
СОДЕРЖАНИЕ

<i>Шульга М. О.</i> О гамильтоновом формализме в кирхгоховой теории изгиба пластин	7
<i>Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В., Петренко Н. В.</i> Влияние физической нелинейности и температуры диссипативного разогрева на эффективность работы сенсоров и актуаторов	11
<i>Каминский А. А., Кипнис Л. А., Хазин Г. А., Красильников А. Е.</i> Анализ поведения напряжений вблизи угловой точки границы раздела упругих сред при наличии зоны предразрушения.....	20
<i>Дробенко Б. Д.</i> , Численное моделирование процессов деформирования элементов энергетического оборудования с эксплуатационными дефектами	27
<i>Калоеров С. А., Сенченко Ю. С.</i> Циклическая задача о вязкоупругом изгибе кусочно-однородной плиты.....	35
<i>Калоеров С. А., Добряк О. А.</i> Термоэлектромагнитоупругое состояние многосвязной анизотропной полуплоскости	45
<i>Хома И. Ю., Стрыгина О. А.</i> О напряженном состоянии полой сферической оболочки с круговым отверстием, на поверхности которого заданы касательные напряжения	62
<i>Швец Р. Н., Хапко Б. С., Чиж А. И.</i> Уравнения теплопроводности для оболочек с изломами при переменных коэффициентах теплоотдачи	69
<i>Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Сичко В. М., Завгородний А. В.</i> Вынужденные резонансные колебания и диссипативный разогрев цилиндрической панели из физически нелинейного вязкоупругого материала при жестком защемлении торцов.....	77

<i>Жук Я. А.</i> Влияние диссипативного виброразогрева на работоспособность трехслойной шарнирно опертой балки с пьезоактивными слоями	86
<i>Курна Л. В., Ткаченко В. В.</i> Исследование колебаний м устойчивости сжатых многослойных пластин с помощью метода R-функций	95
<i>Пузырев С. В.</i> Исследование свободных колебаниях гофрированных цилиндрических оболочек.....	106
<i>Бабаев А. Э., Янчевский И. В.</i> Излучение нестационарных акустических волн электроупругим цилиндром с проводной цепью	114
<i>Богданов В. Р., Сулим Г. Е.</i> О решении задачи плоского деформированного состояния материала с учетом упругопластических деформаций при динамическом нагружении	126
<i>Фильштинский Л. А., Киричек Т. А.</i> Динамическая двумерная задача обобщенной связанной термоупругости для неоднородной изотропной среды, содержащей источники тепла	134
<i>Ковалев Ю. Д., Стативка Е. Н.</i> Электроупругое состояние неоднородного цилиндра в условиях симметричного нагружения	142
<i>Панасюк О. Н.</i> Распорстранение квазипродольных волн в слоистых материалах с начальными напряжениями с учетом проскальзывания	150

З М І С Т

<i>Шульга М. О.</i> Про гамільтонів формалізм в кірхгофовій теорії згину пластин.....	7
<i>Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В., Шевченко О. Ю., Петренко Н. В.</i> Вплив фізичної нелінійності і температури дисипативного розігріву на ефективність роботи п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів.....	11
<i>Камінський А. О., Кіпніс Л. А., Хазін Г. А., Красільников А. Є.</i> Аналіз поведінки напружень біля кутової точки межі поділу пружних середовищ за наявності зони передруйнування	20
<i>Дробенко Б. Д.</i> Чисельне моделювання процесів деформування елементів енергетичного обладнання з експлуатаційними дефектами.....	27
<i>Калоєров С. О., Сенченко Ю. С.</i> Циклічна задача про в'язкопружний згин кусково-однорідної плити	35
<i>Калоєров С. О., Добряк О. А.</i> Термоелектромагнітопружний стан багатозв'язної анізотропної півплощини.....	45
<i>Хома І. Ю., Стригіна О. А.</i> Напружений стан пологої сферичної оболонки з круговим отвором, на поверхні якої задані дотичні напруження.....	62
<i>Швець Р. М., Хапко Б. С., Чиж А. І.</i> Рівняння теплопровідності для оболонок зі зламами за змінних коефіцієнтів тепловіддачі	69
<i>Карнаухов В. Г., Козлов В. І., Січко В. М., Завгородній А. В.</i> Вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів циліндричної панелі з фізично нелінійного в'язкопружного матеріалу при жорсткому заземленні торців	77

<i>Жук Я. О.</i> Вплив дисипативного вібророзігріву на роботоздатність тришарової шарнірно опертої балки з п'єзоактивними шарами	86
<i>Курна Л. В., Ткаченко В. В.</i> Дослідження коливань та стійкість стиснутих багатошарових пластин за допомогою R-функцій	95
<i>Пузирьов С. В.</i> Дослідження вільних коливань гофрованих циліндричних оболонок	106
<i>Бабаєв А. Е., Янчевський І. В.</i> Випромінювання нестационарних акустичних хвиль електропружним циліндром з провідним ланцюгом	114
<i>Богданов В. Р., Сулим Г. Т.</i> О рішенні задачі плоского деформованого стану матеріалу з врахуванням пружнопластичних деформацій при динамічному навантаженні	126
<i>Фильштинський Л. А., Кірічок Т. А.</i> Термопружні коливання необмеженого середовища з отвором під дією розподіленого джерела тепла	134
<i>Ковальов Ю. Д., Статівка Є. М.</i> Електропружний стан неоднорідного циліндру при умові симетричного навантаження	142
<i>Панасюк О. М.</i> Поширення квазіпоздовжніх хвиль в шаруватих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів	150

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

Scientific journal
№ 1 (47)

Founded in 1970
Donetsk 2010

CONTENTS

<i>Shulga M. O.</i> Hamilton formalism in the Kirchhoff theory of plate bending	7
<i>Karnaukhov V. G., Karnaukhova T. V., Shevchenko N.V., Petrenko N.V.</i> The influence of physical nonlinearing and temperature of dissipative heating on effectiveness of work piezoelectric sensor and actuators	11
<i>Kaminsky A. A., Kipnis L. A., Khazin G. A., Krasilnikov A. E.</i> Stress behaviour analysis near the corner point of interface of elastic media in prefracture zone presence	20
<i>Drobenko B. D.</i> Numerical simulation of deformation processes of energetic equipment elements with exploitation defects	27
<i>Kaloerov S. A., Senchenko Yu. S.</i> Cyclic problem of a viscoelastic bending of piecewise-homogeneous plate	35
<i>Kaloerov S. A., Dobryak O.A.</i> Thermo-electro-magneto-elastic state of multy-connected anisotropic half-plane.....	45
<i>Khoma I. Yu., Strygina O. A.</i> A Stress state of a sloping spherical shell with a circular hole, the surfaces of which are subjected with tangential stresses.....	62
<i>Shvets R. M., Khapko B. S., Chyzh A. I.</i> Heat conduction equations for shells having breaks with variable heat transfer coefficients	69
<i>Karnaukhov V. G., Kozlov V. I., Sichko V. M., Zavgorodniy A. V.</i> The forced resonance vibrations and dissipative heating of rigidly clamped physical nonlinear cylindrical panel	77
<i>Zhurk Y. A.</i> Influence of the dissipative heating on the functioning of hinged three layer beam containing piezoactive layers.....	86

<i>Kurpa L. V., Tkachenko V. V.</i> Investigation of vibration and stability compressed laminated plates by R-functions method.....	95
<i>Puzirov S. V.</i> Research of the free vibration corrugated cylindrical shells.....	106
<i>Babaev A.E., Yanchevskiy I.V.</i> Radiation of nonstationary acoustic waves by electroelastic cylinder with conducting circuit	114
<i>Bogdanov V. R., Sulym G. T.</i> About problem of plane deformation state of material under dynamical loading with counting plastic-elastic deformation	126
<i>Fil'shtinskii L.A., Kirichok T.A.</i> Thermoelastic vibrations of the infinite medium with a hole due to the distributed heat source	134
<i>Kovalyov Yu. D., Stativka Ev. N.</i> The electro elasticity state of inhomogeneous cylinder in the condition of symmetric loading	142
<i>Panasiuk O. M.</i> Propagation of the quasi-longitudinal waves in laminated media with initial stress at slipping layers...	150

УДК 539.3

М. О. ШУЛЬГА, д-р физ.-мат. наук**О ГАМИЛЬТОНОВОМ ФОРМАЛИЗМЕ В
КИРХГОФОВОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛАСТИН**

Система кирхгофовых уравнений колебаний пластин впервые представлена в операторной гамильтоновой форме четырех уравнений по пространственной координате.

Ключевые слова: кирхгофовые уравнения, гамильтонова форма уравнений, изгибные колебания.

Настоящая статья является развитием исследований [2–6 и др.]. В ней в отличие от предыдущей публикации [2], посвященной теории типа Тимошенко, рассматриваются уравнения кирхгофовой (классической) теории колебаний пластин, что оказалось более сложной задачей. Тем не менее и в этом случае удастся представить исходную систему уравнений в виде операторной гамильтоновой системы четырех уравнений по пространственной координате.

В кирхгофовой (классической) теории поперечных (изгибных) колебаний пластин изгибающие M_{11} , M_{22} и крутящий $M_{12} = M_{21}$ моменты, поперечные силы Q_1 , Q_2 и прогиб w связаны уравнениями колебаний

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} - Q_1 &= 0, \\ \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_2 &= 0, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

и материальными соотношениями

$$\begin{aligned} M_{11} &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right), \quad M_{22} = -D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right), \\ M_{12} &= -(1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где ρ , E , ν – плотность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона материала, $D = I_1 E / (1 - \nu^2)$ – изгибная жесткость, h – толщина пластины, $I_1 = h^3 / 12$ – момент инерции поперечного сечения на единицу длины.

Ниже также используются формулы для углов поворота нормали к срединной плоскости

$$\Psi_1 = \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad \Psi_2 = \frac{\partial w}{\partial x_2} \quad (3)$$

и обобщенные поперечные силы

$$Q_1^* = Q_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}, \quad Q_2^* = Q_2 + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1}. \quad (4)$$

Запишем систему уравнений (1)–(3) в смешанной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} &= Q_1 - \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = \Psi_1, \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} &= -\frac{M_{11}}{D} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_2}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Изгибающий момент M_{11} , прогиб w , угол поворота нормали Ψ_1 , обобщенная поперечная сила Q_1^* , при совершенном механическом контакте остаются непрерывными на сечениях $x_1 = const$ разрыва механических характеристик. Эти функции используются в качестве основных разрешающих функций и соответствующим образом изменяется система (5). В системе (5) заменим поперечную силу Q_1 на обобщенную поперечную силу Q_1^* , исключив из нее моменты M_{11} , M_{22} и поперечную силу Q_2 .

Выразим изгибающий M_{22} и крутящий M_{12} моменты, а также поперечную силу Q_2 через основные функции M_{11} , w , Ψ_1 :

$$\begin{aligned} M_{22} &= \nu M_{11} - (1 - \nu^2) D \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \\ M_{12} &= -(1 - \nu) D \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}, \\ Q_2 &= \frac{\partial M_{11}}{\partial x_2} - (1 - \nu) D \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3}, \end{aligned} \quad (6)$$

а поперечную силу Q_1 заменим в соответствии с (4) через обобщенную поперечную силу Q_1^* .

Вследствие соответствующих преобразований получаем

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} = 2(1 - \nu) D \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + Q_1^*,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x_1} &= \phi_1, & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} &= -\frac{M_{11}}{D} - v \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \\ \frac{\partial Q_1^*}{\partial x_1} &= -v \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_2^2} + (1-v^2)D \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (7)$$

Функции M_{22} , M_{12} , Q_2 , не вошедшие смешанную систему (7), определяются через основные разрешающие функции M_{11} , w , ψ_1 по формулам (6), а $Q_1 = Q_1^* + (1-v)D \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_2^2}$.

Коэффициенты системы (5), а значит и уравнений (1), (2), могут быть произвольными функциями x_1 с разрывами первого рода.

Система (7) является операторной системой в нормальной форме Коши по координате x_1 .

Покажем, что эта система является операторной гамильтоновой системой [1] по пространственной координате x_1 :

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_1} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_1} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Для этого соответствующим образом выберем канонические переменные q_i , p_i и операторную функцию Гамильтона:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M_{11} \\ w \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \phi \\ Q_1^* \end{bmatrix}, \\ \hat{H} &= \frac{1}{2} \hat{P}_{ij} q_i q_j + \frac{1}{2} \hat{Q}_{ij} p_i p_j.\end{aligned}\quad (9)$$

Операторным элементам \hat{P}_{ij} и \hat{Q}_{ij} симметричных операторных матриц \hat{P} и \hat{Q} придадим следующие значения

$$\begin{aligned}-\hat{P}_{11} &= -\frac{1}{D}, & -\hat{P}_{12} &= -\hat{P}_{21} = -v \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \\ -\hat{P}_{22} &= (1-v^2)D \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ \hat{Q}_{11} &= 2(1-v)D \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, & \hat{Q}_{12} &= \hat{Q}_{21} = 1, & \hat{Q}_{22} &= 0.\end{aligned}\quad (10)$$

В операторном выражении (9) для функции Гамильтона и при выполнении дифференцирования в (8) операторы (9) \hat{P}_{ij} , \hat{Q}_{ij} считаются постоянными. В результате такой процедуры из (8) получим систему (7).

Аналогичным образом можно получить операторную гамильтонову

систему по пространственной координате x_2 , если в качестве основных разрешающих функций выбрать M_{22} , w , Ψ_2 , Q_2^* .

Операторную гамильтонову систему по пространственной координате x_1 можно получить из “изохронной” вариации функционала

$$I(M_{11}, w, \phi_1, Q_1^*) = \int_a^b \left\{ \phi_1 \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + Q_1^* \frac{\partial w}{\partial x_1} - \left[\frac{1}{2} D^{-1} M_{11}^2 + \nu \partial_2^2 M_{11} w + \frac{1}{2} \left(-(1-\nu^2) D \partial_2^4 - \rho h \partial_t^2 \right) w^2 + (1-\nu) D \partial_2^2 \phi_1^2 + \phi_1 Q_1^* \right] \right\} dx_1. \quad (11)$$

Представляет интерес также на основании функционала типа Хеллингера-Рейсснера Φ_{HR} в кирхгофовой теории изгиба пластин сформулировать смешанный функционал Φ_{HR}^{3M} и из его вариаций получить систему уравнений (7), как это сделано в [2] для теории типа Тимошенко.

РЕЗЮМЕ. Система кирхгофових рівнянь коливань пластин вперше представлена в операторній гамільтоновій формі чотирьох рівнянь по просторовій координаті.

Ключові слова: кирхгофові рівняння, гамільтонова форма рівнянь, коливання вигину.

SUMMARY. The system of the Kirchhoff equations of vibration of plates in the operator Hamilton form of four equations on a spatial coordinate is first represented.

Key words: the Kirchhoff equations, Hamilton form of equations, bending vibrations.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Павловський М. А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Шульга М. О. О гамільтоновом формализме в теории типа Тимошенко изгиба пластин // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 3–7.
3. Шульга М. О. Теория динамических процессов в механических системах и материалах регулярной структуры // Прикладная механика. – 2009. – Т 45, № 12. – С. 43–80.
4. Шульга Н. А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с.
5. Шульга О. М. Построение решений уравнений колебаний классической теории пластин с периодическими по одной координате параметрами // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 109–113.
6. Шульга О. М. Волновые решения уравнений типа Тимошенко поперечных колебаний пластин с периодическими по одной координате параметрами // Теорет. и прикладная механика. – 1996. – Вып. 26. – С. 105–111.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 29.09.2010

УДК 539.3

В.Г. КАРНАУХОВ, д-р физ.-мат. наук,
Т.В.КАРНАУХОВА, канд. физ.-мат. наук,
А.Ю.ШЕВЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук, *Н.В.ПЕТРЕНКО*

ВЛИЯНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ И ТЕМПЕРАТУРЫ ДИССИПАТИВНОГО РАЗОГРЕВА НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ РАБОТЫ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕНСОРОВ И АКТУАТОРОВ

Методом Бубнова–Галеркина решена задача о вынужденных резонансных изгибных колебаниях и диссипативном разогреве шарнирно опертой физически нелинейной прямоугольной пассивной неупругой пластины с распределенными пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами. Исследовано влияние физической нелинейности и температуры диссипативного разогрева на эффективность активного демпфирования колебаний пластины при совместном использовании сенсоров и актуаторов.

Ключевые слова: диссипативный разогрев, физическая нелинейность, пьезоэлектрические сенсоры и актуаторы.

Прямоугольные слоистые пластины находят широкое применение в различных областях современной техники. Часто одни из слоев являются несущими, а другие изготавливаются из материалов с высокими гистерезисными потерями и предназначены для увеличения пассивного демпфирования колебаний. В зависимости от назначения конструкции и условий ее работы такие включения могут изготавливаться из полимерных (вязкоупругих) или металлических (упруго-пластических, вязкоупруго-пластических) материалов. Вопросам пассивного демпфирования тонкостенных элементов при помощи неупругих включений посвящена обширная литература, обзор которой представлен в [5,10]. В последние годы для демпфирования колебаний начали интенсивно использоваться активные методы. Одним из основных методов активного демпфирования является метод, использующий пьезоэлектрические сенсоры и актуаторы [7,8]. Эффективность этого метода зависит от эффективности работы этих пьезовключений, на которую могут оказать влияние физическая нелинейность и температура диссипативного разогрева. В литературе отсутствуют работы, в которых исследовалось бы влияние физической нелинейности и температуры диссипативного разогрева на эффективность работы сенсоров и актуаторов. Настоящая статья и посвящена изучению этого вопроса. В ней представлено обобщение результатов работы [3] для трехслойной прямоугольной пластины из пассивных материалов с внутренним слоем из физически нелинейного материала. По сравнению с постановкой работы [3] здесь на прямоугольную пластину дополнительно нанесены еще два слоя из пьезоэлектрического материала, которые выполняют роль сенсоров и актуаторов. Рассмотрена задача о вынужденных резонансных колебаниях и диссипативном разогреве такой пятислойной пластины. Пьезоэлектрические слои покрыты электродами, на которых вырезаются прямоугольные пятна нужных размеров. К этим пятнам может

быть подведена разность потенциалов или с них может быть снята разность потенциалов. Вне пятна разность потенциалов равна нулю.

Постановка задачи. Рассмотрим пятислойную прямоугольную пластину с размерами $(a \times b)$ указанной выше структуры. На пластину действует равномерное поверхностное давление $q = q_0 \exp(i \omega t)$, изменяющееся по гармоническому закону с частотой ω , близкой к резонансной. Торцы пластины считаются шарнирно опертыми. Действительная G' и мнимая G'' составляющие модуля комплексного сдвига $G = G' + iG''$ среднего изотропного слоя зависят от амплитуд деформаций. Эта зависимость находится из экспериментов. Так как многие рассуждения и формулы совпадают с представленными в [3], при постановке задачи приведем лишь те из соотношений, которые появляются из-за присутствия на поверхностях пассивной трехслойной пластины пьезоэлектрических слоев с противоположной поляризацией. Такие слои при подводе к ним разности потенциалов будут вызывать только изгибные колебания и в связи с этим могут использоваться для демпфирования именно таких колебаний.

Универсальное комплексное уравнение гармонического изгибного движения пластины имеет следующий вид [3]:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \tilde{\rho} \omega^2 w = q_0, \quad (1)$$

где $\tilde{\rho} = \rho_0 h_0 + 2\rho_1 h_1 + 2\rho_3 h_3$ – приведенная плотность; $\rho_0, h_0, \rho_1, h_1, \rho_3, h_3$ – плотности и толщины среднего, двух внешних пассивных и двух активных слоев. Универсальные комплексные кинематические соотношения запишутся в форме [1]

$$\kappa_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2)$$

В предположении о постоянстве температуры по толщине пластины универсальное стационарное уравнение энергии может быть представлено в виде [3]

$$\tilde{k} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) - 2\alpha \theta + W = 0, \quad (3)$$

в котором $\tilde{k} = k_0 h_0 + 2k_1 h_1 + 2k_2 h_2$ – приведенный коэффициент теплопроводности; α – коэффициент теплоотдачи.

Представленные универсальные уравнения необходимо дополнить комплексными определяющими уравнениями для моментов и для диссипативной функции, которые для пластины указанной структуры имеют вид [4]

$$\begin{aligned} M_x &= D_{11} \kappa_x + D_{12} \kappa_y + M_0, \\ M_y &= D_{12} \kappa_x + D_{212} \kappa_y + M_0, \quad H = D_{12} \kappa_{12}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$W = \frac{\omega}{2} \left[(M_1'' \kappa_1' - M_1' \kappa_1'') + (M_2'' \kappa_2' - M_2' \kappa_2'') + 2(H_{12}'' \kappa_{12}' - H_{12}' \kappa_{12}'') \right]. \quad (5)$$

Здесь

$$M_0 = \frac{1}{2} h \gamma_{31} V_A, \quad h = h_0 + H_1, \quad H_1 = h_1 + h_2;$$

V_A – подводимая к актуатору разность потенциалов. Выражения для жесткостных характеристик представлены, например, в статье [4].

Материалы пьезослоев считаются упругими, так что диссипативный разогрев в них не учитывается. Так как модуль сдвига зависит от второго инварианта Γ девиатора тензора деформаций, то изгибная жесткость D будет нелинейной функцией изгибных деформаций. Подставляя уравнения состояния (4) в уравнения движения (1) и в диссипативную функцию (5) и учитывая кинематические соотношения (2), получим нелинейную систему дифференциальных уравнений относительно комплексного прогиба w и температуры T для изотропного пассивного материала:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[2(1-\nu) D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] - (\gamma h) \omega^2 w + p_0(x, y) = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{2\alpha}{(\lambda h)} (T - T_C) + \frac{\omega G''(\Gamma) h^3}{12 a^2 (1-\nu)(\lambda h)} \times \\ & \times \left\{ \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w''}{\partial y^2} \right) + \right. \\ & \left. + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь и в дальнейшем считается, что коэффициент Пуассона ν является действительной постоянной величиной; Δ – оператор Лапласа;

$$w = w' + iw'', \quad D_{ij} = D'_{ij} + iD''_{ij}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad p_0 = q_0 + \Delta M_0; \quad (8)$$

$2\alpha = (\alpha^+ + \alpha^-)$; $T_C = (\alpha^+ T^+ + \alpha^- T^-) / (2\alpha)$; α^+ , α^- – коэффициенты теплообмена на нижней и верхней поверхностях пластины с температурами T^+ , T^- Механические и тепловые граничные условия стандартны [1, 4].

Для коротко-замкнутых электродов снимаемый с сенсора заряд вычисляется по формуле [4]

$$Q = h \gamma_{31} \iint_S \Delta w \, dx \, dy. \quad (9)$$

Для расчета снимаемой с сенсора разности потенциалов V_S используется формула $Q = V_S S_1 \gamma_{33} / h_1$.

Если свойства материала не зависят от температуры, связанная задача термомеханики распадается на две отдельные задачи. Сначала решается нелинейная задача о механических колебаниях пластины, затем вычисляется диссипативная функция и, наконец, решается уравнение теплопроводности с известным источником тепла.

Аналитическое решение задачи. Вид аналитического решения рассматриваемой задачи зависит от аппроксимации модуля сдвига, как функции второго инварианта девиатора тензора деформаций. Эта функция может быть получена с использованием различных моделей [3]. Как и в [3], здесь будут использованы приведенные в [9] экспериментальные данные для модуля сдвига диссипативного полимерного материала, которые с большой точностью аппроксимировались такими функциями:

$$G' = a_1 - b_1 \Gamma^2, \quad G'' = a_2 - b_2 \Gamma^2, \quad (10)$$

где a_i, b_i ($i = 1, 2$) – параметры, определяемые экспериментально. Для указанного полимера

$$\begin{aligned} a_1 &= 2,410 \cdot 10^5 \text{ Па}, & a_2 &= 1,810 \cdot 10^5 \text{ Па}, \\ b_1 &= 0,537 \cdot 10^7 \text{ Па}, & b_2 &= 0,380 \cdot 10^7 \text{ Па}. \end{aligned}$$

Коэффициент Пуассона диссипативного материала считается действительным и постоянным. Именно аппроксимация (10) и будет использована в дальнейшем, так как она дает возможность получать простое аналитическое решение задачи о колебаниях и диссипативном разогреве физически нелинейной прямоугольной пластины и на его основе построить амплитудно-частотные и температурно-частотные характеристики. При шарнирном опирании торцов прогиб на первом резонансе колебаний представлялся в виде

$$w = w_{11} \sin k_1 x \sin p_1 y, \quad k_1 = \pi / a, \quad p_1 = \pi / b.$$

Пренебрегая влиянием пьезослоев на жесткостные характеристики пластины из-за их малой толщины, с использованием аппроксимации (10) после громоздких выкладок при помощи метода Бубнова-Галеркина получаем кубическое уравнение для безразмерной амплитуды $y = |w_{11}|^2 / h^2$ колебаний прямоугольной пластины с актуатором [3]:

$$y^3 - \frac{2(C_1' C_2' + C_1'' C_2'')}{(C_2')^2 + (C_2'')^2} \frac{1}{h^2} y^2 + \frac{(C_1')^2 + (C_1'')^2}{(C_2')^2 + (C_2'')^2} \frac{1}{h^2} y - \frac{1}{(C_2')^2 + (C_2'')^2} \frac{\hat{p}_0^2}{h^6} = 0. \quad (11)$$

Оно отличается от приведенного в [3] выражением для нагрузки \hat{p}_0 , которая имеет вид

$$\hat{p}_0 = \frac{16}{\pi^2} \left[q_0 - (k_1^2 + p_1^2) M_0 \sin \frac{\pi c}{2a} \sin \frac{\pi d}{2b} \right], \quad M_0 = \frac{1}{2} h \gamma_{31} V_A. \quad (12)$$

Решение уравнения энергии. Стационарная температура диссипативного разогрева находится из решения дифференциального уравнения теплопроводности (7) при граничных условиях, отвечающих теплоизоляции торцов пластины:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0, a; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, b. \quad (13)$$

Точное решение краевой задачи (7), (13) получено в [3] и имеет вид:

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 \cos 2k_1 x + \theta_2 \cos 2p_1 y + \theta_{12} \cos 2k_1 x \cos 2p_1 y, \quad (14)$$

где

$$\theta_0 = \frac{\omega |w_{11}|^2}{16\alpha} W_0, \quad \theta_1 = -\frac{\omega |w_{11}|^2}{8(2\alpha + 4\tilde{k}k_1^2)} W_1, \\ \theta_2 = -\frac{\omega |w_{mn}|^2}{8(2\alpha + 4\tilde{k}p_1^2)} W_2, \quad \theta_{12} = \frac{\omega |w_{11}|^2}{8[2\alpha + 4\tilde{k}(k_1^2 + p_1^2)]} W_{12}; \quad (15)$$

$$W_0 = W_{12} = \left[D''(k_1^4 + 2\nu k_1^2 p_1^2 + p_1^4) + 2D_{12}'' k_1^2 p_1^2 \right], \\ W_1 = W_2 = -\left[D''(k_1^4 + 2\nu k_1^2 p_1^2 + p_1^4) - 2D_{12}'' k_1^2 p_1^2 \right]; \quad (16)$$

$$D'' = \frac{h^3}{1-\nu} \left(\frac{1}{6} a_2 - \frac{h^2}{160} b_2 |w_{11}|^2 r_{11} \right),$$

$$D_{12}'' = -h^3 \left(\frac{1}{6} a_2 - \frac{h^2}{160} b_2 |w_{11}|^2 s_{11} \right),$$

$$r_{mn} = \frac{5}{4} (k_1^2 + p_1^2)^2 + (k_1^4 + p_1^4), \quad s_{mn} = \frac{5}{4} (k_1^2 + p_1^2)^2 - (k_1^4 + p_1^4). \quad (17)$$

Показатели сенсора находятся из выражения (9), которое для шарнирного опирания дает

$$Q = -4(h_0 + h_1 + h_2) \frac{a^2 + b^2}{ab} \gamma_{31} \sin \frac{\pi c}{2a} \sin \frac{\pi d}{2b} w_{11} = \\ = -4(h_0 + h_1 + h_2) \frac{a^2 + b^2}{ab} \gamma_{31} \sin^2 \frac{\pi l}{2L} w_{11} \quad (18)$$

где l, L – соответственно диагонали пьезопятна и пластины.

Анализ результатов. Формулы (12), (14)–(18) дают возможность оценить влияние физической нелинейности и температуры на эффективность работы сенсора и актуатора при резонансных колебаниях. Из формулы (18) следует, что показатели сенсора пропорциональны амплитуде колебаний пластины. При заданных механической либо электрической нагрузке и частоте амплитуда определяется из решения кубического уравнения (11). При определенных значениях нагрузки, частоте и параметрах пластины это уравнение может иметь как одно, так и три действительных корня.

вительных решения. В последнем случае два из них будут устойчивыми, а одно – неустойчивым. Таким образом, показания сенсора могут быть неоднозначными с характерными для нелинейных систем перескоками с одной ветви на другую. Кроме того, даже при однозначности амплитудно-частотной характеристики физическая нелинейность может сильно повлиять на числовые значения показателей сенсора.

В качестве примера были проведены расчеты для квадратной пластины с толщиной $h=0,05$ м и длиной стороны $a=b=0,5$ м. Усредненный коэффициент Пуассона $\nu=0,31$, плотность неупругого материала $\rho_0=1200$ кг/м³, а упругого – $\rho_1=7800$ кг/м³. Амплитуда изменяющегося по гармоническому во времени закону поверхностного давления $q_0=2 \cdot 10^3$ Па. Коэффициент теплопроводности неупругого материала $\lambda_0=0,3$ Вт/м·град, а упругого – $\lambda_1=0,38$ Вт/м·град. Тепловые граничные условия отвечают условиям конвективного теплообмена с внешней средой с температурой $\theta=20^\circ\text{C}$, при этом коэффициент теплообмена по внешним поверхностям пластины $\alpha=5$ Вт/м²·град. При расчете с применением аналитического решения использовалась указанная выше аппроксимация (10).

Расчетные данные, иллюстрирующие влияние физической нелинейности на амплитудно- и температурно-частотные характеристики, представлены на рис.1, 2. Здесь сплошная линия отвечает расчетам с учетом физической нелинейности, пунктирная – без такого учета. Как видно, учет физической нелинейности для данного материала ухудшает эффективность демпфирования резонансных колебаний пластины и увеличивает температуру диссипативного разогрева. Так как показания сенсора определяются через амплитуду колебаний по формуле (18), то физическая нелинейность может существенно повлиять на величину показаний сенсора. При достижении температурой диссипативного разогрева точки Кюри пьезоактивный материал становится пассивным и работа пьезоактуатора ухудшается. Во избежание этого будем считать, что температура не должна достигать точки Кюри ни в одной точке области. Из этого усло-

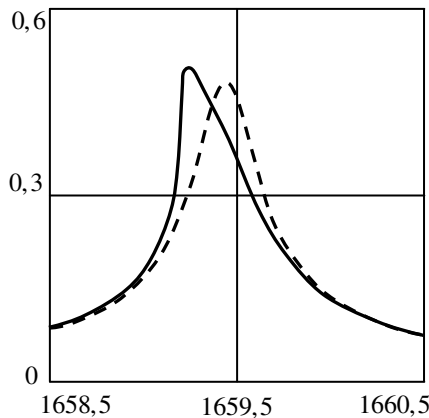


Рис. 1

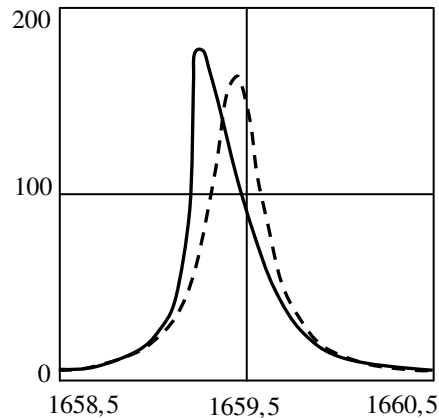


Рис. 2

вия можно найти критическое значение механической и электрической нагрузки, при которой актуатор достигает точки Кюри в центре пластины, где температура является максимальной. Из формулы (18) видно, что при достижении температурой диссипативного разогрева точки Кюри T_K , когда $\gamma_{31}(T_K) = 0$, показатели сенсора становятся равными нулю, так что сенсор теряет свое функциональное назначение из-за потери пьезоэффекта. Положив максимальную температуру диссипативного разогрева в центре пластины равной точке Кюри, из представленных выше формул можно определить максимально допустимое значение амплитуды колебаний, а по ней найти максимально допустимую амплитуду поперечного давления. Последняя определяется из формул (11), (14)–(16) и равна

$$q_{0\max} = \frac{\pi^2}{16} \left\{ h^6 \left[(C_2')^2 + (C_2'')^2 \right] \tilde{\theta}^3 + h^2 \left[(C_1')^2 + (C_1'')^2 \right] \tilde{\theta} \right\}^{1/2}. \quad (19)$$

Здесь введены обозначения

$$\tilde{\theta} = \frac{\theta_K}{\hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_{12}}, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_0 &= \frac{\omega h^2 |W_0|}{16\alpha}, & \hat{\theta}_1 &= \frac{\omega h^2 |W_1|}{8(2\alpha + 4\tilde{k}k_1^2)}, \\ \hat{\theta}_2 &= \frac{\omega h^2 |W_1|}{8(2\alpha + 4\tilde{k}p_1^2)}, & \hat{\theta}_{12} &= \frac{\omega h^2 |W_0|}{8(2\alpha + 4\tilde{k}p_1^2)}. \end{aligned} \quad (21)$$

При превышении поперечной нагрузкой величины $q_{0\max}$ сенсор теряет свое функциональное назначение из-за исчезновения пьезоэффекта в активном материале. Поэтому физическая нелинейность и температура диссипативного разогрева существенно влияют на функционирование сенсора. Как видно из формулы (12), аналогичное утверждение имеет место и при возбуждении колебаний электрической нагрузкой путем приложения к актуатору разности потенциалов V_A . Все приведенные выше рассуждения сохраняются в силе при замене q_0 на

$$\begin{aligned} (k_1^2 + p_1^2) M_0 \sin \frac{\pi c}{2a} \sin \frac{\pi d}{2b} &= \frac{1}{2} h \gamma_{31} V_A (k_1^2 + p_1^2) \sin \frac{\pi c}{2a} \sin \frac{\pi d}{2b} = \\ &= \frac{1}{2} h \gamma_{31} V_A (k_1^2 + p_1^2) \sin^2 \frac{\pi l}{2L} \end{aligned} \quad (22)$$

Из этого выражения видно, что при достижении температурой точки Кюри в случае действия электрической нагрузки колебания не возбуждаются, так как электрическая нагрузка становится равной нулю. Максимальная разность потенциалов, при подведении которой температура достигает точки Кюри, определяется по формуле (19) при учете указанной

выше замены. Эффективность работы сенсора оценивается по величине Q при одной и той же амплитуде колебаний: тот сенсор более эффективен, у которого эта величина больше. Эффективность работы актуатора оценивается по величине электрической нагрузки при подводе к нему разности потенциалов: тот актуатор эффективнее, у которого эта нагрузка больше. Из формул (18), (22) видно, что функционирование сенсоров и актуаторов будет наиболее эффективным при $l = L$, т.е. при полном покрытии электродом поверхности пластины. Так как сенсоры и актуаторы являются основными элементами при активном демпфировании колебаний пластин, можно утверждать, что в этом случае физическая нелинейность и температура диссипативного разогрева будут оказывать существенное влияние на эффективность активного демпфирования вынужденных резонансных колебаний при помощи сенсоров и актуаторов.

Более точное значение критической нагрузки найдем, считая, что температура диссипативного разогрева достигается, например, на концах диагонали сенсора или актуатора. При этом во всей активной области температура диссипативного разогрева будет превышать точку Кюри. При таком значении механической нагрузки работа сенсора не просто ухудшается, а с его помощью нельзя получить информацию об амплитуде прогиба.

В заключение сделаем еще одно замечание. Из формулы (12) видно, что при подводе к актуатору разности потенциалов

$$V_A = \frac{2}{h(k_1^2 + p_1^2)\gamma_{31} \sin^2(\pi l / 2L)},$$

амплитуда вынужденных колебаний при совместном действии механической и электрической нагрузок будет равна нулю. При этом физическая нелинейность не влияет на величину той разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации действия механической нагрузки. Это очень важный факт, так как указанная разность потенциалов может быть определена с использованием линейной теории.

РЕЗЮМЕ. Методом Бубнова-Гальоркина розв'язано задачу про вимушені резонансні згинні коливання і дисипативний розігрів шарнірно обпертої фізично нелінійної прямокутної пасивної непружної пластини з розподіленими п'єзоелектричними сенсорами та актуаторами. Досліджено вплив фізичної нелінійності і температури дисипативного розігріву на ефективність роботи сенсори та актуаторів.

Ключові слова: дисипативний розігрів, фізична нелінійність, п'єзоелектричні сенсори та актуатори.

SUMMARY. By Bubnov-Galerkin method the problem of the forced resonance vibrations and dissipative heating of a rectangular passive nonelastic plate with distributed piezoelectric sensors and actuators is solved. The edges of the plate are simply supported. The influence of the physical nonlinearity and dissipative heating on effectiveness of a work of the sensors and actuators is studied.

Key words: dissipative heating, physical nonlinearity, piezoelectric sensors and actuators

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1967. – 266 с.
2. Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Сичко В. М. Моногармонічне наближення в задачах про нелінійні коливання і дисипативний розігрів непружних тіл // Мат. методи та фіз.-

мех. поля. – 2006. – Т. 49, № 1. – С. 85–105.

3. *Карнаухов В. Г., Сичко В. М., Карпенюк А. С.* Влияние физической нелинейности на резонансные колебания и диссипативный разогрев трехслойных прямоугольных пластин // Теорет и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 102–110.

4. *Карнаухова Т. В., Пятецкая Е. В.* Основные соотношения теории термовязкоупругих пластин с распределенными сенсорами и актуаторами // Прикладная механика. – 2010. – Т. 45, № 1. – С. 94–104.

5. *Матвеев В. В.* Демпфирование колебаний деформируемых тел. – К.: Наук. думка. 1985. – 264 с.

6. *Пальмов В. А.* Колебания упругопластических тел. – М.: Наука, 1976. – 328 с.

7. Encyclopedia of Smart Materials, Volumes 1–2 (ed. Schwartz, Mal). – John Wiley&Sons, 2002. – 1176 p.

8. *Gabbert U. and Tzou H. S.* Smart Structures and Structronic Systems. – Kluwer Academic Pub.: Dordrecht/Boston/London, 2001. – 384 p.

9. *Gandhi F.* Influence of Nonlinear Viscoelastic Material Characterization on Performance of Constrained Layer Damping Treatment // AIAA J. – 2001. – Vol. 39, № 5. – P. 924–931.

10. *Jones D. I.* Handbook of Viscoelastic Vibration Damping. – John Wiley&Sons, 2001. – 412 p.

Институт механики НАНУ, г. Киев

Национальный технический университет Украины “КПИ”, г. Киев

Поступила 10.06.2010

УДК 539.375

А. А. КАМИНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук,
 Л. А. КИПНИС, д-р физ.-мат. наук,
 Г. А. ХАЗИН, канд. физ.-мат. наук, А. Е. КРАСИЛЬНИКОВ

АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА УПРУГИХ СРЕД ПРИ НАЛИЧИИ ЗОНЫ ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ

Решена симметричная задача о расчете зоны предразрушения в угловой точке границы раздела изотропных упругих сред. Зона предразрушения моделируется линией разрыва нормального смещения. Решение соответствующей задачи линейной теории упругости построено методом Винера-Хопфа. Исследовано поведение напряжений вблизи угловой точки.

Ключевые слова: угловая точка, зона предразрушения, линия разрыва смещения, метод Винера-Хопфа

Решение плоских задач о расчетах зон предразрушения вблизи остроконечных концентраторов напряжений в деформируемых твердых телах в рамках моделей с линиями разрыва смещения представляет собой актуальное направление исследований в области механики разрушения. Однако большинство работ этого направления относится к случаям, когда концентраторами напряжений являются лишь концы трещин [1–3, 5, 7, 9, 10]. Значительно меньше таких работ посвящено изучению других угловых точек – концентраторов напряжений. В данной работе решена симметричная задача о расчете зоны предразрушения в угловой точке границы раздела изотропных упругих сред.

1. Постановка задачи. В условиях плоской деформации в рамках симметричной задачи рассмотрим кусочно-однородное изотропное упругое тело с границей раздела сред в форме сторон угла. С ростом внешней нагрузки вблизи угловой точки границы раздела сред появляется и развивается узкая зона предразрушения, расположенная в менее трещиностойком материале. Изучим начальную стадию развития зоны предразрушения, когда ее размер значительно меньше размеров тела, определим длину зоны предразрушения и исследуем поведение напряжений вблизи рассматриваемой угловой точки.

Поскольку материал тела является упругим, преимущественные деформации в зоне предразрушения развиваются по механизму отрыва. Поэтому узкую зону предразрушения будем моделировать линией разрыва нормального смещения, на которой нормальное напряжение равно заданной постоянной материала σ .

Таким образом, с учетом малости зоны предразрушения приходим к плоской статической симметричной задаче линейной теории упругости

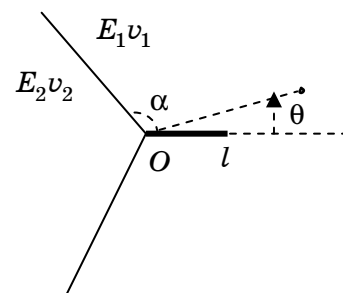


Рис.1

для кусочно-однородной изотропной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, содержащей разрез конечной длины, исходящий из угловой точки (рис. 1).

На бесконечности реализуется асимптотика, представляющая собой решение аналогичной задачи без разреза (задача K), порождаемое единственным в интервале $(-1, 0)$ корнем ее характеристического уравнения. Произвольная постоянная C , входящая в это решение, считается заданной. Она характеризует интенсивность внешнего поля и должна определяться из решения внешней задачи.

Граничные условия задачи имеют вид:

$$\langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0, \quad \text{при } \theta = \alpha,$$

$$\tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0 \quad \text{при } \theta = \pi, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } \theta = 0; \quad (1.1)$$

$$\sigma_\theta = \sigma \quad \text{при } \theta = 0, \quad r < l, \quad u_\theta = 0 \quad \text{при } \theta = 0, \quad r > l; \quad (1.2)$$

$$\sigma_\theta = C g r^{\lambda_0} + o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при } \theta = 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

Здесь $0 \leq \theta \leq \pi$; $\langle a \rangle$ – скачок a ; λ_0 – единственный в интервале $(-1, 0)$ корень уравнения

$$\Delta(-\lambda - 1) = 0, \quad \Delta(z) = \delta_0(z) + \delta_1(z)e + \delta_2(z)e^2;$$

$$\delta_0(z) = [\sin 2z(\pi - \alpha) - z \sin 2\alpha] (\alpha_1 \sin 2z\alpha - z \sin 2\alpha);$$

$$\delta_1(z) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \sin^2 z\pi - [\sin 2z(\pi - \alpha) - z \sin 2\alpha] \times$$

$$\times (\alpha_1 \sin 2z\alpha - z \sin 2\alpha) - (\sin 2z\alpha + z \sin 2\alpha) \times$$

$$\times [\alpha_2 \sin 2z(\pi - \alpha) + z \sin 2\alpha];$$

$$\delta_2(z) = (\sin 2z\alpha + z \sin 2\alpha) [\alpha_2 \sin 2z(\pi - \alpha) + z \sin 2\alpha];$$

$$e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} e_0; \quad e_0 = \frac{E_1}{E_2}; \quad \alpha_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2};$$

$g(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2)$ – известная функция; E_1, E_2 – модули Юнга; ν_1, ν_2 – коэффициенты Пуассона.

Решение сформулированной задачи линейной теории упругости представляет собой сумму решений следующих двух задач. Первая отличается от нее тем, что вместо первого условия (1.2) имеем

$$\theta = 0, \quad r < l, \quad \sigma_\theta = \sigma - C g r^{\lambda_0}, \quad (1.4)$$

а на бесконечности напряжения затухают как $o(1/r)$ (в (1.3) отсутствует первое слагаемое). Вторая задача – задача K . Поскольку решение второй задачи известно, достаточно построить решение первой.

Для построения решения первой задачи используется метод Винера-Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина [3, 4, 6, 8].

2. Решение уравнения Винера-Хопфа задачи, определение длины

зоны предразрушения. Применяя преобразование Меллина к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука, условиям (1.1) и учитывая второе условие (1.2) и условие (1.4), приходим к следующему функциональному уравнению Винера-Хопфа:

$$\begin{aligned}
\Phi^+(p) + \frac{\sigma}{p+1} + \frac{\sigma_1}{p+\lambda_0+1} &= ctgp \pi G(p) \Phi^-(p), \\
G_{(p)} &= \frac{[a_0(p) + a_1(p)e + a_2(p)e^2] \sin p\pi}{[b_0(p) + b_1(p)e + b_2(p)e^2] \cos p\pi}, \\
a_0(p) &= [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] \left[(1 + \varkappa_1)^2 - \right. \\
&\quad \left. - 4(\varkappa_1 \sin^2 p\alpha + p^2 \sin^2 \alpha) \right], \\
a_1(p) &= (1 + \varkappa_1)(1 + \varkappa_2) \sin 2p\pi + 4(\sin^2 p\alpha - p^2 \sin^2 \alpha) \times \\
&\quad \times [\varkappa_2 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] - [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] \times \\
&\quad \times [(1 + \varkappa_1)(1 + \varkappa_2) - 4(\varkappa_1 \sin^2 p\alpha + p^2 \sin^2 \alpha)], \\
a_2(p) &= -4(\sin^2 p\alpha - p^2 \sin^2 \alpha) [\varkappa_2 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha], \\
b_0(p) &= 2[\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] (\varkappa_1 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha), \\
b_1(p) &= 2\{(1 + \varkappa_1)(1 + \varkappa_2) \sin^2 p\pi - [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] \times \\
&\quad \times (\varkappa_1 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha) - (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \times \\
&\quad \times [\varkappa_2 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha]\}, \\
b_2(p) &= 2(\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) [\varkappa_2 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha], \\
\sigma_1 &= -Cgl^{\lambda_0}, \quad \Phi^+(p) = \int_1^\infty \sigma_\theta(\rho l, 0) \rho^p d\rho, \\
\Phi^-(p) &= \frac{E_1}{2(1 - \nu_1^2)} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \Big|_{r=\rho l}^1 \rho^p d\rho. \tag{2.1}
\end{aligned}$$

Здесь $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$; $\varepsilon_{1,2}$ – достаточно малые положительные числа.

Подобные уравнения решены, например, в [3, 4]. Решение уравнения (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned}
\Phi^+(p) &= K^+(p) G^+(p) \left\{ \frac{\sigma}{p+1} \left[\frac{1}{K^+(-1)G^+(-1)} - \frac{1}{K^+(p)G^+(p)} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma_1}{p+\lambda_0+1} \left[\frac{1}{K^+(-\lambda_0-1)G^+(-\lambda_0-1)} - \frac{1}{K^+(p)G^+(p)} \right] \right\} \quad (\operatorname{Re} p < 0),
\end{aligned}$$

$$\Phi^-(p) = \frac{pG^-(p)}{K^-(p)} \left[\frac{\sigma}{(p+1)K^+(-1)G^+(-1)} + \frac{\sigma_1}{(p+\lambda_0+1)K^+(-\lambda_0-1)G^+(-\lambda_0-1)} \right] \quad (\operatorname{Re} p > 0), \quad (2.2)$$

где

$$\exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0 \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0 \end{cases}, \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1/2 \mp p)};$$

$\Gamma(z)$ – Гамма-функция.

Коэффициент K_I интенсивности напряжений в конце разреза выражается формулой

$$K_I = \frac{\sqrt{2} g \Gamma(\lambda_0 + 3/2)}{\Gamma(\lambda_0 + 2) G^+(-\lambda_0 - 1)} C l^{\lambda_0 + 1/2} - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} G^+(-1)} \sigma \sqrt{l}. \quad (2.3)$$

Длина зоны предразрушения определяется из условия ограниченности напряжений вблизи конца линии разрыва нормального смещения, т.е. из условия равенства нулю коэффициента K_I . Приравнивая к нулю правую часть (2.3), для определения длины l зоны предразрушения получаем следующую формулу:

$$l = L \left(\frac{|C|}{\sigma} \right)^{-1/\lambda_0}, \quad L = \left[\frac{2|g| \Gamma(\lambda_0 + 3/2) G^+(-1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda_0 + 2) G^+(-\lambda_0 - 1)} \right]^{-1/\lambda_0}.$$

3. Анализ поведения напряжений вблизи угловой точки. С помощью (2.1), (2.2) и формулы обращения Меллина получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \Big|_{\theta=0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{2(1-v_1^2) \Lambda(p) \Delta(p) K^+(p) G^+(p)}{m(p+1)(p+\lambda_0+1)D(p)} \left(\frac{r}{l} \right)^{-p-1} dp, \\ \Lambda(p) &= m_1(p+1) + m_2(p+\lambda_0+1), \\ D(p) &= a_0(p) + a_1(p)e + a_2(p)e^2, \\ m &= \Gamma(\lambda_0 + 2) G^+(-1) G^+(-\lambda_0 - 1) E_1, \\ m_1 &= -2g \Gamma(\lambda_0 + 3/2) G^+(-1) C l^{\lambda_0}, \\ m_2 &= \sqrt{\pi} \Gamma(\lambda_0 + 2) G^+(-\lambda_0 - 1) \sigma. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь γ – произвольная прямая, параллельная мнимой оси и лежащая в полосе $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < 0$.

В полосе $-1 < \operatorname{Re} p < 0$ ближайшей к мнимой оси особенностью по-

дынтегральной функции в (3.1) является простой полюс в точке $p = -\lambda_1 - 1$, где λ_1 – наименьший в интервале $(-1; 0)$ корень уравнения $D(-\lambda - 1) = 0$. Используя это и применяя к интегралу (3.1) теорему о вычетах, находим следующую асимптотику для производной смещения u_θ в задаче теории упругости с граничными условиями (1.1) – (1.3):

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \sim Q r^{\lambda_1} \quad (\theta = 0, r \rightarrow 0),$$

$$Q = \frac{2(1 - \nu_1^2) \Delta(-\lambda_1 - 1) \Gamma(\lambda_1 + 2) G^+(-\lambda_1 - 1) M}{\lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_0) D^-(-\lambda_1 - 1) \Gamma(\lambda_1 + \frac{3}{2}) m},$$

$$M = 2\lambda_1 g \Gamma(\lambda_0 + \frac{3}{2}) G^+(-1) C l^{\lambda_0 - \lambda_1} + \sqrt{\pi} (\lambda_0 - \lambda_1) \times$$

$$\times \Gamma(\lambda_0 + 2) G^+(-\lambda_0 - 1) \sigma l^{-\lambda_1}. \quad (3.2)$$

Аналогичные асимптотики можно получить для напряжений $\sigma_\theta(r, \theta)$, $\tau_{r\theta}(r, \theta)$, $\sigma_r(r, \theta)$.

На рис. 2 качественно изображена зависимость λ_1 от угла α ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$). В таблице приведены некоторые значения λ_1 .

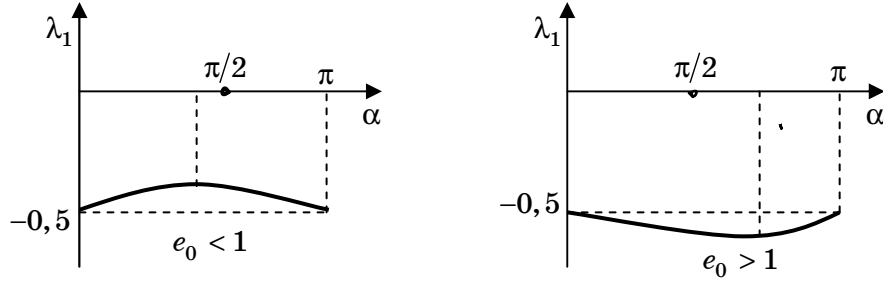


Рис.2

α^0	e_0							
	0,1	0,2	0,3	0,5	2	3	5	10
15	-0,499	-0,499	-0,499	-0,499	-0,501	-0,503	-0,505	-0,509
30	-0,489	-0,491	-0,492	-0,495	-0,509	0,515	-0,525	-0,543
45	-0,462	-0,468	-0,475	-0,482	-0,523	-0,538	-0,560	-0,599
60	-0,408	-0,426	-0,445	-0,464	-0,541	-0,567	-0,604	-0,665
75	-0,342	-0,381	-0,415	-0,445	-0,559	-0,597	-0,648	-0,719
105	-0,382	-0,397	-0,417	-0,441	-0,579	-0,630	-0,694	-0,771
120	-0,409	-0,419	-0,433	-0,451	-0,574	-0,624	0,688	-0,766
135	-0,425	-0,435	-0,448	-0,462	-0,559	-0,602	-0,661	-0,740
150	-0,430	-0,448	-0,462	-0,474	-0,538	-0,569	-0,616	-0,690
165	-0,440	-0,468	-0,479	-0,487	-0,518	-0,534	-0,561	-0,614

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы. Угловая точка O является особой точкой задачи теории упругости с граничными условиями (1.1) – (1.3). Она представляет собой концентратор напряжений. При приближении точки области к точке O напряжения стремятся к бесконечности. Стремление напряжений к бесконечности при $r \rightarrow 0$ соответствует тому, что часть зоны предразрушения, находящаяся вблизи угловой точки, является областью деструкции материала, уровень напряжений в которой чрезвычайно высок. Особенность напряжений в точке O степенная. Показатель степени сингулярности напряжений λ_1 зависит от угла, отношения модулей Юнга и от коэффициентов Пуассона. Этот показатель представляет собой наименьший в интервале $(-1; 0)$ корень определенного трансцендентного уравнения.

Если $e_0 = E_1 / E_2 < 1$, то с ростом угла α интенсивность напряжений вблизи угловой точки O при наличии зоны предразрушения (в частности, в области деструкции материала) сначала ослабевает, а затем усиливается. Угол $\alpha_{\max}(e_0)$, выраженный в градусах, (α_{\max}^0) , при котором интенсивность напряжений будет наименьшей, лежит в интервале от 80° до 90° и увеличивается с увеличением e_0 . Значениям e_0 , равным 0,1; 0,2; 0,3; 0,5, соответствуют значения α_{\max}^0 , равные $82,4^\circ$; $83,2^\circ$; $85,1^\circ$; $87,2^\circ$, и значения $-\lambda_1(\alpha_{\max})$, равные 0,334; 0,372; 0,406; 0,437.

Если $e_0 > 1$, то с ростом угла α интенсивность напряжений вблизи угловой точки O при наличии зоны предразрушения сначала усиливается, а затем ослабевает. Угол $\alpha_{\min}^0(e_0)$, при котором интенсивность напряжений будет наибольшей, лежит в интервале от 90° до 110° и увеличивается с увеличением e_0 . Значениям e_0 , равным 2; 3; 5; 10, соответствуют значения α_{\min}^0 , равные $103,3^\circ$; $106,4^\circ$; $108,4^\circ$; $109,1^\circ$, и значения $-\lambda_1(\alpha_{\min})$, равные 0,579; 0,630; 0,694; 0,771.

Если угол α стремится к нулю или к π , то показатель степени сингулярности напряжений стремится к $-0,5$.

С ростом e_0 интенсивность напряжений вблизи угловой точки O при наличии зоны предразрушения усиливается.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто симетричну задачу про розрахунок зони передруйнування у кутовій точці межі поділу ізотропних пружних середовищ. Зона передруйнування моделюється лінією розриву нормального переміщення. Розв'язок відповідної задачі лінійної теорії пружності побудовано методом Вінера-Хопфа. Досліджено поведінку напружень біля кутової точки.

Ключові слова: кутова точка, зона передруйнування, лінія розриву переміщення, метод Вінера-Хопфа

SUMMARY. The symmetric problem on calculation of the prefracture zone at the corner point of the interface of isotropic elastic media is considered. The prefracture zone is modeled by the line of rupture of normal displacement. The solution of corresponding problem of linear theory of elasticity is constructed by the Wiener-Hopf method. The stress behaviour near the corner point is investigated.

Key words: corner point, prefracture zone, line of rupture of displacement, Wiener-Hopf method

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бакиров В. Ф., Гольдштейн Р. В.* Модель Леонова – Панасюка – Дагдейла для трещины на границе соединения материалов // Прикладная математика и механика. – 2004. – Т. 68, вып. 1. – С. 170–179.
2. *Дундурс Дж., Комниноу М.* Обзор и перспектива исследования межфазной трещины // Механика композитных материалов. – 1979. – № 3. – С. 387–396.
3. *Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А.* О начальном повороте трещины, расположенной на границе раздела двух упругих сред // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 10. – С. 28 – 41.
4. *Каминский А. А., Кипнис Л. А., Хазин Г. А.* Об устойчивости равновесия трещины Коттрелла // Прикладная механика. – 2010. – Т. 46, № 2. – С. 13–23.
5. *Лобода В. В., Шевелева А. Е.* Определение зон предразрушения у края трещины между двумя упругими ортотропными телами // Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 5. – С. 76–82.
6. *Нобл. Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
7. *Панасюк В. В., Саврук М. П.* Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – Т. 28, № 1. – С. 49–68.
8. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.
9. *Kaminsky A. A., Kipnis L. A., Dudik M. V.* Initial development of the prefracture zone near the tip of a crack reaching the interface between dissimilar media // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 40, № 2. – P. 176–182.
10. *Leblond T. B., Frelat T.* Crack kinking from an interface crack lips // Europ. T. Mech. A / Solids. – 2001. – Vol. 20. – P. 937–951.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев
Уманский государственный педагогический университет*

Поступила 01.11.2010

УДК 539.3

Б. Д. ДРОБЕНКО, д-р физ.-мат. наук

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ
ЭЛЕМЕНТОВ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ
С ЭКСПЛУАТАЦИОННЫМИ ДЕФЕКТАМИ**

Предложена методика компьютерного моделирования напряженно-деформированного состояния барабана котла теплоэлектростанции с ремонтными выборками материала в окрестности зон с повреждениями в эксплуатационных условиях. Вычислительный эксперимент выполнен в рамках трехмерной теории неизотермической термоупругопластичности. Исследовано влияние геометрических параметров выборок на напряженное состояние барабана при действии внутреннего давления и температуры. Предложены рациональные значения геометрических параметров выборок с целью продления эксплуатации барабана.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, термоупруго-пластичность, метод конечных элементов, энергетическое оборудование

В процессе длительного воздействия механических нагрузок, повышенной температуры и коррозионно-активной среды в конструктивных элементах энергетического оборудования (барабанах, коллекторах, штуцерах) возникают разного рода дефекты и повреждения, среди которых наиболее опасными являются трещины. В случае обнаружения таких повреждений действенным способом их ликвидации является проведение ремонтных выборок (удаления части металла вместе с дефектной зоной).

Экспертную оценку о возможности дальнейшей эксплуатации оборудования с ремонтными выборками в соответствии с действующими отраслевыми методиками [2] производят с использованием простых соотношений, полученных на основе формулы для напряжений в тонкой цилиндрической оболочке под давлением, учитывая некоторые параметры выборок в поправочных коэффициентах. Определенные таким образом напряжения могут отличаться от фактических (вследствие потери исходной формы изделием в результате выборки). Поэтому важно более адекватно оценить напряженное состояние в окрестности выборок и исследовать влияние геометрии (глубины, длины и ширины) выборок на напряженное состояние оборудования на основе более точных математических моделей.

В настоящей статье приведены результаты компьютерного моделирования деформационных процессов в барабане котла теплоэлектростанции с ремонтными выборками в условиях эксплуатации, полученные на основе трехмерной теории неизотермической термоупругопластичности [4] с использованием метода конечных элементов и соответствующего программного обеспечения [1]. В результате численного эксперимента определены рациональные по напряжениям геометрические параметры выборок.

Расчетная модель. Барабан котла представляет собою закрытое днищами массивное цилиндрическое тело длиной более 20 м, внешний

диаметр которого – до 2 м, толщина – около 0,1 м. В теле барабана, работающего в условиях внутреннего давления до 15,5 МПа при температурах до 350°С, находятся периодические ряды отверстий для штуцеров. На отверстиях и на внутренней поверхности барабана в окрестности отверстий возможны выборки глубиной h , шириной b и длиной l , схематически представленные на рис. 1 (индексы b и o обозначают параметры выборок соответственно на теле барабана и на отверстии, а f и t указывают на размещение выборок – спереди отверстия или сзади).

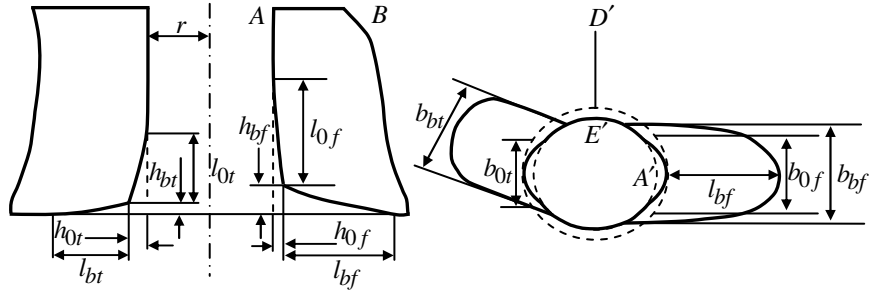


Рис. 1

В качестве общей расчетной модели барабана примем трехмерный цилиндр Ω (внутреннего R_1 и внешнего R_2 радиусов) с отверстиями (радиуса r), находящимися одно от другого на расстояниях $2L_z$ в осевом и $2L_\phi$ в кольцевом направлении соответственно (см. рис. 2). На внутренней поверхности цилиндра и на поверхностях отверстий задано давление p .

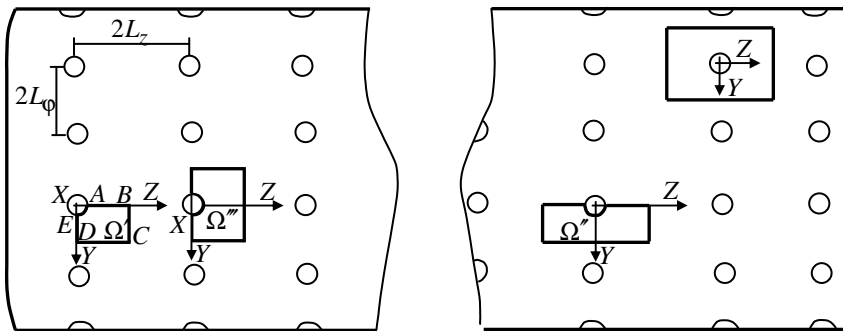


Рис. 2

Принимая, что напряженное состояние в окрестности произвольно выбранного отверстия слабо влияет на напряжения в окрестности соседних отверстий, в качестве расчетных выбираем одну из четырех областей, приведенных на рис. 2 (в зависимости от симметрии выборок).

В случае отсутствия выборок, учитывая условия симметрии, в качестве расчетной можно принять область Ω' (см. рис. 2), отнесенную к декартовой системе координат, ось OX которой образует ось отверстия. На поверхностях $EDD'E'$ и $ABB'A'$ (см. рис. 3) при этом заданы соответст-

венно условия $u_z = 0$ и $u_y = 0$, а на плоскости $CDD'C'$ – условия циклической симметрии $u_\phi = 0$ для углового перемещения в цилиндрической системе координат (r, ϕ, z) , к которой отнесен цилиндр. На поверхности $A'B'C'D'E'$ и поверхности отверстия $AEE'A'$ задано давление p , поверхность $ABCDE$ свободна от нагрузки, а на поверхности $BCC'B'$ заданы растягивающие напряжения $\sigma_{zz} = p R_1^2 / (R_2^2 - R_1^2)$, моделирующие влияние давления на днища.

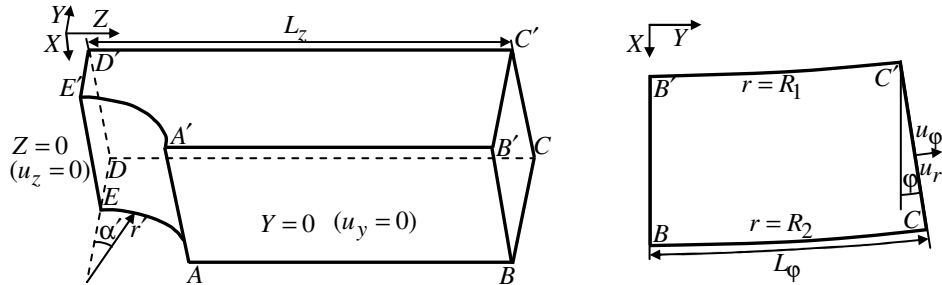


Рис. 3

Аналогично задаются условия симметрии и для областей Ω'' , Ω''' , Ω'''' .

Конечно-элементная модель. При построении конечно-элементного разбиения области Ω' линии пересечения двух цилиндров под прямым углом зададим численно. С этой целью используем две цилиндрические системы координат: (r', α', X) (см. рис. 3), связанную с отверстием, и (r, ϕ, Z) , к которой отнесен цилиндр. Область определения угла $\alpha' \in [0, \pi/2]$ разделим на n равных частей. При этом координаты точек, принадлежащих краю отверстия на внешней поверхности цилиндра в различных системах координат связаны между собой соотношениями:

$$Y_i = r \cos(\alpha'_i) \quad Z_i = r \sin(\alpha'_i); \quad (1)$$

$$X_i = R_2 \cos(\phi_i), \quad Y_i = R_2 \sin(\phi_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2)$$

Приравняв выражения для Y_i из (1) и (2), получим соотношения для определения угловой координаты ϕ_i :

$$R_2 \sin(\phi_i) = r \cos(\alpha'_i), \quad (3)$$

откуда

$$\phi_i = \arcsin(r \cos(\alpha'_i) / R_2), \quad (4)$$

Аналогично находим координаты точек разбиения краев отверстия на внутренней поверхности цилиндра Ω :

$$\phi_i = \arcsin(r \cos(\alpha'_i) / R_1), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} X_i &= R_1 \cos(\phi_i), & Y_i &= R_1 \sin(\phi_i), \\ Z_i &= R_1 \sin(\alpha'_i), & i &= 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (6)$$

Имея координаты узловых точек на поверхности отверстия, можно построить конечно-элементное разбиение внутренней и внешней поверхностей области Ω' , а потом соединить их так, как это показано на рис. 4, на котором представлен фрагмент разбиения окрестности отверстия на трехмерные элементы.

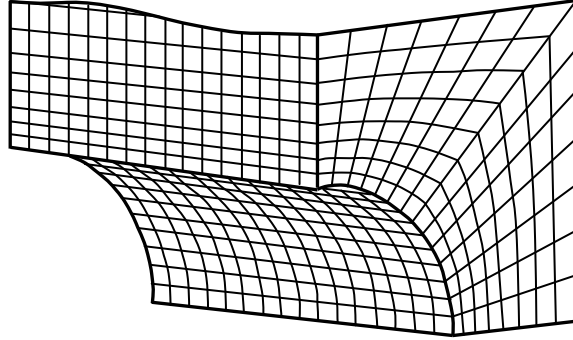


Рис. 4

При формировании конечно-элементной модели в случае с выборкой форма выборки на отверстии моделировалась кругом радиуса R_0 (см. рис. 5) с центром в точке $(x, z_0, 0)$. При этом сектор $[0, \pi/2]$ разделялся на m равных частей: $0 = \phi'_0 < \phi'_1 < \dots < \phi'_m = \pi/2$. Тогда координаты соответствующих узлов, для которых $r \cos(\phi'_i) > b_0/2$ определялись из соотношений

$$\begin{aligned} x_i &= R_1 \cos(\arcsin(r \sin(\phi'_i) / R_1)), & y_i &= r \cos(\phi'_i), \\ z_i &= r \sin(\phi'_i). \end{aligned} \quad (7)$$

Для узлов, для которых $r \cos(\phi'_i) \leq b_0/2$,

$$y_i = r_{n_i} \cos(\phi'_i), \quad z_i = r_{n_i} \sin(\phi'_i), \quad (8)$$

где $\left(r_{n_i} = z_0 \sin(\phi'_i) + \sqrt{R_0^2 - z_0^2 \cos^2(\phi'_i)} \right)$.

Учитывая, что

$$\phi_i = \arcsin(r_{n_i} \cos(\phi'_i) / R_1), \quad (9)$$

можно определить декартовы координаты узлов, лежащих на нижнем краю выборки на поверхности отверстия (с внутренней поверхности цилиндра).

Изменение глубины выборки на отверстии по ее длине задавалось сплайном, построенным по таким параметрам, как длина выборки

$l_o (l_1, l_2, \dots)$ и соответствующие углубления h_o, h_1, \dots (см. рис. 5).

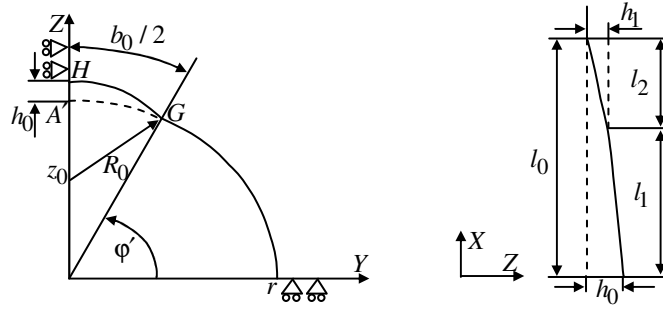


Рис. 5

Аналогично задавалась и геометрия выборки на внутренней поверхности цилиндра в окрестности отверстия. При этом глубина выборки кусочно-линейно уменьшалась от значения h_b на отверстии (при $z = r + h_o$) до нуля (при $z = r + h_o + l_b$) (схематически конечно-элементное разбиение отверстия и поверхности $y = 0$ с выборками на отверстии и теле цилиндра в окрестности отверстия показано на рис. 6).

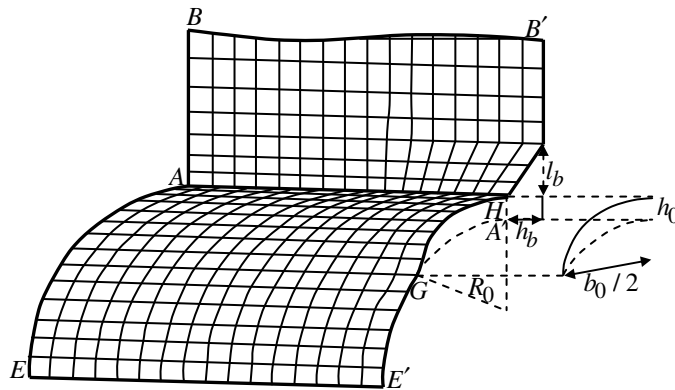


Рис. 6

Численные результаты и их анализ. Вычислительные эксперименты проводились с использованием билинейных и биквадратичных изопараметрических элементов с 8 и 20 узлами (детальное описание методики расчета с использованием этих конечных элементов приведено в монографии [1]) для стали 16ГНМ [3] при температуре 350°C и таких значениях параметров:

$$R_1 = 0,9 \text{ м}; R_2 = 0,995 \text{ м}; r = 0,0645 \text{ м};$$

$$L_z = 0,56 \text{ м}; L_\phi = 0,13 \text{ м}; p = 15,5 \text{ МПа}.$$

Расчеты показали, что при отсутствии выборок максимальные напряжения (интенсивность напряжений $\sigma_i^{\max} = 322 \text{ МПа}$) возникают на внутренней поверхности цилиндра в окрестности точки A' (см. рис. 3).

Величина окрестности возмущения напряженного состояния при этом в осевом направлении равна приблизительно радиусу отверстия r . Вне этой окрестности в цилиндре с отверстиями практически реализуется безмоментное напряженное состояние, возникающее при воздействии внутреннего давления p в длинной цилиндрической трубе таких же геометрических размеров.

При проведении вычислительного эксперимента в случае наличия выборок ставилась задача определения рациональных с точки зрения прочности параметров выборок. В ходе вычислений оказалось, что ширина выборки существенно влияет на возмущение напряженного состояния в зоне выборки, и ее увеличение приводит к уменьшению концентрации напряжений в этой зоне. На рис. 7, например, показаны распределения интенсивности напряжений (вдоль линии $A'B'$; см. рис. 3) в цилиндре с выборкой на его на внутренней поверхности в окрестности отверстия с параметрами $h_b = 8 \text{ мм}$ и $l_b = 110 \text{ мм}$ для различных значений ее ширины – 0,025 (линия 1), 0,04 (2), 0,06 (3), 0,08 (4), и 0,13 (5) м соответственно.

В результате компьютерного моделирования деформирования цилиндра с различными выборками на отверстиях было предложено (вместо стандартной ремонтной выборки на отверстии) производить круговую равномерную расточку отверстия (см. рис. 1-б; штриховая линия, окаймляющая отверстие), радиус которой постепенно уменьшается по длине выборки (от $r + h_o$ на поверхности до r при конечной длине l_o).

На рис. 8 приведены графики распределения интенсивности напряжений для выборки $h_o = 0,004 \text{ м}$, $b_o = 0,02 \text{ м}$, $l_o = 0,025 \text{ м}$ (кривая 1). Для сравнения на этом же рисунке нанесены напряжения для цилиндра без выборки (кривая 2) и с равномерной круговой расточкой (кривая 3). Как видно, максимальные напряжения в случае расточки даже несколько уменьшаются ($\sigma_i^{\max} = 312,5 \text{ МПа}$) по сравнению с напряжениями в цилиндре без выборки. Аналогичные результаты получены и для других выборок на отверстиях.

При вычислениях в рамках теории упругости интенсивность напряжений в окрестности практически большинства отверстий с выборками превышает предел пластичности стали σ_T (360 МПа при температуре

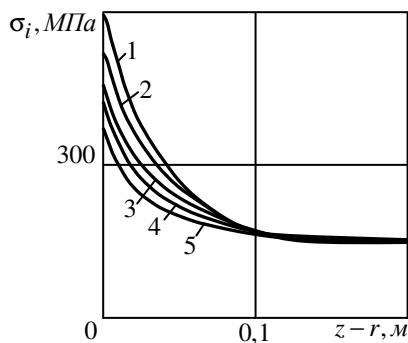


Рис. 7

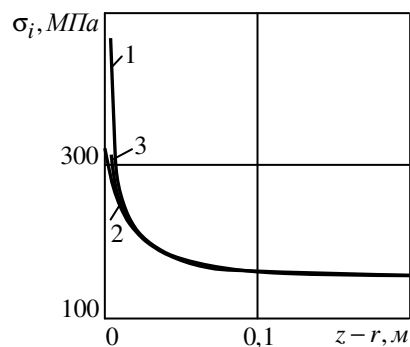


Рис. 8

350°С [3]), что свидетельствует о некоторой неадекватности описания процессов деформирования в окрестности отверстий в цилиндре с выборками в рамках такой модели. В связи с этим проведен вычислительный эксперимент с использованием уравнений неізотермической термоупругопластичности. Анализ полученных результатов позволили сделать следующие выводы. При недостаточно широких выборках глубиной 7-8 мм и длиной до 100 мм в области выборки в окрестности отверстий возникают зоны пластического деформирования (размером до 30-35 мм). При выполнении выборки с шириной, соизмеримой с диаметром отверстия, максимальные напряжения в цилиндре снижаются до уровня границы текучести материала. При равномерной расточке отверстия на указанную глубину выборки на отверстиях ухудшения прочностных свойств цилиндра не происходит (с позиции прочности это наиболее приемлемый вариант ремонтных работ). После проведения ремонтных работ путем выполнения выборки, барабан проходит гидравлические испытания под давлением, которое на 25% превышает эксплуатационное. В процессе таких испытаний, как показал вычислительный эксперимент, материал вследствие пластического деформирования в зоне выборки деформационно упрочняется. Например, в окрестности одного из отверстий с выборкой $h_b = 8 \text{ мм}$, $l_b = 110 \text{ мм}$, $l_o = 25 \text{ мм}$ область пластического деформирования охватывает окрестность порядка 36 мм. После полного снятия нагрузки в этой окрестности возникают остаточные сжимающие напряжения, составляющие 78% предела текучести (см. рис. 9). При номинальной рабочей нагрузке в дальнейшем металл в этой зоне деформируется исключительно упруго (см. рис. 10). Максимальное значение интенсивности напряжений составляют 80 % предела текучести.

Результаты данного вычислительного эксперимента прошли апробацию в производственных условиях. Они использованы при разработке технологии выполнения ремонтных работ в барабане котла системы ТП-

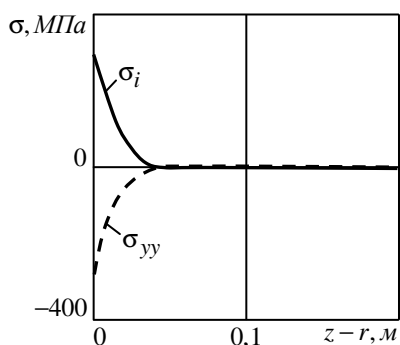


Рис. 9

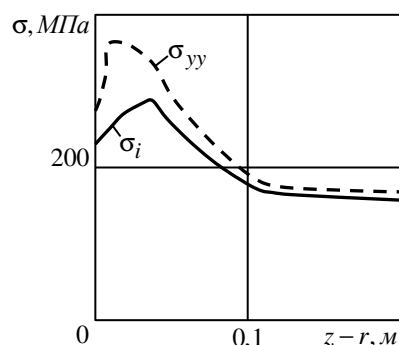


Рис. 10

100 с целью его упрочнения и продолжения эксплуатации и могут послужить теоретическим обоснованием для создания новых отечественных отраслевых нормативно-технических документов по ремонту элементов энергетического оборудования.

Наличие надежного программного обеспечения, разработанного на основе адекватных современных математических моделей и методов, по-

звolyaєт в сжатые сроки проанализировать поведение того или иного конструктивного элемента энергетического оборудования (с повреждениями или выборкой) при эксплуатационной нагрузке и получить экспертную оценку запаса его прочности. Эти данные можно использовать при принятии решения о возможности временного продолжения сроков эксплуатации или замены узлов и элементов оборудования с повреждениями, а также при разработке рекомендаций относительно соответствующих ремонтных мероприятий.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано методику комп'ютерного моделювання напружено-деформованого стану барабана котла теплоелектростанції з ремонтними вибірками матеріалу в околі зон з пошкодженнями за експлуатаційних умов. Обчислювальний експеримент виконано в межах тривимірної теорії неізотермічної термопружно-пластичності. Досліджено вплив геометричних параметрів вибірок на напружений стан барабана за дії внутрішнього тиску й температури. Запропоновано раціональні значення геометричних параметрів вибірок з метою подовження експлуатації барабана. Отримані результати пройшли апробацію за виробничих умов теплоелектростанції.

Ключові слова: комп'ютерне моделювання, термопружно-пластичність, метод скінченних елементів, енергетичне обладнання

SUMMARY. The procedure of the computer simulation of strength-stress state of power plant steam drum with repair extractions of defects subjected exploitation loading is proposed. The numerical experiment is implemented within the model of non-isothermal thermo-elastic-plastic 3D theory. The influence of geometrical parameters of extractions on the stress state of the steam drum subjected to internal pressure and temperature was researched. The rational geometric parameters of repair extractions are proposed to continue the steam drum usage. The propositions were approved in power plant working conditions.

Key words: computer simulation, thermo-elastic-plasticity, finite element method, energetic equipment

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д.* Термомеханіка намагнечуваних електропровідних термомочувливих тіл. – Львів: СПОЛОМ, 2010. – 256 с. (Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл: В 5 т. Т 4)
2. *Основные положения по обследованию и технологии* ремонта барабанов котлов высокого давления из стали 16ГНМ, 16ГНМА и 22К / Министерство электрификации СССР. Министерство энергетического машиностроения. – М., 1978. – 38 с.
3. *Свойства сталей и сплавов, применяемых в котлотурбостроении.* Руководящие указания. Вып. 16. Часть 1 / Состав. Л.Я. Либерман, М.И. Пейсихис. – Л.: ОНТИ ЦКТИ им. И.И. Ползунова, 1966. – С. 220.
4. *Allen D.H., Heisler W.E.* A theory for analysis of thermoplastic materials // *Computers & Structures.* – 1981. – Vol. 13. – P. 129–135.

*Институт прикладных проблем механики
и математики НАН Украины, г. Львов*

Поступила 06.09.2010

УДК 539.3

С. А. КАЛОЕРОВ, д-р физ.-мат. наук, Ю. С. СЕНЧЕНКО

ЦИКЛИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О ВЯЗКОУПРУГОМ ИЗГИБЕ
КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛИТЫ

С использованием методов малого параметра, конформных отображений и наименьших квадратов решена задача о вязкоупругом изгибе плиты с циклически расположенными поясами упругих эллиптических включений. Для кольца с одним поясом круговых включений описаны результаты численных исследований с их анализом и установлением закономерностей влияния геометрических параметров включений, их количества и времени приложения нагрузки на напряженное состояние плиты.

Ключевые слова: вязкоупругость, изгиб, метод малого параметра, комплексные потенциалы, стационарное состояние, циклическая задача.

В связи с широким использованием полимерных материалов в последние десятилетия большое внимание уделяется исследованиям напряженно-деформированного состояния вязкоупругих многосвязных пластин. В работах [2, 3] разработаны методы решения таких задач для изотропных пластинок с включениями, находящимися в условиях обобщенного плоского напряженного состояния. В работе [4] предложены аналогичные методы решения задач вязкоупругости для изгиба плит, даны решения для случаев плит с неподкрепленными контурами. В данной статье решена циклическая задача изгиба плиты с упругими ядрами.

Постановка задачи. Рассмотрим изотропную вязкоупругую кольцевую плиту с циклически расположенными Q поясами одинаковых эллиптических отверстий (рис. 1). В центральное отверстие кольца, а также в эллиптические отверстия без предварительного натяжения вклеены или впаяны ядра из других, одинаковых для каждого пояса, материалов. Будем считать, что материал плиты обладает свойствами, описываемыми линейной теорией вязкоупругости, ядра изготовлены из упругих материалов. Плита находится под действием равномерно распределенных по внешнему контуру моментов интенсивности m . Отнесем плиту к системе координат Oxy с началом в центре кольца. Обозначим внешний и внутренний контуры кольца и их радиусы – через L_0 , L_1 и R_0 , R_1 , контуры эллиптических отверстий q -го пояса, их полуоси, координаты их центров соответственно – через L_{ql} , a_q , b_q , x_{0ql} , y_{0ql} ($q = \overline{2, Q+1}$; $l = \overline{1, \mathcal{L}}$), угол между осью Ox и прямой, соединяющей центр кольца и центр основного отверстия q -го пояса и угол наклона по-

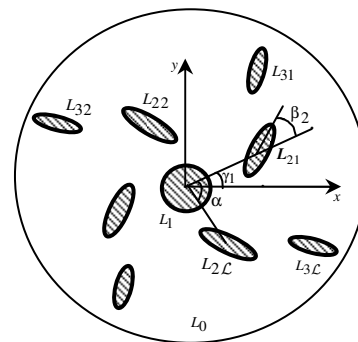


Рис. 1

луоси a_q к прямой, соединяющей центр кольца с центром эллипса L_{q1} – через γ_{q1} и β_q . Будем считать, что угол цикличности для всех поясов одинаков и равен $\alpha = 2\pi/\mathcal{L}$, где \mathcal{L} – количество отверстий в поясе. Область, занятую плитой, обозначим через S , конечные односвязные области центрального включения и включений поясов – через S^1 и S^{q1} . В качестве частного случая, когда контур L_0 уходит в бесконечность, будем рассматривать бесконечную плиту с круговым включением и циклической системой эллиптических включений. В этом случае будем предполагать, что на бесконечности действуют всесторонний изгиб плиты моментами интенсивности M^∞ , т. е. $M_x^\infty = M_y^\infty = M^\infty$, $H_{xy}^\infty = 0$.

Комплексные потенциалы задачи. Если решение задачи вязкоупругости проводить с использованием комплексных потенциалов теории изгиба $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и метода малого параметра, в качестве которого брать отклонение коэффициента Пуассона материала плиты ν от его мгновенного значения ν_0 , т. е.

$$\lambda = \nu - \nu_0, \quad (1)$$

то задача сводится к решению последовательности задач теории изгиба плит, в котором необходимо определить производные комплексных потенциалов приближений $\Phi_j(z) = \varphi'_j(z)$, $\Psi_j(z) = \psi'_j(z)$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) для плиты и $\Phi_j^q(z) = \varphi_j^{\prime q}(z)$, $\Psi_j^q(z) = \psi_j^{\prime q}(z)$ для упругих включений из граничных условий вида [3, 4]

$$\begin{aligned} & (3 + \nu_0) \delta \Phi_j(t_0) - (1 - \nu_0) \left[\delta \overline{\Phi_j(t_0)} + t_0 \delta \overline{\Phi'_j(t_0)} + \delta \overline{\Psi_j(t_0)} \right] = \\ & = \left(\delta_j^0 - 1 \right) \left[\delta \overline{\Phi_{j-1}(t_0)} + \delta \overline{\Phi'_{j-1}(t_0)} + t_0 \delta \overline{\Phi'_{j-1}(t_0)} \right. \\ & \left. + \delta \overline{\Psi_{j-1}(t_0)} \right] - \delta_j^0 \delta m \text{ на } L_0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \delta \Phi_j(t_l) + \delta \overline{\Phi_j(t_l)} + t_l \delta \overline{\Phi'_j(t_l)} + \delta \overline{\Psi_j(t_l)} - \frac{Q(1 - 2\nu_0)}{1 - \nu_0^2} \left[\delta \Phi_j^q(t_l) + \right. \\ & \left. + \delta \overline{\Phi_j^q(t_l)} + t_l \delta \overline{\Phi_j^{\prime q}(t_l)} + \delta \overline{\Psi_j^q(t_l)} \right] = -2 \delta \Gamma_{0j} - \delta \overline{\Gamma}_{1j} + \\ & + \frac{1 - \delta_j^0 - \delta_j^1}{1 - \nu_0^2} \left\{ \delta \overline{\Phi_{j-2}(t_l)} + \delta \overline{\Phi'_{j-2}(t_l)} + t_l \delta \overline{\Phi'_{j-2}(t_l)} + \delta \overline{\Psi_{j-2}(t_l)} + \right. \\ & \left. + 2 \delta \Gamma_{0j-2} + \delta \overline{\Gamma}_{1j-2} \right\} + \frac{1 - \delta_j^0}{1 - \nu_0^2} \left\{ 2\nu_0 \left[\delta \overline{\Phi_{j-1}(t_l)} + \delta \overline{\Phi'_{j-1}(t_l)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + t_l \delta \overline{\Phi'_{j-1}(t_l)} + \delta \overline{\Psi_{j-1}(t_l)} \right] + 2 \delta \Gamma_{0j-1} + \delta \overline{\Gamma}_{1j-1} \right\} - \\ & - 2Q \left[\delta \overline{\Phi_{j-1}^q(t_l)} + \delta \overline{\Phi_{j-1}^{\prime q}(t_l)} + t_l \delta \overline{\Phi_{j-1}^{\prime q}(t_l)} + \delta \overline{\Psi_{j-1}^q(t_l)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (3 + \nu_0) \delta \Phi_j(t_l) - (1 - \nu_0) \left[\delta \overline{\Phi_j(t_l)} + t_l \bar{\delta} \overline{\Phi'_j(t_l)} + \bar{\delta} \overline{\Psi_j(t_l)} \right] - \\
& - (3 + \nu^q) \delta \Phi_j^q(t_l) + (1 - \nu^q) \left[\delta \overline{\Phi_j^q(t_l)} + t_l \bar{\delta} \overline{\Phi_j'^q(t_l)} + \right. \\
& \left. + \bar{\delta} \overline{\Psi_j^q(t_l)} \right] = -2(1 + \nu_0) \delta \Gamma_{0j} + (1 - \nu_0) \bar{\delta} \bar{\Gamma}_{1j} + \\
& + (\delta_j^0 - 1) \left\{ \delta \overline{\Phi_{j-1}(t_l)} + \delta \overline{\Phi_{j-1}(t_l)} + t_l \bar{\delta} \overline{\Phi'_{j-1}(t_l)} + \right. \\
& \left. + \bar{\delta} \overline{\Psi_{j-1}(t_l)} + 2 \delta \Gamma_{0j-1} + \bar{\delta} \bar{\Gamma}_{1j-1} \right\} \text{ на } L_1, L_{ql}, \quad (3)
\end{aligned}$$

$$\text{где } \Gamma_{0j} = \frac{(-1)^{j+1} (M_x^\infty + M_y^\infty)}{4(1 + \nu_0)^{j+1}}; \quad \Gamma_{1j} = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty}{2(1 - \nu_0)^{j+1}}; \quad Q = \frac{K(1 - \nu^{q^2})}{K^q(1 - 2\nu^q)};$$

$\delta = \frac{dt}{ds}$, K , ν_0 , K^q , ν^q – модуль объемного расширения и коэффициент Пуассона материала плиты и включений. Величины с верхними индексами q при $q = 2, Q + 1$ относятся ко всем включениям q -го пояса, при $q = 1$ – к центральному включению.

Комплексные потенциалы приближений $\phi_j(z)$, $\psi_j(z)$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) для плиты, голоморфные в конечной области, ограниченной контурами L_0 , L_1 и L_{ql} , представим в виде суммы функций, голоморфных внутри L_0 и вне L_1, L_{ql} . Первые функции представим рядами Маклорена, вторые – рядами Лорана по отрицательным степеням z , третьи после конформных отображений внешности единичного круга на внешности эллипсов L_{ql}

$$z = e^{i\varphi_{ql}} \left[h_q + R_q \left(\zeta_{ql} + m_q / \zeta_{ql} \right) \right], \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}
\varphi_{ql} &= (l-1)\alpha + \gamma_{ql} + \beta_q, \quad h_q = \sqrt{x_{0q1}^2 + y_{0q1}^2}, \\
R_q &= (a_q + b_q)/2, \quad m_q = (a_q - b_q)/(a_q + b_q)
\end{aligned}$$

– рядами Лорана по отрицательным степеням ζ_{ql} . Учитывая сказанное и удовлетворяя условиям цикличности напряженного состояния, окончательно производные комплексных потенциалов приближений для плиты получаем в виде [1, 2]

$$\Phi_j(z) = \sum_{q=0}^{Q+1} \sum_{n=1}^{\infty} a_{jqn} \phi_{qn}, \quad \Psi_j(z) = \sum_{q=0}^{Q+1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{jqn} \psi_{qn} + b_{jqn} \chi_{qn} \right], \quad (5)$$

где

$$\phi_{0n} = (z/R_0)^{(n-1)\mathcal{L}}, \quad \psi_{0n} = 0, \quad \chi_{0n} = (z/R_0)^{(n+1)\mathcal{L}-2},$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{1n} &= 1/z^{(n+1)\mathcal{L}}, \quad \Psi_{1n} = 0, \quad \chi_{1n} = 1/z^{(n-1)\mathcal{L}+2}, \\
\Phi_{qn} &= -\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \frac{n}{\zeta_{ql}^{n-1} R_q (\zeta_{ql}^2 - m_q)}, \quad \chi_{qn} = -\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \frac{ne^{-2i(l-1)\alpha}}{\zeta_{ql}^{n-1} R_q (\zeta_{ql}^2 - m_q)}, \\
\Psi_{qn} &= -\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \frac{n}{\zeta_{ql}^{n-1} R_q (\zeta_{ql}^2 - m_q)} \left\{ c_{ql3} \zeta_{ql}^3 + c_{ql2} \zeta_{ql}^2 + c_{ql1} \zeta_{ql} + \right. \\
&\quad \left. + n \left[d_{ql4} \zeta_{ql}^4 + c_{ql3} \zeta_{ql}^3 + d_{ql2} \zeta_{ql}^2 - c_{ql1} \zeta_{ql} + d_{ql0} \right] \right\} (q = \overline{2, Q+1}). \\
c_{ql3} &= -h_q e^{-2i\Phi_{ql}} / R_q, \quad c_{ql2} = -2e^{-2i\Phi_{ql}} (m_q^2 + 1), \quad c_{ql1} = m_q c_{ql3}, \\
d_{ql4} &= -e^{-2i\Phi_{ql}} m_q, \quad d_{ql2} = e^{-2i\Phi_{ql}} (m_q^2 - 1), \quad d_{ql0} = e^{-2i\Phi_{ql}} m_q,
\end{aligned}$$

$a_{j1n}, b_{j1n}, a_{jqn}, b_{jqn}$ – неизвестные постоянные, которые будем определять из соответствующих граничных условий.

Голоморфные в областях S^{ql} функции $\Phi_j^{ql}(z), \Psi_j^{ql}(z)$ для включений разложим в ряды по полиномам Фабера, производные которых после преобразований представим рядами Тейлора вида [3]

$$\Phi_j^{ql}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{jn}^{ql} \omega_n^{ql}, \quad \Psi_j^{ql}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{jn}^{ql} \omega_n^{ql}, \quad (6)$$

где $\omega_n^{ql} = (z - z_{0ql})^{n-1} / R_{ql}^n$; c_{jn}^{ql}, d_{jn}^{ql} – неизвестные постоянные.

В силу циклической симметрии для функций $\Phi_j^{ql}(z), \Psi_j^{ql}(z)$ получим

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \Phi_j^{ql}(z) &= \operatorname{Re} \Phi_j^{ql}(ze^{i\alpha}), \\
\bar{z} \Phi_j^{ql}(z) + \Psi_j^{ql}(z) &= e^{2i\alpha} \left[\bar{z} e^{-i\alpha} \Phi_j^{ql}(ze^{i\alpha}) + \Psi_j^{ql}(ze^{i\alpha}) \right]. \quad (7)
\end{aligned}$$

Из соотношений (7) будем иметь

$$\Phi_j^{ql}(z) = \Phi_j^{ql}(ze^{i\alpha}), \quad \Psi_j^{ql}(z) = e^{2i\alpha} \Psi_j^{ql}(ze^{i\alpha}). \quad (8)$$

Подставляя (6) в выражения (8), для функции $\Phi_j^{ql}(z)$ будем иметь

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} c_{jn}^{ql} (z - z_{0ql})^{n-1} / R_{ql}^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{jn}^{ql} (e^{i\alpha} z - z_{0ql})^{n-1} / R_{ql}^{n-1} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_{jn}^{ql+1} (e^{i\alpha} z - z_{0ql+1})^{n-1} / R_{ql}^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{jn}^{ql+1} e^{i(n-1)\alpha} (z - z_{0ql})^{n-1} / R_{ql}^{n-1}, \quad (9)
\end{aligned}$$

что приводит к равенствам $c_{jn}^{ql+1} = c_{jn}^{ql} e^{-i(n-1)\alpha}$, т.е.

$$c_{jn}^{ql} = c_{jn}^q e^{-i(l-1)(n-1)\alpha}, \quad d_{jn}^{ql} = d_{jn}^q e^{-i(l-1)(n+1)\alpha}. \quad (10)$$

Вторая формула получена аналогичными рассуждениями для $\Psi_j^{q_l}(z)$.

Учет циклической симметрии в поясах дает возможность из граничных условий на контурах включений поясов удовлетворять условиям только на контурах основных включений и использовать для этого только функции этого включения $\Phi_j^{q_1}(z)$ и $\Psi_j^{q_1}(z)$, переобозначив их через $\Phi_j^q(z)$ и $\Psi_j^q(z)$ и записав граничные условия (3) на внешнем контуре и на контурах всех включений в общем виде

$$s_k \delta \Phi_j(t) - \overline{\delta \Phi_j(t)} - t \overline{\delta \Phi_j'(t)} - \overline{\delta \Psi_j(t)} + r_k^q \left[s_k^q \delta \Phi_j^q(t) + \overline{\delta \Phi_j^q(t)} + t \overline{\delta \Phi_j^{q'}(t)} + \overline{\delta \Psi_j^q(t)} \right] = f_{kjq} \quad (k = 1, 2, 3), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} s_1 &= \alpha_0, \quad s_2 = -1, \quad s_3 = \alpha_0; \quad s_1^q = 0, \quad s_2^q = 1; \quad s_3^q = -\alpha^q; \quad r_1^q = 0, \\ r_2^q &= \frac{Q(1-2\nu_0)}{1-\nu_0^2}, \quad r_3^q = \frac{1-\nu^q}{1-\nu_0}; \quad \alpha_0 = \frac{3+\nu_0}{1-\nu_0}, \quad \alpha^q = \frac{3+\nu^q}{1-\nu^q}; \\ f_{1jq} &= \frac{\delta_j^0 - 1}{1-\nu_0} \left[\delta \Phi_{j-1}(t) + \overline{\delta \Phi_{j-1}(t)} + t \overline{\delta \Phi_{j-1}'(t)} + \overline{\delta \Psi_{j-1}(t)} \right] - \frac{\delta_j^0 \delta m}{1-\nu_0}, \\ f_{2jq} &= -2 \delta \Gamma_{0j} - \overline{\delta \Gamma_{1j}} + \frac{\delta_j^0 + \delta_j^1 - 1}{1-\nu_0^2} \left\{ \delta \Phi_{j-2}(t) + \overline{\delta \Phi_{j-2}(t_l)} + \right. \\ &\quad \left. + t_l \overline{\delta \Phi_{j-2}'(t_l)} + \overline{\delta \Psi_{j-2}(t_l)} + 2 \delta \Gamma_{0j-2} + \overline{\delta \Gamma_{1j-2}} \right\} + \\ &\quad + \frac{\delta_j^0 - 1}{1-\nu_0^2} \left\{ 2\nu_0 \left[\delta \Phi_{j-1}(t_l) + \overline{\delta \Phi_{j-1}(t_l)} + t \overline{\delta \Phi_{j-1}'(t_l)} + \overline{\delta \Psi_{j-1}(t_l)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \delta \Gamma_{0j-1} + \overline{\delta \Gamma_{1j-1}} \right] - 2Q \left[\delta \Phi_{j-1}^q(t_l) + \overline{\delta \Phi_{j-1}^q(t_l)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + t \overline{\delta \Phi_{j-1}^{q'}(t_l)} + \overline{\delta \Psi_{j-1}^q(t_l)} \right] \right\}, \\ f_{3jq} &= -2(1+\nu_0) \delta \Gamma_{0j} + (1-\nu_0) \overline{\delta \Gamma_{1j}} + \frac{\delta_j^0 - 1}{1-\nu_0} \left\{ \delta \Phi_{j-1}(t_l) + \overline{\delta \Phi_{j-1}(t_l)} + \right. \\ &\quad \left. + t_l \overline{\delta \Phi_{j-1}'(t_l)} + \overline{\delta \Psi_{j-1}(t_l)} + 2 \delta \Gamma_{0j-1} + \overline{\delta \Gamma_{1j-1}} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Определение неизвестных постоянных, входящих в комплексные потенциалы. Исходя из граничных условий (11), составим функционал

$$J = \sum_{s=1}^{Q+1} \sum_{m=1}^{M_s} \sum_{k=2}^3 F_{ks}(t_m) \overline{F_{ks}(t_m)} + \sum_{m=1}^{M_0} F_{10}(t_m) \overline{F_{10}(t_m)},$$

где

$$\begin{aligned}
F_{ks}(t_m) = & s_k \delta_m \overline{\Phi_j(t_m)} - \delta_m \overline{\Phi_j(t_m)} - t_m \overline{\delta_m \Phi'_j(t_m)} - \\
& - \overline{\delta_m \Psi_j(t_m)} + r_k^s \left[s_k^s \delta_m \overline{\Phi_j^s(t_m)} + \delta_m \overline{\Phi_j^s(t_m)} + \right. \\
& \left. + t_m \overline{\delta_m \Phi_j^{s'}(t_m)} + \overline{\delta_m \Psi_j^s(t_m)} \right] - f_{kjs}(t_m) \quad (k = \overline{1, 3}), \quad (13)
\end{aligned}$$

в котором t_m – система точек, выбираемых на контурах L_0, L_1 плиты и на основных контурах L_{q1} всех поясов $q = \overline{2, Q+1}$. Удовлетворяя условиям минимума функционала (13), для определения неизвестных постоянных получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^{Q+1} \sum_{m=1}^{M_s} \sum_{k=2}^3 \sum_{r=0}^{Q+1} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \left[r_{1iksqn} \overline{\Phi_{rp}(t_m)} + r_{2iksqn} \overline{\Phi'_{rp}(t_m)} + r_{5iksqn} \overline{\Psi_{rp}(t_m)} \right] a_{jrp} + \right. \\
& + \left[r_{3iksqn} \overline{\Phi_{rp}(t_m)} + r_{4iksqn} \overline{\Phi'_{rp}(t_m)} + r_{6iksqn} \overline{\Psi_{rp}(t_m)} \right] \overline{a_{jrp}} + \\
& + r_{5iksqn} \overline{\Phi_{rp}(t_m)} \overline{b_{jrp}} + r_{6iksqn} \overline{\Phi_{rp}(t_m)} b_{jrp} + \delta_r^s \left[r_{7iksqn} \overline{\omega_p^s(t_m)} + \right. \\
& + r_{8iksqn} \overline{\omega_p^{s'}(t_m)} \left. \right] c_{jp}^s + \delta_r^s \left[r_{9iksqn} \overline{\omega_p^s(t_m)} + r_{10iksqn} \overline{\omega_p^{s'}(t_m)} \right] \overline{c_{jp}^s} + \\
& + \delta_r^s r_{11iksqn} \overline{\omega_p^s(t_m)} d_{jp}^s + \delta_r^s r_{12ikslqn} \overline{\omega_p^s(t_m)} \overline{d_{jp}^s} \left. \right\} + \\
& + \sum_{m=1}^{M_0} \sum_{r=0}^{Q+1} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \left[r_{1i10qn} \overline{\Phi_{rp}(t_m)} + r_{2i10qn} \overline{\Phi'_{rp}(t_m)} + r_{5i10qn} \overline{\Psi_{rp}(t_m)} \right] a_{jrp} + \right. \\
& + \left[r_{3i10qn} \overline{\Phi_{rp}(t_m)} + r_{4i10qn} \overline{\Phi'_{rp}(t_m)} + r_{6i10qn} \overline{\Psi_{rp}(t_m)} \right] \overline{a_{jrp}} + \\
& + r_{6i10qn} \overline{\Phi_{rp}(t_m)} b_{jrp} + r_{5i10qn} \overline{\Phi_{rp}(t_m)} \overline{b_{jrp}} \left. \right\} = \sum_{s=1}^{Q+1} \sum_{m=1}^{M_s} \sum_{k=2}^3 (\overline{\Phi_{iksqn} f_{kjs}(t_m)} + \\
& + \overline{\Psi_{iksqn} f_{kjs}(t_m)}) + \sum_{m=1}^{M_0} (\overline{\Phi_{i10qn} f_{1j0}(t_m)} + \overline{\Psi_{i10qn} f_{1j0}(t_m)}) \\
& \quad (i = \overline{1, 4}, q = \overline{0, Q+1}, n = \overline{1, 2, \dots}), \quad (14)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
r_{1ikslqn} &= s_k \delta \overline{\Psi_{iksqn}} - \overline{\delta \Phi_{iksqn}}, & r_{2iksqn} &= -\overline{\delta t_m \Phi_{iksqn}}, \\
r_{3iksqn} &= s_k \overline{\delta \Phi_{iksqn}} - \overline{\delta \Psi_{iksqn}}, & r_{4iksqn} &= -\overline{\delta t_m \Psi_{iksqn}}, \\
r_{5iksqn} &= -\overline{\delta \Phi_{ikslqn}}, & r_{6iksqn} &= -\overline{\delta \Psi_{iksqn}}, \\
r_{7iksqn} &= r_k^s (\delta \overline{\Psi_{iksqn}} s_k^s + \overline{\delta \Phi_{iksqn}}), & r_{8iksqn} &= r_k^s \overline{\delta t_m \Phi_{iksqn}}, \\
r_{9iksqn} &= r_k^s (\overline{\delta \Psi_{iksqn}} + s_k^s \overline{\delta \Phi_{iksqn}}), & r_{10iksqn} &= r_k^s \overline{\delta t_m \Psi_{iksqn}}, \\
r_{11iksqn} &= r_k^s \overline{\delta \Phi_{iksqn}}, & r_{12iksqn} &= r_k^s \overline{\delta \Psi_{iksqn}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{1ksqn} &= s_k \delta \Phi_{qn}(t_m), \quad \Phi_{2ksqn} = 0, \quad \Phi_{4ksqn} = 0, \\
\Phi_{3ksqn} &= (1 - \delta_k^1) \delta_q^s r_k^s s_k^s \delta \omega_n^s(t_m), \quad \Psi_{2ksqn} = -\delta \chi_{qn}(t_m), \\
\Psi_{1ksqn} &= -\bar{\delta} \Phi_{qn}(t_m) - \overline{t_m} \delta \Phi'_{qn}(t_m) - \delta \Psi_{qn}(t_m), \\
\Psi_{3ksqn} &= (1 - \delta_k^1) \delta_q^s r_k^s (\bar{\delta} \omega_n^s(t_m) + \overline{t_m} \delta \omega_n^s(t_m)), \\
\Psi_{4ksqn} &= (1 - \delta_k^1) \delta_q^s r_k^s \delta \omega_n^s(t_m)
\end{aligned} \tag{15}$$

После решения системы (14) функции $\Phi_j(z)$, $\Psi_j(z)$, $\Phi_j^q(z)$, $\Psi_j^q(z)$ станут известными, что позволит заменить степени λ^j ($j \geq 1$) значениями функции $T_j(t)$ [6]:

$$\lambda^j = T_j(t) = \frac{v_0^j \delta_*^j}{\beta^j} \left[1 - e^{-\beta \tau} \sum_{r=0}^{j-1} \frac{(\beta \tau)^r}{r!} \right], \tag{16}$$

где $\tau = [(1 - \alpha)t]^{1-\alpha}$ и найти изгибающие моменты и перерезывающие силы на основных площадках в плите и во включениях по формулам [5]

$$\begin{aligned}
M_x + M_y &= -4(1 + v_0 + \lambda) \operatorname{Re} \sum_{j=0} \lambda^j \Phi_j(z), \\
M_y - M_x + 2iH_{xy} &= 2(1 - v_0 - \lambda) \sum_{j=0} \lambda^j [\bar{z} \Phi_j'(z) + \Psi_j(z)];
\end{aligned} \tag{17}$$

$$N_x - iN_y = -4 \sum_{j=0} \lambda^j \Phi_j'(z), \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
M_x^q + M_y^q &= -4(1 + v^q) \operatorname{Re} \sum_{j=0} \lambda^j \Phi_j^q(z), \\
M_y^q - M_x^q + 2iH_{xy}^q &= 2(1 - v^q) \sum_{j=0} \lambda^j [\bar{z} \Phi_j^{q'}(z) + \Psi_j^q(z)];
\end{aligned} \tag{19}$$

$$N_x^q - iN_y^q = -4 \sum_{j=0} \lambda^j \Phi_j^{q'}(z). \tag{20}$$

По значениям последних величин можно находить и другие величины, например, изгибающие моменты усилий на площадках, нормальных и касательных к контурам.

Описание и анализ результатов численных исследований. Были проведены численные исследования распределения изгибающих моментов в кольце с циклически расположенными упругими включениями в зависимости от геометрических и упругих характеристик включений и плиты и времени приложения нагрузки. Плита считалась изготовленной из алюминия, для которой $v_0 = 0,25$, $\alpha = 0,5$, $\beta = 6,65 \cdot 10^{-3}$, $\delta_* = 6,15 \cdot 10^{-3}$

[2]; для включений принималось $\nu^q = 1/3$. При проведении расчетов варьировалось отношение K^q / K модулей объемной деформации материалов упругих включений и самой плиты. Заметим, что при заданном $\lambda_K = K^q / K$ легко найти и отношение $\frac{E^q}{E} = \frac{(1 - 2\nu^q)K^q}{(1 - 2\nu_0)K}$, где E^q , E – модули Юнга материалов включений и плиты соответственно. В данном случае (когда $\nu_0 = 0,25$, $\nu^q = 1/3$) это отношение $\frac{E^q}{E} = \frac{2K^q}{3K}$. В расчетах количество приближений j по степеням малого параметра λ увеличивалось до тех пор, пока последующее приближение изменяло значения максимальных моментов предыдущего приближения более чем на 0,01%. Для этого необходимо было для различных времен оставлять степени малого параметра λ от 6 до 10. Для удовлетворения граничным условиям с достаточно высокой степенью точности в зависимости от геометрических параметров отверстий в рядах (5), (6) оставлялось от 5 до 25 членов и брались от 100 до 250 “коллокационных” точек t_m , в которых вычислялась невязка функционала (13).

В таблице для кругового кольца с одним поясом циклически расположенных однородных круговых включений (рис. 2), находящегося под действием равномерно распределенных по внешнему контуру моментов интенсивности m , с точностью до этой интенсивности даны значения изгибающих моментов M_s в некоторых точках плиты. Результаты приведены в зависимости от количества включений в поясе, отношения R_1/R_0 , где R_0 , R_1 – радиусы внешнего и внутреннего контуров кольца и отношения λ_K объемных модулей деформаций материалов включений и плиты. Считалось, что радиусы всех включений в поясе одинаковы и равны радиусу центрального включения R_1 , длины перемычек между включениями пояса и контурами кольца одинаковы: $c_{11} = c_0$. Результаты для λ_K , равных 0 и ∞ , относятся к плите с абсолютно мягкими включениями (отверстиями) и абсолютно жесткими включениями. Данные приведены для двух значений времени отсчета: $t = 0$ час. и $t = 900$ час. Это связано с тем, что, как показали проведенные расчеты, практически для всех рассмотренных случаев уже через 700 – 800 час. после приложения нагрузки моменты в плите с течением времени практически не изменяются, т.е. устанавливается стационарное состояние.

Из таблицы видно, что уменьшение ширины кольца (увеличение R_1/R_0) приводит к увеличению значений M_s . При переходе в стационарное состояние значения моментов M_s претерпевают изменения, причем эти изменения тем больше, чем больше концентрация моментов. Так, в

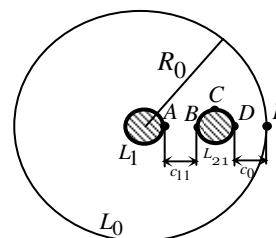


Рис.2

точке A для случая $\mathcal{L} = 4$ если $\lambda_K = 0,1$ при $R_1/R_0 = 0,2$ это изменение составляет 48%, то при $R_1/R_0 = 0,25$ оно составляет 59%. Значительно

Точка	λ_K	t , час	Включений в поясе												
			1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	
			$R_1/R_0 = 0,2$				$R_1/R_0 = 0,25$				$R_1/R_0 = 0,01$				
A	0	0	2,82	3,03	3,01	2,95	3,87	4,20	4,18	4,02	3,08	3,38	3,28	3,02	
		900	2,86	3,09	3,07	3,00	3,94	4,34	4,33	4,18	3,14	3,46	3,35	3,08	
	0,1	0	2,43	2,59	2,57	2,51	3,14	3,38	3,37	3,26	2,62	2,83	2,76	2,56	
		900	1,32	1,33	1,32	1,31	1,35	1,36	1,35	1,33	1,39	1,40	1,38	1,35	
	10	0	0,52	0,53	0,52	0,51	0,54	0,55	0,54	0,52	0,59	0,61	0,61	0,60	
		900	0,86	0,94	0,87	0,78	1,01	1,15	1,07	0,94	1,14	1,28	1,18	1,07	
	∞	0	0,53	0,58	0,52	0,47	0,64	0,69	0,64	0,55	0,73	0,83	0,75	0,67	
		900	0,87	0,97	0,89	0,71	1,04	1,18	1,12	0,96	1,19	1,35	1,22	1,09	
	B	0	0	2,84	3,02	3,03	3,01	3,87	4,19	4,18	4,04	3,08	3,37	3,28	3,04
			900	2,88	3,08	3,10	3,07	3,95	4,33	4,34	4,19	3,14	3,45	3,35	3,09
0,1		0	1,91	2,57	2,59	2,57	2,00	3,37	3,38	3,28	2,62	2,82	2,76	2,58	
		900	1,32	1,33	1,33	1,33	1,35	1,36	1,36	1,35	1,39	1,40	1,39	1,37	
10		0	0,52	0,52	0,51	0,50	0,54	0,55	0,52	0,50	0,59	0,61	0,59	0,57	
		900	0,84	0,89	0,86	0,82	1,00	1,07	0,99	0,92	1,14	1,24	1,19	1,10	
∞		0	0,52	0,54	0,52	0,49	0,62	0,64	0,58	0,55	0,73	0,79	0,77	0,71	
		900	0,86	0,89	0,87	0,82	1,02	1,08	0,97	0,92	1,19	1,29	1,25	1,15	
C		0	0	2,11	2,18	2,20	2,25	2,22	2,40	2,38	2,40	1,87	1,84	1,74	1,68
			900	2,11	2,17	2,18	2,23	2,22	2,39	2,37	2,39	1,86	1,82	1,72	1,65
	0,1	0	1,89	1,95	1,96	2,00	1,98	2,10	2,10	2,12	1,72	1,69	1,62	1,57	
		900	1,25	1,24	1,25	1,25	1,26	1,25	1,26	1,26	1,24	1,23	1,22	1,22	
	10	0	0,49	0,49	0,47	0,46	0,48	0,48	0,46	0,43	0,52	0,53	0,51	0,51	
		900	0,60	0,58	0,54	0,53	0,61	0,59	0,54	0,49	0,56	0,56	0,49	0,47	
	∞	0	0,35	0,34	0,31	0,30	0,35	0,35	0,31	0,27	0,33	0,33	0,28	0,27	
		900	0,59	0,58	0,54	0,52	0,60	0,60	0,55	0,49	0,54	0,53	0,47	0,44	
	D	0	0	2,58	2,64	2,65	2,70	3,24	3,28	3,14	3,10	2,17	2,26	2,26	2,26
			900	2,61	2,68	2,70	2,75	3,30	3,38	3,28	3,26	2,18	2,28	2,28	2,28
0,1		0	2,24	2,29	2,30	2,34	2,69	2,71	2,64	2,63	1,95	2,02	2,02	2,02	
		900	1,29	1,29	1,30	1,30	1,30	1,31	1,32	1,32	1,29	1,30	1,31	1,31	
10		0	0,49	0,49	0,48	0,48	0,46	0,45	0,45	0,45	0,53	0,54	0,53	0,53	
		900	0,64	0,66	0,65	0,65	0,60	0,61	0,58	0,57	0,76	0,80	0,81	0,81	
∞		0	0,38	0,39	0,38	0,38	0,35	0,34	0,32	0,33	0,47	0,50	0,50	0,51	
		900	0,63	0,64	0,63	0,63	0,59	0,59	0,56	0,55	0,77	0,81	0,83	0,83	
E		0	0	1,66	1,69	1,68	1,70	2,40	2,40	2,28	2,25	-	-	-	-
			900	1,70	1,73	1,73	1,76	2,47	2,53	2,44	2,42	-	-	-	-
	0,1	0	1,52	1,54	1,53	1,55	2,07	2,06	1,99	1,98	-	-	-	-	
		900	1,12	1,13	1,13	1,13	1,19	1,20	1,21	1,21	-	-	-	-	
	10	0	0,82	0,82	0,81	0,80	0,69	0,69	0,68	0,68	-	-	-	-	
		900	0,87	0,89	0,87	0,86	0,76	0,77	0,74	0,73	-	-	-	-	
	∞	0	0,80	0,80	0,78	0,77	0,63	0,63	0,61	0,61	-	-	-	-	
		900	0,87	0,88	0,86	0,85	0,75	0,76	0,73	0,72	-	-	-	-	

влияние и жесткости включений: чем жестче материал включения

(больше параметр λ_K), тем значительнее изменения значений моментов при переходе в стационарное состояние. Так, для случая четырех включений в поясе ($\mathcal{L} = 4$) при переходе в стационарное состояние моменты в точке A для $\lambda_K = 0,1$ изменяются на 48%, а при $\lambda_K = 10$ – на 55%.

РЕЗЮМЕ. З використанням методів малого параметра, конформних відображень і найменших квадратів розв'язано задачу про вязкопружний згин для плити з циклічно розташованими поясами еліптичних включень. Для випадку кільця з одним поясом кругових включень проведено чисельні дослідження з встановленням впливу геометричних параметрів включень, їх кількості та часу прикладання.

Ключові слова: в'язкопружність, згин, метод малого параметра, комплексні потенціали, стаціонарний стан, циклічна задача.

SUMMARY. Using the methods of small parameter, conformal mapping and the least squares the cyclic problem about viscoelastic bend for a plate with and cyclic belts of elliptic holes is decided. For the cases of a ring with a belt of circular inclusions the numeral researches with the exposure of influencing of geometrical parameters of the inclusions, their quantity and time of loading on the tense state of plate are conducted.

Key words: viscoelasticity, bend, the methods of small parameter, the complex potentials, stationary state, cyclic problem.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. Калоеров С. А., Вакуленко С. В. Решение циклической задачи для пластинки с отверстиями и трещинами и ее приложение в горном деле // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2004. – Вип. 1, ч. 1. – С. 111–118.
2. Калоеров С. А., Мироненко А. Б. Исследование вязкоупругого состояния пластинки с жесткими эллиптическими или линейными включениями // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2005. – Вип. 1, ч. 1. – С. 71–78.
3. Калоеров С. А., Мироненко А. Б. Исследование вязкоупругого состояния пластинки с упругими эллиптическими или линейными включениями // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 2. – С. 88–98.
4. Калоеров С. А., Шипоша Ю. С. Циклическая задача о вязкоупругом изгибе плиты с отверстиями // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2009. – Вип. 1, ч. 1. – С. 100–110.
5. Комодамианский А. С., Иванов Г. М. Изгиб тонких многосвязных плит. – Донецк, 1973. – 264 с.
6. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием // Прикладная математика и механика. – 1948. – Т. 12, № 1. – С. 53–62.

Донецкий национальный университет

Поступила 10.10.2010

УДК 539.3

С. А. КАЛОЕРОВ, д-р физ.-мат. наук, О. А. ДОБРЯК

ТЕРМОЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСВЯЗНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Методом интегралов типа Коши получены общие представления комплексных потенциалов теплопроводности и термоэлектромагнитоупругости для анизотропной полуплоскости с эллиптическими отверстиями, точно удовлетворяющие граничным условиям на прямолинейной границе. Неизвестные постоянные, входящие в комплексные потенциалы, определяются из граничных условий на контурах отверстий методом наименьших квадратов. Приведены результаты численных исследований для полуплоскости с одним круговым отверстием или трещиной, с двумя круговыми отверстиями.

Ключевые слова: термоэлектромагнитоупругость, комплексные потенциалы, полуплоскость.

К настоящему времени для многосвязных сред разработаны методы решения задач термоупругости, термоэлектроупругости или термомагнитоупругости, даны решения ряда конкретных задач [1, 6-8]. В статье [5] эти методы распространены на задачи термоэлектромагнитоупругости для конечных или бесконечных многосвязных сред. В данной работе последний подход распространен на задачи термоэлектромагнитоупругости для полуплоскости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим обладающую прямолинейной тепловой и электромагнитоупругой анизотропией отнесенную к прямолинейной системе координат Oxy нижнюю полуплоскость S с прямолинейной границей L^+ и внутренними эллиптическими отверстиями L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с полуосями a_l , b_l и центрами в точках $z_l = x_{0l} + iy_{0l}$ (рис. 1).

Обозначим расстояние от начала системы координат до прямолинейной границы через h^+ . Прямолинейная граница теплоизолирована или на ней задана постоянная температура T^+ , на контурах отверстий L_l заданы значения температуры T_l . Прямолинейная граница и контуры отверстий не подкреплены, индукции на них равны нулю.

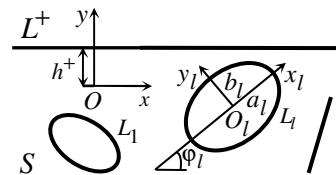


Рис. 1

Определение температурного поля в рассматриваемой полуплоскости сводится к нахождению комплексного потенциала теплопроводности $F_3(z_3)$ из граничных условий на прямолинейной границе и на контурах отверстий. Если прямолинейная граница теплоизолирована, то граничные условия имеют вид [5-7]

$$2 \operatorname{Re} [i \varpi F_5'(t_5)] = 0 \text{ на } L^+, \quad (1.1)$$

в случае же задания на ней температуры

$$2 \operatorname{Re} F_5(t_5) = T^+ \text{ на } L^+, \quad (1.2)$$

где

$$z_5 = x + \mu_5 y; \quad \varpi = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2};$$

k_{ij} - коэффициенты теплопроводности материала; μ_5 - корень характеристического уравнения теплопроводности [5, 8]. На контурах отверстий граничные условия имеют вид

$$2 \operatorname{Re} F_5(t_5) = T_l \text{ на } L_l. \quad (1.3)$$

Определение термоэлектромагнитоупругого состояния (ТЭМУС) многосвязной полуплоскости сводится к определению комплексных потенциалов $\Phi_k(z_k)$ из граничных условий

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 g_{ki}^0 \Phi_k(t_k) = 0 \quad (i = \overline{1, 4}) \text{ на } L^+ \text{ и } L_l, \quad (1.4)$$

где

$$z_k = x + \mu_k y \quad (k = \overline{1, 5}); \quad (1.5)$$

μ_k - корни характеристического уравнения термоэлектромагнитоупругости [5]; g_{ki}^0 - известные постоянные.

Если функции $F_5(z_5)$ и $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 5}$) будут определены, то основные характеристики ТЭМУС (температуру, плотность потока тепла, напряжения, перемещения, индукции, напряженности и потенциалы электромагнитного поля) можно вычислить по формулам

$$T(x, y) = 2 \operatorname{Re} F_5(z_5); \quad q_n = -2 \operatorname{Re} [i \varpi \delta_5 F_5'(z_5)]; \quad (1.6)$$

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}) \Phi_k'(z_k),$$

$$(D_x, D_y, E_x, E_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{7k}, \lambda_{8k}, -r_k^0, -\mu_k r_k^0) \Phi_k'(z_k),$$

$$(B_x, B_y, H_x, H_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{9k}, \lambda_{10k}, -h_k^0, -\mu_k h_k^0) \Phi_k'(z_k)$$

$$(u, v, \varphi, \psi) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k) +$$

$$+(-\omega_3 y + u_0, \omega_3 x + v_0, \varphi_0, \Psi_0). \quad (1.7)$$

2. Решение задачи теплопроводности. Комплексный потенциал теплопроводности $F_5(z_5)$ определен в нижней полуплоскости S_5 , получаемой из заданной полуплоскости S аффинным преобразованием (1.5) при $k = 5$, причем прямолинейной границе L^+ и контурам отверстий L_l в области S соответствуют прямолинейная граница L_5^+ и контуры L_{5l} области S_5 . Исходя из общего представления комплексного потенциала для многосвязной области, функцию $F_5(z_5)$ представим в виде [7]

$$F_5(z_5) = c_0 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l} \ln(z_5 - z_{5l}) + F_{50}(z_5) + F_{51}(z_5), \quad (2.1)$$

где c_0 , D_{5l} – неизвестные вещественные константы, определяемые из граничных условий, причем $D_{5l} = -q_l/4\pi\epsilon$; q_l – неизвестный суммарный поток тепла в область через контур L_l ; $F_{51}(z_5)$ – функция, голоморфная вне отверстий L_{5l} ; $F_{50}(z_5)$ – функция, голоморфная в сплошной нижней полуплоскости S_5 , за исключением, быть может, точки $z_5 = \infty$.

Отобразим конформно внешность единичного круга $|\zeta_{5l}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{5l} [3]

$$z_5 = z_{5l} + R_{5l} \left(\zeta_{5l} + \frac{m_{5l}}{\zeta_{5l}} \right). \quad (2.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} z_{5l} &= x_{0l} + i\mu_5 y_{0l}, \\ R_{5l} &= \frac{a_l(\cos\varphi_l + \mu_5 \sin\varphi_l) + ib_l(\sin\varphi_l - \mu_5 \cos\varphi_l)}{2}, \\ m_{5l} &= \frac{a_l(\cos\varphi_l + \mu_5 \sin\varphi_l) - ib_l(\sin\varphi_l - \mu_5 \cos\varphi_l)}{2R_{5l}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Тогда функцию $F_{51}(z_5)$, голоморфную вне всех эллипсов L_{5l} , можно представить суммой рядов Лорана по отрицательным степеням ζ_{5l} . Окончательно для функции (2.1) получаем выражение

$$F_5(z_5) = c_0 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l} \ln(z_5 - z_{5l}) + F_{50}(z_5) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{5l n}}{\zeta_{5l}^n(z_5)}. \quad (2.4)$$

На прямолинейной границе L_5^+ имеют место равенства

$$t_5 = x + \mu_5 h^+, \quad \bar{t}_5 = x + \bar{\mu}_5 h^+ = t_5 + (\bar{\mu}_5 - \mu_5) h^+, \quad (2.5)$$

Учитывая это и подставляя функции (2.4) в граничные условия (1.1), для случая теплоизолированной прямолинейной границы получаем

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[\frac{D_{6l}}{t_5 - t_{5l}} - \frac{D_{6l}}{t_5 + (\bar{\mu}_5 - \mu_5) h^+ - \bar{t}_{5l}} \right] + F'_{50}(t_5) - \overline{F'_{50}(t_5)} + \\ + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n \bar{c}_{5l n}}{\bar{\zeta}_{5l}^{n-1} \bar{R}_{5l}(\bar{\zeta}_{5l}^2 - \bar{m}_{5l})} - \frac{n c_{5l n}}{\zeta_{5l}^{n-1} R_{5l}(\zeta_{5l}^2 - m_{5l})} \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\bar{\zeta}_{5l}$ - переменные, определяемые из конформных отображений

$$z_5 = \bar{z}_{5l} + (\mu_5 - \bar{\mu}_5) h^+ + \bar{R}_{5l}(\bar{\zeta}_{5l} + \bar{m}_{5l}/\bar{\zeta}_{5l}) \quad (2.7)$$

внешности единичного круга $|\bar{\zeta}_{5l}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{5l}^+ в верхней полуплоскости S_5^+ с центрами в точках $\bar{z}_{5l} + (\mu_5 - \bar{\mu}_5) h^+$.

Функции $F'_{50}(t_5)$, $\frac{D_{6l}}{t_5 + (\bar{\mu}_5 - \mu_5) h^+ - \bar{t}_{5l}}$, $\frac{n \bar{c}_{5l n}}{\bar{\zeta}_{5l}^{n-1} \bar{R}_{5l}(\bar{\zeta}_{5l}^2 - \bar{m}_{5l})}$ являются

граничными значениями функций $F'_{50}(z_5)$, $\frac{D_{6l}}{z_5 + (\bar{\mu}_5 - \mu_5) h^+ - \bar{z}_{5l}}$,

$\frac{n \bar{c}_{5l n}}{\bar{\zeta}_{5l}^{n-1} \bar{R}_{5l}(\bar{\zeta}_{5l}^2 - \bar{m}_{5l})}$, голоморфных в сплошной нижней полуплоскости, по-

этому интегралы типа Коши от них для точек нижней полуплоскости восстанавливают эти функции с противоположным знаком. Функции

$\frac{D_{6l}}{t_5 - t_{5l}}$, $\frac{n c_{5l n}}{\zeta_{5l}^{n-1} R_{5l}(\zeta_{5l}^2 - m_{5l})}$, $\bar{F}'_{50}(t_5 + (\bar{\mu}_5 - \mu_5) h^+)$ являются граничными

значениями функций $\frac{D_{6l}}{z_5 - z_{5l}}$, $\frac{n c_{5l n}}{\zeta_{5l}^{n-1} R_{5l}(\zeta_{5l}^2 - m_{5l})}$, $\bar{F}'_{50}(z_5 + (\bar{\mu}_5 - \mu_5) h^+)$ го-

ломорфных в сплошной верхней полуплоскости, поэтому интегралы типа Коши от них для точек нижней полуплоскости равны нулю. Учитывая это, умножая обе части равенств (2.6) на ядра Коши и вычисляя интегралы типа Коши от полученного равенства, имеем

$$F'_{50}(t_5) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \frac{D_{6l}}{t_5 + (\bar{\mu}_5 - \mu_5) h^+ - \bar{t}_{5l}} + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \bar{c}_{5l n}}{\bar{\zeta}_{5l}^{n-1} \bar{R}_{5l}(\bar{\zeta}_{5l}^2 - \bar{m}_{5l})}, \quad (2.8)$$

Окончательно выражение комплексного потенциала (2.4) примет вид

$$F_5(z_5) = c_0 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l} \left[\ln(z_5 - z_{5l}) + \ln(z_5 + (\bar{\mu}_5 - \mu_5)h^+ - \bar{z}_{5l}) \right] + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{c_{5l n}}{\zeta_{5l}^n} + \frac{\bar{c}_{5l n}}{\bar{\zeta}_{5l}^n} \right], \quad (2.9)$$

где c_0 - произвольная постоянная.

Если на прямолинейной границе задана температура, то из условий (1.2) найдем

$$F_{50}(t_5) - \overline{F_{50}(t_5)} + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[D_{6l} \ln(t_5 - t_{5l}) + D_{6l} \ln(t_5 + (\bar{\mu}_5 - \mu_5)h^+ - \bar{t}_{5l}) \right] + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{c_{5l n}}{\zeta_{5l}^n} - \frac{\bar{c}_{5l n}}{\bar{\zeta}_{5l}^n} \right] - T^+ + 2c_0 = 0, \quad (2.10)$$

Исходя из полученных выше результатов, функцию $F_{50}(z_5)$ выберем в виде

$$F_{50}(z_5) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l}^+ \ln(z_5 + (\bar{\mu}_5 - \mu_5)h^+ - \bar{z}_{5l}) + F_{50}^*(z_5), \quad (2.11)$$

где D_{5l}^+ - неизвестные коэффициенты; $F_{50}^*(z_5)$ - функция, голоморфная в нижней полуплоскости, включая бесконечно удаленную точку. Подставив функцию (2.11) в (2.10) и приравняв коэффициенты при одинаковых логарифмах нулю, найдем $D_{5l}^+ = -D_{5l}$. После этого по аналогии с предыдущим, применив метод интегралов типа Коши, из граничных условий (2.10) найдем $F_{50}^*(z_5)$. Окончательно для функции будем иметь

$$F_5(z_5) = \frac{T^+}{2} + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l} \left[\ln(z_5 - z_{5l}) - \ln(z_5 + (\bar{\mu}_5 - \mu_5)h^+ - \bar{z}_{5l}) \right] + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{c_{5l n}}{\zeta_{5l}^n} - \frac{\bar{c}_{5l n}}{\bar{\zeta}_{5l}^n} \right]. \quad (2.12)$$

Неизвестные постоянные D_{5l} и $c_{5l n}$ в (2.9) и (2.12) найдем из граничных условий на контурах отверстий методом наименьших квадратов. Исходя из граничных условий (1.3) на контурах отверстий, составим функционал

$$J_T = \sum_{m=1}^M \left[2 \operatorname{Re} F_5(t_{5m}) - T_l \right]^2, \quad (2.13)$$

где t_m ($m = 1, M$) - точки, выбираемые на контурах отверстий L_l .

Удовлетворяя условиям минимума $\partial J_T / \partial D_{5l} = 0$, $\partial J_T / \partial c_{5l n} = 0$,

$\partial J_T / \partial c_0 = 0$ функционала (2.13), будем иметь

$$\sum_{m=1}^M \left[F_5(t_{5m}) + \overline{F_5(t_{5m})} - T_l \right] \omega_{5l} = 0 \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}),$$

$$\sum_{m=1}^M \left[F_5(t_{5m}) + \overline{F_5(t_{5m})} - T_l \right] \varphi_{5ln} = 0 \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}, n = 1, 2, \dots); \quad (2.14)$$

$$\sum_{m=1}^M \left[F_5(t_{5m}) + \overline{F_5(t_{5m})} - T_l \right] = 0, \quad (2.15)$$

где

$$\omega_{5l} = 2 \operatorname{Re} \left[\ln(t_5 - t_{5l}) \pm \ln(t_5 + (\bar{\mu}_5 - \mu_5)h^+ - \bar{t}_{5l}) \right],$$

$$\varphi_{5ln} = \zeta_{5l}^{-n}(t_m) \pm \overline{\zeta_{5l}^{-n}(t_m)}.$$

Здесь и далее верхние знаки относятся к случаю теплоизолированной прямолинейной границы, нижние – к случаю задания на ней температуры. Заметим, что последнее уравнение (2.15) при заданной температуре на прямолинейной границе отсутствует и в этом случае $c_0 = T^+ / 2$.

Подставив (2.9), (2.12) в (2.14) и (2.15), для определения D_{5l} , c_{5ln} , c_0 получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=1}^M \left[2c_0 + \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} D_{5r} \omega_{5r} + \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} \sum_{p=1}^{\infty} (c_{5rp} \varphi_{5rp} + \bar{c}_{5rp} \bar{\varphi}_{5rp}) \right] \omega_{5l} = \sum_{m=1}^M T_l \omega_{5l} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}),$$

$$\sum_{m=1}^M \left[2c_0 + \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} D_{5r} \omega_{5r} + \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} \sum_{p=1}^{\infty} (c_{5rp} \varphi_{5rp} + \bar{c}_{5rp} \bar{\varphi}_{5rp}) \right] \varphi_{5ln} =$$

$$= \sum_{m=1}^M T_l \varphi_{5ln} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}, n = 1, 2, \dots); \quad (2.16)$$

$$\sum_{m=1}^M \left[2c_0 + \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} D_{5r} \omega_{5r} + \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} \sum_{p=1}^{\infty} (c_{5rp} \varphi_{5rp} + \bar{c}_{5rp} \bar{\varphi}_{5rp}) \right] = \sum_{m=1}^M T_l \omega_{5l}. \quad (2.17)$$

Причем уравнение (2.17) присутствует только для теплоизолированной прямолинейной границы.

Решая систему (2.16) или (2.16) и (2.17), найдем постоянные D_{5l} , c_{5ln} , а в случае теплоизолированной прямолинейной границы также c_0 .

3. Решение задачи термоэлектромагнитоупругости. Комплексные потенциалы термоэлектромагнитоупругости $\Phi_k(z_k)$ определены в многосвязных нижних полуплоскостях S_k , получаемых из S аффинными преобразованиями (1.5), причем прямолинейной границе L^+ и контурам от-

верстей L_l в областях S_k соответствуют прямолинейная граница L_k^+ и контуры отверстий L_{kl} . Исходя из общих представлений комплексных потенциалов для многосвязной области, функции $\Phi_k(z_k)$ выберем в виде

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \Phi_{k0}(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n} \quad (k=1,4). \quad (3.1)$$

Здесь a_{kln} – неизвестные постоянные; ζ_{kl} – переменные, определяемые из конформных отображений

$$z_k = x + \mu_k y = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right); \quad (3.2)$$

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}};$$

Γ_k , A_{kl} , B_{kl} – постоянные, определяемые из систем уравнений [5-7]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{7k}, \lambda_{8k}, \lambda_{9k}, \lambda_{10k}, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k = \\ = (\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty, D_x^\infty, D_y^\infty, B_x^\infty, B_y^\infty, \omega_3^\infty); \quad (3.3)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 i (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}, p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) A_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \quad (3.4)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 i (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}, p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) B_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \quad (3.5)$$

$$\Gamma_5 = r_5 c_0, \quad A_{5l} = r_5 D_{5l}, \quad B_{5l} = r_5 R_{5l} c_{5l1} - r_5 z_{5l} D_{5l},$$

$$B_{5l}^+ = r_5 \bar{R}_{5l} \bar{c}_{5l1} \pm r_5 [\bar{z}_{5l} + (\mu_5 - \bar{\mu}_5) h^+] D_{5l},$$

$$b_{5l1} = R_{5l} (2D_{5l} m_{5l} - c_{5l2}),$$

$$b_{5ln} = R_{5l} (m_{5l} c_{5l, n-1} - c_{5l, n+1}) / n \quad (n > 1);$$

$\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в сплошных нижних полуплоскостях S_k , за исключением бесконечно удаленных точек. Здесь и далее верхний знак относится к случаю теплоизолированной прямолинейной границы, нижние знаки – в случае задания на ней температуры. При получении последних выражений учтено, что

$$\Phi_5(z_5) = r_5 \int F_5(z_5) dz_5 = \Gamma_5 z_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} [(A_{5l} z_5 + B_{5l}) \ln(z_5 - z_{5l}) - (A_{5l} z_5 + B_{5l}^+) \ln(z_5 + (\bar{\mu}_5 - \mu_5) h^+ - \bar{z}_{5l})] + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{r_5 b_{5l} \ln}{\zeta_{5l}^n} + \frac{r_5 \bar{b}_{5l} \ln}{\bar{\zeta}_{5l}^n} \right], \quad (3.6)$$

Граничные условия на прямолинейной границе (1.4) приведем к виду [2, 7]

$$\begin{aligned} & \Phi'_k(t_k) + \bar{r}_k \overline{\Phi'_k(t_k)} + \bar{s}_{k+1} \overline{\Phi'_{k+1}(t_{k+1})} + \bar{e}_{k+2} \overline{\Phi'_{k+2}(t_{k+2})} + \\ & + \bar{n}_{k+3} \overline{\Phi'_{k+3}(t_{k+3})} + l_{k5} r_5 F_5(t_5) + \bar{n}_{k5} \bar{r}_5 \overline{F_5(t_5)} = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{r}_k &= [\bar{g}_{k1}^0 M_{1k} + \bar{g}_{k2}^0 M_{2k} + \bar{g}_{k3}^0 M_{3k} + \bar{g}_{k4}^0 M_{4k}] / \Delta_k, \\ \bar{s}_{k+1} &= [\bar{g}_{k+1,1}^0 M_{1k} + \bar{g}_{k+1,2}^0 M_{2k} + \bar{g}_{k+1,3}^0 M_{3k} + \bar{g}_{k+1,4}^0 M_{4k}] / \Delta_k, \\ \bar{e}_{k+2} &= [\bar{g}_{k+2,1}^0 M_{1k} + \bar{g}_{k+2,2}^0 M_{2k} + \bar{g}_{k+2,3}^0 M_{3k} + \bar{g}_{k+2,4}^0 M_{4k}] / \Delta_k, \\ \bar{n}_{k+3} &= [\bar{g}_{k+3,1}^0 M_{1k} + \bar{g}_{k+3,2}^0 M_{2k} + \bar{g}_{k+3,3}^0 M_{3k} + \bar{g}_{k+3,4}^0 M_{4k}] / \Delta_k, \\ l_{k5} &= [g_{51}^0 M_{1k} + g_{52}^0 M_{2k} + g_{53}^0 M_{3k} + g_{54}^0 M_{4k}] / \Delta_k, \\ \bar{n}_{k5} &= [\bar{g}_{51}^0 M_{1k} + \bar{g}_{52}^0 M_{2k} + \bar{g}_{53}^0 M_{3k} + \bar{g}_{54}^0 M_{4k}] / \Delta_k; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\Delta_k = g_{k1}^0 M_{1k} + g_{k2}^0 M_{2k} + g_{k3}^0 M_{3k} + g_{k4}^0 M_{4k};$$

$$\begin{aligned} M_{1k} &= \begin{vmatrix} g_{k+1,2}^0 & g_{k+2,2}^0 & g_{k+3,2}^0 \\ g_{k+1,3}^0 & g_{k+2,3}^0 & g_{k+3,3}^0 \\ g_{k+1,4}^0 & g_{k+2,4}^0 & g_{k+3,4}^0 \end{vmatrix}, & M_{2k} &= - \begin{vmatrix} g_{k+1,1}^0 & g_{k+2,1}^0 & g_{k+3,1}^0 \\ g_{k+1,3}^0 & g_{k+2,3}^0 & g_{k+3,3}^0 \\ g_{k+1,4}^0 & g_{k+2,4}^0 & g_{k+3,4}^0 \end{vmatrix}, \\ M_{3k} &= \begin{vmatrix} g_{k+1,1}^0 & g_{k+2,1}^0 & g_{k+3,1}^0 \\ g_{k+1,2}^0 & g_{k+2,2}^0 & g_{k+3,2}^0 \\ g_{k+1,4}^0 & g_{k+2,4}^0 & g_{k+3,4}^0 \end{vmatrix}, & M_{4k} &= - \begin{vmatrix} g_{k+1,1}^0 & g_{k+2,1}^0 & g_{k+3,1}^0 \\ g_{k+1,2}^0 & g_{k+2,2}^0 & g_{k+3,2}^0 \\ g_{k+1,3}^0 & g_{k+2,3}^0 & g_{k+3,3}^0 \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

k – индекс, принимающий значения 1, 2, 3, 4, причем значение индекса $k + j$, когда он больше 4, формально полагается равным $k + j - 4$.

Дифференцируя комплексные потенциалы (3.1), найдем

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \frac{A_{kl} z_k + B_{kl}}{z_k - z_{kl}} \right] + \Phi'_{k0}(z_k) -$$

$$-\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_{kl} \ln}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \quad (k = \overline{1, 4}). \quad (3.9)$$

Учитывая соотношения (2.5) а также, что на прямолинейной границе

$$\begin{aligned} t_k &= x + \mu_k h^+, & \bar{t}_{k+j} &= x + \bar{\mu}_{k+j} h^+ = t_k - (\mu_k - \bar{\mu}_{k+j}) h^+, \\ t_5 &= x + \mu_5 h^+ = t_k - (\mu_k - \mu_5) h^+, \\ \bar{t}_5 &= x + \bar{\mu}_5 h^+ = t_k - (\mu_k - \bar{\mu}_5) h^+, \end{aligned} \quad (3.10)$$

и подставляя функции (3.9) в (3.7) с учетом соотношений

$$\Gamma_k + \bar{r}_k \bar{\Gamma}_k + \bar{s}_{k+1} \bar{\Gamma}_{k+1} + \bar{e}_{k+2} \bar{\Gamma}_{k+2} + l_{k5} \Gamma_5 + \bar{n}_{k5} \bar{\Gamma}_5 = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left\{ A_{kl} \ln(t_k - t_{kl}) + \bar{r}_k \bar{A}_{kl} \ln(t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_k) h^+ - \bar{t}_{kl}) + \right. \\ & \quad + \bar{s}_{k+1} \bar{A}_{k+1,l} \ln(t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+1}) h^+ - \bar{t}_{k+1,l}) \\ & \quad + \bar{e}_{k+2} \bar{A}_{k+2,l} \ln(t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+2}) h^+ - \bar{t}_{k+2,l}) \\ & \quad + \bar{n}_{k+3} \bar{A}_{k+3,l} \ln(t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+3}) h^+ - \bar{t}_{k+3,l}) \\ & \quad + (l_{k5} r_5 \pm \bar{n}_{k5} \bar{r}_5) D_{5l} \left[\ln(t_5 - t_{5l}) + \ln(t_5 + (\bar{\mu}_5 - \mu_5) h^+ - \bar{t}_{5l}) \right] + \\ & \quad + \frac{A_{kl} t_k + B_{kl}}{t_k - t_{kl}} + \bar{r}_k \frac{\bar{A}_{kl} (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_k) h^+) + B_{kl}}{t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+1}) h^+ - \bar{t}_{kl}} + \\ & \quad + \bar{s}_{k+1} \frac{\bar{A}_{k+1,l} (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+1}) h^+) + B_{k+1,l}}{t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+1}) h^+ - \bar{t}_{k+1,l}} + \\ & \quad + \bar{e}_{k+2} \frac{\bar{A}_{k+2,l} (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+2}) h^+) + B_{k+2,l}}{t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+2}) h^+ - \bar{t}_{k+2,l}} + \\ & \quad \left. + \bar{n}_{k+3} \frac{\bar{A}_{k+3,l} (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+3}) h^+) + B_{k+3,l}}{t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+3}) h^+ - \bar{t}_{k+3,l}} \right\} + \\ & \quad + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{kl} \ln \Phi'_{kl} (t_k) + \bar{r}_k \bar{a}_{kl} \ln \bar{\Phi}'_{kl} (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_k) h^+) + \right. \\ & \quad + \bar{s}_{k+1} n \bar{a}_{k+1, \ln} \bar{\Phi}'_{k+1, \ln} (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+1}) h^+) + \\ & \quad \left. + \bar{e}_{k+2} \bar{a}_{k+2, \ln} \bar{\Phi}'_{k+1, \ln} (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+1}) h^+) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\bar{n}_{k+3}\bar{a}_{k+3,\ln}\bar{\Phi}'_{k+3,\ln}\left(t_k+(\mu_k-\bar{\mu}_{k+3})h^+\right)-(l_{k5}r_5\pm\bar{n}_{k5}\bar{r}_5)\left(\frac{c_{5\ln}}{\zeta_{5l}^n}\pm\frac{\bar{c}_{5\ln}}{\bar{\zeta}_{5l}^n}\right)\Bigg]+ \\
& +\Phi'_{k0}(t_k)+\bar{r}_k\bar{\Phi}'_{k0}\left(t_k+(\mu_k-\bar{\mu}_k)h^+\right)+\bar{s}_{k+1}\bar{\Phi}'_{k+1,0}\left(t_k+(\mu_k-\bar{\mu}_{k+1})h^+\right)+ \\
& +\bar{e}_{k+2}\bar{\Phi}'_{k+2,0}\left(t_k+(\mu_k-\bar{\mu}_{k+2})h^+\right)+\bar{n}_{k+3}\bar{\Phi}'_{k+3,0}\left(t_k+(\mu_k-\bar{\mu}_{k+3})h^+\right)=0, \quad (3.11)
\end{aligned}$$

где $\bar{\zeta}_{k+j,l}$ – переменные, определяемые из конформных отображений [2, 7]

$$z_k = \bar{z}_{kl} + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+j})h^+ + \bar{R}_{k+j,l} \left(\bar{\zeta}_{k+j,l} + \frac{\bar{m}_{k+j,l}}{\bar{\zeta}_{k+j,l}} \right) \quad (j = \overline{0, 4}); \quad (3.12)$$

$$\Phi'_{k\ln}(z_k) = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})},$$

$$\bar{\Phi}'_{k+j,\ln}(z_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+j})h^+) = -\frac{n}{\bar{\zeta}_{k+j,l}^{n-1} \bar{R}_{k+j,l} (\bar{\zeta}_{k+j,l}^2 - \bar{m}_{k+j,l})}.$$

Функцию $\Phi'_{k0}(z_k)$ выберем в виде

$$\begin{aligned}
\Phi'_{k0}(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \Big\{ & A_{kl}^+ \ln(z_k - z_{kl}) + A_{k+1,l}^+ \ln(z_{k+1} - z_{k+1,l}) + A_{k+2,l}^+ \ln(z_{k+2} - z_{k+2,l}) + \\
& + A_{k+3,l}^+ \ln(z_{k+3} - z_{k+3,l}) + A_{k5l}^+ \ln(z_5 + (\bar{\mu}_5 - \mu_5)h^+ - \bar{z}_{5l}) \Big\} + \Phi_{k0}^*(z_k), \quad (3.13)
\end{aligned}$$

где $\Phi_{k0}^*(z_k)$ – функции, голоморфные в нижних полуплоскостях, включая бесконечно удаленные точки; $A_{k+j,l}^+$, A_{k5l}^+ – неизвестные постоянные. Требуя равенства коэффициентов при логарифмах $\ln(t_k - t_{kl})$ и $\ln \bar{\zeta}_{5l}$ на прямолинейной границе нулю, будем иметь

$$\begin{aligned}
A_{kl}^+ &= -\bar{r}_k \bar{A}_{kl}, \quad A_{k+1,l}^+ = -\bar{s}_{k+1} \bar{A}_{k+1,l}, \quad A_{k+2,l}^+ = -\bar{e}_{k+2} \bar{A}_{k+2,l}, \\
A_{k+3,l}^+ &= -\bar{n}_{k+3} \bar{A}_{k+3,l}, \quad A_{k5l}^+ = \pm (l_{k5} r_5 + \bar{n}_{k5} \bar{r}_5) D_{5l}.
\end{aligned}$$

Учитывая выражения (3.8), легко получить, что

$$\begin{aligned}
\bar{r}_k r_k + \bar{s}_{k+1} n_k + \bar{e}_{k+2} e_k + \bar{n}_{k+3} s_k &= 1, \\
\bar{r}_k s_{k+1} + \bar{s}_{k+1} r_{k+1} + \bar{e}_{k+2} n_{k+1} + \bar{n}_{k+3} e_{k+1} &= 0, \\
\bar{r}_k e_{k+2} + \bar{s}_{k+1} s_{k+2} + \bar{e}_{k+2} r_{k+2} + \bar{n}_{k+3} n_{k+2} &= 0, \\
\bar{r}_k n_{k+3} + \bar{s}_{k+1} e_{k+3} + \bar{e}_{k+2} s_{k+3} + \bar{n}_{k+3} r_{k+3} &= 0, \\
l_{k5} + \bar{r}_k n_{k5} + \bar{s}_{k+1} n_{k+1,5} + \bar{e}_{k+2} n_{k+2,5} + \bar{n}_{k+3} n_{k+3,5} &= 0,
\end{aligned}$$

$$\bar{n}_{k5} + \bar{r}_k \bar{l}_{k5} + \bar{s}_{k+1} \bar{l}_{k+1,5} + \bar{e}_{k+2} \bar{l}_{k+2,5} + \bar{n}_{k+3} \bar{l}_{k+3,5} = 0.$$

Тогда граничные условия (3.11) примут вид

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[\frac{A_{kl} t_k + B_{kl}}{t_k - t_{kl}} + \bar{r}_k \frac{\bar{A}_{kl} (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_k) h^+) + B_{kl}}{t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_k) h^+ - \bar{t}_{kl}} + \right. \\ & \quad + \bar{s}_{k+1} \frac{\bar{A}_{k+1,l} (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+1}) h^+) + B_{k+1,l}}{t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+1}) h^+ - \bar{t}_{k+1,l}} + \\ & \quad + \bar{e}_{k+2} \frac{\bar{A}_{k+2,l} (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+2}) h^+) + B_{k+2,l}}{t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+2}) h^+ - \bar{t}_{k+2,l}} + \\ & \quad \left. + \bar{n}_{k+3} \frac{\bar{A}_{k+3,l} (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+3}) h^+) + B_{k+3,l}}{t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+3}) h^+ - \bar{t}_{k+3,l}} \right] + \\ & + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{k \ln} \Phi'_{k \ln} (t_k) + \bar{r}_k \bar{a}_{k \ln} \bar{\Phi}'_{k \ln} (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_k) h^+) + \right. \\ & + \bar{s}_{k+1} n \bar{a}_{k+1, \ln} \bar{\Phi}'_{k+1, \ln} (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+1}) h^+) + \\ & + \bar{e}_{k+2} \bar{a}_{k+2, \ln} \bar{\Phi}'_{k+1, \ln} (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+1}) h^+) + \\ & \left. \bar{n}_{k+3} \bar{a}_{k+3, \ln} \bar{\Phi}'_{k+3, \ln} (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+3}) h^+) - (l_{k5} r_5 \pm \bar{n}_{k5} \bar{r}_5) \left(\frac{c_{5 \ln}^n}{\zeta_{5l}^n} \pm \frac{\bar{c}_{5 \ln}^n}{\bar{\zeta}_{5l}^n} \right) \right] + \\ & + \Phi_{k0}^* (t_k) + \bar{r}_k \bar{\Phi}_{k0}^* (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_k) h^+) + \bar{s}_{k+1} \bar{\Phi}_{k+1,0}^* (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+1}) h^+) + \\ & + \bar{e}_{k+2} \bar{\Phi}_{k+2,0}^* (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+2}) h^+) + \bar{n}_{k+3} \bar{\Phi}_{k+3,0}^* (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+3}) h^+) = 0. \quad (3.14) \end{aligned}$$

Функции $\frac{\bar{A}_{k+j,l} (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+j}) h^+) + B_{k+j,l}}{t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+j}) h^+ - \bar{t}_{k+j,l}}$, $\bar{\Phi}'_{k+j, \ln} (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+j}) h^+)$, $\frac{1}{\bar{\zeta}_{5l}^n}$,

$\Phi_{k0}^* (t_k)$ являются граничными значениями функций $\frac{\bar{A}_{k+j,l} (z_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+j}) h^+) + B_{k+j,l}}{z_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+j}) h^+ - \bar{z}_{k+j,l}}$, $\bar{\Phi}'_{k+j, \ln} (z_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+j}) h^+)$, $\frac{1}{\bar{\zeta}_{5l}^n}$, $\Phi_{k0}^* (z_k)$,

голоморфных в нижней полуплоскости, поэтому интегралы типа Коши от них для точек нижней полуплоскости восстанавливают эти функции с противоположным знаком. Функции $\frac{A_{kl} t_k + B_{kl}}{t_k - t_{kl}}$, $\Phi'_{k \ln} (t_k)$, ζ_{5l}^{-n} ,

$\bar{\Phi}'_{k+j,0}^* (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+j}) h^+)$ являются граничными значениями функций

$\frac{A_{kl}z_k+B_{kl}}{z_k-z_{kl}}$, $\Phi'_{k \ln}(z_k)$, ζ_{5l}^{-n} , $\bar{\Phi}_{k+j,0}^*(z_k+(\mu_k-\bar{\mu}_{k+j})h^+)$, голоморфных в сплошной верхней полуплоскости, поэтому интегралы типа Коши от них для точек нижней полуплоскости равны нулю. Учитывая это, умножая обе части равенств (3.14) на ядра Коши и вычисляя интегралы типа Коши от полученного равенства, найдем выражения функции $\Phi_{k0}^*(z_k)$. Подставляя эти выражения в формулы для производных комплексных потенциалов (3.9), окончательно будем иметь

$$\Phi'_k(z_k) = G'_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{k \ln} \Phi'_{k \ln}(z_k) - \bar{r}_k \bar{a}_{k \ln} \bar{\Phi}'_{k \ln}(z_k) - \bar{s}_{k+1} \bar{a}_{k+1, \ln} \bar{\Phi}'_{k+1, \ln}(z_k) - \bar{e}_{k+2} \bar{a}_{k+2, \ln} \bar{\Phi}'_{k+2, \ln}(z_k) - \bar{n}_{k+3} \bar{a}_{k+3, \ln} \bar{\Phi}'_{k+3, \ln}(z_k) \right]. \quad (3.15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} G'_k(z_k) = & \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left\{ A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) - \bar{r}_k \bar{A}_{kl} \ln(z_k + (\mu_k - \bar{\mu}_k) h^+ - \bar{z}_{kl}) - \right. \\ & - \bar{s}_{k+1} \bar{A}_{k+1, l} \ln(z_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+1}) h^+ - \bar{z}_{k+1, l}) - \\ & - \bar{e}_{k+2} \bar{A}_{k+2, l} \ln(z_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+2}) h^+ - \bar{z}_{k+2, l}) - \\ & - \bar{n}_{k+3} \bar{A}_{k+3, l} \ln(z_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+3}) h^+ - \bar{z}_{k+3, l}) + \\ & + (l_{k5} r_5 \pm \bar{n}_{k5} \bar{r}_5) D_{5l} \ln(z_5 + (\bar{\mu}_5 - \mu_5) h^+ - \bar{z}_{5l}) + \\ & + \left[\frac{A_{kl} z_k + B_{kl}}{z_k - z_{kl}} - \bar{r}_k \frac{\bar{A}_{kl} (z_k + (\mu_k - \bar{\mu}_k) h^+) + B_{kl}}{z_k + (\mu_k - \bar{\mu}_k) h^+ - \bar{z}_{kl}} - \right. \\ & - \bar{s}_{k+1} \frac{\bar{A}_{k+1, l} (z_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+1}) h^+) + B_{k+1, l}}{z_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+1}) h^+ - \bar{z}_{k+1, l}} - \\ & - \bar{e}_{k+2} \frac{\bar{A}_{k+2, l} (z_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+2}) h^+) + B_{k+2, l}}{z_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+2}) h^+ - \bar{z}_{k+2, l}} - \\ & \left. - \bar{n}_{k+3} \frac{\bar{A}_{k+3, l} (z_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+3}) h^+) + B_{k+3, l}}{z_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+3}) h^+ - \bar{z}_{k+3, l}} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} (l_{k5} r_5 \pm \bar{n}_{k5} \bar{r}_5) \frac{\bar{c}_{5 \ln}}{\zeta_{5l}^n} \left. \right\}. \quad (3.16) \end{aligned}$$

Неизвестные постоянные $a_{k \ln}$ будем определять из граничных условий только на контурах отверстий методом наименьших квадратов. Исходя из граничных условий (1.4), составим функционал

$$J_{\sigma} = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \left| \sum_{k=1}^5 \left[g_{ki}^0 \delta_k \Phi'_k(t_{km}) + \bar{g}_{ki}^0 \bar{\delta}_k \overline{\Phi'_k(t_{km})} \right] \right|^2, \quad (3.17)$$

где t_m ($m = \overline{1, M}$) – точки, выбираемые только на контурах L_l . Удовлетворяя условиям минимума $\partial J_{\sigma} / \partial a_{kln} = 0$ функционала (3.17), находим

$$\sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \sum_{s=1}^5 \left[g_{si}^0 \delta_s \Phi'_s(t_{sm}) + \bar{g}_{si}^0 \bar{\delta}_s \overline{\Phi'_s(t_{sm})} \right] \alpha_{ikln} = 0 \quad (k=\overline{1, 4}, l=\overline{1, \mathcal{L}}, n=\overline{1, 2, \dots}). \quad (3.18)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_{ikln} = & g_{ki}^0 \delta_k \Phi'_{kln}(z_k) - \bar{g}_{ki}^0 \bar{\delta}_k r_k \overline{\Phi'_{kln}(z_k)} - \bar{g}_{k+1,i}^0 \bar{\delta}_{k+1} s_k \overline{\Phi'_{kln}(z_{k+1})} - \\ & - \bar{g}_{k+2,i}^0 \bar{\delta}_{k+2} e_k \overline{\Phi'_{kln}(z_{k+2})} - \bar{g}_{k+3,i}^0 \bar{\delta}_{k+3} e_k \overline{\Phi'_{kln}(z_{k+3})}. \end{aligned}$$

Подставляя (3.15) в систему (3.18), для определения постоянных a_{kln} будем иметь систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \sum_{s=1}^4 \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} \sum_{j=1}^{\infty} \left[a_{srj} \alpha_{isrj} \alpha_{ikln} + \bar{a}_{srj} \bar{\alpha}_{isrj} \alpha_{ikln} \right] = \\ & = - \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \left\{ 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{s=1}^4 g_{si}^0 \delta_s G'_s(t_{sm}) + g_{5i}^0 \delta_5 r_5 F_5(t_{5m}) \right] \right\} \alpha_{ikln} \\ & \quad (k=\overline{1, 4}, l=\overline{1, \mathcal{L}}, n=\overline{1, 2, \dots}). \quad (3.19) \end{aligned}$$

Решая систему (3.19), найдем неизвестные постоянные a_{kln} . После этого станут известными комплексные потенциалы $\Phi'_k(z_k)$ и можно найти основные характеристики ТЭМУС. Если отверстие вырождается в трещину, то можно вычислять и КИНИН [4].

4. Результаты численных исследований. Были проведены численные исследования ТЭМУС полуплоскости с одним отверстием, с одной трещиной, с двумя отверстиями. Считалось, что на прямолинейной границе $T^+ = 0$, полуплоскость изготовлена из материала $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ [5].

Для выяснения совместного влияния электрических и магнитных свойств материала на ТЭМУС полуплоскости были вычислены значения основных характеристик при решении задач термоупругости (ТУ) (когда не учитывались электрические и магнитные свойства материала), термоэлектроупругости (ТЭУ) (когда не учитывались только магнитные свойства), термомагнитоупругости (ТМУ) (когда не учитывались только электрические свойства) и термоэлектромагнито-

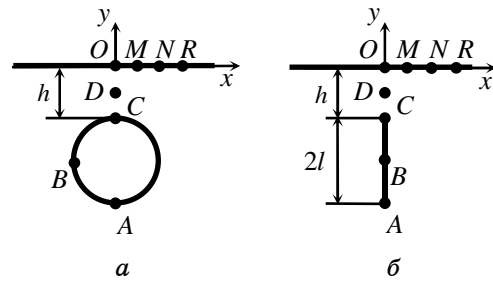


Рис. 2.

тоупругости (ТЭМУ) (когда учитывались все электрические и магнитные свойства). Ниже описаны некоторые из полученных результатов.

В табл. 1 приведены значения напряжений и КИН в некоторых точках полуплоскости с круговым отверстием радиуса a или вертикальной трещиной (рис. 2) полудлины $l = a$ в зависимости от отношения h/a , где h - длина перемычки. Исследуемые характеристики получены при решении соответствующих задач ТУ, ТЭУ, ТМУ, ТЭМУ. Указанные точки имеют координаты $A(0; -h - 2a)$, $C(0; -h)$, $D(0; -h/2)$, $O(0; 0)$, $M(a/2; 0)$,

Таблица 1

Точка	Величина	Модель	h/a							
			10	1	0,5	0,1	10	1	0,5	0,1
A	σ_x (k_1^-)	ТУ	-1,731	-2,782	-3,601	-7,500	-0,698	-0,989	-1,170	-1,755
		ТЭУ	-1,696	-2,693	-3,470	-7,164	-0,627	-0,875	-1,033	-1,540
		ТМУ	-0,573	0,420	1,162	4,849	0,604	1,109	1,392	2,269
		ТЭМУ	-0,419	0,823	1,753	6,357	0,734	1,327	1,661	2,692
B	σ_y	ТУ	0,088	0,679	0,994	1,639	0,504	0,817	1,001	1,427
		ТЭУ	0,167	0,650	0,919	1,479	0,459	0,709	0,858	1,205
		ТМУ	0,866	0,162	-0,129	-0,883	0,056	-0,492	-0,783	-1,451
		ТЭМУ	0,954	0,162	-0,173	-1,031	0,042	-0,559	-0,879	-1,614
C	σ_x (k_1^+)	ТУ	-1,704	-2,820	-4,216	-16,317	-0,689	-0,923	-1,115	-2,130
		ТЭУ	-1,671	-2,734	-4,062	-15,499	-0,619	-0,817	-0,982	-1,866
		ТМУ	-0,602	0,248	1,196	10,866	0,591	1,013	1,299	2,737
		ТЭМУ	-0,453	0,627	1,835	14,009	0,720	1,218	1,557	3,257
D	σ_x	ТУ	-0,132	-0,648	-1,332	-7,295	-0,272	-0,762	-1,320	-5,826
		ТЭУ	-0,128	-0,613	-1,256	-6,859	-0,237	-0,666	-1,156	-5,108
		ТМУ	0,008	0,272	0,689	5,517	0,370	0,977	1,678	7,626
		ТЭМУ	0,029	0,370	0,906	6,950	0,444	1,173	2,012	9,099
O	σ_x	ТУ	0,202	0,517	0,651	0,896	0,000	0,000	0,000	0,000
		ТЭУ	0,164	0,470	0,616	0,917	0,000	0,000	0,000	0,000
		ТМУ	-0,430	-0,506	-0,289	0,532	0,000	0,000	0,000	0,000
		ТЭМУ	-0,497	-0,605	-0,384	0,464	0,000	0,000	0,000	0,000
M	σ_x	ТУ	0,201	0,255	-0,290	-7,057	0,000	-0,286	-1,058	-2,780
		ТЭУ	0,164	0,233	-0,258	-6,625	0,000	-0,233	-0,896	-2,493
		ТМУ	-0,428	-0,295	0,260	5,698	0,002	0,438	1,548	4,155
		ТЭМУ	-0,495	-0,354	0,311	7,124	0,002	0,505	1,815	5,070
N	σ_x	ТУ	0,200	-0,172	-1,089	-4,126	-0,002	-0,522	-0,992	-1,296
		ТЭУ	0,163	-0,159	-1,017	-3,926	-0,001	-0,432	-0,860	-1,156
		ТМУ	-0,421	0,072	0,791	3,497	0,008	0,896	1,673	2,266
		ТЭМУ	-0,487	0,086	0,984	4,396	0,009	1,048	2,001	2,758
R	σ_x	ТУ	0,197	-0,378	-1,013	-2,033	-0,004	-0,539	-0,752	-0,830
		ТЭУ	0,161	-0,352	-0,959	-1,958	-0,002	-0,450	-0,649	-0,723
		ТМУ	-0,410	0,291	0,810	1,947	0,017	1,046	1,452	1,667
		ТЭМУ	-0,475	0,357	1,017	2,457	0,020	1,233	1,736	1,998

$N(a;0)$, $R(1,5a;0)$. Для круга точка $B(a;-h-a)$, в случае трещины $B(0;-h-a)$. Все значения величин даны с точностью до разности температур $T_1 - T^+$ на контуре L_1 и на прямолинейной границе L^+ . Значения КИН с индексами «+» и «-» соответствуют верхней и нижней вершинам трещины. Из данных табл. 1 следует, что совместный учет механических, электрических и магнитных свойств материала значительно влияет на значения исследуемых характеристик. При этом наибольшее влияние оказывает учет магнитных свойств материала (задача ТМУ), а еще большее - учет и электрических, и магнитных свойств (задача ТЭМУ). Видно, например, что при учете всех свойств значения напряжений во много раз отличаются от соответствующих значений, без учета этих свойств. Поэтому при определении термоупругого состояния нужно решать задачу ТЭМУ. Из табл. 1 также следует, что с уменьшением длины перемычки значения напряжений около контура отверстия и прямолинейной границы, а также в зоне между ними растут. Причем этот рост весьма значителен в зоне перемычки. Так, для полуплоскости с круговым отверстием значения напряжений σ_x в точке контура отверстия в зоне перемычки при $h/a = 0,1$ более 20 раз больше, чем при $h/a = 1$. При таком же переходе КИН k_1^+ для полуплоскости с трещиной увеличивается в 4,5 раза.

В табл. 2 для полуплоскости с двумя одинаковыми круговыми отверстиями вдоль границы (рис. 3) в зависимости от отношения c/a расстояния c между отверстиями к их радиусу a приведены значения величин в точках полуплоскости $A(0;-h-2a)$, $B(-a;-h-a)$, $C(0;-h)$, $D(0;-h/2)$, $E(a;-h-a)$, $O(0;0)$, $M(c/4;0)$, $N(c/2;0)$. Длина перемычки между границей полуплоскости и контуром отверстия считалась фиксированной и равной половине радиуса отверстия ($h/a = 0,5$). Все значения

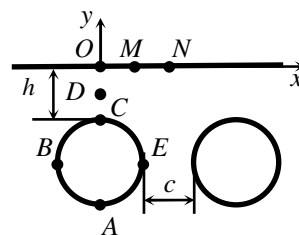


Рис. 3

величин даны с точностью до разности $T_1 - T^+$. Как отмечалось, $T^+ = 0$. Значения температуры T_2 на контуре L_2 варьировались. Как видно из табл. 2 температура T_2 , задаваемая на правом контуре, существенно влияет на значения всех величин. Так, для температур $T_2 = 0$ и $T_2 = 2$ значения напряжений, электрической и магнитной индукций отличаются более чем в 2 раза. Из данных табл. 2 также следует, что при уменьшении расстояния между отверстиями значения напряжений и индукции наиболее существенно изменяются в зоне перемычки между отверстиями при $T_2 = 0$ и в зоне перемычки между контуром и прямолинейной границей при $T_2 = 2$. Так, для $T_2 = 0$ абсолютные значения напряжений σ_y в точке E при $c/a = 0,1$ в 12 раз больше, чем при $c/a = 10$, значения маг-

нитной индукции B_y - в 2 раза больше, а электрическая индукция меняется незначительно. В случае, когда на контуре L_2 $T_2 = 2$

Таблица 2

Точка	Величина	c/a							
		10	1	0,5	0,1	10	1	0,5	0,1
		$T_2 = 0$				$T_2 = 2$			
A	σ_x	1,588	0,853	0,612	0,315	7,829	5,465	5,245	5,058
	$D_x \cdot 10^4$	-0,005	-0,202	-0,199	-0,101	1,863	1,832	1,862	2,225
B	B_x	-0,001	-0,117	-0,107	-0,029	1,268	1,198	1,241	1,506
	σ_y	-0,112	0,077	0,083	-0,012	-2,365	-1,450	-1,275	-1,053
C	$D_y \cdot 10^4$	-1,988	-1,890	-1,927	-1,162	-3,836	-2,712	-2,626	-2,601
	B_y	-0,904	-0,935	-0,954	-0,984	-0,832	-0,713	-0,751	-0,822
D	σ_x	1,568	1,382	1,491	1,907	10,682	6,183	5,376	4,239
	$D_x \cdot 10^4$	-0,003	-0,538	-0,791	-1,162	2,454	3,670	3,102	2,082
E	B_x	0,001	-0,338	-0,502	-0,738	1,666	2,299	1,894	1,229
	σ_x	0,786	0,797	0,865	0,941	4,898	3,176	2,937	2,716
O	$D_x \cdot 10^4$	-0,010	-0,239	-0,383	-0,679	1,643	2,483	2,204	1,720
	B_x	0,001	-0,229	-0,342	-0,497	1,068	1,520	1,288	0,919
M	σ_y	-0,115	1,035	1,290	1,340	-2,081	-1,667	-1,922	-3,304
	$D_y \cdot 10^4$	-1,990	-1,222	-1,216	-1,985	-3,371	-2,085	-3,081	-8,087
N	B_y	-0,904	-0,992	-1,101	-1,649	-0,733	-0,532	-0,959	-2,696
	σ_x	-0,416	-0,287	-0,257	-0,445	0,702	0,908	1,121	1,694
P	$D_x \cdot 10^4$	-0,002	-0,380	-0,560	-0,808	1,554	2,473	2,170	1,623
	B_x	0,001	-0,218	-0,326	-0,469	0,973	1,415	1,221	0,919
Q	σ_x	0,744	1,114	1,135	0,764	2,760	2,905	2,764	3,133
	$D_x \cdot 10^4$	-0,924	-0,939	-1,046	-1,216	0,047	1,698	1,651	1,400
R	B_x	-0,536	-0,592	-0,658	-0,751	0,075	1,010	0,962	0,823
	σ_x	0,875	1,200	1,292	1,325	2,625	3,600	3,875	3,976
S	$D_x \cdot 10^4$	-0,667	-1,236	-1,305	-1,383	0,667	1,236	1,305	1,383
	B_x	-0,406	-0,752	-0,806	-0,852	0,406	0,752	0,806	0,852

напряжения σ_x в точке C при уменьшении c/a от 10 до 0,1 уменьшаются в 2,5 раза, а электрическая и магнитная индукции практически не меняются.

РЕЗЮМЕ. Методом інтегралів типу Коші отримано загальні співвідношення для комплексних потенціалів теплопровідності та термоелектромагніто пружності для анізот-

ропної півплощини з еліптичними отворами, що точно задовольняють граничні умови на прямолінійній границі. Невідомі сталі у комплексних потенціалах знаходили з граничних умов на контурах отворів методом найменших квадратів. Наведено результати числових досліджень для півплощини з одним круговим отвором або тріщиною, з двома круговими отворами.

Ключові слова: термоелектромагнітопружність, комплексні потенціали, півплощина.

SUMMARY. General complex potentials introduction of thermal conductivity and thermoelectromagnetoelasticity for anisotropic half-plane with elliptic holes were obtained by using the Cauchy-type integrals. The complex potentials satisfy the boundary conditions at the straightforward borders exactly. Unknown constants in complex potentials were determined from boundary conditions on contours of holes with application the least-squares method. The numerical results for half-plane with one circular hole or crack, tow circular holes.

Key words: thermoelectromagnetoelasticity, complex potentials, half-plane.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. Калоеров С. А., Антонов Ю. С. Термонапряженное состояние анизотропной пластинки с отверстиями // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 127-136.
2. Калоеров С. А., Баева А. И., Бороненко О. И. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных сред. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 268 с.
3. Калоеров С. А., Горянская Е. С. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений. – К.: А.С.К., 1998. С. 10–26. (Механика композитов: В 12 т. Т. 7).
4. Калоеров С. А. Определенные коэффициенты интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих сред // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56-62.
5. Калоеров С. А., Сорочан О. А. Двумерные задачи термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 61–79.
6. Калоеров С. А., Хорошев К. Г. Термоэлектроупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 124–133.
7. Калоеров С. А., Хорошев К. Г. Термоэлектроупругое состояние анизотропной полуплоскости с отверстиями и трещинами // Прикладные пробл. мех. и мат. – 2006. – Вып. 4. – С. 75–83.
8. Космодамианский А. С., Калоеров С. А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках. – К.: Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.

Донецкий национальный университет

Поступила 5.10.2010

УДК 539.3

И. Ю. ХОМА, д-р физ.-мат. наук,
О. А. СТРИГИНА, канд. физ.-мат. наук

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ, НА ПОВЕРХНОСТИ КОТОРОГО ЗАДАНЫ КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Даны решения задач о напряженном состоянии пологой трансверсально-изотропной сферической оболочки с круговой цилиндрической полостью, на поверхности которой заданы тангенциальные касательные напряжения, нелинейно изменяющиеся по толщине, и поперечные касательные напряжения, представляющие уравновешенную пару сил, старающиеся расщепить оболочку вдоль срединной поверхности.

Ключевые слова: трансверсально-изотропная сферическая оболочка, круговое отверстие, касательные напряжения

В работах [2, 4, 6] методом разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра координаты толщины получены уравнения упругого равновесия нетонких анизотропных оболочек и соответствующие им граничные условия. На основе полученных в них уравнений в данной работе дается решение задачи о напряженном состоянии пологой трансверсально-изотропной сферической оболочки с круговым отверстием, на поверхности которого заданы тангенциальные и поперечные касательные напряжения.

Постановка задачи и исходные уравнения. Рассмотрим трансверсально изотропную сферическую оболочку постоянной толщины $2h$ ($h = \text{const}$) с радиусом срединной поверхности равным R . Предположим, что оболочка отнесена к ортогональной криволинейной системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$), нормально связанной со срединной поверхностью S . При этом допускается, что x_3 изменяется на отрезке $[-h, h]$, а x_1, x_2 образуют на S изометрическую систему координат, относительно которой первая квадратичная форма принимает вид [1]: $ds^2 = \Lambda(dx_1^2 + x_2^2)$, $\Lambda > 0$.

Для определения напряженного состояния оболочки воспользуемся методом разложения по толщине. Следуя [3], представим компоненты вектора перемещений $u_j(x_1, x_2, x_3)$ и тензора напряжений $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ в виде конечного ряда Фурье по полиномам Лежандра $P_k(\zeta)$ координаты толщины

$$\{u_j(x_1, x_2, x_3), \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)\} = \sum_{k=0}^N \{u_j^{(k)}(x), h^{-1}\sigma_{ij}^{(k)}(x)\} P_k(\zeta), \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2)$, $\zeta = h^{-1}x_3$, $u_j^{(k)}(x)$, $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$ – коэффициенты разложений,

именуемые моментами, N – натуральное число, которое будем считать четным, т.е. $N = 2n$ ($n = 0, 1, \dots, < \infty$).

Относительно моментов напряжений уравнения упругого равновесия оболочки в комплексной форме записываются таким образом [5]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} + 2i\sigma_{12}^{(k)} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{1}{\Lambda} \left(\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} \right) + \frac{1}{R} \sigma_+^{(k)} - \\ & - \frac{2k+1}{h} \sum_{s=0}^{[K]} \sigma_+^{(k-2s-1)} = 0, \\ & \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial \sigma_+^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\sigma}_+^{(k)}}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{1}{R} \frac{1}{\Lambda} \left(\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} \right) - \\ & - \frac{2k+1}{h} \sum_{s=0}^{[K]} \sigma_{33}^{(k-2s-1)} + X_3^{(k)} = 0 \quad k = \overline{0, N}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $X_3^{(k)} = (k+1/2)[\sigma_{33}^+ - (-1)^k \sigma_{33}^-]$; $\sigma_+^{(m)} = \sigma_{13}^{(m)} + i\sigma_{23}^{(m)}$; $K = (k-1)/2$; символ $[K]$ обозначает целую часть числа K ; σ_{33}^+ и σ_{33}^- – значения нормальных напряжений на лицевых граничных поверхностях $x = h$ и $x = -h$. Соотношения упругости для трансверсально изотропной оболочки имеют вид

$$\begin{aligned} & \sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} = 2h\Lambda \left[(c_{12} + c_{66}) \left(e^{(k)} + \frac{2}{R} u_3^{(k)} \right) + \frac{c_{13}}{h} u_3'^{(k)} \right], \\ & \sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} + 2i\sigma_{12}^{(k)} = 4c_{66} h \Lambda \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{\Lambda} u_+^{(k)} \right), \\ & \sigma_{33}^{(k)} = h \left[c_{13} \left(e^{(k)} + \frac{2}{R} u_3^{(k)} \right) + \frac{c_{33}}{h} u_3'^{(k)} \right], \\ & \sigma_+^{(k)} = c_{44} h \left(2 \frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{R} u_+^{(k)} + \frac{1}{h} u_3'^{(k)} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где c_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), c_{44} , c_{66} – упругие постоянные материала;

$$\begin{aligned} & u_+^{(k)} = u_1^{(k)} + iu_2^{(k)}, \quad e^{(k)} = \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial \bar{u}_+^{(k)}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u_+^{(k)}}{\partial z} \right), \\ & u_j'^{(2k-1)} = (4k-1) \sum_{s=k}^n u_j^{(2s)}, \quad u_j'^{(2k)} = (4k+1) \sum_{s=k+1}^n u_j^{(2s-1)}. \end{aligned}$$

Подставив (3) в равенства (2), получим систему уравнений относительно функций $u_j^{(k)}$

$$\frac{4c_{66}}{\Lambda} \frac{\partial}{\partial z} \Lambda \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{u_+^{(2k)}}{\Lambda} \right) + 2(c_{12} + c_{66}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(e^{(2k)} + \frac{2}{R} u_3^{(2k)} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c_{44}}{R} \left(2 \frac{\partial u_3^{(2k)}}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{R} u_+^{(2k)} \right) + \frac{4k+1}{h} \sum_{s=1}^n \left[2 \lambda_{2s-1}^{(k)} \frac{\partial u_3^{(2s-1)}}{\partial \bar{z}} - \right. \\
& \left. - \frac{c_{44}}{h} \left(\beta_{2s}^{(k)} u_+^{(2s)} - \frac{h}{R} u_+^{(2s-1)} \right) \right] = 0 \quad k = \overline{0, n}; \tag{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{44} \left(\nabla^2 u_3^{(2k)} - \frac{1}{R} e^{(2k)} \right) - \frac{2(c_{12} + c_{66})}{R} \left(e^{(2k)} + \frac{2}{R} u_3^{(2k)} \right) + \\
+ \frac{4k+1}{h} \sum_{s=1}^n \left[\tilde{\lambda}_{2s-1}^{(k)} e^{(2s-1)} - \frac{c_{33}}{h} \left(\beta_{2s}^{(k)} u_3^{(2s)} + \frac{2c_{13}h}{c_{33}R} u_3^{(2s-1)} \right) \right] + \\
+ \left(2k + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{h} (\sigma_{33}^+ - \sigma_{33}^-) = 0 \quad k = \overline{0, n}. \tag{5}
\end{aligned}$$

Аналогичный вид имеют уравнения при нечетных значениях k при старших производных, т.е.

$$\begin{aligned}
\frac{4c_{66}}{\Lambda} \frac{\partial}{\partial z} \Lambda \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{u_+^{(2k-1)}}{\Lambda} \right) + 2(c_{12} + c_{66}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(e^{(2k-1)} + \frac{2}{R} u_3^{(2k-1)} \right) + \\
+ \frac{c_{44}}{R} \left(2 \frac{\partial u_3^{(2k-1)}}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{R} u_+^{(2k-1)} \right) + \frac{4k-1}{h} \sum_{s=0}^n \left[2 \lambda_{2s}^{(k)} \frac{\partial u_3^{(2s)}}{\partial \bar{z}} - \right. \\
\left. - \frac{c_{44}}{h} \left(\alpha_{2s-1}^{(k)} u_+^{(2s-1)} - \frac{h}{R} u_+^{(2s)} \right) \right] = 0 \quad k = \overline{1, n}; \tag{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{44} \left(\nabla^2 u_3^{(2k-1)} - \frac{1}{R} e^{(2k-1)} \right) - \frac{2(c_{12} + c_{66})}{R} \left(e^{(2k-1)} + \frac{2}{R} u_3^{(2k-1)} \right) + \\
+ \frac{4k-1}{h} \sum_{s=0}^n \left[\tilde{\lambda}_{2s}^{(k)} e^{(2s)} - \frac{c_{33}}{h} \left(\alpha_{2s-1}^{(k)} u_3^{(2s-1)} + \frac{2c_{13}h}{c_{33}R} u_3^{(2s)} \right) \right] + \\
+ \left(2k - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{h} (\sigma_{33}^+ + \sigma_{33}^-) = 0 \quad k = \overline{1, n}, \tag{7}
\end{aligned}$$

где $\nabla^2 = 4 \Lambda^{-1} \partial^2 / \partial z \partial \bar{z}$ – оператор Лапласа на поверхности сферы;

$$\begin{aligned}
\lambda_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} -c_{44}, & 1 \leq s \leq k, \\ c_{13}, & k < s \leq n, \end{cases} \quad \lambda_{2s}^{(k)} = \begin{cases} -c_{44}, & 0 \leq s < k, \\ c_{13}, & k \leq s \leq n, \end{cases} \\
\tilde{\lambda}_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} -c_{13}, & 1 \leq s \leq k, \\ c_{44}, & k < s \leq n, \end{cases} \quad \tilde{\lambda}_{2s}^{(k)} = \begin{cases} -c_{13}, & 0 \leq s < k, \\ c_{44}, & k \leq s \leq n, \end{cases}
\end{aligned}$$

$\alpha_{2s-1}^{(k)}$ и $\beta_{2s}^{(k)}$ – абсолютные константы вида

$$\alpha_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} s(2s-1), & 1 \leq s \leq k, \\ k(2k-1), & k < s \leq n, \end{cases} \quad \beta_{2s}^{(k)} = \begin{cases} s(2s+1), & 0 \leq s < k, \\ k(2k+1), & k \leq s \leq n. \end{cases}$$

Равенства (4) – (7) образуют замкнутую систему уравнений для определения всех неизвестных функций. Полагая $\sigma_{33}^+ = \sigma_{33}^- = 0$, запишем общее аналитическое решение системы (4) – (7). Согласно [5] оно определяется формулами

$$\begin{aligned} c_{66} u_+^{(k)} &= h \sum_{m=1}^{4n+2} a_m^{(k)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \sum_{s=1}^{2n+1} b_s^{(k)} \partial_{\bar{z}} \omega_s, \\ c_{66} u_3^{(k)} &= \sum_{m=1}^{4n+2} c_m^{(k)} V_m, \quad c_{66} h e^{(k)} = \sum_{m=1}^{4n+2} \tilde{c}_m^{(k)} V_m, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\partial_{\bar{z}} = \partial / \partial \bar{z}$, $a_m^{(k)}$, $b_s^{(k)}$, $c_m^{(k)}$, $\tilde{c}_m^{(k)}$ – безразмерные постоянные, V_m и ω_s – метагармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\nabla^2 V_m - k_m h^{-2} V_m = 0, \quad \nabla^2 \omega_s - \lambda_s h^{-2} \omega_s = 0, \quad (9)$$

в которых параметрами k_m и λ_s служат корни соответствующих характеристических уравнений, V_m ($m = 1, 2, \dots, 4n+2$), ω_s – функции, представляющие потенциальную и вихревую части решения системы.

Заметим, что для пологих оболочек, срединная поверхность которых незначительно отличается от плоскости, величину Λ можно принять равной единице, а оператор ∇^2 заменить оператором Δ на плоскости. Принимая во внимание данное предположение, введем в области S полярную систему координат r, ϑ и воспользуемся формулами преобразования для компонент тензора напряжений. Тогда равенства (3) с учетом формул (8) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(k)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(k)} &= 2 \sum_{m=1}^{4n+2} d_m^{(k)} V_m, \quad \sigma_{33}^{(k)} = \sum_{m=1}^{4n+2} d_{3m}^{(k)} V_m, \\ \sigma_{rr}^{(k)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(k)} + 2i\sigma_{r\vartheta}^{(k)} &= 4h^2 e^{-2i\vartheta} \left(\sum_{m=1}^{4n+2} a_m^{(k)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m + i \sum_{s=1}^{2n+1} b_s^{(k)} \partial_{\bar{z}}^2 \omega_s \right), \\ \sigma_{r3}^{(k)} + i\sigma_{\vartheta 3}^{(k)} &= 2he^{-i\vartheta} \left(\sum_{m=1}^{4n+2} p_m^{(k)} \partial_{\bar{z}} V_m + i \sum_{s=1}^{2n+1} q_s^{(k)} \partial_{\bar{z}} \omega_s \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где $d_m^{(k)}$, $d_{3m}^{(k)}$, $p_m^{(k)}$ и $q_s^{(k)}$ – постоянные величины.

Метод решения. На основе приведенных формул рассмотрим две задачи об определении напряженного состояния пологой сферической оболочки с круговой полостью радиуса r_0 , на поверхности $r_0 \times [-h, h]$ которой заданы касательные напряжения σ_{r3} и $\sigma_{r\vartheta}$. В первой задаче предполагается, что на поверхности полости радиальные напряжения σ_{rr}

равны нулю, а поперечные касательные напряжения заданы выражением $\sigma_{r3} = q\zeta(1 - \zeta^2)$, $q = const$. Очевидно, такое задание внешней нагрузки приводит к возникновению у верхней $\zeta > 0$ и нижней $\zeta < 0$ областях оболочки равных по величине, но противоположно направленных сил, которые стремятся расщепить оболочку вдоль срединной поверхности S . Сформулированные условия на контуре r_0 поверхности S сводятся к таким:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(k)} &= 0 \quad (k = \overline{0, N}), \quad \sigma_{r3}^{(k)} = 0 \quad (k = \overline{0, N}, k \neq 1; 3), \\ \sigma_{r3}^{(1)} &= 0,4(qh), \quad \sigma_{r3}^{(3)} = -0,4(qh). \end{aligned} \quad (11)$$

Во второй задаче предполагаются заданными касательные напряжения $\sigma_{r\vartheta}$, изменяющиеся по толщине нелинейно, т.е. $\sigma_{r\vartheta} = \tau(1 + \alpha\zeta^3)$, $\tau = const$, $\alpha \in [0, 1]$. Отсюда следует, что на контуре r_0 области S имеют место равенства

$$\begin{aligned} \sigma_{r\vartheta}^{(0)} &= 1(\tau h), \quad \sigma_{r\vartheta}^{(k)} = 0 \quad (k = \overline{1, N}, k \neq 1; 3), \\ \sigma_{r\vartheta}^{(1)} &= 0,6\alpha(\tau h), \quad \sigma_{r\vartheta}^{(3)} = 0,4\alpha(\tau h). \end{aligned} \quad (12)$$

Учитывая выражения (10), записываются граничные условия (11) и (12) через метагармонические функции V_m и ω_s , которые представляются цилиндрическими функциями. Вид цилиндрических функций зависит от значений корней соответствующих характеристических уравнений. Они могут быть действительными и комплексными. Пусть, в частности, имеется $2l + 1$ – вещественных отрицательных, $2p + 1$ – вещественных положительных и $2(2n - l - p)$ комплексно-сопряженных корней (или же $2l$, $2p$, $(2n - l - p + 1)$). В условиях осевой симметрии будем иметь

$$\begin{aligned} V_m &= A_0^{(m)} Y_0(\rho x_m), \quad m \in [1, 2l + 1], \\ V_m &= B_0^{(m)} K_0(\rho x_m), \quad m \in [2l + 2, 2(l + p + 1)], \\ V_{2m+1} &= C_0^{(2m+1)} H_0^{(1)}(\rho x_{2m+1}), \\ V_{2m+2} &= D_0^{(2m+1)} H_0^{(2)}(\rho x_{2m+2}), \quad m \in [l + p + 1, 2n], \end{aligned} \quad (13)$$

где $Y_0(\rho x_m)$, $K_0(\rho x_m)$, $H_0^{(1)}(\rho x_{2m+1})$ и $H_0^{(2)}(\rho x_{2m+2})$ – цилиндрические функции Бесселя, Ханкеля первого и второго рода,

$$\begin{aligned} \rho &= r / r_0, \quad x_m = r_0 h^{-1} \sqrt{-k_m}, \quad m \in [1, 2l + 1], \\ x_m &= r_0 h^{-1} \sqrt{k_m}, \quad m \in [2l + 2, 2(l + p + 1)], \\ x_{2m+1} &= r_0 h^{-1} \sqrt{-k_m}, \quad x_{2m+2} = \bar{x}_{2m+1}, \quad m \in [l + p + 1, 2n]; \end{aligned}$$

$A_0^{(m)}$, $B_0^{(m)}$, $C_0^{(2m+1)}$ и $D_0^{(2m+1)}$ – постоянные, определяющиеся из граничных условий (11).

Что касается характеристического уравнения для метагармонических функций ω_s , то оно имеет вещественные положительные и отрицательные корни. Поэтому

$$\omega_s = \tilde{A}_0^{(s)} Y_0(\rho y_s), \quad s \in [1, \tilde{l}], \quad \omega_s = \tilde{B}_0^{(s)} K_0(\rho y_s), \quad s \in [\tilde{l} + 1, 2n + 1], \quad (14)$$

где

$$y_s = r_0 h^{-1} \sqrt{-\lambda_s}, \quad s \in [1, \tilde{l}]; \quad y_s = r_0 h^{-1} \sqrt{\lambda_s}, \quad s \in [\tilde{l} + 1, 2n + 1];$$

$\tilde{A}_0^{(s)}$ и $\tilde{B}_0^{(s)}$ – константы.

Результаты численных исследований. Численные исследования были проведены для полой трансверсально – изотропной сферической оболочки с коэффициентами Пуассона $\nu = 0,25$, $\nu' = 0,25$ соответственно в области изотропии и нормальной к ней плоскости при отношении модулей упругости $E/E' = 1$ и $R/h = 20$. Выявлено, что при действии на поверхности полости расслаивающей силы доминирующими становятся поперечные напряжения.

На рис. 1 представлены кривые изменения нормальных поперечных напряжений σ_{33} в точках на граничной $\zeta = -1$ (кривая 1) и срединной $\zeta = 0$ (кривая 2) поверхностях оболочки при удалении от поверхности полости. Наибольшего значения они достигают на срединной поверхности $\zeta = 0$. Напряжения на граничных поверхностях $\zeta = 1$ и $\zeta = -1$ по абсолютной величине существенно меньше и почти одинаковые (небольшое отличие сказывается за счет кривизны поверхностей). При удалении от полости они быстро затухают, приближаясь к нулю.

Результаты численных исследований при заданных на поверхности полости касательных напряжений $\sigma_{r\theta}$ представлены на рис. 2 в предположении, что $\alpha = 1$. Кривые характеризуют изменение на срединной по-

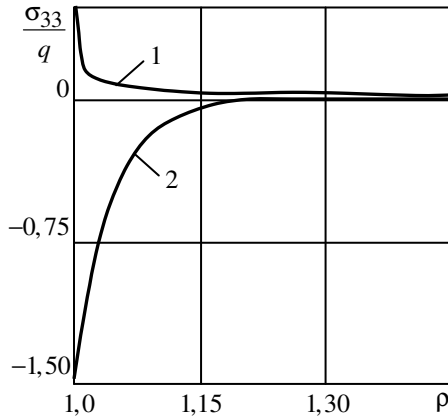


Рис. 1

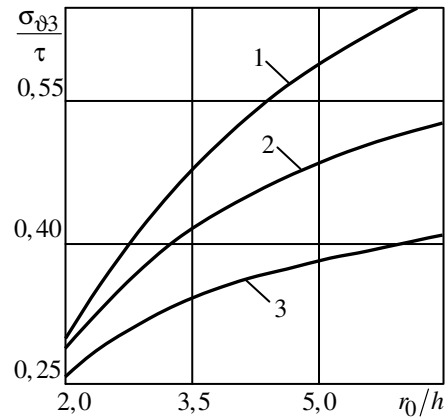


Рис. 2

верхности $\zeta = 0$ поперечных напряжений $\sigma_{\theta z}$ в зависимости от параметра относительной толщины r_0/h при некоторых значениях отношения модуля упругости E к поперечному модулю сдвига G' , т.е. при $E/G' = 10$ (кривая 1), $E/G' = 5$ (кривая 2) и $E/G' = 2,5$ (кривая 3). Приведенные кривые характеризуют изменение напряжений от изменения упругих постоянных материала и от геометрических параметров оболочки.

РЕЗЮМЕ. Приведені розв'язки задач про напружений стан пологої трансверсально-ізотропної сферичної оболонки з циліндричною порожниною, на поверхні якої задані тангенційні дотичні напруження, які представляють собою пару сил, що стараються розщепити оболонку по серединній поверхні.

Ключові слова: трансверсально-ізотропна сферична оболонка, круговий отвір, дотичні напруження.

SUMMARY. Solutions of problems of a stress stain state for a transversally-isotropic spherical shell with a cylindrical hole, the surfaces of which are subjected with tangential stresses, represented as a pair of forces which split a middle surface are given.

Key words: transversally-isotropic spherical shell, circular hole, tangential stresses.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Векуа И. Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины // Тр. Тбилис. матем. ин-та. - 1965. - 30. - С. 3-103.
2. Хома И. Ю. Некоторые нелинейные соотношения математической теории нетонких оболочек // Прикладная механика. - 2000. - Т. 36, №8. -С. 104-112.
3. Хома И. Ю., Стрыгина О. А. О решении смешанной задачи для пологой трансверсально изотропной сферической оболочки с круговым отверстием // Theoretical Foundations of Civil Engineering, Warsaw. - 2009, № 17. - P. 119-126.
4. Хома И. Ю. Трехмерное напряженно деформированное состояние нетонких упругих оболочек // Докл. расш. заседаний семинара ин-та прикл. математики им. И.Н.Векуа - 1989. - 4, №2. -С. 171-174.
5. Khoma I. Yu. Complex representation of the equations of a transversely isotropic spherical shell with prestresses // Int.Appl. Mech. 2007. - Vol. 43, № 2. - P. 228-237.
6. Khoma I. Yu. Thermopiezoelectric equations for nonthin ceramic shells // Int. Appl. Mech. - 2005. - Vol. 41, № 2. - P. 118-128.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев
Луганский национальный университет*

Поступила 9.10.2010

УДК 539.377

*Р. Н. ШВЕЦ, канд. физ.-мат. наук,
Б. С. ХАПКО, канд. физ.-мат. наук, А. И. ЧИЖ*

УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ОБОЛОЧЕК С ИЗЛОМАМИ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТАХ ТЕПЛОТДАЧИ

Получены уравнения теплопроводности для тонкой оболочки с изломами вдоль координатных линий при переменных коэффициентах теплоотдачи с лицевых поверхностей. Предложен способ сведения краевой задачи теплопроводности к взаимосвязанной системе интегральных уравнений с интегральными операторами Вольтерра и Фредгольма второго рода. Описаны результаты численных исследований для призматической пологой оболочки, составленной из двух плоских элементов при кусочно-постоянных коэффициентах теплоотдачи.

Ключевые слова: теплопроводность, оболочка, изломы, кусочно-постоянные коэффициенты теплоотдачи.

Задачи теплопроводности и термоупругости для пластин и оболочек, находящихся под тепловым воздействием при различных постоянных коэффициентах теплоотдачи на лицевых поверхностях, решались многими авторами, в частности в работах [4, 8], а для кусочно-постоянных коэффициентов теплоотдачи, но одинаковых на этих поверхностях, рассматривались в [2, 3, 5].

Ниже приведены основные уравнения теплопроводности для тонкой оболочки с изломами вдоль координатных линий при переменных коэффициентах теплоотдачи, принимающих разные значения на ее лицевых поверхностях. В частном случае оболочки с изломами в одном направлении с кусочно-постоянными коэффициентами теплоотдачи эти уравнения сведены к частично вырожденным дифференциальным уравнениям. Задача теплопроводности для полой оболочки, составленной из двух плоских пластин с разными коэффициентами теплоотдачи на их поверхностях, сведена к системе интегральных уравнений с интегральными операторами Вольтерра и Фредгольма второго рода.

Уравнения теплопроводности для оболочек с изломами при переменных коэффициентах теплоотдачи. Пусть тонкая оболочка толщины $2h$ с системой изломов вдоль координатных линий нагревается источниками тепла и внешней средой, температура которой является функцией координат α , β и времени τ . Распределение температуры по толщине оболочки принимаем линейным. Пользуясь операторным методом [4], в случае конвективного теплообмена оболочки со средой и переменных коэффициентов теплоотдачи с ее лицевых поверхностей, для определения средней температуры T_1 и температурного момента T_2 получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
h^2 \Delta T_1 - \mu_1 T_1 - \mu_2^* T_2 - \frac{h^2}{a} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} &= -(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2) - \frac{h}{2\lambda} W_1, \\
h^2 \Delta T_2 - 3(1 + \mu_1) T_2 - 3\mu_2^* T_1 - \frac{h^2}{a} \frac{\partial T_2}{\partial \tau} &= -3(\mu_1 t_2 + \mu_2 t_1) - \frac{h}{2\lambda} W_2. \quad (1)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
2\mu_{1,2}(\alpha, \beta, \tau) &= h \left[\mu^+(\alpha, \beta, \tau) \pm \mu^-(\alpha, \beta, \tau) \right], \\
\mu_2 - h k^* &= \mu_2^*, \quad 2k^* = k_1^* + k_2^*, \quad 2t_{1,2}(\alpha, \beta, \tau) = t_c^+(\alpha, \beta, \tau) \pm t_c^-(\alpha, \beta, \tau), \\
\lambda \mu^\pm(\alpha, \beta, \tau) &= \alpha^\pm(\alpha, \beta, \tau);
\end{aligned}$$

$t_c^\pm(\alpha, \beta, \tau)$, $\alpha^\pm(\alpha, \beta, \tau)$ – температура среды и коэффициенты теплообмена на поверхностях $z = \pm h$; $k_1^*(\alpha, \beta, \tau)$, $k_2^*(\alpha, \beta, \tau)$ – главные кривизны; $W_{1,2}(\alpha, \beta, \tau)$ – интегральные характеристики плотности источников тепла.

Приняв углы изломов малыми, допустим, что метрику нерегулярной (с изломами) поверхности оболочки можно приближенно приравнять к метрике ее регулярной поверхности без изломов. Разница между характеристиками этих поверхностей будет лишь в кривизнах на линиях изломов, которые аналитически могут быть записаны в виде [7]

$$k_1^* = k_1 + \sum_{j=1}^n \theta_j(\beta) \delta(\alpha - \alpha_j), \quad k_2^* = k_2 + \sum_{s=1}^m \bar{\theta}_s(\alpha) \delta(\beta - \beta_s). \quad (2)$$

Здесь k_1 , k_2 – главные кривизны регулярной срединной поверхности; $\theta_j = \theta_j(\beta)$, $\bar{\theta}_s = \bar{\theta}_s(\alpha)$ – углы изломов; $\alpha = \alpha_j$, $\beta = \beta_s$ – уравнения линий изломов; n , m – количество изломов вдоль координатных линий α , β соответственно.

Учитывая функциональные соотношения (2), из (1) получаем систему дифференциальных уравнений теплопроводности для оболочек с изломами срединной поверхности при переменных коэффициентах теплоотдачи с лицевых поверхностей:

$$\begin{aligned}
h^2 \Delta T_1 - \mu_1 T_1 - \mu_2^0 T_2 - \frac{h^2}{a} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} &= -\frac{h}{2} \Omega T_2 - \frac{h}{2\lambda} W_1 - (\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2), \\
h^2 \Delta T_2 - 3(1 + \mu_1) T_2 - 3\mu_2^0 T_1 - \frac{h^2}{a} \frac{\partial T_2}{\partial \tau} &= -\frac{3h}{2} \Omega T_1 - \\
&\quad - \frac{h}{2\lambda} W_2 - 3(\mu_1 t_2 + \mu_2 t_1), \quad (3)
\end{aligned}$$

где

$$\Omega(\alpha, \beta) = \sum_{j=1}^n \theta_j(\beta) \delta(\alpha - \alpha_j) + \sum_{s=1}^m \bar{\theta}_s(\alpha) \delta(\beta - \beta_s),$$

$$\mu_2^0(\alpha, \beta, \tau) = \mu_2(\alpha, \beta, \tau) - hk(\alpha, \beta), \quad 2k = k_1 + k_2. \quad (4)$$

Изломы вдоль координатных линий оболочки учтены в системе (3) членами с δ - функциями (оператором Ω (4)), а переменные коэффициенты теплоотдачи с лицевых поверхностей $z = \pm h$ – заданными функциями $\mu_{1,2}(\alpha, \beta, \tau)$, $\mu_2^0(\alpha, \beta, \tau)$.

При решении конкретных задач к системе уравнений (3) необходимо присоединить граничные и начальные условия.

Уравнения теплопроводности для оболочек с изломами в одном направлении при кусочно-постоянных коэффициентах теплоотдачи. Пусть оболочка имеет n изломов вдоль координатных линий $\alpha = \alpha_j$ ($j = 1, \dots, n-1$). Коэффициенты теплоотдачи α_j^\pm с поверхностей $z = \pm h$ в промежутках между изломами являются постоянными, но разными по величине. Тогда относительные коэффициенты теплоотдачи $\mu^\pm(\alpha)$ с лицевых поверхностей являются кусочно-постоянными функциями и могут быть представлены в виде

$$\mu^\pm(\alpha) = \mu_1^\pm + \sum_{j=1}^{n-1} (\mu_{j+1}^\pm - \mu_j^\pm) S_-(\alpha - \alpha_j), \quad S_-(\alpha - \alpha_j) = \begin{cases} 1, & \alpha \geq \alpha_j, \\ 0, & \alpha < \alpha_j. \end{cases} \quad (5)$$

Согласно (2) главные кривизны равны

$$k_1^* = k_1 + \sum_{j=1}^n \theta_j(\beta) \delta(\alpha - \alpha_j), \quad k_2^* = k_2. \quad (6)$$

Если ввести замену [5] $\lambda_0 T_1 = \lambda_2 (F_1 - \lambda_1 F_2)$, $\lambda_0 T_2 = \lambda_2 F_2 - F_1$, то взаимосвязанная система уравнений (3) с учетом представлений (5) и (6) принимает вид

$$\begin{aligned} h^2 \Delta F_1 - a_1^2 F_1 - \frac{h^2}{a} \frac{\partial F_1}{\partial \tau} &= -[\mu_{11}(\alpha) t_1 + \mu_{21}(\alpha) t_2] - \frac{2h}{\lambda} (W_1 + \lambda_1 W_2) + \\ &+ \frac{1}{\lambda_0} \sum_{j=1}^n \left\{ [(\lambda_2 - 3\lambda_1) \Lambda_j^+ + 4\Lambda_j^-] F_1 + (\lambda_2 v_1 \Lambda_j^- - 2\Lambda_j^+) F_2 \right\} \times \\ &\times S_-(\alpha - \alpha_j) + h \left(F_1 - \frac{\lambda_2 v_1}{2} F_2 \right) \theta_j(\beta) \delta(\alpha - \alpha_j) \Bigg\}, \\ h^2 \Delta F_2 - a_2^2 F_2 - \frac{h^2}{a} \frac{\partial F_2}{\partial \tau} &= -3[\mu_{12}(\alpha) t_2 + \mu_{22}(\alpha) t_1] - \frac{2h}{\lambda \lambda_2} (W_1 + \lambda_2 W_2) \\ &+ \frac{1}{\lambda_0 \lambda_2} \sum_{j=1}^n \left\{ [(v_2 \Lambda_j^- - 2\lambda_2 \Lambda_j^+) F_1 + (v_2 \Lambda_j^+ + 4\lambda_2 \Lambda_j^-) F_2] \times \right. \\ &\left. \times S_-(\alpha - \alpha_j) + h (v_2 2^{-1} F_1 - \lambda_2 F_2) \theta_j(\beta) \delta(\alpha - \alpha_j) \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\lambda_{2,1} = \frac{3 + 2\eta_1^+ \pm \sqrt{(3 + 2\eta_1^+)^2 + 12(\eta_1^{0-})^2}}{6\eta_1^{0-}}, \quad a_l^2 = \eta_1^+ + 3\eta_1^{0-}\lambda_l,$$

$$\mu_{1l} = \left[\eta_1^+ + 3\eta_1^- + \sum_{j=1}^n (\Phi_j^+ + 3\lambda_l \Phi_j^-) S_-(\alpha - \alpha_j) \right] \lambda_2^{1-l},$$

$$\lambda_0 = \lambda_2 - \lambda_1, \quad \mu_{2l} = \left[\eta_1^- + 3\eta_1^+ + \sum_{j=1}^n (\Phi_j^- + 3\lambda_l \Phi_j^+) S_-(\alpha - \alpha_j) \right] \lambda_2^{1-l},$$

$$\nu_l = 1 - 3\lambda_l^2, \quad \eta_j^+ = \frac{1}{2}(\tilde{\mu}_j^+ + \tilde{\mu}_j^-), \quad \eta_j^- = \frac{1}{2}(\tilde{\mu}_j^+ - \tilde{\mu}_j^-), \quad (l = 1, 2),$$

$$\Lambda_j^+ = \eta_{j+1}^+ - \eta_j^+, \quad \Lambda_j^- = \eta_{j+1}^- - \eta_j^-, \quad \eta_1^{0-} = \eta_1^- - h k, \quad \tilde{\mu}_j^\pm = h\mu_j^\pm.$$

Учитывая фильтрующее свойство $\delta(\alpha - \alpha_j)$ -функции, можем рассматривать члены с $\delta(\alpha - \alpha_j)$ в правой части уравнения (7) как источники тепла неизвестной интенсивности на линиях изломов, которые подлежат определению в процессе решения конкретной задачи. Способ решения краевой задачи с использованием вышеприведенных уравнений ниже проиллюстрирован на призматической оболочке.

Пологая оболочка, составленная из двух пластин. Рассмотрим

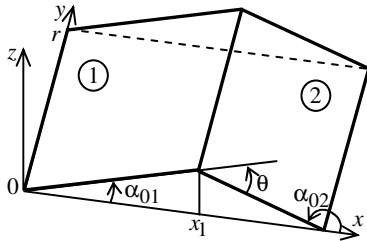


Рис. 1

призматическую прямоугольную в плане пологую оболочку со сторонами r и b (рис. 1). Оболочка создана двумя прямоугольными пластинчатыми элементами, каждый из которых имеет разные относительные коэффициенты теплоотдачи с поверхностей

$$z = \pm h: \mu^\pm(x) = \mu_1^\pm + (\mu_2^\pm - \mu_1^\pm) S_-(x - x_1).$$

Срединную поверхность оболочки опишем уравнением

$$z(x, y) = \operatorname{tg} \alpha_{01} x - (\operatorname{tg} \alpha_{01} - \operatorname{tg} \alpha_{02})(x - x_1 + |x - x_1|)/2,$$

где $\operatorname{tg} \alpha_{01}$, $\operatorname{tg} \alpha_{02}$ – угловые коэффициенты направляющей первого (1) и второго (2) элементов; $x = x_1$ – линия сопряжения двух элементов (линия излома); $b = x_1 (\operatorname{tg} \alpha_{02} - \operatorname{tg} \alpha_{01}) / \operatorname{tg} \alpha_{02}$; $\theta = \pi - \alpha_{02} + \alpha_{01}$ – угол излома, который считаем малым. Дифференциальные характеристики срединной поверхности пологой оболочкой, когда ее грани одинаковых размеров, запишем так [6]: $k_1 = -2 \operatorname{tg} \alpha_{01} \delta(x - x_1)$, $k_{12} = 0$, $k_2 = 0$. Оболочка на поверхностях $z = \pm h$ обменивается теплом с внешней средой температуры $t_c^\pm(x, y)$. На торцах $y = 0$, r она теплоизолирована. В этом случае одномерное стационарное температурное поле оболочки определим из системы (7) при граничных условиях

$$\frac{\partial F_l}{\partial \eta} \mp b_l (F_l - F_l^c) = 0, \text{ при } \eta = 0, p; l = 1, 2. \quad (8)$$

Здесь $\eta = x/h$ – безразмерная координата, $F_1^c = T_1^c$, $F_2^c = T_2^c/\lambda_2$; T_1^c и T_2^c – температура внешней среды на поверхностях $\eta = 0$ и $\eta = p$ соответственно.

Используя метод вариации постоянной и учитывая граничные условия (8), сформулированную задачу сведем к решению системы интегральных уравнений

$$\begin{aligned} F_l(\eta) = & Y_l(\eta) [-d_{l2} F_1(\eta_1) + d_{l4} F_2(\eta_1)] - \Phi_l(\eta) \int_0^p [d_{l1} F_1(x) + \\ & + d_{l3} F_2(x)] S_-(x - \eta_1) R_l(x) dx + \frac{1}{a_l} \int_0^\eta [d_{l1} F_1(x) + d_{l3} F_2(x)] S_-(x - \\ & - \eta_1) sh[a_l(\eta - x)] dx - K_l(\eta) + D_l(\eta) \quad l = 1, 2. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$\Phi_l(\eta) = \frac{(a_l - b_l) e^{-a_l \eta} + (a_l + b_l) e^{a_l \eta}}{(a_l + b_l)^2 e^{a_l p} - (a_l - b_l)^2 e^{-a_l p}},$$

$$R_l(\eta) = ch[a_l(p - \eta)] + \frac{b_l}{a_l} sh[a_l(p - \eta)],$$

$$\begin{aligned} D_l(\eta) = & \Phi_l(\eta) \left\{ \int_0^p [(d_{l5} t_1 + d_{l7} t_2) + (d_{l6} t_1 + d_{l8} t_2) S_-(x - \eta_1)] R_l(x) dx + \right. \\ & \left. + b_l F_{cl}(p) + \frac{b_l}{a_l + b_l} F_{cl}(0) e^{-a_l p} \right\} + \frac{b_l}{a_l + b_l} F_{cl}(0) e^{-a_l \eta}, \end{aligned}$$

$$Y_l(\eta) = \Phi_l(\eta) R_l(\eta_1) - \frac{1}{a_l} sh[a_l(\eta - \eta_1)],$$

$$K_l(\eta) = \frac{1}{a_l} \int_0^\eta [(d_{l5} t_1 + d_{l7} t_2) + (d_{l6} t_1 + d_{l8} t_2) S_-(x - \eta_1)] sh[a_l(\eta - x)] dx,$$

$$\eta_1 = x_1/h; \quad d = r/h; \quad p = b/h; \quad \theta_1 = \theta/2; \quad \frac{1}{\lambda_0} \theta_1 = d_{12},$$

$$\frac{1}{\lambda_0} [(\lambda_2 - 3\lambda_1) \Lambda_1^+ - 2\Lambda_1^-] = d_{11}, \quad \frac{1}{\lambda_0} \left(-\frac{2}{3} \Lambda_1^+ + \lambda_2 v_1 \Lambda_1^- \right) = d_{13},$$

$$\eta_1^+ + 3\lambda_1 \eta_1^- = d_{15}, \quad \frac{1}{\lambda_0} \frac{\lambda_2 v_1 \theta_1}{2} = d_{14}, \quad \frac{3}{\lambda_2} (\eta_1^+ + 3\lambda_2 \eta_1^-) = d_{27},$$

$$3\lambda_1 \Lambda_1^- + \Lambda_1^+ = d_{16}, \quad \frac{1}{\lambda_0 \lambda_2} \frac{v_2 \theta_1}{2} = d_{22}, \quad \eta_1^- + 3\lambda_1 \eta_1^+ = d_{17},$$

$$\Lambda_1^- + 3\lambda_1\Lambda_1^+ = d_{18}, \quad \frac{1}{\lambda_0}[(3\lambda_2 - \lambda_1)\Lambda_1^+ + 4\Lambda_1^-] = d_{23},$$

$$\frac{1}{\lambda_0}\theta_1 = d_{24}, \quad \frac{1}{\lambda_0\lambda_2}\frac{v_2\theta_1}{2} = d_{22}, \quad -\frac{1}{\lambda_0\lambda_2}(2\lambda_2\Lambda_1^+ + v_2\Lambda_1^-) = d_{21},$$

$$\frac{3}{\lambda_2}(\Lambda_1^- + 3\lambda_2\Lambda_1^+) = d_{26}, \quad \frac{3}{\lambda_2}(\eta_1^- + 3\lambda_2\eta_1^+) = d_{25},$$

$$\frac{3}{\lambda_2}[\eta_2^+ - \eta_1^+ + 3\lambda_2(\eta_2^- - \eta_1^-)] = d_{28}.$$

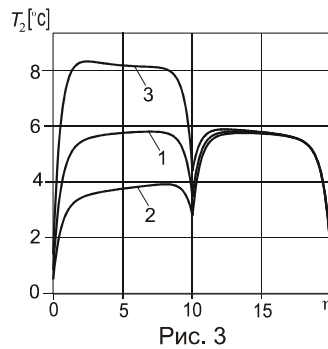
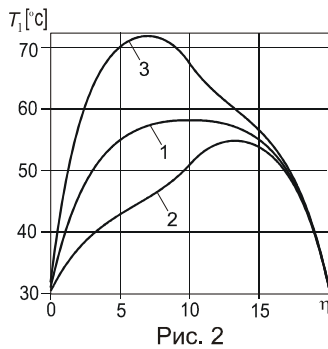
В правую часть выражений (9) входят неизвестные функции $F_1(\eta_1)$, $F_2(\eta_1)$. Для их нахождения получим систему алгебраических уравнений, полагая в (9) $\eta = \eta_1$. Решая эту систему и подставляя найденные $F_1(\eta_1)$, $F_2(\eta_1)$ в соотношения (9), получаем взаимосвязанную систему интегральных уравнений с интегральными операторами Вольтерра и Фредгольма второго рода для определения неизвестных функций $F_1(\eta)$ и $F_2(\eta)$

$$F_l(\eta) = \int_0^p [R_{l1}(\eta, x)F_1(x) + R_{l2}(\eta, x)F_2(x)]S_-(x - \eta_1)dx +$$

$$+ \frac{1}{a_l} \int_0^\eta [d_{l1}F_1(x) + d_{l3}F_2(x)]S_-(x - \eta_1)sh[a_l(\eta - x)]dx + R_{l3}(\eta). \quad (10)$$

Выражения $R_{li}(\eta, x)$ ($l = 1, 2; i = 1, 2, 3$) из-за их громоздкости не приведены. Решая систему интегральных уравнений (10) методом квадратурных формул [1], находим среднюю температуру $T_1(\eta)$ и температурный момент $T_2(\eta)$, необходимые для определения термонапряженного состояния в рассматриваемой оболочке.

Результаты численных исследований. На рис. 2, 3 представлено распределение средней температуры T_1 и температурного момента T_2 вдоль координаты η ($0 \leq \eta \leq 2$) в полой призматической оболочке, состоящей из двух одинаковых пластинок, соединённых по линии $\eta = 1$ под углом $\gamma = \alpha_{02} - \alpha_{01}$ (рис. 1). На верхней поверхности оболочки ($z = h$) температура внешней среды $t_c^+ = 125^\circ$, на нижней поверхности



состоящей из двух одинаковых пластинок, соединённых по линии $\eta = 1$ под углом $\gamma = \alpha_{02} - \alpha_{01}$ (рис. 1). На верхней поверхности оболочки ($z = h$) температура внешней среды $t_c^+ = 125^\circ$, на нижней поверхности

($z = -h$) – $t_c^- = 15^\circ$. Угол излома равен $\theta = 0,1$. На торцах $\eta = 0$ и $\eta = p$ происходит конвективный теплообмен с внешней средой температуры $T_1^c = 30^\circ$ и $T_2^c = 30^\circ$ соответственно при коэффициентах теплоотдачи $b_1 = b_2 = 0,1$. На нижней поверхности оболочки коэффициенты теплоотдачи с поверхностями обеих пластинок равны $\tilde{\mu}_1^- = \tilde{\mu}_2^- = 0,15$. Кривые 1 на рис. 2 и рис. 3 соответствуют одинаковым коэффициентам теплоотдачи с верхних поверхностей обеих пластинок $\tilde{\mu}_1^+ = \tilde{\mu}_2^+ = 0,1$. В этом случае максимальное значение средней температуры T_1 достигается на линии излома, а температурного момента T_2 – в обеих пластинках вдоль линий, удаленных от излома на расстояние, равное 0,3 длины пластинки. На линии же излома T_2 имеет локальный минимум. Кривые 2 соответствуют случаю, когда коэффициент теплоотдачи с верхней поверхности первой пластинки становится в два раза меньше, чем со второй ($\tilde{\mu}_1^+ = 0,05$, $\tilde{\mu}_2^+ = 0,1$). При этом наблюдается общее понижение средней температуры T_1 и температурного момента T_2 в обеих пластинках, а максимальные значения T_1 и T_2 располагаются во второй пластинке вдоль линий, находящихся на расстоянии 0,3 и 0,7 длины пластинки от излома соответственно. Кривые 3 изображают распределение T_1 и T_2 , когда коэффициент теплоотдачи с верхней поверхности первой пластинки в два раза больше, чем со второй ($\tilde{\mu}_1^+ = 0,2$, $\tilde{\mu}_2^+ = 0,1$). В этом случае средняя температура и температурный момент увеличиваются по сравнению со случаем одинаковых коэффициентов теплоотдачи с верхних поверхностей обеих пластинок, а максимумы величин T_1 и T_2 смещаются в область первой пластинки на расстояние, равное 0,3 и 0,86 длины пластинки от линии излома соответственно.

РЕЗЮМЕ. Отримані рівняння теплопровідності тонкої оболонки зі зламами вздовж координатних ліній за змінних коефіцієнтів тепловіддачі з лицевих поверхонь. Запропоновано спосіб зведення крайової задачі теплопровідності до взаємозв'язаної системи інтегральних рівнянь з інтегральними операторами Вольтерри та Фредгольма другого роду. Описані результати числових досліджень для призматичної пологої оболонки, складеної із двох плоских елементів за кусково-постійних коефіцієнтів тепловіддачі з лицевих поверхонь.

Ключові слова: теплопровідність, оболонка, злами, кусково-постійні коефіцієнти тепловіддачі.

SUMMARY. Heat conduction equations for thin shells with variable heat transfer coefficients having breaks along coordinate lines are obtained. One approach to reducing heat conduction boundary problem to the coupled system of integral equations of the second kind with Volterra and Fredholm integral operators is proposed. The heat conduction problem for prismatic shallow shell assembled with two plane elements with piecewise constant heat transfer coefficients is analyzed.

Key words: heat transfer, shell, surface breaks, pieewise heat transfer coefficients.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. – К.: Наук. думка, 1978, – 292 с.
2. Мотовиловец И. А., Козлов В. И. Термоупругость. – К.: Наук. думка, 1987. – 264 с.
3. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
4. Подстригач Я. С., Швець Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. – К.: Наук. думка, 1978. – 344 с.
5. Постольник Ю. С., Огурцов А. П. Нелінійна прикладна термомеханіка. – К., 2000. – 280 с.
6. Хапко Б.С. Полога призматична оболонка в нерівномірному температурному полі // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2005. – № 2. – С. 33-38.
7. Швець Р. М., Хапко Б. С. Температурні поля і напруження у пологій оболонці зі зломами серединної поверхні // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – Вып. 42, № 2. – С. 62–69.
8. Шевченко В. П., Гольцев А. С., Довбня Є. М. Методи фундаментальних розв'язків у механіці тонкостінних конструкцій // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2001. – № 3. – С. 21-28.

*Институт прикладных проблем механики
и математики НАН Украины, г. Львов*

Поступила 10.05.2010

УДК 539.3

В. Г. КАРНАУХОВ, д-р физ.-мат.наук,
В. И. КОЗЛОВ, д-р физ.-мат.наук,
В. М. СИЧКО, канд. физ.-мат.наук, А. В. ЗАВГОРОДНИЙ

**ВЫНУЖДЕННЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И
ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ПАНЕЛИ ИЗ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО
МАТЕРИАЛА ПРИ ЖЕСТКОМ ЗАЦЕМЛЕНИИ ТОРЦОВ**

Решена связанная трехмерная задача о вынужденных гармонических колебаниях и диссипативном разогреве изотропной вязкоупругой цилиндрической панели при жестком заземлении торцов. Учитывается взаимодействие механических и тепловых полей. Допускается, что свойства материала не зависят от температуры. Разработан конечно-элементный метод решения данной задачи. Вычислены амплитудно- и температурно-частотные характеристики панели, а также зависимость коэффициента демпфирования от частоты при колебаниях панели по первой изгибной моде.

Ключевые слова: нелинейность, колебания и диссипативный разогрев, цилиндрическая панель, динамические характеристики,

Как конструкционные элементы, трехмерные цилиндрические панели из вязкоупругих материалов и композитов на их основе широко используются во многих областях современной техники [7]. При высоком уровне нагрузок и при колебаниях на резонансных частотах начинает проявляться зависимость механических характеристик материалов от амплитуд деформаций или напряжений – так называемая физическая нелинейность. Из-за присущих вязкоупругим материалам потерь они получили особенно широкое распространение при разработке технологий пассивного демпфирования колебаний конструкций [6, 9, 10]. В связи с этим возрастает потребность в разработке эффективных и достаточно обоснованных моделей, описывающих поведение указанных материалов в условиях механического и температурного воздействия. Одним из самых распространенных типов нагружения элементов конструкции из указанных материалов является длительное циклическое нагружение. Этот тип нагружения приводит к необходимости учета связанности механических и тепловых полей, вызванной такой специфической особенностью поведения элементов конструкций из полимерных и композитных материалов при гармоническом нагружении (особенно при резонансных частотах), как существенное повышение температуры в результате гистерезисных потерь в материалах – так называемый диссипативный разогрев. Длительное гармоническое нагружение из-за высокой чувствительности свойств полимерных материалов к температуре, малой теплопроводности и значительных гистерезисных потерь может привести к резкому повышению температуры в результате рассеяния механической энергии в тепловую. Диссипативный разогрев оказывает существенное влияние на все стороны механического поведения элементов конструкции из полимерных

и композитных материалов – на распределение механических полей, на амплитудно-частотные характеристики, на статическую и динамическую устойчивость тонкостенных элементов конструкций, на эффективность пассивного и активного демпфирования колебаний и др.

Для математического описания колебаний и диссипативного разогрева тонкостенных элементов конструкций из вязкоупругих полимерных материалов используются модели разного уровня строгости с использованием классических гипотез Кирхгоффа–Лява и уточненных гипотез типа Тимошенко. Однако наиболее достоверные результаты дает пространственная постановка связанных задач, позволяющая оценить точность результатов, полученных с использованием указанных выше гипотез. Решения трехмерных динамических задач термомеханики о вынужденных колебаниях и диссипативном разогреве неупругих тел из физически нелинейных материалов с учетом взаимодействия механических и тепловых полей в литературе отсутствуют.

В данной статье разработан конечно-элементный метод решения трехмерной динамической задачи термомеханики для цилиндрической панели из вязкоупругих материалов и композитов на их основе при моногармоническом механическом нагружении с учетом взаимодействия механических и тепловых полей. Рассматривается случай, когда механические и теплофизические свойства материала не зависят от температуры.

Постановка задачи. Рассмотрим цилиндрическую панель из физически нелинейного вязкоупругого материала, механические и теплофизические свойства которого не зависят от температуры. Тело находится под действием изменяющегося по гармоническому закону поверхностного давления с частотой, близкой к резонансной частоте тела. Механическое поведение неупругого материала описывается концепцией комплексных характеристик [2, 5]. При этом динамическая задача сводится к решению трехмерных уравнений теории вязкоупругости в цилиндрической системе координат [2, 3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \rho \omega^2 w &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho \omega^2 u &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \rho \omega^2 v &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где σ_{ij} – комплексные амплитудные значения компонент тензора напряжений; w , u , v – комплексные компоненты вектора перемещений; ρ – плотность материала; ω – вещественная частота колебаний.

На части поверхности тела Σ_p , где заданы поверхностные силы \bar{p}_n , тензор напряжений удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$p_{\alpha n} = \sigma_{\alpha\beta} l_{\beta n}. \quad (2)$$

Здесь $l_{\beta n}$ ($\beta = 1, 2, 3$) – направляющие косинусы внешней нормали \vec{n} к

поверхности тела \sum_p , $p_{\alpha n}$ – проекции поверхностных сил на оси цилиндрической системы координат. На другой части поверхности тела \sum_U могут быть заданы компоненты вектора перемещений.

Тензор малой деформации связан с вектором перемещений соотношениями Коши [5]

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{r\theta} &= \varepsilon_{\theta r} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right], \\ \varepsilon_{rz} &= \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{z\theta} = \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right).\end{aligned}\quad (3)$$

Для замыкания системы уравнений (1), (3) их необходимо дополнить комплексными уравнениями состояния, которые при гармонических колебаниях вязкоупругого тела из изотропного вязкоупругого материала имеют вид [5, 6]

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2\mu\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_{kk}, \quad \sigma_\theta = 2\mu\varepsilon_\theta + \lambda\varepsilon_{kk}, \quad \sigma_z = 2\mu\varepsilon_z + \lambda\varepsilon_{kk}, \\ \sigma_{r\theta} &= 2\mu\varepsilon_{r\theta}, \quad \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{z\theta} = 2\mu\varepsilon_{z\theta},\end{aligned}\quad (4)$$

где $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z$. Здесь все величины являются комплексными:

$$\sigma_r = \sigma'_r + i\sigma''_r, \dots \quad \varepsilon_r = \varepsilon'_r + i\varepsilon''_r, \dots \quad \lambda = \lambda' + i\lambda'', \quad \mu = \mu' + i\mu''.$$

Подстановка (3), (4) в уравнения движения (1) и в граничные условия (2) дает постановку динамической задачи о колебаниях вязкоупругого тела вращения в перемещениях. При этом комплексная система дифференциальных уравнений в перемещениях по форме совпадает с соответствующими уравнениями для упругого тела, если в них заменить все величины на комплексные. При учете зависимости комплексных характеристик от второго инварианта амплитудных значений тензора деформаций она приобретает вид [3]

$$\begin{aligned}\mu\nabla^2 u_r + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial r} - \mu \frac{u_r}{r^2} - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \varepsilon_{kk} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + \rho \omega^2 u_r = 0, \\ \mu\nabla^2 u_\theta + \frac{\lambda + \mu}{r} \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial \theta} - \mu \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \mu}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \\ + \frac{2}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + \frac{\varepsilon_{kk}}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} - \frac{1}{r} + \rho \omega^2 u_\theta = 0, \\ \mu\nabla^2 u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) +\end{aligned}$$

$$+2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \varepsilon_{kk} \frac{\partial \lambda}{\partial z} + \rho \omega^2 u_z = 0. \quad (5)$$

Предполагается, что коэффициент Пуассона является постоянным и действительным, т.е. не зависит от амплитуд деформаций. При этом параметр Ляме λ находится по формуле

$$\lambda = \frac{2\nu\mu}{1-2\nu}. \quad (6)$$

Для учета зависимости параметра μ от амплитуд деформаций используется концепция комплексных характеристик, согласно которой этот параметр является комплексным, а его зависимость от амплитуд деформаций учитывается при помощи теории, изложенной в работе В.А. Пальмова [5]. Используя эту теорию, будем иметь

$$G' = G_0 (1 - r\Gamma^\alpha), \quad G'' = G_0 g\Gamma^\alpha; \quad (7)$$

$$g = \frac{\Delta k_0}{\pi} \left(\frac{2G_0}{\sqrt{2}\tau_0} \right)^\alpha, \quad \frac{r}{g} = \frac{4}{\alpha(\alpha+2)} \frac{\Gamma\left(2 + \frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}.$$

Здесь Γ – гамма-функция, а параметры τ_0 , Δk_0 , α определяются экспериментально. Например, для сплава алюминия Д16Т

$$\alpha = 0,4, \quad \tau_0 = 0,118 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad \Delta k_0 = 0,14 \cdot 10^{-2}. \quad (8)$$

Температурное поле диссипативного разогрева находится из решения уравнения теплопроводности [2, 3]

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_{rr} r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_{\theta\theta} r \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - D \quad (9)$$

с начальными

$$T = T_0 \text{ при } t = t_0 \quad (10)$$

и граничными условиями конвективного теплообмена с окружающей средой, температура которой равна T_c :

$$\lambda_0 \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha_T (T - T_c). \quad (11)$$

Здесь λ_0 – коэффициент теплопроводности; α_T – коэффициент теплоотдачи; c – коэффициент удельной массовой теплоемкости материала. Фигурирующая в уравнении энергии (9) диссипативная функция D определяется по формуле [2]

$$D = \frac{\omega}{2} (\sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij} \varepsilon''_{ij}). \quad (12)$$

Для оценки эффективности пассивного демпфирования вынужденных колебаний используется интегральная характеристика, являющаяся отношением диссипированной за цикл энергии D к накопленной U_T [2]:

$$\eta = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\int_V D r dr dz d\theta}{\int U_T r dr dz d\theta}, \quad U_T = \frac{1}{2} (\sigma'_{ij} \epsilon'_{ij} + \sigma''_{ij} \epsilon''_{ij}). \quad (13)$$

В случае однородных состояний при действительном коэффициенте Пуассона и независимом от координат модуле сдвига эта характеристика сводится к величине

$$\eta = 2\pi G''/G', \quad (14)$$

т.е. к обычному тангенсу угла потерь материала.

Решение связанной задачи методом конечных элементов и анализ результатов. Как было отмечено, для исследования термомеханического поведения вязкоупругой панели применялся метод конечных элементов с использованием вариационной формулировки задачи. При этом задача механики сводится к нахождению стационарных точек функционала [2]

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} \int_V \left[A_{zz} \epsilon_{zz}^2 + A_{rr} \epsilon_{rr}^2 + A_{\theta\theta} \epsilon_{\theta\theta}^2 + 2 A_{zr} \epsilon_{zz} \epsilon_{rr} + 2 A_{z\theta} \epsilon_{zz} \epsilon_{\theta\theta} + \right. \\ & \left. + 2 A_{r\theta} \epsilon_{rr} \epsilon_{\theta\theta} + 4 G_{zr} \epsilon_{zr}^2 + 4 G_{z\theta} \epsilon_{z\theta}^2 + 4 G_{r\theta} \epsilon_{r\theta}^2 - \right. \\ & \left. - \rho \omega^2 (w^2 + u^2 + v^2) \right] r dr dz d\theta - \int_{\Sigma_p} (p_{nz} w + p_{nr} u + p_{r\theta} v) d\Sigma_p, \quad (15) \end{aligned}$$

а задача теплопроводности (9)–(11) – к решению вариационного уравнения [6]

$$\begin{aligned} \int_V \left[c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \delta T + \lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \delta \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) + \lambda_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} \delta \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda_{\theta\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \delta \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \right. \\ \left. + D \delta T \right] r dr dz d\theta + \int_{\Sigma} \alpha_T (T - T_c) \delta T d\Sigma = 0, \quad (16) \end{aligned}$$

где A_{ij}, G_{ij} – комплексные механические характеристики материала.

Решение вариационной задачи $\delta \mathcal{E} = 0$ находилось МКЭ с использованием 24 узловых шестигранных изопараметрических элементов.

В качестве локальной системы координат, в которой определяются аппроксимирующие функции и проводится интегрирование, использовалась нормализованная система координат, для построения базисных функций, аппроксимирующих составляющие перемещений и температуру в пределах элемента, – алгебраические и тригонометрические полиномы. Считалось, что амплитудные значения компонент вектора перемещений и значение температуры аппроксимируются выражениями

$$w = \sum_{i=1}^{24} L_i w_i, \quad u = \sum_{i=1}^{24} L_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^{24} L_i v_i, \quad T = \sum_{i=1}^{24} L_i T_i, \quad (17)$$

в которых w_i, u_i, v_i, T_i – узловые значения перемещений и температуры; L_i – аппроксимирующие функции, которые представляют собой комбинации алгебраических N_j ($j = \overline{1, 8}$) и тригонометрических H_k ($k = \overline{1, 3}$) полиномов [3, 4, 8]

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1), & N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1), \\
N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1), & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1), \\
N_5 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta), & N_6 &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi), \\
N_7 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta), & N_8 &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi); \\
H_1 &= \frac{\sin(\theta-\theta_2)-\sin(\theta-\theta_3)+\sin(\theta_2-\theta_3)}{\sin(\theta_1-\theta_2)-\sin(\theta_1-\theta_3)+\sin(\theta_2-\theta_3)}, \\
H_2 &= \frac{\sin(\theta-\theta_3)-\sin(\theta-\theta_1)+\sin(\theta_3-\theta_1)}{\sin(\theta_2-\theta_3)-\sin(\theta_2-\theta_1)+\sin(\theta_3-\theta_1)}, \\
H_3 &= \frac{\sin(\theta-\theta_1)-\sin(\theta-\theta_2)+\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_3-\theta_1)-\sin(\theta_3-\theta_2)+\sin(\theta_1-\theta_2)}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Аппроксимирующие функции строятся таким образом, чтобы алгебраические полиномы N_j описывали напряженно-деформированное состояние и распределение температуры в плоскости rz , а тригонометрические функции – по окружной координате.

Для определения стационарного значения функционала \mathcal{E} (15) разобьем объем тела на M конечных элементов. Используя методику, изложенную в [1, 4, 8], для определения узловых значений компонент вектора перемещений получим $3n$ (n – число узловых точек) линейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами

$$\sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_j} = 0, \quad \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial u_j} = 0, \quad \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial v_j} = 0 \quad (j = \overline{1, n}). \tag{19}$$

Просуммировав выражения (19) по всем конечным элементам, получим для общей глобальной нумерации узлов систему уравнений, в которой интегрирование по объему исследуемой области заменено суммой интегралов, взятых по объемам отдельных конечных элементов, а интегрирование по поверхности – суммой интегралов по граням элементов, на которых заданы граничные условия в напряжениях. Для вычисления интегралов, входящих в коэффициенты системы (19), применим квадратурные формулы Гаусса [1, 4, 8]. По найденным узловым значениям перемещений вычисляются деформации, напряжения и диссипативная функция в точках интегрирования Гаусса, так как в них указанные величины имеют самую высокую точность.

Трехмерное вариационное уравнение энергии (16) с известным ис-

точником тепла решается на той же сетке конечных элементов. При этом производная по времени $\partial T / \partial t$ не варьируется, а заменяется выражением $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t}$ и в дальнейшем реализуется неявная схема решения нестационарной задачи теплопроводности.

В ходе решения задачи четвертая часть панели неравномерно разбивалась на 128 конечных элементов с узловыми точками. Сгущение элементов проводилось в областях, прилегающих к торцам цилиндра. В этих элементах деформации и напряжения вычислялись в точках интегрирования Гаусса, а затем проводилось осреднение их по элементу. Это дает возможность избежать резкого возрастания диссипативной функции в окрестности угловых точек панели.

На внешней поверхности панели действует равномерно распределенное механическое давление, изменяющееся по гармоническому закону $P = P_0 \cos \omega t$ с частотой, близкой к первой резонансной частоте тела, и механическими граничными условиями, отвечающими жесткому закреплению торцов.

Расчёты выполнены для панели с внешним радиусом $R = 0,11 \text{ м}$, толщиной $h = 0,02 \text{ м}$ и длиной $l = 0,1 \text{ м}$. Механические характеристики материала следующие: модуль сдвига $G = G' + iG''$, $\nu = 0,32$, $G_0 = 0,265 \cdot 10^{11}$, $G'' = 0,871 \cdot 10^8 \text{ Па}$, $\rho = 0,28 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3$.

Считалось, что панель находится в условиях теплообмена с окружающей средой, температура которой $T_c = 20^\circ\text{C}$. Коэффициент теплоотдачи между окружающей средой и материалом цилиндра принят посто-

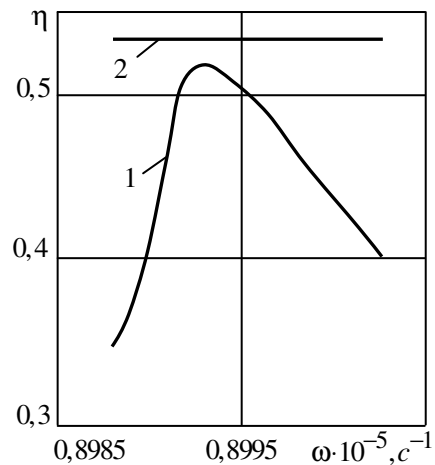


Рис.3

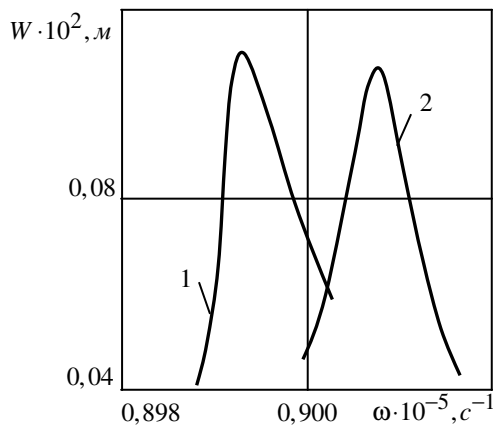


Рис.1

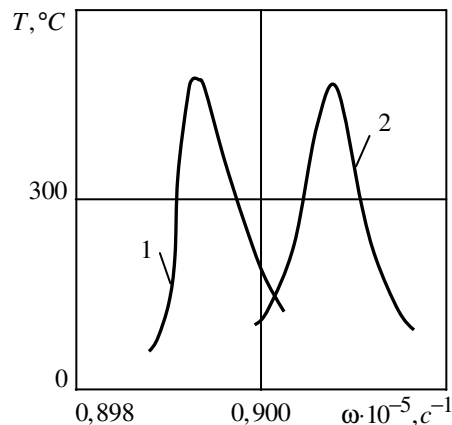


Рис. 2

янным и равным $\alpha_T = 25 \frac{Вт}{м^2 \text{ } ^\circ C}$. При расчете температурных полей теплофизические характеристики были равны: $\lambda_0 = 0,5 \frac{Вт}{м \text{ } ^\circ C}$, $c_p = 1,5 \frac{МДж}{м^3 \text{ } ^\circ C}$.

На рис.1,2 представлены амплитудно-частотные и температурно-частотные характеристики (АЧХ и ТЧХ) цилиндрической панели с жестким защемлением торцов в окрестности первого резонанса. Кривые 1 и 2 отвечают физически нелинейному и линейному материалам. Как видно, физическая нелинейность приводит к укрупнению характеристик, а также влияет на величину амплитуды и температуры.

На рис.3 показана зависимость коэффициента демпфирования от частоты. Как видно, физическая нелинейность оказывает существенное влияние на этот коэффициент.

Таким образом, решение связанной динамической трехмерной задачи для цилиндрической панели из изотропного вязкоупругого материала с зависящими от амплитуд деформаций механическими характеристиками при действии на нее изменяющегося по гармоническому закону внешнего давления с частотой, близкой к резонансной частоте, сведено к решению последовательности трех задач: 1) динамической трехмерной задачи о вынужденных резонансных колебаниях вязкоупругой цилиндрической панели; 2) расчету диссипативной функции по известному решению задачи механики; 3) решению трехмерной нестационарной задачи теплопроводности с известным источником тепла. Для решения первой и третьей задач разработан конечно-элементный метод. Рассматриваются механические граничные условия, отвечающие жесткому закреплению торцов. Для этих граничных условий рассчитаны такие динамические характеристики, как амплитудно-, температурно-частотные характеристики и коэффициент демпфирования при колебаниях по первой основной изгибной моде. Дано сравнение результатов расчетов с использованием линейной и нелинейной моделей, которые свидетельствуют о существенном влиянии физической нелинейности на указанные динамические характеристики.

Разработанная методика позволяет исследовать термомеханическое поведение не только цилиндрической панели, но и вязкоупругих тел вращения с различными граничными условиями на торцах.

РЕЗЮМЕ. Розглянута зв'язана тривимірна динамічна задача про вимушені гармонічні коливання і дисипативний розігрів ізотропної в'язкопружної циліндричної панелі з жорстким защемленням торців. Враховується взаємодія механічних і теплових полів. Припускається, що властивості матеріалу не залежать від температури. Розроблено скінченно-елементний метод розв'язування цієї задачі. Розраховані амплітудно- та температурно-частотні характеристики панелі, а також залежність коефіцієнта демпфування від частоти при коливаннях панелі по першій згинній моді.

Ключові слова: нелінійність, коливання і дисипативний розігрів, циліндрична панель, динамічні характеристики

SUMMARY. A coupled three-dimensional problem on the forced harmonic vibrations and dissipative heating of an isotropic viscoelastic cylindrical panel with rigidly clamped edges is considered. Coupling of the mechanical and thermal fields is taking into account. It is supposed that the properties don't depend on temperature. A finite element method is developed for a solution of the problem. The amplitude-, temperature-frequency

characteristics and frequency dependence of damping coefficient of the panel are calculated under the vibrations on the first bending mode.

Key words: nonlinearity, vibrations and dissipative heating, cylindrical panel, dynamic characteristics

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
2. *Карнаухов В. Г., Михайленко В. В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир, 2005. – 428 с.
3. *Коваленко А. Д.* Введение в термоупругость. – К.: Наук. думка, 1970. – 307 с.
4. *Козлов В.И.* Колебания и диссипативный разогрев многослойной оболочки вращения из вязко-упругого материала // Прикладная механика – 1996. – Т. 32, № 6. – С. 82–89.
5. *Пальмов В. А.* Колебания упругопластических тел. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
6. *Савченко Е. В.* Пассивное демпфирование колебаний композитных конструкций. – Нежин: Видавництво «Аспект-Поліграф», 2006. – 232 с.
7. *Hamid R. Hamidzaden, Reza N. Jazar.* Vibrations of Thick Cylindrical Structural. – New York–Dordrecht–Heidelberg–London: Springer, 2010. – 201 p.
8. *Hensen J. S., Hepler G. K.* A Mindlin shell element which satisfies rigid body requirements // AIAA J. – 1985. – Vol. 22, № 2. – P. 288–295.
9. *Jones D. I. G.* Handbook of Viscoelastic Vibrations Damping. – New York: John Wiley and Sons, 2001. – 391 p.
10. *Lakes R. S.* Viscoelastic Materials. – London: Cambridge University Press, 2009. – 461 p.

*Институт механики НАНУ, г. Киев
Николаевский государственный университет*

Поступила 15.06.2010

УДК 539.3

Я. А. ЖУК, д-р физ.-мат. наук

ВЛИЯНИЕ ДИССИПАТИВНОГО ВИБРОРАЗОГРЕВА НА РАБОТОСПОСОБНОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОЙ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ БАЛКИ С ПЬЕЗОАКТИВНЫМИ СЛОЯМИ

Рассматривается задача о вынужденных колебаниях и виброразогреве шарнирно опертой трехслойной балки, средний слой которой изготовлен из электрически пассивного, а внешние – из пьезоактивного материала. Исследована эволюция температурного поля и потеря работоспособности конструкции вследствие деполяризации пьезокерамики, вызванной виброразогревом выше температуры Кюри.

Ключевые слова: диссипативный разогрев, трехслойная балка, пьезоактивный материал

Анализ вынужденных колебаний конструкций и их элементов является одной из основных задач динамики деформируемых систем. Точное прогнозирование динамической реакции конструкции усложняется тем, что при значительных уровнях нагружения материал конструкции может демонстрировать достаточно сложное неупругое поведение. Жесткие требования к современным конструкциям требуют реализации возможности контроля колебаний тонкостенных элементов при интенсивных режимах работы. Указанные задачи рассматриваются в рамках структроники – активно развивающейся области науки [6]. Современный подход к проблеме контроля колебаний тонкостенных многослойных элементов конструкций состоит во введении в их структуру активных элементов (слоев или «пятен»), имеющих специфические свойства: пьезоактивных материалов, материалов с памятью формы, электро-магнитоупругими либо другими электрореологическими свойствами, которые обеспечивают возможность активного влияния на параметры колебательного процесса [7].

Пьезоактивные элементы чаще всего используются как распределенные сенсоры или актуаторы. Причем, с одной стороны, пьезоактивный слой может использоваться как распределенный сенсор в случае использования прямого пьезоэлектрического эффекта, с другой стороны, путем подачи внешнего электрического поля можно возбуждать (или контролировать) колебания желаемым образом при помощи обратного пьезоэффекта. Как правило, проблемы моделирования и управления колебаниями конструкций, содержащих активные элементы, сводятся к решению соответствующих задач для слоистых балок, пластин или оболочек, содержащих пьезоактивные слои или частично (либо полностью) покрыты пьезоматериалом [5].

При изучении контроля колебаний многослойных тонкостенных конструкций необходимо рассматривать целый круг вопросов: моделирование механической реакции и оценка прочности электрически пассивных слоев и композитных материалов в целом; учет связанности электрических и механических полей в пьезоматериале; развитие теорий мно-

гослойных балок, пластин и оболочек с пьезоэлектрическими слоями при учете анизотропии свойств; развитие теорий сенсоров и актуаторов; исследование проблем чувствительности сенсоров, проблем модального контроля и оптимального расположения сенсоров (актуаторов); разработка систем обратной связи; развитие нелинейных теорий и исследование на их основе взаимодействий разнообразных нелинейных факторов; исследование тепловых эффектов, в частности явления диссипативного разогрева, сопровождающего неупругое деформирование материала.

В данной статье на основе электромеханической модели тонкостенных слоистых элементов конструкций развивается приближенная моногармоническая методика (одночастотное приближение) для описания нелинейного термоэлектромеханического поведения балки, состоящей из вязкоупругих пьезоактивных и неупругих металлических слоев и находящейся под воздействием циклического механического или электрического нагружения. Решается модельная задача о колебаниях и диссипативном разогреве трехслойной шарнирно опертой балки, состоящей из внутреннего металлического и внешних пьезокерамических слоев. Исследована эволюция температурного поля и потеря работоспособности конструкции вследствие деполяризации пьезокерамики, вызванной виброрагревом выше температуры Кюри.

Постановка задачи. Рассматриваются вынужденные колебания шарнирно опертой трехслойной балки, средний слой которой изготовлен из алюминиевого сплава *АМг-6*, внешние – из пьезокерамики *ЦТС-19*. Толщины слоев постоянные. Вводится прямоугольная декартова система координат *Oxyz* таким образом, что ось абсцисс совпадает с осью балки, толщинная координата отсчитывается вдоль оси ординат, ширина – вдоль оси абсцисс. Геометрические параметры балки: длина – *L*, толщина – *h* (верхняя и нижняя грани $z = h/2$, $z = -h/2$ соответственно), ширина – *b*. Толщины индивидуальных слоев h_i , $i = 1, 2, 3$. Электрические потенциалы ϕ_{zi} определены на электродированных поверхностях пьезоактивных слоев. Рассматривается шарнирное опирание балки, при котором допускаются ее продольные перемещения (мембранные усилия отсутствуют). Колебания возбуждаются либо механическими моментами, приложенными в шарнирах, либо заданием разностей электрических потенциалов на контактах пьезоактивных слоев. И механическое, и электрическое возбуждения изменяются по гармоническому закону во времени.

Задача, следуя методике развитой в [1,2], формулируется в терминах амплитуд механических и электрических переменных, а циклические свойства материалов характеризуются при помощи комплексных модулей. Полная постановка изотермической задачи в моногармоническом приближении приведена в работах [1,2]. Кратко опишем ее ниже.

В рамках приближенного амплитудного подхода предполагается, что реакция напряжения и неупругой деформации элемента твердого тела на моногармоническую историю деформирования

$$e_{kl}(t) = e'_{kl} \cos \omega t - e''_{kl} \sin \omega t$$

также близка к гармонической с частотой внешнего возбуждения

$$s_{kl}(t) = s'_{kl} \cos \omega t - s''_{kl} \sin \omega t, \quad \varepsilon_{kl}^p(t) = \varepsilon_{kl}^p{}' \cos \omega t - \varepsilon_{kl}^p{}'' \sin \omega t, \quad (1)$$

где e_{kl} и s_{kl} - девиаторы тензоров деформации и напряжения соответственно; $(\cdot)'$ и $(\cdot)''$ - действительная и мнимая части комплексных амплитуд, $(\tilde{\cdot}) = (\cdot)' + i(\cdot)''$; ω - частота колебаний.

Для материала электрически пассивного слоя процедура гармонической линеаризации [4] предполагает, что комплексные амплитуды девиатора полной и неупругой деформаций $\tilde{e}_{ij} = e'_{ij} + ie''_{ij}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p{}' + i\varepsilon_{ij}^p{}''$ и напряжения $\tilde{s}_{ij} = s'_{ij} + is''_{ij}$ с помощью комплексного модуля сдвига \tilde{G} , $\tilde{G} = G' + iG''$ и коэффициента пластичности $\tilde{\kappa}_p$, $\tilde{\kappa}_p = \kappa_p' + i\kappa_p''$, связаны соотношениями

$$\tilde{s}_{ij} = 2\tilde{G}\tilde{e}_{ij}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij}^p = \tilde{\kappa}_p\tilde{e}_{ij},$$

где в общем случае для пропорционального нагружения \tilde{G} и $\tilde{\kappa}_p$ зависит от эффективной деформации (или напряжения), частоты и температуры.

Связь для объемных компонентов имеет вид

$$\tilde{\sigma}_{kk} = 3K_V\tilde{\varepsilon}_{kk},$$

где объемный модуль K_V принимается действительной величиной.

Для материала пьезоактивного слоя амплитуды электрических переменных задачи определяются аналогами соотношений (1)

$$E_k(t) = E'_k \cos \omega t - E''_k \sin \omega t, \quad D_k(t) = D'_k \cos \omega t - D''_k \sin \omega t, \quad (2)$$

а циклические определяющие соотношения для материала без пирозффекта могут быть записаны следующим образом [6]:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{c}_{ijkl}^D \varepsilon_{kl} - \tilde{h}_{mij} \tilde{D}_m, \quad \tilde{E}_n = \tilde{\beta}_{nm}^S \tilde{D}_m - \tilde{h}_{nkl} \tilde{\varepsilon}_{kl},$$

$$i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3 \leftrightarrow x, y, z,$$

где E_k и D_k - компоненты векторов электрического поля и электрической индукции соответственно; \tilde{c}_{ijkl}^D - тензор изотермических комплексных модулей при постоянном электрическом смещении; \tilde{h}_{ijk} - пьезоэлектрические константы и $\tilde{\beta}_{ij}^S$ - матрица диэлектрических коэффициентов при постоянной деформации. Эти уравнения получены в предположении справедливости электростатического приближения.

Применение стандартных гипотез Кирхгоффа-Лява, обобщенных на случай электромеханики и плоского напряженного состояния, позволяет получить определяющие соотношения для каждого электрически пассивного или активного слоя. Усреднение по всей толщине пакета приводит к окончательному виду физических соотношений в комплексной форме [1, 2]. Постановка задачи для балки также содержит комплексные аналоги

уравнений колебаний, выражений для компонент деформационных параметров оси балки и замыкается заданием соответствующих граничных условий в комплексном виде.

Рассматриваются два способа нагружения балки. Согласно первому колебания возбуждаются моментами, приложенными на концах $x = 0, L$ и изменяющимися во времени по закону $M = \sigma_{xx}^0 H_s^2 / 6 \sin \omega t = M_0 \sin \omega t$, где σ_{xx}^0 – максимальная амплитуда напряжения, распределенного по линейному закону вдоль торцов $x = 0, L$ балки. Соответствующие условия в комплексной форме имеют вид

$$\tilde{M} = -iM_0 = -i\sigma_{xx}^0 h^2/6, \quad x = 0, L.$$

При втором способе нагружения задается изменяющаяся по гармоническому закону во времени разность потенциалов $V^{(s)}$ на каждом пьезоактивном слое $V^{(s)} = V_0^{(s)} \sin \omega t$, где $V_0^{(s)}$ – амплитуда электрического напряжения. В комплексной форме это условие записывается в виде

$$\tilde{V}^{(s)} = -iV_0^{(s)}; \quad x = 0, L.$$

В обоих случаях продольные и перерезывающие усилия при $x = 0, L$ считаются нулевыми.

Процедура получения полной системы уравнений изотермической задачи в комплексной форме детально описана в [1, 2, 4]. Температурные аспекты постановки задачи освещаются в следующем параграфе.

Задача диссипативного разогрева. Одночастотное приближение оказывается чрезвычайно удобным при решении задач, в которых главную роль играют амплитуды основных полевых величин. В первую очередь это относится к изучению процессов, в которых форма петли гистерезиса незначительна. К отмеченному классу проблем относятся, в частности, определение уровня диссипативного разогрева и усталостной долговечности конструкции.

Рассмотрим связанную задачу термоэлектромеханики для трехслойной балки, описанной в предыдущем параграфе. Вопросы несоответствия коэффициентов линейного теплового расширения материалов в данной статье не обсуждаются.

Для изучения тепловых эффектов при гармоническом нагружении будем исходить из уравнения баланса энергии. При рассматриваемых условиях оно сводится к уравнению теплопроводности в виде

$$c_V \dot{T} = k T_{,ii} - K_V T_0 \alpha_T \dot{\epsilon}_{kk} / 3 + D'(x, z), \quad (3)$$

где T и T_0 обозначают текущую и начальную температуру, c_V – коэффициент теплоемкости при постоянном объеме, k – коэффициент теплопроводности, α_T – коэффициент линейного теплового расширения, D' – мощность диссипации электромеханической энергии. На границах слоев подразумевается выполнение условий идеального теплового контакта: температуры на граничных поверхностях и тепловые потоки через них

считаются равными.

Введем в рассмотрение приращение температуры по формуле $\theta = T - T_0$. Тогда в терминах избыточной температуры уравнение (3) для балки можно переписать в виде

$$c_V \dot{\theta} = k(\theta_{,xx} + \theta_{,zz}) - 2\theta \alpha_y / b - K_V T_0 \alpha_T \dot{\epsilon}_{kk} / 3 + D'(x, z), \quad (4)$$

где α_y – коэффициент теплоотдачи с поверхностями $y = 0, b$.

Усредняя уравнение теплопроводности (4) за период колебаний и пренебрегая вкладом термоупругих эффектов в общий уровень диссипативного разогрева, получаем

$$c_V \dot{\theta} = k(\theta_{,xx} + \theta_{,zz}) - 2\theta \alpha_y / b + D'(x, z), \quad (5)$$

где θ и D' вновь используются для обозначения усредненной за период температуры и диссипации соответственно.

Диссипативная функция для пьезоактивного слоя имеет вид [2]

$$D'(x, z) = \frac{\omega}{2} \text{Im} \left[\tilde{\sigma}_{xx} \tilde{\epsilon}_{xx}^* + \tilde{E}_z \tilde{D}_z^* \right],$$

где звездочкой обозначены комплексно сопряженные величины.

С учетом полученных выше амплитудных определяющих соотношений окончательная форма выражений для усредненной диссипативной функции для пьезоактивного слоя принимает вид

$$D' = D'_M + D'_{DE} + D'_{PE} = \frac{\omega}{2} C''_{11} (\epsilon'_{xx}{}^2 + \epsilon''_{xx}{}^2) + \frac{\omega}{2} B''_{33} (D_z'^2 + D_z''^2) - \omega H''_{31} (D_z' \epsilon'_{xx} + D_z'' \epsilon''_{xx}), \quad (6)$$

где механические, диэлектрические и пьезоэлектрические потери обозначены индексами M , DE и PE соответственно. При рассмотрении электрически пассивного металлического слоя имеют место только механические потери и выражение (6) упрощается

$$D' = D'_M = \frac{\omega}{2} \text{Im} (\tilde{\sigma}_{xx} \tilde{\epsilon}_{xx}^*) = \frac{\omega}{2} (\sigma''_{xx} \epsilon'_{xx} - \sigma'_{xx} \epsilon''_{xx}). \quad (7)$$

На внешних поверхностях балки предполагается теплообмен с окружающей средой, имеющей температуру T_0 , по конвективному механизму. Соответствующие граничные условия имеют вид

$$\pm k \theta_{,x} = \alpha_x \theta, \quad x = 0, L, \quad \pm k \theta_{,z} = \alpha_z \theta, \quad z = \mp h/2. \quad (8)$$

Здесь α_x и α_z – коэффициенты теплоотдачи с поверхностями $x = 0, L$ и $z = \pm h/2$ соответственно.

Так как рассматриваемая задача теплопроводности является нестационарной, то начальное условие формулируется только для температуры:

$$\theta(x, z) = 0, \quad t = 0. \quad (9)$$

Подчеркнем, что задача теплопроводности решается как двумерная задача в плоскости Oxz . Такой подход позволяет исследовать распределения температуры как вдоль оси балки, так и по ее толщине.

Свойства материалов и метод решения задачи. В данной работе рассматриваются температурные режимы ограниченные температурой Кюри для пьезокерамики. В этом интервале температур физико-механические свойства, как алюминиевого сплава, так и пьезокерамики практически не изменяются и считаются постоянными. Этот факт и принятые выше предположения относительно характера процесса теплопроводности позволяют исходную связанную задачу решать как несвязанную в два этапа.

На первом этапе решается стационарная задача электромеханики для балки при помощи метода дискретной ортогонализации. Результатом решения являются амплитуды основных электромеханических характеристик и диссипативная функция. На втором этапе методом конечных разностей решается двумерная нестационарная задача теплопроводности (5) – (9) с известной функцией источника, определяемой по формуле (6) в случае пьезоактивных слоев и по формуле (7) – в случае металлического материала слоя.

Свойства пьезокерамики *ЦТС-19* и алюминиевого сплава *АМг-6*, использованные в расчетах, приведены ниже.

Плотность пьезокерамики и алюминиевого сплава равны $7300 \text{ кг} / \text{м}^3$ и $2692,65 \text{ кг} / \text{м}^3$ соответственно.

Используя результаты работ [1, 3], считаем, что в случае циклического деформирования пьезокерамика ведет себя как вязкоупругий трансверсально изотропный материал. Комплексные модули для него не зависят от температуры, частоты и интенсивности деформации. Действительные части (модули накопления) соответствующих комплексных модулей выбирались равными

$$\begin{aligned} c_{11}^D ' &= 1,12 \cdot 10^5 \text{ МПа}, & c_{12}^D ' &= 0,64 \cdot 10^5 \text{ МПа}, & c_{13}^D ' &= 0,5 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \\ c_{33}^D ' &= 1,25 \cdot 10^5 \text{ МПа}, & h_{31}' &= -5,0 \cdot 10^8 \text{ В} / \text{м}, & h_{33}' &= 1,8 \cdot 10^9 \text{ МПа}, \\ \beta_{33}^S ' &= 1,33 \cdot 10^8 \text{ м} / \Phi, \end{aligned}$$

а мнимые части (модули потерь) –

$$\begin{aligned} \text{tg} \delta_{c11} &= c_{11}^D '' / c_{11}^D ' = 0,0128, & \text{tg} \delta_{c12} &= c_{12}^D '' / c_{12}^D ' = 0,0144, \\ \text{tg} \delta_{c13} &= c_{13}^D '' / c_{13}^D ' = 0,02, & \text{tg} \delta_{c33} &= c_{33}^D '' / c_{33}^D ' = 0,015, \\ \text{tg} \delta_{h31} &= h_{31}'' / h_{31}' = -0,0125, & \text{tg} \delta_{h33} &= h_{33}'' / h_{33}' = 0,0142, \\ \text{tg} \delta_{\beta33} &= \beta_{33}^S '' / \beta_{33}^S ' = -0,0215. \end{aligned}$$

Комплексные модули для алюминиевого сплава взяты из работы [2]. Для варианта модели одночастотного приближения, применяемой в этой статье, объемный модуль K_V принимается действительной величиной равной $8,5 \cdot 10^4 \text{ МПа}$. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона для АМг-6

равны $0,816 \cdot 10^5$ МПа и 0,34 соответственно.

Точка Кюри для пьезокерамики наблюдается при $T_C = 200^\circ\text{C}$ (или в терминах приращения температуры $\theta_C = T_C - T_0 = 180^\circ\text{C}$).

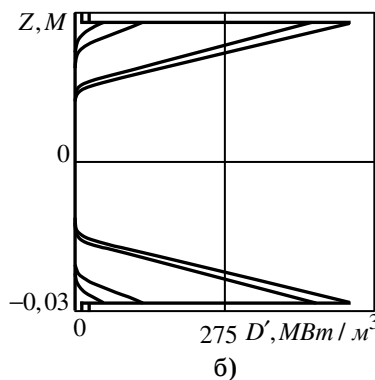
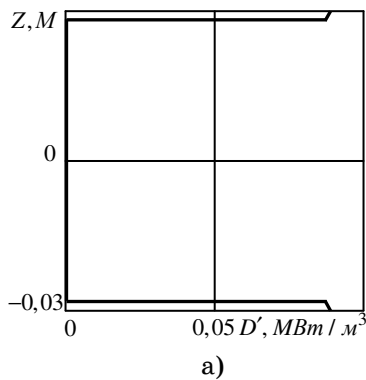
Для решения задачи теплопроводности использованы следующие значения коэффициентов и параметров: $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = 100 \text{ Вт} / \text{м}^2 \cdot \text{К}$, $T_0 = 20^\circ\text{C}$; $c_V = 2,48 \cdot 10^6 \text{ Дж} / \text{м}^3 \cdot \text{К}$ и $k = 90 \text{ Вт} / \text{м} \cdot \text{К}$ для алюминиевого сплава; $c_V = 3,58 \cdot 10^6 \text{ Дж} / \text{м}^3 \cdot \text{К}$ и $k = 1,25 \text{ Вт} / \text{м} \cdot \text{К}$ для пьезокерамики.

Результаты расчетов и выводы. Сформулированная в предыдущих параграфах задача термоэлектромеханики является существенно нелинейной и решается численно. Расчеты проводились для следующих геометрических параметров балки: $L = 2,0 \text{ м}$, $h = 0,6 \cdot 10^{-1} \text{ м}$, $h_1 = h_3 = 0,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ($h_2 = 0,56 \cdot 10^{-1} \text{ м}$), $b = 0,3 \cdot 10^{-1} \text{ м}$.

Расчеты показали, что оба типа нагружения (механическое и электрическое) полностью эквивалентны в том смысле, что при соответствующих значениях M_0 и V_0 они вызывают равные прогибы балки и одинаковые значения амплитуд полной и неупругой деформации и напряжения. Поэтому далее приводятся результаты только для механического возбуждения.

Механические аспекты задачи колебаний балки в приближенной постановке детально обсуждены в [1]. Отметим, что полученные поля распределений основных механических параметров для колебаний в окрестности первого резонанса характеризуются наличием максимумов в центральном поперечном сечении. Эти максимумы вызваны динамическими эффектами и отсутствуют при квазистатических режимах колебаний. В результате максимумы амплитуд неупругих деформаций наблюдаются в этом сечении в слоях алюминиевого сплава, прилежащих к пьезокерамике. Этот факт является решающим для характера распределения диссипативной функции, а, следовательно, и зон разогрева.

Примеры распределения диссипативной функции по центральному поперечному сечению для частоты возбуждения 10 Гц и набора частот из



окрестности частоты первого резонанса при $M_0 = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$ представлены на рис. 1а и 1б соответственно. Числами на рис. 1б обозначены значения частот. Вдали от резонанса металлический

Рис. 1

слой деформируется упруго и не дает вклада в общий уровень разогрева за цикл колебаний. В этом случае потери энергии (механические, пьезо- и диэлектрические) наблюдаются только в пьезоактивном слое. Ситуация полностью изменяется в околорезонансной области при появлении неупругих деформаций в металлическом слое (рис. 1б), при этом диссипация именно в алюминиевом сплаве значительно преобладает, приводя к существенному повышению температуры.

Для изучения явления виброразогрева на рис. 2 построены истории изменения максимальной температуры (в точке с координатами $x = 1 \text{ м}$; $z = \pm 0.28 \cdot 10^{-1} \text{ м}$) в зависимости от количества циклов колебаний для различных частот возбуждения.

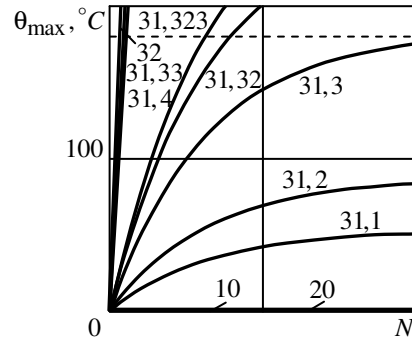


Рис. 2

Максимальный разогрев наблюдается в околорезонансной области. Большие прогибы приводят к большим неупругим деформациям, большому разогреву и, как результат, более быстрому достижению точки Кюри в пьезокерамике, прилежащей к рассматриваемой точке. Отметим, что с точки зрения разогрева, в отличие от управления колебаниями, изучаемая конфигурация не является эффективной, поскольку слои пьезокерамики, имея низкую теплопроводность, играют роль термоизоляторов, предотвращая охлаждение путем конвективного теплообмена со средой. В целом, температура слабо изменяется по толщине балки. При удалении от резонансной области разогрев не достигает опасного уровня, стационарное значение температуры лежит ниже температуры Кюри, и колебания могут продолжаться сколь угодно долго.

Распределения температуры вдоль балки при $z = \pm 0,28 \cdot 10^{-1} \text{ м}$ для $f = 32 \text{ Гц}$ и $M_0 = 1 \text{ кН}\cdot\text{м}$ представлены на рис. 3 для различного количества циклов.

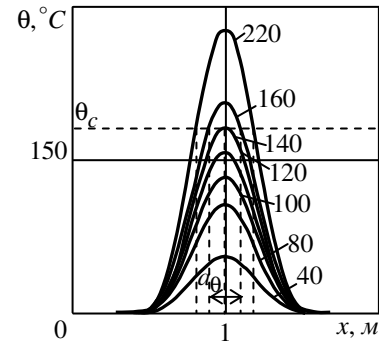


Рис. 3

Видно, что разогрев локализован в центральной части балки. Именно в этой зоне температура достигает точки Кюри, вызывая деполаризацию. Момент времени, в который это происходит, считается критическим временем потери балкой своей функциональности. Для случая электрического возбуждения потеря пьезоэффекта приводит к изменению общего характера колебаний и их формы вследствие того, что электрически генерируемые моменты не являются более равномерными по длине балки.

При механическом нагружении, когда пьезослои работают как сенсоры, потеря пьезоэлектрических свойств частью пьезокерамики приводит к резкому уменьшению тока, снимаемого с электродов. Этот эффект

может использоваться для диагностики теплового повреждения конструкций, содержащих пьезоэлектрические элементы.

РЕЗЮМЕ. Розглядається задача про вимушені коливання шарнірно опертої тришарової балки, середній шар якої виготовлено з електрично пасивного, а зовнішні – з п'єзоактивного матеріалу. Задача розв'язується в двох постановках: наближеній моногармонічній і повній. Досліджуються особливості впливу фізичної і геометричної нелінійностей на реакцію конструкції, визначається точність і межі застосовності наближеного підходу.

Ключові слова: дисипативний розігрів, тришарова балка, п'єзоактивний матеріал

SUMMARY. The problem on forced vibration of hinged three-layer beam with electrically passive inner layer and piezoactive outer ones is investigated. The problem is solved in the frame of two statements: the approximate monoharmonic statement and the complete one. Regularities of the geometrical and physical nonlinearities influence on the structure response are studied and the limitations on the approximate technique application are determined.

Key words: dissipative heating, three layer beam, piezoactive material

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жук Я. А. Решение задачи о колебаниях балки с пьезоактивными слоями при механическом или электрическом нагружении // Теор. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 131–138.
2. Жук Я. А., Сенченков И. К. Моделирование стационарных колебаний и диссипативного разогрева тонкостенных неупругих элементов, содержащих пьезоактивные слои // Прикл. механика. – 2004. – Т. 40, № 5. – С. 80–91.
3. Пьезокерамические преобразователи: Справочник / Под ред. Пугачева С. И. – Л.: Судостроение, 1984. – 256 с.
4. Сенченков И. К., Жук Я. А., Карнаухов В. Г. Моделирование термомеханического поведения физически нелинейных материалов при моногармоническом нагружении // Прикладная механика – 2004. – Т. 40, № 9. – С. 3–34.
5. Baillargeon B. P., Vel S. S. Exact solution for the vibration and active damping of composite plates with piezoelectric shear actuators // J. Sound Vibr. – 2005. – V. 282. – P. 781–804.
6. Rao S. S., Sunar M. Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of flexible structures: A survey // Appl. Mech. Rev. – 1994. – V. 47. – P. 113–123.
7. Tani J., Takagi T., Qui J. Intelligent material systems: Application of functional materials // Appl. Mech. Rev. – 1998. – Vol. 51. – P. 505–521.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 15.10.2010

УДК 539.3

Л. В. КУРПА, д-р тех. наук, В. В. ТКАЧЕНКО

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА R-ФУНКЦИЙ

Предложены методы исследования статической устойчивости многослойных пластин симметричного строения со сложной формой и разными видами краевых условий. Разработанные подходы позволяют определить неоднородное докритическое состояние и базируются на применении теории R-функций и вариационных методов. В рамках системы POLE-RL создано программное обеспечение, реализующее предложенные методы, с помощью которого решены новые задачи устойчивости многослойных пластин при разных способах нагружения.

Ключевые слова: теория R-функций, статическая устойчивость, многослойные пластины, сложная геометрия

В общем случае задачи устойчивости и колебаний многослойных пластин, находящихся под действием сжимающих усилий, могут быть решены только с использованием приближенных методов. Особенно это касается тех случаев, когда докритическое напряженное состояние является неоднородным, что может быть вызвано как геометрией, так и характером действующей нагрузки. В таких случаях необходимо вначале определить закон распределения внутренних усилий, а затем перейти к решению задачи устойчивости или колебаний. Число работ, в которых были бы решены обе эти задачи, весьма ограничено. В основном, разработаны методы решения задач устойчивости и колебаний сжатых многослойных пластин при однородном докритическом состоянии [8–11].

В настоящей работе предложен метод, позволяющий исследовать устойчивость и собственные колебания сжатых многослойных пластин симметричного строения с учетом их неоднородного докритического состояния. Метод базируется на использовании теории R-функций [2, 6] и вариационных методах [5], что позволило его применять к пластинам различной формы с разнообразными способами их закрепления. Ранее [2, 3, 7] этот подход был применен к однослойным изотропным и ортотропным пластинам. Метод численно реализован в рамках системы POLE-RL и проиллюстрирован на ряде задач.

Постановка задачи. Рассмотрим тонкую многослойную пластину симметричной структуры по толщине, при условии отсутствия проскальзывания между слоями.

В рамках классической теории, базирующейся на гипотезах Кирхгофа-Лява [1], условия равновесия пластины при отсутствии объемных сил, записываются в виде системы уравнений:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \\ = \lambda \left(N_x^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) - \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь N_x , N_y , N_{xy} – нормальные и касательные усилия в срединной плоскости; N_x^0 , N_y^0 , N_{xy}^0 – значения этих величин при $\lambda = 1$; M_x , M_y , M_{xy} – изгибающие и крутящий моменты, которые для многослойных пластин симметричного строения определяются по известным формулам [1, 4], представленным ниже в матричном виде:

$$\begin{aligned} \bar{N} &= (N_x, N_y, N_{xy})^T = \mathbf{C} \cdot \bar{\varepsilon}, \\ \bar{M} &= (M_x, M_y, M_{xy})^T = \mathbf{D} \cdot \bar{\chi}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix};$$

$$\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy})^T, \quad \bar{\chi} = (\chi_x, \chi_y, \chi_{xy})^T;$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

u , v и w – перемещения; C_{ij} , D_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) – так называемые приведенные жесткостные характеристики, определяемые формулами [1]

$$(C_{ij}, D_{ij}) = \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} B_{ij}^s(1, z^2) dz.$$

Если оси анизотропии не совпадают с направлениями Ox и Oy упругие константы s -го слоя B_{ij}^s ($i, j = 1, 2, 6$) выражаются через упругие постоянные исходной системы \tilde{B}_{ij}^s по известным формулам [1].

Система уравнений (1)–(3) дополняется граничными условиями, вид которых определяется способом закрепления и нагружения границы пластины. Например, для жесткого защемления граничные условия записываются в виде

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad (5)$$

где n – внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$ области Ω пластины. В случае шарнирного опирания граничные условия имеют вид

$$v_n = 0, \quad N_n = 0, \quad w = 0, \quad M_n = 0, \quad (6)$$

в котором

$$v_n = -um + vl, \quad N_n = N_x l^2 + N_y m^2 + 2N_{xy}lm, \\ M_n = M_x l^2 + M_y m^2 + 2M_{xy}lm;$$

$l = \cos \alpha$, $m = \cos \beta = \sin \alpha$ – направляющие косинусы нормали \bar{n} ; α – угол между нормалью n и осью Ox . Для нагруженного контура граничные условия определяются соотношениями

$$N_n = P_1^0, \quad S_n = P_2^0. \quad (7)$$

Далее будут рассмотрены случаи только сжатых пластин, т.е. принимается, что $P_2^0 = 0$.

Устойчивость сжатых многослойных пластин. В задаче о статической устойчивости пластины последнее слагаемое в уравнении (3) равно нулю и для определения докритического состояния пластины необходимо найти функции N_x^0 , N_y^0 , N_{xy}^0 , которые удовлетворяют уравнениям (1), (2), и соответствующим граничным условиям. Заметим, что эта задача соответствует плоской задаче теории упругости, решение которой будем отыскивать с помощью метода R-функций (RFM). С этой целью сформулируем вариационную постановку задачи. Согласно принципу Лагранжа она сводится к нахождению минимума функционала:

$$I(u, v) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \varepsilon_{xy}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} P_1^0 u_n ds, \quad (8)$$

где $u_n = ul + vm$; P_1^0 – интенсивность внешнего сжимающего усилия; $\partial\Omega_1$ – часть границы области, на которую действуют внешние усилия.

Минимум функционала будем отыскивать на множестве функций, удовлетворяющих главным (кинематическим) граничным условиям, построенным с помощью теории R-функций. Например, если пластина сжимается на участке границы $\partial\Omega_1$, а на оставшейся части контура $\partial\Omega_2$ является неподвижной в своей плоскости, т.е. граничные условия для функций u и v имеют вид (5), то пучок допустимых функций для нахождения минимума функционала (8) определяется с помощью следующих структурных формул:

$$u = \omega_2 \Phi_1, \quad v = \omega_2 \Phi_2. \quad (9)$$

Здесь $\omega_2 = 0$ – уравнение участка границы $\partial\Omega_2$. Если края пластины не-

подвижны в тангенциальном направлении, т.е. граничные условия для u и v определяются формулой (6), то пучок допустимых функций имеет вид

$$u = \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \Phi_2 + \omega_2 \Phi_3, \quad v = \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \Phi_2 + \omega_2 \Phi_4, \quad (10)$$

в котором, как и в формуле (9), Φ_i ($i = \overline{1, 4}$) – неопределенные компоненты структурных формул, принадлежащие классу $C^2(\Omega_2)$.

Согласно RFM, для нахождения неопределенных компонент, последние представляются в виде разложения по некоторой полной системе функций:

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^n a_k^{(i)} \varphi_k^{(i)}. \quad (11)$$

Здесь $\{\varphi_k^{(i)}\}$ – известная полная система функций (например, степенные полиномы, тригонометрические функции, сплайны); $\{a_k^{(i)}\}$ – неопределенные коэффициенты, которые находятся из условия стационарности функционала (8)

$$\partial I / \partial a_k^{(i)} = 0.$$

Заметим, что иногда докритическое состояние является однородным и тогда этап решения задачи теории упругости можно исключить.

Зная усилия N_x^0 , N_y^0 , N_{xy}^0 можно найти значение критической нагрузки. Процесс нахождения критической нагрузки сводится к решению собственно задачи устойчивости, т.е. определению таких значений параметра λ из уравнения (3), при которых плоская форма равновесия перестает быть единственной. Вариационная постановка этой задачи сводится к нахождению минимума функционала [1, 4]

$$I(w) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[(M_x \chi_x + M_y \chi_y + M_{xy} \chi_{xy}) + \lambda \left(N_x^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + N_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy. \quad (12)$$

Как и в задаче теории упругости, минимизация функционала выполняется на множестве базисных функций, построенных с помощью RFM.

Структура решения, удовлетворяющая кинематическим граничным условиям (5), будет иметь вид

$$w = \omega^2 \Phi_1, \quad (13)$$

а граничным условиям (6) – вид

$$w = \omega \Phi_1, \quad (14)$$

где Φ_1 – неопределенная компонента; $\omega(x, y)$ – функция, с помощью которой определяется уравнение всей границы области.

В результате применения метода Ритца последняя задача сводится к решению задачи на собственные значения. Собственные числа находятся с помощью стандартных программ, включенных в систему POLE-RL, которые основаны на использовании метода Холецкого, преобразования Хаусхолдера и QL-метода. Наименьшее из собственных чисел и определяет значение критической нагрузки. В литературе этот метод называется энергетическим [4].

Колебания сжатых многослойных пластин. Для решения задачи о колебаниях пластины, сжимаемой контурными силами, действующими в срединной плоскости, представим функцию прогиба в виде:

$$w(x, y, t) = w(x, y) \cdot (a \cos \Lambda t + b \sin \Lambda t). \quad (15)$$

Здесь Λ – частота собственных колебаний пластины. После подстановки (15) в (3) получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \lambda_1 \left(N_x^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + N_y^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) = -\rho h \Lambda^2 w. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, нахождение решения уравнения (3) сведено к задаче на собственные значения при соответствующих граничных условиях.

Для решения данной задачи по описанному выше алгоритму вначале определяются усилия N_x^0 , N_y^0 , N_{xy}^0 . Изменение значений параметра λ_1 приводит к изменению интенсивности приложенной контурной нагрузки. Для каждого λ_1 вычисляются соответствующие значения собственных частот сжатой многослойной пластины.

Частота колебаний пластины может быть найдена с помощью метода Ритца в результате минимизации функционала [5]

$$I = \Pi_{\max} - T_{\max}, \quad (17)$$

где T_{\max} – кинетическая энергия пластины; Π_{\max} – полная потенциальная энергия пластины:

$$\begin{aligned} T_{\max} &= \frac{\rho h \Lambda^2}{2} \int_{\Omega} w^2 d\Omega, \\ \Pi_{\max} &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[(M_x \chi_x + M_y \chi_y + M_{xy} \chi_{xy}) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_1 \left(N_x^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + N_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy. \end{aligned}$$

Решая динамическую задачу, одновременно с частотами можно най-

ти и критическую нагрузку. Этот подход к нахождению критической нагрузки назван динамическим [4]. В уравнение (16) λ_1 входит как определенный параметр. Изменяя значения этого параметра, получаем совокупность собственных частот, соответствующих различным сжимающим нагрузкам. До тех пор пока все частоты получаются вещественными, пластина колеблется около положения равновесия, т.е. состояние равновесия устойчиво. С увеличением λ_1 могут быть получены нулевые или мнимые значения собственной частоты. В таком случае положение равновесия является неустойчивым. Значение параметра λ_1 , соответствующее наименьшему неотрицательному значению собственной частоты, и будет критическим.

Результаты численных исследований. Для иллюстрации предложенного метода рассмотрен ряд задач. Расчеты были проведены для следующих значений параметров $G/E_2 = 0,6$, $\nu_1 = 0,25$, $a/b = 1$, $h/2b = 0,01$. Параметр E_1/E_2 изменяется так 3; 10; 20; 30; 40.

Главной целью данного исследования являлось нахождение безразмерного параметра критической нагрузки, определяемой как

$$P_{кр} = \lambda_{кр} \frac{E_2 h^3}{4b^2}. \quad (18)$$

Решение задач выполнялось с помощью двух описанных выше подходов (энергетического и динамического).

Задача 1. Рассмотрим квадратную ортогонально армированную трехслойную пластину симметричного строения (рис. 1). Пусть пластина свободно оперта и сжимается усилиями, направленными параллельно оси Ox .

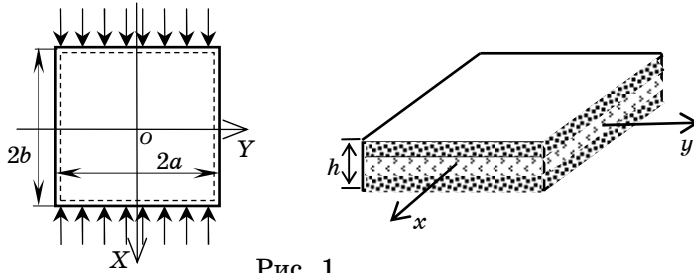


Рис. 1

свободно оперта и сжимается усилиями, направленными параллельно оси Ox . Результаты проведенных исследований о влиянии степени ортотропии материала на собственные частоты сжатой пластины представлены в

табл. 1, где для различных отношений E_1/E_2 приведены значения параметров λ_1, Λ . Критические значения параметра λ_1 выделены жирным шрифтом. Как следует из табл. 1, при увеличении степени ортотропии, критическая нагрузка увеличивается.

Наряду с применением динамического метода для нахождения безразмерного параметра критической нагрузки $\lambda_{кр}$ был использован также энергетический метод. Результаты, полученные с помощью этих двух подходов, представлены в табл. 2. Здесь же выполнено их сравнение с результатами работы [10]

Очевидно, отклонение результатов не превосходит 0,13%. Причем,

решение, полученное динамическим методом, ближе к результатам, по-

Таблица 1

E_2 / E_1	λ_1, Λ							
	40	λ_1	10	20	30	35	36	36,17
	Λ	0,161	0,126	0,078	0,034	0,013	0,002	$\Lambda < 0$
30	λ_1	10	15	20	25	27	27,94	28,95
	Λ	0,131	0,113	0,089	0,054	0,031	0,003	$\Lambda < 0$
20	λ_1	5	10	15	19	19,5	19,72	19,73
	Λ	0,121	0,098	0,068	0,027	0,015	0,0021	$\Lambda < 0$
10	λ_1	1	5	8	10	11	11,49	11,50
	Λ	0,102	0,08	0,059	0,039	0,022	0,002	$\Lambda < 0$
3	λ_1	1	4	5	5,5	5,7	5,75	5,76
	Λ	0,069	0,042	0,027	0,016	0,007	0,003	$\Lambda < 0$

Таблица 2

Метод решения	E_1 / E_2				
	3	10	20	30	40
RFM (энергетический)	5,76	11,51	19,74	27,97	36,20
RFM (динамический)	5,76	11,49	19,72	27,94	36,17
[4]	5,75	11,49	19,71	27,94	36,16

лученным в работе [10].

Рассмотрены задачи об устойчивости пластин, сжимаемых нагруз-

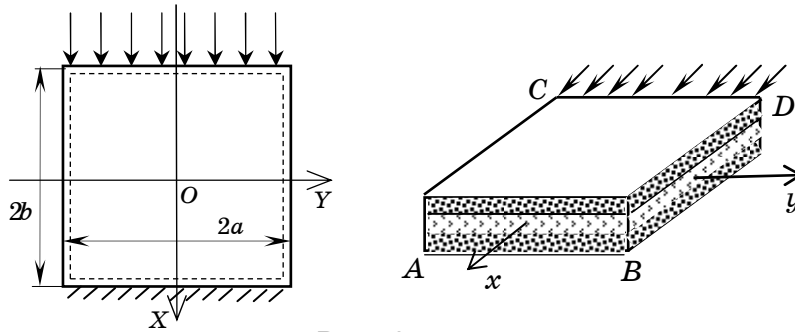


Рис. 2

кой только с одной стороны (рис. 2–3). В таком случае, нагрузка уравнивается способом закрепления пластины. Такого сорта задачи часто возникают на практике.

Задача 2. Исследуем устойчивость трехслойной квадратной пластины $(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$ с комбинированным типом граничных условий (рис. 2). Предполагается, что нагрузка приложена к стороне CD и действует параллельно оси Ox . Геометрические параметры и упругие постоянные материала, из которого изготовлена пластина, приняты такими же, как и в

предыдущей задаче (16–18).

Граничные условия последней задачи определяются так:

$$N_n = 0, \quad S_n = 0, \quad w|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ вдоль } AB \text{ } (\partial\Omega_1);$$

$$N_n = P, \quad S_n = 0, \quad w = 0, \quad M_n = 0 \text{ вдоль } CD;$$

$$N_n = 0, \quad S_n = 0, \quad w = 0, \quad M_n = 0 \text{ вдоль } AC \text{ и } BD.$$

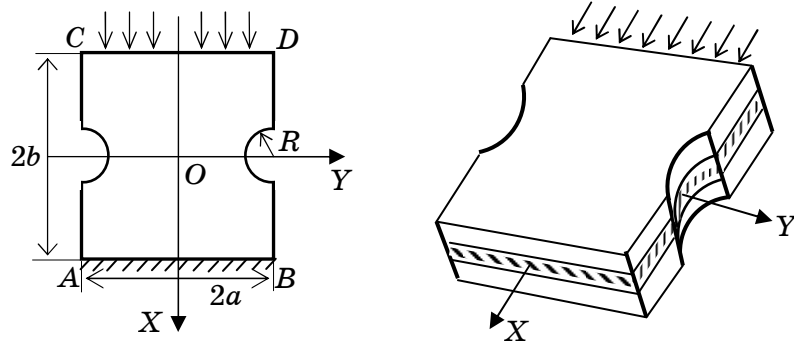


Рис. 3

В табл. 3 представлены результаты значений частот $\lambda_{кр}$ в зависимости от степени ортотропии материала и интенсивности нагрузки, опреде-

Таблица 3

E_1 / E_2	λ_1, Λ					
	40	λ_1	10	25	36	36,18
	Λ	0,161	0,105	0,013	0,002	$\Lambda < 0$
30	λ_1	10	20	27	27,94	28,95
	Λ	0,133	0,089	0,031	0,002	$\Lambda < 0$
20	λ_1	5	10	19	19,72	19,73
	Λ	0,121	0,098	0,027	0,002	$\Lambda < 0$
10	λ_1	1	5	11	11,49	11,5
	Λ	0,102	0,080	0,022	0,002	$\Lambda < 0$
3	λ_1	1	3	5	5,72	5,73
	Λ	0,069	0,052	0,027	0,002	$\Lambda < 0$

Таблица 4

Метод решения	E_1 / E_2				
	3	10	20	30	40
RFM (энергетический)	5,72	11,49	19,72	27,94	36,17
RFM (динамический)	5,72	11,49	19,72	27,95	36,18

ляемой значением параметра λ_1 , полученные динамическим методом. Как и в предыдущем случае, поставленная задача также была решена энергетическим методом. Сравнение значений критического параметра, полученного с помощью двух подходов, представлено в табл. 4.

Первый и второй методы хорошо согласуются, отличие результатов не более 0,05%. Кроме того, можно сделать вывод, что решение поставленной задачи близко к задаче 1, т.е., значение критической нагрузки пластины, нагруженной вдоль одной из сторон и уравновешенной способом закрепления (рис. 2), практически совпадает с соответствующим значением критической нагрузки пластины, нагруженной с двух сторон (табл. 2).

Задача 3. Рассмотрим пластинку с круглыми вырезами на сторонах параллельных оси абсцисс, закрепленную вдоль основания АВ и нагруженную вдоль стороны CD силами параллельными оси Ox (рис. 3). Пластина состоит из трех слоев ($0^\circ, 90^\circ, 0^\circ$), изготовленных из материала со следующими свойствами: $E_1 / E_2 = 10$, $G / E_2 = 0,6$, $\nu_1 = 0,25$ и с геометрическими параметрами (18). Граничные условия совпадают с условиями предыдущей задачи. Найдем значения $\lambda_{кр}$ с помощью динамического метода.

Согласно предложенному алгоритму решим задачу теории упругости. В данном случае структура решения задачи определяется выражениями

$$u = \Phi_2, v = \Phi_3, w = \omega\Phi_1.$$

Учитывая симметрию задачи, неопределенные компоненты $\{\Phi_2\}$, $\{\Phi_3\}$ и $\{\Phi_1\}$ будем аппроксимировать системами степенных полиномов

$$\begin{aligned} \{\Phi_2\}, \{\Phi_3\}: & 1, x, x^2, y^2, x^3, xy^2, x^4, x^2y^2, y^4, x^5, x^3y^2, xy^4... \\ \{\Phi_1\}: & y, xy, x^2y, y^3, x^3y, xy^3, x^4y, x^2y^3, y^5, x^5y, x^3y^3, xy^5... \end{aligned}$$

При решении задачи устойчивости для функции прогиба воспользуемся структурой (15), аппроксимируя неопределенную компоненту Φ_1 так же, как Φ_2 и Φ_3 . Уравнение границы области может быть построено в виде

$$\omega(x, y) = F_1 \wedge_0 F_2 \wedge_0 F_3 \wedge_0 F_4,$$

где \wedge_0 – знак R-конъюнкции [6]; F_1, F_2 – множество точек плоскости, находящихся внутри полос, описываемых соответственно неравенствами

$$F_1 = (a^2 - x^2) / (2a) \geq 0, \quad F_2 = (b^2 - y^2) / (2b) \geq 0.$$

Функции F_3, F_4 описывают внешности окружностей радиуса R , центры которых находятся в точках $(-a; 0)$ и $(a; 0)$ соответственно:

$$F_3 = \frac{(x+a)^2 + (y)^2 - R^2}{2R} \geq 0, \quad F_4 = \frac{(x-a)^2 + (y)^2 - R^2}{2R} \geq 0.$$

Исследуем устойчивость пластинки, в зависимости от отношения $R/2b$ ($0,05 \leq R/2b \leq 0,2$). Результаты расчетов представлены в табл. 5. Как видно из табл. 5 при возрастании параметра λ_1 частота собственных колебаний Λ уменьшается. Скорость уменьшения собственных частот зависит от глубины врезов. А именно, при больших значениях отношения $R/2b$ скорость уменьшения собственных частот является более медленной. Значение же безразмерного параметра критической нагрузки увеличивается с увеличением отношения $R/2b$.

Решения поставленной задачи, полученные энергетическим (п. 2.1.) и динамическим (п. 2.2.) методами совпадают до трех знаков после запя-

Таблица 5

$\frac{R}{2b}$		Динамический метод					$\lambda_{кр}$
							(энерг. метод)
0,05	λ_1	5	10	15	17,12	17,13	17,14
	Λ	0,110	0,084	0,046	0,001	$\Lambda < 0$	
0,1	λ_1	5	10	15	20,89	20,90	20,91
	Λ	0,126	0,105	0,077	0,001	$\Lambda < 0$	
0,15	λ_1	10	15	20	26,50	26,51	26,51
	Λ	0,130	0,108	0,081	0,002	$\Lambda < 0$	
0,2	λ_1	10	20	30	35,60	35,61	35,66
	Λ	0,165	0,129	0,077	0,001	$\Lambda < 0$	

той.

С целью проверки достоверности полученных результатов уменьшались размеры $R/2b$. При этом значения $\lambda_{кр}$ также уменьшались и стремились к соответствующим значениям для прямоугольной пластины, что свидетельствует о правильности полученных решений.

Для исследования практической сходимости полученных результатов был выполнен вычислительный эксперимент при использовании различного количества координатных функций. Установлено, что результаты стабилизируются в третьем знаке при сохранении количества коорди-

Таблица 6

Число координат. функций	Nw	R/b			
		0,05	0,1	0,15	0,2
64	14	16,95	20,59	26,14	35,35
84	16	16,89	20,49	26,07	35,25
100	18	16,85	20,42	26,01	35,18
121	20	16,80	20,38	25,96	35,16
144	22	16,76	20,35	25,93	35,13

натных функций для прогиба от 100 и выше (табл. 6). В табл. 6 представлены результаты для ортотропной пластины (рис. 3) со степенью ортотро-

пий $E_1 / E_2 = 10$.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано методи дослідження статичної стійкості багатошарових пластин симетричної структури зі складною плавною і різними видами граничних умов. Розроблені підходи дозволяють визначити неоднорідний докритичний стан і базуються на застосуванні теорії R-функцій та варіаційних методів. У рамках системи POLE-RL створено програмне забезпечення, що реалізує запропоновані методи, за допомогою якого розв'язано нові задачі стійкості багатошарових пластин для різних способів навантаження.

Ключові слова: теорія R-функцій, статична стійкість, багатошарові пластини, складна геометрія

SUMMARY. Investigation methods of static stability of laminated plates of symmetric structure with a complex form and the different types of boundary conditions are proposed. The developed approaches allow to determine the non-homogeneous subcritical state, and are based on applying the theory of R-functions and variational methods. The software realizing the proposed methods has been created in framework of system POLE-RL. Some new stability problems of the laminated plates for different ways of loading have been solved.

Key words: R-function method, static stability, laminated plates, complex geometry.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1967. – 266 с.
2. Курпа Л. В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний полых оболочек. – Харьков: Изд-во НТУ «ХПИ», 2009. – 408 с.
3. Курпа Л. В., Мазур О. С. Параметричні коливання пластин складної форми плану // *Машинознавство*. – 2008. – Т. 33, № 3. – С. 9–15.
4. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
5. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
6. Рвачев В. Л., Курпа Л. В. R-функции в задачах теории пластин. – К.: Наук. думка, 1987. – 174 с.
7. Awrejcewicz J., Kurpa L., Mazur O. Research of Stability and Nonlinear vibration of plates by R-Functions Method // *Modeling Simulation and control of Nonlinear Engineering Dynamical Systems*. – 2009. – P. 179–189.
8. Kormannikova E., Mamuzic I. Buckling analysis of a laminated plate // *Metalurgija*. – 2008 – Vol. 47, № 2. – P. 129–132.
9. Narita, Y., Leissa, A.W. Buckling studies for simply supported symmetrically laminated rectangular plates // *Int. J. of Mech. Sci.* – 1990. – Vol. 32, № 11. – P. 909–924.
10. Reddy J. N. *Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis*. Second edition. – USA: CRC PRESS, 2004. – 834 p.
11. Salim S., Iyengar N.G.R., Yadav D. Buckling of a laminated plates with random material characteristics // *Appl. Composite Mater.* – 1998. – Vol. 5. – P. 1–9.

Харьковский национальный технический университет

Поступила 15.10.2010

УДК 539.3

С. В. ПУЗЫРЕВ, канд. физ.-мат. наук

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ГОФРИРОВАННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В работе исследовано влияние частоты гофрировки сечения на частоты и формы свободных колебаний ортотропных некруговых цилиндрических оболочек с помощью метода сплайн-коллокации.

Ключевые слова: ортотропный, гофрированная цилиндрическая оболочка, свободные колебания, сплайн-коллокация, дискретная ортогонализация.

В связи с потребностями современной техники в последние годы большое внимание уделяется решению задач о колебаниях некруговых цилиндрических оболочек [12–16]. При этом для их решения широко используются системы ортогональных функций, в частности системы сплайн-функций [7]. Основное преимущество последних обусловлено устойчивостью относительно локальных возмущений, более удовлетворительной сходимостью в отличие от случая применения многочленов как функций аппроксимации, простотой и удобством при вычислении и реализации сплайн-функций на ПК

В данной статье для решения указанного класса задач предлагается численно-аналитический подход на основе метода сплайн-коллокации. Этот подход ранее применялся для решения статических задач теории оболочек [3, 6, 8–11].

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о свободных колебаниях ортотропной цилиндрической оболочки переменной толщины $h(s, t)$ и произвольного очертания поперечного сечения. За координатные линии выберем длины дуг по образующей s и направляющей t .

По классической теории Кирхгофа-Лява [1, 2, 4] уравнения, описывающие свободные колебания цилиндрических оболочек, будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial S}{\partial t} &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial N_t}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial s} + k_t \left(Q_t + \frac{\partial H}{\partial s} \right) &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial Q_s}{\partial s} + \frac{\partial Q_t}{\partial t} - k_t N_t &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial t} &= Q_s, \quad \frac{\partial M_t}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial s} = Q_t, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ – плотность материала, h – толщина оболочки, τ – время.

Для нормальных N_s , N_t и сдвигающих усилий S , изгибающих M_s , M_t и крутильных моментов H справедливы материальные соотношения

вида:

$$\begin{aligned} N_s &= C_{11}\varepsilon_s + C_{12}\varepsilon_t, & M_s &= D_{11}\kappa_s + D_{12}\kappa_t, \\ N_t &= C_{12}\varepsilon_s + C_{22}\varepsilon_t, & M_t &= D_{12}\kappa_s + D_{22}\kappa_t, \\ S &= C_{66}\varepsilon_{st}, & H &= 2D_{66}\kappa_{st}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $C_{ij} = B_{ij}h(s,t)$ и $D_{ij} = B_{ij}h^3(s,t)/12$ ($\{i, j\} = \{1, 2, 6\}$) – жесткости оболочки на растяжение-сжатие и изгиб соответственно; $B_{11} = E_1/(1-\nu_1\nu_2)$, $B_{22} = E_2/(1-\nu_1\nu_2)$, $B_{12} = \nu_2 B_{11} = \nu_1 B_{22}$, $B_{66} = G_{12}$.

Выражения для компонент деформаций срединной поверхности оболочки имеют такой вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s}, & \varepsilon_t &= \frac{\partial v}{\partial t} + k_t w, & \varepsilon_{st} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s}, \\ \kappa_s &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, & \kappa_t &= -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, & \kappa_{st} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $u(s,t,\tau)$, $v(s,t,\tau)$ и $w(s,t,\tau)$ – перемещения точек срединной поверхности оболочки. В выражениях для изгибных деформаций не учитываются тангенциальные перемещения [1].

Подставив (3) в (2) и найденные значения в (1), получим три эквивалентных дифференциальных уравнения в частных производных с переменными коэффициентами относительно трех неизвестных перемещений u , v и w :

$$\begin{aligned} &C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial C_{66}}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial C_{11}}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial s} + (C_{66} + C_{12}) \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial s} + \frac{\partial C_{12}}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} + \\ &\quad + \frac{\partial C_{66}}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial s} + k_t C_{12} \frac{\partial w}{\partial s} + k_t \frac{\partial C_{12}}{\partial s} w = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \\ &C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial C_{22}}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\partial C_{66}}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial s} + (C_{66} + C_{12}) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} + \\ &\quad + \frac{\partial C_{66}}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial C_{12}}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial s} - k_t D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} - k_t \frac{\partial D_{22}}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \\ &\quad - k_t (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial s^2} - 4k_t \frac{\partial D_{66}}{\partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial s} + k_t C_{22} \frac{\partial w}{\partial t} - \\ &\quad - k_t \frac{\partial D_{12}}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \left(k_t \frac{\partial C_{22}}{\partial t} + k_t' C_{22} \right) w = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} \\ &D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + 2 \frac{\partial D_{22}}{\partial t} \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial s^2} + 2 \frac{\partial (D_{12} + 2D_{66})}{\partial s} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial s} + \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 D_{12}}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 D_{22}}{\partial t^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial (D_{12} + 2D_{66})}{\partial t} \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial s^2} + 4 \frac{\partial^2 D_{66}}{\partial t \partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial s} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + 2 \frac{\partial D_{11}}{\partial s} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + \left(\frac{\partial^2 D_{11}}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 D_{12}}{\partial t^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + k_t^2 C_{22} w + \\
& + k_t C_{22} \frac{\partial v}{\partial t} + k_t C_{12} \frac{\partial u}{\partial s} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Для решения уравнений (4) на контурах оболочки необходимо задать по четыре граничных условия, которые в дальнейшем определяются через перемещения. Например, для контура $s = const$ граничные условия могут иметь вид

$$u = v = w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \tag{5}$$

в случае жестко закрепленного контура (**C**);

$$u = v = w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0 \tag{6}$$

в случае шарнирно закрепленного контура (**Sc**);

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 0, \quad v = w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0 \tag{7}$$

в случае шарнирно опертого контура (**S**);

$$\begin{aligned}
N_s = 0, \quad M_s = 0, \\
S + 2k_t H = 0, \quad Q_s + \frac{\partial H}{\gamma \partial \theta} = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

в случае свободного контура (**F**).

Аналогичные условия могут быть заданы и на контурах $t = const$. Они получаются из уравнений (5) – (8), если в них сделать замену $s \leftrightarrow t$, $u \leftrightarrow v$, $k_t \rightarrow 0$. Кроме того, на контурах $t = const$ можно задать условия симметрии (**Sm**):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} = 0. \tag{9}$$

На контурах оболочек могут быть заданы произвольные комбинации граничных условий вида (5) – (9). Например, **CCCC** – жестко закрепленная по всем контурам открытая цилиндрическая оболочка; **CSCC** – заземленная на трех контурах и опертая на одном криволинейном торце открытая цилиндрическая оболочка; **CSCS** – заземленная на прямолинейных контурах и шарнирно опертая по криволинейным торцам открытая цилиндрическая оболочка; **SCSC** – шарнирно на прямолинейных контурах и заземленная по криволинейным торцам открытая цилиндрическая оболочка.

Методика решения. В дальнейшем мы будем рассматривать стационарные колебания оболочки. Тогда искомые перемещения можно будет представить в виде:

$$\begin{aligned}
u(s, t, \tau) &= \tilde{u}(s, t)e^{i\omega_0\tau}, \\
v(s, t, \tau) &= \tilde{v}(s, t)e^{i\omega_0\tau} \\
w(s, t, \tau) &= \tilde{w}(s, t)e^{i\omega_0\tau},
\end{aligned} \tag{10}$$

где $\tilde{u}(s, t)$, $\tilde{v}(s, t)$ и $\tilde{w}(s, t)$ – амплитуды перемещений, ω_0 – частота свободных колебаний оболочки.

Пусть направляющая оболочки задана параметрически $x = f_1(\theta)$, $y = f_2(\theta)$, или в полярной системе координат $r = r(\theta)$, где θ – параметр направляющей. Тогда элемент дуги направляющей $dt = \gamma(\theta)d\theta$, где $\gamma(\theta) = \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}$ или $\gamma(\theta) = \sqrt{r^2 + r'^2}$.

Выразив производные по дуге направляющей через производные по ее параметру:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial^k}{\partial t^k} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} \right) \quad (k > 1) \tag{11}$$

систему уравнений (4) с учетом (10) и (11) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= L_1(u, v, w, \omega_0), \\
\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= L_2(u, v, w, \omega_0), \\
\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} &= L_3(u, v, w, \omega_0),
\end{aligned} \tag{12}$$

где $L_i(u, v, w, \omega_0)$ ($i=1..3$) – линейные дифференциальные операторы в частных производных.

Неизвестные перемещения представим в виде [3, 6, 8–11]:

$$\begin{aligned}
u(\theta, s) &= \sum_{j=-\alpha}^{N+\beta} u_j(\theta)\varphi_{1j}(s), \\
v(\theta, s) &= \sum_{j=-\alpha}^{N+\beta} v_j(\theta)\varphi_{2j}(s), \\
w(\theta, s) &= \sum_{i=-\gamma}^{N+\delta} w_i(\theta)\varphi_{3i}(s),
\end{aligned} \tag{13}$$

где $u_j(\theta)$, $v_j(\theta)$ ($j = -\alpha..N+\beta$) и $w_i(\theta)$ ($i = -\gamma..N+\delta$) – искомые функции; $\varphi_{1j}(s)$, $\varphi_{2j}(s)$ – функции, построенные с помощью линейных комбинаций В-сплайнов третьей степени ($N \geq 4$), $\varphi_{3i}(s)$ – функции, построенные с помощью линейных комбинаций В-сплайнов пятой степени ($N \geq 6$), которые точно удовлетворяют граничным условиям при $s = const$ [7, 15]. При этом

$\alpha = \gamma = 0$ или $\beta = \delta = 0$ в случае краевых условий вида (5) – (7), и $\alpha = 1$, $\gamma = 2$ или $\beta = 1$, $\delta = 2$ в случае краевых условий вида (8).

Подставив (13) в уравнения (12), будем требовать, чтобы они удовлетворялись в заданных точках коллокации [5] $\xi_k \in [0, L]$, $k = 0..N$. В случае четного числа узлов сетки ($N = 2n + 1$, $n \geq 3$) и при условии, что узлы коллокации удовлетворяют требованиям: $\xi_{2q} \in [s_{2q}, s_{2q+1}]$, $\xi_{2q+1} \in [s_{2q}, s_{2q+1}]$ ($q = 0..n$), на отрезке $[s_{2q}, s_{2q+1}]$ имеем два узла коллокации, а на соседних отрезках $[s_{2q+1}, s_{2q+2}]$ узлы коллокации отсутствуют. На каждом из отрезков $[s_{2q}, s_{2q+1}]$ точки коллокации выбираются следующим образом: $\xi_{2q} = s_{2q} + z_1 h$, $\xi_{2q+1} = s_{2q} + z_2 h$ ($q = 0..n$), где z_1 и z_2 – корни полинома Лежандра второго порядка на отрезке $[0, 1]$, которые равны: $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ и $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$. Такой выбор точек коллокации является оптимальным и существенно повышает порядок точности аппроксимации. После всех преобразований получим систему $N + 1 + 2(\alpha + \beta) + \gamma + \delta$ линейных дифференциальных уравнений относительно u_i , v_i и w_i которую можно записать в нормальной форме:

$$\frac{d\bar{Y}}{d\theta} = A(\theta, \omega_0)\bar{Y} \quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2), \quad (15)$$

где $\bar{Y}^T = \{\bar{u}, \bar{u}', \bar{v}, \bar{v}', \bar{w}, \bar{w}', \bar{w}'', \bar{w}'''\}^T$ – вектор искомых функций, $A(\theta, \omega_0)$ – квадратная матрица порядка $8(N + 1) + 4(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$.

Граничные условия (5) – (9) для системы (14) можно записать в виде

$$\mathbf{B}_1 \bar{Y}(\theta_1) = \bar{0}, \quad \mathbf{B}_2 \bar{Y}(\theta_2) = \bar{0}. \quad (16)$$

Задача на собственные значения для системы ОДУ (15) с граничными условиями (16) решалась методом дискретной ортогонализации вместе с методом пошагового поиска [4, 5].

Численные результаты и их анализ. На основе вышеописанной методики были рассчитаны частоты открытых ортотропных гофрированных оболочек постоянной толщины. Уравнение срединной поверхности оболочки в полярной системе координат имеет вид:

$$r(\varphi) = R + r_0 \cos(k\varphi), \quad (17)$$

где R – радиус базового кругового цилиндра, относительно которого колеблется гофр в форме косинусоиды с амплитудой r_0 и частотой k .

В расчетах не учитывались инерционные члены в первых двух уравнениях движения (4) ($\partial^2 u / \partial^2 \tau = \partial^2 v / \partial^2 \tau = 0$), т.е. рассматривались изгибные колебания оболочек. Характеристики оболочки были такими: $R = 0,044$ м; $r_0 = 0,005$ м; $L = 0,12$ м – длина оболочки; $h_0 = 0,00455$ м – толщина оболоч-

ки постоянной толщины $E_1 = 4,76 \cdot 10^{10}$ Па, $E_2 = 2,07 \cdot 10^{10}$ Па, $G_{12} = 0,531 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu_1 = 0,149$, $\nu_2 = 0,065$, $\rho = 1880$ кг/м³.

На рис. 1 изображены сечения гофрированных цилиндров при различных значениях частоты гофра. В таблице представлены безразмерные частоты $\bar{\omega}_i = \omega_i L \sqrt{\rho(1-\nu_1\nu_2)}/E_1$ таких оболочек при различных типах за-

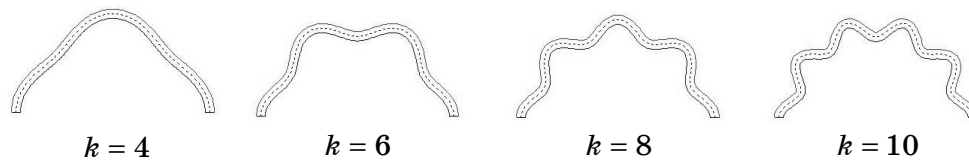


Рис. 1

крепления контуров оболочек. Все расчеты выполнены при $N = 12$ точках коллокации. На рис. 2, 3 представлены графики зависимости первых двух частот свободных колебаний гофрированных цилиндрических оболочек от частоты гофрировки сечения k .

i		k				
		2	4	6	8	10
CCCC	1	0,6327	0,6277	2,1438	3,5062	4,0788
	2	1,0662	1,3591	2,2421	3,5065	4,2413
	3	1,4269	1,4753	2,5502	3,6962	4,4341
	4	1,4439	1,6386	2,5878	3,7024	4,7129
CSCC	1	0,5944	0,5471	2,1108	3,4460	4,0212
	2	0,9793	1,2869	2,2175	3,5069	4,1864
	3	1,3786	1,4660	2,4886	3,6792	4,3735
	4	1,4093	1,5858	2,5357	3,6829	4,6107
CSCS	1	0,5649	0,4805	2,0847	3,4216	3,9949
	2	0,9064	1,2262	2,1973	3,4855	4,1077
	3	1,3305	1,4601	2,4358	3,6234	4,3497
	4	1,3959	1,5467	2,4927	3,6682	4,4994
SCSC	1	1,0623	1,2148	2,1178	3,5107	3,4855
	2	1,3452	1,3655	2,1544	3,5149	3,6647
	3	1,3472	1,5833	2,2566	3,6504	4,0527
	4	1,6627	1,7498	2,4056	3,6709	4,1151

Из данных таблицы и рис. 2, 3 следует, что при небольшой частоте гофрировке существенную роль играет тип закрепления торцов. При малой частоте гофрировке жестко заземленная оболочка (CCCC) будет иметь заметно меньшие резонансные частоты, чем оболочка с шарнирно опертыми прямолинейными торцами (SCSC). Но с увеличением частоты гофра – т.е. при уменьшении длины одной его полуволны – закрепление контуров влияет все сильнее, и резонансные частоты оболочки распреде-

ляются согласно жесткости закрепления. Таким образом, подбирая частоту гофрировки оболочки, можно в широких пределах управлять ее собственным спектром частот, в том числе повысить прочность оболочечной

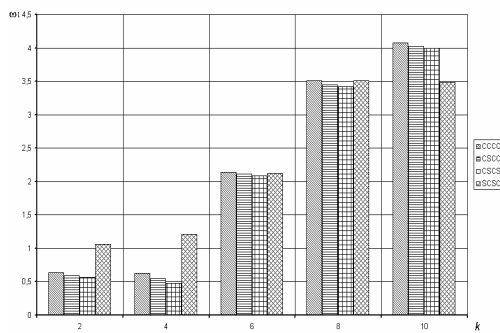


Рис. 2

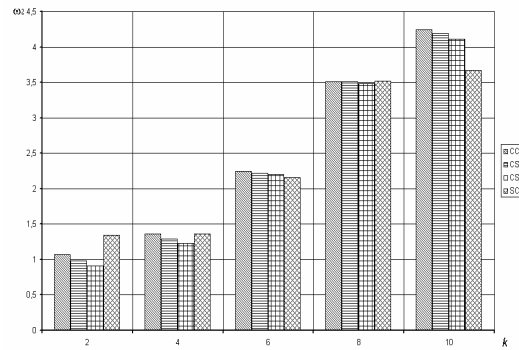


Рис. 3

конструкции при меньшей жесткости закрепления.

РЕЗЮМЕ. У роботі досліджено вплив частоти гофрування перерізу на частоти та форми вільних коливань ортотропних некругових циліндричних оболонок за допомогою методики сплайн-колокації.

Ключові слова: ортотропний, гофрована циліндрична оболонка, вільні коливання, сплайн-колокація, дискретна ортогоналізація

SUMMARY. In this work is investigated the influence of frequency crimped of the cross-section on the free vibration frequencies and forms of orthotropic non-circular cylindrical shells using the spline-collocation method.

Key words: orthotropic, crimped cylindrical shell, free vibration, spline-collocation, discrete orthogonalization

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
2. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций – М.: Машиностроение, 1977. – С. 331–344.
3. Будаков В. Д., Григоренко А. Я., Пузырев С. В. Решение задачи о свободных колебаниях прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины // Прикладная механика. – 2007. – 43, № 4. – С. 89–98.
4. Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – К.: Наук. думка, 1986. – 171 с.
5. Григоренко Я. М., Мукоед А. П. Решение задач теории пластин и оболочек на ЭВМ. – К.: Виша шк., 1979. – 280 с.
6. Григоренко Я. М., Григоренко А. Я., Захарийченко Л. И. Решение задач о напряженно-деформированном состоянии некруговых цилиндрических оболочек с гофрированным эллиптическим поперечным сечением // Прикладная механика. – 2006. – Т. 42, № 9. – С. 70.
7. Завьялов Ю. С., Квасов Ю. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
8. Grigorenko A. Ya., Efimova T. L. Application of Spline-Approximation for Solving the Problems on Natural Vibrations of Rectangular Plates of Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 10. – P. 1160.
9. Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., Zakhariychenko L. I. Calculation of Stress-Strain State of Orthotropic Closed and Open Non-Circular Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. –

2005. – 41, N 7. – P. 778.

10. *Grigorenko Ya. M., Kryukov N. N., Yakovenko N. S.* To Solving the Boundary Problems of the Theory of Layered Orthotropic Trapezoidal Plates of Variable Thickness on the Base of Spline-Approximation // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – 41, N 4. – P. 413.

11. *Grigorenko Ya. M., Yaremchenko S. N.* Studying the Stress State of Orthotropic Non-Circular Cylindrical Shells of Variable Thickness in the Refined Statement // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – 40, N 3. – P. 266.

12. *Kumar, V.; Singh A. V.* *Vibration Analysis Of Non-circular Cylindrical Shells Using Bezier Functions* // *J. Sound and Vibr.* – 1993. – V 161, Is. 2. – P. 333–354.

13. *Massalas, C.; Soldatos, K.; Tzivanidis G.* Free vibrations of non-circular cylindrical panels with arbitrary boundary conditions. // *J. Sound and Vibr.* – 1980. – V. 69, Is. 3. – P. 491–495.

14. *Srinivasan, R. S.; Bobby, W.* Free vibration of non-circular cylindrical shell panels // *J. Sound and Vibr.* – 1976. – V. 46, Is. 1. – P. 117–126.

15. *Suzuki, K. Leissa, A. W.* Exact solutions for the free vibrations of open cylindrical shells with circumferentially varying curvature and thickness // *J. Sound and Vibr.* – 1986. – V. 107, Is. 1. – P. 1–15.

16. *Yamada, G.; Irie, T.; Tagawa, Y.* Free vibration of non-circular cylindrical shells with variable circumferential profile // *J. Sound and Vibr.* – 1984. – V. 95, Is. 1. – P. 117–126.

Николаевский национальный университет

Поступила 15.09.2010

УДК 539.3

А. Э. БАБАЕВ, д-р техн. наук,
И. В. ЯНЧЕВСКИЙ, канд. техн. наук

ИЗЛУЧЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ЭЛЕКТРОУПРУГИМ ЦИЛИНДРОМ С ПРОВОДНОЙ ЦЕПЬЮ

Решена нестационарная задача излучения волн бесконечно длинным толстостенным цилиндрическим пьезоэлектрическим преобразователем в бесконечной жидкой среде. Рассмотрено влияние колебательного контура с сосредоточенными параметрами. Нестационарный процесс моделировался уравнениями связанной теории электроупругости, акустического приближения и квазистатической теории для электрической цепи. Метод решения основан на интегральном преобразовании Лапласа во времени, который позволил аналитически свести задачу к решению системы интегральных уравнений Вольтерра с запаздывающими аргументами. Представлены и проанализированы полученные числовые результаты.

Ключевые слова: гидроэлектроупругость, цилиндрический пьезоэлектрический преобразователь, нестационарные колебания, акустические волны, уравнения Вольтерра

Широкое распространение пьезоэлектрических преобразователей энергии обуславливает интенсивное развитие теорий электроупругости и гидроэлектроупругости. Большинство исследований рассматривают периодические процессы в электроупругих телах и гидроэлектроупругих системах. Функциональные возможности ультразвуковых устройств, содержащих пьезоэлектрические преобразователи энергии, могут быть значительно расширены при функционировании в переходных режимах. Этим обусловлен повышенный интерес к задачам гидроэлектроупругости в нестационарной постановке. К настоящему времени исследования по этой проблеме обобщены в монографии [2] и обзоре [5]. Из публикаций последних лет по граничной электроупругости отметим [8, 9]. К настоящему времени исследовались процессы, возникающие в пьезоэлектрических излучателях в предположении возбуждения разностью потенциалов, подводимом к его токопроводящим покрытиям. В реальных условиях электромеханические преобразователи взаимодействуют со средой и связаны с генераторами проводными линиями. Последние могут быть представлены линейными электрическими цепями с сосредоточенными параметрами. Эти цепи включают индуктивности, емкости и сопротивления (колебательный контур) или распределенные параметры (кабели). В результате излучатель возбуждается электрическим импульсом, отличным от входного сигнала. В публикации [1] изучалось влияние кабеля на работу тонкостенного цилиндрического излучателя при нестационарном возбуждении. Эти исследования выполнены в рамках теории тонкостенных электроупругих оболочек [4]. Применение этой модели лишает возможности рассматривать волновые процессы в пьезоэлектрическом преобразователе. В данной работе предложен эффективный метод решения задачи излучения волн толстостенным электроупругим цилиндром, погруженным в

жидкость и связанным с генератором нестационарных возмущений проводной линией с сосредоточенными параметрами.

Математическая модель. Исследуется гидроэлектроупругая система, которая состоит из бесконечно-длинного толстостенного радиально-поляризованного цилиндрического пьезоэлектрического преобразователя, погруженного в бесконечную жидкую среду (рис. 1). Во внутреннем объеме цилиндра вакуум. На внутренней и внешней поверхностях преобразователя имеются сплошные токопроводящие слои, которые связаны с источником нестационарного электрического импульса проводной линией, состоящей из последовательно соединенных индуктивности, емкости и сопротивления (последовательный колебательный контур). Выбор проводной линии с сосредоточенными параметрами не умаляет общности предложенного метода решения.

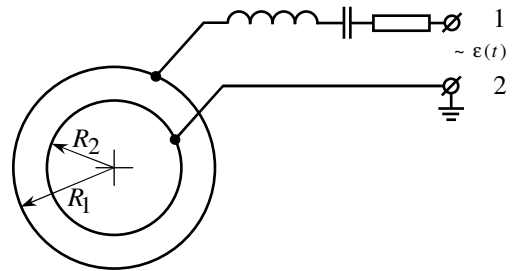


Рис. 1

Предполагается, что жидкость является идеальной сжимаемой средой и при рассмотрении ее движения используется акустическая теория. Для описания электромеханических полей в цилиндрическом излучателе применяются уравнения линейной теории электроупругости [4]. Процессы в проводной линии рассматривают как квазистатические (т.е. мгновенные значения электрических переменных описываются согласно закону Кирхгофа).

Радиальную координату обозначим через r , время – через t , геометрические и физические характеристики электроупругого цилиндра – через R_1 и R_2 (внешний и внутренний радиусы); γ – плотность; c_{33}^E , c_{13}^E , c_{11}^E , c_{12}^E – модули упругости; e_{31} , e_{33} – пьезомодули; d_{33} – пьезоэлектрическая постоянная; ϵ_{33}^s – диэлектрическая проницаемость. Параметры акустической среды определяются плотностью ρ и скоростью звука c . Параметры колебательного контура – это L^* (индуктивность), C^* (емкость) и R^* (сопротивление).

С начального момента времени ($t = 0$) к клеммам проводной линии подводится электрический импульс, форма которого описывается функцией $\epsilon(t) \cdot H(t)$, где $H(t)$ – функция Хевисайда.

К неизвестным переменным, характеризующим переходные процессы в пьезоэлектрическом преобразователе, относятся: u_r – радиальная составляющая вектора перемещения; σ_{rr} – нормальное напряжение в радиальном направлении; E_r , D_r и Ψ – интенсивность, индуктивность и потенциал электрического поля; U_p – падение напряжения между электродами цилиндра. В акустической среде: V_r – радиальная скорость его частиц; p – давление; ϕ – волновой потенциал. В проводной цепи U_{L^*} ,

U_{C^*} и U_{R^*} – падения напряжений на индуктивности, емкости и сопротивлении; I – электрический ток в этих элементах.

Выполним обезразмеривание параметров, согласно которому переменные u_r , r , R_1 и R_2 отнесем к R_1 ; p и σ_{rr} – к ρc^2 ; E_r – к $1/d_{33}$; D_r – к ϵ_{33}^s/d_{33} ; Ψ , U_P , U_{L^*} , U_{C^*} и U_{R^*} – к R_1/d_{33} ; I – к $c\epsilon_{33}^s R_1/d_{33}$; V_r – к c ; ϕ – к cR_1 , а t – к R_1/c .

В рамках принятых допущений исходная система уравнений, описывающая движение преобразователя, вынужденную электростатику и зависимости для электроупругого цилиндра, имеют вид [4]:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - a_1 \frac{u_r}{r^2} - a_2 \frac{\partial E_r}{\partial r} - a_3 \frac{1}{r} E_r = a_4 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r E_r) = -a_5 \frac{\partial u_r}{\partial r} - a_6 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right); \quad (2)$$

$$E_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}; \quad (3)$$

$$\sigma_{rr} = a_7 \frac{\partial u_r}{\partial r} + a_8 \frac{u_r}{r} - a_9 E_r; \quad (4)$$

$$D_r = E_r + a_5 \frac{u_r}{r} + a_6 \frac{\partial u_r}{\partial r}. \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{c_{11}^E}{c_{33}^E}, & a_2 &= \frac{e_{33}}{c_{33}^E d_{33}}, & a_3 &= \frac{e_{33} - e_{31}}{c_{33}^E d_{33}}, \\ a_4 &= \frac{\gamma c^2}{c_{33}^E}, & a_5 &= \frac{e_{31} d_{33}}{\epsilon_{33}^s}, & a_6 &= \frac{e_{33} d_{33}}{\epsilon_{33}^s}, \\ a_7 &= \frac{c_{33}^E}{\rho c^2}, & a_8 &= \frac{c_{13}^E}{\rho c^2}, & a_9 &= \frac{e_{33}}{d_{33} \rho c^2}. \end{aligned}$$

Волновое уравнение относительно потенциала акустической среды ϕ имеют вид

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad (6)$$

причем радиальная скорость его частиц V_r и давление p выражаются формулами

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad p = -\frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (7)$$

Уравнение для электрического тока в последовательном колебатель-

ном контуре и пьезоэлектрическом преобразователе в рамках закона Кирхгофа имеет вид

$$U_P + U_{L^*} + U_{C^*} + U_{R^*} = \varepsilon(t) H(t), \quad (8)$$

где

$$U_P = \Psi \Big|_{r=R_1} - \Psi \Big|_{r=R_2}, \quad U_{L^*} = \lambda_L \frac{dI}{dt},$$

$$\frac{dU_{C^*}}{dt} = \lambda_C I, \quad U_{R^*} = \lambda_R I; \quad (9)$$

$\lambda_L = L * c^2 \varepsilon_{33}^s / R_1$, $\lambda_C = \varepsilon_{33}^s R_1 / C^*$ и $\lambda_R = R * c \varepsilon_{33}^s$ – постоянные, $R_1 = 1$.

Предполагается безотрывность контакта внешней поверхности цилиндра ($r = R_1$) с акустической средой и отсутствие нагрузки на внутренней поверхности ($r = R_2$):

$$V_r \Big|_{r=R_1} = \frac{\partial u_r}{\partial t} \Big|_{r=R_1}, \quad \sigma_{rr} \Big|_{r=R_1} = -p \Big|_{r=R_1}, \quad \sigma_{rr} \Big|_{r=R_2} = 0. \quad (10)$$

Частицы акустической среды на бесконечности сохраняют невозмущенное состояние. Равные значения электрических токов в проводной линии и пьезоэлектрическом излучателе обеспечивается уравнением

$$\frac{dD_r}{dt} \Big|_{r=R_1} = -\frac{1}{2\pi R_1} I. \quad (11)$$

Предполагаются нулевые начальные условия.

Метод решения. Для решения задачи исходные уравнения и граничные условия (1)–(11) будем трансформировать в пространство изображений с использованием интегрального преобразования Лапласа по времени с учетом нулевых начальных условий. В результате уравнение (2) для электрической напряженности поля E_r^L принимает вид

$$E_r^L = -a_5 \frac{u_r^L}{r} - a_6 \frac{du_r^L}{dr} + \frac{1}{rs} C^L(s), \quad (12)$$

в котором индекс L обозначает соответствующие трансформанты; s – параметр преобразования; $C^L(s)$ – неизвестная функция s .

Подставим выражение (12) в преобразованное по Лапласу уравнение (1), получим уравнение относительно одного неизвестного $u_r^L(s, r)$:

$$\frac{d^2 u_r^L}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r^L}{dr} - \left(\frac{v^2}{r^2} + \lambda^2 s^2 \right) u_r^L = \beta \frac{1}{sr^2} C^L(s), \quad (13)$$

где

$$\nu = \sqrt{\frac{c_{11}^E \varepsilon_{33}^s + e_{31}^2}{c_{33}^E \varepsilon_{33}^s + e_{33}^2}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\gamma c^2 \varepsilon_{33}^s}{c_{33}^E \varepsilon_{33}^s + e_{33}^2}}, \quad \beta = \frac{-e_{31} \varepsilon_{33}^s}{(c_{33}^E \varepsilon_{33}^s + e_{33}^2) d_{33}}.$$

Общее решение уравнения (13) находится методом вариации постоянных

$$u_r^L = C^L(s) \frac{1}{s} \left\{ A^L(s) e^{-s\lambda(R_1-r)} f_{0v}^L(s, \lambda r) + B^L(s) e^{-s\lambda(r-R_2)} \times \right. \\ \left. \times g_{0v}^L(s, \lambda r) - \beta \left[f_{0v}^L(s, \lambda r) W^L(s, \lambda r) + g_{0v}^L(s, \lambda r) V^L(s, \lambda r) \right] \right\}. \quad (14)$$

Здесь $A^L(s)$ и $B^L(s)$ – неизвестные функции параметра s ,

$$f_{mv}^L(s, \lambda r) = \frac{1}{s^m} e^{-s\lambda r} I_\nu(s\lambda r), \quad g_{mv}^L(s, \lambda r) = \frac{1}{s^m} e^{s\lambda r} K_\nu(s\lambda r); \quad (15)$$

$$V^L(s, \lambda r) = \int_{R_2}^r e^{-s\lambda x} \frac{1}{x} I_\nu(s\lambda x) dx, \quad W^L(s, \lambda r) = \int_r^{R_1} e^{s\lambda x} \frac{1}{x} K_\nu(s\lambda x) dx.$$

I_ν и K_ν – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода.

Решение преобразованного по Лапласу волнового уравнения (6) запишется так:

$$\varphi^L = C^L(s) \frac{1}{s} D^L(s) e^{-s(r-R_1)} g_{00}^L(s, r). \quad (16)$$

Функции $A^L(s)$, $B^L(s)$, $C^L(s)$ и $D^L(s)$ находятся из удовлетворения граничным условиям. Формула (16) учитывает затухание возмущений на бесконечности.

На основании общих решений (14) и (16), зависимостей (4) и (7) неизвестные значения σ_{rr}^L , V_r^L и p^L могут быть представлены формулами

$$\sigma_{rr}^L = C^L(s) \left\{ A^L(s) e^{-s\lambda(R_1-r)} F^L(s, \lambda r) + B^L(s) e^{-s\lambda(r-R_2)} G^L(s, \lambda r) - \right. \\ \left. - \beta \left[F^L(s, \lambda r) W^L(s, \lambda r) + G^L(s, \lambda r) V^L(s, \lambda r) \right] - \mu \frac{1}{rs} \right\}; \quad (17)$$

$$V_r^L = -C^L(s) \left[D^L(s) e^{-s(r-R_1)} g_{01}^L(s, r) \right],$$

$$p^L = -C^L(s) \left[D^L(s) e^{-s(r-R_1)} g_{00}^L(s, r) \right],$$

где

$$F^L(s, \lambda r) = \xi f_{0v+1}^L(s, \lambda r) + \zeta \frac{1}{r} f_{1v}^L(s, \lambda r),$$

$$G^L(s, \lambda r) = -\xi g_{0v+1}^L(s, \lambda r) + \zeta \frac{1}{r} g_{1v}^L(s, \lambda r); \quad (18)$$

$$\xi = \frac{c_{33}^E \varepsilon_{33}^s + e_{33}^2}{\rho c^2 \varepsilon_{33}^s} \lambda, \quad \zeta = \frac{c_{33}^E \varepsilon_{33}^s + e_{33}^2}{\rho c^2 \varepsilon_{33}^s} \nu + \frac{c_{13}^E \varepsilon_{33}^s + e_{33} e_{31}}{\rho c^2 \varepsilon_{33}^s}, \quad \mu = \frac{e_{33}}{\rho c^2 d_{33}}.$$

Согласно формул (3) и (12) потенциал Ψ^L может быть выражен через перемещения u_r^L :

$$\Psi^L(s, r) = a_6 \left[u_r^L(s, r) - u_r^L(s, R_2) \right] + a_5 \int_{R_2}^r \frac{u_r^L(s, x)}{x} dx - C^L(s) \frac{1}{s} \ln \frac{r}{R_2} + \Psi^L(s, R_2). \quad (19)$$

Принимая во внимание формулы (9), (14) и (19) для падения напряжения через электроупругий цилиндр имеем

$$U_P^L = C^L(s) \frac{1}{s} \left[\Phi^L(s) - \ln \frac{R_1}{R_2} \right], \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi^L &= A^L(s) \left[a_6 f_{0v}^L(s, \lambda R_1) + a_5 V^L(s, \lambda R_1) \right] - \\ &- B^L(s) \left[a_6 g_{0v}^L(s, \lambda R_2) - a_5 W^L(s, \lambda R_2) \right] + \\ &+ a_6 \left[-A^L(s) f_{0v}^L(s, \lambda R_2) + B^L(s) g_{0v}^L(s, \lambda R_1) \right] e^{-s\lambda(R_1 - R_2)} + \\ &+ \beta a_6 \left[-g_{0v}^L(s, \lambda R_1) V^L(s, \lambda R_1) + \right. \\ &\left. + f_{0v}^L(s, \lambda R_2) W^L(s, \lambda R_2) \right] - a_5 \beta Z^L(s); \\ Z^L(s) &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{x} I_v(s\lambda x) \int_x^{R_1} \frac{1}{y} K_v(s\lambda y) dy dx + \\ &+ \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{x} K_v(s\lambda x) \int_{R_2}^x \frac{1}{y} I_v(s\lambda y) dy dx. \end{aligned} \quad (21)$$

На основании уравнений (3), (5), (11) и (19), электрический ток I^L в проводной цепи и пьезоэлектрическом преобразователе может быть выражен через неизвестную функцию $C^L(s)$:

$$I^L = -\frac{2\pi}{R_1} C^L(s),$$

позволяющую представить падения напряжений $U_{L^*}^L$, $U_{C^*}^L$ и $U_{R^*}^L$ как

$$U_{L^*}^L = b_1 s C^L(s), \quad U_{C^*}^L = b_2 \frac{1}{s} C^L(s), \quad U_{R^*}^L = b_3 C^L(s), \quad (22)$$

где b_1 , b_2 и b_3 – постоянные: $b_1 = -\frac{2\pi}{R_1} \lambda_L$; $b_2 = -\frac{2\pi}{R_1} \lambda_C$; $b_3 = -\frac{2\pi}{R_1} \lambda_R$.

Подставив выражения (14), (16), (20) и (22) в преобразованные по

Лапласу краевые условия (8) и (10), получим систему трех алгебраических уравнений относительно неизвестных $A^L(s)$, $B^L(s)$ и $D^L(s)$ и уравнение для $C^L(s)$:

$$\begin{aligned} X_1^L(s) - B^L(s) e^{-s\lambda(R_1-R_2)} G^L(s, \lambda R_1) \\ = A^L(s) F^L(s, \lambda R_1) - D^L(s) g_{00}^L(s, R_1), \\ A^L(s) f_{0v}^L(s, \lambda R_1) + D^L(s) g_{01}^L(s, R_1) = \\ = X_2^L(s) - B^L(s) e^{-s\lambda(R_1-R_2)} g_{0v}^L(s, \lambda R_1); \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} B^L(s) G^L(s, \lambda R_2) = Y_1^L(s) - A^L(s) e^{-s\lambda(R_1-R_2)} F^L(s, \lambda R_2), \\ b_1 C^L(s) + C^L(s) \Omega^L(s) = \frac{1}{s} \varepsilon^L(s). \end{aligned} \quad (24)$$

Функции F^L , G^L , f_{0v}^L и g_{0v}^L были описаны ранее (см. (15) и (18)), а функции X_1^L , X_2^L , Y_1^L и Ω^L имеют вид

$$\begin{aligned} X_1^L(s) &= \beta G^L(s, \lambda R_1) V^L(s, \lambda R_1) + \frac{\mu}{R_1} \frac{1}{s}, \\ X_2^L(s) &= \beta g_{0v}^L(s, \lambda R_1) V^L(s, \lambda R_1), \\ Y_1^L(s) &= \beta F^L(s, \lambda R_2) W^L(s, \lambda R_2) + \frac{\mu}{R_2} \frac{1}{s}, \\ \Omega^L(s) &= \frac{1}{s^2} \Phi^L(s) - \frac{1}{s^2} \ln \frac{R_1}{R_2} + b_3 \frac{1}{s} + b_2 \frac{1}{s^2}. \end{aligned}$$

Для нахождения неизвестных функций $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $D(t)$, выполняется строгая инверсия по Лапласу уравнений (23) и (24). При этом граничные условия удовлетворяются в пространстве оригиналов. В результате задача сводится к решению системы интегральных уравнений Вольтерра с запаздывающими аргументами [2]

$$\begin{aligned} A * F|_{\lambda R_1} - D * g_{00}|_{R_1} &= X_1(t) - B * G|_{\lambda R_1}, \\ A * f_{0v}|_{\lambda R_1} + D * g_{01}|_{R_1} &= X_2(t) - B * g_{0v}|_{\lambda R_1}; \\ B * G|_{\lambda R_2} &= Y_1(t) - A * F|_{\lambda R_2}, \end{aligned} \quad (25)$$

и уравнению относительно неизвестной $C(t)$

$$b_1 C(t) + \int_0^t C(\tau) \Omega(t-\tau) d\tau = \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau. \quad (26)$$

В системе (25) и далее используется обозначение

$$X * Y|_z = \int_0^t X(\tau) Y(t - \tau, z) d\tau.$$

Оригиналы функций $g_{0v}(t, z)$, $g_{1v}(t, z)$, $f_{0v}(t, z)$ и $f_{1v}(t, z)$ построены на основании таблиц операционного исчисления [6]. Функции $V(t, z)$ и $W(t, z)$ получены с использованием этих формул и приведены в [3]. Ядро $F(t, z)$ является линейной комбинацией функций $f_{0v+1}(t, z)$ и $f_{1v}(t, z)$, а $G(t, z) - g_{0v+1}(t, z)$ и $g_{1v}(t, z)$ (18). Оригиналы $X_1(t)$, $X_2(t)$ и $Y(t)$ получены в виде интегралов

$$X_1(t) = \beta \cdot V|_{\lambda R_1} * G|_{\lambda R_1} + \frac{\mu}{R_1},$$

$$X_2(t) = \beta \cdot V|_{\lambda R_1} * g_{0v}|_{\lambda R_1},$$

$$Y_1(t) = \beta \cdot W|_{\lambda R_2} * F|_{\lambda R_2} + \frac{\mu}{R_2}.$$

Система интегральных уравнений (25) решалась численно с использованием метода квадратур. Запаздывание аргументов неизвестных функций в правых частях уравнений (25) позволило удовлетворять граничным условиям при $r = R_1$ и $r = R_2$ независимо, в любой момент времени. Так, при $t < \lambda(R_1 - R_2)$ интегралы с запаздывающими аргументами равны нулю. Тогда из первых двух уравнений системы (25) получаются значения $A(t)$ и $D(t)$, а из третьего — $B(t)$. Затем эти результаты использовались в вычислениях на следующем этапе переходного процесса ($\lambda(R_1 - R_2) < t < 2\lambda(R_1 - R_2)$). Таким образом, искомые значения $A(t)$, $B(t)$ и $D(t)$ находились на каждом шаге по времени. После этого методом квадратур решается интегральное уравнение (26), в котором при определении ядра $\Omega(t)$ использовался оригинал функции $Z^L(s)$ (21), вид которого известен [3]:

$$Z(t) = -\frac{2}{t} \left[V|_{\lambda R_1} * g_{1v}|_{\lambda R_1} - W|_{\lambda R_2} * f_{1v}|_{\lambda R_2} \right]. \quad (27)$$

В этом случае искомый оригинал $\Omega^L(s)$ может быть записан как

$$\Omega(t) = \int_0^t (t - \tau) \Phi(\tau) d\tau - t \left[\ln \frac{R_1}{R_2} - b_2 \right] + b_3,$$

где при вычислении ядра $\Phi(t)$ используется формула (27) и полученные из решения системы (25) значения функций $A(t)$ и $B(t)$:

$$\Phi(t) = a_6 \cdot A * f_{0v}|_{\lambda R_1} + a_5 \cdot A * V|_{\lambda R_1} - a_6 \cdot B * g_{0v}|_{\lambda R_2} +$$

$$+a_5 \cdot B * W|_{\lambda R_2} - a_6 \cdot A * f_{0v}|_{\lambda R_2} + a_6 \cdot B * g_{0v}|_{\lambda R_1} - \beta a_6 V|_{\lambda R_1} * g_{0v}|_{\lambda R_1} + \beta a_6 W|_{\lambda R_2} * f_{0v}|_{\lambda R_2} - a_5 \beta Z(t).$$

Располагая значениями $A(t)$, $B(t)$, $D(t)$ и $C(t)$, легко вычислить физические характеристики исследуемого переходного процесса. Для определения радиального напряжения σ_{rr} (17) получается формула

$$\sigma_{rr}(t, r) = C * N(r),$$

где

$$N(t, r) = A * F|_{\lambda r} + B * G|_{\lambda r} - \beta V|_{\lambda r} * G|_{\lambda r} - \beta W|_{\lambda r} * F|_{\lambda r} - \frac{\mu}{r}.$$

Перемещение $u_r(t, r)$, разность потенциалов $U_p(t)$, давление в акустической среде $p(t, r)$ и другие значения вычисляются аналогично.

Численные результаты. Численные исследования были выполнены при следующих физических параметрах пьезоэлектрического цилиндрического преобразователя безразмерной толщины:

$$c_{11}^E = 15,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad c_{22}^E = 8,0 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad c_{33}^E = 13,6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ R_1 - R_2 = 0,2, \quad \gamma = 7210 \text{ кг/м}^3, \quad e_{31} = -7,9 \text{ Кл/м}^2, \quad e_{33} = 17,7 \text{ Кл/м}^2, \\ d_{33} = 2,86 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}^2, \quad \epsilon_{33}^s = 1280 \epsilon_0,$$

где $\epsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ – диэлектрическая проницаемость вакуума (эти параметры соответствуют материалу ЦТС-3 [3, 7]) и акустической среды: $c = 1500 \text{ м/с}$ и $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ (вода). Точность вычисления контролировалась варьированием шага по времени Δt . При этом отличие максимальных значений расчетных физических характеристик нестационарного процесса при $\Delta t = 1/300$ и $\Delta t = 1/600$ не превышало 1%.

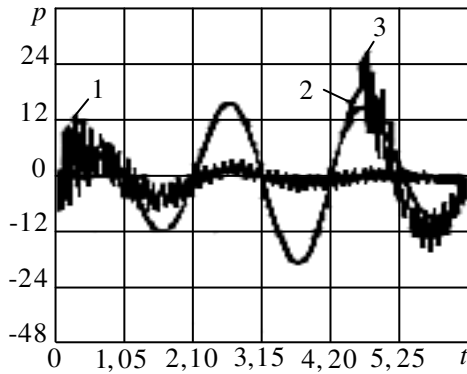


Рис. 2

На рис. 2 представлено гидродинамическое давление p на внешней поверхности цилиндра ($r = R_1$) в случае, когда колебательный контур отсутствует ($\lambda_L = \lambda_C = \lambda_R = 0$), а к электродным покрытиям излучателя подводится ступенчатый электрический импульс $\epsilon(t) = 1$ (кривая 1), или конечный синусоидальный импульс $\epsilon(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot H(T_0 - t)$ при $T_0 = 4,2$ (кривая 2) или $T_0 = 4,7$ (кривая 3).

Значение $\omega_0 = 3$ соответствует собственной частоте излучателя. При $T_0 = 4,7$ функция $\varepsilon(t)|_{t=T_0}$ претерпевает разрыв первого рода, при $T_0 = 4,2$ остается неизменной.

На рис. 3 представлены графики распределения давления $p|_{r=R_1}$, полученные для разностей потенциалов $\varepsilon(t) = 1$ (кривая 1) и $\varepsilon(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot H(4,7 - t)$ на входе проводной цепи, содержащей индуктивность ($\lambda_L \neq 0$). Разность потенциалов U_p между электродами цилиндра как функция времени для этого случая изображена рис. 4. Кривые 1, 2, 3, 4 на рис. 3, 4 соответствуют значениям λ_L , равными 0,004; 0,004; 0,001; 0,008. Отметим, что излучатель имеет форму цилиндрического конденсатора, безразмерная статическая емкость которого (в недеформированном состоянии) равна $C_{st} = 2\pi / \ln(R_1 / R_2)$. При выполнении равенства $1 / \sqrt{L^* C_{st}} = \omega_0$ резонансная частота последовательной цепи, содержащей емкость C_{st} и индуктивность L^* , совпадает с частотой ω_0 . На ос-

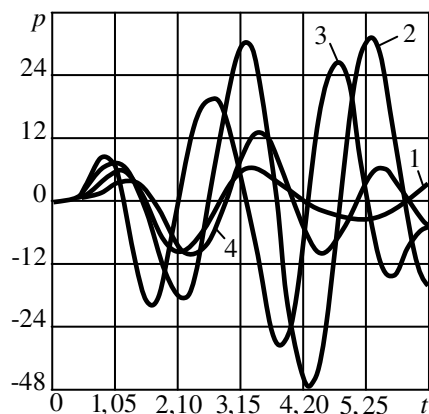


Рис. 3

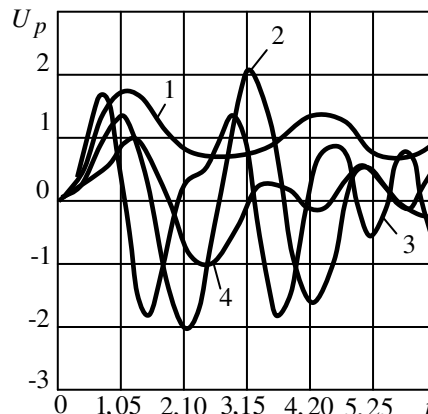


Рис. 4

новании этого выбрано значение безразмерной индуктивности L^* (при $\lambda_L = 0,004$ амплитуда электрического тока достигает максимума).

Полагая, что резистор R^* влияет только на амплитудные значения расчетных величин, при вычислениях здесь и далее этот элемент не учитывался ($\lambda_R = 0$).

На рис. 5 представлено поведение во времени гидродинамического давления $p|_{r=R_1}$ в случае синусоидального входного импульса $\varepsilon(t) = \sin(\omega_0 t) H(4,7 - t)$, а проводная цепь имеет емкость и индуктивность со следующими начальными параметрами: $\lambda_C = 1 / C_{st} = 0,035$ ($C^* = C_{st}$), $\lambda_L = 0,008$ (кривая 1); $\lambda_C = 2 / C_{st} = 0,07$, $\lambda_L = 0,012$ (кривая 2) и $\lambda_C = 1 / 2C_{st} = 0,0175$, $\lambda_L = 0,006$ (кривая 3). Параметр λ_L для

этих кривых был вычислен из условия равенства резонансной частоты колебательного контура ω_0 . Для сравнения приведена кривая 4, полученная при $\lambda_C = 0,035$ и $\lambda_L = 0,004$.

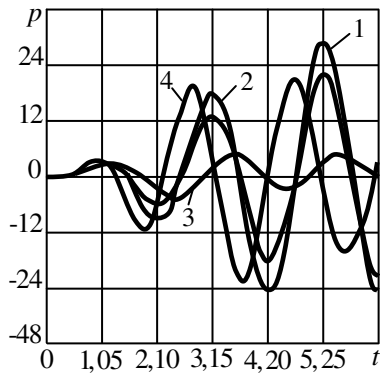


Рис. 5

Вычисления показали, что в случае приложения к токопроводящим покрытиям излучателя ступенчатого электрического импульса, возникающее скачкообразное изменение разности потенциалов между электродами возбуждает упругие волны, распространяющиеся в цилиндре с большими градиентами. Их многократные отражения от граничных поверхностей ($r = R_1$ и $r = R_2$) приводят к резким изменениям давления (рис. 2, кривая 1). Подобное явление имеет место после окончания синусоидального импульса с длиной $T_0 = 4,7$ (рис. 2, кривая 3). В этом случае разность потенциалов $\varepsilon(t)$ в момент времени $t = T_0$ изменяется мгновенно от единицы до нуля. При $T = 4.2$ $\varepsilon(t)|_{t=T_0} = 0$ с момента $t = T_0$ резкие скачки давления $p|_{r=R_1}$ отсутствуют (рис. 2, кривая 2). Таким образом, варьируя длительность возбуждающего электрического импульса в сравнительно узком временном диапазоне, можно устранить возникающие в пьезопреобразователе после его действия перегрузки. Проводная цепь с индуктивностью (рис. 3 и 4) существенно изменяет форму электрического импульса между электродами преобразователя по сравнению с начальным (рис. 4). Это приводит к фактическому устранению резких изменений p (рис. 3). Зависимость от времени давлений носит колебательный характер со сравнительно низкой частотой, которая уменьшается с ростом параметра λ_L . Изменения параметров колебательного контура с емкостью λ_C и индуктивностью λ_L таким образом, чтобы ее резонансная частота с учетом статической емкости электроупругого цилиндра была равна ω_0 , приводят к изменениям амплитуды давления в излученной волне (рис. 5). После завершения приложения синусоидального импульса $\varepsilon(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot H(4,7 - t)$ резкие всплески давления также отсутствуют (рис. 5).

Таким образом, разработанный метод решения эффективен для цилиндрического пьезоэлектрического преобразователя, связанного с источником электрических импульсов посредством последовательного колебательного контура с сосредоточенными параметрами. Изложенный метод позволяет проводить вычисления с контролируемой точностью в случае электрического импульса фактически любого профиля.

РЕЗЮМЕ. Розв'язана нестационарна задача випромінювання хвиль безкінечно довгим товстостінним циліндричним п'єзоелектричним перетворювачем у безкінечному рідкому середовищі. Розглянуто вплив коливального контуру із зосередженими параметрами. Метод

розв'язання базується на інтегральному перетворенні Лапласа за часом, що дозволив аналітично звести задачу до розв'язання системи інтегральних рівнянь Вольтерра із запізненими аргументами.

Ключові слова: гідроелектропружність, циліндричний п'єзоелектричний перетворювач, нестационарні коливання, акустичні хвилі, рівняння Вольтерра

SUMMARY. The problem of wave radiation by an infinitely long thick-wall cylindrical piezoelectric transducer in an infinite fluid medium has been investigated in the non-stationary statement. The influence of a conducting circuit with lumped parameters (an oscillating circuit) is also considered. The solution method developed is based on the integral Laplace transform in time. This allows analytically reducing the problem to solving a system of Volterra integral equations with retarded arguments.

Key words: hydroelectroelasticity, cylindrical piezoelectric transducers, nonstationary vibrations, acoustic waves, Volterra equations

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бабаев А. А. Нестационарные режимы работы многомодового цилиндрического излучателя с учетом процессов в кабельном тракте // Прикладная механика. – 1999. – Т. 35, № 8. – С. 35–44.
2. Бабаев А. Э. Нестационарные волны в сплошных средах с системой отражающих поверхностей. – К.: Наук. думка, 1990. – 176 с.
3. Бабаев А. Э., Савин В. Г. Излучение нестационарных акустических волн радиально поляризованным цилиндрическим преобразователем // Прикладная механика. – 1995. – Т. 31, № 4. – С. 41–48.
4. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 5).
5. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Бабаев А. Э. Динамика систем оболочек, взаимодействующих с жидкостью // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38, № 3. – С. 13–59.
6. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 466 с.
7. Пьезокерамические преобразователи // Под ред. С. И. Пугачева. – Л.: Судостроение, 1984. – 256 с.
8. Ding H. J., Wang H. M., Hou P. F. The transient responses of piezoelectric hollow cylinders for axisymmetric plane strain problems // Int. J. of Sol. and Struct. – 2003. – Vol. 40. – P. 105–123.
9. Ebenezer D. D., Ravichandran K., Ramesh R. Forced responses of solid axially polarized piezoelectric ceramic finite cylinders with internal losses // J. Acoust. Soc. Am. – 2005. – Vol. 117. – P. 3645–3656.

Институт механики НАНУ, г. Киев

Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

Поступила 07.09.2010

УДК 539.3

В. Р. БОГДАНОВ, канд. физ.-мат. наук,
Г. Т. СУЛИМ, д-р физ.-мат. наук

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ПЛОСКОГО ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Разработана аналитико-численная методика для решения динамических задач плоского деформированного состояния в упругопластической математической постановке. Численное решение было получено для материала с поперечным сечением в форме прямоугольника с пропилом трещиной посередине (компактный профиль) при трехточечном изгибе с использованием метода конечных разностей. Разработанная методика дает возможность намного точнее определять поля пластических деформаций и напряжений, чем при решении квазистатической упругопластической задачи плоского деформированного состояния.

Ключевые слова: компактный образец, пластические деформации, трещина-пропил

В работах [5, 6] для исследования процессов разрушения материала предложено использовать расчетные методы с привлечением квазистатической упруго-пластической модели материала. Эти результаты обобщены в публикациях [2, 3], где определяющие соотношения для упруго-пластического деформирования материала с трещиной рассмотрены вместе с уравнениями динамики в предположении, что трещина неподвижна.

Решению плоской задачи об ударе в упругой постановке посвящена работа [11], определению напряженно-деформированного состояния жесткопластической криволинейной пластины переменной толщины с произвольным отверстием при динамическом нагружении – статья [7]. В [2, 3] решаются соответственно задачи плоского напряженного состояния и пространственная с использованием динамической упруго-пластической постановки. В данной работе напряженно-деформированное состояние изотропного бруса с пропилом-трещиной определяется на основе решения плоской задачи, сформулированной в упруго-пластической динамической постановке.

Постановка задачи. Рассмотрим деформирование бесконечного изотропного бруса $\{|x| \leq L/2, 0 \leq y \leq B, |z| < \infty\}$, имеющего в плоскости поперечного сечения форму прямоугольника с пропилом-трещиной посередине. Предполагаем, что напряженно-деформированное состояние в каждом поперечном сечении бруса одинаково и близко к плоской деформации ($\sigma_{zz} = \text{const}$, $\sigma_{xz} = 0$, $\sigma_{yz} = 0$) и поэтому достаточно рассмотреть сечение в форме прямоугольника $\Sigma = L \times B$ (рис. 1), длины L , ширины B с пропилом-трещиной длиной l вдоль отрезка $\{x = 0, 0 \leq y \leq l\}$. Брус контактирует с двумя неподвижными опорами вдоль отрезков $\{L_* \leq |x| \leq L_* + a,$

$y = 0$ }. Сверху на тело падает абсолютно твердый ударник, который контактирует вдоль отрезка $\{|x| \leq A, y = B\}$.

Действие ударника заменим равномерно распределенной в области контакта нормальной нагрузкой $-P$, которая изменяется со временем как линейная функция ($P = p_{01} + p_{02}t$). Вследствие симметрии процесса деформирования относительно линии $x = 0$ далее будем рассматривать только правую часть поперечного сечения (рис. 1). На протяжении всего промежутка времени взаимодействия область контакта остается постоянной. При расчетах динамических полей напряжений и деформаций не будем учитывать взаимодействия волновых полей, отражения от границ тела и возможного при этом контактного взаимодействия между берегами разреза.

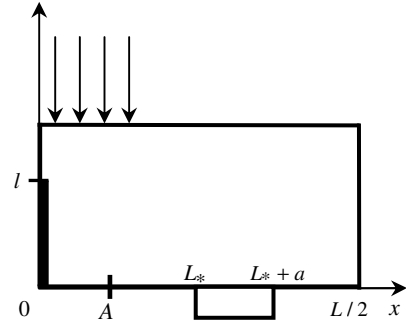


Рис. 1

Пусть $u = (u_x, u_y)$ – вектор смещений, связанный с компонентами тензора деформаций ε_{ij} соотношениями Коши.

Граничные условия представим в виде

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= 0, \quad \sigma_{xy} = 0 \text{ при } x = 0, \quad 0 < y < l; \\
 u_x &= 0, \quad \sigma_{xy} = 0 \text{ при } x = 0, \quad l < y < B; \\
 \sigma_{xx} &= 0, \quad \sigma_{xy} = 0 \text{ при } x = L/2, \quad 0 < y < B; \\
 \sigma_{yy} &= 0, \quad \sigma_{xy} = 0 \text{ при } y = 0, \quad 0 < x < L_*; \\
 u_y &= 0, \quad \sigma_{xy} = 0 \text{ при } y = 0, \quad L_* < x < L_* + a; \\
 \sigma_{yy} &= 0, \quad \sigma_{xy} = 0 \text{ при } y = 0, \quad L_* + a < x < L/2; \\
 \sigma_{yy} &= -P, \quad \sigma_{xy} = 0 \text{ при } y = B, \quad 0 < x < A; \\
 \sigma_{yy} &= 0, \quad \sigma_{xy} = 0 \text{ при } y = B, \quad A < x < L/2.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Начальные условия запишем в таком виде:

$$u_x|_{t=0} = 0, \quad u_y|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_x|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_y|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

где t – время; точка над символом означает производную по времени.

Соотношения динамики в напряжениях имеют вид (ρ – плотность материала)

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}. \tag{3}$$

В качестве физической модели принята модель, основанная на теории неизотермического пластического течения для среды с упрочнением и условием текучести Губера-Мизеса в сочетании с гипотезой кратковременной ползучести [9]. Уравнения связи между напряжениями и дефор-

мациями в соответствии с этой моделью имеют вид [1]

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad \varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} s_{ij} + K\sigma + \phi, \quad d\varepsilon_{ij}^p = s_{ij} d\lambda, \quad (4)$$

где $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$ – девиатор тензора напряжений; δ_{ij} – символ Кронекера; G – модуль сдвига; $K = 3K_1$, $K_1 = (1 - 2\nu)/3E$ – модуль объемного сжатия, связывающий объемное расширение 3ε , среднее напряжение $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$ и ϕ – температурное удлинение в соотношении $\varepsilon = K\sigma + \phi$ (в данном случае $\phi \equiv 0$); ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости Юнга; $d\lambda$ – некоторая скалярная функция, определяемая формой поверхности нагружения. Предполагаем, что эта скалярная функция является квадратичной функцией девиатора напряжений s_{ij} [9].

Пусть в результате пластической деформации происходит упрочнение материала по следующей зависимости от температуры [5]:

$$\sigma_S(T) = \sigma_{02}(T_0) \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon_0}\right)^{\eta^*}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_{02}(T_0)}{E}. \quad (5)$$

Здесь T – температура; $\kappa = \int d\varepsilon_i^p$ – параметр Одквиста; $T_0 = 20^\circ C$, η^* – коэффициент упрочнения; $\sigma_S(T)$ – предел текучести после упрочнения материала при температуре T .

В данном случае нестационарное взаимодействие происходит в течение короткого промежутка времени. Представив (4) в развернутой форме, имеем формулы

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{xx} &= d\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma}{2G} + K\sigma\right) + (\sigma_{xx} - \sigma) d\lambda, \\ d\varepsilon_{yy} &= d\left(\frac{\sigma_{yy} - \sigma}{2G} + K\sigma\right) + (\sigma_{yy} - \sigma) d\lambda, \\ d\varepsilon_{zz} &= d\left(\frac{\sigma_{zz} - \sigma}{2G} + K\sigma\right) + (\sigma_{zz} - \sigma) d\lambda, \\ d\varepsilon_{xy} &= d\left(\frac{\sigma_{xy}}{2G}\right) + \sigma_{xy} d\lambda, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$d\lambda = \begin{cases} 0, & \text{если } f = \sigma_i^2 - \sigma_S^2(T) < 0, \\ \frac{3 d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i}, & \text{если } f = 0, \quad df = 0. \end{cases} \quad (7)$$

$$d\varepsilon_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{yy}^p)^2 + (d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{zz}^p)^2 + (d\varepsilon_{yy}^p - d\varepsilon_{zz}^p)^2 + 6(d\varepsilon_{xy}^p)^2},$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + 6\sigma_{xy}^2}.$$

В отличие от традиционной плоской деформации, когда $\Delta\varepsilon_{zz}(x, y) = const$, $\sigma_{xz} \equiv \sigma_{yz} \equiv 0$ для более точного описания процесса деформации приращение деформации $\Delta\varepsilon_{zz}$ используется в виде [4]

$$\Delta\varepsilon_{zz}(x, y) = \Delta\varepsilon_{zz}^0 + \Delta\chi_x x + \Delta\chi_y y, \quad (8)$$

где $\Delta\chi_x$ и $\Delta\chi_y$ характеризуют изгиб в плоскостях Ozx и Ozy ; $\Delta\varepsilon_{zz}^0$ – приращение деформации вдоль волокна $x = y = 0$.

Методика решения. Пусть нестационарное взаимодействие происходит на промежутке времени $[0, t_*]$. Учтем нестационарное нагружение и проведем численное интегрирование по времени так же, как и в динамической упругой модели [11]. При этом применяем квадратурную формулу Грегори с равноотстоящими узлами порядка $m_1 = 3$ с коэффициентами D_n [10]. Тогда для момента времени $t \in [0, t_*]$ с учетом (4) запишем равенства

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma}{2G} + \delta_{ij}K\sigma, \quad \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{dt} = (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma) \frac{d\lambda}{dt} \quad (i, j = x, y, z).$$

После проведения дискретизации запишем приращения деформаций в виде

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{xx,k} &= B_1\sigma_{xx,k} + B_2\sigma_{yy,k} - \beta_{xx}, \quad \Delta\varepsilon_{yy,k} = B_2\sigma_{xx,k} + B_1\sigma_{yy,k} - \beta_{yy}, \\ B_1 &= \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1}, \quad B_2 = \frac{\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1}, \quad B_3 = \frac{1}{2G} + D_0\Delta\lambda_k, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{3} \left(K + \frac{1}{G} + 2D_0\Delta\lambda_k \right), \\ \Delta\varepsilon_{zz,k} &= \alpha_1\sigma_{zz,k} + \alpha_2(\sigma_{xx,k} - \sigma_{yy,k}) - b_{zz}, \quad \Delta\varepsilon_{xy,k} = B_3\sigma_{xy,k} - b_{xy}, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{3} \left(K - \frac{1}{2G} - D_0\Delta\lambda_k \right), \\ \beta_{yy} &= b_{yy} - \alpha_2(b_{zz} + \Delta\varepsilon_{zz}) / \alpha_1, \quad \beta_{zz} = -(b_{zz} + \Delta\varepsilon_{zz}) / \alpha_1, \end{aligned} \quad (9)$$

в котором

$$b_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma_{ij,k-1} + \delta_{ij} \left(K - \frac{1}{2G} \right) \sigma_{k-1} - \sum_{n=1}^{m_1} D_n (\sigma_{ij,k-n} - \delta_{ij}\sigma_{k-n}) \Delta\lambda_{k-n}.$$

Если ввести обозначение $\psi = 1/(2G) + \Delta\lambda$, то напряженное состояние определяется при учете условий текучести, которые на основе (8) запишем в следующем виде:

$$\Psi = \begin{cases} \frac{1}{2G}, & \text{если } f < 0, \\ \frac{1}{2G} + \frac{3\Delta\varepsilon_i^p}{2\sigma_i}, & \text{если } f = 0. \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_i^p &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\Delta\varepsilon_{xx}^p - \Delta\varepsilon_{yy}^p)^2 + (\Delta\varepsilon_{xx}^p - \Delta\varepsilon_{zz}^p)^2 + (\Delta\varepsilon_{yy}^p - \Delta\varepsilon_{zz}^p)^2 + 6(\Delta\varepsilon_{xy}^p)^2}, \\ \Delta\varepsilon_{xx}^p &= \Delta\varepsilon_{xx} - \Delta\varepsilon_{xx}^e, \quad \Delta\varepsilon_{yy}^p = \Delta\varepsilon_{yy} - \Delta\varepsilon_{yy}^e, \quad \Delta\varepsilon_{xy}^p = \Delta\varepsilon_{xy} - \Delta\varepsilon_{xy}^e, \\ \Delta\varepsilon_{xy}^e &= \frac{1}{2G} \sigma_{xy,k}, \quad \Delta\varepsilon_{xx}^e = \frac{1}{2G} \sigma_{xx,k} + \left(K - \frac{1}{2G}\right) \sigma_k, \\ \Delta\varepsilon_{yy}^e &= \frac{1}{2G} \sigma_{yy,k} + \left(K - \frac{1}{2G}\right) \sigma_k. \end{aligned}$$

Для учета пластических деформаций, содержащихся в условиях (10), применим метод последовательных приближений, который позволяет решение упругопластической задачи свести к решению ряда линейных задач.

$$\Psi^{(n+1)} = \begin{cases} \Psi^{(n)} p + (1-p)/(2G), & \text{если } \sigma_i^{(n)} - \sigma_S(T) < -Q, \\ \Psi^{(n)}, & \text{если } -Q < \sigma_i^{(n)} - \sigma_S(T) < Q, \\ \Psi^{(n)} \sigma_i^{(n)} / \sigma_S(T), & \text{если } \sigma_i^{(n)} - \sigma_S(T) > Q, \end{cases} \quad (11)$$

где Q – величина наибольшего отклонения интенсивности напряжений от предела текучести, $0 \leq p \leq 1$.

Для напряжений из системы (10) найдем выражения

$$\begin{aligned} \sigma_{xx,k} &= A_1 \Delta\varepsilon_{xx,k} + A_2 \Delta\varepsilon_{yy,k} + Y_{xx}, \\ \sigma_{yy,k} &= A_2 \Delta\varepsilon_{xx,k} + A_1 \Delta\varepsilon_{yy,k} + Y_{yy}, \\ \sigma_{xy,k} &= A_3 \Delta\varepsilon_{xy,k} + Y_{xy}, \quad \sigma_{zz,k} = -\alpha_2 (\sigma_{xx,k} + \sigma_{yy,k}) / \alpha_1 - \beta_{zz}, \\ Y_{xx} &= A_1 \beta_{xx} + A_2 \beta_{yy}, \quad Y_{yy} = A_2 \beta_{xx} + A_1 \beta_{yy}, \quad Y_{xy} = A_3 \beta_{xy}, \end{aligned} \quad (12)$$

в которых $A_1 = B_1 / (B_1^2 - B_2^2)$, $A_2 = -B_2 / (B_1^2 - B_2^2)$, $A_3 = 1 / B_3$.

Неизвестные коэффициенты в (8) определим из условий равновесия четных по x нормальных напряжений σ_{zz} [4] при $M_1 = M_x = M_y = 0$:

$$\iint_{\Sigma} \sigma_{zz}(x, y) \xi dx dy = M_{\xi} \quad (\xi = 1, x, y). \quad (13)$$

Здесь M_1 – главный вектор; M_x , M_y – проекции главного момента усилий. Так как задача симметричная и $\sigma_{zz}(x, y) = \sigma_{zz}(-x, y)$, то соотношение (13) в случае $\xi = x$ удовлетворяется автоматически.

Реализуя условия равновесия (13) с учетом (8) и (12), учитывая

симметричность области интегрирования по x и четности функций $\sigma_{yy,k}$, $\sigma_{xx,k}$, b_{zz} , получим такую систему уравнений:

$$\Delta \varepsilon_{zz}^0 L_{\xi 1} + \Delta \chi_y L_{\xi y} = \bar{M}_{\xi} \quad (\xi = 1, y), \quad (14)$$

где

$$L_{\xi r} = \iint_{\Sigma} \frac{\xi r \, dx \, dy}{\alpha_1}, \quad \bar{M}_{\xi} = \iint_{\Sigma} \frac{\alpha_2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - b_{zz}}{\alpha_1} \xi r \, dx \, dy \quad (\xi, r = 1, y)$$

Решая систему (14), находим коэффициенты $\Delta \varepsilon_{zz}^0$, $\Delta \chi_y$ в (8) (в данном случае $\Delta \chi_x = 0$).

Приращение вектора смещений Δu связано с приращениями деформаций соотношениями

$$\Delta \varepsilon_{xx} = \frac{\partial \Delta u_x}{\partial x}, \quad \Delta \varepsilon_{yy} = \frac{\partial \Delta u_y}{\partial y}, \quad \Delta \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta u_y}{\partial x} \right). \quad (15)$$

В роли основного независимого параметра для выявления развития величин выберем расчетное значение коэффициента интенсивности напряжений K_I (КИН) возле трещины в статической задаче для упруго деформированного компактного образца. Для него в каждый момент времени $t_k = k \Delta t$ согласно соотношению [8] имеем формулу

$$K_I = 12 F \frac{\sqrt{l}}{BH} \left(1,93 - 3,07 \frac{l}{B} + 14,53 \left(\frac{l}{B} \right)^2 - 25,11 \left(\frac{l}{B} \right)^3 + 25,8 \left(\frac{l}{B} \right)^4 \right), \quad (16)$$

где $F = 2AP$ – контактная сила; $4B$ – длина между опорами.

Численные результаты и их анализ. При проведении расчетов была выбрана реакторная сталь 15Х2НМФА. Применялся метод конечных разностей при переменном шаге разбиения вдоль осей Ox (N элементов) и Oy (M элементов). Шаг между точками разбиения был наименьшим в области вершины трещины и на границах расчетной области. Характерный размер ячеек в радиусе 1-2 мм от вершины трещины равен среднему размеру зерна металла (0,05 мм). Разбиение по времени равномерное.

На рис. 2, 3 представлены результаты расчетов для поперечных сечений длиной $L=60$ мм, шириной $B=10$ мм и глубиной пропила в центре образца $l=3$ мм, с коэффициентом упрочнения $\eta^* = 0,05$. Расстояние между опорными точками составляло 40 мм. Шаг по времени $\Delta t = 0,0005$ с. Половина длины зоны контакта была $A = 2,5$ мм, $M = 60$, $N = 77$, наименьший шаг разбиения был равен 0,02 мм, а наибольший 2,6 мм ($\Delta x_{\min} = 0,02$ мм; $\Delta y_{\min} = 0,04$ мм (только первый слой); коэффициенты $p_{01} = 8$ МПа; $p_{02} = 10$ МПа, температура $T = 50^\circ$).

Результаты расчетов средних напряжений в узлах вблизи вершины трещины на стадии, когда пластические деформации еще отсутствуют, сопоставлялись с результатами рассчитанными для центра ячеек области вершины трещины на основе классических одночленных асимптотических зависимостей [8, п. 1.2] с использованием формулы (16). При этом процентное отклонение значений в напряжениях не превышало 0,3%.

На рис. 2 приведены графики изменения напряжений (МПа), возникающих в области вершины трещины двухмерного компактного образца: линии 1–5 соответствуют напряжениям σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , напряжению текучести σ_S и интенсивности напряжений σ_i . Видно, что когда коэффициент интенсивности напряжений принимает значение $K_I = 60,1$ (МПа $\sqrt{м}$), максимальные напряжения возникают в ячейке, которая расположена сверху по линии трещины на расстоянии одной ячейки от вершины трещины. В этот момент в ячейке вершины трещины, напряжения начинают колебаться. При значении коэффициента интенсивности напряжений $K_I = 93,5$ (МПа $\sqrt{м}$) эти колебания становятся значительными, интенсивность напряжений также начинает колебаться. График зависимости параметра Одквиста, что приведен на рис. 3, остается монотонным с течением времени. Линии 1, 2 соответствуют задачам плоской деформации и плоскому напряженному состоянию в динамической упругопластической постановке.

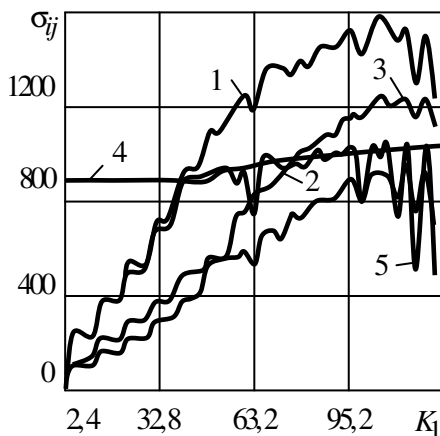


Рис. 2

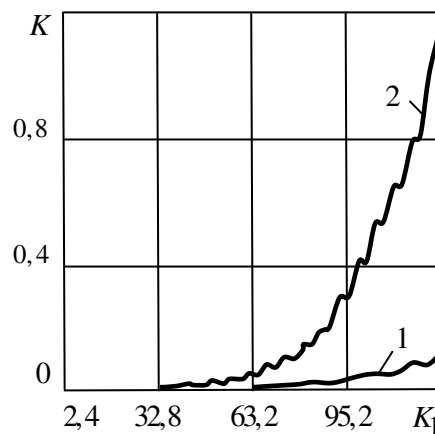


Рис. 3

Решение задачи плоского деформированного состояния для материала с поперечным сечением в форме прямоугольника с пропилом-трещиной посередине (компактного профиля) для определения вязкости разрушения при трехточечном изгибе в динамической упругопластической постановке дает возможность намного точнее определять поля пластических деформаций и напряжений, чем при решении квазистатической упругопластической задачи плоского деформированного состояния.

РЕЗЮМЕ. Розроблено аналітико-числову методику щодо розв'язку динамічних задач плоского деформованого стану у пружно-пластичній математичній постановці. Чисельне рішення було отримано для матеріалу з поперечним перетином у формі прямокутника з пропилом тріщиною посередині (компактний профіль) при триточковому згині з використанням метода скінчених різниць.

Ключові слова: компактний зразок, пластичні деформації, тріщина-пропил

SUMMARY. The problem of planar deformation and method of solution in dynamic elastic-plastic mathematical model has developed. The numerical solution has calculated for three point band of material with transversal profile of shape of rectangle with middle notch-crack (compact profile) by method of finite differences.

Key words: compact specimen, plastic deformation, crack-notch

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. Аркулис Г. Э., Дорогобид В. Г. Теория пластичности. – М.: Металлургия, 1987. – 352 с.
2. Богданов В. Р. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского напруженого стану // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2008. – № 3. – С. 51–56.
3. Богданов В. Р. Тривимірна динамічна задача концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2009. – № 2. – С. 51–56.
4. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 360 с.
5. Махненко В. И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. – К.: Наук. думка, 1976. – 320 с.
6. Махненко В. И. Совершенствование методов оценки остаточного ресурса сварных соединений конструкций длительного срока эксплуатации // Автоматическая сварка. – 2003. – № 10–11. – С. 112–121.
7. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамика жесткопластической криволинейной пластины переменной толщины с произвольным отверстием // Прикладная механика – 2010. – Т. 46, № 3. – С. 70–76.
8. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с. (Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие. В 4 т. Т. 2).
9. Теория пластичности. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 460 с.
10. Хемминг Р. В. Численные методы. – М.: Наука, 1972. – 399 с.
11. Kubenko V. D., Bogdanov V. R. Planar problem of the impact of a shell on an elastic half-space // Int. Appl. Mech. – 1995. – Vol. 31, № 6. – P. 483–490.

*Львовский национальный университет
Национальный транспортный Университет, г. Киев*

Поступила 13.10.2010

УДК 539.3

Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, Т. А. КИРИЧЕК

**ТЕРМОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДЫ
С ОТВЕРСТИЕМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
РАСПРЕДЕЛЕННОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА**

Решена задача о гармонических термоупругих колебаниях двумерной среды с отверстием, поверхность которого свободна от внешних сил. Термоупругие колебания возникают вследствие действия внутренних источников тепла. Граничная задача сведена к системе интегральных уравнений, которая решается численно. Приведены примеры, в которых рассмотрены особенности применения обобщенной и классической связанной моделей линейной термоупругости.

Ключевые слова: гармонические колебания, связанные задачи термоупругости, источники тепла.

Статическое термоупругое состояние тел под действием источников тепла рассматривалась в работах [1, 4]. Решению задач о действии источников тепла в квазистатической постановке посвящена работа [2]. Обобщенная термоупругость в ортотропном теле с линейно распределенными источниками тепла изучалась в [7].

В данной работе изучается тепловое воздействие на напряженное состояние двумерной среды с отверстием и распределенными источниками тепла в рамках связанной обобщенной задачи термоупругости.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу связанной термоупругости о

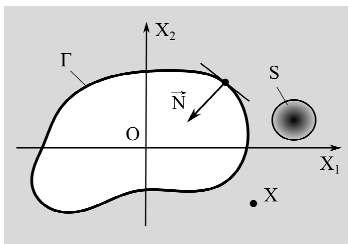


Рис. 1

плоской деформации бесконечного изотропного тела с отверстием, через поверхность которого осуществляется теплообмен с внешней средой. Пусть в некоторой внутренней области действуют источники тепла. Будем считать, что поверхность отверстия свободна от внешних сил и не подкреплена.

Решение рассматриваемой задачи сводится к интегрированию системы уравнений [6]

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_1 + \sigma \partial_1 e - \frac{\beta}{\mu} \partial_1 \theta - \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 u_1 &= 0, \\ \nabla^2 u_2 + \sigma \partial_2 e - \frac{\beta}{\mu} \partial_2 \theta - \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 u_2 &= 0, \\ \nabla^2 \theta - \frac{l}{a^2} \partial_t \theta - \eta l \partial_t e &= -\frac{l}{\lambda_T} w(x, t) \end{aligned} \tag{1}$$

при граничных условиях

$$\sigma_{ij}n_j|_{\gamma} = 0, \quad t > 0, \quad \left[\lambda_T \frac{\partial \theta}{\partial n} + l \alpha_{\gamma} (\theta - \theta_{\gamma}) \right]_{\gamma} = 0, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2), \quad \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \partial_j = \partial/\partial x_j, \quad \partial_t = \partial/\partial t, \\ e &= \operatorname{div} \bar{u}, \quad \eta = \beta T_0/\lambda_T, \quad \beta = \alpha_t (3\lambda + 2\mu), \\ \sigma &= (\lambda + \mu)/\mu, \quad a^2 = \lambda_T/c\rho, \quad l = 1 + \tau_r \partial_t, \end{aligned}$$

u_1, u_2 – компоненты вектора перемещений; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; λ, μ – постоянные Ламе; θ – температура; λ_T – коэффициент теплопроводности; α_t – коэффициент линейного расширения; α_{γ} – коэффициент теплоотдачи; T_0 – начальная температура; θ_{γ} – температура внешней среды; c и ρ – удельная теплоемкость и плотность среды; n_1, n_2 – компоненты единичного вектора внешней нормали \bar{n} к контуру γ ; w – плотность тепловых источников; τ_r – время релаксации теплового потока.

Принимая во внимание гармоническое изменение во времени всех полевых величин, представим граничную задачу (1)–(2) в виде

$$\begin{aligned} (D_1^2 + \chi D_2^2)U_1 + \chi \sigma D_1 D_2 U_2 + \Omega^2 U_1 - D_1 U_3 &= 0, \\ \chi \sigma D_1 D_2 U_1 + (\chi D_1^2 + D_2^2)U_2 + \Omega^2 U_2 - D_2 U_3 &= 0, \\ (D_1^2 + D_2^2 - M)U_3 - \delta M \vartheta &= -\frac{iM}{\Omega} W(X, \Omega); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij} N_j|_{\Gamma} &= 0, \quad \Sigma_{ij} = \chi (D_j U_i + D_i U_j) + [k\vartheta - U_3] \delta_{ij}, \\ \left[(D_1 N_1 + D_2 N_2 + (1 - i\Omega q^2) \alpha_{\Gamma}) U_3 \right]_{\Gamma} &= (1 - i\Omega q^2) \alpha_{\Gamma} T_{\Gamma}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} W(X, \Omega) &= E(X) \text{ при } X \in S, \quad W(X, \Omega) = 0 \text{ при } X \notin S, \\ \chi &= 1/(1 + \sigma), \quad k = (\sigma - 1)/(\sigma + 1), \quad M = -i\Omega - q^2 \Omega^2, \\ \vartheta &= D_1 U_1 + D_2 U_2, \quad q^2 = \tau_r \cdot c_1^2/a^2, \quad \delta = (\beta^2 T_0)/(\lambda + 2\mu) c\rho, \\ \alpha_{\Gamma} &= \frac{\alpha_{\gamma}}{\lambda_T}, \quad D_j = \partial/\partial X_j, \quad U_j = u_j \cdot \frac{c_1}{a^2} \cdot \frac{\lambda + 2\mu}{\beta T_0}, \quad X_j = x_j \cdot \frac{c_1}{a^2}, \\ \Omega &= \omega \cdot \frac{a^2}{c_1^2}, \quad U_3 = \frac{u_3}{T_0}, \quad W = w \cdot \frac{a^4}{c_1^2 \lambda_T T_0}, \quad T_{\Gamma} = \frac{\theta_{\gamma}}{T_0}, \\ \Sigma_{ij} &= \sigma_{ij} \cdot \frac{1}{\beta T_0}, \quad N_j = n_j \cdot \frac{c_1}{a^2} \cdot \frac{\lambda + 2\mu}{\beta T_0}, \quad c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \end{aligned}$$

Γ – контур γ в новой системе координат (рис. 1).

Метод решения. Фундаментальные решения системы (3) имеют вид [5]

$$\begin{aligned} G_k^{(p)} &= a_1 H_0^{(1)}(\gamma r) \delta_{kp} + a_0 \sum_{j=0}^2 (-1)^j d_j C_j D_k D_p H_0^{(1)}(\mu_j r), \\ G_3^{(k)} &= \delta M a_0 \sum_{j=1}^2 (-1)^j D_k H_0^{(1)}(\mu_j r), \\ G_k^{(3)} &= a_0 \sum_{j=1}^2 (-1)^j D_k H_0^{(1)}(\mu_j r), \\ G_3^{(3)} &= -a_0 \sum_{j=1}^2 (-1)^j (\mu_j^2 - \Omega^2) H_0^{(1)}(\mu_j r). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} d_0 &= 1, \quad \mu_0 = \gamma, \quad C_1 = 1/(\gamma^2 - \mu_1^2), \quad C_2 = 1/(\gamma^2 - \mu_2^2), \\ a_1 &= (\sigma + 1)/4i, \quad C_0 = \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \frac{d_j}{\gamma^2 - \mu_j^2}, \quad \gamma^2 = \Omega^2(\sigma + 1), \\ a_0 &= 1/(4i(\mu_1^2 - \mu_2^2)), \quad d_j = \delta M(\sigma + 1) + \sigma \mu_j^2 + \sigma M, \end{aligned}$$

$H_0^{(1)}(z)$ – функция Ханкеля 1-го рода.

Представим амплитуды перемещений и температуры как свертку фундаментальных решений с неизвестными функциями

$$U_j(X, \Omega) = \int_{\Gamma} p_k(\zeta) G_j^{(k)}(r, \Omega) dg - \frac{iM}{\delta} \iint_S E(\xi) G_j^{(3)}(r_1, \Omega) d\sigma, \quad (6)$$

в которых $\zeta \in \Gamma$, $r = |\zeta - X|$, $\xi \in S$, $r_1 = |\xi - X|$, $p_k(\zeta)$ – неизвестные «плотности». Подставляя представления (6) в граничные условия (4), получаем систему сингулярных интегральных уравнений II рода

$$\frac{1}{2} p_j(\zeta_0) + \int_{\Gamma} p_m(\zeta) K_{jm}(\zeta, \zeta_0) dg = W_j(\zeta_0) + \frac{iM}{\Omega} \iint_S E(\xi) V_j(r_1, \Omega) d\sigma, \quad (7)$$

где $W_m = Y_m$ ($m = 1, 2$), $W_3 = (1 - i\Omega q^2) \alpha_{\Gamma} T_{\Gamma}$, $\zeta, \zeta_0 \in \Gamma$, dg – элемент контура Γ , $d\sigma$ – элемент поверхности S , $j, m = 1, 2, 3$;

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{a_0 \chi}{2} (N_1 \cos 3\alpha + N_2 \sin 3\alpha) \sum_{j=0}^2 (-1)^j d_j C_j \mu_j^3 H_3^{(1)}(\mu_j r) - \\ &- \frac{a_0 \chi}{2} (N_1 \cos \alpha (2\sigma + 1) + N_2 \sin \alpha) \sum_{j=0}^2 (-1)^j d_j C_j \mu_j^3 H_1^{(1)}(\mu_j r) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\delta M a_0 \cos \alpha N_1 \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j H_1^{(1)}(\mu_j r) + \\
& +a_1 \mu_0 (N_1 \cos \alpha + \chi N_2 \sin \alpha) H_1^{(1)}(\mu_0 r), \\
K_{12} = & -\frac{a_0 \chi}{2} \sum_{j=0}^2 (-1)^j d_j C_j \mu_j^3 \left\{ (N_2 \cos 3\alpha - N_1 \sin 3\alpha) H_3^{(1)}(\mu_j r) + \right. \\
& \left. + (N_2 \cos \alpha + (2\sigma - 1) N_1 \sin \alpha) H_1^{(1)}(\mu_j r) \right\} + a_0 \delta M \sin \alpha \times \\
& \times \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j H_1^{(1)}(\mu_j r) + a_1 \mu_0 \chi (N_2 \cos \alpha + \\
& + (\sigma - 1) N_1 \sin \alpha) H_1^{(1)}(\mu_0 r), \\
K_{13} = & -a_0 \chi \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j^2 \left\{ (N_1 \cos 2\alpha + N_2 \sin 2\alpha) H_2^{(1)}(\mu_j r) - \right. \\
& \left. - N_1 \sigma H_0^{(1)}(\mu_j r) \right\} + a_0 \sum_{j=1}^2 (-1)^j (\mu_j^2 + s^2) N_1 H_0^{(1)}(\mu_j r), \\
K_{31} = & \delta M a_0 (1 - i \Omega q^2) \alpha_\Gamma \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j H_1^{(1)}(\mu_j r) \cos \alpha - \frac{\delta M a_0}{2} \times \\
& \times \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j^2 \left\{ (N_1 \cos 2\alpha + N_2 \sin 2\alpha) H_2^{(1)}(\mu_j r) - N_1 H_0^{(1)}(\mu_j r) \right\}, \\
K_{32} = & \delta M a_0 (1 - i \Omega q^2) \alpha_\Gamma \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j H_1^{(1)}(\mu_j r) \sin \alpha - \frac{\delta M a_0}{2} \times \\
& \times \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j^2 \left\{ (N_1 \sin 2\alpha - N_2 \cos 2\alpha) H_2^{(1)}(\mu_j r) - N_2 H_0^{(1)}(\mu_j r) \right\}, \\
K_{33} = & -a_0 \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j (\mu_j^2 - \Omega^2) \cdot (N_1 \cos \alpha + N_2 \sin \alpha) H_1^{(1)}(\mu_j r) + \\
& + (1 - i \Omega q^2) \alpha_\Gamma a_0 \sum_{j=0}^2 (-1)^j (\mu_j^2 - \Omega^2) H_0^{(1)}(\mu_j r), \\
K_{21} = & \frac{a_0 \chi}{2} (N_1 \sin 3\alpha - N_2 \cos 3\alpha) \sum_{j=0}^2 (-1)^j d_j C_j \mu_j^3 H_3^{(1)}(\mu_j r) - \\
& - \frac{a_0 \chi}{2} (N_1 \sin \alpha + (2\sigma - 1) N_2 \cos \alpha) H_1^{(1)}(\mu_j r) + \\
& + \delta M a_0 \cos \alpha N_2 \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j H_1^{(1)}(\mu_j r) + \\
& + a_1 \mu_0 \chi ((\sigma - 1) N_2 \cos \alpha + N_1 \sin \alpha) H_1^{(1)}(\mu_0 r),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{22} &= -\frac{a_0 \chi}{2} \sum_{j=0}^2 (-1)^j d_j C_j \mu_j^3 \left\{ H_3^{(1)}(\mu_j r) (N_1 \cos 3\alpha + N_2 \sin 3\alpha) + \right. \\
&\quad \left. + H_1^{(1)}(\mu_j r) (N_1 \cos \alpha + (2\sigma + 1) N_2 \sin \alpha) \right\} + a_1 \mu_0 H_1^{(1)}(\mu_0 r) \times \\
&\quad \times (\chi N_1 \cos \alpha + N_2 \sin \alpha) + a_0 \delta M \sin \alpha N_2 \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j H_1^{(1)}(\mu_j r), \\
K_{23} &= -a_0 \chi \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j^2 \left\{ H_2^{(1)}(\mu_j r) (N_1 \sin 2\alpha - N_2 \cos 2\alpha) - \right. \\
&\quad \left. - H_0^{(1)}(\mu_j r) N_2 \sigma \right\} + a_0 \sum_{j=1}^2 (-1)^j (\mu_j^2 - \Omega^2) N_2 H_0^{(1)}(\mu_j r), \\
V_1 &= -a_0 \chi \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j^2 \left\{ (N_1 \cos 2\alpha + N_2 \sin 2\alpha) H_2^{(1)}(\mu_j r_1) - \right. \\
&\quad \left. - N_1 \sigma H_0^{(1)}(\mu_j r_1) \right\} + a_0 \sum_{j=1}^2 (-1)^j (\mu_j^2 + s^2) N_1 H_0^{(1)}(\mu_j r_1), \\
V_2 &= -a_0 \chi \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j^2 \left\{ H_2^{(1)}(\mu_j r_1) (N_1 \sin 2\alpha - N_2 \cos 2\alpha) - \right. \\
&\quad \left. - H_0^{(1)}(\mu_j r_1) N_2 \sigma \right\} + a_0 \sum_{j=1}^2 (-1)^j (\mu_j^2 - \Omega^2) N_2 H_0^{(1)}(\mu_j r_1). \\
V_3 &= -a_0 \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j (\mu_j^2 - \Omega^2) (N_1 \cos \alpha + N_2 \sin \alpha) H_1^{(1)}(\mu_j r_1) + \\
&\quad + (1 - i\Omega q^2) \alpha_\Gamma a_0 \sum_{j=0}^2 (-1)^j (\mu_j^2 - \Omega^2) H_0^{(1)}(\mu_j r_1).
\end{aligned}$$

Для численного решения системы (7) использовался метод механических квадратур [2]. После решения системы (7) можно вычислять амплитуды безразмерных напряжений на контуре. Для них имеем

$$\begin{aligned}
\Sigma_{ij}(\zeta_0) &= p_k(\zeta_0) E_{ijk}(\zeta_0) + \int_{\Gamma} p_k(\zeta) T_{ijk}(\zeta, \zeta_0) dg - \\
&\quad - \frac{iM}{\Omega} \iint_S E(\xi) I_{ij}(r_{10}, \Omega) d\sigma, \quad \zeta, \zeta_0 \in \Gamma, \\
I_{11} &= -a_0 \chi \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j^2 \left\{ H_2^{(1)}(\mu_j r_{10}) \cos 2\alpha - \sigma H_0^{(1)}(\mu_j r_{10}) \right\} + \\
&\quad + a_0 \sum_{j=1}^2 (-1)^j (\mu_j^2 - \Omega^2) H_0^{(1)}(\mu_j r_{10}),
\end{aligned}$$

$$I_{12} = -a_0 \chi \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j^2 H_2^{(1)}(\mu_j r_{10}) \sin 2\alpha +$$

$$a_0 \sum_{j=1}^2 (-1)^j (\mu_j^2 - \Omega^2) H_0^{(1)}(\mu_j r_{10}),$$

$$I_{22} = a_0 \chi \sum_{j=1}^2 (-1)^j \mu_j^2 \left(H_2^{(1)}(\mu_j r_{10}) \cos 2\alpha + \sigma H_0^{(1)}(\mu_j r_{10}) \right) +$$

$$+ a_0 \sum_{j=1}^2 (-1)^j (\mu_j^2 - \Omega^2) H_0^{(1)}(\mu_j r_{10}), \quad r_{10} = |\zeta_0 - X|.$$

Численные результаты и их анализ. При проведении численных исследований уравнения криволинейных контуров записывались в параметрическом виде. Погрешность аппроксимации интегралов их дискретными значениями контролировалась проверкой удовлетворения граничных условий на поверхности отверстия. Численные исследования были проведены для среды с эллиптическим теплоизолированным отверстием при действии источника тепла в области с круговым поперечным сечением.

На рис. 2, 3, 4 для различных значений расстояния d между источником тепла и контуром отверстия изображены графики изменения амплитуд температур вдоль поверхности отверстия в плоскости $x_1 O x_2$ для трех моделей термоупругости: для классической несвязанной задачи (рис. 2), классической связанной задачи (рис. 3) и обобщенной связанной задачи (рис. 4). Аналогичные расчеты для амплитуды безразмерного окружного нормального напряжения представлены на рис. 5–7: для класси-

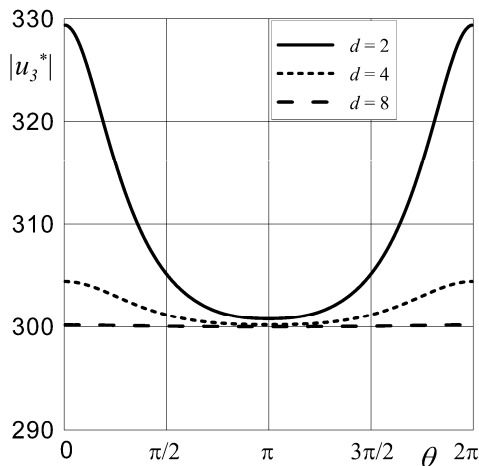


Рис. 2

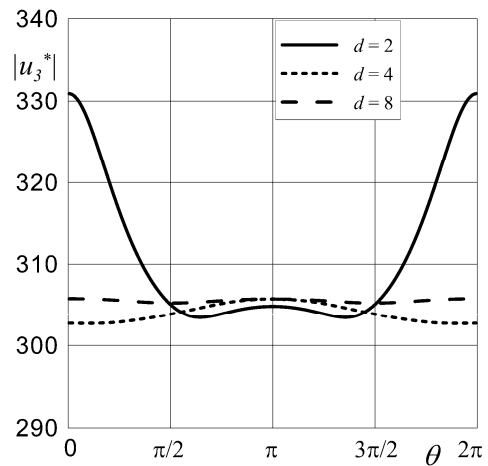


Рис. 3

ческой несвязанной задачи (рис. 5), классической связанной задачи (рис. 6), обобщенной связанной задачи (рис. 7). Термомеханические параметры взяты для алюминия, отношение полуосей эллипса равно 1,5, большая полуось эллипса расположена вдоль оси Ox_1 .

Как видно из рисунков, в классической несвязанной термоупругости

распределение температуры вдоль контура стремится к равновесному на-

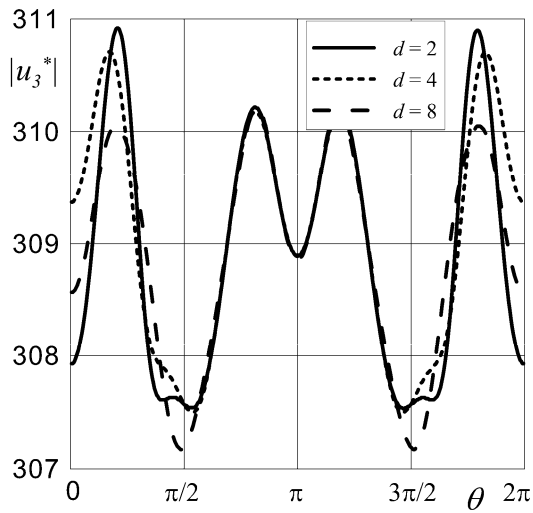


Рис. 4

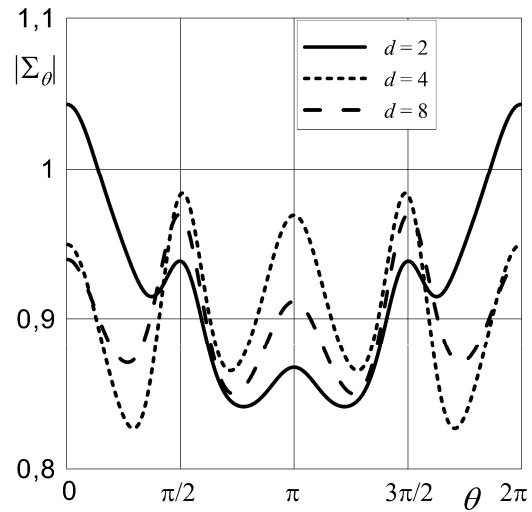


Рис. 5

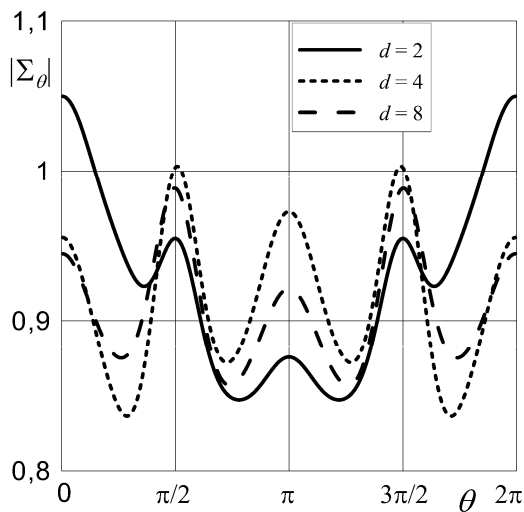


Рис. 6

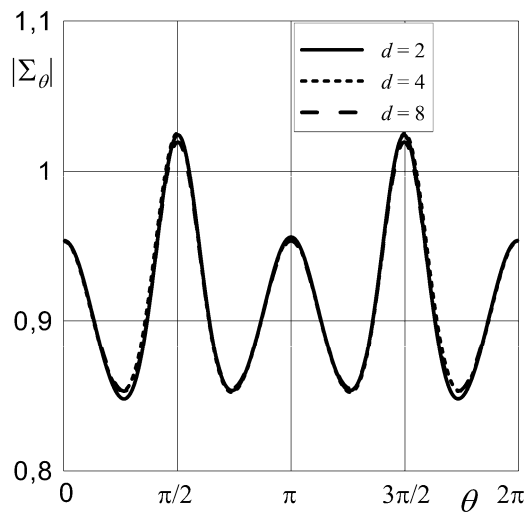


Рис. 7

начальному состоянию при удалении источника от отверстия. В связанной же задаче температура не равна исходной даже при значительном удалении от источников. В случае обобщенной связанной модели равновесное состояние достигается гораздо медленнее в связи с волновым поведением связанных полей температуры и деформаций. Что касается тепловых напряжений, то удаление от источника мало влияет на перераспределение напряжений, особенно в обобщенной связанной постановке.

РЕЗЮМЕ. Розв'язано задачу про гармонічні термопружні коливання двовимірного середовища з отвором, поверхня якого вільна від зовнішніх сил. Термопружні коливання виникають внаслідок дії внутрішніх теплових джерел. Граничну задачу зведено до системи інтегральних рівнянь, яка розв'язується чисельно. Наведено приклади, у яких розглянуто особливості застосування узагальненої та класичної зв'язаної моделей термопружності.

Ключові слова: гармонічні коливання, узагальнена зв'язана термопружність, інтегральні рівняння, джерело тепла.

S U M M A R Y . The time-harmonic thermoelastic problem for two-dimensional domain with a hole is solved. The surface of the hole is free from stresses. Thermoelastic oscillations occur due to the action of heat sources. The boundary value problem is converted to the numerical solving of the system of integral equations. Some special cases of the generalized and classical linear thermoelasticity are considered. Numerical examples are also presented.

Key words: time-harmonic oscillation, generalized coupled thermoelasticity, integral equations, heat source.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахмат Г. Л.* Одна задача термоупругости для плоскости с термоизолированным отверстием // Вестник Белорус. ун-та. – 1976. – Сер. I. – С. 78-79.
2. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. – 235 с.
3. *Коляно Ю. М., Кулик А. Н.* Температурные напряжения от объемных источников. – К.: Наук. думка, 1983. – 288 с.
4. *Космодамианский А. С., Калоеров С. А.* Температурные напряжения в многосвязных пластинках. – Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.
5. *Kobzar' V. N., Fil'shtinskii L. A.* The plane dynamic problem of coupled thermoelasticity // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2008. – 72. – P. 611–618.
6. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. – К.: Наук. думка, 1976. – 311 с.
7. *Rajneesh Kumar, Leena Rani.* Deformation due to mechanical and thermal sources in generalized orthorhombic thermoelastic material // Engineering Sadhana. – 2004. – vol. 29, no. 5. – P. 429–447.

Сумський державний університет

Поступила 1.11.2010

УДК 539.3

Ю. Д. КОВАЛЁВ, канд. физ.-мат. наук, Е. Н. СТАТИВКА

**ЭЛЕКТРОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА
В УСЛОВИЯХ СИММЕТРИЧНОГО НАГРУЖЕНИЯ**

Решена пространственная смешанная симметричная задача электроупругости для кусочно-неоднородного цилиндра. Задача сведена к решению системы интегро-дифференциальных уравнений, которая методом механических квадратур сведена к системе линейных алгебраических уравнений. Для цилиндра с включением кругового или квадратного сечения приведены результаты численных исследований.

Ключевые слова: кусочно-однородный цилиндр, электроупругое включение, электроупругость, смешанная задача

В работах [2–4, 8, 9] предложены различные методы решения трехмерных задач теории упругости для трансверсально изотропного слоя с отверстиями. Аналогичные решения для полых цилиндров конечной длины даны в работах [1, 5]. В статье [12] решена симметричная задача для нетонкой пьезокерамической пластины с круговым отверстием. Общий подход к решению смешанных задач теории упругости и электроупругости для слоя со сквозными туннельными неоднородностями предложен в работе [10]. С использованием этого подхода в [11] решена смешанная кососимметричная задача электроупругости для слоя со сквозным отверстием. а в [7] – кососимметричная задача для неоднородного пьезокерамического цилиндра при смешанных условиях на его торцах.

В данной статье результаты работы [7] распространены на решение задачи для кусочно-неоднородного цилиндра конечной длины, основания которого неэлектродированы и покрыты диафрагмой, жесткой в своей плоскости и гибкой в перпендикулярном направлении.

Постановка задачи. Рассмотрим неоднородный полый пьезокерамический цилиндр конечной длины $-h \leq x_3 \leq h$, в который без предварительного натяжения вклеено или впаяно цилиндрическое включение той же толщины из другого пьезокерамического материала. При этом направляющие цилиндрических поверхностей представляют собой достаточно гладкие замкнутые контуры L_j ($j = 1, 2$). Для определенности под контуром L_1 будем понимать направляющий контур внешней цилиндрической поверхности, под L_2 – направляющий контур поверхности спая полого цилиндра и включения. Пусть на цилиндрической поверхности неоднородного цилиндра действует поверхностная нагрузка N, T, Z, D_n , где N, T, Z – нормальная и касательные компоненты вектора напряжения, D_n – нормальная компонента вектора электрической индукции. Будем считать, что объемные силы и заряды отсутствуют, компоненты заданной нагрузки разложимы в ряды Фурье по координате x_3 на $[-h, h]$.

Построение решения. Полная система уравнений, определяющая решение поставленной задачи [6], состоит из уравнений равновесия

$$\partial_j \sigma_{ij} = 0, \quad \partial_i = \partial / \partial x_i \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad (1)$$

уравнений электростатики

$$\operatorname{div} D = 0, \quad E_i = -\partial_i \varphi \quad (i = \overline{1, 3}), \quad (2)$$

соотношений Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (i, j = \overline{1, 3}) \quad (3)$$

и уравнений состояния предварительно поляризованной в направлении оси Ox_3 пьезокерамики

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11} \varepsilon_{11} + c_{12} \varepsilon_{22} + c_{13} \varepsilon_{33} - e_{31} E_3, \\ \tau_{23} &= 2c_{44} \varepsilon_{23} - e_{15} E_2, \\ \sigma_{22} &= c_{12} \varepsilon_{11} + c_{11} \varepsilon_{22} + c_{13} \varepsilon_{33} - e_{31} E_3, \\ \tau_{13} &= 2c_{44} \varepsilon_{13} - e_{15} E_1, \\ \sigma_{33} &= c_{13} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + c_{33} \varepsilon_{33} - e_{33} E_3, \\ \tau_{12} &= (c_{11} - c_{12}) \varepsilon_{12}, \\ D_1 &= \varepsilon_{11}^S E_1 + 2e_{15} \varepsilon_{13}, \quad D_2 = \varepsilon_{11}^S E_2 + 2e_{15} \varepsilon_{23}, \\ D_3 &= \varepsilon_{33}^S E_3 + e_{31} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + e_{33} \varepsilon_{33}. \end{aligned} \quad (4)$$

Систему уравнений (1)–(4) нужно решать при граничных условиях на основаниях цилиндра $x_3 = \pm h$

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \sigma_{33} = 0, \quad D_3 = 0, \quad (5)$$

и условиях контакта на границе раздела сред.

В дальнейшем в качестве исходной целесообразно использовать систему уравнений равновесия в перемещениях, к которой можно прийти из (1)–(4). Имеем

$$\begin{aligned} V \nabla^2 u_1 + c_{44} \partial_3^2 u_1 + \partial_1 \theta &= 0, \quad V \nabla^2 u_2 + c_{44} \partial_3^2 u_2 + \partial_2 \theta = 0, \\ c_{44} \nabla^2 u_3 + c_{33} \partial_3^2 u_3 + \partial_3 \{c(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2)\} + e_{15} \nabla^2 \varphi + e_{33} \partial_3^2 \varphi &= 0, \\ \varepsilon_{11} \nabla^2 \varphi + \varepsilon_{33} \partial_3^2 \varphi - e_{15} \nabla^2 u_3 - e_{33} \partial_3^2 u_3 - \partial_3 \{e(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2)\} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad U = \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}), \quad V = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}), \\ c &= c_{13} + c_{44}, \quad e = e_{15} + e_{31}, \quad \theta = U(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + c \partial_3 u_3 + e \partial_3 \varphi. \end{aligned}$$

Будем разыскивать симметричное относительно срединной плоскости

цилиндра $x_3 = 0$ решение системы (6). Представим компоненты вектора перемещения и потенциал в виде

$$u_i = \sum_{k=0}^{\infty} u_{ik} \cos \gamma_k x_3 \quad (i = 1, 2),$$

$$\{u_3, \varphi\} = \sum_{k=0}^{\infty} \{u_{3k}, \varphi_k\} \sin \gamma_k x_3. \quad (7)$$

Здесь $\gamma_k = \frac{2k+1}{2h} \pi$.

Представления (7) автоматически удовлетворяют граничным условиям (5) на основаниях цилиндра. С учетом этих соотношений из (6) можно получить

$$V \kappa_k u_{1k} + \partial_1 \theta_k = 0, \quad V \kappa_k u_{2k} + \partial_2 \theta_k = 0,$$

$$L_{13} u_{3k} + L_{14} \varphi_k - \frac{c}{U} \gamma_k \theta_k = 0,$$

$$L_{23} u_{3k} + L_{24} \varphi_k - \frac{e}{U} \gamma_k \theta_k = 0. \quad (8)$$

При этом

$$\kappa_k = \nabla^2 - \gamma_k^2 \mu_0^2, \quad L_{13} = c_{44} \nabla^2 - \gamma_k^2 \delta_1, \quad \mu_0^2 = \frac{c_{44}}{V},$$

$$L_{14} = L_{23} = e_{15} \nabla^2 - \gamma_k^2 \delta_2, \quad L_{24} = \gamma_k^2 \delta_3 - \varepsilon_{11} \nabla^2,$$

$$\theta_k = U (\partial_1 u_{1k} + \partial_2 u_{2k}) + \gamma_k c u_{3k} + \gamma_k e \varphi_k,$$

$$\delta_1 = c_{33} - \frac{c^2}{U}, \quad \delta_2 = e_{33} - \frac{ce}{U}, \quad \delta_3 = \varepsilon_{33} + \frac{e^2}{U}.$$

Интегрируя систему (8), находим

$$u_{1k} - i u_{2k} = -2 \gamma_k \frac{U}{V} \sum_{m=1}^3 \frac{P_4^*(\mu_m)}{\mu_m^2 - \mu_0^2} \frac{\partial}{\partial z} \Omega_k^{(m)} + 2i \frac{\partial}{\partial z} \Omega_k^{(0)},$$

$$u_{3k} = \gamma_k^2 \sum_{m=1}^3 (d_2 \mu_m^2 - \delta_5) \Omega_k^{(m)} \quad (k = 0, 1, \dots),$$

$$\varphi_k = \gamma_k^2 \sum_{m=1}^3 (\delta_4 - d_1 \mu_m^2) \Omega_k^{(m)}. \quad (9)$$

Здесь $\delta_4 = \frac{\delta_1}{c} - \frac{\delta_2}{e}$; $\delta_5 = \frac{\delta_2}{c} + \frac{\delta_3}{e}$; $\Omega_k^{(m)}$ – произвольное решение уравнения Гельмгольца $(\nabla^2 - \gamma_k^2 \mu_m^2) \Omega_k^{(m)} = 0$; $\Omega_k^{(0)}$ – произвольное решение уравнения $(\nabla^2 - \gamma_k^2 \mu_0^2) \Omega_k^{(0)} = 0$; μ_m ($m = \overline{1, 3}$) – корни бикубического уравнения [10];

d_k – постоянные, зависящие от физико-механических характеристик пьезокерамики. В дальнейшем индексом «1» отметим величины, относящиеся к полуму цилиндру, индексом «2» – относящиеся к включению.

Искомые метагармонические функции, фигурирующие в (9), будем разыскивать в виде

$$\begin{aligned}\Omega_{1k}^{(m)} &= \int_{L_1} p_{1k}^{(m)}(\zeta_1) K_0(\gamma_k \mu_1^{(m)} r_{11}) ds_1 + \\ &+ \int_{L_2} \tilde{p}_{1k}^{(m)}(\zeta_2) K_0(\gamma_k \mu_1^{(m)} r_{12}) ds_2, \\ \Omega_{2k}^{(m)} &= \int_{L_2} p_{2k}^{(m)}(\zeta_2) K_0(\gamma_k \mu_2^{(m)} r_{22}) ds_2 \quad (m = \overline{0, 3}),\end{aligned}\quad (10)$$

в котором

$$\begin{aligned}r_{11} &= |\zeta_1 - z^{(1)}|, \quad r_{12} = |\zeta_2 - z^{(1)}|, \quad r_{22} = |\zeta_2 - z^{(2)}|, \\ z^{(1)} &= x_{11} + ix_{12}, \quad z^{(2)} = x_{21} + ix_{22}, \\ \zeta_1 &= \xi_{11} + i\xi_{12} \in L_1, \quad \zeta_2 = \xi_{21} + i\xi_{22} \in L_2;\end{aligned}$$

$K_n(z)$ – функция Макдональда n -го порядка; ds_j – элемент дуги контура L_j ($j = 1, 2$); $p_{1k}^{(m)}(\zeta_1)$, $\tilde{p}_{1k}^{(m)}(\zeta_2)$, $p_{2k}^{(m)}(\zeta_2)$ – неизвестные плотности, причем $p_{1k}^{(3)} = \bar{p}_{1k}^{(2)}$, $\tilde{p}_{1k}^{(3)} = \bar{\tilde{p}}_{1k}^{(2)}$, $p_{2k}^{(3)} = \bar{p}_{2k}^{(2)}$.

Будем предполагать, что для компонент тензора напряжений и нормальной компоненты вектора электрической индукции, действующих на поверхности цилиндра, справедливы разложения

$$\begin{aligned}\{N, T\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \{N_k, T_k\} \cos \gamma_k x_3, \\ \{Z, D_n\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \{Z_k, D_n^{(k)}\} \sin \gamma_k x_3.\end{aligned}\quad (11)$$

Граничные условия на L запишем в комплексной форме

$$\begin{aligned}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - e^{2i\psi}(\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) &= 2(N - iT), \\ \operatorname{Re}\{e^{-i\psi}(\sigma_{13} + i\sigma_{23})\} &= Z, \quad D_n = 0,\end{aligned}\quad (12)$$

где ψ – угол между внешней нормалью к поверхности неоднородного цилиндра и осью Ox_1 . Условия сопряжения на границе раздела материалов имеют вид

$$\begin{aligned}N_1 - iT_1 &= N_2 - iT_2, \\ u_{11} - iu_{21} &= u_{12} - iu_{22}, \quad u_{31} = u_{32}, \\ Z_1 = Z_2, \quad E_{1s} &= E_{2s}, \quad D_{1n} = D_{2n}.\end{aligned}\quad (13)$$

Граничная задача (12)–(13) с учетом представлений (10) при помощи предельного перехода на L_1 и L_2 сводится к системе, состоящей из двенадцати сингулярных интегродифференциальных уравнений (при каждом фиксированном k).

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^3 \left[q_{1k}^{(m)} g_{11k}^{(m)} + \sum_{j=1}^2 \int_{L_j} q_{jk}^{(m)} G_{ljk}^{(m)} ds_j \right] = 0 \quad (l = 1, 2), \\
& \sum_{m=0}^3 \left[\sum_{j=2}^3 q_{jk}^{(m)} g_{ljk}^{(m)} + \sum_{j=1}^2 \int_{L_j} q_{jk}^{(m)} G_{ljk}^{(m)} ds_j + \int_{L_2} q_{3k}^{(m)} G_{l3k}^{(m)} ds_2 \right] = 0 \quad (l = \overline{3, 6}), \\
& \sum_{m=0}^3 \left[q_{1k}^{(m)} g_{7k}^{(m)} + \tilde{g}_{7k}^{(m)} \frac{dq_{1k}^{(m)}}{ds_{01}} + \sum_{j=1}^2 \left(\int_{L_j} q_{jk}^{(m)} G_{7jk}^{(m)} ds_j + \int_{L_j} \frac{dq_{jk}^{(m)}}{ds_j} \tilde{G}_{7jk}^{(m)} ds_j \right) \right] = N_k, \\
& \sum_{m=0}^3 \left[\sum_{j=2}^3 \left(q_{jk}^{(m)} g_{8jk}^{(m)} + \tilde{g}_{8jk}^{(m)} \frac{dq_{jk}^{(m)}}{ds_{02}} \right) + \sum_{j=1}^2 \left(\int_{L_j} q_{jk}^{(m)} G_{8jk}^{(m)} ds_j + \int_{L_j} \frac{dq_{jk}^{(m)}}{ds_j} \tilde{G}_{8jk}^{(m)} ds_j \right) + \right. \\
& \quad \left. + \int_{L_2} q_{3k}^{(m)} G_{83k}^{(m)} ds_2 + \int_{L_2} \frac{dq_{3k}^{(m)}}{ds_2} \tilde{G}_{83k}^{(m)} ds_2 \right] = 0, \\
& \sum_{m=0}^3 \left[\sum_{j=1}^2 \int_{L_j} q_{jk}^{(m)} G_{9jk}^{(m)} ds_j + \int_{L_2} q_{3k}^{(m)} G_{93k}^{(m)} ds_2 \right] = 0. \tag{14}
\end{aligned}$$

Ядра подынтегральных выражений и коэффициенты при неизвестных у внеинтегральных слагаемых не приведены ввиду их громоздкости. Неизвестные плотности в (14) связаны с плотностями в интегральных представлениях (10) следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
p_{1k}^{(m)} &= q_{1k}^{(m)}, \quad \tilde{p}_{1k}^{(m)} = q_{2k}^{(m)}, \quad p_{2k}^{(m)} = q_{3k}^{(m)} \quad (m = 0, 1), \\
p_{1k}^{(2)} &= q_{1k}^{(2)} + iq_{1k}^{(3)}, \quad \tilde{p}_{1k}^{(2)} = q_{2k}^{(2)} + iq_{2k}^{(3)}, \quad p_{2k}^{(2)} = q_{3k}^{(2)} + iq_{3k}^{(3)}.
\end{aligned}$$

Результаты численных расчетов. В качестве примера рассмотрим неоднородный цилиндр с включением кругового поперечного сечения:

$$\begin{aligned}
L_1 : \quad \xi_{11} &= R_{11} \cos \varphi_1, \quad \xi_{12} = R_{12} \sin \varphi_1, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi, \\
L_2 : \quad \xi_{21} &= R_{21} \cos \varphi_2 + d, \quad \xi_{22} = R_{22} \sin \varphi_2, \quad 0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi,
\end{aligned}$$

и включением квадратного сечения (квадрат с закругленными углами):

$$\begin{aligned}
L_2 : \quad \xi_{21} &= a (\cos \varphi_2 + b \cos 3\varphi_2) + d, \\
\xi_{22} &= a (\sin \varphi_2 - b \sin 3\varphi_2), \quad 0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi.
\end{aligned}$$

На поверхности цилиндра действует нагрузка $N = P$ ($P = const$).

При численной реализации решения система интегральных уравне-

ний методом механических квадратур сводилась к линейной системе алгебраических уравнений. Для характеристики напряженного состояния на границе разделов материалов производился расчет напряжения

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11} \sin^2 \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta - 2\sigma_{12} \cos \theta \sin \theta, \quad (15)$$

$\theta = \psi - \pi$ – со стороны полого цилиндра и $\theta = \psi$ – со стороны включения.

Последовательность вычислений такова: сначала численно решается система интегродифференциальных уравнений, после чего определяются коэффициенты Фурье тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(k)}$, затем по формулам (15) вычисляются искомые напряжения на границе раздела материалов в цилиндре и во включении.

На рис. 1–4 приведены эпюры распределения относительного окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta}/P$ вдоль «толщинной» координаты в точке $\varphi_2 = 0$ на границе раздела материалов (рис. 1, 3) и по контуру ограничивающему включение в сечении $x_3 = 0$ (рис. 2, 4), при $h = 2$, $R_{11} = R_{12} = 2$ (материал включения – *PXE-5*, материал полого цилиндра – *PZT-4*).

На рис. 1, 2 приведены эпюры для включения кругового поперечного

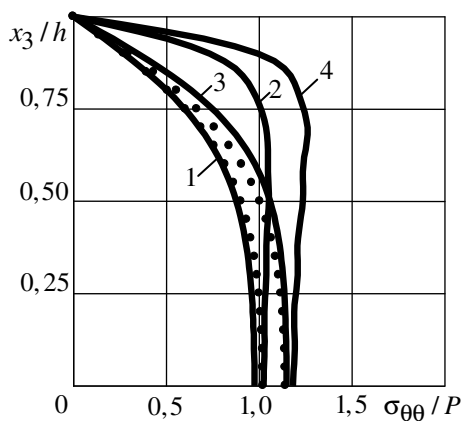


Рис. 1

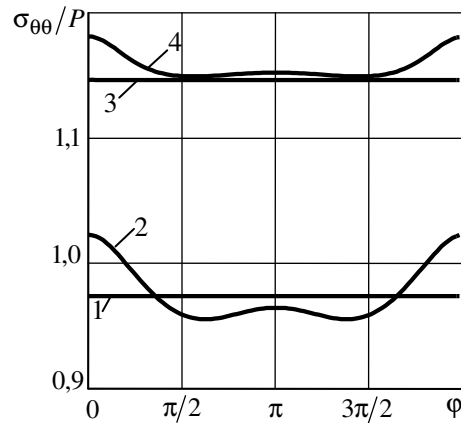


Рис. 2

сечения ($R_{21} = R_{22} = 1$). Кривые 1 и 3 относятся к напряжениям, возникающим во включении и в полом цилиндре соответственно. Кривые 2 и 4 приведены для $d = 0,75$ во включении и в полом цилиндре. Точками вдоль кривых 1 и 3 нанесены результаты решения осесимметричной задачи для неоднородного кругового цилиндра, полученного методом рядов.

На рис. 3, 4 приведены эпюры относительного окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta}/P$ для случая, когда контур, ограничивающий включение, представляет собой квадрат со скругленными углами следующей геометрии: $a = 1$, $b = 0,14036$. Кривые 1 и 2 на этих рисунках относятся к напряжениям, возникающим во включении при $d = 0$ и $d = 0,5$ соответственно. Кривые 3 и 4 относятся к напряжениям, возникающим в полом цилиндре для значений $d = 0$ и $d = 0,5$ соответственно.

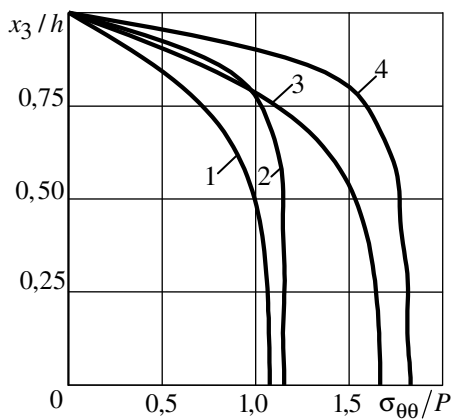


Рис. 3

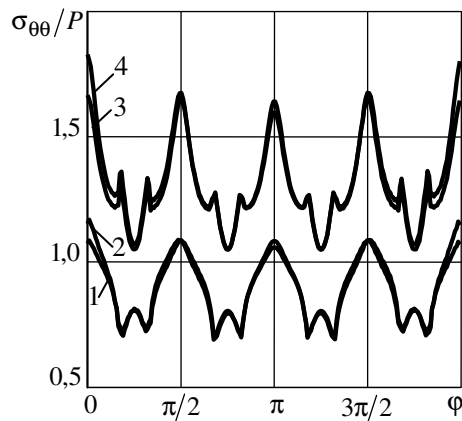


Рис. 4

Из проведенных исследований следует, что концентрация напряжения в полем цилиндре больше, чем во включении; при смещении включения к границе неоднородного цилиндра происходит рост относительного окружного напряжения, как во включении, так и в полем цилиндре.

Сравнение результатов полученных с помощью предложенного алгоритма с решением методом рядов (осесимметричный случай), дает возможность отметить достаточно высокую его эффективность.

РЕЗЮМЕ. Пропонується процедура рішення просторових змішаних симетричних задач теорії електропружності для неоднорідного циліндру. Крайова задача зведена до системи інтегро-диференціальних рівнянь. Приводяться результати розрахунків характеристичних напружень.

Ключові слова: кусочно-однорідний циліндр, електропружне включення, електропружність, змішана задача

SUMMARY. A procedure of spatial mixed symmetric problems of theory of electroelasticity for inhomogeneous cylinder is proposed. The boundary problem reduced to system integral and differential equations. The results of calculations of characteristic stresses are presented.

Key words: piece-homogeneous cylinder, electro-elastic inclusion, electroelasticity, mixed task

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.

1. Алтухов Е. В., Галич В. А. Напряженное состояние полого цилиндра с ограничениями по торцам // Теорет. и прикладная механика. – 2004. – Вып. 39. – С. 8–18.
2. Алтухов Е. В., Косова В. В. Смешанная краевая задача для трапециевидного слоя с полостью // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 8–15.
3. Буланов Г. С., Шалдырван В. А. Решение смешанной задачи о концентрации напряжений в толстой пластине // Теорет. и прикладная механика. – 1984. Вып. 15. – С. 5–9.
4. Григолюк Э. И., Ковалев Ю. Д., Фильштинский Л. А. Изгиб полуслоя, ослабленного сквозным отверстием // Докл. РАН. – 1995. – Т. 345, № 1. – С. 54–56.
5. Григоренко Я. М., Крюков Н. Н., Крижановская Т. В. Исследование напряженного состояния ортотропных полых цилиндров при несимметрическом нагружении // Теорет. и прикладная механика. – 2001. – Вып. 33. – С. 3–6.
6. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т.: Т. 5).
7. Ковалев Ю. Д., Стативка Е. Н. Смешанная кососимметричная задача электроупругости

сти для неоднородного цилиндра // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 83–90.

8. *Космодамианский А. С., Шалдырван В. А.* Толстые многосвязные пластины. – К.: Наук. думка, 1978. – 237 с.

9. *Улитко А. Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. – К.: Наук. думка, 1979. – 261 с.

10. *Фильштинский Л. А.* Периодические решения теории упругости для цилиндра в R^3 // Теорет. и прикладная механика. – Вып. 21. – С. 13–20.

11. *Фильштинский Л. А., Ковалев Ю. Д.* Концентрация механических напряжений у отверстия в пьезокерамическом слое // Механика композитных материалов – 2002. – Т. 28, № 2. – С. 183–188.

12. *Хома И. Ю., Хома Ю. И., Проценко Т. М.* Трехмерное распределение напряжений около отверстия в нетонкой пьезокерамической пластине // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 18–23.

Сумской государственной университет

Поступила 10.09.2010

УДК 539.3

О. Н. ПАНАСЮК

РАСПРОСТРАНЕНИЕ КВАЗИПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В СЛОИСТЫХ МАТЕРИАЛАХ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ С УЧЕТОМ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ

В рамках трехмерной линеаризованной теории упругости решена задача о распространении квазипродольных волн вдоль слоев композитного материала с начальными напряжениями. Композит состоит из двух чередующихся слоев, между которыми осуществляется полное проскальзывание. Проведено численное исследование дисперсионного уравнения, а также изучено влияние начальных напряжений на скорость распространения волн.

Ключевые слова: слоистый композитный материал, трехмерная линеаризованная теория упругости, начальные напряжения, неполный контакт, квазипродольные волны.

Динамические процессы в телах с начальными напряжениями, в том числе и в слоистых композитах, исследовались многими авторами. Эти исследования вошли и в ряд монографий [4, 5 и др.]. Анализ указанных работ можно найти в [1, 3]. Распространение упругих волн в слоистых материалах без начальных напряжений рассмотрено в [2, 9]. Той же проблеме для слоистых композитных материалов с начальными напряжениями периодической структуры посвящены работы [4, 6, 7], при условии полного контакта слоев. В работе [8] указанный метод исследования упругих волн применен для слоистых композитных материалов с начальными напряжениями [4] на случай полного проскальзывания слоев. В настоящей статье дано развитие этого метода, численно исследовано дисперсионное соотношение для квазипродольных волн.

Постановка задачи. Рассмотрим слоистый композит, состоящий из двух чередующихся компонентов. Все величины, относящиеся к каждому из компонентов, будем отмечать верхним индексом в скобках. Аналогично работам [1, 5] будем различать три состояния материала: естественное (напряжения и деформации во всех слоях отсутствуют); начальное состояние, для которого все величины обозначаются верхним индексом «0» (соответствует предварительному напряженно-деформированному состоянию), и возмущенное состояние, все величины которого равны сумме соответствующих величин начального состояния и малых возмущений, вызванных прохождением волн. Поскольку возмущения значительно меньше соответствующих величин начального состояния, то исследования проведем в рамках линеаризованной теории упругости.

Введем две системы координат: лагранжеву (x_1, x_2, x_3) , совпадающую с декартовой в естественном состоянии, и декартову (y_1, y_2, y_3) в начальном состоянии. Поскольку лагранжевы системы для каждого из компонентов могут быть различными, то декартовую систему в начальном состоянии выберем общей для двух компонентов. Такой выбор дает

возможность в удобной форме рассматривать задачи с различными удлинениями каждого из материалов. Тогда для однородных начальных состояний можем записать

$$\begin{aligned} y_m &= \lambda_m^{(1)} x_m^{(1)}, \quad y_m = \lambda_m^{(2)} x_m^{(2)}, \quad \lambda_m^{(j)} = \text{const} \quad (j = 1, 2), \\ y_m &= x_m^{(j)} + u_m^{0(j)}, \quad u_m^{0(j)} = \delta_{mn} (\lambda_m^{(j)} - 1) x_n^{(j)} \quad (m, n = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\lambda_m^{(j)}$ – коэффициент удлинения вдоль координатной оси, δ_{mn} – символ Кронекера.

Будем рассматривать сжимаемые изотропные или ортотропные материалы. В случае ортотропных материалов примем, что упруго-эквивалентные направления совпадают с направлениями осей системы координат. Материалы каждого из компонентов демонстрируют нелинейно упругое поведение, упругие потенциалы для которых представляют собой произвольные дважды непрерывно-дифференцируемые функции. Тогда начальным перемещениям (1) соответствуют начальные напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{mn}^0 &= \delta_{mn} \sigma_{nn}^0, \quad S_{mn}^0 = \delta_{mn} S_{nn}^0, \\ \sigma_{nn}^0 &= \text{const}, \quad S_{nn}^0 = \text{const} \quad (m, n = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (2)$$

в которых σ_{mn} – тензор истинных напряжений, S_{mn} – тензор напряжений Лагранжа, по m не суммировать.

Воспользуемся постановкой задачи динамики для многослойных материалов, предложенной в [4, 6]. Она основана на использовании линеаризованных уравнений движения и состояния для сжимаемого тела, в которые входят перемещения u_i , тензор обобщенных напряжений S_{im} и компоненты тензоров четвертого ранга $\omega_{im\alpha\beta}^{(j)} = \omega_{im\alpha\beta}^{(j)}(S_{11}^0, S_{22}^0, S_{33}^0)$ ($i, m, \alpha, \beta = 1, 2, 3$). Выражения для этих величин в наиболее общем виде представлены в работе [4]. Будем считать, что ось Oy_3 направлена по нормали к поверхности раздела компонентов. Тогда толщины слоев в естественном $h^{(j)}$ и в начальных состояниях $h'^{(j)}$ связаны соотношением $h'^{(j)} = \lambda_3^{(j)} h^{(j)}$ ($j = 1, 2$). Здесь и ниже штрихом обозначены соответствующие величины в начальном состоянии. Так, плотности компонентов в естественном и начальном состояниях обозначаются $\rho^{(j)}$ и $\rho'^{(j)}$ соответственно.

В системе координат начального состояния (y_1, y_2, y_3) основные уравнения имеют вид: уравнение движения для j -го слоя

$$\begin{aligned} L_{m\alpha}^{(j)} u_\alpha^{(j)} &= 0, \quad L_{m\alpha}^{(j)} = \omega_{im\alpha\beta}^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_\beta} - \rho'^{(j)} \delta_{m\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \\ &(i, m, \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\omega_{im\alpha\beta}^{(j)} = \frac{\lambda_i^{(j)}\lambda_\beta^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}\lambda_2^{(j)}\lambda_3^{(j)}} \omega_{im\alpha\beta}^{(j)}, \quad \rho^{(j)} = \frac{\rho^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}\lambda_2^{(j)}\lambda_3^{(j)}},$$

а выражения для составляющих тензора напряжений при $y_3 = const$ имеют вид

$$Q_{3m}^{(j)} = \omega_{3m\alpha\beta}^{(j)} \frac{\partial u_\alpha^{(j)}}{\partial y_\beta}. \quad (4)$$

Метод решения. Рассмотрим распространение волны с фазовой нормалью $\vec{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$. Скорость распространения волны и фазовую нормаль будем относить к системе координат в начальном состоянии (y_1, y_2, y_3) . Согласно [4, 5], решение системы (3) представим в форме

$$u_\alpha^{(j)}(y_1, y_2, y_3, \tau) = u_\alpha^{(j)(0)}(y_3) e^{i(kn_t y_t - \omega\tau)}; \quad C = \omega k^{-1} \\ (t, \alpha = 1, 2, 3, j = 1, 2), \quad (5)$$

где k – волновое число, ω – круговая частота. В (5) и ниже индексом (0) отмечены амплитудные величины, зависящие только от y_3 .

Подстановка решения (5) в уравнения (3) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для определения амплитуд вектора перемещений в следующем виде:

$$e^{i(-kn_t y_t)} \omega_{im\alpha\beta}^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_\beta} u_\alpha^{(j)(0)}(y_3) e^{i(kn_q y_q)} + \rho^{(j)} \omega^2 u_m^{(j)(0)}(y_3) = 0 \\ (i, m, \alpha, \beta, t, q = 1, 2, 3; j = 1, 2). \quad (6)$$

Для определения составляющих тензора напряжений при $y_3 = const$, подставив (5) в (4), находим

$$Q_{3m}^{(j)} = Q_{3m}^{(j)(0)}(y_3) e^{i(kn_t y_t - \omega\tau)} \quad (m, \alpha, \beta, t, q = 1, 2, 3, j = 1, 2), \\ Q_{3m}^{(j)(0)}(y_3) = e^{i(-kn_q y_q)} \omega_{3m\alpha\beta}^{(j)} \frac{\partial}{\partial y_\beta} u_\alpha^{(j)(0)}(y_3) e^{i(kn_t y_t)}. \quad (7)$$

Рассмотрим условия контакта. Для этого выделим два соседних слоя, величины которых обозначены индексом 1 и 2 соответственно. Считаем, что слой с индексом 1 занимает по оси oy_3 область $0 \leq y_3 \leq h^{(1)}$, а слой с индексом 2 – область $-h^{(2)} \leq y_3 \leq 0$. В этом случае, при $y_3 = 0$, в отличие от условий непрерывности, которые рассматривались в работах [4, 6, 7, 2, 9], должны выполняться следующие условия скользящего контакта:

$$\begin{aligned}
u_3^{(1)(0)}(0) &= u_3^{(2)(0)}(0), & Q_{33}^{(1)(0)}(0) &= Q_{33}^{(2)(0)}(0), \\
Q_{31}^{(1)(0)}(0) &= 0, & Q_{32}^{(1)(0)}(0) &= 0, \\
Q_{31}^{(2)(0)}(0) &= 0, & Q_{32}^{(2)(0)}(0) &= 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

В силу периодичности структуры материала, согласно теореме Флоке, должны также выполняться условия периодичности для амплитудных величин в следующем виде:

$$\begin{aligned}
u_3^{(1)(0)}(h^{(1)}) &= u_3^{(2)(0)}(-h^{(2)}), & Q_{33}^{(1)(0)}(h^{(1)}) &= Q_{33}^{(2)(0)}(-h^{(2)}), \\
Q_{31}^{(1)(0)}(h^{(1)}) &= 0, & Q_{32}^{(1)(0)}(h^{(1)}) &= 0, \\
Q_{31}^{(2)(0)}(-h^{(2)}) &= 0, & Q_{32}^{(2)(0)}(-h^{(2)}) &= 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, необходимо, решив систему (6), найти функции $u_\alpha^{(j)(0)}(y_3)$ и по ним определить из второго соотношения (7) функции $Q_{3m}^{(j)(0)}(y_3)$. Подставить полученные выражения в условия контакта (8) и в условия периодичности (9), а затем из условия существования нетривиальных решений полученной системы алгебраических уравнений вывести дисперсионное соотношение.

Дисперсионное уравнение. Для определенности будем считать, что распространение волн вдоль слоев происходит в направлении оси Oy_1 . В этом случае исходную задачу можно разделить на две независимые задачи: распространение волн вдоль оси Oy_1 , поляризованных в плоскости Oy_1y_3 (квазипродольная и квазипоперечная волна); распространение волн вдоль оси Oy_1 , поляризованных в плоскости Oy_1y_2 (чисто поперечная (сдвиговая) волна). Под квазипродольными и квазипоперечными будем понимать волны, которые в длинноволновом приближении переходят в соответствующие продольные и поперечные волны.

Рассмотрим волны, поляризованные в плоскости Oy_1y_3 ($u_2^{(j)} = 0$) с волновым вектором $\vec{k} = (k, 0, 0)$. Следуя [4, 7], решение системы (3) представим в виде

$$\begin{aligned}
u_\alpha^{(j)} &= u_\alpha^{(j)(0)} \exp[i(ky_1 - \omega\tau)] \quad (\alpha = 1, 3; j = 1, 2), \\
u_3^{(j)(0)} &= A^{(j)} \exp[i\alpha^{(j)}y_3], \quad u_1^{(j)(0)} = \gamma^{(j)}u_3^{(j)(0)},
\end{aligned} \tag{10}$$

где $A^{(j)}$, $\alpha^{(j)}$ и $\gamma^{(j)}$ – некоторые постоянные.

Реализовав изложенную выше процедуру и подставив выражения (10) в (3), получим

$$\gamma^{(j)} \left(\omega_{1111}^{(j)} k^2 + \omega_{3113}^{(j)} \alpha^{(j)2} - \rho^{(j)} \omega^2 \right) + \left(\omega_{1313}^{(j)} + \omega_{1133}^{(j)} \right) k \alpha^{(j)} = 0,$$

$$\gamma^{(j)} \left(\omega_{1313}^{(j)} + \omega_{1133}^{(j)} \right) k \alpha^{(j)} + \left(\omega_{1331}^{(j)} k^2 + \omega_{3333}^{(j)} \alpha^{(j)2} - \rho^{(j)} \omega^2 \right) = 0 \quad (j = 1, 2). \quad (11)$$

Из системы уравнений (11) получаем четыре решения для $\alpha^{(j)}$: $\alpha_2^{(j)} = -\alpha_1^{(j)}$; $\alpha_4^{(j)} = -\alpha_3^{(j)}$. Учитывая это, несколько изменим представление решения (10), записав его относительно средней линии каждого из слоев:

$$\begin{aligned} u_1^{(1)(0)} &= \gamma_1^{(1)} \left\{ B_1^{(1)} e^{ia_1^{(1)} \left(y_3 - \frac{h^{(1)}}{2} \right)} - B_2^{(1)} e^{-ia_1^{(1)} \left(y_3 - \frac{h^{(1)}}{2} \right)} \right\} + \\ &+ \gamma_3^{(1)} \left\{ B_3^{(1)} e^{ia_3^{(1)} \left(y_3 - \frac{h^{(1)}}{2} \right)} - B_4^{(1)} e^{-ia_3^{(1)} \left(y_3 - \frac{h^{(1)}}{2} \right)} \right\}, \\ u_1^{(2)(0)} &= \gamma_1^{(2)} \left\{ B_1^{(2)} e^{ia_1^{(2)} \left(y_3 + \frac{h^{(2)}}{2} \right)} - B_2^{(2)} e^{-ia_1^{(2)} \left(y_3 + \frac{h^{(2)}}{2} \right)} \right\} + \\ &+ \gamma_3^{(2)} \left\{ B_3^{(2)} e^{ia_3^{(2)} \left(y_3 + \frac{h^{(2)}}{2} \right)} - B_4^{(2)} e^{-ia_3^{(2)} \left(y_3 + \frac{h^{(2)}}{2} \right)} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогичные соотношения получаются для $u_3^{(1)(0)}$ и $u_3^{(2)(0)}$.

Выразив составляющие тензора напряжений (7) через перемещения (12) и подставив их вместе с перемещениями в условия контакта (8) и периодичности (9), получим однородную систему алгебраических уравнений восьмого порядка (в виду громоздкости здесь ее не приводим).

Рассмотрим один из частных случаев, распространение квазипродольных волн. Для таких волн перемещения $u_1^{(j)}$ симметричны, а $u_3^{(j)}$ антисимметричны относительно средин соответствующих слоев. В связи с этим в (12) положим

$$B_1^{(j)} = -B_2^{(j)} \quad B_3^{(j)} = -B_4^{(j)}. \quad (13)$$

Следуя выше изложенной процедуре и учитывая (13), получаем однородную систему четырех алгебраических уравнений относительно $B_1^{(j)}$ и $B_3^{(j)}$, так как условия контакта и периодичности в этом случае совпадают. Приравнявая детерминант этой системы нулю, приходим к дисперсионному соотношению

$$\begin{aligned} &\omega_{3113}^{(2)} \left(a_1^{(2)} \gamma_1^{(2)} - a_3^{(2)} \gamma_3^{(2)} \right) \left[\omega_{3113}^{(1)} \omega_{1133}^{(1)} k \gamma_1^{(1)} \gamma_3^{(1)} \left(a_3^{(1)} \beta_{13} - a_1^{(1)} \beta_{11} \right) + \right. \\ &+ \omega_{1313}^{(1)} \omega_{1133}^{(1)} k^2 \left(\gamma_1^{(1)} \beta_{13} - \gamma_3^{(1)} \beta_{11} \right) + \omega_{3113}^{(1)} \omega_{3333}^{(1)} a_1^{(1)} a_3^{(1)} \left(\gamma_3^{(1)} \beta_{13} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma_1^{(1)}\beta_{11}) + \omega_{1313}^{(1)}\omega_{3333}^{(1)}k(a_1^{(1)}\beta_{13} - a_3^{(1)}\beta_{11})] \beta_{21}\beta_{23} + \\
& + \omega_{3113}^{(1)}(a_1^{(1)}\gamma_1^{(1)} - a_3^{(1)}\gamma_3^{(1)})[\omega_{3113}^{(2)}\omega_{1133}^{(2)}k\gamma_1^{(2)}\gamma_3^{(2)}(a_3^{(2)}\beta_{23} - a_1^{(2)}\beta_{21}) + \\
& + \omega_{1313}^{(2)}\omega_{1133}^{(2)}k^2(\gamma_1^{(2)}\beta_{23} - \gamma_3^{(2)}\beta_{21}) + \omega_{3113}^{(2)}\omega_{3333}^{(2)}a_1^{(2)}a_3^{(2)}(\gamma_3^{(2)}\beta_{23} - \\
& - \gamma_1^{(2)}\beta_{21}) + \omega_{1313}^{(2)}\omega_{3333}^{(2)}k(a_1^{(2)}\beta_{23} - a_3^{(2)}\beta_{21})] \beta_{11}\beta_{13} = 0. \tag{14}
\end{aligned}$$

Здесь

$$\beta_{jn} = tg a_n^{(j)} \frac{h^{(j)}}{2} \quad (j = 1, 2, n = 1, 3).$$

Перейдем к длинноволновому приближению. Заменяя $tg x \approx x$, из уравнения (14) получаем

$$\begin{aligned}
& (\omega_{1111}^{(2)} - \rho^{(2)}C_{ly_1}^2) \left[\omega_{1133}^{(1)2} - \omega_{3333}^{(1)}(\omega_{1111}^{(1)} - \rho^{(1)}C_{ly_1}^2) \right] m + \\
& + (\omega_{1111}^{(1)} - \rho^{(1)}C_{ly_1}^2) \left[\omega_{1133}^{(2)2} - \omega_{3333}^{(2)}(\omega_{1111}^{(2)} - \rho^{(2)}C_{ly_1}^2) \right] = 0, \tag{15}
\end{aligned}$$

где ρ – скорость продольной волны распространяющейся вдоль оси Oy_1 , $m = h^{(2)}(h^{(1)})^{-1}$ – отношение толщин слоев в начальном состоянии.

При малых m ($h^{(2)} \rightarrow 0$)

$$C_{ly_1,1}^2 = \rho^{(1)-1}\omega_{1111}^{(1)}, \quad C_{ly_1,2}^2 = \rho^{(2)-1}(\omega_{1111}^{(2)} - \omega_{1133}^{(2)2}\omega_{3333}^{(2)-1}). \tag{16}$$

При больших m ($h^{(1)} \rightarrow 0$)

$$C_{ly_1,1}^2 = \rho^{(2)-1}\omega_{1111}^{(2)}, \quad C_{ly_1,2}^2 = \rho^{(1)-1}(\omega_{1111}^{(1)} - \omega_{1133}^{(1)2}\omega_{3333}^{(1)-1}). \tag{17}$$

Из формулы (15) следует, что при распространении волн вдоль слоев композитного материала при проскальзывании слоев, в длинноволновой области волны могут распространяться с двумя скоростями. Отметим, что в формулах (16), (17) первые выражения – это квадраты скоростей продольных волн распространяющихся вдоль оси Oy_1 в предварительно напряженных средах состоящих из материала первого и второго слоя соответственно; вторые выражения – это квадраты скоростей продольных волн распространяющихся вдоль оси Oy_1 в предварительно напряженных пластинках из материала второго и первого слоев соответственно.

Если в (15) перейти к техническим постоянным $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, $\nu^{(1)}$ и $\nu^{(2)}$ (в ненапряженном композите) и рассмотреть крайний случай $\nu^{(1)} = 0$ и $\nu^{(2)} = 0$, то для квадратов скоростей получим выражения

$$C_{ly_1,1}^2 = E^{(1)}\rho^{(1)-1}, \quad C_{ly_1,2}^2 = E^{(2)}\rho^{(2)-1}. \tag{18}$$

Из формул (18) следует, что в длинноволновой области в каждом из слоев распространяется волна независимо от другого слоя, т.е., поскольку $v^{(1)} = 0$ и $v^{(2)} = 0$, то нет взаимодействия между слоями. Скорости волн в (18) равны скоростям продольных волн в стержнях соответственно из первого и второго материала.

Тестовые расчеты. В пакете MATLAB 7.6 реализована программа вычисления фазовых скоростей волн. Программа вычисления фазовой скорости позволяет проводить расчет для различных отношений толщин слоев и различных материалов. Процедура вычисления корней дисперсионного уравнения основана на методе бисекции. Эффективность работы программы проверялась на ряде примеров. В частности, были вычислены фазовые скорости симметричных и антисимметричных волн Лэмба в слое с начальными напряжениями. Для некоторых симметричных в таблице представлено относительное изменение фазовых скоростей, вызванное начальными напряжениями. Результаты получены с точностью до 10^{-4} , 10^{-6} и 10^{-8} . В таблице также приведены аналогичные результаты, полученные в [5] на ЭВМ БЭСМ-4 с использованием алгоритмического языка Алгол-60, где результаты даны с точностью 10^{-6} (корни находятся в интервале [0,8; 30]). Видно хорошее совпадение наших результатов с данными работы [5].

Мода	2	3	5
Приведенная частота \bar{h}	3,16	6,29	9,44
Результаты с точностью 10^{-4}	0,0626	0,2344	0,1787
Результаты с точностью 10^{-6}	0,062621	0,234473	0,178732
Результаты с точностью 10^{-8}	0,06262086	0,23447305	0,17873223
Данные из работы [5]	0,062621	0,234473	0,178732

В качестве другой тестовой задачи проводился расчет фазовых скоростей для симметричных и антисимметричных волн распространяющихся в направлении слоистости среды при различных отношениях модулей сдвига. В этом случае при сравнении графиков также получено хорошее совпадение с данными работы [9].

Численные результаты. Были проведены численные исследования влияния начальных напряжений на фазовую скорость квазипродольной волны в слоистом теле. Считалось, что свойства материалов каждого из слоев можно описать с помощью упругого потенциала типа Мурнагана

$$\Phi^{(j)} = \frac{1}{2} \lambda^{(j)} A_1^{(j)2} + \mu^{(j)} A_2^{(j)} + \frac{a^{(j)}}{3} A_1^{(j)3} + b^{(j)} A_1^{(j)} A_2^{(j)} + \frac{c^{(j)}}{3} A_3^{(j)} \quad (19)$$

где $\lambda^{(j)}$, $\mu^{(j)}$ – постоянные Ляме; $a^{(j)}$, $b^{(j)}$, $c^{(j)}$ – постоянные упругости третьего порядка; $A_i^{(j)}$ ($i = 1, 2, 3$) – алгебраические инварианты тензора деформаций Грина. В качестве материала первого слоя была взята сталь 09Г2С, второго слоя – оргстекло с упругими постоянными, приведенными в работах [4, 5].

Так как материалы слоев являются сравнительно жесткими, не испытывающими больших деформаций, то вместо обобщенных напряжений

можно использовать физические $S_{im}^{0(j)} = \sigma_{im}^{0(j)}$, и параметры $A_{i\beta}^{(j)}$, $\mu_{i\beta}^{(j)}$ и $\lambda_{\beta}^{(j)}$, входящие в выражения для определения составляющих тензоров $\omega_{im\alpha\beta}^{(j)}$ вычислять в линейном приближении [4].

Ограничимся в (2) начальным напряженным состоянием

$$\sigma_{11}^{0(1)} \neq 0, \quad \sigma_{22}^{0(1)} = \sigma_{33}^{0(1)} = \sigma_{11}^{0(2)} = \sigma_{22}^{0(2)} = \sigma_{33}^{0(2)} = 0.$$

Результаты численных решений дисперсионного уравнения показаны на рис. 1–6 для первых пяти мод при соотношении слоев $h^{(2)}/h^{(1)} = 1$.

На рис. 1 приведены графики, характеризующие зависимость величины $C^0/C_S^{0(2)}$ от параметра $\bar{h} = k_t^{(2)}h^{(2)}$, где $k_t^{(2)}$ и $C_S^{0(2)}$ – соответственно волновое число и скорость сдвиговых волн в материале второго слоя без начальных напряжений; C^0 – фазовая скорость квазипродольных волн в композитном материале без начальных напряжений. Цифрами 0–4 обозначены номера мод. Штриховыми линиями обозначено скорость квазипродольной волны, полученной по формуле (15). На рис. 2–6 относительное изменение фазовой скорости, вызванное начальными напряжениями, изображено как функция параметра \bar{h} , где C – фазовая скорость квазипродольных волн в композитном материале с начальными напряжениями. Индексами ψ_n обозначены степени нагрузки $\psi = \sigma_{11}^{0(1)}/\mu^{(1)}$: $\psi_1 = 0,00040$, $\psi_2 = 0,00065$, $\psi_3 = 0,00090$, $\psi_4 = 0,00115$.

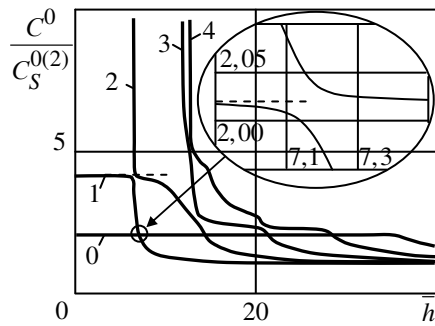


Рис. 1

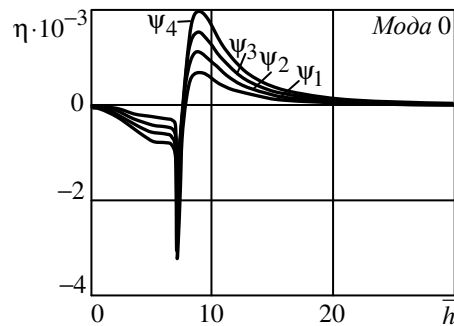


Рис. 2

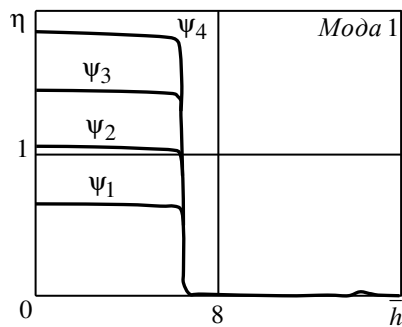


Рис. 3

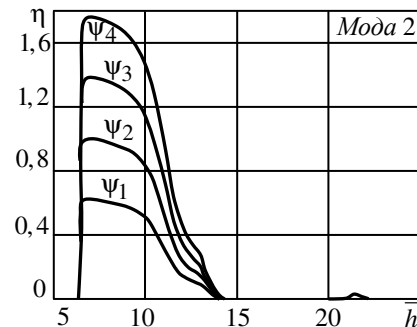


Рис. 4

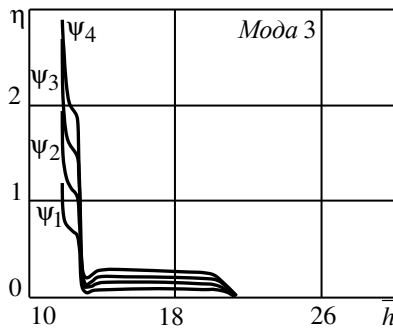


Рис. 5

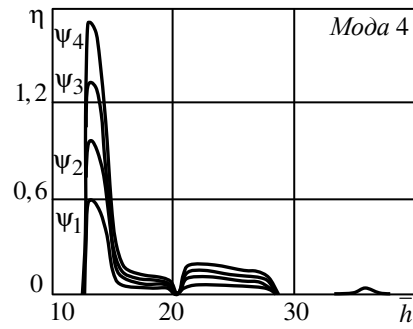


Рис. 6

Анализируя приведенные результаты заключаем следующее: 1) начальные напряжения оказывают значительное влияние на скорости зарождающихся волн; 2) каждая мода имеет диапазон частот, в котором относительное изменение фазовой скорости, вызванное начальными напряжениями, практически не зависит от частоты, и имеются такие диапазоны, где эта зависимость существенна; 3) для некоторых мод существуют частоты, при которых фазовая скорость не зависит от начальных напряжений (эта частота определяется точкой пересечения кривых относительного изменения фазовой, которая находится на оси \bar{h} (рис. 2, 3)); 4) в низкочастотной области волны распространяются с двумя скоростями (для полного контакта слоев только с одной скоростью); 5) при изменении отношения толщин слоев, изменяются как критические частоты, так и характер зависимости фазовой скорости от частоты и от начальных напряжений.

РЕЗЮМЕ. В рамках тривимірної лінеаризованої теорії пружності розглянуто поширення квазіпоздовжніх хвиль вздовж шарів композитного матеріалу з початковими напруженнями. Композит складається з двох шарів, що чергуються, між якими реалізується повне проковзування. Проведено чисельне дослідження дисперсійного рівняння, а також вивчено вплив початкових напружень на швидкості поширення хвиль.

Ключові слова: шаруватий композитний матеріал, тривимірна лінеаризована теорія пружності, початкові напруження, неповний контакт, квазіпоздовжні хвилі.

SUMMARY. The propagation of quasi-longitudinal waves along the layers of the composite material with initial stresses is considered within the framework of the three-dimensional linearized theory of elasticity. The composite consists of periodically alternating layers made of two materials, between which is complete slip. The dispersion equation is numerically investigated, and also the influence of initial stresses on the waves propagation speed is studied.

Key words: laminated composite material, three-dimensional linearized theory of elasticity, initial stresses, incomplete contact, quasi-longitudinal waves.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бабич С. Ю., Гузь А. Н., Жук А. П. Упругие волны в телах с начальными напряжениями // Прикладная механика. – 1979. – Т. 15, № 4. – С. 3–23.
2. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 344 с.
3. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38, № 1. – С. 35–78.
4. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. –

К.: «А.С.К.», 2004. – 672 с.

5. Гузь А. Н., Жук А. П., Махорт Ф. Г. Волны в слое с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1976. – 104 с.

6. Гузь А. Н., Кхань Л. М. Распространение волн в композитных слоистых материалах с большими начальными деформациями // Прикладная механика. – 1976. – Т. 12, № 1. – С. 3–11.

7. Кхань Л. М. Распространение волн вдоль слоев в слоистых сжимаемых материалах с начальными деформациями // Прикладная механика. – 1977. – Т. 13, № 9. – С. 21–26.

8. Панасюк О. М. Про поширення хвиль в шаруватих композитних стисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів // Доп. НАН України. – 2010. – № 1. – С. 65–70.

9. Sun C. T., Achenbach J. D., Herrmann G. Time-harmonic waves in a stratified medium propagating in the direction of the layering // Tr. ASME. Ser. E. Appl. Mech. – 1968. – 35, № 2. – P. 408–411.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 5.11.2010

Вниманию авторов статей.

1. В журнале публикуются статьи, содержащие новые результаты теоретических и экспериментальных исследований в области двумерной и трехмерной механики деформируемого твердого тела, теории упругости и пластичности, механики разрушения, а также гидромеханики.

2. Статья, подготовленная в текстовом редакторе Word, направляется по e-mail: journaltam@matfak.dongu.donetsk.ua, kaloerov@mail.ru

3. При подготовке статьи необходимо соблюдать структуру изложения: в начале приводится УДК, авторы (с указанием научной степени) и название статьи, затем аннотация и ключевые слова, потом введение (история вопроса и место данной работы), постановка задачи (физическая, математическая), метод и построение решения (без анализа результатов других работ), анализ полученных теоретических и числовых результатов с выводами. В конце статьи приводится список литературы, а также на украинском и английском языках – резюме и ключевые слова (переводы аннотации в начале статьи). Статья должна быть научно и литературно обработана. Особое внимание нужно уделять правильному использованию общепринятой терминологии. Авторам нужно учитывать правильное использование понятий «величина» и «значение» и не допускать стилистических и терминологических погрешностей. Все числовые значения используемых величин должны приводиться в системе Си. В десятичных дробях целая часть должна отделяться от дробной запятой (а не точкой).

4. Текст статьи в редакторе Word набирается шрифтом UkrainianSchoolBook (размером 11), аннотация, ключевые слова, резюме и список литературы, табличный материал – тем же шрифтом размером 9. Формулы набираются с использованием Microsoft Equation или MathType шрифтом UkrainianSchoolBook и Symbol: Full – 11 pt, subscript /superscript – 70 %, sub-subscript/ superscript – 60 %, symbol – 150 %, sub-symbol – 100 %; текст и переменные – курсивом. Указанным способом набираются также все буквы латинского и греческого алфавитов, встречающиеся в тексте. Межстрочный интервал – одинарный. Каждая формула отделяется от основного текста интервалом в 5 пунктов. Параметры страницы: формат – В5 (176×250 мм), поля зеркальные; сверху – 1,7 см, снизу – 2,2 см, внутри – 1,8 см, снаружи – 1,5 см, абзацный отступ 1 см

5. Группы формул отделяются друг от друга знаком точки с запятой, внутри группы формулы отделяются друг от друга знаком запятой. Каждая строка формул набирается отдельным объектом Microsoft Equation. Во всех случаях после знаков препинания ставится один (в объектах Microsoft Equation – два) пробел. Если в строке за формулой в скобках приведены расшифровки величин, то перед скобкой знак запятой или точки с запятой не ставится, но ставятся один пробел. В тех случаях, когда скобки или знаки арифметических действий внутри формул сливаются с соседними символами, нужно ставить пробелы внутри объекта Microsoft Equation. Номер формулы или группы формул ставится в конце последней строки формул. Если подряд приводятся несколько групп формул, то они отделяются друг от друга знаком точки с запятой.

6. Рисунки изготавливаются с использованием графического редактора и представляются в электронном виде в двух экземплярах: «немой» (в формате jpg, bmp и т. д., без подписей), для редактирования при необходимости, и с обозначениями. Сканированные рисунки не принимаются. На рисунки наносятся негустые равномерные сетки, основные линии выполняются толще, чем линии сетки и осей координат; буквенные обозначения набираются размером 9.

7. К статье прилагаются на отдельном листе данные об авторе (авторах) – фамилия, имя, отчество, адрес, телефон, а также на украинском и английском языках фамилии и инициалы авторов и название статьи.