, \\ \alpha_T (\theta - \theta_0), & t > t_p; \end{cases} \text{ при } z = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \bar{n}} = 0 \text{ при } z = L, r = R, \quad (9)$$

где q_0 – параметр теплового потока; t_p – время действия импульса, α_T – коэффициент теплоотдачи с торца.

Метод решения задачи. Параметры модели Боднера-Партома для стали 35ХМ представлены в работе [4]. Расчеты проводились для следую-

щих геометрических параметров цилиндра (стержня) $R = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, $L = 2 \cdot 10^3 \text{ м}$. Длительность теплового импульса $t_p = 10^{-7} \text{ с}$, параметр теплового потока $q_0 = 0,75 \cdot 10^8 \text{ кВт/м}^2$. Начальная температура цилиндра θ_0 равна 20° C . Коэффициент теплоотдачи с торца выбирается экстремально большим $\alpha_T = 10^5 \text{ кВт/м}^2 \cdot \text{K}$, что соответствует принудительному охлаждению при помощи душа. Исходной структурой стали считается бейнит.

Задача является существенно нелинейной. Она решалась численно с использованием временной схемы Крэнка-Никольсона, итерационного метода и метода конечных элементов. Расчет концентрации фаз распада переохлажденного аустенита выполнялся с помощью термокинетической диаграммы [4, 5] и соотношений для удельных объемов фаз (6)–(8). Кратко напомним, что методика расчета фаз основана на предположении о том, что процент новой фазы p_ξ определяется по формуле $p_\xi = P_{as} y_\xi$ где P_{as} – процент аустенита при входе кривой охлаждения в область фазового превращения (ОФП); y_ξ – текущее значение относительной фазы. Значение y_ξ определялось по соответствующим траекториям на термокинетических диаграммах, причем закон набора относительной фазы аппроксимируется выражением

$$y_\xi = \left[1 - \exp \left(-k \frac{\theta_s - \theta}{\theta_s - \theta_e} \right) \right] y_{\xi e}.$$

Здесь $y_{\xi e}$ – процент новой фазы при выходе из ОФП, отнесенный к проценту нераспавшегося аустенита при входе в нее.

Результаты расчетов и их анализ. На рис. 1 представлена эволюция температуры в центре облучаемого торца. Можно выделить четыре характерные этапа в поведении кривой: 1) $0 < t < 0,075 \text{ мкс}$ – нарастание температуры до максимального значения $\approx 1500^\circ \text{ C}$; 2) $0,075 < t < 0,1 \text{ мкс}$ – снижение температуры вследствие синусоидального уменьшения теплового потока (см. (9)) к моменту окончания импульса и распространения тепла внутрь тела; 3) $0,1 < t < 0,2 \text{ мкс}$ – резкое падение температуры до $\approx 100^\circ \text{ C}$ вследствие принудительного охлаждения; 4) $t > 0,2 \text{ мкс}$ – асимптотическое приближение температуры к исходной значению 20° C .

На рис. 2 представлены кривые микроструктурных превращений для 1-го, 9-го и 33-го элементов (три элемента, прилежащие к оси цилиндра), соответствующие такой истории изменения температуры. Здесь по оси ординат отложено процентное содержание аустенита (сплошные линии) и мартенсита (штриховые линии). Как видно, вследствие быстрого охлаждения кривая истории температуры минует области перлитного, ферритного, бей-

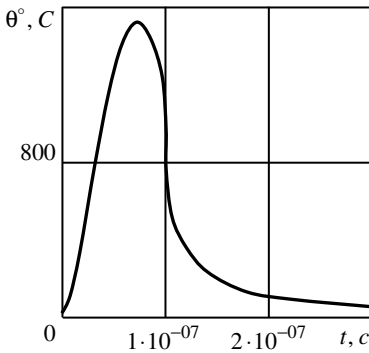


Рис. 1

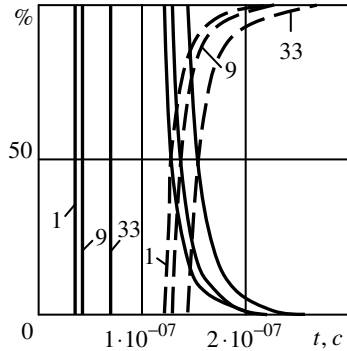


Рис. 2

нитного и т.д. фазовых преобразований на термокинетической диаграмме, и аустенит непосредственно превращается в мартенсит. При этом другие фазы не образуются. На рис. 3 представлено поле процентного содержания мартенсита в приторцевой зоне для момента времени $t = 0,21 \text{ мкс}$, а на рис. 4 распределение осевого напряжения вдоль оси цилиндра для двух моментов времени.

Сравнение данных рис. 2–4 показывает, что на первом этапе разогрева, когда температура становится выше 790°C , вся бейнитная фаза материала переходит в аустенитную. Далее 100% содержания аустенита в микрообъеме сохранятся и на протяжении всего второго этапа эволюции тем-

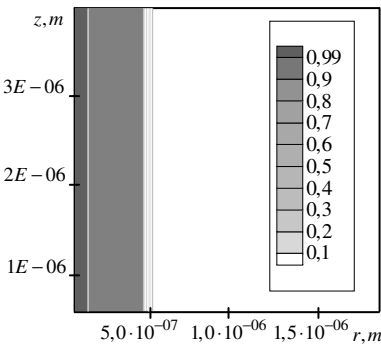


Рис. 3

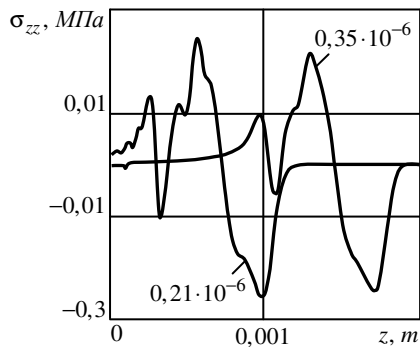


Рис. 4

пературы. На третьем этапе, при охлаждении, переохлажденный аустенит начинает превращаться в мартенсит, как только температура падает ниже 790°C . Для приторцевой области преобразование в основном заканчивается к окончанию третьего этапа. На протяжении четвертого характерного временного интервала процентное содержание мартенсита в этой зоне приближается к 100%, а аустенита, соответственно, к нулю.

В работе [3] показано, что генерация термоупругого импульса напряжения ассоциируется с термомеханическими процессами, происходящими в течение первого и второго этапа. Возникновение области преобладания мартенситной фазы, обладающей большим удельным объемом и, как следствие, формирование зоны сжимающих напряжений происходит в течение третьего этапа эволюции температуры. Поэтому импульс, обусловленный микроструктурными преобразованиями будет следовать за термоупругим импульсом (вторые локальные минимумы в распределениях на рис. 4). Отмечается, что величина импульса, обусловленного микроструктурными преобразованиями, меньше, чем термоупругого импульса.

РЕЗЮМЕ. В рамках постановки зв'язаної задачі термомеханіки з використанням модифікованої термодинамічно узгодженої теорії непружної поведінки матеріалу досліджується процес збудження і поширення хвиль напруження, викликаних дією теплового імпульсу на торці тонкого довгого сталевого циліндру і микроструктурними перетвореннями при охолодженні зони опромінення.

SUMMARY. Processes of generation and propagation of stress wave caused by the thermal impact at the face of long thin steel cylinder accounting for microstructural transformation in the irradiated region under subsequent cooling are investigated in the frame of the coupled thermomechanics with the use of modified thermodynamically consistent theory of inelastic material behavior.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. Qin Y., Zou J., Dong C. et al. Temperature-stress fields and related phenomena induced by a high current pulsed electron beam // Nuclear Instrum. & Meth. In Phys. Research. Part B. – 2004. – Vol. 225. – P. 544–554. 2. Коваленко В. С. Микро- и нанообработка сверхмощными лазерными импульсами // Оборудование и эксперимент для профессионалов. – 2003. – № 4. – С. 4–14. 3. Жук Я. А., Сенченков И. К., Бойчук Е. В. Волны напряжений в цилиндре, возбуждаемые тепловым импульсом на одном из торцов // Теорет. и прикладная механика. – 2006. – Вып. 42. – С. 136–141. 4. Жук Я. А., Червинко О. П., Васильева Л. Я. Структурные превращения в цилиндре из стали, инициируемые импульсным термическим воздействием // Теорет. и прикладная механика. – 2006. – Вып. 42. – С. 73–78. 5. Сенченков И. К. Термомеханическая модель растущих цилиндрических тел из физически нелинейных материалов // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 118–126.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев
Николаевский государственный университет*

Поступила 27.10.2009

УДК 539.3

С. О. ПАПКОВ, канд. физ.-мат. наук,
В. В. МЕЛЕШКО, д-р физ.-мат. наук

ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ

Задача об изгибных колебаниях упругих пластин до настоящего времени вызывает интерес не только в связи с техническими приложениями, но и благодаря фигурам Хладни. На примере этой задачи Ритц [1] изложил вариационный метод, позволивший провести анализ спектра собственных частот и форм колебаний квадратной пластинки. В последующие годы задача о колебаниях пластинки со свободными краями была предметом исследований многих авторов, в том числе предпринимались попытки ее решения на основе метода суперпозиции. Это прежде всего работа Iguchi [2], в которой однородная бесконечная система редуцируется в конечную систему и приближенно находятся первые собственные значения и формы колебаний. Методом суперпозиции задачу решал и Gorman [3]. В этих работах вопрос о точности выполнения нулевых граничных условий не ставился. В данной статье указанная задача решается на основе анализа соответствующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

Сведение задачи к бесконечной системе. Рассмотрим задачу о собственных колебаниях прямоугольной пластинки со свободными границами:

$$\Delta\Delta W - \kappa^4 W = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial x} = 0 \quad \text{при } x = \pm a; \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial y \partial x^2} = 0 \quad \text{при } y = \pm b, \quad (3)$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Методом суперпозиции можно построить общее решение дифференциального уравнения (1) в виде суммы тригонометрических рядов

$$\begin{aligned} W = & A_0 \cos \kappa y + B_0 \operatorname{ch} \kappa y + C_0 \cos \kappa x + D_0 \operatorname{ch} \kappa x + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} p_{1n} y + B_n \operatorname{ch} p_{2n} y) \cos \alpha_n x + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \operatorname{ch} q_{1k} x + D_k \operatorname{ch} q_{2k} x) \cos \beta_k y, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\alpha_n = \pi n/a, \quad \beta_k = \pi k/b, \quad p_{1n}^2 = \alpha_n^2 - \kappa^2, \\ p_{2n}^2 = \alpha_n^2 + \kappa^2, \quad q_{1k}^2 = \beta_k^2 - \kappa^2, \quad q_{2k}^2 = \beta_k^2 + \kappa^2.$$

Подстановка (4) в краевые условия (2), (3) приводит к четырем функциональным уравнениям относительно неопределенных коэффициентов, два из которых можно выполнить точно, полагая

$$D_0 = -C_0 \frac{\sin \kappa a}{\operatorname{sh} \kappa a}, \quad B_0 = -A_0 \frac{\sin \kappa b}{\operatorname{sh} \kappa b}, \\ D_n = -C_n \frac{q_{1n} (q_{1n}^2 - (2-\nu)\beta_n^2) \operatorname{sh} q_{1n} a}{q_{2n} (q_{2n}^2 - (2-\nu)\beta_n^2) \operatorname{sh} q_{2n} a}, \\ B_n = -A_n \frac{p_{1n} (p_{1n}^2 - (2-\nu)\alpha_n^2) \operatorname{sh} p_{1n} b}{p_{2n} (p_{2n}^2 - (2-\nu)\alpha_n^2) \operatorname{sh} p_{2n} b}.$$

Раскладывая оставшиеся два уравнения по полной системе тригонометрических функций и изменяя порядок суммирования по индексам n и m , из равенства коэффициентов при косинусах получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений вида

$$2\nu x_0 + a\kappa(\operatorname{ctg} a\kappa + \operatorname{cth} a\kappa)y_0 = 2\nu\kappa^6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{p_{1n}^2 p_{2n}^2}, \\ b\kappa(\operatorname{ctg} b\kappa + \operatorname{cth} b\kappa)x_0 + 2\nu y_0 = 2\nu\kappa^6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{q_{1n}^2 q_{2n}^2}, \\ y_m \Delta_m^y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\kappa^2 \left((1-\nu)^2 \alpha_n^2 \beta_m^2 + \nu\kappa^4 \right)}{(\alpha_n^2 + q_{1m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2m}^2)} x_n + \frac{4\nu\kappa^4 x_0}{q_{1m}^2 q_{2m}^2}; \quad (5) \\ x_m \Delta_m^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\kappa^2 \left((1-\nu)^2 \alpha_m^2 \beta_n^2 + \nu\kappa^4 \right)}{(\beta_n^2 + p_{1m}^2)(\beta_n^2 + p_{2m}^2)} y_n + \frac{4\nu\kappa^4 y_0}{p_{1m}^2 p_{2m}^2} \quad (m = 1, 2, \dots),$$

где

$$A_n = \frac{(-1)^{n+1} b (p_{2n}^2 - (2-\nu)\alpha_n^2)}{p_{1n} \operatorname{sh} p_{1n} b} x_n,$$

$$C_n = \frac{(-1)^{n+1} a (q_{2n}^2 - (2-v)\beta_n^2)}{q_{1n} \operatorname{sh} q_{1n} a} y_n,$$

$$\Delta_m^y = \frac{a (q_{1m}^2 - v\beta_m^2) (q_{2m}^2 - (2-v)\beta_m^2)}{q_{1m} \operatorname{th} q_{1m} a} -$$

$$\frac{a (q_{2m}^2 - v\beta_m^2) (q_{1m}^2 - (2-v)\beta_m^2)}{q_{2m} \operatorname{th} q_{2m} a},$$

$$\Delta_m^x = \frac{b (p_{1m}^2 - v\alpha_m^2) (p_{2m}^2 - (2-v)\alpha_m^2)}{p_{1m} \operatorname{th} p_{1m} b} -$$

$$\frac{b (p_{2m}^2 - v\alpha_m^2) (p_{1m}^2 - (2-v)\alpha_m^2)}{p_{2m} \operatorname{th} p_{2m} b}.$$

Вводя обозначения $z_{2m-1} = y_{m-1}$, $z_{2m} = x_{m-1}$ ($m = 1, 2, \dots$), систему (5) можно записать сокращенно

$$z_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} z_n, \quad (6)$$

M_{mn} – соответствующие введенным неизвестным коэффициенты (5).

Исследование бесконечной системы. Заметим, что для коэффициентов бесконечной системы (6) справедлива асимптотическая оценка

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} |M_{mn}| = \frac{1-v}{3+v} + O(1/m), \quad m \rightarrow \infty, \quad (7)$$

из которой следует, что эта система является квазирегулярной, и ее исследование можно свести к исследованию конечной системы при помощи замены [4]

$$z_m = \sum_{j=1}^{N_r} \tilde{z}_m^j z_j \quad (m > N_r), \quad (8)$$

В которой N_r – номер, начиная с которого уравнения системы удовлетворяют условиям регулярности, т.е. $S_m < 1$.

Подставляя (8) в (6) из равенства при первых N_r базисных неизвестных получаем совокупность вполне регулярных бесконечных систем с одинаковыми матрицами

$$\tilde{z}_m^j = \sum_{n=N_r+1}^{\infty} M_{mn} \tilde{z}_n^j + M_{mj} \quad (m > N_r; j = 1, 2, \dots, N_r) \quad (9)$$

и однородную конечную систему, коэффициенты которой выражаются через решения систем (9)

$$z_m = \sum_{n=1}^{N_r} \left(M_{mn} + \sum_{j=N_r+1}^{\infty} M_{mj} \tilde{z}_j^n \right) z_n \quad (m = 1, 2, \dots, N_r). \quad (10)$$

Дальнейшее исследование можно разбить на два этапа: 1) определение собственных частот колебаний пластинки κ^* ; 2) построение на собственных частотах нетривиального решения (5).

Заметим, из факта квазирегулярности (7) для системы (6) следует, что системы (9) являются вполне регулярными, всегда имеют единственное ограниченное решение, поэтому собственные частоты κ^* – нули определителя конечной системы (10). Однако, для определения собственных частот оказывается более эффективным приложение теоремы о существовании ограниченного решения для квазирегулярной бесконечной системы [5], которая применительно к данной задаче сводится к проверке условия

$$\max_{j=1..N_T} \sum_{i=1}^{N_T} |c_{ij}| \sum_{n=N_T+1}^{\infty} |M_{in}| < 1 + \inf_{k>N_T} \rho_k / \sum_{n=1}^{N_T} |M_{kn}| \quad (11)$$

для системы (6). Здесь c_{ij} – матрица, обратная к матрице $\{\delta_{ij} - M_{ij}\}_{i,j=1}^{N_T}$; $\rho_k = 1 - S_k$; N_T – порядок матрицы, участвующей в оценках.

Проверяя условие (11) с некоторым шагом по κ , можно локализовать интервал, где условие (11) не выполняется, т.е. здесь теорема не гарантирует для системы (6) существование ограниченного решения (в данном случае нулевого). Увеличением параметра N_T удается сузить интервал настолько, что с некоторой точностью получаем значение собственных частот. В табл. 1 приведены значения первой собственной частоты для квадратной пластинки при $\nu = 0,225$, которая в статье Ритца дается как

Таблица 1

N_T	1	5	50
Интервал для κ^*	2,2560 – 2,2592	2,2567 – 2,2585	2,2573 – 2,2578

$\kappa^* = 2,267$. Как можно заметить, уже при $N_T = 1$ удается найти значение собственной частоты с удовлетворительной точностью.

Построение нетривиального решения однородной бесконечной систе-

мы (5) на собственных частотах κ^* оказывается напрямую связанным с точностью решения вполне регулярных систем (9). Найдем асимптотику решения данных систем.

Проведем замену переменных в системах (9)

$$\tilde{z}_{2m-1}^j \beta_m^{-2-\lambda} = Y_m^j, \quad \tilde{z}_{2m}^j \alpha_m^{-2-\lambda} = X_m^j$$

и запишем их в развернутом виде:

$$Y_m^j \Delta_m^y = \beta_m^{2+\lambda} \sum_{n=N_r+1}^{\infty} \frac{4\kappa^2 \left((1-\nu)^2 \alpha_n^2 \beta_m^2 + \nu \kappa^4 \right) \alpha_n^{-2-\lambda}}{\left(\alpha_n^2 + q_{1m}^2 \right) \left(\alpha_n^2 + q_{2m}^2 \right)} X_n^j + P_m^j; \quad (12)$$

$$X_m^j \Delta_m^x = \alpha_m^{2+\lambda} \sum_{n=N_r+1}^{\infty} \frac{4\kappa^2 \left((1-\nu)^2 \alpha_m^2 \beta_n^2 + \nu \kappa^4 \right) \beta_n^{-2-\lambda}}{\left(\beta_n^2 + p_{1m}^2 \right) \left(\beta_n^2 + p_{2m}^2 \right)} Y_n^j + Q_m^j \quad (m > N_r).$$

Степень замены λ выбирается как действительный корень уравнения

$$(1-\nu)(1-\lambda) = (3+\nu) \cos \frac{\pi \lambda}{2}.$$

При таком выборе замены можно показать, что для единственного ограниченного решения (12) выполняются условия обобщенного закона асимптотических выражений Б.М. Кояловича:

ТЕОРЕМА. Если коэффициенты регулярной парной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$x_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} y_n + P_m, \quad y_m = \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} x_n + Q_m \quad (m = 1, 2, \dots)$$

неотрицательны и удовлетворяют условиям: а) найдутся последовательности $\{r_n\}$, $\{\rho_n\}$, $\{\vartheta_m\}$, $\{\xi_m\}$ и числа $L \geq l > 0$, такие, что $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ($m > n$) коэффициенты бесконечной системы допускают оценки

$$lr_n \leq a_{mn} \vartheta_m \leq Lr_n, \quad l\rho_n \leq b_{mn} \xi_m \leq L\rho_n,$$

причем последовательности $\{q_m\}$, $\{\xi_m\}$ таковы что

$$\vartheta_m P_m \leq K, \quad \vartheta_m \varphi_m \leq K, \quad \xi_m Q_m \leq K, \quad \xi_m \psi_m \leq K,$$

$$\varphi_m = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}; \quad \psi_m = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn};$$

K – некоторая положительная константа, а последовательности $\{r_n\}$, $\{\rho_n\}$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N r_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \rho_n = \infty ;$$

$$r_{N+1} = o\left(\sum_{n=1}^N r_n\right); \quad \rho_{N+1} = o\left(\sum_{n=1}^N \rho_n\right)$$

при $N \rightarrow \infty$, то существует ограниченное главное решение данной бесконечной системы $\{x_m, y_m\}$. Если это решение является единственным ограниченным решением и дополнительно к условию (а) выполняется условие:

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{m-1} \rho_n / \sum_{n=1}^{m-1} r_n = O\left(\frac{\inf_{n \geq m} \xi_n}{\vartheta_m}\right), \quad m \rightarrow \infty.$$

Тогда существует положительный предел решения

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m = a_0 \quad (a_0 > 0).$$

Наиболее существенное отличие предлагаемого обобщения от известного признака заключается в том, что в условии (а) введены последовательности r_n, ρ_n , которые в исходной формулировке признака [6] полагались тождественно равными единице. Кроме этого в предлагаемом обобщении ослаблено условие (б).

Оказывается, система (12) удовлетворяет данной теореме (доказательство не приводится в силу большого объема). Следовательно, асимптотическое поведение неизвестных в регулярных системах (9) имеет вид

$$z_{2m-1}^j = a_0^j \beta_m^{-2-\lambda}, \quad z_{2m}^j = a_0^j \alpha_m^{-2-\lambda} \quad (m \rightarrow \infty),$$

что позволяет применить к их численному решению метод улучшенной редукции. Данный подход обеспечивает высокую точность вычисления коэффициентов конечной системы (10), и как следствие, построения собственных форм колебаний пластинки.

Используя нетривиальное решение однородной системы (5), можно получить представление для собственных форм колебаний пластинки

$$\begin{aligned} W(x, y) = & \frac{bx_0}{\kappa} \left(\frac{\cos \kappa y}{\sin \kappa b} - \frac{\text{ch } \kappa y}{\text{sh } \kappa b} \right) + \frac{ay_0}{\kappa} \left(\frac{\cos \kappa x}{\sin \kappa a} - \frac{\text{ch } \kappa x}{\text{sh } \kappa a} \right) + \\ & -b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n \left[\frac{p_{2n}^2 - (2-\nu)\alpha_n^2}{p_{1n}} \cdot \frac{\text{ch } p_{1n} y}{\text{sh } p_{1n} b} - \frac{p_{1n}^2 - (2-\nu)\alpha_n^2}{p_{2n}} \times \right. \\ & \left. \times \frac{\text{ch } p_{2n} y}{\text{sh } p_{2n} b} \right] \cos \alpha_n x - a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n \left[\frac{q_{2n}^2 - (2-\nu)\beta_n^2}{q_{1n}} \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \frac{\operatorname{ch} q_{1n} x}{\operatorname{sh} q_{1n} a} - \frac{q_{1n}^2 - (2-\nu)\beta_n^2}{q_{2n}} \cdot \frac{\operatorname{ch} q_{2n} x}{\operatorname{sh} q_{2n} a} \Big] \cos \beta_n y .$$

Численные результаты. Вычисления проводились для квадратной пластины при $\nu = 0,225$. Точность вычислений демонстрирует табл. 2, где представлено выполнение нулевого граничного условия

$$\partial^2 W / \partial x^2 + \nu \partial^2 W / \partial y^2 = 0 \text{ для}$$

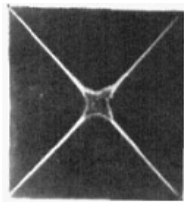
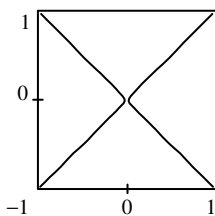
Таблица 2

y	$W_1 \cdot 10^3$	$W_2 \cdot 10^3$	$W_3 \cdot 10^3$
0	0,000074	0,000071	0,00085
0,2	0,000074	0,000071	0,00085
0,4	0,000075	0,000072	0,00085
0,6	0,000077	0,000075	0,00084
0,8	0,000091	0,000088	0,00082
1,0	-0,11	6,7	-3,0

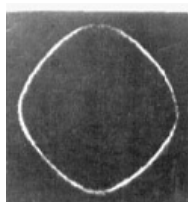
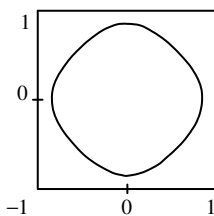
первых трех нормированных собственных форм (бесконечные системы (9) решались методом улучшенной редукции при удержании в расчетах первых 20 неизвестных). Данные табл. 2 показывают удовлетворительную точность полученного решения при относительно небольшом порядке конечных систем ис-

пользуемых методом улучшенной редукции.

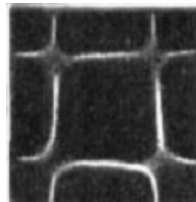
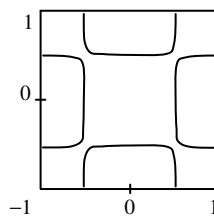
Ниже на рисунке представлены фигуры Хладни для данного типа сим-



Для $\kappa_1^* = 2,257$



Для $\kappa_2^* = 2,443$



Для $\kappa_3^* = 4,051$

метрии в сравнении с экспериментальными данными [7] для первых трех собственных значений.

РЕЗЮМЕ. Отримано розв'язок класичної проблеми о коливанні прямокутної пластины з вільними краями. За допомогою методу суперпозиції задача зводиться до квазірегулярної нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. На підставі аналізу асимптотичної поведінки розв'язку нескінченної системи розроблено метод обчи-

слення власних значень і форм коливань даної граничної задачі.

SUMMARY. Solution of the classical eigenvalue problem of dynamical bending of free rectangular plate is obtained. By using the form of the solution obtained by the superposition method this problem was reduced to a quasi-regular infinite system of linear algebraic equations. On the base of analyzing asymptotic behaviour of the solution of infinite system method for calculating of the eigenfrequencies and eigenforms of a boundary-value problem is made.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. *Ritz W.* Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern // *Ann. Physik.* – 1909. – 4 Folge, Bd. 28. – S. 737–786. 2. *Iguchi S.* Die Eigenschwingungen mit Klangfiguren der freien rechteckigen Platte // *Ing. Arch.* – 1953. – Bd. 21. – S. 304–322. 3. *Gorman D. J.* Free vibration analysis of the completely free rectangular plate by the method of superposition // *J. Sound Vibr.* - 1978. – Vol. 57. – P. 437–447. 4. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. – М.-Л.: Гостехиздат, 1952. – 695 с. 5. *Папков С. О., Чехов В. Н.* О локализации собственных частот прямоугольной призмы посредством исключения неизвестных в квазирегулярной бесконечной системе // *Доп. НАН України.* – 2004. – № 10 - С. 57–62. 6. *Коялович Б. М.* Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений // *Изв. физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова.* – 1930. – Т. 3, вып. 2. – С. 41–167. 7. *Waller M. D.* Vibration of free square plates: Part I. Normal vibrating modes // *Proc. Phys. Soc.* – 1939. – Vol. 51. – P. 831–844.

*Севастопольский национальный технический университет,
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко*

Поступила 10.03.2009

539.3

А. О. ВАТУЛЬЯН, д-р физ.-мат. наук, П. А. АЗАРОВА

О РЕКОНСТРУКЦИИ ТРЕЩИНЫ В ВЯЗКОУПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЕ

Задачи о колебаниях тел с трещинами имеют важные приложения в дефектоскопии, сейсморазведке, геофизике. Для решения прямых задач в случае тел с трещинами разработаны различные аналитические и численные методы, основанные в основном на идеологии метода граничных элементов. Наиболее детально исследованы постановки задач, когда берега трещин не взаимодействуют друг с другом. Обратные задачи идентификации параметров трещин по некоторым характеристикам граничных полей являются сравнительно новыми и при их решении используются различные подходы [1–5]. В большинстве работ по реконструкции трещин рассмотрены упругие среды. В то же время в технике широко используются новые композиционные и полимерные материалы. Поэтому задача идентификации трещиноподобных дефектов в вязкоупругих средах является важной проблемой, главным аспектом которой является выяснение влияния вязкости среды на процедуру реконструкции.

Постановка задачи. Рассмотрим установившиеся колебания вязкоупругой ортотропной полосы S толщины h (рис. 1). Нижняя грань полосы l_1

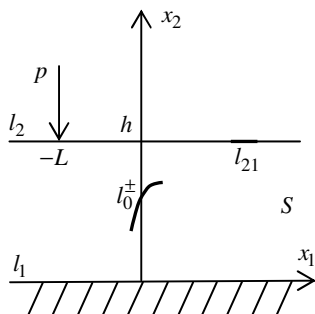


Рис. 1

жестко закреплена, верхняя грань l_2 свободна от напряжений за исключением точки $(-L, h)$, в которой приложена вертикальная сосредоточенная сила $p\delta(x_1 + L)e^{-i\omega t}$, где ω – частота колебаний; p – амплитуда нагрузки. Полоса ослаблена внутренней трещиной, которую будем моделировать математическим разрезом в области S с берегами l_0^\pm , на которых компоненты вектора перемещений терпят конечные скачки: $\chi_i = u_i|_{l_0^+} - u_i|_{l_0^-}$ ($i = 1, 2$).

Для описания свойств вязкоупругого материала будем использовать принцип соответствия и концепцию комплексных модулей [6], что позволяет в случае стационарных гармонических колебаний отделить временной множитель и свести исходную задачу к задаче теории упругости, в которой упругие константы материала заменяются комплексными функциями частоты.

ты колебаний. Действие трещины на основе теории дислокаций [2] заменим действием фиктивных массовых сил $f_i = -[C_{ijkl}^* (i\omega)n_k^+ \chi_l \delta(\zeta)]_{,j}$ с носителем на трещине, где $C_{ijkl}^* (i\omega)$ – комплексные модули вязкоупругого материала, n_j^+ – компоненты единичного вектора нормали к поверхности l_0^+ , ζ – координата, отсчитываемая по нормали к l_0^+ , $\delta(\zeta)$ – дельта-функция Дирака с носителем на трещине. Будем считать, что в процессе колебаний берега трещины не взаимодействуют друг с другом и свободны от напряжений.

После отделения временного множителя краевая задача имеет вид

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i + f_i = 0; \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^* (i\omega) u_{k,l}; \quad (2)$$

$$u_i|_{l_1} = 0, \quad \sigma_{i2}|_{l_2} = -p\delta_{i2}\delta(x_1 + L); \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} n_j^\pm \Big|_{l_0^\pm} = 0 \quad (i, j, k, l = 1, 2), \quad (4)$$

где ρ – плотность среды.

Задача идентификации трещины состоит в определении параметров трещины по известным (измеренным) полям перемещений на части верхней границы полосы

$$u_i(x)|_{l_{21}} = g_i(x), \quad x \in l_{21} \subset l_2 \quad (i = 1, 2). \quad (5)$$

Решение задачи на первом этапе требует решения прямой задачи о колебаниях полосы с трещиной и получения представлений полей смещений.

Решение прямой задачи. Построим представление поля смещений при помощи формул Сомильяны [7], которые в плоском случае для области S с границей ∂S имеют вид

$$\begin{aligned} u_m(\xi) = & \int_{\partial S} \sigma_{ij} n_j U_i^{(m)}(x, \xi) dl - \int_{\partial S} \Sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi) n_j u_i dl + \\ & + \int_S U_i^{(m)}(x, \xi) f_i dS \quad \xi \in S, \quad (i, j, m = 1, 2). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь функции Грина $U_i^{(m)}(x, \xi)$ ($i = 1, 2$) представляют собой поля смещений в точке x , вызванные действием сосредоточенного единичного источника в точке ξ , компоненты $\Sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi)$ вычисляются в соответствии с законом Гука

$$\Sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi) = C_{ijkl}^* (i\omega) U_{k,l}^{(m)}(x, \xi), \quad (i, j, k, l = 1, 2).$$

При этом для полосы они подчинены дополнительным граничным условиям

$$U_i^{(m)}(x, \xi) \Big|_{l_1} = 0, \quad \Sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi) \Big|_{l_2} = 0.$$

Подставив в (6) представления функций Грина для полосы в виде однократных интегралов по контуру в комплексной плоскости [1] и осуществив преобразования, для расчета волновых полей в полосе получим формулу

$$u_m(x) = pU_2^{(m)}(x, -L, h) + \int_{l_0^+} \Sigma_{kl}^{(m)}(\xi, x) \chi_l n_k^+ dl_\xi \quad (x \in S, m = 1, 2), \quad (7)$$

где первое слагаемое – поле перемещений в полосе без дефекта (эталонное поле), а второе интегральное слагаемое – поле, обусловленное наличием трещины (отраженное поле).

Для определения неизвестных функций раскрытия трещины χ_j в (7)

устремим $x \rightarrow y \in l_0^+$, учитывая условие отсутствия напряжений на трещине (4). В результате получим систему граничных интегральных уравнений относительно неизвестных χ_j

$$\int_{l_0^+} K_{ij}(\xi, y) \chi_j(\xi) dl_\xi = F_i(y) \quad y \in l_0^+ \quad (8)$$

Заметим, что ядра интегральных операторов $K_{ij}(\xi, y)$ имеют гиперсингулярные особенности типа $|\xi - y|^{-2}$ и соответствующие интегралы понимаются в смысле конечного значения по Адамару [8].

Дискретизацию полученных интегральных уравнений осуществим на основе метода граничных элементов. Трещину будем аппроксимировать ломаной $l_0^+ = \bigcup_{n=1}^N l_n$, на каждом элементе которой неизвестные функции

будем интерполировать с помощью набора некоторых базисных функций. Методом коллокаций получим систему линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений $\chi_n = \chi(y_n)$ компонент функций раскрытия трещины:

$$A_{nm} \chi_n = F_m \quad (n, m = \overline{1, N}),$$

$$\text{где } A_{nm} = \int_{l_n} K(x, y_m) dl_{nx}, \quad F_m = F(y_m).$$

При численной реализации были использованы дискретные схемы вычисления гиперсингулярных интегралов [8]. После определения узловых значений компонент функций раскрытия трещины перемещения вычислялись в соответствии с (7).

Решение задачи идентификации трещины. На втором этапе после построения решения прямой задачи можно определять параметры трещины. При использовании позиционного зондирования в качестве входных данных задаются значения компонент полей перемещений $g_i(x_j)$ в N точках $x_j \in l_{21} \subset l_2$ при фиксированной частоте колебаний. При этом решение обратной задачи основывается на методе регуляризации на компактном множестве [7]; в исследуемом случае это конечное число параметров Q_k , которые находятся из условия минимума функционала невязки

$$\Phi(Q_k) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^N |u_i(x_j, Q_k) - g_i(x_j)|^2 \quad (x_j \in l_{21}).$$

При минимизации функционала используются генетические алгоритмы [9].

Моделирование динамического поведения вязкоупругих тел. Для описания свойств вязкоупругих материалов используем традиционную механическую модель в виде комбинации упругих и вязких элементов [6]. В небольшом интервале времен достаточной является трехпараметрическая модель стандартного вязкоупругого тела с длительным модулем H , мгновенным модулем E ($E > H$) и временем релаксации n :

$$En \frac{d\varepsilon_{kk}}{dt} + H\varepsilon_{kk} = n \frac{d\sigma_{kk}}{dt} + \sigma_{kk}.$$

Для численного анализа использовался изотропный материал, свойства которого определяются комплексным модулем Юнга:

$$E^*(i\omega) = \frac{-Eni\omega + H}{-ni\omega + 1}; \quad \text{коэффициент Пуассона}$$

считался не зависящим от частоты колебаний: $\nu = \text{const}$. Но в силу того, что вещественная часть модуля Юнга монотонно возрастает, а экстремум мнимой части находится в точке $\omega = n^{-1}$, наибольшее затухание будет наблюдаться на частотах, близких к этой характерной частоте n^{-1} .

На рис. 2 представлена зависимость обезразмеренного комплексного модуля Юнга

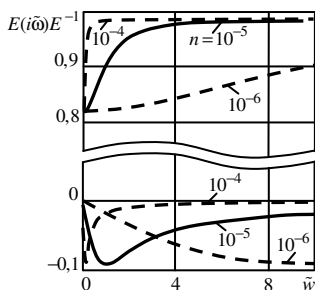


Рис. 2

$E(i\tilde{\omega})/E$ от безразмерной частоты $\tilde{\omega} = \sqrt{\rho/E} \omega h$. Графики приведены для слоя толщиной $h = 0,01$ м трех материалов, отличающихся временами релаксации n , когда $E = 1,2 \cdot 10^9$ Па, $H = 1 \cdot 10^9$ Па, $\rho = 1200$ кг/м³. В положительном направлении вертикальной оси отложены вещественные части комплексного модуля, в отрицательном – мнимые.

Этот модельный пример показывает, что вязкоупругие свойства проявляются только на некотором диапазоне частот. Поэтому при частотах, для которых мнимые части комплексных модулей по абсолютной величине малы, можно использовать упругую модель. В дальнейших численных расчетах был рассмотрен материал со временем релаксации $n = 10^{-5}$ с. Остальные параметры взяты такими же, как указаны выше.

Численные результаты. Были проведены численные расчеты решения прямой задачи для слоя с прямолинейной трещиной длины $l = 2l_0$, наклоненной к нижней грани слоя под углом θ , средняя точка которой находится на расстоянии d_0 от нижней грани и на расстоянии L от точки приложения нагрузки по оси x_1 .

Анализ графиков полей смещений позволяет выявлять интервалы изменения координаты x_1 , на которых смещения максимальны, и интервалы, на которых смещения близки к нулю. Для идентификации благоприятными интервалами для выбора точек съема являются интервалы с максимальными значениями амплитуд смещений. Точки из интервалов, на которых поля смещений близки к нулю, выбранные в качестве точек съема данных, являются неблагоприятными при решении задачи определения параметров трещины.

Проводился ряд экспериментов по восстановлению параметров Q_k . В рассматриваемом случае это 4 параметра l , θ , d_0 и L . Относительные погрешности восстановления первых трех параметров не превысили 3 процентов. Параметр L восстанавливается с относительной погрешностью 50-70 процентов.

Проводились также вычислительные эксперименты по восстановлению параметров трещины без учета вязкости – в рамках упругой модели. В этом случае решалась прямая задача для вязкоупругого материала, из которой находились поля смещений на верхней границе полосы. Далее по полученным значениям полей перемещений проводилась идентификация в рамках упругой модели с модулем упругости, равным длительному или мгновенному модулю. Оказалось, что погрешность восстановления сильно зависит от выбора значения модуля. При выборе модуля упругости равным мгновенному относительные погрешности определения первых трех параметров превышают 20%. При выборе модуля упругости равным длительному восстановить искомые характеристики с приемлемой погрешностью осуществить не удастся.

Результаты вычислительных экспериментов свидетельствуют о необходимости учета реологических свойств материала в процедуре идентификации.

Работа поддержана ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы. Номер госконтракта: 02.740.11.5024.

РЕЗЮМЕ. Розв'язана задача про коливання ортотропної в'язкопружної смуги з внутрішньою тріщиною. Властивості в'язкопружності враховано у рамках принципу відповідності. Аналітично отримано інтегральні уявлення фундаментальних розв'язків, на основі яких, використовуючи формули Сомільяна, отримані уявлення полів переміщень точок смуги. Побудована система граничних інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій розкриття тріщини. Обернена геометрична задача ідентифікації параметрів тріщини по відомим полям переміщень на верхній частині границі зведена до мінімізації функціонала нев'язки. Проведений чисельний аналіз задачі для прямолінійної тріщини.

SUMMARY. The problem of oscillations of the orthotropic viscoelastic strip with an inner crack is investigated. Property of the viscoelasticity is considered within the framework of a principle of correspondence. Integral presentations of the fundamental solutions are obtained analytically. Using the Somiliana formulas, fields of displacement of points of a strip are obtained too. The system of the boundary integral equations concerning unknown functions of disclosing a crack is made. The inverse geometrical problem of the identification of the parameters of a crack by known fields of displacement on a part of the upper border is reduced to the minimization of the functional of the discrepancy. The results of computing experiments are presented for the inclined rectilinear crack.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. Баранов И. В., Булгуриян О. В., Ватульян А. О. Интегральные уравнения для упругого слоя с трещиной произвольной конфигурации и их исследование. // Вестн. Донского гос. техн. ун-та. – 2004. – Т. 4, № 3 – С. 257–269. 2. Ватульян А. О., Булгуриян О. В. Асимптотический метод решения обратных задач теории трещин // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 83–88. 3. Ватульян А. О., Явруян О. В. Реконструкция наклонных трещин в слое // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. Регион. Естеств. науки. – 2005 – № 2. – С. 36–39. 4. Abda A. B., Vui H. D. Planar crack identification for the transient heat equation // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2003. – Vol. 11, N1. – P. 27–31. 5. Alessandrini G., Cristo M Di. Unique determination of surface breaking cracks in three-dimensional bodies // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2000. – Vol. 8, N5. – P. 469–482. 6. Кристенсен П. Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир. 1974. – С. 338. 7. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М., 2007. – 223 с. 8. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. – М.: Наука, 1985. – 253 с. 9. Баранов И. В., Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Об одном генетическом алгоритме и его применении в обратных задачах идентификации упругих сред // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11, № 3. – С. 14–26.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

Поступила 12.06.2009

УДК 539.3:519.6

А. О. ВАТУЛЬЯН, д-р физ.-мат. наук, С. А. НЕСТЕРОВ

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПОСТАНОВКИ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ

В различные области техники все шире внедряются функционально-градиентные материалы, которые находят применение в областях с высокотемпературным окружением (обшивки космических кораблей, реактивных самолетов, покрытия режущих инструментов станков). При термомеханических расчетах нужно учитывать, что коэффициенты переноса и модули упругости в случае неоднородных материалов являются функциями координат. Такие функции могут быть определены только из решения коэффициентных обратных задач термоупругости. В настоящее время уже накоплен опыт решения коэффициентных обратных задач механики и теплопроводности [1–4]. В работах [2–4] предложен подход к решению таких задач, основанный либо на использовании обобщенного уравнения взаимности, либо на методе линеаризации. Решение же прямых одномерных задач основано на сведениях к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Оказывается, этот подход можно успешно применить и при решении коэффициентных задач термоупругости. В работе представлены две постановки и решение коэффициентной обратной задачи для термоупругого неоднородного стержня. В первой постановке нужно восстановить неизвестные коэффициенты дифференциальных операторов уравнений термоупругости неоднородного стержня при продольных колебаниях стержня, возбужденных механическим ударом при известном торцевом смещении. Во второй постановке восстанавливаются коэффициенты при продольных колебаниях стержня, возбужденных тепловым ударом при известной торцевой температуре.

Постановка задачи 1. Рассмотрим продольные колебания жестко закрепленного на торце $x = 0$ неоднородного термоупругого стержня длины l под действием внезапно приложенной к теплоизолированному торцу $x = l$ силы:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \sigma_x = E(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha(x) \theta \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = c(x) \rho(x) \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \alpha(x) E(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}; \quad (1)$$

$$u(0, t) = \theta(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = 0, \quad \sigma_x(l, t) = \sigma_0 H(t); \quad (2)$$

$$\theta(x, 0) = u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = 0. \quad (3)$$

Здесь T_0 – начальная температура тела (температура естественного состояния); $\theta = T - T_0$ – прирост температуры от естественного состояния.

Введением безразмерных параметров

$$\begin{aligned} z = \frac{x}{l}, \quad \bar{k}(z) &= \frac{k(zl)}{k_0}, \quad \bar{c}(z) = \frac{c(zl)}{c_0}, \quad \bar{\rho}(z) = \frac{\rho(zl)}{\rho_0}, \\ \bar{E}(z) &= \frac{E(zl)}{E_0}, \quad \bar{\alpha}(z) = \frac{\alpha(zl)}{\alpha_0}, \quad \tau = \frac{\sqrt{E_0}t}{\sqrt{\rho_0}l}, \quad W(z, \tau) = \alpha_0\theta, \\ U = \frac{u}{l}, \quad \Omega &= \frac{\sigma_x}{E_0}, \quad \delta = \frac{\alpha^2 T_0 E_0}{c_0 \rho_0}, \quad \lambda = \frac{\sigma_x}{\sigma_0}, \quad \varepsilon = \frac{k_0}{c_0 \sqrt{E_0} \rho_0 l}, \end{aligned}$$

где $k_0, \alpha_0, c_0, \rho_0, E_0$ – некоторые характерные коэффициенты теплопроводности, теплового расширения, удельной теплоемкости, плотности и модуля Юнга соответственно, начально-краевую задачу (1)–(3) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} &= \bar{\rho}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad \Omega_z = \bar{E}(z) \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \bar{\alpha}(z) W \right), \\ \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{k}(z) \frac{\partial W}{\partial z} \right) &= \bar{c}(z) \bar{\rho}(z) \frac{\partial W}{\partial \tau} + \delta \bar{\alpha}(z) \bar{E}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \tau}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$U(0, \tau) = W(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial z}(1, \tau) = 0, \quad \Omega_z(1, \tau) = \lambda H(\tau); \quad (5)$$

$$W(z, 0) = U(z, 0) = \frac{\partial U}{\partial z}(z, 0) = 0. \quad (6)$$

Применив к краевой задаче (4), (5) преобразование Лапласа, с учетом начальных условий (6) получим

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\Omega}_z}{dz} &= p^2 \bar{\rho}(z) \tilde{U}, \quad \tilde{\Omega}_z = \bar{E}(z) \left(\frac{d\tilde{U}}{dz} - \bar{\alpha}(z) \tilde{W} \right), \\ \varepsilon \frac{d}{dz} \left(\bar{k}(z) \frac{d\tilde{W}}{dz} \right) &= p \bar{c}(z) \bar{\rho}(z) \tilde{W} + p \delta \bar{\alpha}(z) \bar{E}(z) \frac{d\tilde{U}}{dz}, \\ \tilde{U}(0, p) = \tilde{W}(0, p) &= 0, \quad \frac{d\tilde{W}}{dz}(1, p) = 0, \quad \tilde{\Omega}_z(1, p) = \frac{\lambda}{p}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для решения задачи (7) используем метод малого параметра, в качест-

ве которого выберем параметр δ , характеризующий связанность тепловых и механических полей: $\tilde{U} = \tilde{U}_0 + \delta\tilde{U}_1$, $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_0 + \delta\tilde{\Omega}_1$, $\tilde{W} = \tilde{W}_0 + \delta\tilde{W}_1$. Подставив последние разложения в (7), получим цепочку задач, для решения которых применим метод сведения прямых задач к последовательному решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$\begin{aligned} \tilde{W}_0 &\equiv 0, \quad \tilde{U}_0(z, p) = -p^2 \int_0^1 \bar{\rho}(\eta) \tilde{U}_0(\eta, p) \int_0^{\min\{z, \eta\}} \frac{d\xi}{\bar{E}(\xi)} d\eta - \frac{\lambda}{p} \int_0^z \frac{d\xi}{\bar{E}(\xi)}, \\ \tilde{W}_1(z, p) &= -\frac{p}{\varepsilon} \int_0^1 \bar{c}(\eta) \bar{\rho}(\eta) \int_0^{\min\{z, \eta\}} \frac{d\xi}{k(\xi)} d\eta + \\ &\quad + \frac{p}{\varepsilon} \left(\int_0^z \bar{\rho}(\eta) \tilde{U}_0(\eta, p) d\eta - z \tilde{U}_0(1, p) \right), \\ \tilde{U}_1(z, p) &= -p^2 \int_0^1 \bar{\rho}(\eta) \tilde{U}_1(\eta, p) \int_0^{\min\{z, \eta\}} \frac{d\xi}{\bar{E}(\xi)} d\eta + \\ &\quad + \int_0^z \bar{\alpha}(\eta) \tilde{W}_1(\eta, p) d\eta. \end{aligned} \quad (8)$$

Постановка задачи 2. Рассмотрим продольные колебания жестко закрепленного на торце $x = 0$ неоднородного термоупругого стержня длины l под действием внезапно приложенного к свободному торцу $x = l$ теплового потока. В этом случае для математической постановки задачи в задаче (1)–(3) необходимо поменять только граничные условия (2) на следующие:

$$u(0, t) = \theta(0, t) = 0, \quad -k(l) \frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = -q_0 H(t), \quad \sigma_x(l, t) = 0.$$

Обезразмеривание в этой задаче проводится аналогично первой, за исключением того, что $W(z, \tau) = \frac{k_0}{q_0 l} \theta$, $\tau = \frac{k_0 t}{c_0 \rho_0 l^2}$. После обезразмеривания соответствующая краевая задача примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} &= \varepsilon^2 \bar{\rho}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad \Omega_z = \bar{E}(z) \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \bar{\alpha}(z) W \right), \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{k}(z) \frac{\partial W}{\partial z} \right) &= \bar{c}(z) \bar{\rho}(z) \frac{\partial W}{\partial \tau} + \delta \bar{\alpha}(z) \bar{E}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \tau}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$U(0, \tau) = W(0, \tau) = 0, \quad -\bar{k}(l) \frac{\partial W}{\partial z}(l, \tau) = -q_0 H(\tau),$$

$$\Omega_z(1, \tau) = 0, \tag{10}$$

$$W(z, 0) = U(z, 0) = \frac{\partial U}{\partial z}(z, 0) = 0. \tag{11}$$

Параметр ε^2 для большинства материалов мал, порядка $10^{-10} - 10^{-20}$. Вычисления показывают, что численное решение задачи (9)–(11) для однородных материалов в квазистатической постановке практически не отличаются от численного решения задачи в динамической постановке и для упрощения расчетов можно в этом случае использовать квазистатическую постановку.

Применив к уравнениям (9) и граничным условиям преобразования Лапласа с учетом начальных условий (11), после некоторых преобразований имеем:

$$\frac{d}{dz} \left(\bar{k}(z) \frac{d\tilde{W}}{dz} \right) = p \left(\bar{c}(z) \bar{\rho}(z) + \delta \bar{\alpha}^2(z) \bar{E}(z) \right) \tilde{W},$$

$$\frac{d\tilde{U}}{dz} = \bar{\alpha}(z) \tilde{W}, \quad \tilde{U}(0, p) = \tilde{W}(0, p) = 0, \quad -\bar{k}(l) \frac{d\tilde{W}}{dz}(l, p) = \frac{1}{p}.$$

В этом случае задача вначале сводится к нахождению температурного поля. Последняя задача, аналогично [4], сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\tilde{W}(z, p) = -p \int_0^1 \left(\bar{c}(\eta) \bar{\rho}(\eta) + \bar{\alpha}^2(\eta) \bar{E}(\eta) \right) \times$$

$$\times \tilde{W}(\eta, p) \int_0^{\min\{z, \eta\}} \frac{d\xi}{\bar{k}(\xi)} d\eta - \frac{1}{p} \int_0^z \frac{d\xi}{\bar{k}(\xi)}.$$

При численном решении интегральных уравнений Фредгольма второго рода применялся метод коллокаций с заменой интегралов их приближенными значениями по квадратурной формуле трапеций.

Решение обратной задачи. Решение обратной задачи будем находить в пространстве трансформант. Коэффициенты переноса и модуль Юнга неоднородного термоупругого стержня восстановим в два этапа.

На первом этапе определим начальное приближение в классе положительных ограниченных линейных функций методом минимизации функционала невязки между точными $\tilde{U}_T(1, p)$ и вычисленными $\tilde{U}_0(1, p)$ торцевыми смещениями в изображениях (для первой постановки) и точной $\tilde{W}_T(1, p)$ и вычисленной $\tilde{W}_0(1, p)$ температурой в изображениях (для вто-

рой постановки):

$$I_0 = \int_c^d (\tilde{U}_0(1, p) - \tilde{U}_T(1, p))^2 dp, \quad J_0 = \int_c^d (\tilde{W}_0(1, p) - \tilde{W}_T(1, p))^2 dp.$$

На втором этапе будем уточнять законы изменения восстанавливаемых функций на основе метода линеаризации в окрестности некоторого известного состояния:

$$\begin{aligned} \bar{k}_{n+1}(z) &= \bar{k}_{n-1}(z) + \beta \bar{k}_n(z), & \bar{c}_{n+1}(z) &= \bar{c}_{n-1}(z) + \beta \bar{c}_n(z), \\ \bar{\rho}_{n+1}(z) &= \bar{\rho}_{n-1}(z) + \beta \bar{\rho}_n(z), & \bar{E}_{n+1}(z) &= \bar{E}_{n-1}(z) + \beta \bar{E}_n(z). \end{aligned}$$

Выполняя аналогичные действия как в [3, 4], получим интегральные уравнения Фредгольма первого рода для задач 1, 2 соответственно:

$$\begin{aligned} \delta p \int_0^1 E_n \left(\frac{d\tilde{U}_{n-1}}{dz} \right)^2 dz + \delta p^3 \int_0^1 \bar{\rho}_n \tilde{U}_{n-1}^2 dz + \epsilon \int_0^1 \bar{k}_n(z) \left(\frac{d\tilde{W}_{n-1}}{dz} \right)^2 dz + \\ + p \int_0^1 \bar{c}_n \bar{\rho}_n(z) \tilde{W}_{n-1}^2 dz = -\lambda \delta (\tilde{U}_T - \tilde{U}_{n-1})|_{z=1}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \bar{k}_n \left(\frac{d\tilde{W}_{n-1}}{dz} \right)^2 dz + p \int_0^1 (\bar{c}\bar{\rho})_n \tilde{W}_{n-1}^2 dz + p \delta \int_0^1 \bar{E}_n \tilde{W}_{n-1}^2 dz = \\ = \frac{1}{p} (\tilde{W}_{n-1} - \tilde{W}_T)|_{z=1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, решение обратной задачи во второй постановке сводится к решению коэффициентной обратной задачи теплопроводности, хорошо изученной в [4].

Для реконструкции всех теплофизических и механических характеристик стержня одного уравнения (12) или (13) недостаточно. Нужно получить дополнительные уравнения, учитывающие способ или область нагружения. Однако в некоторых частных случаях уравнения (12) или (13) вполне достаточно. Вычислительные эксперименты были проведены, когда восстанавливалась только одна из функций при известных других. При этом интегральные уравнения (12) распадались на ряд независимых уравнений. Определение поправок из интегральных уравнений является некорректной задачей, при регуляризации которой применялся метод Тихонова. После нахождения, например, $\bar{k}_n(z)$ из решения интегрального уравнения

$$\int_0^1 \bar{k}_n(z) \left(\frac{d\tilde{W}_{n-1}}{dz} \right)^2 dz = \lambda \delta (\tilde{U}_T - \tilde{U}_{n-1})|_{z=1},$$

строится новое приближение в соответствии с правилом $\bar{k}_{n+1}(z) = \bar{k}_{n-1}(z) + \bar{k}_n(z)$. Критерием выхода из итерационного процесса является стабилизация функционала невязки.

Вычислительные эксперименты. В работе натурный эксперимент заменен вычислительным. Восстанавливались различные классы гладких функций – степенные, экспоненциальные, тригонометрические. Также было исследовано влияние на точность реконструкции монотонности функций, начального приближения, зашумления входных данных.

В первой серии экспериментов восстанавливались коэффициенты, исходя из постановки задачи 1 (возбуждение колебаний механическим ударом). Немонотонные функции восстанавливались хуже монотонных. Восстановление плотности и удельной теплоемкости происходит гораздо лучше, чем реконструкция коэффициента теплопроводности и модуля Юнга. Наибольшая погрешность реконструкции возникла на торцах стержня. Задание торцевых значений реконструируемых функций значительно снижают погрешность и в других точках. Процедура восстановления оказалась устойчива к 2-4%-му шуму.

Во второй серии экспериментов восстанавливались функции, исходя из постановки задачи 2 в соответствии с уравнением (13). Восстановление $\bar{c}\bar{\rho}(z)$ и $\bar{E}(z)$ происходило значительно лучше, чем $\bar{k}(z)$. При этом значение параметра связанности δ практически не влияло на характер восстановления. На графиках сплошной линией изображен точный закон, точками – восстановленный.

На рис. 1 приводится пример реконструкции функции $\bar{c}(z) = 2 - 1,5z^3$ при начальном приближении $\bar{c}_0(z) = 2 - z$ (постановка задачи 1). Параметр регуляризации – $\alpha = 10^{-11}$. Погрешность реконструкции на пятой итерации не превысила 9%. На рис. 2 изображен пример восстанавливаемой функции $\bar{E}(z) = 1,1 + \cos(2\pi z)$ при начальном приближении $\bar{E}_0(z) = 2 - 0,3z$ и

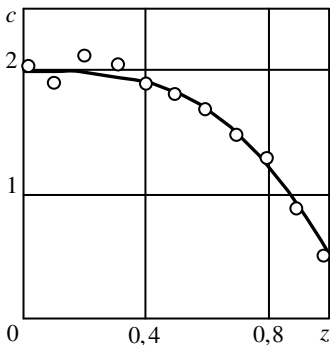


Рис. 1

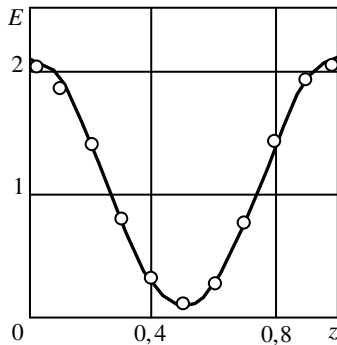


Рис. 2

известных торцевых значениях (постановка задачи 2). Параметр регуляризации – $\alpha = 10^{-12}$. Погрешность реконструкции не превысила 10%.

РЕЗЮМЕ. Запропоновані дві постановки коефіцієнтних обернених задач для термопружного неоднорідного стрижня, описані ефективні чисельні методи розв'язання прямої та оберненої задач, наведено результати чисельних експериментів.

SUMMARY. In work two productions of coefficient inverse problem for thermoelastic inhomogeneous rod are proposed. Efficient numerical methods of solving direct and inverse problem are considered.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: 1. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988 – 288 с. 2. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: Физматлит, 2007 – 220 с. 3. Бочарова О. В., Ватульян А. О. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акуст. журнал. – 2009. – Т. 55, №3. – С. 281–288. 4. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Об одном подходе к восстановлению коэффициентов переноса // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. – 2009. – №3. – С. 39–43.

*Южный Федеральный Университет, г. Ростов-на-Дону, Россия
Южный математический институт РАН, г. Владикавказ, Россия*

Поступила 12.06.2009

УДК 539.3

В. Г. КАРНАУХОВ, д-р физ.-мат.наук,
Т. В. КАРНАУХОВА, канд. физ.-мат. наук

ДЕМПФИРОВАНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ГИБКОЙ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ СОВМЕСТНОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СЕНСОРОВ И АКТУАТОРОВ

Тонкие круглые пластины из пассивных (без пьезоэффекта) и активных вязкоупругих материалов были и остаются наиболее распространенными элементами конструкций современной техники. Исследованию колебаний этих пластин посвящено большое количество работ. При действии на них гармонических нагрузок с частотой, близкой к резонансной, возникает опасность их разрушения из-за усталости, высокого уровня напряжений, температуры диссипативного разогрева и др. В связи с этим возникает необходимость в демпфировании резонансных колебаний таких пластин. Для этой цели используются как пассивные, так и активные методы. Одним из основных недостатков пассивных методов, базирующихся на включении в конструкцию компонент с высокими демпфирующими характеристиками, является невозможность управлять коэффициентом демпфирования после изготовления конструкции. Этому недостатка лишены активные методы, базирующиеся на включении в конструкцию пьезокомпонент, выполняющих функции сенсоров и актуаторов. Эти методы позволяют изменять коэффициент демпфирования в процессе работы конструкции. Активному демпфированию вынужденных резонансных колебаний при помощи актуаторов посвящена статья [1]. При использовании этого метода к актуатору подводится разность потенциалов, компенсирующая ту или иную резонансную составляющую механической нагрузки. Вторым методом активного демпфирования колебаний заключается в совместном использовании сенсоров и актуаторов, когда к актуатору подводится разность потенциалов, пропорциональная току. При этом в электромеханической системе возникает дополнительное затухание, пропорциональное первой производной от поперечного перемещения. Основная задача тогда заключается в разработке метода, основанного на использовании пьезоэлектрических включений, выполняющих функции актуаторов. Главной задачей при использовании этого метода является исследование различных факторов на коэффициент демпфирования, в частности, механических и электрических граничных условий, геометрической нелинейности и температуры. Необходимость в учете геометрической нелинейности возникает при резонансных колебаниях, высоких уровнях механической нагрузки, а также при малых толщинах, когда амплитуда колебаний может стать сравнимой с толщиной пластины. Обзор исследований по активному демпфированию колебаний круглых

пластин представлен в [1], в которой рассмотрена задача об осесимметричных колебаниях круглой пластины с актуаторами. Здесь принимается предположение о равенстве нулю нормальной составляющей вектора индукции, что при наличии электродов на поверхностях пластины не отвечает действительности. Кроме того, в ней при рассмотрении жесткого защемления торца рассматривается полное покрытие пьезослоя электродами, что не позволяет управлять колебаниями пластины. При этом не учитываются диссипативные свойства материалов и температура диссипативного разогрева, а также не рассмотрено активное демпфирование колебаний при совместном использовании сенсоров и актуаторов. В данной статье рассматривается задача о свободных и вынужденных изгибных колебаниях шарнирно опертой круглой пассивной вязкоупругой пластины, на поверхности которой нанесены одинаковые пьезослои, отличающиеся лишь направлением поляризации и выполяющих функции сенсоров и актуаторов.

Постановка задачи. При постановке задачи об активном демпфировании вынужденных резонансных колебаний вязкоупругой круглой пластины используем результаты, представленные в [2–3]. В [2] путем замены переменных для устранения неоднородности в граничных условиях получена нелинейная система интегро-дифференциальных уравнений в безразмерном виде относительно поперечного прогиба w и функции усилий Φ для описания колебаний пластины с пьезоэлектрическими актуаторами

$$D_{11}^0 \bar{D}_M * \Delta \Delta w - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\Phi \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) - q - \Delta M_0 + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \quad (1)$$

$$A_{11}^0 \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) - \frac{\Phi}{\rho} \right] = -\frac{1}{2} \bar{D}_N * \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} \right)^2. \quad (2)$$

При этом однородные граничные условия шарнирного опирания для w принимают вид

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_M \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{при } \rho = 1; \quad (3)$$

$$\Phi = 0 \quad \text{при } \rho = 1; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \nu_N \frac{1}{\rho} \Phi = 0 \quad \text{при } \rho = 1. \quad (5)$$

Граничное условие (4) отвечает свободному торцу в плоскости пластины ($N_r = 0$ при $\rho = 1$), а (5) – жесткому защемлению этого торца ($u = 0$ при $\rho = 1$). К ним необходимо присоединить стандартные начальные условия.

В работе [3] представлено выражение для показаний сенсора-заряда:

$$Q = 2\pi(h_0 + h_1) \gamma_{31} \int_0^{\rho_1} \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) \rho d\rho. \quad (6)$$

При постановке задачи об активном демпфировании колебаний круглой пластины при совместном использовании сенсоров и актуаторов к приведенным соотношениям необходимо добавить уравнение обратной связи

$$V_a = -G\dot{Q}. \quad (7)$$

Используя (6), (7), найдем выражение для V_a

$$V_a = -2\pi(h_0 + h_1)\gamma_{31}G \int_0^{\rho_1} \left(\frac{d^2 \dot{w}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\dot{w}}{d\rho} \right) \rho d\rho. \quad (8)$$

Подстановка (7), (8) в уравнение (1) приводит к модифицированному интегро-дифференциальному уравнению, в котором появляется дополнительное затухание, пропорциональное скорости изменения поперечного прогиба.

Вывод интегро-дифференциального уравнения. Ограничимся исследованием вынужденных гармонических колебаний круглой пластины по наиболее энергоемкой первой моде. Решение задачи будем искать методом Бубнова-Галеркина. Для этого поперечный прогиб w и резонансные составляющие механической и электрической нагрузок представим в виде

$$w = \eta(\tau) w_1(\rho); \quad (9)$$

$$q = q_1 w_1(\rho), \quad \Delta M_0 = M_1 w_1(\rho). \quad (10)$$

Здесь $w_1(\rho)$ – некоторая функция, аппроксимирующая форму колебаний пластины, в качестве которой выбираем функцию

$$w_1(\rho) = 1 + C_1 \rho^2 + C_2 \rho^4, \quad (11)$$

где

$$C_1 = -\frac{2(3 + \nu_M)}{(5 + \nu_M)}, \quad C_2 = \frac{(1 + \nu_M)}{(5 + \nu_M)}. \quad (12)$$

Эта функция тождественно удовлетворяет однородным граничным условиям (3).

Используя одномодовое приближение (9)–(11), из формулы (8) находим

$$V_a = -4\pi(h_0 + h_1)\gamma_{31}G \left(C_1 \rho_1^2 + 2C_2 \rho_1^4 \right) \frac{d\eta(\tau)}{d\tau}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в выражение

$$M_0 = \frac{1}{2} \gamma_{31} (h_0 + h_1) V_a, \quad (14)$$

получаем

$$M_0 = -2\pi\gamma_{31}^2 (h_0 + h_1)^2 G \left(C_1 \rho_1^2 + 2C_2 \rho_1^4 \right) \frac{d\eta(\tau)}{d\tau}. \quad (15)$$

При использовании для решения системы интегро-дифференциальных

уравнений (1), (2) с граничными условиями (3)–(5) метода Бубнова-Галеркина в уравнении движения появляется член, содержащий дельта-функции и их производные:

$$\Delta M_0(\rho) = M_0 \left\{ [\delta'(\rho) - \delta'(\rho - \rho_1)] + \frac{1}{\rho} [\delta(\rho) - \delta(\rho - \rho_1)] \right\}. \quad (16)$$

При вычислении интеграла

$$\int_0^{\rho_1} \Delta M_0 (1 + C_1 \rho^2 + C_1 \rho^4) \rho d\rho = \int_0^{\rho_1} [\delta'(\rho) - \delta'(\rho - \rho_1)] + \frac{1}{\rho} [\delta(\rho) - \delta(\rho - \rho_1)] (1 + C_1 \rho^2 + C_1 \rho^4) \rho d\rho$$

используем свойства дельта-функций

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) [\delta'(x-a)] dx = -f'(a), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [\delta(x-a)] dx = f(a).$$

С использованием (15) найдем

$$\int_0^{\rho_1} \Delta M_0 (1 + C_1 \rho^2 + C_1 \rho^4) \rho d\rho = 2M_0 (C_1 \rho_1^2 + 2C_2 \rho_1^4) = -4\pi (h_0 + h_1)^2 \gamma_{31}^2 G (C_1 \rho_1^2 + 2C_2 \rho_1^4) \frac{d\eta}{d\tau}. \quad (17)$$

По аналогии с изложенным в [2, 3] приходим к следующему модифицированному интегро-дифференциальному уравнению относительно $\eta(\tau)$:

$$m\ddot{\eta} + \mu_1 \bar{D}_M * \eta - \mu_2 \eta D_N * \eta^2 + \mu_3 \dot{\eta} = P. \quad (18)$$

Здесь

$$P = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} C_1 = \frac{1}{3} C_2 \right) q. \quad (19)$$

Остальные обозначения совпадают с приведенными в [2, 3].

Решение интегро-дифференциального уравнения методом гармонического баланса [4]. Как и в работах [2, 3], для решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения (18) применяем метод гармонического баланса [4], полагая

$$q = q' \cos \omega t - q'' \sin \omega t, \quad M_0 = M' \cos \omega t - M'' \sin \omega t, \quad (20)$$

где частота механической и электрической нагрузки близка к резонансной частоте упругой пластины, определяемой из соотношения

$$\omega = \sqrt{\mu_1/m}. \quad (21)$$

В соответствии с методом гармонического баланса положим

$$\eta = \eta' \cos \omega t - \eta'' \sin \omega t. \quad (22)$$

и из уравнения (18) получаем систему двух нелинейных алгебраических уравнений относительно η' , η'' [2, 3]

$$\begin{aligned} -m\omega^2 \eta' + \mu_1 \left[D' \eta' - \left(D'' + \frac{\mu_3}{\mu_1} \omega \right) \eta'' \right] - f_1 &= P', \\ -m\omega^2 \eta'' + \mu_1 \left[\left(D'' + \frac{\mu_3}{\mu_1} \omega \right) \eta' + D' \eta'' \right] - f_2 &= P'', \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= \mu_2 \left[\frac{1}{2}(1-D_\infty) \eta' + \frac{1}{4}(1-D_C) \eta' - \frac{1}{4} D_S \eta'' \right] |\eta|^2, \\ f_2 &= \mu_2 \left[\frac{1}{2}(1-D_\infty) \eta'' + \frac{1}{4}(1-D_C) \eta'' - \frac{1}{4} D_S \eta' \right] |\eta|^2; \end{aligned} \quad (24)$$

Из уравнения (23) видно, что представленные в [2, 3] формулы сохраняются и для рассматриваемой в настоящей статье задачи, если в них заменить мнимую составляющую изгибного комплексного модуля D'' на модифицированную величину $D'' + \mu_3 \omega / \mu_1$. Из уравнений (23), (24) легко получить кубическое уравнение для квадрата амплитуды $x = |\eta|^2$ (амплитудно-частотную характеристику – АЧХ):

$$\left(a_{12}^2 + a_{21}^2 \right) x^3 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}) x^2 + \left(a_{11}^2 + a_{21}^2 \right) x - [P] = 0, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= -m\omega^2 + \mu_1 D', \quad a_{12} = \mu_2 \left[\frac{1}{2}(1-D_\infty) + \frac{1}{4}(1-D_C) \right], \\ a_{21} &= \mu_1 \left(D'' + \frac{\mu_3}{\mu_1} \omega \right), \quad a_{22} = \frac{\mu_2}{4} D_S. \end{aligned}$$

Уравнение (25) можно упростить, считая влияние геометрической нелинейности и вязкости величинами одного порядка малости. При этом в (25) следует положить $D_\infty = D_S = D_C = 0$.

Полагая в (23) $P' = P'' = 0$, получаем следующее нелинейное комплексное уравнение для свободных колебаний:

$$-m\omega^2 \tilde{\eta} + \mu_1 [\tilde{D} \tilde{\eta} - \mu_2 |\tilde{\eta}|^2 \tilde{K} \tilde{\eta}] = 0, \quad (26)$$

Здесь

$$\tilde{D} = D' + i\hat{D}'', \quad \tilde{K} = K' + iK'', \quad \tilde{\eta} = \eta' + i\eta'',$$

$$K' = \frac{1}{2}(1 - D_\infty) + \frac{1}{4}(1 - D_C), \quad K'' = \frac{1}{4}D_S, \quad \hat{D}'' = D'' + \frac{\mu_3}{\mu_1}\omega.$$

Из уравнения (26) находим выражение для комплексной частоты

$$\omega^2 = \Omega^2 (1 + i\eta_n), \quad (27)$$

где

$$\Omega^2 = \frac{\mu_1}{m} D' - \frac{\mu_2}{m} |\eta|^2 K', \quad \eta_n = \frac{\frac{\mu_1}{m} \hat{D}'' - \frac{\mu_2}{m} |\eta|^2 K''}{\frac{\mu_1}{m} D' - \frac{\mu_2}{m} |\eta|^2 K'}. \quad (28)$$

Первая величина в (27) дает собственную частоту колебаний пластины , а вторая – коэффициент демпфирования.

Расчет температуры диссипативного разогрева. Для расчета температуры диссипативного разогрева примем указанную выше гипотезу о малости влияния геометрической нелинейности и вязкости. При этом установившаяся (максимальная) температура диссипативного разогрева находится из решения представленного в [2] уравнения энергии. При постоянстве температуры на торце пластины решение этого уравнения получается методом Бубнова-Галеркина при аппроксимации температуры выражением

$$\theta = \theta_0 (1 - \rho^2). \quad (29)$$

В [2] получена формула

$$\theta_0 = \frac{Bx}{1 + \beta/6} \left(\frac{1}{4}d_0 + \frac{1}{4}d_2 + \frac{1}{12}d_4 \right), \quad (30)$$

где $\beta = a^2 \alpha / \tilde{\lambda}$, $B = a^2 A / \tilde{\lambda}$.

Анализ результатов расчетов. Расчеты показывают, что $\mu_2 < 0$. Поэтому из формул (27)–(28) следует, что амплитудно-частотная характеристика, как и для прямоугольной пластины [5], будет неоднозначной и жесткой, а коэффициент демпфирования зависит от амплитуды колебаний нелинейно. При этом коэффициент в зависимости от значений фигурирующих в этой формуле параметров с ростом амплитуды может как уменьшаться, так и увеличиваться.

Из выражения (6) следует, что при достижении температурой точки Кюри θ_K , при которой $\gamma_{31}(\theta_K) = 0$, показания сенсора становятся нулевыми и он перестает выполнять свое функциональное назначение. В работе [2] показано, что при этой температуре пьезоактуатор также теряет свое функциональное назначение. Поэтому, приравнявая выражение (30) для максимальной температуры θ_K нулю, получим формулу для критической нагруз-

ки, после превышения которой и сенсор, и актуатор теряют пьезоэффект. Эта формула представлена в [2]. При этом имеет место специфический тип теплового разрушения, когда пластина не разделяется на части, но пьезоматериал теряет свое функциональное назначение, связанное с реализацией активного демпфирования колебаний.

В силу соотношения (30) температурно-частотная характеристика также будет неоднозначной и жесткой, так как она отличается от амплитуды колебаний только постоянным множителем.

РЕЗЮМЕ. Методом Бубнова-Галеркина розв'язано задачу про вимушені резонансні згинні коливання і дисипативний розігрів шарнірно опертої гнучкої круглої пасивної в'язкопружної пластини з розподіленими п'єзоелектричними сенсорами та актуаторами. Досліджено вплив геометричної нелінійності та температури дисипативного розігріву на ефективність активного демпфування резонансних коливань такої пластини за допомогою п'єзоелектричних включень.

SUMMARY. By the Bubnov-Galerkin method the problem of forced resonance vibrations and dissipative heating of flexible circular viscoelastic plate with distributed sensors and actuators is solved. The influence of geometrical nonlinearity and dissipative heating on effectiveness of active damping vibrations of the plate with simply supported edges by the piezoelectric inclusions is studied.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. *Santosh Kapuria, Dumir P. C.* Geometrically nonlinear axisymmetric response of thin circular plate piezoelectric actuation // *Nonlinear Science and Numerical Simulation.* – 2005. – Vol. 10. – P. 411–423. 2. *Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В., Зражевская В. Ф.* Активное демпфирование резонансных изгибных колебаний гибкой шарнирно опертой вязкоупругой пластины при помощи пьезоактуаторов // *Теорет. и прикладная механика.* – 2009. – Вып. 45. – С. 114–123. 3. *Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В.* Резонансные изгибные колебания гибкой шарнирно опертой вязкоупругой круглой пластины с пьезоэлектрическими сенсорами // *Теорет. и прикладная механика.* – 2009. – Вып. 45. – С. 124–130. 4. *Митропольский Ю. А.* Нелинейная механика. Одночастотное приближение. – М: Мир, 1988. – 448 с. 5. *Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т. В.* Моделирование вимушенных резонансных колебаний і дисипативного розігріву гнучких в'язкопружних пластин із розподіленими актуаторами // *Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології.* – 2008. – В. 8. – С. 48–68.

Институт механики НАНУ, г. Киев

Национальный технический университет Украины "КПИ", г. Киев

Поступила 20.05.2009

УДК 539.3

И. Ф. КИРИЧОК, д-р физ.-мат. наук,
Т. В. КАРНАУХОВА, канд. физ.-мат. наук, *Н. В. ПЕРЕСУНЬКО*

РЕЗОНАНСНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК И ИХ КОНТРОЛЬ С ПОМОЩЬЮ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ АКТУАТОРОВ

Температура диссипативного разогрева может оказать существенное влияние на эффективность активного демпфирования вынужденных колебаний тонкостенных элементов [1, 2]. Первые результаты по исследованию температурных эффектов на демпфирование стационарных колебаний пластин с помощью пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов получены в статьях [3, 4]. В работах [5, 6] представлены аналитические решения задачи о вынужденных осесимметричных колебаниях и разогреве шарнирно и жестко закрепленных цилиндрических оболочек и демпфировании этих колебаний с помощью пьезоактуаторов. При этом толщина актуатора в жесткостных характеристиках, вязкоупругие свойства пьезоматериала и продольные силы инерции не учитывались.

В данной статье решена задача о вынужденных резонансных колебаниях и диссипативном разогреве цилиндрических оболочек с пьезоэлектрическими актуаторами при осесимметричном электромеханическом нагружении. Учитываются продольные силы инерции, вязкоупругие свойства пьезоматериала актуаторов и их толщины. Исследовано влияние двух вариантов конструирования кольцевых пьезоактуаторов, их продольных размеров и толщины, продольных сил инерции на величину резонансных частот, прогибов, коэффициента управления и температуру разогрева шарнирно опертой оболочки.

Постановка задачи. Рассмотрим цилиндрическую оболочку, длины L из вязкоупругого изотропного пассивного (без пьезоэффекта) слоя толщиной h_0 и жестко скрепленных с его внутренней и внешней поверхностями пьезоэлектрических слоев одинаковой толщины h_1 . Оболочка отнесена к цилиндрическим координатам α , θ , z с началом толщинной координаты $z = 0$ на срединной поверхности радиуса R . Пьезоактуаторы изготовлены из противоположно поляризованной по толщине вязкоупругой пьезокерамики с одинаковыми свойствами, за исключением пьезоконстант, которые имеют противоположные знаки. Пусть внутренний и внешний пьезослой характеризуются пьезомодулями d_{31} и $-d_{31}$ соответственно. Рассмотрим два типа конструкции актуаторов. Первый, когда актуаторы выполнены в виде кольцевых электродированных накладок, которые частично покрывают цилиндрические поверхности пассивного слоя оболочки. При этом оболочка вдоль образующей конструктивно неоднородна. В другом типе актуаторов

пьезослои полностью покрывают цилиндрические поверхности пассивного слоя, а на поверхности пьезослоев нанесены разрезные электроды. Электроды, контактирующие с поверхностями пассивного слоя, поддерживаются при нулевом потенциале. На оболочку действует осесимметричное давление $q_z = q(\alpha) \cos \omega t$, гармонически изменяющееся во времени t с круговой частотой ω , близкой к резонансной. Для компенсации этой нагрузки с той же частотой в противоположной фазе к внешним электродам актуатора подводится разность электрических потенциалов $\varphi(\frac{h_0}{2} + h_1) - \varphi(-\frac{h_0}{2} - h_1) = \text{Re}(2V_a e^{i\omega t})$ с амплитудой V_a , которую необходимо определить. Для моделирования вязкоупругого поведения пассивного и пьезоактивного материалов будем использовать концепцию комплексных характеристик [1].

На основании гипотез Кирхгоффа-Лява относительно механических переменных [2], дополненных адекватными им гипотезами для электрических полевых величин [5, 7], задача об электромеханических гармонических колебаниях рассматриваемой оболочки относительно искомым комплексных величин сводится к решению уравнений движения (множитель $e^{i\omega t}$ опускается) [8]

$$\frac{dT_1}{d\alpha} + \rho_h \omega^2 u = 0, \quad \frac{dM_1}{d\alpha} - Q_1 = 0, \quad \frac{dQ_1}{d\alpha} - \frac{T_2}{R} + \rho_h \omega^2 w + q = 0, \quad (1)$$

определяющих соотношений между усилиями, моментами и деформациями

$$\begin{aligned} T_1 &= C_{11}\varepsilon_\alpha + C_{12}\varepsilon_\theta, & T_2 &= C_{12}\varepsilon_\alpha + C_{11}\varepsilon_\theta, & M_1 &= D_{11}\kappa_\alpha + M_E, \\ M_2 &= D_{12}\kappa_\alpha + M_E, \end{aligned} \quad (2)$$

выражений для деформаций через амплитуды перемещений

$$\varepsilon_\alpha = \frac{du}{d\alpha}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{w}{R}, \quad \kappa_\alpha = \frac{d\theta_1}{d\alpha}, \quad \theta_1 = -\frac{dw}{d\alpha}. \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_{1K} &= h_0 \left(B_{1K} + 2B_{1K}^S \delta_1 \right), \\ D_{1K} &= \frac{h_0^3}{12} \left[B_{1K} + 2B_{1K}^S \left(\delta_1^3 + 6\delta_1^2 + 3\delta_1 \right) + 2\gamma_{33} \delta_1^3 \right] \quad (K = 1, 2), \\ B_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2}, \quad B_{12} = \nu E, \quad B_{11}^S = \frac{1}{S_{11}^E (1-\nu_E^2)}, \quad B_{12}^S = \nu_E B_{11}^S, \\ \nu_E &= -\frac{S_{12}^E}{S_{11}^E}, \quad \gamma_{33} = \frac{b_{31}^2}{b_{33}}, \quad b_{31} = \frac{d_{31}}{S_{11}^E (1-\nu_E)}, \quad b_{33} = \varepsilon_{33}^T (1-k_p^2), \end{aligned}$$

$$k_p^2 = \frac{2d_{31}^2}{S_{11}^E \epsilon_{33}^T (1 - \nu_E)}, \quad M_E = -h_0 (1 + \delta_1) b_{31} V_a, \quad \delta_1 = h_1 / h_0, \\ \rho_h = 2\rho_* h_1 + \rho h_0; \quad (4)$$

$S_{1K}^E = S'_{1K} (1 - i\delta_{1K}^S)$, $d_{31} = d'_{31} (1 - i\delta_{31}^d)$ – соответственно комплексные податливости, пьезомодуль и диэлектрическая проницаемость пьезоматериала; $E = E'' + iE''$ и $\nu = const$ – коэффициенты вязкоупругости и Пуассона пассивного материала; $w = w' + iw''$, $u = u' + iu''$ – амплитуды прогиба и осевого перемещения; ρ , ρ_* – удельные плотности пассивного и пьезоактивного материалов. Здесь и далее применяются стандартные обозначения комплексных величин: $a = a' + ia''$, $|a| = (a'^2 + a''^2)^{1/2}$, $i = \sqrt{-1}$.

При учете гистерезисных потерь в пассивном и пьезоактивном материалах уравнения (1)–(4) необходимо дополнить уравнением энергии для расчета температуры диссипативного разогрева. В силу малой относительной толщины δ_1 пьезослоев температуру саморазогрева по толщине пакета можно считать постоянной. Усредненное по толщине пакета и за период колебаний нестационарное уравнение энергии имеет вид

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} - \frac{2\alpha_S}{\lambda h} (T - T_0) + \frac{1}{\lambda h} \widehat{W}, \quad (5)$$

где $h = h_0 + 2h_1$; α_1 – коэффициент теплообмена на поверхностях $z = \pm(h_0/2 + h_1)$; λ – усредненный коэффициент теплопроводности; a – коэффициент температуропроводности; T_S – температура внешней среды.

Диссипативную функцию вычислим по формуле

$$\widehat{W} = \frac{\Omega}{2} \left[C_{11}'' \left(\epsilon_\alpha'^2 + \epsilon_\alpha''^2 + \epsilon_\theta'^2 + \epsilon_\theta''^2 \right) + 2C_{12}'' \left(\epsilon_\alpha' \epsilon_\theta' + \epsilon_\alpha'' \epsilon_\theta'' \right) + \right. \\ \left. + D_{11}'' \left(\kappa_\alpha'^2 + \kappa_\alpha''^2 \right) - 2(h_0 + h_1) b_{31}'' \left(V_a' \kappa_\alpha' + V_a'' \kappa_\alpha'' \right) + \frac{2b_{33}''}{h_1} \left(V_\alpha'^2 + V_\alpha''^2 \right) \right], \quad (6)$$

в которой $()'$, $()''$ – действительные и мнимые составляющие величин.

Граничные и начальные условия для уравнения теплопроводности запишем в виде

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \pm \frac{\alpha_{0,L}}{\lambda} (T - T_0) \quad (\alpha = 0, L); \quad T = T_0 \quad (t = 0), \quad (7)$$

где α_0 , α_L – коэффициенты теплообмена на контурах $x = 0, L$.

Построение решения задачи. Для численного решения поставленной задачи уравнения гармонических колебаний (1)–(3) после некоторых преоб-

разований представим в форме обыкновенных дифференциальных уравнений нормального вида относительно комплексных искомым величин

$$\frac{dT_1}{d\alpha} = -\rho_h \omega^2 u, \quad \frac{dQ_1}{d\alpha} = -\frac{\nu_C}{R} T_1 + \left(\frac{1-\nu_C^2}{R^2} C_{11} - \rho_h \omega^2 \right) w - q,$$

$$\frac{dM_1}{d\alpha} = Q_1, \quad \frac{du}{d\alpha} = J_1 T_1 - \frac{\nu_C}{R} w, \quad \frac{dw}{d\alpha} = -\theta_1, \quad \frac{d\theta_1}{d\alpha} = J_D M_1 - J_D M_E. \quad (8)$$

Здесь $J_C = 1/C_{11}$, $J_D = 1/D$, $\nu_C = C_{12}/C_{11}$.

К уравнениям (8) необходимо присоединить механические граничные условия. Пусть оболочка свободно смещается в продольном направлении при шарнирном опирании ее торцов. Тогда граничные условия имеют вид

$$T_1 = 0, \quad w = 0, \quad M_1 = 0 \quad (x = 0, L). \quad (9)$$

Комплекснозначная система уравнений электромеханики (8) с граничными условиями (9) интегрировалась численным методом дискретной ортогонализации с использованием типовой программы для решения обыкновенных дифференциальных уравнений [9]. На основании решений задачи при механическом либо электрическом нагружении вычислялись диссипативная функция (6) и уравнение нестационарной теплопроводности (5)–(7) интегрировалось методом конечных разностей с использованием явной схемы. При этом использовались безразмерные пространственная $x = \alpha/L$ и временная $\tau = at/L^2$ координаты, а также коэффициенты теплообмена $\gamma_k = \alpha_k L/\lambda$ ($k = s, 0, L$).

Рассматривались три способа возбуждения вынужденных колебаний оболочки. Согласно первому оболочка нагружена равномерным поверхностным давлением $q = q_0$. При втором способе к электродам актуатора подводится разность электрических потенциалов с амплитудой $\pm V_a$. При третьем комбинированном способе нагружения оболочка находится под воздействием гармонического давления q_0 и с целью его компенсации к внешним электродам актуатора подводится разность потенциалов $2V_a$ с той же частотой, но противоположной фазы. Для определения значения V_a , необходимого для максимального снижения прогибов оболочки при ее вынужденных колебаниях, вызванных механической нагрузкой q_0 , зависимость между ними выбиралась в виде линейного закона

$$V_a = k_a(\Delta) q_0, \quad (10)$$

где k_a – коэффициент управления; Δ – безразмерная ширина пьезоактуатора.

Коэффициент k_a выбирался как отношение максимального прогиба

$w_{p \max}$, обусловленного на частоте линейного резонанса единичным механическим нагружением ($q_0 = 1 \text{ Па}$, $V_a = 0$), к соответствующему прогибу $w_{E \max}$ при подводе к электродам актуатора единичного потенциала $q_0 = 0$, $V_a = V_a'' = 1 \text{ В}$, $V_a' = 0$, так что

$$k_a = w_{p \max} / w_{E \max} . \quad (11)$$

Таким образом, коэффициент k_a характеризует величину электрического потенциала, который необходимо подвести к электродам для компенсации единичной механической нагрузки. Наиболее эффективным будет актуатор таких размеров Δ , при которых электрическое нагружение приводит к реализации максимальной амплитуды прогибов. Такой актуатор позволяет компенсировать механическую нагрузку q_0 наименьшим значением амплитуды потенциала V_a , подведенном к внешним электродам актуатора. При этом k_a будет наименьшим. В работе [5] на основании аналитического решения рассматриваемой задачи при пренебрежении продольной составляющей сил инерции, толщиной пьезоактуаторов в жесткостных характеристиках и вязкоупругими свойствами материала для коэффициента k_a получено следующее выражение:

$$k_a = \frac{L^2}{h_0 (1 + \delta_1) b_{31} k_m^2 \sin k_m \xi \sin k_m \Delta / 2} , \quad (12)$$

где $k_m = m\pi$, $m = 1, 3, \dots$; ξ , Δ – безразмерные параметры координаты центра и ширины пьезоактуатора соответственно.

Результаты расчетов. Численные расчеты проведены для оболочки из полимера [10] с модулем сдвига, для которого

$$G' = 794,2 \text{ МПа} , \quad G'' = 73,42 \text{ МПа} , \quad \nu = 0,3636 ,$$

где $G = 2(1 + \nu)E$ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

Внешние пьезоактивные слои актуатора изготовлено из пьезокерамики ЦТСтБС -2 [11], вязкоупругие свойства которой таковы:

$$\begin{aligned} S'_{11} &= 12,5 \cdot 10^{-12} \text{ м/Н}^2 , \quad d'_{31} = -1,6 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м} , \quad \epsilon'_{33} = 21 \cdot 10^2 \epsilon_0 , \\ \epsilon_0 &= 8,654 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} , \quad \delta^s_{11} = 0,16 \cdot 10^{-2} , \quad \delta^d_{31} = 0,4 \cdot 10^{-2} , \\ \delta^{\epsilon}_{33} &= 0,35 \cdot 10^{-2} , \quad \nu_E = \nu'_E = 0,37 \quad (\nu''_E = 0) . \end{aligned}$$

Остальные параметры полимера и пьезокерамики следующие:

$$\begin{aligned} \rho &= 929 \text{ кг/м}^3 , \quad \rho_* = 7520 \text{ кг/м}^3 , \\ \alpha_s &= \alpha_0 = \alpha_L = 2 \text{ Вм/(м}^2 \cdot \text{град)} , \end{aligned}$$

$$\lambda = 0,47 \text{ Вм/(м} \cdot \text{град)} \quad T_0 = T_S = 20^\circ \text{C}.$$

Геометрические размеры оболочки выбирались такими:

$$L = 0,2 \text{ м}, \quad R = 0,1 \text{ м}, \quad h_0 = 0,04 \text{ м}.$$

Поскольку для рассматриваемой оболочки реализуются преимущественно изгибные колебания, расчеты проводились для наиболее энергоемкой первой моды ($m=1$), максимальные прогибы которой достигаются в средней точке ее безразмерной длины ($x=0,5$) и центр актуаторов безразмерной ширины Δ совпадает с этой точкой ($\xi = x = 0,5$).

В таблице для приведенных параметров ширины Δ актуатора представлены результаты расчетов коэффициента управления k_a , полученные на основании численного решения задачи по формуле (11) (вторая строка) и результатов аналитического решения по формуле (12) (третья строка). При этом продольные силы инерции и толщина актуатора не учитывались.

Δ	0,01	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$k_a \cdot 10^2$	30,100	3,000	1,570	1,080	0,844	0,702	0,616	0,562	0,527	0,506	0,500
$k_a \cdot 10^2$	31,700	3,140	1,640	1,100	0,847	0,705	0,618	0,560	0,524	0,505	0,499

Из таблицы видно, что полученные результаты удовлетворительно согласуются между собой, что подтверждает правомерность полученного результата (11) при решении задач численными методами.

На рис. 1 для оболочки с пьезоактуаторами-накладками в зависимости от параметра Δ изображены кривые 1–4 изменения резонансных частот изгибных колебаний $\tilde{\omega} = \omega \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ (штрих-пунктирные линии) и вычисленных на этих частотах максимальных амплитуд прогибов $\tilde{w}_E = |w(0,5)| \cdot 10^6 \text{ м}$ при подводе к электродам актуатора единичного по-

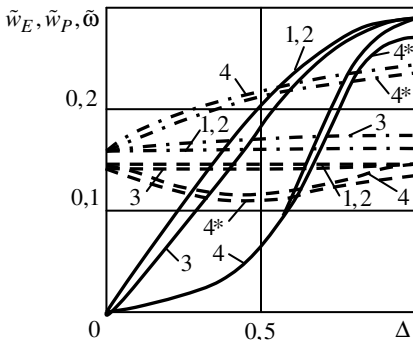


Рис. 1

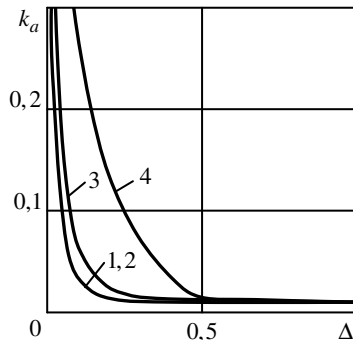


Рис. 2

тенциала $V_a = V'_a = 1 \text{ В}$, $V''_a = 0$, $q_0 = 0$ (сплошные линии) и $\tilde{w}_p = |w(0,5)| \cdot 10^8 \text{ м}$ при единичной механической нагрузке $V_a = 0$, $q_0 = 1 \text{ Па}$ (штриховые линии) для параметров толщин актуатора $\delta_1 = 0, 0,25 \cdot 10^{-3}, 0,25 \cdot 10^{-2}, 0,25 \cdot 10^{-1}$ соответственно. Зависимости коэффициентов управления k_a (11) для указанных параметров относительной толщины параметров актуатора показано на рис. 2. При этом кривые 1, 2, рассчитанные для параметров $\delta_1 = 0, 0,25 \cdot 10^{-3}$, совпадают между собой и с результатами расчетов, полученными на основе аналитического решения задачи [5]. Из рис. 1 и 2 видно, что с ростом толщины актуаторов (кривые 3, 4) из-за конструктивной неоднородности резонансные частоты и прогибы при механическом нагружении становятся функциями параметра ширины актуатора Δ , а прогибы при электрическом нагружении и коэффициент k_a достигают соответственно максимума и минимума при $\Delta = 1$. Отметим, что кривые 1–4, кроме 4*, рассчитаны без учета продольных сил инерции. Сравнение между собой кривых 4 и 4* показывает, что учет продольных сил инерции способствует некоторому снижению резонансных частот и прогибов изгибной моды колебаний оболочки и практически не вносит вклада в расчеты коэффициента управления k_a . Этот эффект становится менее заметным при уменьшении относительной толщины актуаторов.

В случае сплошных актуаторов с разрезными электродами для вышеуказанных параметров оболочки результаты расчетов с учетом продольных сил инерции представлены кривыми 1–4 на рис. 3 и рис. 4. При таком типе пьезоактуаторов параметр Δ характеризует безразмерную ширину пьезослоя, к электродам которого подводится электрический потенциал. Вне параметра Δ электроды закорочены. Особенность актуаторов с разрезными электродами состоит в том, что в силу однородности оболочки вдоль длины собственные частоты (штрих-пунктирные линии) и механические прогибы

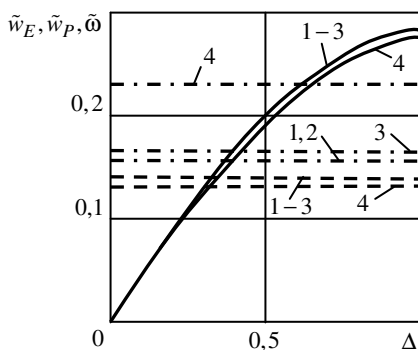


Рис. 3

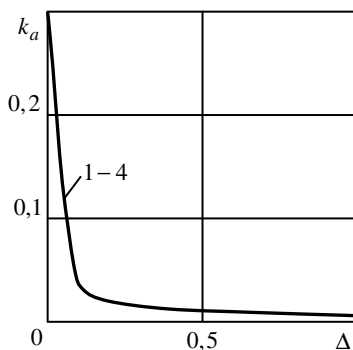


Рис. 4

(штриховые линии) не зависят от параметра Δ . В то же время коэффициент k_a (рис. 4) является функцией только параметра Δ и практически не зависит от толщины актуатора.

На рис. 5 и рис. 6 сплошными кривыми показаны соответственно амплитудно-частотные зависимости максимальных прогибов и температурно-частотные характеристики максимальной температуры диссипативного разогрева оболочки рассматриваемых размеров при наличии актуаторов с разрезными электродами толщины $\delta_1 = 0,25 \cdot 10^{-3}$ и ширины $\Delta = 0,5$ при

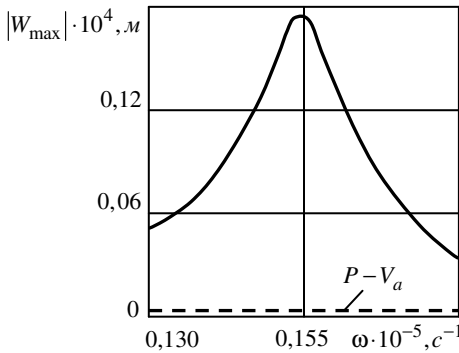


Рис. 5

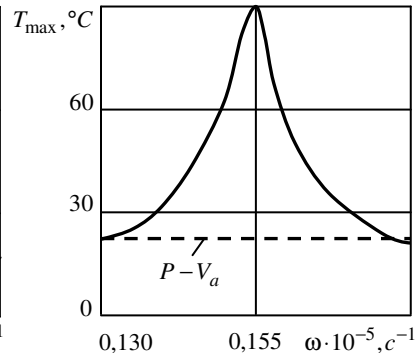


Рис. 6

механическом нагружении с амплитудой $q_0 = 0,125 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Теплообмен с окружающей средой характеризовался параметрами $\gamma_s = \gamma_0 = \gamma_L = 0,851$. Штриховые кривые характеризуют изменение амплитуд прогибов и температуры разогрева при совместном нагружении оболочки механической нагрузкой $q_0 = 0,125 \cdot 10^5 \text{ Па}$ и подводе в противофазе к электродам актуатора электрического потенциала $V_a = 87,5 \text{ В}$. Величина V_a вычислялась по формуле (10) при $k_a = 0,007$ согласно рис. 4 для $\Delta = 0,5$. Рис. 5 и рис. 6, а также проведенные расчеты показали, что при активном демпфировании вынужденных колебаний в области резонанса рассматриваемой оболочки с помощью пьезоактуаторов прогибы, обусловленные механической нагрузкой, уменьшаются на 2–3 порядка, так что разогрев отсутствует.

РЕЗЮМЕ. Чисельно розв'язано задачу про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів циліндричних оболонок з п'єзоелектричними актуаторами при осесиметричному електромеханічному навантаженні. Досліджено вплив розмірів п'єзоактуаторів і поздовжніх сил інерції на резонансні частоти, прогини, коефіцієнт демпфування і температуру дисипативного розігріву шарнірно обертої оболонки.

SUMMARY. By the numerical method the axisymmetric problem of forced resonance vibrations and dissipative heating of cylindrical shells with the piezoelectric actuators

is solved. The influence of the sizes of piezoactuators and the longitudinal inertia forces on the resonant frequency, deflection, damping coefficient and temperature of dissipative heating of the simply supported shell is studied.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. *Карнаухов В. Г., Михайленко В. В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир, 2005. – 428 с. 2. *Tzou H. S., Bergman L. A.* Dynamics and control of distributed systems. – Cambridge: Cambridge University Press, 1998. – 400 p. 3. *Карнаухов В. Г., Козлов В. И., П'ятецька О. В.* Активне демпфірування осесиметричних резонансних коливань круглої пластинки за допомогою п'єзоелектричних включень // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2009. – № 3. – С. 81–85. 4. *Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В., П'ятецька О. В.* Вплив температури дисипативного розігріву на активне демпфірування вимушених осесиметричних коливань круглої пластинки за допомогою п'єзоелектричного актуатора // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2004. – № 3. – С. 107–114. 5. *Козлов В. И., Карнаухова Т. В., Пересунько М. В.* Демпфірування вимушених осесиметричних коливань шарнірно опертої в'язкопружної циліндричної оболонки за допомогою п'єзоелектричних актуаторів / Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2007. – № 4. – С. 84–87. 6. *Козлов В. И., Карнаухова Т. В., Пересунько М. В.* Демпфірування вимушених осесиметричних коливань жорстко закріпленої в'язкопружної циліндричної оболонки за допомогою п'єзоелектричних актуаторів // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2008. – Вип. 1. – С. 142–145. 7. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. Т. 5). 8. *Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Подчасов Н. П.* Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – К.: Вища шк., 1989. – 208 с. 9. *Григоренко Я. М., Мукоєд А. П.* Розв'язання лінійних і нелінійних задач теорії оболонок на ЕОМ. – К.: Либідь, 1992. – 152 с. 10. *Нестеренко Н. П., Червинко О. П., Сенченко И. К.* Моделирование ультразвукового разогрева структурных элементов полимерных волоконистых композитов при нормальном нагружении // Вестн. нац. техн. ун-та "ХПИ". – 2002. – № 9. – С. 3–8. 11. *Болкисев А. М., Карлаш В. Л., Шульга Н. А.* О зависимости свойств пьезокерамических материалов от температуры // Прикладная механика. – 1984. – Т. 20, №7. – С. 70–74.

Институт механики НАНУ, г. Киев

Национальный технический университет Украины "КПИ", г. Киев

Поступила 20.05.2009

*Н. В. ПЕТРЕНКО***КОЛЕБАНИЯ И ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ АКТУАТОРАМИ**

Как конструктивные элементы, круглые пластины из неупругих материалов находят широкое применение в различных областях современной техники [1]. Очень часто на них действуют нагрузки, изменяющиеся по гармоническому закону во времени, в частности, с частотой, близкой к резонансной. При высоком уровне деформирования, которое сопровождается резонансными колебаниями, материал начинает проявлять зависимость механических характеристик от амплитуд деформаций. Общая теория физически нелинейного поведения пассивных (без пьезоэффекта) и пьезоактивных материалов в моногармоническом приближении развита в монографии [2]. Необходимо отметить, что концепция комплексных характеристик является очень эффективным методом описания динамического поведения неупругих материалов при моногармоническом нагружении [3–5]. Для пассивного демпфирования таких колебаний в структуру пластины включаются компоненты с высокими гистерезисными потерями. Вопросам пассивного демпфирования тонкостенных элементов при помощи неупругих включений посвящена обширная литература, обзор которой представлен в [3–6]. В последние годы для демпфирования колебаний тонкостенных элементов начали эффективно применяться активные методы демпфирования резонансных колебаний [8], когда в структуру тонкостенного элемента включаются пьезоэлектрические компоненты, выполняющие функции так называемых актуаторов. При этом основной задачей является расчет той разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации механической нагрузки. В литературе отсутствуют работы, посвященные исследованию влияния физической нелинейности и температуры диссипативного разогрева на эффективность работы актуаторов и на эффективность активного демпфирования резонансных колебаний с их помощью.

В настоящей статье рассмотрена задача об активном демпфировании вынужденных резонансных колебаний жестко защемленной по торцу тонкой круглой пластины из физически нелинейного неупругого материала с учетом влияния диссипативного разогрева.

Постановка задачи. Рассмотрим сплошную круглую пластину радиуса R , на которую действует равномерное поверхностное давление, изменяющееся по гармоническому закону с частотой ω , близкой к резонансной: $q = q_0 \exp(i\omega t)$. Пластина изготовлена из неупругого материала, термомеханическое состояние которого моделируется на основе концепции комплексных характеристик [2–4]. В случае изотропного материала будем счи-

тать, что действительная G' и мнимая G'' составляющие модуля комплексного сдвига $G = G' + iG''$ зависят от амплитуд деформаций сдвига. Эта зависимость находится из экспериментов. Такой подход является общепринятым в динамике конструкций при моногармоническом нагружении [2–6]. По аналогии с теорией малых упруго–пластических деформаций для неодноосного напряженно-деформированного состояния считается, что компоненты комплексного модуля зависят от интенсивности деформаций:

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\epsilon'_{rr} - \epsilon'_{\theta\theta})^2 + \dots + 6(\epsilon'^2_{r\theta} + \epsilon''^2_{r\theta} + \epsilon'^2_{\theta z} + \epsilon''^2_{\theta z} + \epsilon'^2_{rz} + \epsilon''^2_{rz})}. \quad (1)$$

где ϵ_{kl} ($k, l = r, \theta, z$) – компоненты тензора деформаций. Таким образом, имеет место известная упруго-вязкоупругая аналогия, когда все отличие в постановке задач механики для неупругого материала сводится к замене действительных модулей на комплексные [2–7]. Здесь компоненты тензоров напряжений и деформаций и механические характеристики материала являются комплексными:

$$\sigma_{kl} = \sigma'_{kl} + i\sigma''_{kl}, \quad \epsilon_{kl} = \epsilon'_{kl} + i\epsilon''_{kl}, \quad G = G' + iG''. \quad (2)$$

Для вычисления действительной и мнимой составляющих модуля сдвига в их зависимости от интенсивности девиатора тензора деформаций для изотропного неупругого материала необходимо иметь петлю гистерезиса, например, для деформаций сдвига $\epsilon_{xy} = \epsilon_0 \cos \omega t$ при разных амплитудах деформаций ϵ_0 . Действительная и мнимая составляющие комплексного модуля сдвига находятся из косинус– и синус – преобразования Фурье, т.е. путем интегрирования экспериментальной кривой по петле гистерезиса, так что для изотропного материала

$$G' = \frac{\omega}{\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi/\omega} \sigma(t) \cos \omega t dt, \quad G'' = \frac{\omega}{\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi/\omega} \sigma(t) \sin \omega t dt. \quad (3)$$

В полученной таким образом формуле необходимо заменить ϵ_0 на Γ .

Деформации считаются малыми, а связь между деформациями и перемещениями u_k определяется линейными соотношениями. На поверхности пластины нанесены пьезоэлектрические слои, выполняющие роль актуаторов. Эти слои отличаются друг от друга только направлением поляризации.

Для описания механического поведения пластины ограничимся самыми простыми из гипотез – гипотезами Кирхгоффа-Лява. Основные соотношения механики пластин – кинематические соотношения, уравнения движения, механические граничные условия – представлены в [1]. В дальнейшем будем интересоваться только изгибными колебаниями тонкой круглой пластины. Универсальное комплексное уравнение изгибного движения и кинематические соотношения для круглой пластины представлены в [1]. К ним необходимо добавить комплексные определяющие уравнения для момен-

тов, которые для круглой пластины с актуаторами имеют вид [9]

$$M_1 = -D(\kappa_r + \nu\kappa_\theta) + M_0, \quad M_2 = -D(\nu\kappa_r + \kappa_\theta) + M_0 \quad (4)$$

и для диссипативной функции

$$W = \frac{\omega}{2} \left[(M_r''\kappa_r' - M_r'\kappa_r'') + (M_\theta''\kappa_\theta' - M_\theta'\kappa_\theta'') \right]. \quad (5)$$

Здесь $M_0 = (h_0 + h_1)\gamma_{31} V_A / 2$ (V_A – подводимая к актуатору разность потенциалов). В предположении постоянства температуры по толщине пластины универсальное стационарное уравнение энергии может быть представлено в виде [9]

$$k h \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \right) - 2\alpha\theta + W \right] = 0, \quad (6)$$

где k – коэффициент теплопроводности, α – коэффициент теплоотдачи.

Из-за малой толщины актуатора диссипативный разогрев в нем не учитывается. В дальнейшем будем считать коэффициент Пуассона пассивного материала ν постоянной величиной. Так как модуль сдвига зависит от второго инварианта Γ тензора деформаций, то изгибная жесткость D в (4) будет нелинейной функцией изгибных деформаций. Подставляя равенства (4) в уравнения движения [1] и в функцию (5), получаем нелинейную систему дифференциальных уравнений относительно комплексного прогиба и температуры

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2} \left[D \left(\rho \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \nu \frac{dw}{d\rho} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[D \left(\nu \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) \right] - (\gamma h_0) R^4 \omega^2 w - R^4 p_0(\rho) - R^2 \Delta M_0 = 0, \quad (7)$$

$$\frac{d^2 T}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dT}{d\rho} - \frac{2\alpha R^2}{(\lambda h_0)} (T - T^0) + \frac{\omega G^*(T) h_0^2}{12 R^2 (1 - \nu) \lambda} \left[\left(\frac{d^2 w'}{d\rho^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 w''}{d\rho^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{dw'}{d\rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{dw''}{d\rho} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{1}{\rho} \frac{dw'}{d\rho} \frac{d^2 w'}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw''}{d\rho} \frac{d^2 w''}{d\rho^2} \right) \right] = 0. \quad (8)$$

Если свойства материала не зависят от температуры, связанная задача термомеханики распадается на две отдельные задачи. Сначала решается нелинейная задача о механических колебаниях пластины, затем вычисляется диссипативная функция и, наконец, решается уравнение теплопроводности с известным источником тепла.

Аналитическое решение задачи о резонансных колебаниях пластины. Вид аналитического решения поставленной выше задачи зависит от аппроксимации модуля сдвига, как функции второго инварианта девиатора тензора деформаций. Эта функция может быть получена с использованием

различных моделей. Так, например, при использовании модели идеальной пластичности действительная G_R и мнимая G_I составляющие комплексного модуля сдвига имеют следующий вид

$$G_R = \left[\frac{G}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{2\Gamma_*}{\Gamma} \right) - \left(1 - \frac{2\Gamma_*}{\Gamma} \right) \sin \arccos \left(1 - \frac{2\Gamma_*}{\Gamma} \right) \right],$$

$$G_I = \frac{4G}{\pi} \frac{\Gamma_*}{\Gamma} \left(1 - \frac{\Gamma_*}{\Gamma} \right) \text{ при } \Gamma > \Gamma_* . \quad (9)$$

Здесь Γ_* – предел упругости. При использовании модели пластичности с линейным упрочнением и идеальным эффектом Баушингера эти составляющие вычисляются по формулам

$$G_R^J = G_1 + \left(1 - \frac{G_1}{G} \right) G_R, \quad G_I^J = \left(1 - \frac{G_1}{G} \right) G_I \text{ при } \Gamma > \Gamma_* , \quad (10)$$

в которых G_I , G – константы, определяемые из кривой деформирования.

Однако при деформировании на резонансных частотах и при реальных теплообмене и размерах пластины температура диссипативного разогрева, как правило, превышает разумные пределы. Этот факт необходимо иметь в виду при исследовании вынужденных резонансных колебаниях упругопластических и вязкоупруго-пластических тел за пределами упругости. Приемлемые уровни температур достигаются при деформациях, намного меньших этих пределов, т.е. при деформировании в области микропластичности. Для описания термомеханической связанности для этого случая можно использовать модель, разработанную, например, в монографии [4]. Эта модель дает такие выражения для действительной и мнимой составляющих комплексного модуля сдвига:

$$G' = G(1 - r\Gamma^\alpha), \quad G'' = g\Gamma^\alpha, \quad (11)$$

Здесь r , g , α – определяемые из экспериментов параметры. Диссипативная функция по-прежнему вычисляется по формуле (8). Наконец, как указывалось выше, можно просто использовать экспериментальные данные по гистерезисным петлям и по ним рассчитать комплексный модуль сдвига или использовать табличные данные для них. Так, например, приведенные в работах [6,10] экспериментальные данные для модуля сдвига с большой точностью аппроксимируются такими функциями:

$$G' = a_1 - b_1\Gamma^2, \quad G'' = a_2 - b_2\Gamma^2. \quad (12)$$

Здесь параметры a_i , b_i ($i=1, 2$) определяются экспериментально. Так, например, для стали 45 (коэффициент Пуассона $\nu = 0,27$, а плотность $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$) они равны:

$$a_1 = 0,8 \cdot 10^{11} \text{ Па}, \quad a_2 = 0,507 \cdot 10^8 \text{ Па}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -0,451 \cdot 10^{15} \text{ Па}.$$

Аппроксимация (12) дает возможность получить в замкнутой форме аналитическое решение задачи о колебаниях и диссипативном разогреве прямоугольной пластины из физически нелинейного материала и на его основе построить амплитудно-частотные и температурно-частотные характеристики. Это решение может служить эталоном при апробации численных методов, в частности, метода конечных элементов.

Пусть торцы пластины жестко защемлены. Тогда прогиб пластины при колебаниях на резонансе можно представить в виде:

$$w = A(1 - \rho^2)^2. \quad (13)$$

Используя (12), (13), из уравнения движения (7) после громоздких выкладок при помощи метода Бубнова-Галеркина получим следующее кубическое уравнение для безразмерной амплитуды $y = |A|^2 / h^2$ колебаний круглой пластины:

$$y^3 - n_2 y^2 + n_1 y - n_0 = 0. \quad (14)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$n_0 = \frac{R^8 p_0^2}{h_0 (b_{12}^2 + b_{22}^2)}, \quad n_1 = \frac{R^8 (b_{11}^2 + b_{21}^2)}{h_0^4 (b_{12}^2 + b_{22}^2)},$$

$$n_2 = \frac{2R^4 (b_{11}b_{12} + b_{21}b_{22})}{h_0^2 (b_{12}^2 + b_{22}^2)}, \quad (15)$$

где

$$p_0 = \frac{qR^2}{6} - 2\gamma_{31}(h_0 + h_1 \rho_1^2 (1 - \rho_1^2))V_A, \quad b_{11} = \frac{16}{9} \frac{a_1 h_0^3}{(1-\nu)R^2} - \frac{\bar{\rho}R^2 \omega^2}{10},$$

$$b_{21} = \frac{16}{9} \frac{a_2 h_0^3}{(1-\nu)R^2}, \quad b_{12} = \frac{8}{5} \frac{b_1 h_0^5 C}{(1-\nu)R^2}, \quad b_{22} = \frac{8}{5} \frac{b_2 h_0^5 C}{(1-\nu)R^2}. \quad (16)$$

Для случая постоянного коэффициента Пуассона гипотеза Кирхгоффа-Лява дает следующее выражение для величины C :

$$C = \frac{1}{3} [3(2\alpha_1 - \alpha_2)(7 + 5\nu) - (8\alpha_1 - 4\alpha_2)(1 + \nu) - (2\alpha_1 - \alpha_2)(1 + 3\nu)] -$$

$$- \frac{1}{6} [5\alpha_1(34 + 18\nu) - 5\alpha_2(15 + 7\nu) - (10\alpha_1 - 3\alpha_2)(1 + \nu) - (8\alpha_1 - 4\alpha_2) \times$$

$$\times (1 + 3\nu)] - \frac{1}{10} [(10\alpha_1 - 3\alpha_2)(1 + 3\nu) - 7(10\alpha_1 - 3\alpha_2)(3 + \nu)]. \quad (17)$$

Решение уравнения энергии. Стационарная температура диссипативного разогрева находится из решения дифференциального уравнения теплопроводности (8) при тепловых граничных условиях, отвечающих заданной на торце температуре T_C :

$$T = T_C \text{ при } r = R. \quad (18)$$

Решение краевой задачи (8), (18) находим методом Бубнова-Галеркина, используя аппроксимацию

$$\theta = T - T_C = T_1 (1 - \rho^2), \quad (19)$$

где параметр T_1 определяется по формуле:

$$T_1 = t_1 x + t_2 x^2. \quad (20)$$

Здесь параметры t_1 , t_2 зависят от теплофизических и электромеханических свойств пассивных и пьезоактивных материалов, при этом t_1 всегда положительно, а знак t_2 зависит от знака b_2 в аппроксимации (12): $t_2 > 0$ при $b_2 > 0$ и $t_2 < 0$ при $b_2 < 0$.

Анализ результатов. С использованием представленного выше аналитического решения получены числовые результаты, иллюстрирующие влияние физической нелинейности на амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) колебаний пластины из стали 45. Радиус и толщина пластины считались равными $R = 0,3 \text{ м}$, $h = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. На пластину действует нагрузка $q = 2 \cdot 10^3 \text{ Па}$. На рис. 1 изображена зависимость амплитуды колебаний от частоты для физически нелинейного материала, а на рис. 2 – для физи-

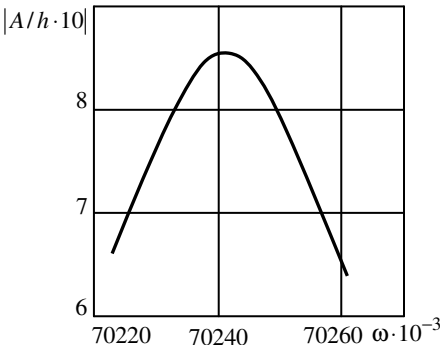


Рис. 1

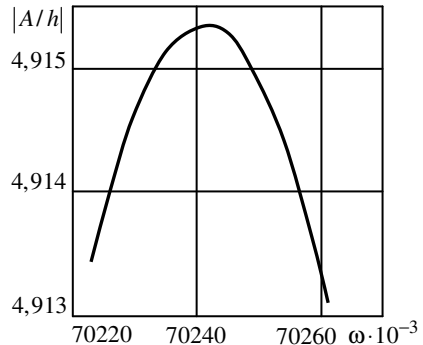


Рис. 2

чески линейного материала. Как видим, наблюдается сильное влияние физической нелинейности на АЧХ

Из выражения (16) видно, что если к актуатору подвести разность по-

тенциалов

$$V_A = \frac{qR^2}{12 \gamma_{31} (h_0 + h_1) \rho_1^2 (1 - \rho_1^2)}, \quad (21)$$

то амплитуда вынужденных колебаний при совместном действии механической и электрической нагрузок равна нулю.

Из выражения (21) следует, что физическая нелинейность не влияет на разность потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации механической нагрузки. Это очень важный результат, который свидетельствует о том, что для расчета компенсирующей механическую нагрузку разности потенциалов нет необходимости решать нелинейную задачу, а достаточно ограничиться только решением линейной задачи вязкоупругости. Выражение (21) также показывает, что работа актуатора будет самой эффективной (разность потенциалов будет минимальной), если размеры актуатора равны $\rho_1 = \sqrt{2}/2$. Из решения уравнения энергии (19), (20) видно, что физическая нелинейность может как увеличить (при $t_2 > 0$) температуру диссипативного разогрева, так и уменьшить ее (при $t_2 < 0$), что, как указывалось выше, в свою очередь зависит от знака b_2 . При достижении температурой диссипативного разогрева точки Кюри T_K пьезоактивный материал становится пассивным и работа пьезоактуатора ухудшается. Будем считать, что температура не должна достигать T_K ни в одной точке пластины. Из этого условия можно найти критическое значение нагрузки q_{kr} , при которой актуатор достигает точки Кюри в центре пластины, где температура является максимальной. Это критическое значение определяется из соотношений (14) и (20).

Полагая в (20) $\theta = \theta_K = T_K - T_C = t_1 x_{kr} + t_2 x_{kr}^2$, при $t_2 > 0$ найдем критическое значение амплитуды колебаний $x_{kr} = A_{kr}^2$:

$$x_{kr} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^2 + \frac{\theta_{kr}}{t_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{t_1}{t_2} \right)}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (14), найдем критическое значение параметра нагружения n_{0kr} :

$$n_{0kr} = \frac{x_{kr}^3}{h^6} - n_2 \frac{x_{kr}^2}{h^4} + n_1 \frac{x_{kr}}{h^2}. \quad (23)$$

Более точное значение критической нагрузки найдем, полагая, что температура диссипативного разогрева достигается в точке $\rho = \rho_1$. При этом во всей активной области $0 \leq \rho \leq \rho_1$ температура диссипативного разогрева

превышает точку Кюри. Тогда критическое значение параметра нагрузки определяется из приведенных выше формул (22), (23), если в них заменить величину θ_K на величину $\hat{\theta}_K = \theta_K / (1 - \rho_1^2)$. При оптимальных размерах актуатора $\rho_1^2 = 1/2$ величина $\hat{\theta}_K = 2\theta_K$. При $t_2 < 0$ минимальное критическое значение амплитуды x_{kr} определяется по формуле $x_{kr} = t_1 / (2|t_2| - [t_1^2 / (4t_1^2) - \theta_{kr} / |t_2|])^{1/2}$. Критическое значение параметра нагрузки определяется по формуле (23), в которой величину $-n_2$ следует заменить на $|n_2|$. Если механическая нагрузка превышает критическое значение, актуатор теряет свое функциональное назначение из-за потери материалом пьезоэффекта и управлять колебаниями пластины становится невозможным.

РЕЗЮМЕ. Методом Бубнова–Гальоркіна розв'язано задачу про вимушені резонансні згинальні коливання і дисипативний розігрів жорстко защемленої фізично нелінійної круглої пасивної непружної пластини з розподіленими п'єзоелектричними актуаторами. Досліджено вплив фізичної нелінійності і температури дисипативного розігріву на ефективність активного демпфування за їх допомогою.

SUMMARY. By Bubnov–Galerkin method the problem of forced resonance vibrations and dissipative heating of a physical nonlinear circular viscoelastic plate with distributed actuators is solved. The edge of the plate is rigidly clamped. The influence of the physical nonlinearity and dissipative heating on effectiveness of active damping vibrations of the plate is investigated.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. Григолюк Э. И. Прочность, колебания и устойчивость круговых пластин. Ч. I. – М., НИИ механики МГУ, 1997. – 134 с. 2. Карнаухов В. Г., Михайленко В. В. Нелинейные одночастотные колебания и диссипативный разогрев неупругих пьезоэлектрических тел. – Житомир, 2005. – 428 с. 3. Савченко Е. В. Пассивное демпфирование колебаний композитных конструкций. – Нежин: Аспект-Поліграф, 2006. – 232 с. 4. Пальмов В. А. Колебания упругопластических тел. – М.: Наука, 1976. – 328 с. 5. Jones D. I. Handbook of Viscoelastic Vibration Damping. – John Wiley&Sons, 2001. – 412 p. 6. Gandhi F. Influence of Nonlinear Viscoelastic Material Characterization on Performance of Constrained Layer Damping Treatment // J. AIAA, – 2001. – Vol. 39, № 5. – P. 924–931. 7. Карнаухов В. Г., Козлов В. І., Січко В. М. Моногармонічне наближення в задачах про нелінійні коливання і дисипативний розігрів непружних тіл // Мат. мет. та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49, № 1. – С.85–105. 8. Encyclopedia of Smart Materials, Volumes 1–2 (ed. Schwartz, Mal). – John Wiley&Sons, 2002. – 1176 p. 9. Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В., Зражевская В. Ф. Активное демпфирование резонансных изгибных колебаний гибкой шарнирно опертой вязкоупругой пластины при помощи пьезоактуаторов // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 114–123. 10. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. – К.: Наук. думка, 1971. – 376 с.

Інститут механіки НАН України, г. Київ

Поступила 03.11.2009

В. И. ГОЛОЛОБОВ, канд. техн. наук

ВЛИЯНИЕ СДВИГОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ НА УРОВЕНЬ КОМПЕНСАЦИОННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ПРИ ОСЕСИММЕРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИНЧАТОГО ПЬЕЗОВИБРАТОРА

Использование в конструкциях пьезоэлектрических материалов в качестве электромеханических преобразователей позволяет осуществлять дополнительные компенсирующие воздействия электрическим путем [1]. Так, пьезоактивные слои в качестве преобразователей наносятся на тонкостенные пластинчатые конструкционные элементы. Методы определения динамических характеристик таких монолитных слоистых элементов базируются на теории тонких пластин, основанной на гипотезе прямой нормали и соответствующих этой гипотезе предположениях о характере электрического поля в пьезослоях. Следует ожидать, что при гармонических колебаниях на повышенных частотах полученные этими методами результаты решения задач можно существенно уточнить учетом поперечных сдвиговых деформаций и сил инерции вращения. В данной работе на примере круглой пластинки, подверженной синусоидально изменяющейся во времени нагрузке, анализируется влияние указанных факторов на величину компенсирующего электрического воздействия. Заметим, что необходимым условием взаимной компенсации результатов воздействий в какой-либо форме должно быть постоянство фазовых соотношений – в линейной системе фазы основного и компенсирующего воздействий должны совпадать или быть противоположными. При этом компенсация или обращение в нуль перемещения или механического напряжения в какой либо точке, возможна только на одной частоте.

Постановка задачи. В качестве типового элемента рассмотрим трехслойную пластину радиуса R с упругим внутренним слоем толщины $2H$ и круговыми или кольцевыми в плане пьезокерамическими слоями толщины h . Колебания пластины вызваны осесимметричной контурной или поверхностной механической нагрузкой и совпадающим с ней по фазе электрическим напряжением на пьезослоях. В линейной колебательной системе для нагрузок, изменяющихся во времени по синусоидальному закону, все факторы электромеханического состояния представляются произведениями их амплитуд, зависящих от радиальной координаты r , на общий временной синусоидальный множитель. Будем считать, что механическая нагрузка, вызывающая колебания выделенного из конструкции пластинчатого элемента, представлена заданным значением амплитуды перемещения его наружного контура \bar{w} , а компенсирующая нагрузка – электрическим напряжением V на каждом электромеханическом преобразователе. Это напряжение приложено к электродам – электропроводящим слоям на поверхно-

стях пьезодиэлектрика. Электрическим сопротивлением электродов преобразователей пренебрегаем, что позволяет считать электроды эквипотенциальными поверхностями, а компенсирующее напряжение на преобразователе удовлетворяющим условию

$$dV/dr = 0. \quad (1)$$

Указанное напряжение совпадает по величине с электрическим потенциалом одного из электродов преобразователя, причем потенциал другого электрода равен нулю.

Прогиб пластинки, вызванный механической и электрической нагрузками, представим в виде

$$w(r) = \bar{w} w^p(r) + V w^e(r), \quad (2)$$

в котором w^p и w^e – функции, представляющие прогиб пластины от единичных возбуждающих факторов. Уровень компенсационного воздействия V при заданном перемещении контура \bar{w} определим из условия обращения в нуль прогиба в центре пластинки

$$V(\omega) = \kappa(\omega) \bar{w}, \quad (3)$$

где $\kappa(\omega) = -w^p(0)/w^e(0)$. Для обеспечения этого уровня напряжения на преобразователях для каждого значения частоты колебаний определяются параметры компенсационной электрической цепи. Пусть компенсационная система настроена на величину κ , определенную на частоте ω_κ , а на других частотах не зависящая от частоты электрическая нагрузка имеет вид

$$V = \kappa(\omega_\kappa) \bar{w}. \quad (4)$$

Тогда из выражения для перемещения (2), представленного в виде

$$w(0) = w^p(0) \left(1 - \frac{\kappa(\omega_\kappa)}{\kappa(\omega)} \right) \bar{w}, \quad (5)$$

следует, что частичная компенсация возможна на частотах, при которых удовлетворяется условие $0 < \kappa(\omega_\kappa)/\kappa(\omega) < 2$. Функции w^p и w^e определяются решениями соответствующих задач о гармонических колебаниях тонких круговых пластин с пьезокерамическими слоями.

Направление вектора предварительной поляризации пьезоматериала примем совпадающим с нормалью к плоскости пластины. Электрическое поле в тонких слоях пьезоматериала между электродами представляется осевыми или толщинными компонентами векторов напряженности \bar{E} и индукции \bar{D} , причем компоненту вектора индукции будем считать не зависящей от толщинной координаты в пределах каждого слоя [2].

Соосное расположение основного слоя пластинки и круговых или кольцевых в плане преобразователей из пьезокерамики, поляризованной в осевом направлении, определяет осесимметричный характер компенсирующей

нагрузки и осесимметричное деформирование пластины.

Метод решения. Для определения электроупругого состояния пластины с пьезопреобразователями используем теорию пластин, учитывающую инерцию вращения и поперечные сдвиги. Примем гипотезу прямой линии для пакета слоев в целом [3]. В соответствии с предположениями о структуре и характере электрического поля в пьезодиэлектрике и с учетом допущений теории пластин о равенстве нулю нормальных напряжений на поверхностях, параллельных срединной плоскости пластины, определяющие соотношения для пьезоматериала можно записать в виде

$$D_3 = \varepsilon E_3 + e(e_1 + e_2); \quad (6)$$

$$\sigma_1 = \bar{c}_{11}^E e_1 + \bar{c}_{12}^E e_2 - e E_3, \quad \sigma_2 = \bar{c}_{12}^E e_1 + \bar{c}_{11}^E e_2 - e E_3 \quad (7)$$

или

$$\sigma_1 = \bar{c}_{11}^D e_1 + \bar{c}_{12}^D e_2 - h D_3, \quad \sigma_2 = \bar{c}_{12}^D e_1 + \bar{c}_{11}^D e_2 - h D_3, \quad (8)$$

где индексы 1, 2, 3 соответствуют радиальному, окружному и осевому направлениям; жесткостные характеристики материала и пьезокоэффициенты определяются выражениями

$$\begin{aligned} \bar{c}_{11}^E &= \frac{s_{11}^E}{(s_{11}^E)^2 - (s_{12}^E)^2}, \quad \bar{c}_{12}^E = \frac{s_{12}^E}{(s_{11}^E)^2 - (s_{12}^E)^2}, \\ e &= d_{31} / (s_{11}^E + s_{12}^E), \quad \varepsilon = \varepsilon_{33}^T - 2d_{31}e, \quad h = e/\varepsilon, \\ \bar{c}_{11}^D &= \bar{c}_{11}^E + eh, \quad \bar{c}_{12}^D = \bar{c}_{12}^E + eh. \end{aligned} \quad (9)$$

Гипотеза прямой линии определяет линейный закон изменения деформаций по толщине

$$e_1 = \varepsilon_1 + \gamma\chi_1, \quad e_2 = \varepsilon_2 + \gamma\chi_2, \quad (10)$$

где

$$\varepsilon_1 = du/dr, \quad \varepsilon_2 = u/r - \quad (11)$$

деформации срединной поверхности основного слоя;

$$\chi_1 = d\vartheta/dr, \quad \chi_2 = \vartheta/r - \quad (12)$$

характеристики изгибной деформации.

Усредненный угол сдвига пакета слоев в целом ψ или угол сдвига между нормалью к недеформированной поверхности и касательной к начальной поверхности определяется разностью углов поворота нормали ϑ и касательной dw/dr при деформации [4]:

$$dw/dr = \psi - \vartheta. \quad (13)$$

Этот угол сдвига зависит от перерезывающей силы Q и жесткости пла-

стинки на сдвиг и на участках пластинки с одним упругим слоем определяется в виде

$$\psi = k \frac{Q}{EH/(2+2\nu)}, \quad (14)$$

где H – толщина пластины; k – коэффициент, равный $5/6$. По этой приближенной формуле определим угол сдвига и на участках с пьезослоями, принимая во внимание их сравнительно малую толщину и тот факт, что сдвиговые напряжения и деформации в наружных слоях малы.

Таким образом, деформированное состояние элемента пластины описывается переменными ε_1 , ε_2 , γ , χ_1 , χ_2 , связанными линейной зависимостью с интегральными характеристиками напряженного состояния – усилиями N_1 , N_2 , Q и изгибающими моментами M_1 , M_2 . К группе силовых факторов следует отнести компенсирующее электрическое напряжение V , так как оно вызывает деформацию элемента и в данной постановке является неизвестной функцией. Предполагается, что эта деформация изгибная, что может быть при одинаковых преобразователях симметрично расположенных относительно срединной плоскости пластины и включенных таким образом, что расширению одного из них сопутствует сжатие другого. Запишем эту зависимость в виде

$$\begin{aligned} N_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2, \quad N_2 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{11}\varepsilon_2, \\ M_1 &= D_{11}\chi_1 + D_{12}\chi_2 + e(H+h)V, \\ M_2 &= D_{12}\chi_1 + D_{11}\chi_2 + e(H+h)V, \quad Q = \frac{6}{5} \frac{EH}{2+2\nu} \gamma, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{2EH}{1-\nu^2} + 2\bar{c}_{11}^E h, \quad C_{12} = \frac{2EH}{1-\nu^2} + 2\bar{c}_{12}^E h, \\ D_{11} &= \frac{2}{3} \frac{EH^3}{1-\nu^2} + \frac{2}{3} \bar{c}_{11}^E \left((H+h)^3 - H^3 \right), \\ D_{12} &= \frac{2}{3} \frac{EH^3}{1-\nu^2} + \frac{2}{3} \bar{c}_{12}^E \left((H+h)^3 - H^3 \right), \\ \bar{c}_{1j} &= \bar{c}_{1j}^D + \left(\bar{c}_{1j}^E - \bar{c}_{1j}^D \right) \frac{H^2 + Hh + h^2/4}{H^2 + Hh + h^2/3} \quad (j=1, 2). \end{aligned}$$

Здесь E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Уравнения движения в усилиях и моментах с учетом сил инерции вращения для круглой пластины имеют вид

$$\frac{dN_1}{dr} = -\frac{1}{r} N_1 + \frac{1}{r} N_2 - \omega^2 C_I u, \quad \frac{dQ}{dr} = -\frac{1}{r} Q - C_I \omega^2 w,$$

$$\frac{dM_1}{dr} = -\frac{1}{r}M_1 + \frac{1}{r}M_2 + Q - \omega^2 D_I \vartheta, \quad (16)$$

где C_I и D_I – инерционные характеристики элемента пластинки

$$C_I = 2\rho_H H + 2\rho_h h, \quad D_I = \frac{2}{3}\rho_H H^3 + \frac{2}{3}\rho_h \left((H+h)^3 - H^3 \right),$$

ρ_H и ρ_h – плотности центрального и поверхностных слоев.

Уравнения (1), (12)–(16) описывают электроупругое состояние пластины. Они приводятся к разрешающей системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вектора $N_1, Q, M_1, u, w, \vartheta, V$. Граничные условия для этой системы в случае кинематического возбуждения заданным осевым перемещением внешнего контура \bar{w} и в отсутствии поворота касательной к деформированной поверхности имеют вид

$$\begin{aligned} Q = u = w = \vartheta = 0 \quad (r = 0), \\ u = 0, \quad w = \bar{w}, \quad \psi - \vartheta = 0 \quad (r = R). \end{aligned} \quad (17)$$

Численные результаты и их анализ. Рассмотрим круглую стальную пластинку с двумя одинаковыми электромеханическими преобразователями в виде слоев пьезокерамики марки PZT-4 толщины $h = 0,0002$ м. Форма слоев в плане – круглая, они симметрично расположенными относительно срединной поверхности основного упругого слоя пластинки. Диаметр преобразователей равен половине наружного радиуса пластинки $R = 0,024$ м. Толщина пластинки $H = 0,001$ м. При такой структуре электрическое напряжение на преобразователях, изменяющееся во времени по синусоидальному закону с амплитудой V , вызывает в области расположения пьезослоев момент $M = -e(H+h)V$.

Решение системы дифференциальных уравнений с краевыми условиями (17) получено численными методами [3] для дискретных значений частоты. На рис. 1 приведен график уровня компенсационного воздействия, для случая обращения в нуль прогиба в центре пластинки при заданном перемещении контура $\bar{w} = 10^{-7}$ м. Значения компенсирующего напряжения приведены на рис. 2. Нижняя кривая соответствует уточненному расчету.

Величина $V(\omega) = -\frac{w^P(0)}{w^e(0)} \bar{w}$ как функция частоты имеет особенность на

частотах, при которых прогиб в центре от электрической нагрузки обращается в нуль. На резонансных частотах в недиссипативных системах числитель и знаменатель в формуле для V обращается в нуль, но V как предел имеет конечное значение. Однако эти значения компенсирующего напряжения не имеют физического смысла, так как вследствие неустойчивости параметров электрических цепей баланс нагрузок осуществить невозможно.

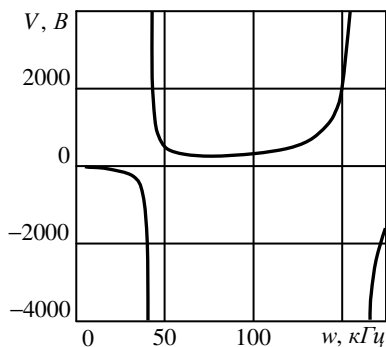


Рис. 1

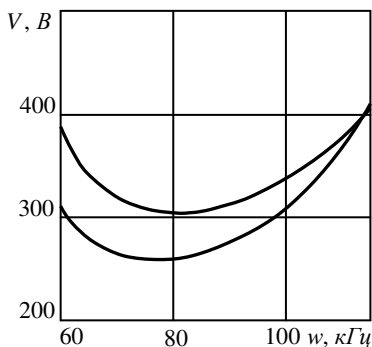


Рис.2

но. Таким образом, функция V представляет компенсационную нагрузку вне областей частот, прилегающих к особым точкам и резонансным частотам.

Первые три собственные частоты пластины с жестко зашумленным контуром и короткозамкнутыми электродами, определенные с учетом и без учета влияния сдвигов и инерции вращения, равны 16623, 60227, 120413 и 16952, 64927, 139044 герц. Эти данные, а также информация о характере и особых точках функции $k(\omega)$, график которой с точностью до параметра \bar{w} совпадает с графиком V из рис. 1, показывают, что сравнительно невысоким уровнем электрического напряжения на выбранной частоте из интервала от 70 до 100 килогерц можно обеспечить нулевое перемещение в центре пластины.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу про осесиметричні гармонічні коливання круглої пластины з п'єзокерамічними шарами при електромеханічному збудженні. Визначено вплив зсувів на співвідношення електричного та механічного навантажень за умови обернення в нуль переміщення в центрі пластинки.

SUMMARY. Axisymmetric bending vibration of circular plate with piezoelectric transducers under coherent mechanical and electrical loads are presented. The solution is based on the classical first order shear type model theory of plate and give correlation of electric load with mechanical force under condition of zero displacement at the centre of the plate.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. Rao S. S., Sunar M. Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of structure: A survey // Appl. Mech. Reviews. – 1994. – Vol. 47, № 44. – P. 113–123. 2. Гололобов В. И. Соотношения упругости для слоистых пьезокерамических пластин // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – № 11. – С. 37–40. 3. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. – К.: Наук. думка, 1981. – 544 с. (Методы расчета оболочек: В 5 т.: Т. 4). 4. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. – К.: Наук. думка, 1972. – 508 с.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 15.02.2009

УДК 539.3

С. А. КАЛОЕРОВ, д-р. физ.-мат. наук, Д. А. ДОБРЯК

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С УПРУГИМИ КОЛЬЦАМИ

Во многих отраслях современной промышленности широко применяются конструкции, элементами которых являются пластинки с инородными включениями. Под действием температурных полей вблизи таких включений могут возникать значительные концентрации напряжений, которые необходимо учитывать при расчете конструкций на прочность. В связи с этим возникает необходимость разработки методов определения термонапряженного состояния кусочно-однородных пластин. Этот вопрос в определенной степени решен для изотропных пластин [1]. Для анизотропных же кусочно-однородных пластинок в достаточной мере такие исследования проведены лишь для случая силовых воздействий [2], а температурные воздействия в силу определенных трудностей оставались неисследованными. В статье [3] разработан подход решения таких задач для пластинки с упругими ядрами. В данной работе аналогичные решения получены для анизотропной пластинки с упругими кольцами.

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную анизотропную пластинку с эллиптическими отверстиями, в которые вставлены упругие кольца из другого анизотропного материала, находящиеся с пластинкой в условиях идеального теплового и механического контактов (рис. 1). Обозначим контуры отверстий и внутренние контуры колец, их полуоси соответственно через L_l и L^l , a_l , b_l и a^l , b^l ($l = \overline{1, L}$), бесконечную область, занимаемую пластинкой, и конечные области колец – через S и S^l . Пластинка находится под действием однородного потока тепла интенсивности q , направленного под углом α к оси Ox , внутренние контуры

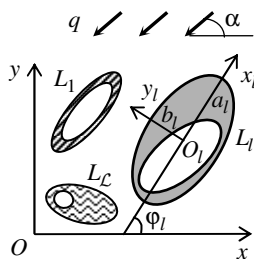


Рис. 1

колец не подкреплены, на них задана температура T_0^l или поток тепла интенсивности q_{n0}^l . Следовательно, на контурах L_l слая пластинки и колец имеют место условия

$$T = T^l, \quad q_n = -q_n^l; \quad (1.1)$$

$$X_n = -X_n^l, \quad Y_n = -Y_n^l, \quad u = u^l, \quad v = v^l, \quad (1.2)$$

выражающие равенства в точках сая температуры и перемещений контактирующих тел и условия идеального теплообмена и противодействия тел друг другу, а на внутренних контурах колец L^l равенства

$$T^l = T_0^l \text{ или } q_n^l = q_{n0}^l; \quad (1.3)$$

$$X_n^l = 0, \quad Y_n^l = 0. \quad (1.4)$$

Здесь и далее величины с индексом "l" вверху относятся к l-ому кольцу, без такого индекса – к пластинке.

2. Решение задачи теплопроводности. Для решения задачи будем использовать комплексные потенциалы $F_3(z_3)$ и $F_3^l(z_3^l)$ задачи теплопроводности для пластинки и колец, которые определим, удовлетворив условиям (1.1) и (1.3). Если эти потенциалы найдены, то температура и поток тепла через произвольные площадки с нормалью \vec{n} в пластинке и в кольцах вычисляются по формулам [3, 4]

$$T = T^* + 2 \operatorname{Re} F_3(z_3), \quad q_n = q_n^* + 2 \operatorname{Re} [i \alpha \delta_3 F_3'(z_3)]; \quad (2.1)$$

$$T^l = 2 \operatorname{Re} F_3^l(z_3^l), \quad q_n^l = 2 \operatorname{Re} [i \alpha^l \delta_3^l F_3^{l'}(z_3^l)]. \quad (2.2)$$

где

$$T^* = q(t_x x + t_y y), \quad q_n^* = -q(\cos \alpha \cos nx + \sin \alpha \cos ny);$$

$$t_x = \frac{k_{22} \cos \alpha - k_{12} \sin \alpha}{\alpha^2}, \quad t_y = \frac{k_{11} \sin \alpha - k_{12} \cos \alpha}{\alpha^2};$$

$$\alpha = \sqrt{k_{11} k_{22} - k_{12}^2}; \quad \delta_3 = \frac{dz_3}{ds} = \frac{dx}{ds} + \mu_3 \frac{dy}{ds};$$

k_{ij} ($i, j=1, 2$) – коэффициенты теплопроводности для материалов; μ_3 – корень характеристического уравнения теплопроводности

$$k_{22} \mu^2 + 2k_{12} \mu + k_{11} = 0.$$

Аналогичные равенства имеют место для величин с индексом "l" вверху.

Учитывая (2.1) и (2.2), граничные условия (1.1) и (1.3) для определения комплексных потенциалов $F_3(z_3)$ и $F_3^l(z_3^l)$ запишем в виде [3, 4]

$$2 \operatorname{Re} [F_3(z_3) - F_3^l(z_3^l)] = -T^*,$$

$$2 \operatorname{Re} [i(\alpha \delta_3 F_3'(z_3) - \alpha^l \delta_3^l F_3^{l'}(z_3^l))] = q_n^* \text{ на } L_l; \quad (2.3)$$

$$2 \operatorname{Re} F_3^l(z_3^l) = T_0^l \text{ или } 2 \operatorname{Re} \left[i a \varepsilon^l \delta_3^l F_3^{\prime l}(z_3^l) \right] = q_{n0}^l \text{ на } L^l. \quad (2.4)$$

Комплексный потенциал $F_3(z_3)$ для многосвязной пластинки определен в области S_3 , получаемой из S аффинным преобразованием $z_3 = x + \mu_3 y$. Для этой функции и ее производной после соответствующих конформных отображений получим [3–5]

$$F_3(z_3) = c_0 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}-1} D_{3l} w_{3l} + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{3ln} \Phi_{3ln}, \quad (2.5)$$

$$F_3'(z_3) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}-1} D_{3l} w'_{3l} + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{3ln} \Phi'_{3ln}, \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} w_{3l} &= \ln \zeta_{3l} - \ln \zeta_{3\mathcal{L}}, \\ w'_{3l} &= \frac{\zeta_{3l}}{R_{3l}(\zeta_{3l}^2 - m_{3l})} - \frac{\zeta_{3\mathcal{L}}}{R_{3\mathcal{L}}(\zeta_{3\mathcal{L}}^2 - m_{3\mathcal{L}})}, \\ \Phi_{3ln} &= \zeta_{3l}^{-n}, \quad \Phi'_{3ln} = -\frac{n}{R_{3l} \zeta_{3l}^{n-1} (\zeta_{3l}^2 - m_{3l})}; \end{aligned} \quad (2.7)$$

ζ_{3l} – переменные, получаемые из конформных отображений внешности единичного круга $|\zeta_{3l}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{3l} [6]

$$z_3 = z_{3l} + R_{3l} \left(\zeta_{3l} + \frac{m_{3l}}{\zeta_{3l}} \right); \quad (2.8)$$

$$z_{3l} = x_{0l} + \mu_3 y_{0l},$$

$$R_{3l} = \left[a_l (\cos \varphi_l + \mu_3 \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_3 \cos \varphi_l) \right] / 2,$$

$$m_{3l} = \left[a_l (\cos \varphi_l + \mu_3 \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_3 \cos \varphi_l) \right] / 2 R_{3l};$$

φ_l – угол наклона оси $O_l x_l$ локальной системы координат, выбранной с началом в центре эллипса L_l с координатами x_{0l} , y_{0l} и направлениями по полуосям эллипса, к оси Ox основной системы координат (рис. 1);

$$D_{3l} = \frac{q_l}{4\pi a \varepsilon}; \quad (2.9)$$

q_l – суммарный поток тепла в область S через контур включения L_l .

Функция $F_3^l(z_3^l)$ определена в кольце S_3^l , получаемом из S^l аффинным преобразованием $z_3^l = x + \mu_3^l y$, и имеет вид [3–5]

$$F_3^l(z_3^l) = D_3^l w_3^l + F_{30}^l(z_3^l) + F_{31}^l(z_3^l), \quad (2.10)$$

где

$$D_3^l = \frac{q^l}{4\pi\alpha^l}, \quad w_3^l = \ln \zeta_{31}^l;$$

$F_{30}^l(z_3^l)$ – функция, голоморфная внутри внешнего контура кольца L_{30}^l , соответствующего контуру L_l в области S^l ; $F_{31}^l(z_3^l)$ – функция, голоморфная вне внутреннего контура кольца L_{31}^l , соответствующего L^l в области S^l . Отобразив конформно внешности внешнего и внутреннего контуров кольца S_3^l на внешность единичного круга [6]

$$z_3^l = z_{30}^l + R_{30}^l \left(\zeta_{30}^l + \frac{m_{30}^l}{\zeta_{30}^l} \right), \quad z_3^l = z_{31}^l + R_{31}^l \left(\zeta_{31}^l + \frac{m_{31}^l}{\zeta_{31}^l} \right),$$

функцию $F_{30}^l(z_3^l)$ разложим в ряд по полиномам Фабера или все равно, что в степенной ряд [4], а $F_{31}^l(z_3^l)$ – в ряд по отрицательным степеням переменной ζ_{31}^l . Окончательно для функции (2.10) и ее производной получим

$$F_3^l(z_3^l) = c_{30}^l + D_3^l w_3^l + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{30n}^l \Psi_{3n}^l + c_{31n}^l \Phi_{3n}^l), \quad (2.11)$$

$$F_3^{\prime l}(z_3^l) = D_3^l w_3^{\prime l} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{30n}^l \Psi_{3n}^{\prime l} + c_{31n}^l \Phi_{3n}^{\prime l}), \quad (2.12)$$

где

$$\Psi_{3n}^l = \left(\frac{z_3^l - z_{3l}^l}{R_{30}^l} \right)^n, \quad \Phi_{3n}^l = (\zeta_{31}^l)^{-n}, \quad w_3^{\prime l} = \frac{\zeta_3^l}{R_3^l \left((\zeta_3^l)^2 - m_3^l \right)},$$

$$\Psi'_{3n} = n \frac{(z_3^l - z_{30}^l)^{n-1}}{(R_3^l)^n}, \quad \Phi'_{3n} = -\frac{n}{R_3^l (\zeta_3^l)^{n-1} \left((\zeta_3^l)^2 - m_3^l \right)}.$$

Заметим, что в связи с равенством суммарных потоков тепла через внешний и внутренний контуры кольца ($q_l = q^l$) получается, что коэффициенты D_{3l} и D_3^l связаны друг с другом формулой

$$\alpha^l D_3^l = \alpha D_{3l}. \quad (2.13)$$

Неизвестные постоянные c_0 и c_{30}^l (вещественные в силу определенности комплексных потенциалов теплопроводности с точностью до чисто мнимой постоянной [4]), D_{3l} (вещественные в силу формулы (2.9)), c_{3ln} , c_{30n}^l и c_{31n}^l (в общем случае комплексные) определим из граничных условий (2.3) и (2.4). Для их определения на контуре слая пластинки и кольца L_l выберем систему из M_l точек $M_{lm}(x_{lm}, y_{lm})$ ($m = \overline{1, M_l}$), в которых удовлетворим условиям (2.3), а на внутреннем контуре кольца L^l – систему из M^l точек $M_m^l(x_{0m}^l, y_{0m}^l)$ ($m = \overline{1, M^l}$) в которых удовлетворим условиям (2.4). С учетом функций (2.5), (2.6), (2.11) и (2.12) окончательно получим

$$\begin{aligned} & 2c_0 - 2c_{30}^l + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}-1} D_{3l} \left(w_l(t_{3lm}) + \overline{w_l(t_{3lm})} \right) - \\ & - D_3^l \left(w^l(t_{3m}^l) + \overline{w^l(t_{3m}^l)} \right) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_{3ln} \Phi_{3ln}(t_{3lm}) + \right. \\ & + \overline{c_{3ln}} \overline{\Phi_{3ln}(t_{3lm})} \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_{31n}^l \Phi_{3n}^l(t_{3m}^l) + \overline{c_{31n}^l} \overline{\Phi_{3n}^l(t_{3m}^l)} \right) + \right. \\ & \left. + c_{30n}^l \Psi_{3n}^l(t_{3m}^l) + \overline{c_{30n}^l} \overline{\Psi_{3n}^l(t_{3m}^l)} \right) = -T^*, \\ & \sum_{l=1}^{\mathcal{L}-1} D_{3l} i \left(\alpha \delta_3 w_l'(t_{3lm}) - \alpha \overline{\delta_3} \overline{w_l'(t_{3lm})} \right) - \\ & - D_3^l i \left(\alpha^l \delta_3^l w'^l(t_{3m}^l) - \alpha^l \overline{\delta_3^l} \overline{w'^l(t_{3m}^l)} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} i \left(\alpha \delta_3 c_{31n} \phi'_{3ln} (t_{3lm}) - \alpha \bar{\delta}_3 \bar{c}_{31n} \overline{\phi'_{3ln} (t_{3lm})} \right) - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} i \left(\alpha \delta_3^l c_{31n}^l \phi'_{3n} (t_{3m}^l) - \alpha \bar{\delta}_3^l \bar{c}_{31n}^l \overline{\phi'_{3n} (t_{3m}^l)} \right) + \\
& + \alpha \delta_3^l c_{30n}^l \psi'_{3n} (t_{3m}^l) - \alpha \bar{\delta}_3^l \bar{c}_{30n}^l \overline{\psi'_{3n} (t_{3m}^l)} = \\
& = q_n^* \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, M_l}); \tag{2.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2c_{30}^l + D_3^l \left(w^l (t_{03m}^l) + \overline{w^l (t_{03m}^l)} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_{31n}^l \phi_{3n}^l (t_{03m}^l) + \right. \\
& \left. + \bar{c}_{31n}^l \overline{\phi_{3n}^l (t_{03m}^l)} + c_{30n}^l \psi_{3n}^l (t_{03m}^l) + \bar{c}_{30n}^l \overline{\psi_{3n}^l (t_{03m}^l)} \right) = \\
& = T_0^l \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, M^l}). \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Условие (2.15) выписано для случая задания на внутреннем контуре кольца L^l температуры. Если на этом контуре задана интенсивность потока тепла, то вместо второго уравнения системы получится уравнение

$$\begin{aligned}
& D_3^l i \left(\delta_3^l w^l (t_{03m}^l) - \bar{\delta}_3^l \overline{w^l (t_{03m}^l)} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} i \left(\delta_3^l c_{31n}^l \phi'_{3n} (t_{03m}^l) - \right. \\
& \left. - \bar{\delta}_3^l \bar{c}_{31n}^l \overline{\phi'_{3n} (t_{03m}^l)} + \delta_3^l c_{30n}^l \psi'_{3n} (t_{03m}^l) - \bar{\delta}_3^l \bar{c}_{30n}^l \overline{\psi'_{3n} (t_{03m}^l)} \right) = \\
& = \frac{q_{n0}^l}{\alpha^l} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, M^l}). \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Здесь $t_{3lm} = x_{lm} + \mu_3 y_{lm}$, $t_{3m}^l = x_{lm} + \mu_3^l y_{lm}$, $t_{03m}^l = x_{0m}^l + \mu_3^l y_{0m}^l$.

Уравнения (2.14)–(2.16) можно рассматривать как систему из $R = 2M_{\mathcal{L}} + M^{\mathcal{L}}$, где $M_{\mathcal{L}} = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} M_l$, $M^{\mathcal{L}} = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} M^l$, линейных уравнений для определения вещественных постоянных c_0 , c_{30}^l , D_{3l} и комплексных постоянных c_{3ln} , b_{3n}^l , c_{3n}^l . Каждое уравнение этой системы содержит множе-

ство неизвестных. Если в рядах (2.5), (2.11) оставлять по N членов, то каждое уравнение будет содержать $Q = 2\mathcal{L}(3N + 1)$ вещественных неизвестных, причем должно выполняться неравенство $R \geq Q$. Заметим, что если количество точек R и количество неизвестных Q одинаково, то мы будем иметь метод колокаций.

Систему (2.14) – (2.16) будем решать обобщенным методом наименьших квадратов с использованием сингулярного разложения [7, 8].

3. Решение задачи термоупругости. Для решения задачи термоупругости будем использовать комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ и $\Phi_k^I(z_k^I)$

($k = 1, 2$) для пластинки и колец, которые удовлетворяют определенным граничным условиям, следующим из (1.2) и (1.4). Если эти потенциалы найдены, то напряжения и перемещения вычисляются по формулам [3, 4]

$$\begin{aligned} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}) \Phi_k'(z_k), \\ (u, v) &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_k, q_k) \Phi_k(z_k) + (u^* + u_0, v^* + v_0); \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} p_k &= a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k + \frac{\delta_3^k \alpha_1}{r_3}, \\ q_k &= a_{12}\mu_k + \frac{a_{22}}{\mu_k} - a_{26} + \frac{\delta_3^k \alpha_2}{r_3\mu_k}; \\ \lambda_{1k} &= \mu_k^2, \quad \lambda_{2k} = 1, \quad \lambda_{6k} = -\mu_k; \\ \delta_k &= \frac{dz_k}{ds} = \frac{dx}{ds} + \mu_k \frac{dy}{ds}; \\ u^*(x, y) &= q \left(\frac{\alpha_1 t_x}{2} x^2 - \frac{\alpha_2 t_x - \alpha_6 t_y}{2} y^2 + \alpha_1 t_y xy \right), \\ v^*(x, y) &= q \left(\frac{\alpha_2 t_y}{2} y^2 - \frac{\alpha_1 t_y - \alpha_6 t_x}{2} x^2 + \alpha_2 t_x xy \right); \end{aligned}$$

a_{ij} ($i, j=1, 2, 6$) – коэффициенты деформации для материала пластинки; μ_k – корни характеристического уравнения термоупругости

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0,$$

Аналогичные равенства имеют место для величин с индексом “ l ” сверху.

Учитывая формулы (3.1), условия (1.2) и (1.4) для определения комплексных потенциалов $\Phi_k(z_k)$ и $\Phi_k^l(z_k^l)$ запишем в виде [3, 4]

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left[(\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, p_k, q_k) \delta_k \Phi_k'(t_k) - (\lambda_{6k}^l, \lambda_{2k}^l, p_k^l, q_k^l) \delta_k^l \Phi_k'^l(t_k) \right] = \\ = (0, 0, -du^*/ds, -dv^*/ds) \text{ на } L_l; \quad (3.2)$$

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left[(\lambda_{6k}^l, \lambda_{2k}^l) \delta_k^l \Phi_k'^l(t_k^l) \right] = (0, 0) \text{ на } L^l, \quad (3.3)$$

Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ для многосвязной пластинки определены в областях S_k , получаемых из S аффинными преобразованиями $z_k = x + \mu_k y$. Для этих функций и их производных после соответствующих конформных отображений получим [3-5]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + A_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \Phi_{kln}, \quad (3.4)$$

$$\Phi_k'(z_k) = \Gamma_k + A_k'(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \Phi_{kln}', \quad (3.5)$$

где

$$A_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln \zeta_{kl}, \\ A_k'(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[A_{kl} \ln \zeta_{kl} + \frac{(A_{kl} z_k + B_{kl}) \zeta_{kl}}{R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \right],$$

где Γ_k , A_{kl} , B_{kl} – постоянные, определяемые по известным формулам [3-5]; Φ_{kln} , Φ_{kln}' и ζ_{kl} – функции, вычисляемые по формулам (2.7) и (2.8), если в них индекс 3 заменить на k .

Функции $\Phi_k^l(z_k^l)$ определены в кольцах S_k^l , получаемых из S^l аффинным преобразованием $z_k^l = x + \mu_k^l y$. Поступая таким же образом, как это сделано для комплексного потенциала теплопроводности $F_3^l(z_3^l)$, для

функций $\Phi_k^l(z_k^l)$ и их производных получим [3-5]

$$\Phi_k^l(z_k^l) = A_k^l(z_k^l) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{k0n}^l \Psi_{kn}^l + a_{k1n}^l \Phi_{kn}^l), \quad (3.6)$$

$$\Phi_k^{\prime l}(z_k^l) = A_k^{\prime l}(z_k^l) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{k0n}^{\prime l} \Psi_{kn}^{\prime l} + a_{k1n}^{\prime l} \Phi_{kn}^{\prime l}),$$

где

$$A_k^l(z_k^l) = (A_k^l z_k^l + B_k^l) \ln \zeta_k^l,$$

$$A_k^{\prime l}(z_k^l) = A_k^l \ln \zeta_k^l + \frac{(A_k^l z_k^l + B_k^l) \zeta_k^l}{R_k^l \left((\zeta_k^l)^2 - m_k^l \right)}.$$

Для определения неизвестных постоянных, входящих в функции (3.4) и (3.6), как и для задачи теплопроводности, запишем граничные условия задачи термоупругости (3.2) в каждой точке спая пластинок и колец, а также условия (3.3) в каждой точке внутренних контуров колец:

$$\sum_{k=1}^2 \left[\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varepsilon_k a_{kln} \Phi_{kln}^{\prime}(t_{klm}) + \bar{\varepsilon}_k \bar{a}_{kln} \overline{\Phi_{kln}^{\prime}(t_{klm})} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varepsilon_k^l (a_{k1n}^l \Phi_{kn}^{\prime l}(t_{klm}^l) + a_{k0n}^l \Psi_{kn}^{\prime l}(t_{klm}^l)) + \bar{\varepsilon}_k^l \left(\bar{a}_{k1n}^l \overline{\Phi_{kn}^{\prime l}(t_{klm}^l)} + a_{k0n}^l \overline{\Psi_{kn}^{\prime l}(t_{klm}^l)} \right) \right) \right] =$$

$$- \sum_{k=1}^2 \left[\varepsilon_k (\Gamma_k + A_k^{\prime}(t_{klm})) + \bar{\varepsilon}_k (\bar{\Gamma}_k + \overline{A_k^{\prime}(t_{klm})}) - \varepsilon_k^l A_k^{\prime l}(t_{klm}^l) - \bar{\varepsilon}_k^l \overline{A_k^{\prime l}(t_{klm}^l)} \right] - \varepsilon_3 r_3 F_3(t_{3lm}) - \bar{\varepsilon}_3 \bar{r}_3 \overline{F_3(t_{3lm})} + \varepsilon_3^l r_3^l F_3^l(t_{3m}^l) + \bar{\varepsilon}_3^l \bar{r}_3^l \overline{F_3^l(t_{3m}^l)} + (0, 0, -du^*/ds, -dv^*/ds) \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, M_l}),$$

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\gamma_k^l a_{k1n}^l \Phi_{kn}^{\prime l}(t_{0km}^l) + \bar{\gamma}_k^l \bar{a}_{k1n}^l \overline{\Phi_{kn}^{\prime l}(t_{0km}^l)} + \gamma_k^l a_{k0n}^l \Psi_{kn}^{\prime l}(t_{0km}^l) + \bar{\gamma}_k^l \bar{a}_{k0n}^l \overline{\Psi_{kn}^{\prime l}(t_{0km}^l)} \right) = - \sum_{k=1}^2 \left(\gamma_k^l A_k^{\prime l}(t_{0km}^l) + \bar{\gamma}_k^l \overline{A_k^{\prime l}(t_{0km}^l)} \right) -$$

$$-\gamma_3^l r_3^l F_3^l(t_{03m}^l) - \overline{\gamma_3^l r_3^l F_3^l(t_{03m}^l)} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, M^l}), \quad (3.7)$$

где

$$\varepsilon_k = (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, p_k, q_k) \delta_k, \quad \gamma_k^l = (\lambda_{6k}^l, \lambda_{2k}^l) \delta_k^l,$$

$$t_{klm} = x_{lm} + \mu_k y_{lm}, \quad t_{km}^l = x_{lm} + \mu_k^l y_{lm}, \quad t_{0km}^l = x_{0m}^l + \mu_k^l y_{0m}^l.$$

Уравнения (3.7) можно рассматривать как систему из $R = 4M_{\mathcal{L}} + 2M^{\mathcal{L}}$ линейных уравнений с $Q = 12\mathcal{L}N$ вещественными неизвестными для определения комплексных постоянных $a_{kln}^l, a_{k0n}^l, a_{k1n}^l$. Систему (3.7) будем решать также обобщенным методом наименьших квадратов с использованием сингулярного разложения.

4. Численные исследования. Численные исследования были проведены для пластинки с одним круговым кольцом (рис. 2, а) и с двумя одинаковыми круговыми кольцами (рис. 2, б) при действии на бесконечности линейного потока тепла плотности q под углом $\alpha = \pi/2$, когда на внутренних

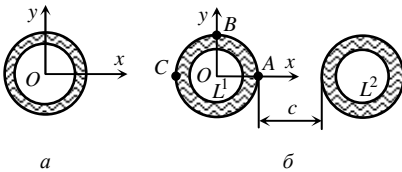


Рис. 2

контурах колец температура равна нулю или они теплоизолированы. Рассматривалась также задача для пластинки с двумя одинаковыми круговыми кольцами при отсутствии на бесконечности потока тепла и задании на внутренних контурах колец температур T_0^1 и T_0^2 . Считалось, что пластинка изготовлена из

изотропного материала М1 или ортотропного М5, постоянные для которых приведены в табл. 1 [4, 9], где $a_0 = 10^{-4}$ МПа $^{-1}$, $\alpha_0 = 10^{-5}$ К $^{-1}$,

Таблица 1

Величина		$\frac{a_{11}}{a_0}$	$\frac{a_{22}}{a_0}$	$\frac{a_{12}}{a_0}$	$\frac{a_{66}}{a_0}$	$\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$	$\frac{\alpha_2}{\alpha_0}$	$\frac{k_{11}}{k_0}$	$\frac{k_{22}}{k_0}$
Материалы	М1	72,10	72,1	-8,6	161,5	3	3	0,2095	0,210
	М5	0,435	0,175	-0,115	1,15	0,4	3,7	0,7123	1,257

$k_0 = 1$ Вт/(М·К). Термомеханические постоянные для колец связаны с соответствующими постоянными для пластинки соотношениями

$$k_{ij}^l = 0,5 k_{ij}, \quad a_{ij}^l = 0,5 a_{ij}, \quad \alpha_i^l = 0,5 \alpha_i \quad (i, j = 1, 2, 6). \quad (4.1)$$

Ниже описаны некоторые из полученных результатов, причем если на бес-

конечности задан поток тепла плотности q , то значения всех величин приведены с точностью до множителя q , если же поток тепла на бесконечности отсутствует, а на внутренних контурах колец задана температура, то значения величин даны с точностью до множителя $T_0^2 - T_0^1$.

На рис. 3 и 4 для пластинки с одним круговым кольцом (рис. 2, а) с радиусами внешнего и внутреннего контуров R_0 и R_1 при действии однородного потока тепла на бесконечности для некоторых значений отношения R_1/R_0 изображены графики распределения нормальных напряжений в пластинке σ_s вблизи точек сая на площадках, перпендикулярных контуру. Данные рис. 3 и рис. 4 относятся к материалам М1 и М5. Сплошные линии

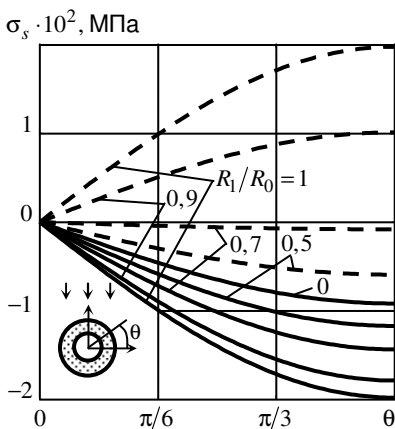


Рис. 3

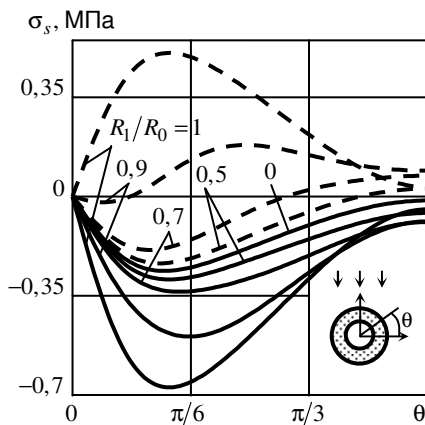


Рис. 4

соответствуют случаю, когда внутренний контур кольца теплоизолирован, штриховые – когда на внутреннем контуре задана нулевая температура. Значения $R_1/R_0 = 0$ и $R_1/R_0 = 1$ соответствуют случаям пластинки со сплошным ядром и пластинки с отверстием радиуса R_0 . Из рис. 3 и рис. 4 можно видеть, что в пластинке вблизи контура кольца наибольшие напряжения σ_s по модулю для изотропного материала возникают при значении центрального угла $\theta = \pi/2$, для ортотропного материала М5 – в точках вблизи угла $\theta = \pi/6$. Если при действии однородного потока тепла на внутреннем контуре кольца задана температура (равная нулю), то для $R_1/R_0 \geq 0,9$ напряжения $\sigma_s > 0$, а для $R_1/R_0 < 0,9$ напряжения $\sigma_s < 0$. В случае теплоизолированного внутреннего контура кольца напряжения σ_s в

пластинке вблизи контура кольца всегда отрицательны. Из рис. 3, 4 и других полученных результатов также следует, что при значении $R_1/R_0 < 0,1$ кольцо можно считать сплошным ядром, а при $R_1/R_0 > 0,99$ влиянием кольца можно пренебречь; для пластинки со сплошным ядром получаемые результаты совпадают с известными [3, 10].

На рис. 5 и 6 для пластинки с двумя одинаковыми круговыми кольцами с теплоизолированными внутренними контурами при действии на бесконечности однородного потока тепла изображены графики распределения напряжений σ_s в пластинке вблизи контура левого кольца для различных значений c/R_0 . Данные рис 5 относятся к материалу М1, рис. 6 – к мате-

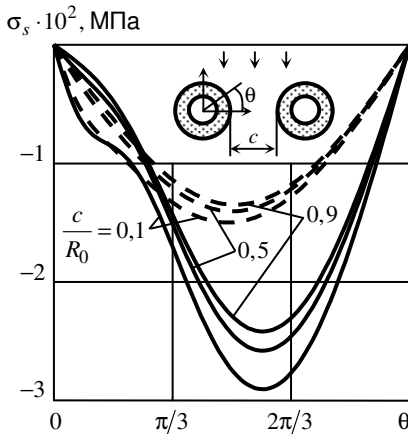


Рис. 5

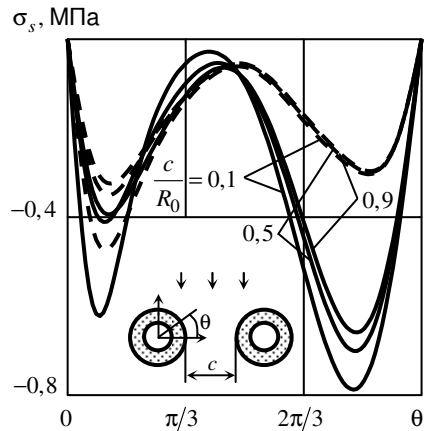


Рис. 6

риалу М5. Сплошные и штриховые линии соответствуют значению отношения R_1/R_0 , равным 0,9 и 0,5. Из рис. 5 и 6 видно, что при сближении колец друг с другом значения напряжений в пластинке около контуров колец уменьшаются, причем чем меньше ширина колец, тем больше влияние расстояния между ними. При расстояниях между кольцами, больших их внешних радиусов, влиянием одного кольца на напряженное состояние около другого можно пренебречь. Заметим, что для весьма узких колец ($0,99 < R_1/R_0 < 1$) значения напряжений оказываются такими же, как и в случае пластинки с двумя отверстиями [5].

В табл. 2 для пластинки с двумя одинаковыми круговыми кольцами, на внутренних контурах которых поддерживается температура T_0^1 и T_0^2 при отсутствии потока тепла на бесконечности, приведены значения напряжений σ_s в некоторых характерных точках пластинки в зависимости от от-

Таблица 2

Материал	Точка	Величина	R_1/R_0	c/R_0			
				10	1	0,5	0,1
M1	A	$\sigma_s \cdot 10^2$	0,10	-0,0245	-0,0660	-0,0775	-0,0838
			0,50	0,0383	-0,0258	-0,0477	-0,0695
			0,90	0,2005	0,1774	0,1375	0,0225
			0,99	0,2838	0,3664	0,3807	0,3199
			1,00	0,2959	0,4030	0,4400	0,5014
	B		0,10	-0,0287	-0,0482	-0,0504	-0,0530
			0,50	0,0295	-0,0001	-0,0047	-0,0093
			0,90	0,1131	0,0736	0,0670	0,0618
			0,99	0,1263	0,0704	0,0615	0,0550
			1,00	0,1268	0,0681	0,0589	0,0521
	C		0,10	-0,0198	-0,0374	-0,0398	-0,0423
			0,50	0,0457	0,0278	0,0250	0,0223
			0,90	0,1996	0,2045	0,2026	0,1991
			0,99	0,2724	0,2937	0,2932	0,2904
			1,00	0,2826	0,3063	0,3060	0,3034
M5	A	σ_s	0,10	-0,2175	-0,3924	-0,4491	-0,5541
			0,50	0,0010	-0,2693	-0,3708	-0,5329
			0,90	0,7320	0,5949	0,4254	-0,1034
			0,99	1,4438	1,7194	1,7792	1,5070
			1,00	1,6055	1,9947	2,1608	2,4903
	B		0,10	0,0529	0,0388	0,0367	0,0350
			0,50	0,1106	0,0957	0,0926	0,0898
			0,90	0,0448	0,0079	-0,0009	-0,0075
			0,99	-0,0326	-0,0964	-0,1102	-0,1198
			1,00	-0,0465	-0,1149	-0,1293	-0,1392
	C		0,10	-0,1981	-0,2759	-0,2859	-0,2949
			0,50	0,0312	-0,0506	-0,0630	-0,0748
			0,90	0,7391	0,7449	0,7382	0,7253
			0,99	1,4174	1,4983	1,4974	1,4847
			1,00	1,5718	1,6674	1,6676	1,6559

ношений c/R_0 и R_1/R_0 . Значения R_1/R_0 , равные 1, соответствуют случаю пластинки с двумя отверстиями радиуса R_0 [5]. Видно, что уменьшение ширины кольца и сближение колец друг с другом приводят к значительным изменениям значений напряжений в пластинке около контуров колец. При $R_1/R_0 > 0,99$ значения напряжений близки к тем, которые получаются для пластинки с двумя отверстиями, на контурах которых поддерживается температура T_1 и T_2 .

РЕЗЮМЕ. З використанням узагальнених комплексних потенціалів розв'язана задача термопружності для пластинки з пружними кільцями. Задача зведена до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які отримуються з граничних умов для множини точок контурів середовища. Система розв'язується узагальненим методом найменших квадратів з використанням сингулярного розкладання. Наведено результати чисельних досліджень з їхнім аналізом для пластинки з одним та двома круговими кільцями із ізотропного чи анізотропного матеріалу.

SUMMARY. The thermoelasticity problem for plate with rings with using generalized complex potentials was solved. The problem was reduced to linear algebraic equations system which is followed from the boundary conditions for points set on contours of a region. A system was solved by generalized least-squares method with using singular decomposition. Numeric results with their analysis for isotropic or anisotropic plate with one and two circular rings were presented.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. *Космодамианский А. С., Лозинский В. Н.* Термоупругая задача для круглой пластинки с регулярно расположенными круговыми отверстиями, в которые вставлены упругие кольца // Прикладная механика. – 1971. – Т. 7, № 4. – С. 58–65. 2. Калоеров С. А., Горянская Е. С., Качан Ю. Б. Напряженное состояние кусочно-однородного анизотропного тела с плоскими трещинами или жесткими включениями и упругими кольцами // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. – 2001. – Вип. 2. – С. 31–39. 3. *Калоеров С. А., Добряк Д. А.* Термоупругое состояние кусочно-однородной анизотропной пластинки // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2006. – Вип. 2. – С. 77–88. 4. *Космодамианский А. С., Калоеров С. А.* Температурные напряжения в многосвязных пластинках. – Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с. 5. *Калоеров С. А., Антонов Ю. С.* Термоупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами при действии линейного потока тепла и температуры на контурах // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вип. 40. – С. 102–116. 6. *Калоеров С. А., Горянская Е. С.* Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений. – К.: А.С.К., 1997. – С. 10–26. (Механика композитов: В 12 т. Т. 7). 7. *Воеводин В. В.* Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1977. – 304 с. 8. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моултер К.* Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 280 с. 9. *Акустические кристаллы.* Справочник / Блистанов А. А., Бондаренко В. С., Чкалова В. В. и др.; Под ред. М. П. Шаскольской. – М.: Наука, 1982. – 632 с. 10. *Гайвась И. В.* Температурные напряжения, обусловленные возмущением однородного теплового потока в окрестности макровключений // Прикладная механика. – 1966. – Т. 2, № 2. – С. 81–90.

Донецкий национальный университет

Поступила 05.09.2009

И. А. ЛОЗА, канд. физ.-мат. наук

ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА СПЕКТР СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ С ОКРУЖНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ

В работах [1–5] рассматривались задачи о собственных продольных осесимметричных колебаниях пьезокерамических цилиндров. Широкое использование для решения таких задач получил метод [6–9], основанный на комбинации метода сплайн-коллокаций и метода пошагового поиска для исследования напряженно-деформированного состояния и анализа спектра собственных частот колебаний упругих тел. С применением этого метода в статье [10] исследовались собственные осесимметричные колебания полых пьезокерамических цилиндров с поляризацией пьезокерамики в осевом направлении. В данной статье изучаются крутильные колебания пьезокерамического цилиндра, исследуются влияния электрических граничных условий на боковых поверхностях на спектр собственных частот колебаний цилиндров конечной длины, поляризованной в окружном направлении.

Постановка и решение задачи. Рассмотрим задачу о крутильных колебаниях пьезокерамического цилиндра конечной длины, поляризованного в окружном направлении. Боковые поверхности цилиндра свободны от внешних механических воздействий и покрыты тонкими закороченными электродами или неэлектропроводны. На торцах цилиндра рассматриваются условия жесткого заземления.

В цилиндрической системе координат для крутильных колебаний уравнения движения, электростатики и соотношения Коши имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_{\theta} = 0; \quad \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r} D_r + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0;$$

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} \right), \quad \varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z}. \quad (1)$$

Физические соотношения для пьезокерамического материала, поляризованного в окружном направлении, в цилиндрической системе координат (r, θ, z) будут такими:

$$\sigma_{r\theta} = 2c_{55}\varepsilon_{r\theta} - e_{15}E_r, \quad \sigma_{z\theta} = 2c_{55}\varepsilon_{z\theta} - e_{15}E_z,$$

$$D_r = 2e_{15}\varepsilon_{r\theta} + \varepsilon_{11}E_r, \quad D_z = 2e_{15}\varepsilon_{z\theta} + \varepsilon_{11}E_z. \quad (2)$$

Граничные условия на боковых поверхностях цилиндра (при $r = R_+$ и $r = R_-$) имеют вид $\sigma_{r\theta} = 0$ (поверхности свободны от внешних усилий) и

$\varphi = 0$ (покрыты тонкими электродами, которые закорочены) или $D_r = 0$ (поверхности неэлектродированы). Торцы цилиндра (при $z = \pm L/2$) жестко заземлены: $u_\theta = 0$; и покрыты тонкими короткозамкнутыми электродами: $\varphi = 0$. Здесь R_+ – внешний радиус цилиндра; R_- – внутренний радиус цилиндра; L – длина цилиндра.

Разрешив уравнения (1) относительно вторых производных по координате r , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \left(1 + \frac{\tilde{\epsilon}_{15}^2}{\Delta}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \left(\frac{\tilde{c}_{55}}{r^2} - \Omega^2\right) \frac{\tilde{\epsilon}_{15}}{\Delta} u_\theta - \frac{\tilde{\epsilon}_{15} \tilde{c}_{55}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z}; \\ \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} &= -\frac{\tilde{\epsilon}_{15} \tilde{\epsilon}_{11}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \left(\frac{\tilde{c}_{55}}{r^2} - \Omega^2\right) \frac{\tilde{\epsilon}_{11}}{\Delta} u_\theta - \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{\tilde{c}_{55} \tilde{\epsilon}_{11}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r}; \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$\Delta = \tilde{c}_{55} \tilde{\epsilon}_{11} + \tilde{\epsilon}_{15}^2, \quad \Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}, \quad \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\lambda}, \quad \tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{\epsilon_0 \lambda}}, \quad \tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon_0};$$

ω – круговая частота; $\lambda = 10^{10} Pa$; ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума; ρ – плотность материала; h – половина толщины цилиндра.

Используя метод разделения переменных, функции будем искать в виде

$$\varphi(r, z) = \sum_{i=0}^N v_i(x) \Phi_i(z), \quad u_\theta(r, z) = \sum_{i=0}^N u_i(x) \Phi_i(z), \quad (4)$$

в котором $x = (r - R_0)/h$; $R_0 = 0,5(R_+ + R_-)$; $u_i(x)$, $v_i(x)$ – искомые функции; $\Phi_{ji}(z)$ ($i = \overline{0, N}$) – линейные комбинации В-сплайнов на равномерной сетке Δ ; $-L/2 = z_0 < z_1 < \dots < z_n = L/2$.

Принимая во внимание граничные условия на торцах цилиндра при $z = -L/2$ и $z = L/2$, можно заметить, что в систему входят производные от компонент вектора решения не выше второго порядка, следовательно, можно ограничиться аппроксимацией сплайн-функциями третьего порядка.

Если вводить обозначения

$$\begin{aligned} \Phi &= [\Phi_i(\xi_k)] \quad (k, i = \overline{0, N}, j = 1, 2), \quad \bar{u} = [u_0, u_1, \dots, u_N]^T, \\ \bar{v} &= [v_0, v_1, \dots, v_N]^T \quad (k, l) \in \{(k, l) | k, l = \overline{1, 4}\}; \\ \bar{a}_{kl}^T &= \{a_{kl}(x, \xi_0, \Omega^2), a_{kl}(x, \xi_1, \Omega^2), \dots, a_{kl}(x, \xi_N, \Omega^2)\}, \end{aligned} \quad (5)$$

то система (3) превратится в систему $(N + 1)$ линейных дифференциальных уравнений относительно функций u , \tilde{u} , v , \tilde{v} :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dx} &= \bar{u}, & \frac{d\tilde{u}}{dx} &= \Phi^{-1} [\bar{a}_{11}\Phi''\bar{u} + \bar{a}_{12}\Phi\tilde{u} + \bar{a}_{13}\Phi\bar{v} + \bar{a}_{14}\Phi\tilde{v}], \\ \frac{d\bar{v}}{dx} &= \bar{v}, & \frac{d\tilde{v}}{dx} &= \Phi^{-1} [\bar{a}_{21}\Phi\tilde{u} + (\bar{a}_{22}\Phi + \bar{a}_{23}\Phi'')\bar{v} + \bar{a}_{24}\Phi\tilde{v}]. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= -1, & \bar{a}_{12} &= -\left(1 - \frac{\tilde{e}_{15}^2}{\Delta}\right) \frac{1}{x}, & \bar{a}_{13} &= \frac{\tilde{e}_{15}}{\Delta} \left(\frac{\tilde{c}_{55}}{x^2} - \Omega^2\right), \\ \bar{a}_{14} &= -\frac{\tilde{e}_{15}\tilde{c}_{55}}{\Delta} \frac{1}{x}, & \bar{a}_{22} &= -\frac{\tilde{e}_{15}\tilde{e}_{11}}{\Delta} \frac{1}{x}, & \bar{a}_{23} &= \frac{\tilde{e}_{11}}{\Delta} \left(\frac{\tilde{c}_{55}}{x^2} - \Omega^2\right), \\ \bar{a}_{24} &= \frac{\tilde{e}_{11}}{\Delta} \left(\frac{\tilde{c}_{55}}{x^2} - \Omega^2\right), & \bar{a}_{25} &= -\frac{\tilde{c}_{55}\tilde{e}_{11}}{\Delta} \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Эту систему можно привести к виду

$$d\bar{R}/dx = A(x, \Omega)\bar{R}. \quad (7)$$

Для ненулевых элементов матрицы A имеем

$$\begin{aligned} A_{12} &= 1, & A_{21} &= \Phi^{-1}\bar{a}_{11}\Phi'', & A_{22} &= \Phi^{-1}\bar{a}_{12}\Phi, & A_{23} &= \Phi^{-1}\bar{a}_{13}\Phi, \\ A_{24} &= \Phi^{-1}\bar{a}_{14}\Phi, & A_{34} &= 1, & A_{42} &= \Phi^{-1}\bar{a}_{21}\Phi, \\ A_{43} &= \Phi^{-1}(\bar{a}_{22}\Phi + \bar{a}_{23}\Phi''), & A_{44} &= \Phi^{-1}\bar{a}_{24}\Phi. \end{aligned}$$

Граничные условия будут иметь вид:

$$B_{12} = \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}}\Phi, \quad B_{13} = -\frac{1}{x}\Phi, \quad B_{14} = \Phi, \quad B_{21} = \Phi.$$

Анализ результатов численных расчетов. На рис. 1 представлена зависимость первых пяти частот собственных колебаний от относительной длины цилиндра L/h ($R_+ = 5,0$; $R_- = 3,0$), материал цилиндра: пьезокерамика PZT 4, боковые его поверхности покрыты тонкими короткозамкнутыми электродами, торцы жестко закреплены и покрыты тонкими короткозамкнутыми электродами. Цифрами от 1 до 5 пронумерованы первые частот (в порядке возрастания) собственных колебаний пьезокерамического цилиндра без учета пьезоэффекта ($e_{ij} = 0$). Цифрами от 6 до 10 пронумерованы первые частот (в порядке возрастания) собственных колебаний пьезокерамического цилиндра с учетом пьезоэффекта. Из рис. 1 видно, что влияние пьезоэффекта приводит к «ужесточению» материала, т.е. повыше-

нию значения собственных частот. При этом при определении первой собственной частоты влиянием пьезоэффекта можно пренебречь вплоть до относительной длины $L/h = 5$. Для второй частоты заметное влияние пьезоэффекта наблюдается для достаточно длинных цилиндров ($L/h < 8$). Для более высоких частот это влияние заметно в случае более длинных цилиндров.

На рис. 2 представлена зависимость первых пяти частот собственных колебаний от относительной длины цилиндра L/h ($R_+ = 5,0$; $R_- = 3,0$). Материал цилиндра: пьезокерамика PZT 4, боковые поверхности свободны

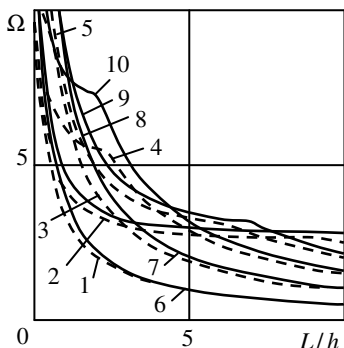


Рис. 1.

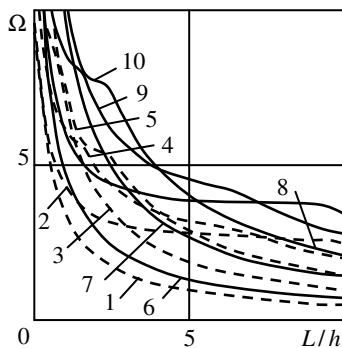


Рис. 2.

от электродов, торцы жестко закреплены и покрыты тонкими короткозамкнутыми электродами. Цифрами от 1 до 5 пронумерованы первые частот (в порядке возрастания) собственных колебаний пьезокерамического цилиндра без учета пьезоэффекта ($e_{ij} = 0$). Цифрами от 6 до 10 пронумерованы первые частот (в порядке возрастания) собственных колебаний пьезокерамического цилиндра с учетом пьезоэффекта. Видно, что влияние пьезоэффекта также приводит к «ужесточению» материала. Однако в отличие от случая, когда боковые поверхности порыты короткозамкнутыми электродами, влияние пьезоэффекта здесь является более существенным даже для первой собственной частоты и для достаточно длинных цилиндров.

На рис. 3 представлена зависимость первых пяти собственных частот от внутреннего диаметра цилиндра (R_-), при этом длина цилиндра ($L = 5$) и внешний диаметр ($R_+ = 5$) остаются фиксированными. Рассматривается изменение внутреннего диаметра в широком диапазоне от 0,05 до 4,95 безразмерных единиц. Материал цилиндра так же пьезокерамика PZT 4, боковые поверхности покрыты тонкими короткозамкнутыми электродами, торцы жестко закреплены и покрыты тонкими короткозамкнутыми электродами. Цифрами от 1 до 5 пронумерованы первые частот (в порядке возрастания) собственных колебаний пьезокерамического цилиндра без учета

пьезоэффекта ($e_{ij} = 0$). Цифрами от 6 до 10 пронумерованы первые частот (в порядке возрастания) собственных колебаний пьезокерамического цилиндра с учетом пьезоэффекта. С увеличением частоты происходит плавное увеличение собственной частоты по сравнению с упругим материалом и некоторое усложнение характера спектра собственных частот. Первая собственная частота пьезокерамического цилиндра мало отличается от первой собственной частоты для упругого цилиндра.

На рис. 4 представлена зависимость первых пяти собственных частот от внутреннего диаметра цилиндра (R_-) для случая, когда боковые поверхности не электродированы. Цифрами от 1 до 5 пронумерованы первые

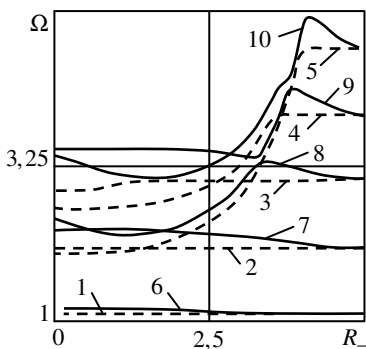


Рис. 3

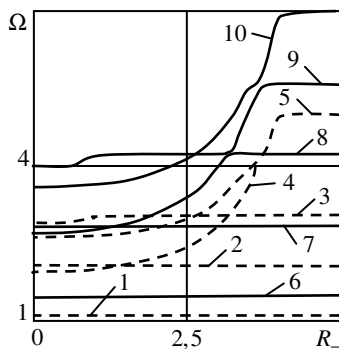


Рис. 4

частот (в порядке возрастания) собственных колебаний пьезокерамического цилиндра без учета пьезоэффекта ($e_{ij} = 0$). Цифрами от 6 до 10 пронумерованы первые частот (в порядке возрастания) собственных колебаний пьезокерамического цилиндра с учетом пьезоэффекта. Можно отметить в этом случае большее влияние пьезоэффекта, причем как для тонких цилиндров, так и для первой собственной частоты.

На рис. 5 представлено сравнение зависимости первых пяти частот собственных колебаний от внутреннего диаметра цилиндра (R_-) для различных типов электрических граничных условий на боковых поверхностях цилиндра, при этом длина цилиндра ($L = 5$) и внешний диаметр ($R_+ = 5$) остаются фиксированными. Рассматривается изменение внутреннего диаметра в широком диапазоне от 0,05 до 4,95 безразмерных единиц. Материал цилиндра: пьезокерамика ЦТС 19, на торцах выполняются условия жесткой заделки. Цифрами от 1 до 5 пронумерованы первые частот (в порядке возрастания) собственных колебаний пьезокерамического цилиндра для случая, когда боковые поверхности цилиндра покрыты тонкими короткозамкнутыми электродами. Цифрами от 6 до 10 пронумерованы первые частот (в порядке возрастания) собственных колебаний пьезокерамическо-

го цилиндра для случая, когда боковые поверхности цилиндра неэлектро-дированы. Как видно из представленного рисунка случай, когда боковые поверхности свободны от электродов делает материал более жестким по сравнению со случаем, когда боковые поверхности покрыты тонкими короткозамкнутыми электродами, на всем рассматриваем диапазоне изменения внутреннего диаметра цилиндра.

На рис. 6 представлено сравнение зависимости первых пяти собственных частот от относительной длины цилиндра L/h ($R_+ = 5,0$; $R_- = 3,0$). Материал цилиндра так же пьезокерамика ЦТС 19, на торцах выполняются условия жесткой заделки. Цифрами от 1 до 5 пронумерованы первые час-

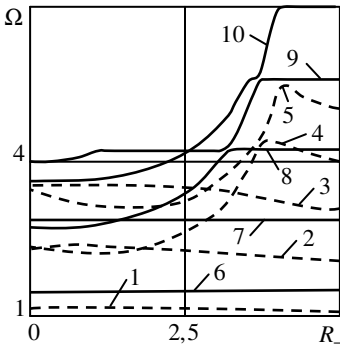


Рис. 5

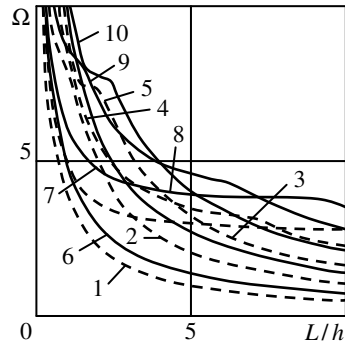


Рис. 6

тот (в порядке возрастания) собственных колебаний пьезокерамического цилиндра для случая, когда боковые поверхности цилиндра покрыты тонкими короткозамкнутыми электродами. Цифрами от 6 до 10 пронумерованы первые частот (в порядке возрастания) собственных колебаний пьезокерамического цилиндра для случая, когда боковые поверхности цилиндра неэлектродированы. Как видно из представленного рисунка случай, когда боковые поверхности свободны от электродов также делает материал более жестким по сравнению со случаем, когда боковые поверхности покрыты тонкими короткозамкнутыми электродами, на всем рассматриваем диапазоне изменения относительной длины цилиндра.

РЕЗЮМЕ. В цій статті розглядається осесиметрична задача про вільні крутильні коливання порожнистого п'єзокерамічного циліндра кінцевої довжини. Матеріал циліндра поляризовано у коловому напрямі. Бокові поверхні циліндра вільні від механічних навантажень та або вільні від електродів, або вкриті тонким короткозамкненими електродами. На торцях циліндра розглядаються випадки жорсткого закріплення. Для розв'язання поставленої задачі запропонована ефективна чисельно-аналітична методика, яка базується застосуванні метода сплайн-колокацій по одній із координат. Отримана після застосування цього метода система звичайних диференціальних рівнянь розв'язується стійким методом дискретної ортогоналізації в комбінації з методом покрокового пошуку. Представлені чисельні результати для частот власних коливань циліндру для п'єзокераміки PZT 4 у широкому спектрі зміни геомет-

ричних характеристик циліндра. Проводиться порівняльний аналіз впливу виду електричних граничних умов на спектр частот власних коливань п'єзокерамічного циліндра.

SUMMARY. In this article the axisymmetrical problem on natural torsion oscillations of hollow piezoceramic cylinders of finite length is considered. The material of cylinder is polarized in circumferential direction. Lateral surfaces are free from external loading and free from electrodes or are covered by thin electrodes which are short-circuited. On the edges of cylinder is considered conditions of jamming. For its solution the effective numerically-analytical technique based on representation of the required solution by basic splines and choosing by defined way (certain way) the points of a collocation is proposed. The received system is solved a stable numerical method of discrete orthogonalisation and a method of step-by-step search. Numerical calculations for the cylinder from PZT 4 in a wide range of change of geometrical parameters is resulted. Comparison analyze influence the kind of electric edge conditions on spectrum frequencies of natural oscillations piezoceramic cylinder are executed.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. *Лазуткин В. Н., Михайлов А. И.* Колебания пьезокерамических цилиндров конечных размеров с поляризацией по высоте // Акуст. журн. – 1976. – Т. 22, Вып. 3. – С. 393–399. 2. *Шульга Н. А., Борисенко Л. В.* Колебания пьезокерамического цилиндра с осевой поляризацией при электрическом нагружении // Прикладная механика. – 1990. – Т. 25, № 10. – С. 41–47. 3. *Шульга Н. А., Борисенко Л. В.* Электроупругие колебания радиально поляризованного пьезокерамического цилиндра с частично электродированными боковыми поверхностями боковыми поверхностям // Прикладная механика. – 1990. – Т. 26, № 1. – С. 43–47. 4. *Kharouf N., Heyliger P. R.* Axisymmetric Free Vibrations of Homogeneous and Laminated Piezoelectric Cylinders // J. Sound and Vibration. – 1994. – Vol. 174, № 4. – P. 539–561. 5. *Hussein M., Heyliger P. R.* Discrete layer Analysis of Axisymmetric Vibrations of Lamina-ted Piezoelectric Cylinders // J. Sound and Vibration. –1996. – Vol. 192, № 5. – P. 995–1013. 6. *Григоренко Я. М., Авраменко О. А.* Исследование напряженно-деформированного состояния замкнутых тонких ортотропных конических оболочек переменной толщины // Прикладная механика. – 2008. – Т. 44, № 6. – С. 46–58. 7. *Григоренко А. Я., Яремченко Н. П.* О напряженном состоянии прямоугольных в плане нетонких ортотропных оболочек переменной толщины // Прикладная механика. – 2008. – Т. 44, № 8. – С. 91–102. 8. *Григоренко А. Я., Яремченко С. Н.* Анализ напряженного состояния ортотропных эллиптических оболочек в уточненной постановке при изменении геометрических параметров // Прикладная механика. – 2008. – Т. 44, № 9. – С. 53–62. 9. *Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л.* Применение метода сплайн-коллокаций для решения задач об осесимметричных свободных колебаниях толстостенных ортотропных цилиндров // Прикладная механика. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 74–85. 10. *Григоренко О. Я., Ефимова Т. Л., Лоза І. А.* Розв'язання осесимметричної задачі про вільні коливання п'єзокерамічних порожнистих циліндрів скінченної довжини методом сплайн-колокацій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 3. – С. 112–119.

Национальный транспортный университет, г.Киев

Поступила 11.03.2009

Н. И. ИВАНОВА, канд. физ.-мат. наук

АНАЛИЗ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ МАЛОСЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ В КОНИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

Математическое моделирование различных технологических процессов переработки материалов позволяет правильно понять характер движения этих материалов и дать указания о выборе оптимальных режимов их движения, связанных с получением изделий высокого качества при низких энергозатратах [1, 2].

Если для пространственных задач вводить функцию тока, то потребуются аппроксимация двух производных, которая при использовании треугольных конечных элементов требует большого количества базисных функций для удовлетворения «условия совместности». Поэтому весьма желательно отказаться от условия несжимаемости и ввести понятие «мало-сжимаемой» среды. Это естественно и с физической точки зрения, т.к. многие реальные материалы в процессе переработки (экструзии, литьем под давлением и др.) обнаруживают объемную сжимаемость. Эта сжимаемость обусловлена неоднородностью материала, наличием в нем пор, трещин и т.п. Введение малой сжимаемости позволяет строить приближенные решения задачи в классе функций, неудовлетворяющих условию несжимаемости. В данной статье рассматривается вопрос о движении нелинейно-вязкой малосжимаемой среды, когда напряжения определяются выражением

$$\sigma_{ij}(v) = \lambda I_1(v) \delta_{ij} + \varphi(I_2(v)) B_{ij}(v) \quad (i, j = \overline{1, 3}). \quad (1)$$

Здесь $B_{ij}(v)$ – компоненты тензора скоростей деформаций, связанных с вектором скоростей $v = (v_1, v_2, v_3)$ формулой $B_{ij}(v) = \partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i$ ($i, j = \overline{1, 3}$); δ_{ij} – компоненты единичного вектора; φ – эффективная вязкость, зависящая от второго инварианта $I_2(v)$ тензора скоростей деформаций

$$I_2(v) = \sum_{i,j=1}^3 B_{ij}^2(v); \quad \lambda - \text{объемная вязкость среды, причем } \lambda = \text{const} > 0$$

(для малосжимаемой среды постоянная λ является большой величиной);

$$I_1(v) = \sum_{i=1}^3 \partial v_i / \partial x_i - \text{величина, определяющая скорость объемного сжатия.}$$

Выражение $\lambda I_1(v)$ в формуле (1) играет роль гидростатического давления.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о нестационарном движении

малосжимаемой среды с уравнением состояния (1) в коническом канале. Ось Z цилиндрической системы координат направлена вдоль оси канала, в котором исследуется движение среды, ось R перпендикулярна оси Z . Будем считать, что поле скоростей является осесимметричным, т.е. $v_\varphi = 0$ и $v = (v_r(r, z, t), v_z(r, z, t))$. Область Ω в которой рассматривается движение среды считается ограниченной, а ее граница $S = \bigcup_{i=1}^3 S_i$. Объемная сила

K отсутствует. Тогда уравнения движения запишутся в таком виде

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^3 \left\{ \lambda \delta_{ij} \frac{\partial I_1(v)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\varphi(I_2(v)) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} = 0 \quad (i = \overline{1, 3}), \quad (2)$$

где ρ – плотность среды; t – время.

На стенках канала выполняется условие прилипания, т.е.

$$v = 0 \text{ на } S_1 \times (0, T). \quad (3)$$

На входе и выходе задается распределение поверхностных сил, зависящих от координат и времени

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sigma_{ij} n_j &= F_i(s, t) \text{ на } S_2 \times (0, T), \\ \sum_{i=1}^2 \sigma_{ij} n_j &= \tilde{F}_i(s, t) \text{ на } S_3 \times (0, T). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(r, z) \mid r = R(z), z \in [0, L]\}, \\ S_2 &= \{(r, z) \mid 0 < r < R(0), z = 0\}, \\ S_3 &= \{(r, z) \mid 0 < r < R(L), z = L\}, \end{aligned}$$

где $R(z)$ и L – уравнение образующей и длина осесимметричного канала.

Начальное условие записывается в виде

$$v|_{t=0} = v_0(s). \quad (5)$$

Таким образом, задача о нестационарном движении нелинейно-вязкой малосжимаемой среды в коническом канале сводится к отысканию в области $\Omega \times (0, T)$ функций v_r и v_z , удовлетворяющих системе уравнений (2), граничным условиям (3), (4) и начальному условию (5), при этом

$$\Omega = \{(r, z) \mid R(0) < r < R(z), 0 < z < L\}.$$

Обобщенным решением задачи (2)–(5) называется функция u , удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} u &\in L_2(0, T; H), \quad du/dt \in L_2(0, T; H^*), \\ \rho \left(\frac{du}{dt}, h \right) + \lambda b_1(u, h) + b(u, h) &= (F, h), \\ u(0) &= u_0 \quad \forall h \in H, \end{aligned} \quad (6)$$

где пространство H – замыкание по норме

$$\|v\|_H^2 = \int_0^L \int_{R(0)}^{R(z)} \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz$$

множества бесконечно дифференцируемых векторных функций $v = (v_r, v_z)$, удовлетворяющих условию (3); H^* – пространство сопряженное H . При этом

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{du}{dt}, h \right) &= \rho \int_0^L \int_{R(0)}^{R(z)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} h_r + \frac{\partial u_z}{\partial t} h_z \right) r dr dz, \\ \lambda b_1(u, h) &= \lambda \int_0^L \int_{R(0)}^{R(z)} \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} \right) \left(\frac{\partial h_r}{\partial r} + \frac{\partial h_z}{\partial z} + \frac{h_r}{r} \right) \right] r dr dz; \\ b(u, h) &= \int_0^L \int_{R(0)}^{R(z)} \left[2\varphi(I_2) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial h_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial h_z}{\partial z} + \frac{u_r h_r}{r^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \varphi(I_2) \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial h_z}{\partial r} + \frac{\partial h_r}{\partial z} \right) \right] r dr dz, \\ (F, h) &= \int_{S_2} F_r h_r ds + \int_{S_2} F_z h_z ds + \int_{S_3} \tilde{F}_r h_r ds + \int_{S_3} \tilde{F}_z h_z ds. \end{aligned}$$

Классическое решение задачи (2)–(5) является обобщенным решением задачи (6) и, наоборот обобщенное решение является классическим [3].

Для функции $\varphi(I_2)$ выполнены условия 1)–3) из [3] и если $F, \tilde{F} \in L_2(0, T; H^*)$, то существует единственное решение задачи (6).

Отметим, что при достаточно больших значениях λ решение задачи (6) можно рассматривать как приближенное решение аналогичной задачи для несжимаемой среды.

Метод решения. Приближенное решение задачи (6) будем искать методом Галеркина. Вектор скорости представим в виде

$$u^n(t) = \sum_{i=1}^n q_{in}(t) \psi_i(r, z),$$

где $\psi_i(r, z)$ – базисные функции, $q_{in}(t)$ – функция, определяемая из условий

$$\rho \left(\frac{du_i^n}{dt}, \psi_j \right) + \lambda b_1(u_i^n, \psi_j) + b(u_i^n, \psi_j) = (F_i, \psi_j),$$

$$u_i^n(0) = u_{i0}^n = \sum_{l=1}^n \xi_{ln} \psi_l \quad (i = r, z) \quad j = (1, n),$$

$$\sum_{l=1}^n \xi_{ln} \psi_l \rightarrow u_{i0} \quad \text{в } L_2(\Omega) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Последовательность подпространств построим методом конечных элементов из непрерывных аффинных в каждом треугольнике функций таким образом, чтобы $\theta_n \geq \theta_0 = \text{const} > 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$, где θ_n – наименьший

угол, h_n – длина наибольшей стороны всех треугольников, на которые разбивается область Ω . Такая последовательность обладает свойством предельной плотности.

Приближенные решения, построенные методом Галеркина сходятся к точному решению задачи. Для решения системы нелинейных уравнений (7) применялся метод «предиктор-корректор» [4].

Рассмотренная методика позволяет производить расчеты основных характеристик движения нелинейно-вязкой малосжимаемого материала в осесимметричных каналах различной формы.

Результаты расчета и их обсуждение. Ниже на примере смазки униол приводятся результаты численных расчетов зависимостей расходов и энергозатрат от времени при движении смазки униол в сужающемся коническом канале под действием поверхностных сил, изменяющихся и не изменяющихся во времени. Сжимаемость среды не превышала 3%.

На рис. 1 в правом нижнем углу изображена половина меридионального сечения конического канала, в котором рассматривалось движение материала. Здесь AC – ось конуса, направленная по координатной оси Z . Линия BD соответствует твердой стенке. Линии AD и BC соответствуют частям границы S_2 (на входе в канал) и S_3 (на выходе), где заданы распределения поверхностных сил F и \tilde{F} соответственно. Размеры канала были приняты следующие: $AC = 0,05\text{ м}$; $AD = 0,03\text{ м}$; $BC = 0,02\text{ м}$.

Для сравнения были проведены расчеты процесса разгона смазки униол в конусе для трех различных случаев задания поверхностных сил. Начальная скорость во всех рассматриваемых случаях принималась равной нулю, т.е. $v_r = v_z = 0$.

В первом случае приложенные силы брались не зависимыми от времени и задавались таким выражением

$$F_1 = 0,1 \cdot 10^5 \text{ Па}, \quad \tilde{F}_1 = -0,1 \cdot 10 \text{ Па}, \quad F_2 = \tilde{F}_2 = 0. \quad (8)$$

Во втором случае рассматривались поверхностные силы, задаваемые во времени законом

$$F_1 = \begin{cases} 0,247 \cdot 10^8 t \text{ Па} & 0 \leq t \leq 0,405 \cdot 10^{-2} \text{ с}, \\ 0,1 \cdot 10^5 \text{ Па} & t \geq 0,405 \cdot 10^{-2} \text{ с}; \end{cases}$$

$$\tilde{F}_1 = \begin{cases} -0,247 \cdot 10^3 t \text{ Па} & 0 \leq t \leq 0,405 \cdot 10^{-2} \text{ с}, \\ -0,1 \cdot 10 \text{ Па} & t \geq 0,405 \cdot 10^{-2} \text{ с}; \end{cases}$$

$$F_2 = \tilde{F}_2 = 0. \quad (9)$$

В третьем случае поверхностные силы брались также зависимыми от времени и задавались таким выражением

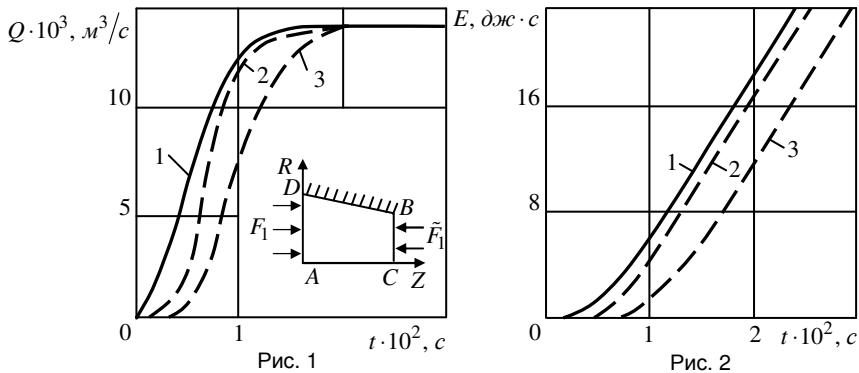
$$F_1 = \begin{cases} 0,94 \cdot 10^7 t \text{ Па} & 0 \leq t \leq 0,111 \cdot 10^{-1} \text{ с}, \\ 0,1 \cdot 10^5 \text{ Па} & t \geq 0,111 \cdot 10^{-1} \text{ с}; \end{cases}$$

$$\tilde{F}_1 = \begin{cases} -0,94 \cdot 10^2 t \text{ Па} & 0 \leq t \leq 0,111 \cdot 10^{-1} \text{ с}, \\ -0,1 \cdot 10 \text{ Па} & t \geq 0,111 \cdot 10^{-1} \text{ с}; \end{cases}$$

$$F_2 = \tilde{F}_2 = 0. \quad (10)$$

На рис. 1 приведена зависимость расхода на выходе от времени. Кривая 1 соответствует случаю не зависимых от времени поверхностных сил, которые задавались законом (8). Кривая 2 показывает поведение расхода во времени на выходе из конуса в случае, когда поверхностные силы изменяются во времени по закону (9), и кривая 3 – законом (10). На рис. 2 приведена зависимость $E = E(t)$ энергозатрат от времени при разгоне смазки униол в рассматриваемых трех случаях различного задания поверхностных сил. Кривая 1 соответствует случаю, когда поверхностные силы задавались законом (8), кривая 2 – когда поверхностные силы изменялись во времени по закону (8), кривая 3 – по закону (10). Видно, что время выхода течения на стационарный режим (рис. 1) во всех трех рассматриваемых случаях практически одно и то же.

В рассмотренных случаях разгона смазки униол в конусе минимальные энергозатраты (рис. 2) получаются при медленном увеличении поверхностных сил от нуля до заданного значения (кривая 3). Выигрыш в затрачивае-



мой мощности в случае медленного разгона (кривая 3) по сравнению с заданием поверхностных сил не зависящими от времени (кривая 1) составляет примерно 50%.

РЕЗЮМЕ. Розроблено методику розв'язку задачі про нестационарний рух нелінійно-в'язкого середовища у конічному каналі. За математичну модель взято модель малостискуваного матеріалу. Наведені приклади розрахунків.

SUMMARY. The design procedure of problem about nonstationary movement of nonlinear-viscous medium in conical canal has been considered. The model of noncompressible material is expressed as mathematical model. The calculations examples are given.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: Высш. шк., 2000. – 383 с. 2. Lee Young-Ju, Xu Tinchao. New formulations, positivity preserving discretizations and stability analysis for non-Newtonian flow models // *Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng.* – 2006. – Vol. 195, № 9–12. – P. 1180–1206. 3. *Литвинов В. Г.* Движение нелинейно-вязкой жидкости. – М.: Наука, 1982. – 373 с. 4. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980. – 586 с.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 12.04.2009

УДК 539.3

О влиянии геометрии плоских микроповреждений материала на его деформационные свойства / Д. В. Бабич // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 3–13.

Предложена континуальная модель, описывающая деформирование среды, поврежденной стохастически рассеянными по объему плоскими эллиптическими микротрещинами. Модель строится на основании эквивалентности энергии поврежденной и моделирующей среды. Энергия деформирования трещиноватой среды определяется с использованием принципа Эшелби в предположении, что в процессе деформирования микротрещины не растут и не взаимодействуют между собой. Проводится анализ влияния геометрии микротрещин на эффективные характеристики упругости поврежденных материалов при растяжении и сжатии.

Табл. 1. Библиогр.: 9 назв.

УДК 539.3

О сведении краевых задач изгиба трансверсально изотропных пластин к задачам теории функций комплексного переменного / И. Ю. Хома // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 14–18.

Рассматриваются задачи об изгибе трансверсально-изотропных пластин, находящихся под действием нормальной поперечной нагрузки, приложенной к лицевым граничным плоскостям. Предложен способ сведения задач в случае жестко защемленном, шарнирно опертом и свободном крае к задачам теории функций комплексного переменного.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 539.3

К вопросу о расчете влияния легирующих элементов на фазовое и напряженное состояние стальной пластины при нагреве подвижным источником / А. Р. Гачкевич, В. И. Асташкин, Б. Д. Дробенко, Т. В. Козакевич // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46 – С. 19–28.

Предложен подход использования статистических моделей для количественной оценки фазового состава сталей при монотонных режимах охлаждения. Он позволяет учитывать неоднородное перед охлаждением распределение температуры в теле, дает возможность использовать различные статистические модели. Вместо сложного кинетического уравнения при этом используется простой параметр – длительность охлаждения от 850⁰С

до 500⁰С (в каждой точке тела). Решена задача определения пространственно неоднородного распределения фазового состава и напряжений в тонкой стальной пластине при действии на нее подвижного нормально распределенного источника нагрева. В рамках предложенного подхода сравниваются результаты, полученные на основании различных статистических моделей, анализируется влияние σ_g и M_p на фазовый состав и напряженное состояние пластины.

Ил. 7. Библиогр.: 9 назв.

УДК 539.3

О влиянии температурного поля на контактное взаимодействие нагретого плоского эллиптического штампа с пьезокерамическим полупространством / В . С . К и р и л ю к // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 29–35.

Рассмотрена задача о давлении без трения нагретого плоского эллиптического штампа на пьезоэлектрическое полупространство. Исследовано возникновение отслоения материала под штампом. В виде простых неравенств, в которые входят величина силы, что действует на штамп, распределение температурного поля и термоэлектроупругие свойства материала, получены условия контакта штампа с полупространством без отслоения материала и при его появлении. В замкнутом виде найдено решение задачи и получены контактные характеристики взаимодействия штампа с полупространством. Выявлено влияние связанности силового и электрического полей, а также температуры нагрева штампа на параметры контакта. Как частный случай из найденных выражений следуют результаты контактного взаимодействия нагретого штампа с упругим трансверсально-изотропным полупространством. Проведены числовые исследования контактного давления под штампом.

Ил. 1. Библиогр.: 10 назв.

УДК 539.3

Контакт упругого полупространства и жесткого основания под действием сосредоточенного источника охлаждения / Б . Е . М о н а с т ы р с к и й , М . М . М ы к ы т ы н // Теорет. и прикладная механика. – Вып. 46. – С. 36–41.

Изучается явление расслоения упругого полупространства и жесткого термоизолированного основания под действием сосредоточенного подповерхностного источника охлаждения. Методом парных интегральных уравнений получено аналитическое решение сформулированной осесимметричной контактной задачи термоупругости. Проанализированы форма и размеры образовавшегося зазора, распределение контактных напряжений.

Ил. 3. Библиогр.: 11 назв.

УДК 539.3

Решение плоской задачи электромагнитоупругости для пластинки с трещинами методом линейного сопряжения / С.А.Калоеров, А.В.Петренко // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 42–56.

Решена задача электромагнитоупругости для бесконечной пластинки, с трещинами вдоль одной прямой. Задача сведена к серии задач Римана-Гильберта, решением которых получены комплексные потенциалы, точно удовлетворяющие граничным условиям на берегах трещин. Для пластинки с одной трещиной даны решения частных задач, описаны результаты численных исследований.

Табл. 3. Библиогр.: 9 назв.

УДК 539.375

Трещина вблизи угловой точки границы раздела сред / А.А.Каминский, Л.А.Кипнис, Г.А.Хазин, Т.В.Полищук // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 57–61.

Рассмотрена статическая симметричная задача теории упругости для кусочно-однородной изотропной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, содержащей в одной из частей полубесконечную трещину, на берегах которой заданы нормальные напряжения. Задача сведена к функциональному уравнению Винера-Хопфа. На основе решения уравнения определен коэффициент интенсивности напряжений в конце трещины и исследовано поведение напряжений вблизи угловой точки.

Ил. 1. Табл. 1. Библиогр.: 9 назв.

УДК 539.3

О влиянии локального фрикционного проскальзывания на контактную прочность взаимодействующих тел / Н.И.Маланчук, Р.М.Мартыняк // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 62–69.

С использованием метода сингулярных уравнений, получено аналитическое решение контактной задачи о локальном фрикционном проскальзывании взаимно прижатых полуплоскостей, одна из которых имеет малую пологую выемку, под действием монотонно возрастающей касательной нагрузки. Найдены контактные напряжения, выявлено влияние проскальзывания на прочность контактирующих тел.

Ил. 5. Библиогр.: 9 назв.

УДК 539.376

Метод определения параметров ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов с использованием весовых функций / В.П.Голуб, Ю.М.Кобзарь, В.С.Рагулина // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 70–80.

Предложен метод и изложены основные процедуры определения параметров ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов с независимой от времени нелинейностью. Метод основан на выполнении подобия изохронных диаграмм ползучести и диаграммы мгновенного деформирования. Параметры ядер определяются по результатам аппроксимации дискретных значений ядер, которые получены путем дифференцирования осредненной функции подобия. Дискретные значения ядер в области сингулярности учитываются с помощью весовых функций. Метод апробирован экспериментально на задачах расчета деформаций ползучести при постоянных напряжениях, деформаций ползучести при полной разгрузке и релаксаций напряжений на примере фторопласта-4 и стеклопластика ТС-8/3-250.

Ил. 6. Табл. 1. Библиогр.: 5 назв.

УДК 539.375

Влияние трения берегов межфазной трещины на развитие начальной пластической зоны / М.В.Дудик // Теоретическая и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 81–90.

В условиях плоской деформации методом Винера-Хопфа определена начальная пластическая зона вблизи вершины межфазной трещины в кусочно-однородном изотропном упруго-пластическом теле, когда берега трещины контактируют с трением. Пластическая зона моделируется прямой линией разрыва касательного смещения, исходящей из конца трещины под углом к границе раздела сред. Исследованы зависимости длины зоны предразрушения и угла наклона от упругих параметров тела и коэффициента трения.

Табл. 1. Библиогр.: 11 назв.

УДК 534-21:537.226.86

Нестационарные упругоэлектрические колебания сферического пьезокерамического преобразователя с закрепленной внутренней границей / М.О.Шульга, С.А.Григорьев // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 91–97.

Проведен численный анализ осесимметричных нестационарных колебаний пьезокерамического радиально поляризованного шара с закрепленной внутренней поверхностью при электрическом возбуждении. Исследова-

но динамическое упругоэлектрическое состояние и его зависимость от параметра кривизны, проведена оценка прочности при конкретной разности потенциала возбуждения.

Ил. 6. Библиогр.: 6 назв.

УДК 539.3

Особенности генерации упругих волн при тепловом облучении стального образца и учете аустенитно-мартенситного преобразования / Л.Я.Васильева, Я.А.Жук, И.К.Сенченков, О.П.Червинко // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 98–103.

В рамках постановки связанной задачи термомеханики с использованием модифицированной термодинамически согласованной теории неупругого поведения материала исследуется процесс возбуждения и распространения волн напряжения, вызванных воздействием теплового импульса на торце тонкого длинного стального цилиндра и микроструктурными преобразованиями при остывании зоны облучения.

Ил. 4. Библиогр.: 5 назв.

УДК 539.3

Изгибные колебания прямоугольной пластинки со свободными краями / С.О.Папков, В.В.Мелешко // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 104–111.

Методом суперпозиции задача о колебаниях пластины со свободными краями сводится к однородной квазирегулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. На основе достаточного условия существования ограниченного решения для квазирегулярной системы находятся собственные частоты колебаний пластины. На данных собственных частотах анализом асимптотического поведения неизвестных строится нетривиальное решение системы, которое позволяет получить аналитическое представление собственных форм колебаний. Исследована точность выполнения однородных граничных условий, дано сравнение с экспериментальными данными.

Ил. 1. Табл. 2. Библиогр.: 8 назв.

УДК 539.3

О реконструкции трещины в вязкоупругой ортотропной полосе / А.О.Ватульян, П.А.Азарова // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 112–117.

Решена задача о колебаниях ортотропной вязкоупругой полосы, ослабленной внутренней трещиной, причем реологические свойства учтены в

рамках принципа соответствия. Получены интегральные представления полей перемещений. Получена система граничных интегральных уравнений относительно неизвестных функций раскрытия трещины. Задача идентификации параметров трещины по известным (измеренным) полям перемещений на части верхней границы сведена к минимизации неквадратичного функционала невязки. Проведен численный анализ решения для прямолинейной трещины.

Ил. 2. Библиогр.: 9 назв.

УДК 539.3:519.6

Об особенностях постановки коэффициентных обратных задач термоупругости для неоднородного стержня / А.О. Ватульян, С.А. Нестеров // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 118–124.

Предложены две постановки коэффициентной обратной задачи для термоупругого неоднородного стержня, представлены эффективные численные методы решения прямой и обратной задач; приведены результаты вычислительных экспериментов.

Ил. 2. Библиогр.: 4 назв.

УДК 539.3

Демпфирование резонансных изгибных колебаний гибкой шарнирно опертой вязкоупругой круглой пластины при совместном использовании сенсоров и актуаторов / В.Г. Карнаухов, Т.В. Карнаухова // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 125–131.

Методом Бубнова-Галеркина решена задача о вынужденных резонансных изгибных колебаниях и диссипативном разогреве шарнирно опертой гибкой круглой пассивной вязкоупругой пластины с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами. Исследовано влияние геометрической нелинейности и температуры диссипативного разогрева на эффективность активного демпфирования резонансных колебаний такой пластины при помощи пьезоэлектрических включений.

Библиогр.: 9 назв.

УДК 539.3

Резонансные осесимметричные колебания и диссипативный разогрев цилиндрических оболочек и их контроль с помощью пьезоэлектрических актуаторов / И.Ф. Киричок, Т.В. Карнаухова, Н.В. Пересунько // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 132–140.

Численно решена задача о вынужденных резонансных колебаниях и диссипативном разогреве цилиндрических оболочек с пьезоэлектрическими

актуаторами при осесимметричном электромеханическом нагружении. Исследовано влияние размеров пьезоактуаторов и продольных сил инерции на величину резонансных частот, прогибов, коэффициента управления и температуру разогрева шарнирно опертой оболочки.

Ил. 6. Табл. 1. Библиогр.: 11 назв.

УДК 539.3

Колебания и диссипативный разогрев физически нелинейных вязкоупругих круглых пластин с распределенными актуаторами / Н. В. Петренко // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 141–148.

Методом Бубнова–Галекина решена задача о вынужденных резонансных изгибных колебаниях и диссипативном разогреве жестко заземленной физически нелинейной круглой пассивной неупругой пластины с распределенными пьезоэлектрическими актуаторами. Исследовано влияние физической нелинейности и температуры диссипативного разогрева на эффективность активного демпфирования колебаний пластины.

Ил. 2. Библиогр.: 10 назв.

УДК 539.3

Влияние сдвиговых деформаций на уровень компенсационного воздействия при осесимметричных колебаниях пластинчатого пьезовибратора / В. И. Гололобов // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46 – С. 149–154.

Решена задача об осесимметричных гармонических колебаниях пластинки с пьезокерамическими слоями при электромеханическом нагружении. Исследовано влияние сдвигов на соотношение электрической и механической нагрузок при неподвижном центре пластинки.

Ил. 2. Библиогр.: 4 назв.

УДК 539.3

Термоупругое состояние анизотропной пластинки с упругими кольцами / С. А. Калоеров, Д. А. Добряк // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 155–168.

С использованием обобщенных комплексных потенциалов дано решение задачи термоупругости для пластинки с упругими кольцами. Задача сведена к системе линейных алгебраических уравнений, следующих из граничных условий для множества точек контуров рассматриваемой среды. Система решается обобщенным методом наименьших квадратов с использованием сингулярного разложения. Приведены результаты численных ис-

следований с их анализом для пластинки с одним и двумя круговыми кольцами из изотропного или анизотропного материала.

Ил. 6. Табл. 2. Библиогр.: 10 назв.

УДК 539.3

Влияние электрических граничных условий на спектр собственных частот крутильных колебаний полых пьезокерамических цилиндров с окружной поляризацией / И. А. Лоза // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 169–175.

Решена осесимметричная задача о свободных крутильных колебаниях полого пьезокерамического цилиндра конечной длины. Материал цилиндра поляризован в окружном направлении. Боковые поверхности цилиндра свободны от механических нагрузок и свободны от электродов, либо покрыты тонкими короткозамкнутыми электродами. Торцы цилиндра жестко заземлены. Для решения задачи предлагается численно-аналитическая методика, основанная на применении метода сплайн-коллокаций по одной из координат. Полученная в результате система обычных дифференциальных уравнений решается методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска. Проведены численные исследования для частот собственных колебаний цилиндра из пьезокерамики PZT 4 с анализом влияния типа электрических граничных условий на спектр собственных колебаний.

Ил. 6. Библиогр.: 10 назв.

УДК 539.374

Анализ нестационарного движения нелинейно-вязкой малосжимаемой среды в коническом канале / Н. И. Иванова // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 176–181.

Сформулирована задача о нестационарном движении нелинейно-вязкой малосжимаемой среды в коническом канале. Предложена методика решения этой задачи, включающая в себя метод Галеркина с конечно-элементным базисом по пространственным переменным и метод «предиктор-корректор» по временной переменной. Проведен численный анализ движения смазки униол в сужающемся коническом канале под действием поверхностных сил, зависящих от времени. Изучено влияние закона изменения во времени поверхностных сил на распределение во времени расхода на выходе из канала, а также на энергозатраты при разгоне смазки униол в коническом канале.

Ил. 2. Библиогр.: 4 назв.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Бабич Д. В.</i> О влиянии геометрии плоских микроповреждений материала на его деформационные свойства.	3
<i>Хома И. Ю.</i> О сведении краевых задач изгиба трансверсально изотропных пластин к задачам теории функций комплексного переменного.	14
<i>Гачкевич А. Р., Асташкин В. И., Дробенко Б. Д., Козакевич Т. В.</i> К вопросу о расчете влияния легирующих элементов на фазовое и напряженное состояние стальной пластины при нагреве подвижным источником.	19
<i>Кириллюк В. С.</i> О влиянии температурного поля на контактное взаимодействие нагретого плоского эллиптического штампа с пьезокерамическим полупространством.	29
<i>Монастырский Б. Е., Мыкытын М. М.</i> Контакт упругого полупространства и жесткого основания под действием сосредоточенного источника охлаждения.	36
<i>Калоеров С. А., Петренко А. В.</i> Решение плоской задачи электромагнитоупругости для пластинки с трещинами методом линейного сопряжения.	42
<i>Каминский А. А., Кипнис Л. А., Хазин Г. А., Полищук Т. В.</i> Трещина вблизи угловой точки границы раздела сред.	57
<i>Маланчук Н. И., Мартыняк Р. М.</i> О влиянии локального фрикционного проскальзывания на контактную прочность взаимодействующих тел.	62
<i>Голуб В. П., Кобзарь Ю. М., Рагулина В. С.</i> Метод определения параметров ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов с использованием весовых функций.	70
<i>Дудик М. В.</i> Влияние трения берегов межфазной трещины на развитие начальной пластической зоны.	81
<i>Шульга М. О., Григорьев С. А.</i> Нестационарные упругоэлектрические колебания сферического пьезокерамического преобразователя с закрепленной внутренней границей.	91
<i>Васильева Л. Я., Жук Я. А., Сенченков И. К., Червинко О. П.</i> Особенности генерации упругих волн при тепловом облучении стального образца и учете аустенитно-мартенситного преобразования.	98
<i>Папков С. О., Мелешко В. В.</i> Изгибные колебания прямоугольной пластинки со свободными краями.	104

<i>Ватульян А. О., Азарова П. А.</i> О реконструкции трещины в вязкоупругой ортотропной полосе.	112
<i>Ватульян А. О., Нестеров С. А.</i> Об особенностях постановки коэффицентных обратных задач термоупругости для неоднородного стержня.	118
<i>Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В.</i> Демпфирование резонансных изгибных колебаний гибкой шарнирно опертой вязкоупругой круглой пластины при совместном использовании сенсоров и актуаторов.	125
<i>Киричок И. Ф., Карнаухова Т. В., Пересунько Н. В.</i> Резонансные осесимметричные колебания и диссипативный разогрев цилиндрических оболочек и их контроль с помощью пьезоэлектрических актуаторов.	132
<i>Петренко Н. В.</i> Колебания и диссипативный разогрев физически нелинейных вязкоупругих пластин с распределенными актуаторами.	141
<i>Гололобов В. И.</i> Влияние сдвиговых деформаций на уровень компенсационного воздействия при осесимметричных колебаниях пластинчатого пьезовибратора.	149
<i>Калоеров С. А., Добряк Д. А.</i> Термоупругое состояние анизотропной пластинки с упругими кольцами.	155
<i>Лоза И. А.</i> Влияние электрических граничных условий на спектр собственных частот крутильных колебаний полых пьезокерамических цилиндров с окружной поляризацией.	169
<i>Иванова Н. И.</i> Анализ нестационарного движения нелинейно-вязкой малосжимаемой среды в коническом канале.	176
<i>Рефераты.</i>	182

ЗМІСТ

<i>Бабич Д. В.</i> Про вплив геометрії плоских мікропошкоджень матеріалу на його деформівні властивості.	3
<i>Хома І. Ю.</i> Про зведення крайових задач згину трансверсально ізотропних пластин до задач теорії функцій комплексної змінної.	14
<i>Гачкевич О. Р., Асташкін В. І., Дробенко Б. Д., Козакевич Т. В.</i> До питання про розрахунок впливу легуючих складових на фазовий склад та напружений стан пластини зі сталі при нагріванні рухомим джерелом	19
<i>Кирилюк В. С.</i> Про вплив температурного поля на контактну взаємодію нагрітого плоского еліптичного штампку з п'єзокерамічним півпростором.	29
<i>Монастирський Б. Є., Микитин М. М.</i> Контакт пружного півпростору та жорсткої основи за дії точкового джерела охолодження.	36
<i>Калоєров С. О., Петренко О. В.</i> Розв'язок плоскої задачі електромагнітопружності для пластинки з тріщинами методом лінійного спряження.	42
<i>Камінський А. О., Кіпніс Л. А., Хазін Г. А., Поліщук Т. В.</i> Тріщина біля кутової точки межі поділу середовищ.	57
<i>Маланчук Н. І., Мартиняк Р. М.</i> Вплив локального фрикційного проковзування на контактну міцність тіл, що взаємодіють.	62
<i>Голуб В. П., Кобзар Ю. М., Рагуліна В. С.</i> Метод визначення параметрів ядер спадковості нелінійно-в'язкопружних матеріалів з використанням вагових функцій.	70
<i>Дудик М. В.</i> Вплив тертя берегів міжфазної тріщини на розвиток початкової пластичної зони.	81
<i>Шульга М. О., Григор'єв С. А.</i> Нестационарні пружноелектричні коливання сферичного п'єзокерамічного перетворювача з закріпленою внутрішньою границею.	91
<i>Васильєва Л. Я., Жук Я. О., Сенченков І. К., Червінко О. П.</i> Особливості генерації пружних хвиль при тепловому опроміненні сталевого зразка і врахуванні аустенітно-мартенситного перетворення.	98
<i>Папков С. О., Мелешко В. В.</i> Згинні коливання прямокутної пластинки з вільними краями.	104
<i>Ватульян О. О., Азарова П. А.</i> Про реконструкцію тріщини у в'язкопружній ортотропній смузі.	112
<i>Ватульян О. О., Нестеров С. А.</i> Про особливості постановки коефіцієнтних обернених задач термопружності для неоднорідного стрижня.	118

<i>Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В.</i> Демпфування резонансних згинальних коливань гнучкої шарнірно обертої в'язкопружної круглої пластини при сумісному використанні сенсорів та актуаторів.	125
<i>Киричок І. Ф., Карнаухова Т. В., Пересуньмо М. В.</i> Резонансні осесиметричні коливання і дисипативний розігрів циліндричних оболонок та їх контроль за допомогою п'єзоелектричних актуаторів.	132
<i>Петренко Н. В.</i> Коливання і дисипативний розігрів фізично нелінійних в'язкопружних круглих пластин з розподіленими актуаторами. .	141
<i>Гололобов В. І.</i> Вплив зсувних деформацій на рівень компенсаційної дії при осесиметричних коливаннях пластинчатого п'єзовібратора.	149
<i>Калоєров С. О., Добряк Д. О.</i> Термопружний стан анізотропної пластинки з пружними кільцями.	155
<i>Лоза І. А.</i> Вплив електричних граничних умов на спектр власних частот крутильних коливань порожнистих п'єзокерамічних циліндрів з окружною поляризацією.	169
<i>Іванова Н. І.</i> Аналіз нестационарного руху нелінійно-в'язкого мало стиснуваного середовища у конічному каналі.	176
<i>Реферати.</i>	182

CONTENT

<i>Babich D. V.</i> On influence of geometry of plane micro-defects of material on it deformative properties.	3
<i>Khoma I. Yu.</i> On a reduction of the boundary problems of a bending of transversely isotropic plates to the problems of the theory of a complex variable.	14
<i>Hachkevych A. R., Astashkin V. I., Drobenko B. D., Kozakevych T. V.</i> About a calculation of influence of alloy elements on the phase and stress states of the steel plate subjected to heating by moving source.	19
<i>Kirilyuk V. S.</i> On a influence of temperature field on the contact interaction of a heated flat elliptical punch with the piezoelectric half-space.	29
<i>Monastyrskyy B., Mykytyn M.</i> Contact of elastic half-space and rigid foundation under action of concentrated heat sink.	36
<i>Kaloerov S. A., Petrenko A. V.</i> The electro-magneto-elastic plane problem solution for a plate with cracks by the linear conjugation method.	42
<i>Kaminsky A. A., Kipnis L. A., Khazin G. A., Polishchuk T. V.</i> A crack near the corner point of the interface of media.	57
<i>Malanchuk N., Martynyak R.</i> Effect of local frictional slip on contact strength of mated solids.	62
<i>Golub V. P., Kobzar' Yu. M., Ragulina V. S.</i> The method of determination of heredity kernel parameters of non-linear viscoelastic materials using weight functions.	70
<i>Dudik M. V.</i> Influence of friction between the interfacial crack lips on development of initial plastic zone.	81
<i>Shul'ga M. O., Grigoryev S. A.</i> Unstationary elasticoelectric vibrations of spherical piezoceramic transformer with the fixed internal border.	91
<i>Vasilieva L. Ya., Zhuk Ya. A., Senchenkov I. K., Chervinko O. P.</i> Features of the elastic waves generation under thermal irradiation of a steel specimen accounting for austenite-martensite transformation.	98
<i>Papkov S. O., Meleshko V. V.</i> Vibrations of rectangular plate with free edges.	104
<i>Vatulyan A. O., Azarova P. A.</i> About the reconstruction of the crack in the viscoelastic orthotropic strip.	112
<i>Vatulyan A. O., Nesterov S. A.</i> About particularities of production of coefficient inverse problems of thermoelasticity for inhomogeneous rod.	118

<i>Karnaukhov V. G., Karnaukhova T. V.</i> Damping of the resonant bending vibrations of a simply supported flexible circular plate by the sensors and actuators.	125
<i>Kirichok I. F., Karnaukhova T. V., Peresun'ko N. V.</i> The resonant axisymmetric vibrations and dissipative heating of the cylindrical shells and their control by the piezoelectric actuators.	132
<i>Petrenko N. V.</i> The vibrations and dissipative heating of the physically nonlinear viscoelastic circular plates with distributed actuators.	141
<i>Gololobov V. I.</i> Influence of shear strain on compensative electric load at a circular plate piezovibrator.	149
<i>Kaloerov S. A., Dobryak D. A.</i> Thermoelastic state of anisotropic plate with elastic rings.	155
<i>Loza I. A.</i> Influence of electric boundary conditions on the spectrum natural frequency of torsion oscillations hollow piezoceramic cylinders polarized in circumferential direction.	169
<i>Ivanova N. I.</i> Analysis of nonstationary movement of nonlinear-viscous noncompressible medium in conical canal.	176
<i>Abstracts.</i>	182