
СОДЕРЖАНИЕ

<i>Сенченков И. К., Чевринко О. П., Баняс М. В.</i> Расчет остаточного напряженно-деформированного и микроструктурного состояния цилиндра при многослойном наращивании по боковой поверхности	7
<i>Кирилюк В. С., Левчук О. И.</i> Контактная задача для двух трансверсально-изотропных упругих тел с учетом тепловыделения	13
<i>Острик В. И.</i> Контактное взаимодействие кругового штампа с упругим полупространством при наличии трения и сцепления	22
<i>Алтухов Е. В., Фоменко М. В.</i> Деформация трехслойных пластин в случае смешанных граничных условий на торцах....	29
<i>Каминский А. А., Селиванов М. Ф., Черноиван Ю.А.</i> Доктрический рост двух коллинеарных трещин в вязкоупругом теле.....	40
<i>Калоеров С. А., Паршикова О. А.</i> Решение задачи термовязкоупругости для анизотропной пластинки.....	51
<i>Калоеров С. А., Коломиец М. А.</i> Задача вязкоупругости для анизотропной пластинки с жесткими включениями.....	71
<i>Павленко А. В., Кагадий Т. С., Оноприенко О.Д.</i> Контактная задача для конечной криволинейно анизотропной пластины с учетом трения и сцепления	87
<i>Шульга М. О., Григорьева Л. О., Ластивка И. О., Бабкова Н. О.</i> Численный анализ нестационарных колебаний круглых пьезоэлектрических пластин	98
<i>Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Сичко В. М., Вертелецкий М. И.</i> Вынужденные колебания и диссипативный разогрев шарнирно опертой цилиндрической панели с независи-	105

щимаи от температуры свойствами в уточненной постановке....	
<i>Левченко В. В., Зинчук Л. П., Медведев К. В.</i> Электроупругие объемные волны сдвига в сегнетоэлектриках	116
<i>Алтухов Е. В., Винник А. В.</i> Смешанная краевая задача для ортотропной прямоугольной пластины	121
<i>Семенюк Н. П., Жукова Н. Б., Душек Ю. Я.</i> Об одном подходе к расчету устойчивости оболочек вращения.....	129
<i>Хома И. Ю., Стрыгина О. А.</i> Смешанная краевая задача для неоднородной по толщине трансверсально изотропной сферической оболочки с круговым отверстием.....	137

З М І С Т

<i>Сенченков І. К., Червінко О. П., Баняс М. В.</i> Розрахунок залишкового напружено-деформованого і мікроструктурного стану циліндра при багатопаровому нарощуванні по боковій поверхні	7
<i>Кирилюк В. С., Левчук О. І.</i> Контактна задача для двох трансверсально-ізотропних пружних тіл з врахуванням тепловиділення	13
<i>Острик В. І.</i> Контактна взаємодія кругового штамп з пружним півпростором за наявності тертя та зчеплення.....	22
<i>Алтухов Є. В., Фоменко М. В.</i> Деформація тришарових пластин у випадку змішаних граничних умов на торцях.....	29
<i>Камінський А. О., Селіванов М. Ф., Чорноіван Ю. О.</i> Докритичний ріст двох колінеарних тріщин у в'язкопружному тілі	40
<i>Калоєров С. О., Паршикова О. О.</i> Розв'язання задачі термов'язкопружності для анізотропної пластинки	51
<i>Калоєров С. О., Коломиєць М. О.</i> Задача в'язкопружності для анізотропної пластинки з жорсткими включеннями.....	71
<i>Павленко А. В., Кагадій Т. С., Онопрієнко О. Д.</i> Контактна задача для скінченої криволінійно анізотропної пластини з урахуванням тертя та зчеплення.....	87
<i>Шульга М. О., Григор'єва Л. О., Ластівка І. О., Бабкова Н. О.</i> Чисельний аналіз нестационарних коливань круглих п'єзоелектричних пластин	98
<i>Карнаухов В. Г., Козлов В. І., Січко В. М., Вертелецький М. І.</i> Вимушенні коливання та дисипативний розігрів шарнірно опертої циліндричної панелі з незалежними від температури властивостями в уточненій постановці.....	105

<i>Левченко В. В., Зінчук Л. П., Медведєв К. В.</i> Електропружні об'ємні хвилі зсуву в сегнетоелектриках	116
<i>Алтухов Е. В., Вінник А. В.</i> Змішана краєва задача для ортотропної прямокутної пластини	121
<i>Семенюк М. П., Жукова Н. Б., Душек Ю. Я.</i> Про один підхід до розрахунку стійкості оболонок обертання.....	129
<i>Хома І. Ю., Стригіна О. А.</i> Змішана крайова задача для неоднорідної по товщині трансверсально ізотропної сферичної оболонки з круговим отвором.....	137

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

Scientific journal
№ 2 (48)

Founded in 1970
Donetsk 2011

CONTENTS

<i>Senchenkov I. K., Chervinko O. P., Banjas M. V.</i> Calculation of residual stress-strain and microstructure state under multi-layer lateral deposition	7
<i>Kirilyuk V. S., Levchuk O. I.</i> A contact problem for two transversally isotropic elastic bodies taking into account of heat release.....	13
<i>Ostrik V. I.</i> Contact interaction of circular stamp with elastic half-space with regard for friction and adhesion	22
<i>Altukhov E. V., Fomenko M. V.</i> Deformation of three-layered plates subject to mixed boundary conditions at their ends.....	29
<i>Kaminsky A. A., Selivanov M. F., Chornoivan Y. O.</i> Sub-critical growth of two collinear cracks in viscoelastic body	40
<i>Kaloerov S. A., Parshikova O. A.</i> Solving of the problem of thermaviscoelasticity for anisotropic plate	51
<i>Kaloerov S. A., Kolomyiets M. A.</i> The problem of viscoelasticity for anisotropic plate with rigid inclusions	71
<i>Pavlenko A. V., Kagadiy T. S., Onopriyenko O. D.</i> Contact problem for final size curve anisotropy plate with friction and coupling	87
<i>Shulga M. O., Grigorieva L. O., Lastivka I. O., Babkova N. O.</i> Numerical analysis of nonstationary vibration of circular piezoelectric plates.....	98
<i>Karnaukhov V. G., Kozlov V. I., Sichko V. M., Verteletsky M. I.</i> The forced vibrations and dissipative heating of a simply supported viscoelastic cylindrical panel with independent temperature properties in refined formulation.....	105
<i>Levchenko V. V., Zinchuk L. P., Medvedev K. V.</i> Electroelastic bulk shear waves in ferroelectrics	116

<i>Altukhov E. V., Vinnyk A. V.</i> The mixed boundary problem for orthotropic rectangular plate	121
<i>Semenyuk M. P., Zhukova N. B., Dushek Yu. Ya.</i> On certain approach to the buckling analysis of shell of revolution..	129
<i>Khoma I. Yu., Strygina O. A.</i> The mixed boundary prob- lem for a non-homogeneous in a thickness transversaly iso- tropic spherical shell with a circular hole.....	137

УДК 539.373

И. К. СЕНЧЕНКОВ, д-р физ.-мат. наук,
О. П. ЧЕРВИНКО, канд. физ.-мат. наук, *М. В. БАНЯС*

**РАСЧЕТ ОСТАТОЧНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
 И МИКРОСТРУКТУРНОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРА
 ПРИ МНОГОСЛОЙНОМ НАРАЩИВАНИИ
 ПО БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

Рассматривается осесимметричная задача о многослойном наращивании физически нелинейного цилиндра по боковой поверхности. Исследуется остаточное напряженно-деформированное и микроструктурное состояние. При решении задачи изучается влияние высокопластичного промежуточного слоя.

Ключевые слова: растущие тела, микроструктурные превращения, остаточное состояние

Многие детали машин и механизмов, такие как прошивки для получения заготовок для прокатки труб, валки прокатного стана и т.д. работают в условиях интенсивного температурного и механического нагружения. Одной из технологий повышения ресурса работы таких деталей является их наплавка с целью повышения сопротивления износу и усталости за счет формирования благоприятного остаточно-напряженного состояния. В данной работе на основе теории растущих тел, унифицированной модели течения, учета микроструктурных превращений исследуется остаточное напряженно-деформированное и микроструктурное состояние наращенного по боковой поверхности цилиндра.

1. Постановка задачи. Рассматривается осесимметричная задача о наращивании по боковой поверхности стального полого цилиндра слоями расплавленного металла. Вначале исходный цилиндр длины L с внутренним радиусом R_0 и начальным внешним радиусом R_1 (рис. 1) нагревается поверхностным источником до температуры 1700°C , после чего

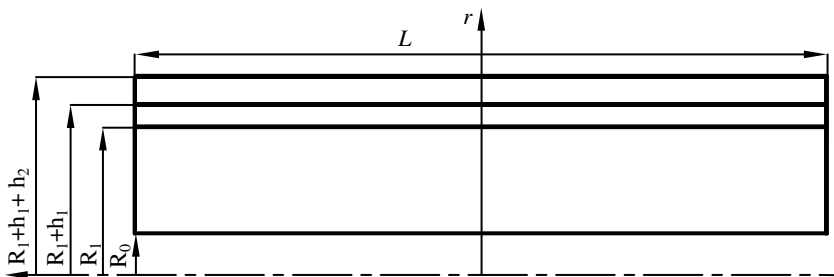


Рис.1

наращивается слоем высокопластичного материала, имеющего температуру 1700°C , на толщину h_1 . Далее цилиндр охлаждается до температуры

300°C, снова нагревается до температуры 1700°C и наращивается наружным слоем, имеющего ту же температуру, на толщину h_2 . После чего цилиндр остывает до температуры 20°C.

В цилиндрической системе координат $Orz\phi$ постановка задачи включает:

– соотношения Коши

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right);$$

– уравнения квазистатического равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0;$$

– уравнение теплопроводности

$$c_v \dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (kr \frac{\partial \theta}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial \theta}{\partial z}) + Q,$$

где θ – температура; ε_{ij} , σ_{ij} – компоненты тензоров деформации и напряжений; Q – плотность объемного источника; c_v – объемная теплоемкость; k – коэффициент теплопроводности.

Физически нелинейное поведение материала описывается унифицированной моделью течения Боднера-Партома [5], включающей:

– гипотезу адитивности тензора полной деформации

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^{ph\theta};$$

– закон Гука для изотропного материала

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^p), \quad \sigma_{kk} = 3K_v(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{ph\theta}); \quad (1)$$

– закон течения Прандтля-Рейса с условием пластической несжимаемости

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = D_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[(K + K_0)^2 / 3J_2 \right]^n \right\} \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \quad \varepsilon_{ij}^p(0) = 0, \quad \varepsilon_{kk}^p = 0;$$

– уравнение эволюции для параметра изотропного упрочнения

$$\dot{K} = m_1(K_1 - K)\dot{W}^p, \quad K(0) = 0,$$

где ε_{ij}^e , $\varepsilon_{ij}^{ph\theta}$ – компоненты тензоров упругой и термофазовой деформации; e_{ij} , s_{ij} – компоненты девиаторов тензоров напряжений и деформаций; G – модуль сдвига; K_v – объемный модуль; n , m_1 , K_0 , K_1 , D_0 – параметры модели; $\dot{W}^p = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ – пластическая мощность; $J_2 = 1/2 s_{ij}s_{ij}$ – второй инвариант девиатора тензора напряжений.

В данной работе влияние микроструктурных превращений на на-

пряженно-деформированное состояние в наращенном цилиндре учитывается с помощью термофазовой деформации $\varepsilon_{ij}^{ph\theta}$, зависящей от температуры и объемной концентраций фаз в металле [1, 6]. При нагреве стали выше температуры A_{c1} , исходная фаза металла начинает переходить в аустенит. Полная аустенизация происходит при температуре A_{c3} . При охлаждении аустенита ниже температуры A_{c1} расчет концентраций фаз, таких как феррит, перлит, бейнит и мартенсит, производится с использованием термокинетических диаграмм согласно методике, описанной в работах [1, 6].

Процессу наращивания соответствуют следующие граничные условия на торцах и боковой поверхности

$$\begin{aligned} \pm k \frac{\partial \theta}{\partial r} &= \alpha(\theta - \theta_c) + \varepsilon \sigma (T^4 - T_c^4), \quad \sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0, \quad r = R_0, \tilde{R}, \quad |z| < L/2; \\ \mp k \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \alpha(\theta - \theta_c) + \varepsilon \sigma (T^4 - T_c^4), \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0, \quad R_0 < r < \tilde{R}, \quad z = \pm L/2, \end{aligned}$$

где \tilde{R} – текущий радиус цилиндра; θ_c – температура окружающей среды; k – коэффициент теплопроводности; α – коэффициенты теплоотдачи в окружающую среду; σ – постоянная Больцмана; ε – коэффициент черноты; $T = \theta + 273^\circ\text{C}$. На поверхностях контакта слоев $r = R_1$ и $z = R_1 + h_1$ выполняются условия идеального термомеханического контакта. Все граничные поверхности тела считаются свободными от нагрузок.

Процесс наращивания моделируется на основе конечно-элементной методики, описанной в работе [4]. Согласно данному подходу для удовлетворения совместимости полей деформаций и температуры на поверхности сращивания используются поля собственных деформаций ε_{ij}^* и температуры θ^* .

В начале решения задачи генерируется конечно-элементная сетка, покрывающая как исходный цилиндр так и слои, которые будут наращиваться. Первоначально наращиваемый объем заполняется «пустым» упругим материалом с характеристиками $E = 0$, $\nu = 0$, $\alpha = 0$. Теплофизические свойства «пустого» материала принимаются такими же, как и наращиваемого материала.

Считается, что в наращиваемых соответственно в моменты времени t_1^* и t_2^* слоях $R_1 < r < R_1 + h_1$, $|z| < L/2$ и $R_1 + h_1 < r < R_1 + h_1 + h_2$, $|z| < L/2$, напряжения отсутствуют до момента контакта с поверхностью цилиндра

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0, \quad t \leq t_i^* \quad (i = 1, 2). \quad (2)$$

Каждый наращиваемый слой в момент сращивания $t = t_i^*$, $(i = 1, 2)$ имеет предварительную деформацию ε_{ij}^* и температуру θ^* . Для того, что-

бы удовлетворить условия (2) в момент сращивания, закон Гука (1) для материала наращиваемого слоя модифицируется следующим образом

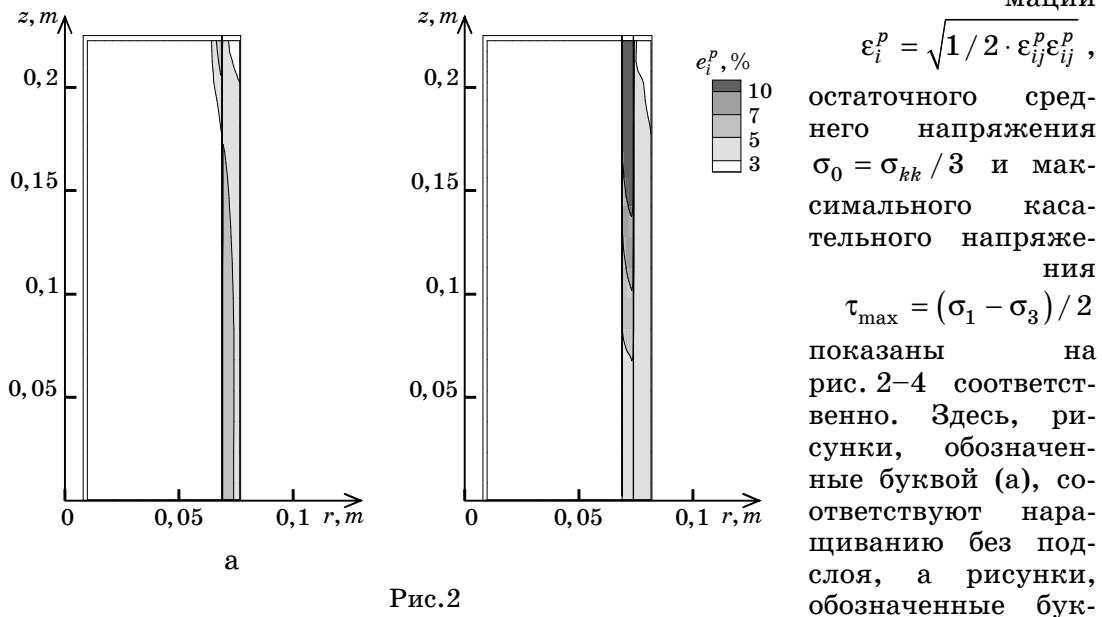
$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - e_{ij}^*), \quad \sigma_{kk} = 3K(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{ph\theta} - \varepsilon_{kk}^*).$$

Здесь e_{ij}^* обозначает девиатор тензора собственной деформации ε_{ij}^* , определенный в процессе решения задачи, а термофазовая деформация $\varepsilon_{kk}^{ph\theta}$ представляется таким образом, чтобы учесть влияние собственной температуры наращиваемого слоя θ^* .

2. Анализ результатов. При проведении исследований задача решалась для следующих значений параметров: $\alpha = 40 \text{ Вт} / \text{м}^2 \cdot \text{°С}$; $\theta_c = 20 \text{ °С}$; $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Дж} / (\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$; $\varepsilon = 0,7$; $L = 0,45 \text{ м}$; $R_0 = 0,008 \text{ м}$; $R_1 = 0,069 \text{ м}$. Рассматривались случаи наращивания с высокопластичным промежуточным слоем (подслоем) и без него. Расчет производился для толщины наружного слоя $h_2 = 8 \text{ мм}$ при толщине подслоя $h_1 = 5 \text{ мм}$. В качестве материалов принимались такие стали: исходный цилиндр – 50ХФА, подслой – 08кп, наружный слой – 23Х2НВФА.

Термокинетические диаграммы для данных материалов взяты из работы [2]. Параметры модели Боднера-Партома определялись на основе экспериментальных данных, приведенных в работе [3]. Задача решалась методом конечных элементов по методике, изложенной в работе [4].

Распределения по объему цилиндра интенсивности остаточной пластической деформации



Вблизи торцов цилиндра наблюдаются краевые эффекты в напряженно-деформированном и микроструктурном состоянии, тогда как в

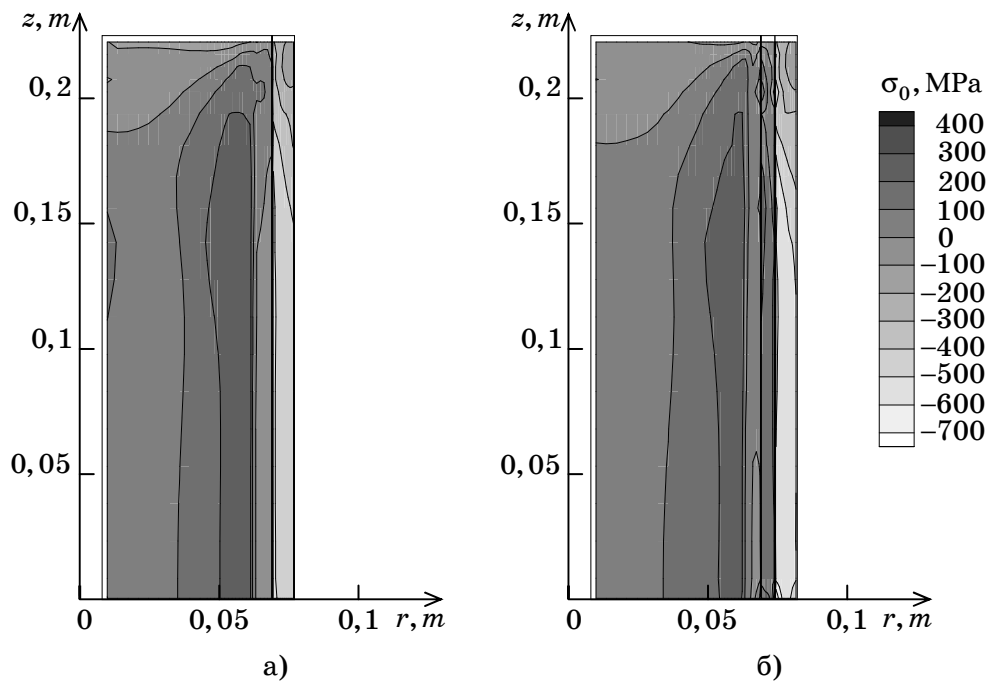


Рис.3

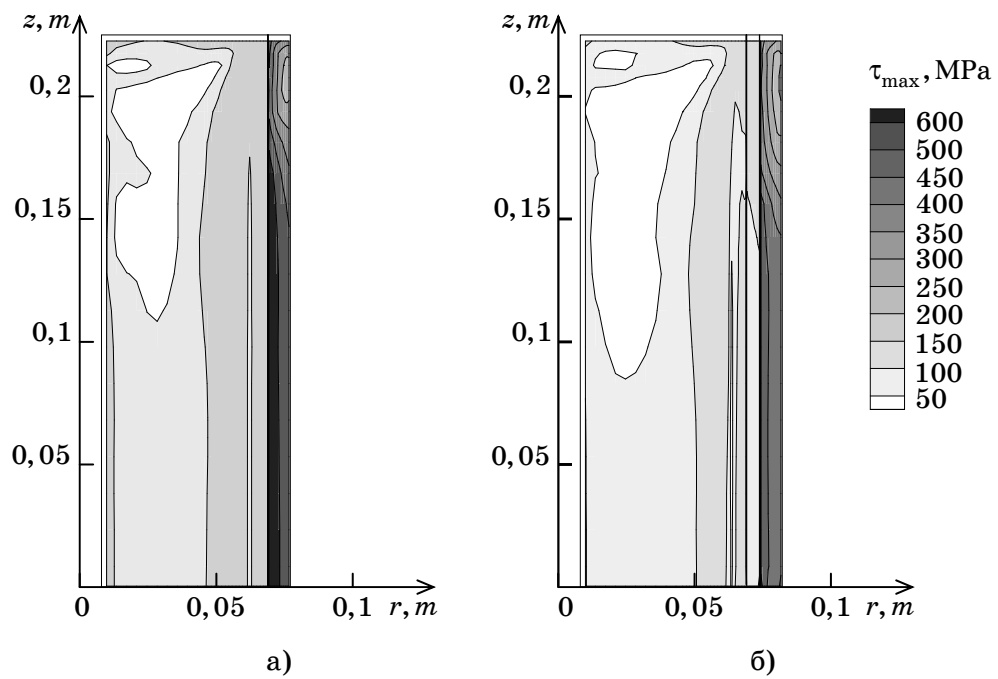


Рис.4

центральной части цилиндра распределение напряжений, пластических деформаций и микроструктуры слабо изменяются по оси Oz .

В наращиваемом слое возникает мартенсит-бейнитная структура (концентрация мартенсита 75%), которая обуславливает в нем сжимающие напряжения (рис. 4). В исходном цилиндре возле поверхности контакта основного материала с наружным слоем возникает перлит-бейнитная структура с преобладанием бейнита (концентрация бейнита составляет порядка 80-90%). Остаточные напряжения в основном цилиндре растягивающие. Максимальные касательные напряжения τ_{\max} возникают в наружном слое вблизи поверхности сращивания (рис. 3).

В случае наращивания без подслоя пластические деформации возникают как в наружном слое, так и в материале исходного цилиндра (рис. 2 а). В исходном цилиндре пластические деформации локализованы вблизи торцов возле поверхности контакта цилиндра и наружного слоя.

При двухслойном наращивании за счет высокопластичного промежуточного слоя происходит значительное уменьшение пластических деформаций в исходном цилиндре (рис. 2 а), а также незначительное снижение уровня растягивающих напряжения в исходном цилиндре и сжимающих в наружном слое (рис. 3 б). Данный эффект увеличивается с увеличением толщины подслоя.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто осесиметричну задачу про багатосарове нарощування фізично нелінійного циліндра по бічній поверхні. Вивчається залишковий напружено-деформований і мікроструктурний стан. При розв'язанні задачі досліджується вплив високопластичного шару.

Ключові слова: тіла, що ростуть, мікроструктурні перетворення, залишковий стан

SUMMARY. The axially symmetric problem of the multilayer lateral deposition of physically nonlinear cylinder is considered. The residual stress-strain and microstructure states are investigated. The influence of the high-plastic deposited layer is studied.

Key words: growing bodies, microstructure transformation, residual state

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Махненко В. И., Великоиваненко Е. А., Кравцов Т. Г., Севрюков В. В.* Численное исследование термомеханических процессов при наплавке валов судовых механизмов и устройств // Автомат. сварка. – 2001. – № 1. – С. 3–10.
2. *Попов А. А., Попова Л. Е.* Изотермические и термокинетические диаграммы распада переохлажденного аустенита. Справочник термиста. – М.: Машгиз, 1961. – 430 с.
3. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Безухов Н. И., Бажанов В. Л., Гольденблат И. И. и др.; Под ред. И. И. Гольденבלата – М.: Машиностроение, 1965. – 568 с.
4. *Сенченков И. К.* Термомеханическая модель растущих цилиндрических тел из физически нелинейных материалов // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 118–126.
5. *Bodner S. R.* Unified Plasticity – An Engineering Approach (Final Report) / Faculty of Mechanical Engineering, Technion-Israel Institute of Technology. – Haifa (Israel), 2000. – 106 p.
6. *Senchenkov I. K., Chervinko O. P., Turyk E., Ryabtsev I. A.* Examination of the thermomechanical state of cylindrical components deposited with layers of austenitic and martensitic steels // Welding International. – 2008. – Vol. 22, № 7. – P. 457–464.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 20.05.2011

УДК 539.3

В. С. КИРИЛЮК, канд. физ.-мат. наук,
О. И. ЛЕВЧУК, канд. физ.-мат. наук

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ

На основе теории Герца задача о контактном взаимодействии двух трансверсально-изотропных тел с учетом тепловыделения сведена к решению интегрального уравнения, учитывающего упругие и теплофизические свойства тел, а также температурное распределение специального вида на площадке контакта. В замкнутом виде получено выражение контактного давления, зависящего от тепловыделения, найдены соотношения для определения неизвестной области контакта. Как частные случаи, из приведенных выражений следуют параметры контактного взаимодействия (с учетом тепловыделения) двух изотропных тел, а также параметры контакта двух упругих трансверсально-изотропных тел при отсутствии температурного влияния. Проведены численные исследования. Установлено влияние тепловыделения на параметры контактного взаимодействия.

Ключевые слова: термоупругость, контактная задача, трансверсально-изотропные тела, полупространство, температурное влияние.

Для упругих изотропных тел методы решения пространственных контактных задач теории упругости достаточно хорошо разработаны. Важные результаты по механике контактного взаимодействия содержат работы [3, 5, 11, 13]. Контактные задачи с учетом тепловыделения на поверхностях контактирующих тел, которое может привести к значительному их нагреву и изменению как распределения контактного давления, так и самой области контакта, для изотропных тел рассмотрены в работах [1, 2, 4, 10]. Для трансверсально-изотропных тел контактное взаимодействие с жесткими штампами при температурном воздействии исследовалось в работах [8, 12]. В статьях [6, 7, 9, 14, 15] рассмотрены пространственные контактные задачи для трансверсально-изотропных электроупругих тел.

В настоящей статье решена пространственная контактная задача для двух упругих трансверсально-изотропных тел с учетом тепловыделения. На основе представления решения уравнений термоупругости для трансверсально-изотропного тела и специального выбора потенциальных функций задача сведена к интегральному уравнению, решение которого получено для эллиптической формы площадки контакта. Найдено выражение контактного давления с учетом тепловыделения, соотношения для нахождения неизвестной площадки контакта. Как частные случаи из полученных результатов следуют параметры контактного взаимодействия двух упругих изотропных тел с учетом тепловыделения [1, 2], а также решение классической задачи Герца для упругих трансверсально-изотропных тел (без тепловыделения).

1. Постановка задачи. Рассмотрим два упругих трансверсально-изотропных тела, ограниченные выпуклыми поверхностями S_1 и S_2 , соприкасающихся в точке 0 . Пусть оси $z_1^{(1)}$, $z_2^{(2)}$, перпендикулярные общей касательной плоскости и проведенные из общей точки касания вглубь тел, являются осями симметрии трансверсально-изотропных тел. Согласно концепции Герца при рассмотрении задачи упругие тела заменяются упругими трансверсально-изотропными полупространствами с площадкой контакта Ω , расположенной в плоскости $z = z_1^{(1)} = z_2^{(2)} = 0$ внутри эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, полуоси a , b определяются в процессе решения задачи. С учетом тепловыделения согласно результатам [1, 2] в плоскости $z = 0$ получаем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz}^{(i)} &= \sigma_{yz}^{(i)} = 0, \quad z = 0; \\
\sigma_{zz}^{(i)} &= 0, \quad (x, y) \notin \Omega; \\
\sigma_{zz}^{(i)} &= -p^*(x, y), \quad (x, y) \in \Omega; \\
u_z^{(1)} + u_z^{(2)} &= \delta - \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y), \quad (x, y) \in \Omega; \\
T^{(i)}(x, y, 0) &= T_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega; \\
T^{(i)}(x, y, 0) &= 0, \quad (x, y) \notin \Omega, \quad i = 1, 2,
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где $i = 1, 2$ – номер полупространства; $\varphi_i(x, y)$ – уравнения поверхностей S_i ; $T_0(x, y)$ – функция распределения температурного поля на площадке контакта; $p^*(x, y)$ – неизвестное давление на площадке контакта, которое, как и полуоси эллиптической площадки контакта, определяется в процессе решения задачи.

Отметим, что при решении задачи с тепловыделением в работах [1, 2] обосновано целесообразность рассмотрения распределения температурного поля на площадке контакта в виде $T_0(x, y) = T_0^*(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)$, $(x, y) \in \Omega$.

2. Основные соотношения. Уравнения стационарной термоупругости для трансверсально-изотропного тела при отсутствии массовых сил и источников тепла принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
c_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \\
+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial u_y}{\partial y} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = \beta \frac{\partial T}{\partial x}, \\
\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + c_{11} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} (c_{11} + c_{12}) \frac{\partial u_x}{\partial x} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = \beta \frac{\partial T}{\partial y}, \\
c_{44} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) + c_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) &= \beta_1 \frac{\partial T}{\partial z}, \\
\partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2 + n_4 \partial^2 T / \partial z^2 &= 0,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где $n_4 = \lambda_1 / \lambda$ – отношение коэффициентов теплопроводности материала в направлениях осей Oz и Ox ; c_{ij} – упругие постоянные; β , β_1 – константы, зависящие от теплофизических свойств материала. Решение приведенной системы уравнений можно представить с помощью четырех потенциалов функций Φ_i ($i = 1, 4$) [12]:

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_4}{\partial x}, \\
u_y &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_4}{\partial y}, \\
u_z &= m_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + m_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + m_4 \frac{\partial \Phi_4}{\partial z},
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где Φ_1, Φ_2, Φ_3 – функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + n_j \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi_j = 0, \tag{2.3}$$

$n_3 = 2c_{44}/(c_{11} - c_{12})$; n_1, n_2 – корни квадратного уравнения

$$c_{11}c_{44}n^2 - [c_{44}^2 + c_{33}c_{11} - (c_{13} + c_{44})^2]n + c_{33}c_{44} = 0; \tag{2.4}$$

$$m_j = \frac{c_{11}n_j - c_{44}}{c_{13} + c_{44}} = \frac{n_j(c_{13} + c_{44})}{c_{33} - n_jc_{44}} \quad (j = 1, 2); \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
m_3 &= \frac{\beta}{c_{44} + (c_{13} + c_{44})m_4 - c_{11}n_4}, \\
m_4 &= \frac{\beta_1(c_{44} - n_4c_{11}) + \beta n_4(c_{13} + c_{44})}{\beta(c_{33} - n_4c_{44}) - \beta_1(c_{13} + c_{44})}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Функция Φ_4 удовлетворяет одновременно двум уравнениям

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + n_4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi_4 = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_4}{\partial z^2} = m_3 T. \tag{2.7}$$

Если вводить обозначения $z_j = zn_j^{-1/2}$ ($i = 1, 4$), то можно показать,

что $\Phi_1(x, y, z_1)$, $\Phi_2(x, y, z_2)$, $\Phi_3(x, y, z_3)$, $\Phi_4(x, y, z_4)$ являются гармоническими функциями в соответствующей системе координат (x, y, z_j) .

3. Метод решения. Для каждого из полупространств температурное поле представим в виде потенциала двойного слоя

$$T(x, y, z_4) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_4} \iint_{\Omega} \frac{T_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z_4^2]^{1/2}}. \quad (3.1)$$

В силу свойств этого потенциала имеем

$$T(x, y, z_4) \Big|_{z_4=z=0} = \begin{cases} T_0(x, y), & (x, y) \in \Omega; \\ 0, & (x, y) \notin \Omega. \end{cases}$$

Для каждого из полупространств воспользуемся суперпозицией двух состояний, предложенной [8] при решении задачи о контакте трансверсально-изотропного полупространства с нагретым жестким штампом. Для первого из состояний потенциальную функцию $\Phi_4(x, y, z_4)$ возьмем в виде

$$\Phi_4^{(1)}(x, y, z_4) = F(x, y, z_4) = m_3 n_4 \iint_{\Omega} T_0(\xi, \eta) \ln(\rho_4 + z_4) d\xi d\eta, \quad (3.2)$$

где $\rho_4(x, y, z_4) = \sqrt{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z_4^2]}$. Другие потенциальные функции для первого состояния выберем таким образом:

$$\Phi_1^{(1)}(x, y, z_1) = a_1 F(x, y, z_1), \quad \Phi_2^{(1)}(x, y, z_2) = a_2 F(x, y, z_2), \quad \Phi_3^{(1)} = 0.$$

Здесь

$$a_1 = -\frac{n_1^{1/2}}{n_4^{1/2}} \frac{(m_2 - m_4)}{(m_2 - m_1)}, \quad a_2 = \frac{n_2^{1/2}}{n_4^{1/2}} \frac{(m_1 - m_4)}{(m_2 - m_1)}. \quad (3.3)$$

Для второго состояния суперпозиции потенциальные функции Φ_j ($i = \overline{1, 4}$) возьмем в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(2)}(x, y, z_1) &= \frac{1}{2\pi} \frac{-n_1^{1/2}}{(1 + m_1)c_{44}(n_1^{1/2} - n_2^{1/2})} \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \ln(\rho_1 + z_1) d\xi d\eta, \\ \Phi_2^{(2)}(x, y, z_2) &= \frac{1}{2\pi} \frac{n_2^{1/2}}{(1 + m_2)c_{44}(n_1^{1/2} - n_2^{1/2})} \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \ln(\rho_2 + z_2) d\xi d\eta, \\ \Phi_3^{(2)} &= \Phi_4^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\rho_i = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z_i^2}$ ($i = \overline{1, 2}$).

В результате такой суперпозиции состояний для каждого из полупространств получаем

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \text{ при } z = 0;$$

$$u_z|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} A^{Trans} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}. \quad (3.5)$$

При этом

$$A^{Trans} = \frac{c_{11} (n_1^{1/2} + n_2^{1/2})(c_{13} + c_{44})}{c_{44} (c_{11}n_1 + c_{13})(c_{11}n_2 + c_{13})};$$

n_1, n_2 – корни квадратного уравнения (2.4). В этом случае в плоскости контакта имеем

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = \begin{cases} -p(x, y) - \gamma^{Trans} T_0(x, y), & (x, y) \in \Omega; \\ 0, & (x, y) \notin \Omega. \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma^{Trans} &= \beta_1 - m_3(c_{33}m_4 - n_4c_{13}) + c_{44}m_3n_4^{1/2} \times \\ &\times \left[\frac{(m_1 - m_4)}{(m_1 - m_2)} (1 + m_2)n_2^{1/2} - \frac{(m_2 - m_4)}{(m_1 - m_2)} (1 + m_1)n_1^{1/2} \right], \\ n_4 &= k_1/k, \quad \beta = (c_{11} + c_{12})\alpha + c_{13}\alpha_1, \quad \beta_1 = 2c_{13}\alpha + c_{33}\alpha_1. \end{aligned}$$

При переходе от трансверсально-изотропного к изотропному материалу согласно [8] получаем, что $A^{Trans} \rightarrow (1-\nu)/\mu$, $\gamma^{Trans} \rightarrow \mu\alpha(1+\nu)/(1-\nu)$, где ν – коэффициент Пуассона, μ – модуль сдвига, α – коэффициент линейного температурного расширения.

Введем обозначение контактного давления $p^*(x, y)$. Тогда согласно выражению напряжений σ_{zz} в плоскости $z=0$ получаем, что $p^*(x, y) = p(x, y) + \gamma^{Trans} T_0(x, y)$. Перемещения u_z в плоскости контакта для каждого из полупространств можно представить через контактное давление и распределение температурного поля следующим образом:

$$\begin{aligned} u_z|_{z=0} &= \frac{1}{2\pi} A^{Trans} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} A^{Trans} \iint_{\Omega} \frac{[p^*(x, y) - \gamma^{Trans} T_0(x, y)] d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} A^{Trans} \left(\iint_{\Omega} \frac{p^*(x, y) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} - \gamma^{Trans} \iint_{\Omega} \frac{T_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right). \quad (3.6) \end{aligned}$$

В результате контакта двух упругих трансверсально-изотропных полупространств с различными свойствами имеем

$$\delta - \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \left[\left(A_1^{Trans} + A_2^{Trans} \right) \iint_{\Omega} \frac{p^*(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} - \left(A_1^{Trans} \gamma_1^{Trans} + A_2^{Trans} \gamma_2^{Trans} \right) \iint_{\Omega} \frac{T_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right].$$

Ограничиваясь локальными эффектами согласно теории Герца, приходим к интегральному уравнению

$$\delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{M^*(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}, \quad (3.7)$$

где $M^*(\xi, \eta) = (A_1^{Trans} + A_2^{Trans}) p^*(\xi, \eta) - (A_1^{Trans} \gamma_1^{Trans} + A_2^{Trans} \gamma_2^{Trans}) T_0(\xi, \eta)$.

Для задачи с тепловыделением рассмотрим случай распределения температурного поля на площадке в виде $T_0(x, y) = T_0^* (1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)$, $(x, y) \in \Omega$. Обоснование такого распределения дано в работах [1, 2]. После подстановки функций температурного поля в интегральное уравнение, следуя схеме рассмотрения задачи для двух изотропных полупространств [1, 2], имеем

$$p^*(x, y) = \frac{3}{2} \left(\frac{P}{\pi ab} - \frac{1}{2} \gamma_0^* T_0^* \right) \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{1/2} + \gamma_0^* T_0^* \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (3.8)$$

Здесь $\gamma_0^* = (A_1^{Trans} \gamma_1^{Trans} + A_2^{Trans} \gamma_2^{Trans}) / (A_1^{Trans} + A_2^{Trans})$; P – сила, прижимающая упругие тела. При этом максимальное контактное давление в центре площадки контакта принимает вид

$$p_{\max}^* = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} + \frac{1}{4} \gamma_0^* T_0^*. \quad (3.9)$$

Таким же образом, как и в случае изотропных материалов, находим размеры эллиптической площадки контакта трансверсально-изотропных тел и эксцентриситет эллипса контакта, исходя из выражения

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{(1 - e^2)[K(e) - E(e)]}{E(e) - (1 - e^2)K(e)}, \quad (3.10)$$

где $K(e)$, $E(e)$ – полные эллиптические интегралы. Для полуосей эллиптической площадки контакта находим выражения

$$a = \varepsilon \alpha_0, \quad b = a \sqrt{1 - e^2}, \quad \alpha_0 = \left[\frac{3}{2\pi} D(e) \right]^{1/3},$$

$$a_0 = [PR_1 (A_1^{Trans} + A_2^{Trans})]^{1/3} \alpha_0, \quad D(e) = [K(e) - E(e)] / e^2. \quad (3.11)$$

Значение $\varepsilon = a / a_0$ является решением кубического уравнения

$$\varepsilon^3 + \omega \varepsilon^2 = 1, \quad (3.12)$$

где

$$\omega = \frac{3}{4} \frac{R_1}{a_0} (A_1^{Trans} \gamma_1^{Trans} + A_2^{Trans} \gamma_2^{Trans}) T_0^* \sqrt{1 - e^2} D(e).$$

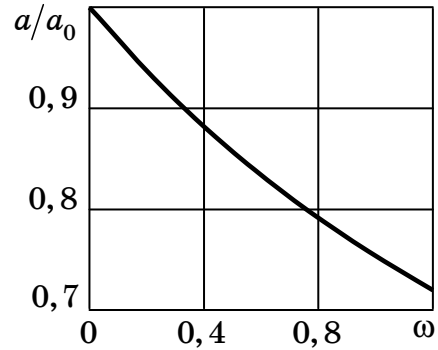
С помощью полученных выражений определяются геометрические параметры площадки контакта и контактное давление. При этом из полученных выражений видно, что при нагреве ($T_0^* > 0$) температурное воздействие уменьшает размеры площадки контакта трансверсально-изотропных тел.

Для сближения δ трансверсально-изотропных тел находим выражения

$$\delta = \frac{p_0}{2} a \sqrt{1 - e^2} K(e), \quad p_0 = \frac{3}{2} \left(\frac{P}{\pi ab} - \frac{1}{2} \gamma_0^* \right) (A_1^{Trans} + A_2^{Trans}). \quad (3.13)$$

Отметим, что из найденных выражений параметров контактного взаимодействия трансверсально-изотропных тел (с учетом влияния температурного поля) предельным переходом следуют соответствующие параметры контакта для двух изотропных тел [1, 2]. Далее полагая $T_0^* = 0$, получаем $\varepsilon = 0$ и в результате приходим к классическим выражениям для параметров контактного взаимодействия в задаче Герца для двух изотропных тел. Полагая в выражениях (3.11)–(3.13) $T_0^* = 0$, т.е. при отсутствии тепловыделения, получаем соотношения для нахождения параметров контакта для двух трансверсально-изотропных тел при отсутствии температурного воздействия.

4. Анализ результатов численных исследований. Были проведены численные исследования влияния температурного поля (тепловыделения) на размеры площадки контакта. На рисунке показано влияние параметра ω на значение наибольшей полуоси эллиптической площадки контакта, эксцентриситет которого находится из соотношений (3.10). Размер второй полуоси эллипса определяется формулой $b = a \sqrt{1 - e^2}$. Случай $\omega = 0$ соответствует контакту трансверсально-изотропных тел без тепловыделения. Видно, что при увеличении значения T_0^* (увеличении тепловыделения) размеры площадки контакта уменьшаются. Все остальные пара-



метры контактного взаимодействия двух трансверсально-изотропных тел при тепловыделении определяются согласно выражениям (3.8)–(3.13). Из проведенных числовых исследований и найденных замкнутых выражений видно, что тепловыделение может существенно повлиять на контактное взаимодействие трансверсально-изотропных упругих тел.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто контактну взаємодію двох трансверсально-ізоотропних тіл з врахуванням тепловиділення, яку досліджено згідно теорії Герца. Задачу зведено до розв'язку інтегрального рівняння, що враховує пружні та теплофізичні властивості двох трансверсально-ізоотропних тіл, а також температурний розподіл спеціального виду на площадці контакту. У замкненому вигляді отримано вираз для обчислення контактної тиску, а також знайдені співвідношення для пошуку невідомої області контакту, що залежить від тепловиділення. Як частинний випадок, з наведених виразів випливають параметри контактної взаємодії (з врахуванням тепловиділення) двох пружних ізоотропних тіл, а також параметри контакту двох пружних трансверсально-ізоотропних тіл за відсутності температурного впливу. Проведено числові дослідження. Встановлено вплив тепловиділення на параметри контактної взаємодії.

Ключові слова: термопружність, контактна задача, трансверсально-ізоотропні тіла, півпростір, температурний вплив

SUMMARY. The contact interaction of two transversally isotropic bodies taking into account of heat release was considered by, which is researched in according to the theory of a Hertz. The problem was reduced to the solution of an integral equation, which takes into account elastic and thermal properties of two transversally isotropic bodies, and also a special temperature distribution in a contact area. The expression of the contact pressure, which depends on heat release, was obtained in closed form, and the relations for search of unknown contact area were found also. The parameters of contact interaction (in view of heat release) of two elastic isotropic bodies and parameters of a contact of two elastic transversally isotropic bodies (at absence of temperature effect) also follow from obtained expressions as the particular cases. The numerical researches were carried out. The effect of heat release on the parameters of contact interaction was established.

Key words: thermoelasticity, contact problem, transversally-isotropic bodies, half-spaces, temperature influence

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бородачев Н. М., Тариков Г. П.* Определение наибольших расчетных напряжений под площадкой контакта с учетом тепловыделения // *Механика твердого тела.* – 2008. – № 6. – С. 76–84.
2. *Бородачев Н. М., Тариков Г. П.* Пространственная контактная задача с учетом тепловыделения при трении скольжения // *Трение и износ.* – 2003. – Т. 24, № 2. – С. 153–160.
3. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
4. *Грилицкий Д. В., Краснюк П. П.* Стационарный термоупругий контакт двух цилиндров с фрикционным теплообразованием // *Трение и износ.* – 1996. – Т. 17, № 3. – С. 312–319.
5. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 509 с.
6. *Кирилюк В. С.* О влиянии температурного поля на контактное взаимодействие нагретого плоского эллиптического штампа с пьезокерамическим полупространством // *Теорет. и прикладная механика.* – 2009. – Вып. 46. – С. 29–35.
7. *Кирилюк В. С.* О давлении нагретого жесткого кругового штампа на пьезокерамическое полупространство с отслоением материала под штампом // *Теорет. и прикладная механика.* – 2008. – Вып. 44. – С. 144–151.
8. *Кирилюк В. С.* О связи контактных задач термоупругости для изотропного и трансверсально-изотропного полупространств // *Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки.* – 2005. – Вип. 2. – С. 37–42.

9. *Кириллюк В. С.* О соответствии между решениями специального класса контактных задач термоупругости и термоэлектроупругости для полупространства // *Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки.* – 2006. – Вип. 2. – С. 69–76.
10. *Коровчинский М. В.* Плоская контактная задача термоупругости при стационарном тепловыделении на поверхностях соприкосновения / *Ин-т машиноведения.* – М., 1961. – 27 с.
11. *Лурье А. И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
12. *Подильчук Ю. Н., Ткаченко В. Ф., Соколовский Я. И.* Термоупругая контактная задача о вдавливании нагретого эллиптического в плане штампа в трансверсально-изотропное полупространство // *Прикладная механика.* – 1996. – Т. 32, № 11. – С. 38–45.
13. *Babich S. Yu., Guz A. N., Rudnitskii V. B.* Contact Problems for Prestressed Elastic Bodies and Rigid and Elastic Punches // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – Vol. 40, № 7. – P. 744–765.
14. *Ding H. J., Hou P. F., Guo F. L.* The elastic and electric fields for three-dimensional contact for transversely isotropic piezoelectric materials // *Int. J. Sol. Struct.* – 2000. – Vol. 37, Is. 23. – P. 3201–3229.
15. *Podil'chuk Yu. N.* Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelectroelastic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – Vol. 39, № 2. – P. 132–170.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 27.05.2010.

УДК 539.3

В. И. ОСТРИК, д-р физ.-мат. наук

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КРУГОВОГО ШТАМПА С УПРУГИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ И СЦЕПЛЕНИЯ

Рассматривается осесимметричный аналог задачи Л.А. Галина о вдавливании кругового штампа с плоским основанием в упругое полупространство с учетом сил трения и частичного сцепления в области контакта. Полученная система интегральных уравнений задачи обобщенным методом Винера – Хопфа сведена к бесконечной системе алгебраических уравнений. Приводятся результаты вычислений относительного размера зоны сцепления, осадки штампа и контактных напряжений.

Ключевые слова: осесимметричный контакт, упругое полупространство, трение, сцепление, метод Винера – Хопфа.

При контактном взаимодействии упругих тел с учетом сил трения область контакта, как правило, разделяется на зоны сцепления и проскальзывания [3]. Впервые контакт со сцеплением и проскальзыванием рассмотрен Л. А. Галиным [2] в задаче о вдавливании штампа с прямолинейным основанием в упругую полуплоскость. В данной статье решена аналогичная задача для кругового штампа с плоским основанием и упругого полупространства.

Постановка задачи. Пусть круговой штамп с плоским основанием ($0 \leq r \leq R$, $0 \leq \vartheta < 2\pi$) радиуса R вдавливается нормальной силой P в упругое полупространство $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \vartheta < 2\pi$, $0 \leq \zeta < \infty$. С учетом сил трения область контакта разделяется на круговую зону сцепления $0 \leq r \leq R_1$ внутри основания штампа ($R_1 < R$), радиус R_1 которой заранее неизвестен, и кольцевую зону проскальзывания $R_1 < r \leq R$ на крае основания штампа. Считаем, что в зоне проскальзывания выполняется закон трения Амонтона с проскальзыванием граничных точек полупространства к середине штампа.

В условиях осесимметричной деформации имеем смешанную задачу теории упругости для полупространства $\zeta \geq 0$ с граничными условиями

$$\begin{aligned} u_\zeta|_{\zeta=0} &= \delta \quad (0 \leq r \leq R), \quad u_r|_{\zeta=0} = 0 \quad (0 \leq r \leq R_1), \\ \tau_{r\zeta}|_{\zeta=0} &= \mu_0 \sigma_\zeta|_{\zeta=0} \quad (R_1 < r < R), \quad \sigma_\zeta|_{\zeta=0} = 0, \quad \tau_{r\zeta}|_{\zeta=0} = 0 \quad (R < r < \infty), \end{aligned} \quad (1)$$

где μ_0 – коэффициент трения, δ – осадка штампа. Для определения осадки служит условие равновесия

$$2\pi \int_0^R \sigma_\zeta|_{\zeta=0} r dr = -P. \quad (2)$$

Система интегральных уравнений. Введем функции контактных напряжений

$$\begin{aligned} p(r) &= \frac{\sigma_\zeta}{2G} \Big|_{\zeta=0}, \quad q(r) = \frac{\tau_{r\zeta}}{2G} \Big|_{\zeta=0} \quad (0 \leq r \leq R_1), \\ \sigma(r) &= \frac{\sigma_\zeta}{2G} \Big|_{\zeta=0} \quad (R_1 < r < R), \end{aligned} \quad (3)$$

где G – модуль сдвига, и рассмотрим первую граничную задачу

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_\zeta}{2G} \Big|_{\zeta=0} &= g_1(r) = \begin{cases} p(r), & 0 \leq r \leq R_1, \\ \sigma(r), & R_1 < r < R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \\ \frac{\tau_{r\zeta}}{2G} \Big|_{\zeta=0} &= g_2(r) = \begin{cases} q(r), & 0 \leq r \leq R_1, \\ \mu_0 \sigma(r), & R_1 < r < R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Решение граничной задачи (4) найдем с использованием интегрального преобразования Меллина. В частности, на границе полупространства

$$\begin{aligned} u_\zeta \Big|_{\zeta=0} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{s} \left(m_1 \frac{\Gamma(1+s/2)\Gamma(1/2-s/2)}{\Gamma(1/2+s/2)\Gamma(1-s/2)} a_1(s) - m_2 a_2(s) \right) r^{-s} ds, \\ u_r \Big|_{\zeta=0} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{s-1} \left(m_2 a_1(s) - m_1 \frac{\Gamma(1/2+s/2)\Gamma(1-s/2)}{\Gamma(1+s/2)\Gamma(1/2-s/2)} a_2(s) \right) r^{-s} ds, \\ a_{1,2}(s) &= \int_0^\infty g_{1,2}(y) y^s ds, \quad m_1 = 2 \frac{m-1}{m}, \quad m_2 = \frac{m-2}{m}, \quad 0 < c < 1, \end{aligned} \quad (5)$$

где m – число Пуассона. Решение (5) задачи (4) используем в качестве представления рассматриваемой задачи (1). При этом третье, четвертое и пятое условия (1) будут выполнены.

Перемещения (5) подставим в продифференцированные первое и домноженное на r второе граничные условия (1). Произведя замены

$$s = -i\tau, \quad r = Re^{-\xi}, \quad y = Re^{-\eta}, \quad (6)$$

относительно новых неизвестных функций

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) &= \sigma(Re^{-\eta})e^{-\eta} \quad (0 \leq \eta < a), \quad a = \ln(R/R_1), \\ \psi_1(\eta) &= p(Re^{-\eta})e^{-\eta}, \quad \psi_2(\eta) = q(Re^{-\eta})e^{-\eta} \quad (a \leq \eta < \infty) \end{aligned} \quad (7)$$

получим однородную систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \mu_0 \varphi(\xi), & \xi < a \\ \psi_2(\xi), & \xi \geq a \end{cases} - \frac{m_1}{m_2} L_1(\xi) = 0 \quad (0 < \xi < \infty),$$

$$\Psi_1(\xi) - \frac{m_1}{m_2} L_2(\xi) = 0 \quad (a < \xi < \infty), \quad (8)$$

где

$$L_j(\xi) \equiv \mu_0^{j-1} \int_0^a k_j(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta + \int_a^\infty k_j(\xi - \eta) \Psi_j(\eta) d\eta,$$

$$k_j(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty K^{3-2j}(\tau) e^{-i\tau(\xi-\eta)} d\tau \quad (j = 1, 2),$$

$$K(\tau) = \frac{\Gamma(1 - i\tau/2)\Gamma(1/2 + i\tau/2)}{\Gamma(1/2 - i\tau/2)\Gamma(1 + i\tau/2)}.$$

Решение системы интегральных уравнений. Для сведения системы интегральных уравнений к бесконечной системе алгебраических уравнений используем подход работы [1]. Распространим уравнения (8) на всю числовую ось и применим к ним интегральное преобразование Фурье. Введя функции комплексной переменной

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \quad \Psi_j^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \Psi_j(\xi + a) e^{iz\xi} d\xi,$$

$$\Psi_j^-(z) = \frac{m_1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 L_j(\xi + (j-1)a) e^{iz\xi} d\xi \quad (j = 1, 2),$$

$$\Psi^+(z) = \mu_0 \Psi_1^+(z) - \Psi_2^+(z), \quad \Phi_1^+(z) = \Phi^+(z) + e^{iza} \Psi_1^+(z),$$

$$\Psi^-(z) = \Psi_2^-(z) - m_2 e^{-iza} \Phi^+(z), \quad (9)$$

из которых функции, отмеченные верхним индексом "+", являются аналитическими в полуплоскости $\text{Im } z > c^+$ ($c^+ < 0$), индексом "-" – в полуплоскости $\text{Im } z < c^-$ ($c^- > 0$) комплексной плоскости, приходим к системе функциональных уравнений Винера – Хопфа

$$K_1(z) \Phi_1^+(z) + m_2 e^{iza} \Psi^+(z) - \Psi_1^-(z) = 0,$$

$$K_1(z) \Psi^-(z) + e^{-iza} K_2(z) \Psi_1^-(z) + m_3 \Psi^+(z) = 0 \quad (c^+ < \text{Im } z < c^-), \quad (10)$$

$$K_1(z) = m_1 K(z) - \mu_0 m_2 = \lambda_1(z) \Gamma\left(1 - \frac{iz}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{iz}{2}\right),$$

$$K_2(z) = m_2 - \frac{\mu_0 m_1}{K(z)}, \quad m_3 = 3 - \frac{4}{m}.$$

Выполнив необходимые факторизации [1, 4]

$$K_1(z) = K_1(0) K_1^+(z) K_1^-(z),$$

$$m_2 e^{iza} \Psi^+(z) / K_1^-(z) = \chi_1^+(z) - \chi_1^-(z),$$

$$e^{-iza} K_2(z) \Psi_1^-(z) / K_1^+(z) = \chi^+(z) - \chi^-(z), \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
K_1^+(z) &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iz}{\zeta_n'}\right) \left(1 - \frac{iz}{2n}\right)^{-1}, \\
K_1^-(z) &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iz}{\zeta_n}\right) \left(1 + \frac{iz}{2n-1}\right)^{-1}, \\
\chi_1^-(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^+}{\zeta_k + iz} \Psi^+(i\zeta_k) e^{-\zeta_k a}, \\
\chi^+(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_k^-}{\zeta_k' + iz} \Psi_1^-(i\zeta_k') e^{-\zeta_k' a} + \frac{\bar{\alpha}_k^-}{2k-1-iz} \Psi_1^-(-i(2k-1)) e^{-2ka} \right), \\
\alpha_k^+ &= -m_2 K_1(0) \lambda_2(i\zeta_k) K_1^+(i\zeta_k), \quad \alpha_k^- = -m_3 m_2^{-1} K_1(0) \lambda_2(i\zeta_k') K_1^-(i\zeta_k'), \\
\bar{\alpha}_k^- &= \frac{m_1}{m_2} K_1(0) e^a \frac{[(2k-1)!!]^2 K_1^-(-i(2k-1))}{(2k-1)[(2k-2)!!]^2} \quad (k=1,2,\dots), \\
\lambda_2(z) &= i/[\lambda_1'(z)\Gamma(1-iz/2)\Gamma(1/2+iz/2)], \\
\zeta_n &= 2(n+\gamma) + o(1), \quad \zeta_n' = -2(n-\gamma) + 1 + o(1), \quad n \rightarrow \infty, \\
\gamma &= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{m_2 \mu_0}{m_1},
\end{aligned}$$

где ζ_n, ζ_n' ($n=1,2,\dots$) – положительные и отрицательные корни уравнения $\lambda_1(is) = 0$, находим функции

$$\begin{aligned}
\Phi_1^+(z) &= \frac{C - \chi_1^+(z)}{K_1(0)K_1^+(z)}, \quad \Psi_1^-(z) = K_1^-(z)[C - \chi_1^-(z)], \\
\Psi^+(z) &= -\frac{1}{m_3} K_1^+(z)\chi^+(z), \quad \Psi^-(z) = \frac{\chi^-(z)}{K_1(0)K_1^-(z)}, \tag{12}
\end{aligned}$$

в которых C – неопределенная пока постоянная.

Асимптотический анализ третьего соотношения (12) на основании оценок $K_1^+(z) = O(z^{1/2+\gamma})$, $\chi^+(z) = O(z^{-1})$, $|z| \rightarrow \infty$ и леммы Ватсона [6] показывает, что линейная комбинация напряжений $(\mu_0 \sigma_\zeta - \tau_{r\zeta})|_{\zeta=0}$ на краю области сцепления ($r \rightarrow R_1 - 0$) неограничена. Из ограниченности и непрерывности контактных напряжений на линии $r = R_1$ приходим к условию

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z\chi^+(z) = 0. \tag{13}$$

Решение (12) системы функциональных уравнений (10) содержит известные значения $\Psi^+(i\zeta_k)$, $\Psi_1^-(i\zeta_k')$, $\Psi_1^-(-i(2k-1))$ ($k=1,2,\dots$) из (11). Для их определения возьмем в третьем равенстве (12) $z = i\zeta_n$, а во втором – $z = i\zeta_n'$ и $z = -i(2n-1)$ ($n=1,2,\dots$). Введя малый параметр

$$\lambda = e^{-2a} = (R_1/R)^2 \quad (0 < \lambda < 1) \quad (14)$$

и приняв обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_k^+ &= \alpha_k^+ e^{(2k-\zeta_k)a}, \quad \tilde{\alpha}_k^- = \alpha_k^- e^{(2k+\zeta_k)a}, \quad \beta_n^+ = m_3^{-1} K_1^+(i\zeta_n), \\ \beta_n^- &= K_1^-(i\zeta_n'), \quad \tilde{\beta}_n^- = K_1^-(-i(2n-1)) \quad (k, n = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (15)$$

относительно неизвестных

$$\begin{aligned} z_k^+ &= \Psi^+(i\zeta_k)/C, \quad z_k^- = \Psi_1^-(i\zeta_k')/C, \\ \tilde{z}_k^- &= \Psi_1^-(-i(2k-1))/C \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (16)$$

получим бесконечную систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} z_n^+ + \beta_n^+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\alpha}_k^-}{\zeta_k' - \zeta_n} z_k^- + \frac{\tilde{\alpha}_k^-}{2k-1 + \zeta_n} \tilde{z}_k^- \right) \lambda^k &= 0, \\ z_n^- + \beta_n^- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^+}{\zeta_k - \zeta_n'} z_k^+ \lambda^k &= \beta_n^-, \\ \tilde{z}_n^- + \tilde{\beta}_n^- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^+}{\zeta_k + 2n-1} z_k^+ \lambda^k &= \tilde{\beta}_n^- \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (17)$$

Система уравнений (17) имеет экспоненциально убывающие по k коэффициенты. Ее решение находим в рядах по степеням параметра λ [1].

Определение радиуса зоны сцепления, контактных напряжений и осадки штампа. Дополнительное условие (13), которое с учетом (11), (15), (16) запишем в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{\alpha}_k^- z_k^- - \tilde{\alpha}_k^- \tilde{z}_k^-) \lambda^k = 0, \quad (18)$$

служит для определения относительного размера зоны сцепления $R_1/R = \sqrt{\lambda}$.

Значение постоянной C найдем из условия равновесия (2). Преобразовав интеграл из (2):

$$\begin{aligned} \int_0^R \sigma_\zeta \Big|_{\zeta=0} r dr &= 2G \left(\int_0^{R_1} p(r) r dr + \int_{R_1}^R \sigma(r) r dr \right) = \\ &= 2GR^2 \left(\int_a^\infty \Psi_1(\xi) e^{-\xi} d\xi + \int_0^a \varphi(\xi) e^{-\xi} d\xi \right) = \\ &= 2GR^2 \sqrt{2\pi} \left[e^{-a} \Psi_1^+(i) + \Phi^+(i) \right], \end{aligned}$$

с использованием (11), (12), (15), (16) получим

$$C = \frac{\tilde{C}}{\sqrt{2\pi}} \frac{P}{2GR^2}, \quad \tilde{C} = -\frac{1}{2\pi} K_1(0) K_1^+(i) \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^+}{\zeta_k - 1} z_k^+ \lambda^k \right)^{-1}. \quad (19)$$

Напряжения в области контакта найдем, используя замены (3), (7) и обращая интегралы Фурье из (9). Разложив соответствующие интегралы в ряд по теории вычетов, на основе (11), (12) получим следующие распределения контактных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{\zeta} \Big|_{\zeta=0} &= \frac{m_1}{m_3} \tilde{C} \frac{P}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(2k-1)!!]^2}{(2k-1)[(2k-2)!!]^2} \tilde{z}_k^- \left(\frac{r}{R} \right)^{2k-2}, \\ \tau_{r\zeta} \Big|_{\zeta=0} &= -\frac{m_1}{m_3} \frac{\tilde{C}}{K_1(0)} \frac{P}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(2k-1)!!]^2}{(2k)!!(2k-2)!! K_1^+(-2ik)} \left(\frac{r}{R_1} \right)^{2k-1} \times \\ &\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\alpha}_n^- z_n^-}{\zeta_n^- + 2k} + \frac{\tilde{\alpha}_n^- \tilde{z}_n^-}{2(n-k) - 1} \right) \lambda^{n-1/2} \quad (0 \leq r \leq R_1), \quad (20) \\ \sigma_{\zeta} \Big|_{\zeta=0} &= \tilde{C} \frac{P}{Rr} \sum_{k=1}^{\infty} \left[m_2 \lambda_2(i\zeta_k) z_k^+ \left(\frac{r}{R_1} \right)^{-\zeta_k} - \lambda_2(i\zeta_k') z_k^- \left(\frac{r}{R} \right)^{-\zeta_k'} \right] \quad (R_1 < r < R). \end{aligned}$$

На крае области контакта напряжения неограничены и имеют следующее поведение: $\sigma_{\zeta} \Big|_{\zeta=0} = \mu_0^{-1} \tau_{r\zeta} \Big|_{\zeta=0} = O((R-r)^{1/2-\gamma})$, $r \rightarrow R-0$, которое определяем из решения (9), (12) с использованием леммы Ватсона [6].

Осадку штампа δ определяем, исходя из выражения для перемещений $u_{\zeta} \Big|_{\zeta=0}$ из (5). Используя замены (6), (7) и разложив интеграл по теории вычетов, с учетом (9), (11), (12) получим

$$\delta = \tilde{C} \frac{P}{2GR} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^+}{\zeta_k} z_k^+ \lambda^k - 1 \right). \quad (21)$$

Результаты вычислений. На рис. 1 показаны распределения контактных напряжений в случае числа Пуассона $m = 10/3$ и коэффициента трения $\mu_0 = 0,25$. Кривая 1 соответствует безразмерным нормальным $\bar{\sigma} = (R^2/P) \sigma_{\zeta} \Big|_{\zeta=0}$, кривая 2 – касательным $\bar{\tau} = (R^2/P) \tau_{r\zeta} \Big|_{\zeta=0}$ напряжениям. На линии $r = R_1 = 0,8239R$ перехода из зоны сцепления в зону проскальзывания графики напряжений имеют характерные изломы. Для случая гладкого контакта ($\mu_0 = 0$) распределение величины

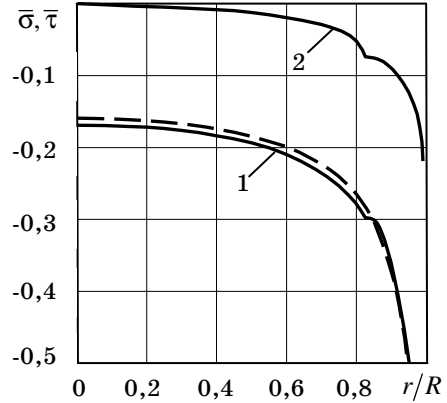


Рис.1

$\bar{\sigma} = 1 / \left(2\pi \sqrt{1 - (r/R)^2} \right)$ изображено пунктиром [3].

μ_0	R_1/R	$\bar{\delta}$
0,05	0,0105	0,3482
0,1	0,1996	0,3464
0,15	0,4869	0,3447
0,2	0,6980	0,3434
0,25	0,8239	0,3424
0,3	0,8957	0,3417
0,35	0,9369	0,3412
0,4	0,9608	0,3409
0,45	0,9751	0,3407
0,5	0,9838	0,3405

В таблице приводятся значения относительного размера зоны сцепления R_1/R и нормализованной осадки $\bar{\delta} = (2GR/P)\delta$ в зависимости от коэффициента трения μ_0 для числа Пуассона $m = 10/3$. Отметим, что относительный размер зоны сцепления в рассматриваемой осесимметричной задаче оказывается значительно больше, чем в задаче Галина, где он, к примеру, для $\mu_0 = 0,25$, $m = 10/3$ составляет 0,5432 [5]. Значения $\bar{\delta}$ заключены между предельными значениями $\bar{\delta}_{\min} = m_2 / (2 \ln m_3) = 0,3403$ и $\bar{\delta}_{\max} = m_1 / 4 = 0,35$ для случаев контакта с полным сцеплением

($\mu_0 = \infty$) и гладкого контакта ($\mu_0 = 0$) соответственно [3].

РЕЗЮМЕ. Розглянуто осесиметричний аналог задачі Л. А. Галіна про вдавлювання кругового штамп з плоскою основою в пружний півпростір з урахуванням сил тертя та часткового зчеплення в області контакту. Отримана система інтегральних рівнянь задачі узагальненим методом Вінера – Гопфа зведена до нескінченної системи алгебричних рівнянь. Наведено результати обчислень відносного розміру зони зчеплення, просідання штамп та контактних напружень.

Ключові слова: осесиметричний контакт, пружний півпростір, тертя, зчеплення, метод Вінера – Гопфа.

SUMMARY. The axially symmetric analog of the Galin problem of press in of the circular stamp with plane basis on elastic half-space in the presence of friction and partial adhesion in contact domain is solved. Using the Wiener – Hopf generalized method, the derived system of integral equations is reduction in to the infinite system of algebraic equations. The results of calculations of relative size of adhesion zone, settling of stamp and contact stresses are presented.

Key words: axially symmetric contact, elastic half-space, friction, adhesion, Wiener – Hopf method.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Антипов Ю. А. Точное решение задачи о вдавливании кольцевого штампа в полупространство // Докл. АН УССР. – 1987. – Сер. А. № 7. – С. 29–33.
2. Галин Л. А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // Прикладная математика и механика. – 1945. – Т. 9, Вып. 5. – С. 413–424.
3. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
4. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
5. Острик В. И. Контактное взаимодействие штампа с упругой полуплоскостью при наличии трения и сцепления // Теорет. и прикладная механика. – 2004. – Вып. 39. – С. 94–101.
6. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1987. – 544 с.

Институт прикладной физики НАН Украины, г. Сумы

Поступила 29.03.2011

УДК 539.3

Е. В. АЛТУХОВ, канд. физ-мат. наук, М. В. ФОМЕНКО

**ДЕФОРМАЦИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН В СЛУЧАЕ
СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ТОРЦАХ**

В трехмерной постановке рассмотрена задача теории упругости для трехслойной изотропной пластины симметричного строения. На лицевых плоскостях пластины выполняются условия плоского торца, на границе раздела слоев имеет место идеальный контакт. Получены однородные решения уравнений равновесия в перемещениях в виде суммы бигармонического, вихревого и потенциального состояний. Выполнены аналитические и численные исследования трансцендентных уравнений для нахождения собственных значений.

Ключевые слова: идеальный контакт, метод однородных решений, трехслойная пластина, упругое равновесие, условия плоского торца.

Введение. Развитие теорий поперечно-неоднородных упругих пластин и методов решения конкретных задач отражено в обзорных статьях [8, 9, 12 – 14], в которых отмечается актуальность развития известных и создания новых аналитических методов исследования напряженно-деформированного состояния слоистых конструкций на основе уравнений пространственной теории упругости. Для трехслойных пластин важную роль сыграли предложенные в работе [7] однородные решения, с помощью которых решены различные задачи [1, 3, 4, 6, 10, 11]. Для таких же пластин при наличии идеального контакта между слоями методом однородных решений в работах [3, 4, 6] решены задачи для случая свободных от усилий плоских граней, а в работе [1] – для случая жестко закрепленных плоских граней. В данной статье этим методом получено решение той же задачи при скользящей заделке торцов и идеальном контакте слоев.

Постановка задачи. Рассмотрим трехслойную пластину симметричного строения относительно ее срединной плоскости со слоями из изотропных материалов и находящимися друг с другом в условиях идеального контакта. На лицевых гранях пластины выполняются условия плоского торца. На боковой поверхности действуют внешние усилия.

Отнесем пластину к размерным прямоугольным координатам $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$. Срединная плоскость пластины совпадает с координатной плоскостью $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2$. Тогда $|\tilde{x}_3| \leq (h_1 + h_2)$, где h_1 – толщина внешних одинаковых слоев, $2h_2$ – толщина внутреннего слоя. Величины, относящиеся к внешним слоям, будем обозначать внизу индексом 1, к внутреннему – индексом 2, \tilde{G}_m – модуль сдвига, а ν_m – коэффициент Пуассона, m – номер слоя.

Введем безразмерные величины

$$x_1 = \tilde{x}_1/R, \quad x_2 = \tilde{x}_2/R, \quad x_3 = \tilde{x}_3/h = \tilde{x}_3/(\lambda R),$$

$$\begin{aligned}\lambda &= h/R, \quad h = h_1 + h_2, \quad \lambda_1 = h_1/h, \quad \lambda_2 = h_2/h, \\ u_{mi} &= \tilde{u}_{mi}/R, \quad \sigma_{mij} = \tilde{\sigma}_{mij}/(2\tilde{G}_2) \quad (i, j = \overline{1, 3}, m = 1, 2); \\ G_m &= \tilde{G}_m/\tilde{G}_2, \quad G_1 = G.\end{aligned}$$

Тогда построение однородных решений задачи об упругом равновесии рассматриваемой пластины сводится к интегрированию известных уравнений равновесия [6]

$$\begin{aligned}\lambda^{-2}\partial_3^2 u_{mj} + D^2 u_{mj} + \nu_{m0}\partial_j \theta_m &= 0 \quad (j = 1, 2), \\ \lambda^{-2}\partial_3^2 u_{m3} + D^2 u_{m3} + \lambda^{-1}\nu_{m0}\partial_3 \theta_m &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

для каждого слоя с учетом граничных условий

$$\begin{aligned}\sigma_{1j3}(x_1, x_2, \pm 1) &= 0, \quad u_{13}(x_1, x_2, \pm 1) = 0, \\ u_{1i}(x_1, x_2, \pm \lambda_2) &= u_{2i}(x_1, x_2, \pm \lambda_2), \\ \sigma_{1i3}(x_1, x_2, \pm \lambda_2) &= \sigma_{2i3}(x_1, x_2, \pm \lambda_2) \quad (i = \overline{1, 3}),\end{aligned}\tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}\partial_i &= \partial/\partial x_i, \quad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \theta_m = \partial_1 u_{m1} + \partial_2 u_{m2} + \lambda^{-1}\partial_3 u_{m3}, \\ \nu_{m0} &= 1/(1 - 2\nu_m).\end{aligned}$$

Построение однородных решений. Однородные решения задачи (1), (2) для симметричной (обозначаемой значком «+»вверху) и кососимметричной (обозначаемой значком «-») деформаций можно представить в виде суммы бигармонического, вихревого и потенциального состояний:

$$\begin{aligned}u_{mi}^\pm(x_1, x_2, x_3) &= u_{miB}^\pm(x_1, x_2, x_3) + u_{miB}^\pm(x_1, x_2, x_3) + \\ &+ u_{mi\Pi}^\pm(x_1, x_2, x_3) \quad (i = \overline{1, 3}; m = 1, 2).\end{aligned}$$

Бигармоническое решение имеет вид

$$\begin{aligned}u_{11B}^+(x_1, x_2, x_3) &= \partial_1 \left(\Phi_0 + \Phi_0^* + (a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2) D^2 \Phi_0 \right), \\ u_{12B}^+(x_1, x_2, x_3) &= \partial_2 \left(\Phi_0 - \Phi_0^* + (a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2) D^2 \Phi_0 \right), \\ u_{13B}^+(x_1, x_2, x_3) &= (b_0 + b_1 x_3) D^2 \Phi_0, \\ u_{21B}^+(x_1, x_2, x_3) &= \partial_1 \left(\Phi_0 + \Phi_0^* + e_2 x_3^2 D^2 \Phi_0 \right), \\ u_{22B}^+(x_1, x_2, x_3) &= \partial_2 \left(\Phi_0 - \Phi_0^* + e_2 x_3^2 D^2 \Phi_0 \right), \\ u_{23B}^+(x_1, x_2, x_3) &= e_1 x_3 D^2 \Phi_0, \quad u_{miB}^-(x_1, x_2, x_3) \equiv 0.\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь

$$\begin{aligned}b_0 &= -\lambda\lambda_2 \left[(\lambda_1 \nu_1 (1 - 2\nu_2) G + \lambda_2 \nu_2 (1 - 2\nu_1)) (G - 1) + G(\nu_1 - \nu_2) \right] / \Delta, \\ \Delta &= \lambda_1 \lambda_2 \left((1 + \nu_1)(1 - 2\nu_2) G - (1 + \nu_2)(1 - 2\nu_1) \right) (G - 1) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + G(\lambda_1(1-\nu_2) + \lambda_2(1-\nu_1)), \\
b_1 = -b_0, \quad e_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} b_0, \quad a_1 = \lambda \frac{2\lambda(1-\nu_1) - b_0 - 2\lambda e_0}{1-2\nu_1}, \\
a_2 = -\frac{1}{2} a_1, \quad e_2 = \frac{\lambda}{2} \frac{2\lambda(e_0 - 1 + \nu_2) - e_1}{1-2\nu_2}, \\
a_0 = \lambda_2(\lambda_2 e_2 + (2 - \lambda_2) a_2).
\end{aligned}$$

Гармоническая функция $\Phi_0^*(x_1, x_2)$ связана с бигармонической $\Phi_0(x_1, x_2)$ соотношением

$$\partial_2^2 \Phi_0^* = -\partial_1^2 \Phi_0^* = e_0 D^2 \Phi_0,$$

в котором

$$e_0 = \left[\lambda_1 \lambda_2 ((1-2\nu_2)G - (1-2\nu_1))(G-1) + G(1-\nu_1)(1-\nu_2) \right] / \Delta.$$

Для однородной пластины ($G=1$, $\nu_1=\nu_2$) решение (3) принимает вид [2]

$$\begin{aligned}
u_{1B}^+(x_1, x_2, x_3) &= \partial_1(\Phi_0 + \Phi_0^*), \quad u_{2B}^+(x_1, x_2, x_3) = \partial_2(\Phi_0 - \Phi_0^*), \\
u_{3B}^+(x_1, x_2, x_3) &= 0, \quad u_{iB}^-(x_1, x_2, x_3) \equiv 0; \\
D^2 D^2 \Phi_0(x_1, x_2) &= 0, \quad \partial_2^2 \Phi_0^* = -\partial_1^2 \Phi_0^* = (1-\nu) D^2 \Phi_0.
\end{aligned}$$

Перемещения вихревого состояния имеют вид [5]

$$\begin{aligned}
u_{m1B}^\pm(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_{mk}^\pm(x_3) \partial_2 B_k(x_1, x_2), \\
u_{m2B}^\pm(x_1, x_2, x_3) &= -\sum_{k=1}^{\infty} p_{mk}^\pm(x_3) \partial_1 B_k(x_1, x_2), \quad u_{m3B}^\pm = 0.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
p_{1k}^+(x_3) &= \cos \delta_k^+ \lambda_2 \cos \delta_k^+(x_3 - \lambda_2) - G^{-1} \sin \delta_k^+ \lambda_2 \sin \delta_k^+(x_3 - \lambda_2), \\
p_{1k}^-(x_3) &= \left(\sin \delta_k^- \lambda_2 \cos \delta_k^-(x_3 - \lambda_2) + G^{-1} \cos \delta_k^- \lambda_2 \sin \delta_k^-(x_3 - \lambda_2) \right) / \delta_k^-, \\
p_{2k}^+(x_3) &= \cos \delta_k^+ x_3, \quad p_{2k}^-(x_3) = \left(\sin \delta_k^- x_3 \right) / \delta_k^-; \\
D^2 B_k(x_1, x_2) - \left(\delta_k^\pm / \lambda \right)^2 B_k(x_1, x_2) &= 0.
\end{aligned}$$

Счетные множества собственных значений δ_k^+ , δ_k^- определяются из трансцендентных уравнений

$$\begin{aligned}
G \sin \delta_k^+ \lambda_1 \cos \delta_k^+ \lambda_2 + \cos \delta_k^+ \lambda_1 \sin \delta_k^+ \lambda_2 &= 0, \\
G \sin \delta_k^- \lambda_1 \sin \delta_k^- \lambda_2 - \cos \delta_k^- \lambda_1 \cos \delta_k^- \lambda_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Уравнения (4) имеют только вещественные корни [3]. Поэтому вихревое состояние представляет собой решение типа погранслоя, проникание которого внутрь области определяется первым положительным корнем δ_1^+ . Для однородной пластины ($G=1$) из уравнений (4) имеем

$$\sin \delta^+ = 0, \quad \cos \delta^- = 0.$$

Для симметричной деформации уравнение (4) при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$ принимает вид

$$(G+1) \sin \delta^+ = 0.$$

Корни последнего уравнения не зависят от параметра G . Поэтому характер проникания погранслоя внутрь области в трехслойной пластине с одинаковыми относительными толщинами слоев такой же, как и в однородной.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$ и имеет место кососимметричная деформация пластины, то при более мягком среднем слое ($G > 1$) величина $\delta_1^- < \pi/2$. Если $G \rightarrow \infty$, то $\delta_1^- \rightarrow 0$. Следовательно, в трехслойной пластине с мягким средним слоем вихревое решение проникает в область сильнее, чем в однородной пластине, причем степень проникания тем сильнее, чем мягче внутренний слой. Если $G < 1$, то $\delta_1^- > \pi/2$ и при $G \rightarrow 0$ величина $\delta_1^- \rightarrow \pi$, что означает: в случае жесткого заполнителя вихревое решение трехслойной пластины проникает в область слабее, чем в однородной, причем характер проникания тем слабее, чем жестче внутренний слой.

Потенциальное решение будем искать в следующей форме:

$$\begin{aligned} u_{mj\Pi}(x_1, x_2, x_3) &= n_m(x_3) \partial_j C(x_1, x_2) \quad (j = 1, 2), \\ u_{m3\Pi}(x_1, x_2, x_3) &= q_m(x_3) C(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (5)$$

Из соотношений (1), (2), (5) следует, что функция $C(x_1, x_2)$ удовлетворяет метагармоническому уравнению

$$D^2 C(x_1, x_2) - (\gamma/\lambda)^2 C(x_1, x_2) = 0,$$

а для неизвестных функций $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ получаем спектральную задачу

$$\begin{aligned} n_m'' + \gamma^2(1 + \nu_{m0})n_m + \lambda \nu_{m0} q_m' &= 0, \\ q_m'' + \frac{\gamma^2}{1 + \nu_{m0}} q_m + \frac{\gamma^2 \nu_{m0}}{\lambda(1 + \nu_{m0})} n_m' &= 0, \\ q_1(1) + \lambda^{-1} n_1'(1) &= 0, \quad q_1(1) = 0, \\ n_1(\lambda_2) &= n_2(\lambda_2), \quad q_1(\lambda_2) = q_2(\lambda_2), \\ G[q_1(\lambda_2) + \lambda^{-1} n_1'(\lambda_2)] &= q_2(\lambda_2) + \lambda^{-1} n_2'(\lambda_2), \end{aligned}$$

$$G \left[\lambda^{-1} \gamma^2 (v_{10} - 1) n_1(\lambda_2) + (v_{10} + 1) q'_1(\lambda_2) \right] = \\ = \lambda^{-1} \gamma^2 (v_{20} - 1) n_2(\lambda_2) + (v_{20} + 1) q'_2(\lambda_2), \quad (6)$$

где γ – параметр разделения переменных.

Общим решением краевой задачи (6) являются функции

$$\begin{aligned} n_1^\pm(x_3) &= H_1^\pm \cos \gamma^\pm(x_3 - \lambda_2) + H_2^\pm \sin \gamma^\pm(x_3 - \lambda_2) + \\ &\quad + H_3^\pm(x_3 - \lambda_2) \cos \gamma^\pm(x_3 - \lambda_2) + H_4^\pm(x_3 - \lambda_2) \sin \gamma^\pm(x_3 - \lambda_2), \\ q_1^\pm(x_3) &= Q_1^\pm \sin \gamma^\pm(x_3 - \lambda_2) + Q_2^\pm \cos \gamma^\pm(x_3 - \lambda_2) + \\ &\quad + Q_3^\pm \left((x_3 - \lambda_2) \sin \gamma^\pm(x_3 - \lambda_2) + k_{13}^\pm \cos \gamma^\pm(x_3 - \lambda_2) \right) + \\ &\quad + Q_4^\pm \left((x_3 - \lambda_2) \cos \gamma^\pm(x_3 - \lambda_2) - k_{13}^\pm \sin \gamma^\pm(x_3 - \lambda_2) \right), \\ n_2^+(x_3) &= H_5^+ \cos \gamma^+ x_3 + H_6^+ x_3 \sin \gamma^+ x_3, \\ q_2^+(x_3) &= Q_5^+ \sin \gamma^+ x_3 + Q_6^+ \left(x_3 \cos \gamma^+ x_3 - k_{23}^+ \sin \gamma^+ x_3 \right), \\ n_2^-(x_3) &= H_5^- \sin \gamma^- x_3 + H_6^- x_3 \cos \gamma^- x_3, \\ q_2^-(x_3) &= Q_5^- \cos \gamma^- x_3 + Q_6^- \left(x_3 \sin \gamma^- x_3 + k_{23}^- \cos \gamma^- x_3 \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} k_{m3}^\pm &= (3 - 4v_m) / \gamma^\pm; \\ Q_i^\pm &= \lambda^{-1} a_i^\pm H_i^\pm, \quad a_i^\pm = (-1)^i \gamma^\pm \quad (i = \overline{1, 4}), \quad a_5^\pm = \mp \gamma^\pm, \quad a_6^\pm = \pm \gamma^\pm; \end{aligned}$$

H_i^\pm ($i = \overline{1, 6}$) – постоянные, определяемые из однородных систем линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} H_3^\pm \cos \gamma^\pm \lambda_1 + H_4^\pm \sin \gamma^\pm \lambda_1 &= 0, \\ H_1^\pm \sin \gamma^\pm \lambda_1 - H_2^\pm \cos \gamma^\pm \lambda_1 + H_3^\pm \left(\lambda_1 \sin \gamma^\pm \lambda_1 + k_{13}^\pm \cos \gamma^\pm \lambda_1 \right) - \\ &\quad - H_4^\pm \left(\lambda_1 \cos \gamma^\pm \lambda_1 - k_{13}^\pm \sin \gamma^\pm \lambda_1 \right) = 0, \\ H_1^\pm - H_5^\pm \frac{\cos}{\sin} \gamma^\pm \lambda_2 - H_6^\pm \lambda_2 \frac{\sin}{\cos} \gamma^\pm \lambda_2 &= 0, \\ H_2^\pm - H_3^\pm k_{13}^\pm \pm H_5^\pm \frac{\sin}{\cos} \gamma^\pm \lambda_2 \mp H_6^\pm \left(\lambda_2 \frac{\cos}{\sin} \gamma^\pm \lambda_2 \mp k_{23}^\pm \frac{\sin}{\cos} \gamma^\pm \lambda_2 \right) &= 0, \\ H_2^\pm G - H_3^\pm G k_{11}^\pm \pm H_5^\pm \frac{\sin}{\cos} \gamma^\pm \lambda_2 \mp H_6^\pm \left(\lambda_2 \frac{\cos}{\sin} \gamma^\pm \lambda_2 \mp k_{21}^\pm \frac{\sin}{\cos} \gamma^\pm \lambda_2 \right) &= 0, \\ H_1^\pm G + H_4^\pm G k_{12}^\pm - H_5^\pm \frac{\cos}{\sin} \gamma^\pm \lambda_2 - H_6^\pm \left(\lambda_2 \frac{\sin}{\cos} \gamma^\pm \lambda_2 \pm k_{22}^\pm \frac{\cos}{\sin} \gamma^\pm \lambda_2 \right) &= 0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$k_{m1}^\pm = (1 - 2v_m) / \gamma^\pm, \quad k_{m2}^\pm = 2(1 - v_m) / \gamma^\pm.$$

В результате значения коэффициентов H_i^\pm получаются такими:

$$\begin{aligned}
H_1^\pm &= 2G \left[(1 - \nu_1) (\cos 2\gamma^\pm \lambda_1 + 1) \left((1 - 2\nu_2) \sin 2\gamma^\pm \lambda_2 \mp 2\gamma^\pm \lambda_2 \right) + \right. \\
&\quad \left. + (1 - \nu_2) \left((1 - 2\nu_1) \sin 2\gamma^\pm \lambda_1 - 2\gamma^\pm \lambda_1 \right) (\cos 2\gamma^\pm \lambda_2 \pm 1) \right], \\
H_2^\pm &= G \left(2(1 - \nu_1) \sin 2\gamma^\pm \lambda_1 + 2\gamma^\pm \lambda_1 \right) \left((1 - 2\nu_2) \sin 2\gamma^\pm \lambda_2 \mp 2\gamma^\pm \lambda_2 \right) - \\
&\quad - 2G(1 - 2\nu_1)(1 - \nu_2) (\cos 2\gamma^\pm \lambda_1 - 1) (\cos 2\gamma^\pm \lambda_2 \pm 1) + \\
&\quad + 2\gamma^\pm \lambda_1 (\sin 2\gamma^\pm \lambda_2 \pm 2\gamma^\pm \lambda_2), \\
H_3^\pm &= \gamma^\pm \left[G \sin 2\gamma^\pm \lambda_1 \left((1 - 2\nu_2) \sin 2\gamma^\pm \lambda_2 \mp 2\gamma^\pm \lambda_2 \right) + \right. \\
&\quad + \sin 2\gamma^\pm \lambda_1 (\sin 2\gamma^\pm \lambda_2 \pm 2\gamma^\pm \lambda_2) - \\
&\quad \left. - 2G(1 - \nu_2) (\cos 2\gamma^\pm \lambda_1 - 1) (\cos 2\gamma^\pm \lambda_2 \pm 1) \right], \\
H_4^\pm &= -\gamma^\pm \left[G (\cos 2\gamma^\pm \lambda_1 + 1) \left((1 - 2\nu_2) \sin 2\gamma^\pm \lambda_2 \mp 2\gamma^\pm \lambda_2 \right) + \right. \\
&\quad + 2G(1 - \nu_2) \sin 2\gamma^\pm \lambda_1 (\cos 2\gamma^\pm \lambda_2 \pm 1) + \\
&\quad \left. + (\cos 2\gamma^\pm \lambda_1 + 1) (\sin 2\gamma^\pm \lambda_2 \pm 2\gamma^\pm \lambda_2) \right], \\
H_5^\pm &= 2G^2 (\sin 2\gamma^\pm \lambda_1 + 2\gamma^\pm \lambda_1) \gamma^\pm \lambda_2 \frac{\sin}{\cos} \gamma^\pm \lambda_2 \mp \\
&\quad \mp 4G(1 - \nu_1) (\cos 2\gamma^\pm \lambda_1 + 1) \left(\gamma^\pm \lambda_2 \frac{\cos}{\sin} \gamma^\pm \lambda_2 \mp \right. \\
&\quad \left. \mp (1 - 2\nu_2) \frac{\sin}{\cos} \gamma^\pm \lambda_2 \right) + 2G \left((1 - 2\nu_1) \sin 2\gamma^\pm \lambda_1 - 2\gamma^\pm \lambda_1 \right) \times \\
&\quad \times \left(\gamma^\pm \lambda_2 \frac{\sin}{\cos} \gamma^\pm \lambda_2 \pm 2(1 - \nu_2) \frac{\cos}{\sin} \gamma^\pm \lambda_2 \right), \\
H_6^\pm &= -2\gamma^\pm \left[G^2 (\sin 2\gamma^\pm \lambda_1 + 2\gamma^\pm \lambda_1) \frac{\cos}{\sin} \gamma^\pm \lambda_2 \pm \right. \\
&\quad \pm 2G(1 - \nu_1) (\cos 2\gamma^\pm \lambda_1 + 1) \frac{\sin}{\cos} \gamma^\pm \lambda_2 + \\
&\quad \left. + G \left((1 - 2\nu_1) \sin 2\gamma^\pm \lambda_1 - 2\gamma^\pm \lambda_1 \right) \frac{\cos}{\sin} \gamma^\pm \lambda_2 \right].
\end{aligned}$$

Из условия равенства нулю определителей систем (8) получаем трансцендентные уравнение для определения собственных значений γ^\pm

$$\begin{aligned}
F^\pm(\gamma) &\equiv G^2 (\sin 2\gamma^\pm \lambda_1 + 2\gamma^\pm \lambda_1) \left((3 - 4\nu_2) \sin 2\gamma^\pm \lambda_2 \mp 2\gamma^\pm \lambda_2 \right) + \\
&\quad + 2G \left[\left((1 - 2\nu_1) \sin 2\gamma^\pm \lambda_1 - 2\gamma^\pm \lambda_1 \right) \left((1 - 2\nu_2) \sin 2\gamma^\pm \lambda_2 \mp \right. \right. \\
&\quad \left. \mp 2\gamma^\pm \lambda_2 \right) - 4(1 - \nu_1)(1 - \nu_2) (\cos 2\gamma^\pm \lambda_1 \cos 2\gamma^\pm \lambda_2 \mp 1) \left. \right] + \\
&\quad + \left((3 - 4\nu_1) \sin 2\gamma^\pm \lambda_1 - 2\gamma^\pm \lambda_1 \right) (\sin 2\gamma^\pm \lambda_2 \pm 2\gamma^\pm \lambda_2) = 0. \tag{9}
\end{aligned}$$

Все корни уравнений (9) являются действительными или комплексными, расположенными симметрично в четырех квадрантах плоскости. Рассмотрим некоторые частные случаи трансцендентных уравнений (9).

Если $G = 0$ (внешние слои – абсолютно мягкие), то корни уравнений (9) асимптотически приближаются к множеству корней уравнений

$$\left((3 - 4\nu_1) \sin 2\gamma^\pm \lambda_1 - 2\gamma^\pm \lambda_1 \right) \left(\sin 2\gamma^\pm \lambda_2 \pm 2\gamma^\pm \lambda_2 \right) = 0.$$

В результате каждый спектр собственных значений состоит из двух множеств. Первое множество соответствует равновесию однослойной пластины, один торец которой жестко закреплен, второй находится в условии скользящей заделки. Второе множество описывает упругое равновесие пластины при отсутствии напряжений на плоских гранях [7].

Если $G = \infty$ (внутренний слой – абсолютно мягкий), то множество собственных значений γ^\pm трансформируется к совокупности корней уравнений

$$\left(\sin 2\gamma^\pm \lambda_1 + 2\gamma^\pm \lambda_1 \right) \left((3 - 4\nu_2) \sin 2\gamma^\pm \lambda_2 \mp 2\gamma^\pm \lambda_2 \right) = 0.$$

В случае выполнения одного из трех условий: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$; $G = 1$ и $\nu_1 = \nu_2$ получаем известные трансцендентные уравнения для однослойной пластины [2]:

$$\sin^2 \gamma^+ = 0, \quad \cos^2 \gamma^- = 0.$$

При $G = 1$ и произвольных значениях параметров ν_1 , ν_2 , λ_1 , λ_2 уравнения (9) принимают вид

$$\sin^2 \gamma^+ = 0, \quad \cos^2 \gamma^- = 0.$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$, то из уравнений (9) следует

$$\begin{aligned} & \left[G^{-1} \left((3 - 4\nu_1) \sin \gamma^\pm - \gamma^\pm \right) + \sin \gamma^\pm + \gamma^\pm \right] \times \\ & \times \left[G \left((3 - 4\nu_2) \sin \gamma^\pm \mp \gamma^\pm \right) + \sin \gamma^\pm \pm \gamma^\pm \right] - \\ & - 8(1 \mp 1)(1 - \nu_1)(1 - \nu_2) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, для симметричной деформации пластины имеем две независимые серии собственных значений. При этом первая серия не зависит от коэффициента Пуассона первого слоя ν_1 , вторая – от коэффициента Пуассона второго слоя ν_2 .

Для предельного случая $\nu_1 = \nu_2 = 1/2$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ имеем

$$\left((G + 1) \sin \gamma^\pm \mp (G - 1) \gamma^\pm \right) \left((G + 1) \sin \gamma^\pm + (G - 1) \gamma^\pm \right) - 2(1 \mp 1)G = 0.$$

Численные исследования трансцендентных уравнений. Для численного нахождения комплексных корней характеристических уравнений (9) был использован принцип аргумента в сочетании с итерационным методом Ньютона и контурным численным интегрированием.

В табл. 1 и 2 при различных относительных жесткостях G и для $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $\lambda_1 = 0,1$ приведены значения первых пятнадцати корней γ_p^{\pm}

Таблица 1

p	$G = 1,2$		$G = 1,4$		$G = 2$		$G = 10$	
	$\text{Re } \gamma_p^+$	$\text{Im } \gamma_p^+$	$\text{Re } \gamma_p^+$	$\text{Im } \gamma_p^+$	$\text{Re } \gamma_p^+$	$\text{Im } \gamma_p^+$	$\text{Re } \gamma_p^+$	$\text{Im } \gamma_p^+$
1	2,66988	0	2,49901	0	2,20227	0	1,38535	0
2	3,70764	0	4,02068	0	4,41357	0,64167	4,25188	1,12639
3	5,38668	0	4,96987	0	7,77280	1,10197	7,75138	1,46837
4	7,46639	0	7,78494	0,69031	11,1685	1,26390	11,2445	1,66350
5	8,12380	0	11,1147	0,85252	14,6061	1,28162	14,7401	1,79510
6	11,0786	0,24859	14,5068	0,68774	18,1302	1,13573	18,2435	1,89416
7	13,8400	0	16,9958	0	21,7024	0,77356	21,3603	9,80923
8	15,0362	0	19,0579	0,91554	22,5716	4,33725	21,7544	1,98192
9	16,3591	0	22,1727	1,79916	25,2286	1,22844	25,2653	2,06901
10	18,9161	0,92605	24,7470	1,76341	28,8471	1,58820	28,7682	2,15249
11	22,0214	1,36973	27,6169	0	32,3430	1,77424	32,2622	2,22698
12	25,0172	1,42482	28,7700	0,66275	35,7982	1,88747	35,7507	2,29070
13	28,1374	0,96144	32,4320	1,35002	39,2441	1,95403	39,2372	2,34426
14	30,1939	0	35,8482	1,54532	42,6956	1,98520	42,7243	2,38924
15	32,5192	0,88281	39,2486	1,63006	46,1645	1,98918	46,2139	2,42774

уравнений (9) из первого квадранта комплексной плоскости. При этом данные табл. 1 соответствует симметричной деформации пластины, табл. 2 – кососимметричной.

Таблица 2

p	$G = 1,2$		$G = 1,4$		$G = 2$		$G = 10$	
	$\text{Re } \gamma_p^-$	$\text{Im } \gamma_p^-$	$\text{Re } \gamma_p^-$	$\text{Im } \gamma_p^-$	$\text{Re } \gamma_p^-$	$\text{Im } \gamma_p^-$	$\text{Re } \gamma_p^-$	$\text{Im } \gamma_p^-$
1	1,33100	0	1,24472	0	1,09159	0	0,58201	0
2	1,85184	0	1,97639	0	2,25658	0	2,49249	0,78055
3	4,02160	0	3,75809	0	3,24759	0	6,00327	1,32687
4	5,57336	0	6,13481	0,43405	6,08792	0,93728	9,49808	1,57675
5	6,76002	0	9,44479	0,80926	9,46642	1,20388	12,9916	1,73491
6	9,43208	0,17785	12,7980	0,82475	12,8805	1,28953	16,4906	1,84724
7	12,5371	0	16,0446	0	16,3524	1,23507	19,9984	1,93842
8	12,9422	0	16,5701	0	19,9387	0,95846	23,5105	2,02552
9	15,1484	0	17,9697	0	22,5866	4,33451	27,0179	2,11161
10	17,3174	0,48503	20,6908	1,41163	23,4131	0,91091	30,5161	2,19105
11	20,4869	1,19256	23,4505	1,96642	27,0600	1,44504	34,0069	2,26018
12	23,5228	1,45361	26,2938	1,29783	30,6036	1,69325	37,4940	2,31867
13	26,5439	1,27221	28,2168	0	34,0731	1,83775	40,9805	2,36771
14	29,4038	0	30,6892	1,15742	37,5212	1,92571	44,4687	2,40914
15	30,5302	0	34,1450	1,46715	40,9684	1,97354	47,9600	2,44542

На рис. 1 представлены графики изменения модуля первого собственного значения γ_1^{\pm} уравнений (9) в зависимости от относительной жесткости G при $\lambda_1 = 0,5$. Графики изменения модуля первого собственного значения в зависимости от относительной толщины внешних слоев λ_1 при $G = 10$ изображены на рис. 2. Значения коэффициентов Пуассона ν_1 , ν_2 принимались равными 0,3. Кривые 1 соответствуют симметричной задаче, кривые 2 – кососимметричной.

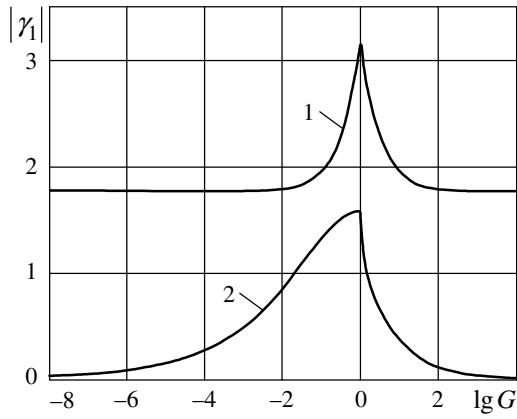


Рис. 1

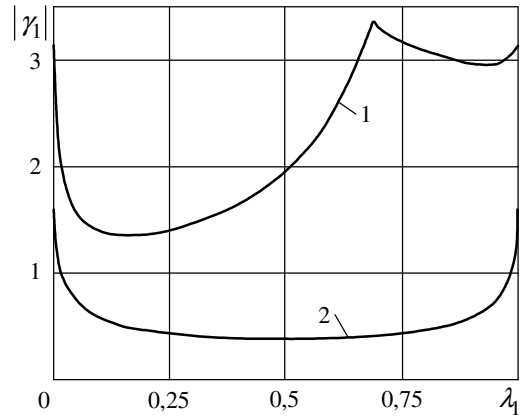


Рис. 2

Из приведенных таблиц и рисунков следует, что вид граничных условий на торцах, физико-механические свойства материалов и толщины слоев пластины оказывают заметное влияние на изменение собственных значений. Если в однослойной пластине со скользящей заделкой торцов все собственные значения являются действительными, двукратными и не зависят от физико-механических свойств материала, то в трехслойной пластине наряду с действительными имеется счетное множество комплексных собственных значений, зависящих от относительных толщин слоев и их упругих свойств материалов.

Потенциальное состояние также представляет собой решение типа погранслоя, и характер проникания его внутрь области определяется первым по модулю корнем γ_1^+ . При этом на интервале $G \in (0; \infty)$ величина γ_1^+ является действительной (см. рис. 1), а величина γ_1^- является действительной при $G > 1$ и комплексной при $G < 1$. Для различных жесткостей слоев $\gamma_1^+ < \pi$, $|\gamma_1^-| < \pi/2$. При $|\lg G| \rightarrow \infty$ величина γ_1^+ стремится сверху к первому корню уравнения $(3 - 4\nu) \sin \gamma - \gamma = 0$, равному $\approx 1,766$, а γ_1^- стремится к нулю. Следовательно, в трехслойной пластине со слоями различной жесткости при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$ потенциальное решение проникает внутрь области сильнее, чем в однородной пластине. Чем больше отличаются друг от друга модули сдвига слоев пластины, тем сильнее проявляется краевой эффект.

Изменение $|\gamma_1^+|$ в зависимости от λ_1 носит более сложный характер (см. рис. 2). Значения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 = 1$ соответствуют однородной пластине. В случае симметричной деформации (рис. 2, кривая 1) отрезок $[0; 1]$ изменения параметра λ_1 условно разбивается на четыре интервала $(0; 0,16)$, $(0,16; 0,685)$, $(0,685; 0,93)$, $(0,93; 1)$ в зависимости от характера поведения модуля первого собственного значения. На интервале $(0; 0,685)$ величина γ_1^+ принимает действительные значения, а на интервале

$(0, 685; 1)$ – комплексные. В окрестности точки $\lambda_1 \approx 0,16$ величина $|\gamma_1^+|$ достигает наименьшего значения, приближенно равного $1,343$, и, следовательно, в трехслойной пластине с внешними жесткими слоями потенциальное решение проникает внутрь области сильнее, чем в однородной пластине. Модуль γ_1^+ своего максимального значения $\approx 3,3$ достигает в окрестности точки $\lambda_1 \approx 0,685$, и краевой эффект проникает внутрь области слабее. В точке $\lambda_1 \approx 0,93$ величина $|\gamma_1^+|$ имеет локальный минимум $2,94$.

В случае кососимметричной деформации величина γ_1^- на всем интервале изменения $\lambda_1 \in (0; 1)$ остается действительной и изменяется от $0,3722$ (при $\lambda_1 \approx 0,5$) до $\pi/2$ (при $\lambda_1 = 0$ или $\lambda_1 = 1$ – однородная пластина). Следовательно, потенциальное решение проникает внутрь области сильнее, чем в однородной пластине.

РЕЗЮМЕ. У тривимірній постановці розглянута задача теорії пружності про рівновагу тришарової ізотропної пластини симетричної будови. На лицьових площинах пластини виконуються умови плоского торця, на межі поділу шарів має місце ідеальний контакт. Отримано однорідні розв'язки рівнянь рівноваги в переміщеннях у вигляді суми бігармонічного, вихрового й потенційного станів. Виконано аналітичні та чисельні дослідження трансцендентних рівнянь для знаходження власних значень.

Ключові слова: ідеальний контакт, метод однорідних розв'язків, плоский торець, пружна рівновага, трансцендентні рівняння, тришарова пластина.

SUMMARY. In three-dimensional statement the problem of the elasticity theory about the equilibrium of a three-layered isotropic plate of a symmetric structure is considered. The conditions of flat end are carried out at faces of plate, and ideal contact is satisfied on the interface of layers. Homogeneous solutions of equilibrium equations in displacements are got in the form of biharmonic, rotational and potential states. Analytical and numerical researches of transcendental equations for the eigenvalues determination are carried out.

Key words: elastic equilibrium, flat end, homogeneous solutions method, ideal contact, three-layered plate, transcendental equations.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Алтухов Е. В., Кулиш И. Е. Равновесие трехслойной пластины с жесткими торцами // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2001. – № 1. – С. 314-321.
2. Буланов Г. С., Шалдырван В. А. Решение смешанной задачи о концентрации напряжений в толстой пластине // Теорет. и прикладная механика. – 1984. – Вып. 15. – С. 5-9.
3. Ворович И. И., Кадомцев И. Г. Качественное исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной плиты // Прикладная математика и механика. – 1970. – Т. 34, вып. 5. – С. 870-876.
4. Ворович И. И., Кадомцев И. Г., Устинов Ю. А. К теории неоднородных по толщине плит // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1975. – Вып. 3. – С. 119-130.
5. Ворович И. И., Малкина О. С. Напряженное состояние толстой плиты // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 31, № 2. – С. 230-241.
6. Космодамианский А. С., Шалдырван В. А. Толстые многосвязные пластины. – К.: Наук. думка, 1978. – 240 с.
7. Лурье А. И. К теории толстых плит // Прикладная математика и механика. – 1942. – Т. 6, вып. 2-3. – С. 151-168.

8. Пискунов В. Г. Итерационная аналитическая теория в механике слоистых композитных систем // Механика композитных материалов. – 2003. – Т. 39, № 1. – С. 3-24.
9. Пискунов В. Г., Рассказов А. О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38, № 2. – С. 22-56.
10. Устинов Ю. А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит. – Ростов н/Д.: ООО ЦВВР, 2006. – 257 с.
11. Устинов Ю. А. Некоторые свойства однородных решений неоднородных плит // Докл. АН СССР. – 1974. – Т. 216, № 4. – С. 755-758.
12. Altenbach H. Theories for laminated and sandwich plates. A review // Mechanics of composite materials. – 1998. – Vol. 34, No 3. – P. 243-252.
13. Birman V., Byrd L. W. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures // Applied mechanics reviews. – 2007. – Vol. 60, No 5. – P. 195-216.
14. Carrera E. Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells // Applied mechanics reviews. – 2003. – Vol. 56, No 3. – P. 287-308.

Донецкий национальный университет

Поступила 11.03.2011

УДК 539.376

А. А. КАМИНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук,
М. Ф. СЕЛИВАНОВ, канд. физ.-мат. наук,
Ю. А. ЧЕРНОИВАН, канд. физ.-мат. наук

ДОКРИТИЧЕСКИЙ РОСТ ДВУХ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТРЕЩИН В ВЯЗКОУПРУГОМ ТЕЛЕ

На основе линейной теории вязкоупругости и полученного в рамках модели Леонова-Панасюка-Дагдейла раскрытия трещины в зоне нелинейных деформаций построены уравнения докритического роста в изотропной вязкоупругой пластинке двух коллинеарных трещин, приведен численный алгоритм их решения.

Ключевые слова: коллинеарные трещины, распространение трещин, линейная вязкоупругость

Построение теоретических моделей для изучения процесса взаимодействия и слияния трещин является актуальной проблемой современной механики разрушения. Различные теоретические и практические аспекты представлены в значительном числе публикаций [1, 4, 8–14]. Однако моделированию роста и слияния коллинеарных трещин в вязкоупругих средах уделено незначительное внимание. В работе [3] на основе модели трещины Леонова-Панасюка построена теория докритического распространения единичной трещины в линейно вязкоупругой среде. В рамках этой теории в [4] решена задача о слиянии трещин достаточно больших размеров с незначительной зоной нелинейных деформаций у фронта сливающихся трещин. В настоящей статье построена модель для исследования длительного распространения и слияния в бесконечной пластине двух коллинеарных трещин нормального отрыва равной длины. Рост трещин обусловлен линейно вязкоупругими свойствами пластины и происходит под действием докритических нагрузок. Модель роста двух коллинеарных трещин получена обобщением теории докритического распространения единичной трещины. В случае единичной трещины связь между ее размером и временем определяется из одного интегрального уравнения. В силу несимметричности решений для перемещений берегов трещины в зонах нелинейных деформаций получена система двух уравнений, связывающих размеры трещин и время. В зависимости от начального расстояния между трещинами учтены различные варианты слияния и роста.

Постановка задачи. Пусть в бесконечной пластине, материал которой изотропен и проявляет линейно вязкоупругие свойства, имеется система двух коллинеарных трещин одинаковой длины. Пластина растягивается равномерно распределенными на бесконечности усилиями интенсивности p , направление приложения которых перпендикулярно к линии, на которой расположены трещины. Деформирование пластины осуществляется в условиях плоского напряженного состояния. Для решения задачи будем использовать модель трещины Леонова-Панасюка-Дагдейла, согласно которой области нелинейных деформаций материала

в окрестности вершины трещины можно заменить разрезами, к берегам которых приложены сжимающие напряжения, интенсивность которых обозначим σ_0 . Эту характеристику трещиностойкости, в общем случае, нужно определять экспериментально. При моделировании сопротивления материала в области около конца трещины напряжениями σ_0 будем полагать, что эти напряжения равномерно распределены по берегам зоны нелинейных деформаций и остаются постоянными во время докритического роста трещины.

Введем декартову систему координат. Начало координат поместим на линии расположения трещин на одинаковом удалении от их внутренних концов, направление оси x совместим с линией расположения трещин. В силу симметрии задачи относительно обеих осей, изобразим контур трещины, используемые геометрические параметры задачи, а также приложенные силы лишь в первой координатной четверти (рис. 1).

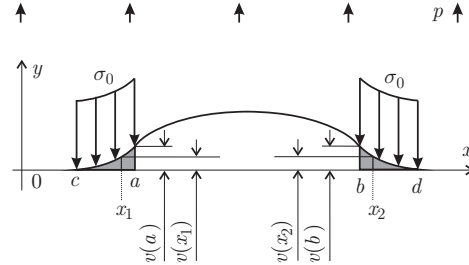


Рис. 1

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид

$$\begin{aligned} v=0, \quad \tau_{12}=0 \text{ при } |x|<c \cup |x|>d; \\ \sigma_{22}=\sigma_0, \quad \tau_{12}=0 \text{ при } c \leq x < a \cup b < |x| < d; \\ \sigma_{22}=-p, \quad \tau_{12}=0 \text{ при } a \leq |x| \leq b, \end{aligned}$$

причем координаты концов разрезов определим из условия конечности напряжений в вершинах трещин.

Распространение трещины при докритическом уровне нагружения сдерживается материалом в зоне нелинейных деформаций, пока смещение берегов в конце трещины не превысит критического значения v^* . Распространение трещин определяется как процесс перехода точек области, где есть взаимодействие берегов, в область, где её нет.

Построение решения задачи. Связь между напряжениями и деформациями в линейно вязкоупругом теле имеют форму интегралов Больцмана

$$\sigma_{ij}(t) = \int R_{ijkl}(t-\tau) d\varepsilon_{kl}(\tau). \quad (1)$$

где R – функции релаксации материала (в случае изотропности материала независимых функций будет две, например, функции соответствующие модулю Юнга E и коэффициенту Пуассона ν).

Используя результаты работы [1], запишем упругое перемещение берегов трещин в направлении оси y в точке с координатой $(x,0)$ (рис. 1) в следующем виде

$$v(x) = \frac{4\sigma_0}{\pi} \operatorname{Re} \int_d^x LU(z; a, b) dz, \quad (2)$$

где $L = \frac{1}{E}$; $U(z; a, b) = \ln \frac{(d_a z_c + a_c d_z) b_z}{(d_b z_c + b_c d_z) z_a}$; $d_a = \sqrt{d^2 - a^2}$, $z_c = \sqrt{z^2 - c^2}$ и т.п.

Условие ограниченности и непрерывности напряжений в точках $x = c$ и $x = d$ имеет вид

$$\begin{aligned} d_c^2 \cos^2 \frac{\pi}{2\rho_2} &= a_c^2 + b_c^2 - 2a_c b_c \sin \frac{\pi}{2\rho_2}; \\ d_a a_c \left[F(k) + \frac{a^2}{d_a^2} \Pi \left(-\frac{d_c^2}{d_a^2}, k \right) \right] &= d_b b_c \left[F(k) + \frac{b^2}{d_b^2} \Pi \left(-\frac{d_c^2}{d_b^2}, k \right) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где $F(k)$ и $\Pi(n, k)$ – полные эллиптические интегралы первого и третьего родов соответственно, $k = d_c/d$,

$$\rho_2 = \sigma_0/p \quad (4)$$

– параметр задачи.

Для вычисления упругого перемещения (2) предварительно необходимо определить внешние границы трещины c и d из выражения (3).

Для решения задачи линейной теории вязкоупругости воспользуемся принципом Вольтерра, согласно которому операции интегрирования по времени и координате коммутативны. В случае зависимости от времени характеристики L и координат концов трещины a и b , заменяем величину $LU(z; a, b)$ в выражении (2) интегралом Больцмана. Запишем

$$v[x; a(t), b(t)] = \frac{4\sigma_0}{\pi} \operatorname{Re} \int_{d(t)}^x dz \int_0^t L(t-\tau) dU[z; a(\tau), b(\tau)]. \quad (5)$$

Далее меняем порядок интегрирования и, таким образом, получаем вертикальное перемещение в точке $(x, 0)$ берегов трещины с концами в точках $(a, 0)$ $(b, 0)$ как функцию времени в аналогичной выражению (1) форме свертки

$$v(x, t) = \int_0^t L(t-\tau) d(pv[x; a(\tau), b(\tau)])$$

или

$$v(x, t) = L_0 pv[x; a(t), b(t)] + \int_0^t L'(t-\tau) pv[x; a(\tau), b(\tau)] d\tau, \quad (6)$$

где

$$pv[x; a(t), b(t)] = \frac{4\rho_2}{\pi} \int_{d(t)}^x U[z; a(t), b(t)] dz.$$

Отметим, что теоретическое обоснование смены порядка интегрирования в выражении (5) дано в работе [3], где установлено, что такая операция возможна при увеличении длины трещины со временем. Координаты концов трещины как функции времени определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} v(x = a(t), t) = v^* \\ v(x = b(t), t) = v^* \end{cases} \quad (7)$$

Метод решения уравнений докритического роста трещин. Подставляя в систему (7) выражение для $v(x, t)$ из (6) и представляя критическое смещение берегов в виде $v^* = L_0 p v_1^*$, получаем

$$\begin{cases} v[a(t); a(t), b(t)] + \int_0^t l'(t - \tau) v[a(t); a(\tau), b(\tau)] d\tau = v_1^* \\ v[b(t); a(t), b(t)] + \int_0^t l'(t - \tau) v[b(t); a(\tau), b(\tau)] d\tau = v_1^* \end{cases}, \quad (8)$$

где $l(t) = L(t)/L_0$.

Начальный (*инкубационный*) период роста трещин ограничим моментом начала роста их длины. Так как упругое перемещение в левом конце трещины превышает раскрытие в правом конце, время инкубационного периода t_0 определим из условия достижения перемещением в левом конце своего критического значения:

$$l(t_0) v(a_0; a_0, b_0) = v_1^*.$$

За время t_0 перемещение в правом конце достигнет величины $L(t_0) p v(b_0; a_0, b_0)$, которая не превышает значения критического перемещения v^* . Начиная с момента времени t_0 , длина трещин увеличивается. Внутренние концы начинают сближение, инициируя слияние.

Далее рассмотрим метод нахождения зависимостей $a(t)$ и $b(t)$ из системы уравнений (8). Для решения этой системы разобьем отрезок на продолжении трещины от точки a_0 до точки a^* на n отрезков. Будем последовательно находить время прохождения трещиной границ отрезков. Точку a^* определим из условия достижения в ней упругим перемещением значения v^* при начальных значениях положения концов трещины. При приближении левого конца трещины к этой точке возрастает скорость слияния da/dt . По этой причине целесообразно брать длину i -го интервала разбивки (a_{i+1}, a_i) ($a^* < a_N < a_{N-1} < \dots < a_1 < a_0$) немного большей длины $(i-1)$ -го интервала (a_i, a_{i-1}) . Для представленных ниже решений узлы разбивки были выбраны следующим образом

$$a_i = a_0 - (a_0 - a^*) \frac{q^i - 1}{q^{n+1} - 1}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

т.е. длина i -го ($i = 2, 3, \dots, n$) интервала взята в q раз большей предыдущего ($i-1$)-го интервала. Отметим, что с ростом длины трещины значение a^* , которое было выбрано для начальных значений положения концов трещины, будет отодвигаться вправо. Однако мы не пересчитываем положение узлов разбивки при слиянии. Скорость процесса слияния растет со временем и отрезки близкие к a^* трещина проходит за промежутки времени значительно меньшие времени прохождения начальных интервалов. По этой причине мы пренебрегаем вкладом в общее время распространения трещин времени прохождения трещиной близких к a^* отрезков также как и времени исчезновения перемычки между трещинами. До достижения перемещением в правом конце трещины критического значения, время t_i прохождения трещиной узла разбивки a_i , будем определять из первого уравнения системы (8) при $b(t) = b_0$:

$$v(a_i; a_i, b_0) + \int_0^{t_i} l'(t_i - \tau) v(a_i; a(\tau), b_0) d\tau = v_1^*. \quad (9)$$

В пределах каждого временного интервала ищем решение $a(t)$ в форме показательной функции

$$a(t) = a_{i-1} \left(\frac{a_i}{a_{i-1}} \right)^{\frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}}, \quad (10)$$

которая удовлетворяет условиям $a(t_{i-1}) = a_{i-1}$, $a(t_i) = a_i$.

Отметим, что при $a_i < c_0$

$$v(a_i; a(\tau), b_0) = 0, \quad \tau < t',$$

где t' удовлетворяет уравнению $c(t') = a_i$, и интегрирование в (9) можно

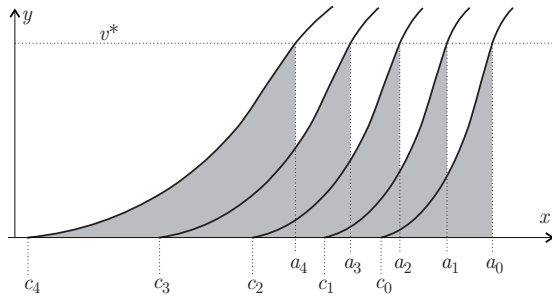


Рис. 2

проводить не от нуля, а от t' или, чтобы не решать указанное уравнение, – от ближайшего к t' времени прохождения t_j узла разбивки так чтобы $t_j < t'$. Выбор t_j проиллюстрируем при помощи

рис. 2. При определении t_1 и t_2 интегрирование в (9) проводим от нуля, так как в точках $x = a_1$ и $x = a_2$ смещение берегов происходит еще до завершения инкубационного периода. При определении t_3 , так как $a_3 < c_0$, интегрирование

проводим от t_0 , а при определении t_4 – от t_1 .

Если определено t_n для последнего узла разбивки по a , то номер узла, соответствующий началу этапа исчезновения перемычки, $n_{co} = n$, время слияния $t_{co} = t_{n_{co}}$. Если при определении t_i не выполняется условие

$$v(a_i; a_i, b_0) + \int_0^{t_{i-1}} l'(t_{i-1} - \tau)v(a_i; a(\tau), b_0)d\tau < v_1^*,$$

то номер узла, соответствующий началу этапа исчезновения перемычки, $n_{co} = i - 1$. Определив время прохождения левым концом трещины i -го узла разбивки, t_i , проверяем осталось ли перемещение в правом конце трещины меньшим критического значения для $t = t_i$. Если

$$v(b_0; a_i, b_0) + \int_0^{t_i} l'(t_i - \tau)v(b_0; a(\tau), b_0)d\tau < v_1^*, \quad (11)$$

то переходим к определению t_{i+1} . В противном случае перемещение в правом конце достигло критического значения и, тем самым, инициируется рост трещин во внешние стороны. Обозначим соответствующий момент времени t_{b0} .

Если условие (11) выполняется и для времени прохождения узла разбивки по a , соответствующего времени слияния, то пренебрежимо малый по времени протекания процесс исчезновения перемычки между трещинами инициируется раньше момента t_{b0} . Такой вариант распространения двух коллинеарных трещин возможен лишь при достаточно близком начальном расположении трещин. При слиянии образуется трещина, длина которой более чем в два раза больше двух сливающихся трещин (длины двух трещин плюс длина перемычки). Ко времени окончания слияния, перемещение в правом конце (для большинства просчитанных ниже примеров) уже достигнет критического значения. При слиянии трещин до инициирования роста вправо при выполнении условия

$$v(b_0; 0, b_0) + \int_0^{t_{i-1}} l'(t_{i-1} - \tau)v(b_0; a(\tau), b_0)d\tau < v_1^* \quad (12)$$

находим t_{b0} из уравнения

$$v(b_0; 0, b_0) + \int_0^{t_{b0}} l'(t_{b0} - \tau)v(b_0; a(\tau), b_0)d\tau = v_1^*,$$

если же условие (12) не выполняется, полагаем $t_{b0} = t_{co}$.

Если условие (11) на i -м шаге не выполняется, то определенное из уравнения (9) t_i может послужить начальным приближением для определения времени начала роста трещины вправо. Система для определения t_{b0} и a_{b0} (a_{b0} – координата левого конца трещины в момент времени

t_{b0}) имеет следующий вид

$$v(a_{b0}; a_{b0}, b_0) + \int_0^{t_{b0}} l'(t_{b0} - \tau) v(a_{b0}; a(\tau), b_0) d\tau = v_1^*,$$

$$v(b_0; a_{b0}, b_0) + \int_0^{t_{b0}} l'(t_{b0} - \tau) v(b_0; a(\tau), b_0) d\tau = v_1^*.$$

Если время слияния еще не определено, после момента времени t_{b0} начнем исследование роста трещины в обе стороны. В этом случае время прохождения i -го узла разбивки по a и соответствующее этому времени положение правого конца трещины b_i найдем из системы уравнений

$$v(a_i; a_i, b_i) + \int_0^{t_i} l'(t_i - \tau) v[a_i; a(\tau), b(\tau)] d\tau = v_1^*,$$

$$v(b_i; a_i, b_i) + \int_0^{t_i} l'(t_i - \tau) v[b_i; a(\tau), b(\tau)] d\tau = v_1^*. \quad (13)$$

Также как и при $b(t) = b_0$ ищем время t_i прохождения левым концом трещины точки a_i до определения времени слияния трещин.

Решение $a(t)$ ищем в форме (10), а $b(t)$ – аналогично, в форме

$$b(t) = b_{i-1} \left(\frac{b_i}{b_{i-1}} \right)^{\frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}}.$$

При $a_i < c_0$

$$v[a_i; a(\tau), b(\tau)] = 0, \quad \tau < t',$$

где t' удовлетворяет уравнению $c(t') = a_i$, и интегрирование в первом уравнении системы (13) можно проводить не от нуля, а от t' , или, чтобы не решать указанное уравнение, – от ближайшего к t' времени прохождения t_j узла разбивки так, чтобы $t_j < t'$.

При $b_i > d_0$

$$v[b_i; a(\tau), b(\tau)] = 0, \quad \tau < t',$$

где t' удовлетворяет уравнению $d(t') = b_i$, и интегрирование во втором уравнении системы (13) можно проводить не от нуля, а от t' , или, чтобы не решать указанное уравнение, – от ближайшего к t' времени прохождения t_j узла разбивки так чтобы $t_j < t'$.

Если определено t_n для последнего узла разбивки по a , номер узла, соответствующий началу этапа исчезновения перемычки, $n_{co} = n$. Если при определении t_i не выполняется условие

$$v(a_i; a_i, b_{i-1}) + \int_0^{t_{i-1}} l'(t_{i-1} - \tau) v[a_i; a(\tau), b(\tau)] d\tau < v_1^*,$$

то номер узла, соответствующий началу этапа исчезновения перемычки, $n_{co} = i - 1$.

По окончании процесса слияния имеем одну трещину длиной $2b_{n_{co}}$. Перемещения в концах трещины теперь равны и могут превышать значение критического перемещения v^* .

Для нахождения закона изменения координат правого конца трещины со временем, $b(t)$, выполним разбивку отрезка на продолжении трещины на m интервалов, таким же образом как это было сделано для исследования процесса срастания:

$$b_i = b_{n_{co}} + (b^* - b_{n_{co}}) \frac{q^i - 1}{q^{m+1} - 1}, \quad i = n_{co} + 1, n_{co} + 2, \dots, n_{co} + m;$$

при этом для указанных i $a_i = 0$, а точку b^* определим из условия достижения в ней упругим перемещением $v(b^*; 0, b^*)$ значения v^* . Время прохождения i -го узла разбивки по b , t_i будем последовательно находить из уравнения

$$v(b_i; 0, b_i) + \int_0^{t_i} l'(t_i - \tau) v[b_i; a(\tau), b(\tau)] d\tau = v_1^*.$$

При достаточном количестве узлов разбивки может оказаться, что

$$v(b_i; 0, b_i) + \int_0^{t_{i-1}} l'(t_{i-1} - \tau) v[b_i; a(\tau), b(\tau)] d\tau > v_1^*.$$

Выполнение этого неравенства связано с распространением трещин во внешние стороны во время исчезновения перемычки. Соответствующий номеру i узел разбивки по b следует удалить.

Анализ результатов численных исследований. Проведем анализ временной зависимости координат концов трещины при некоторых значениях параметров задачи. Геометрическим параметром служит начальное положение левого конца трещины a_0 . Начальную длину трещины положим равной единице, таким образом, начальное положение правого конца — $b_0 = a_0 + 1$. Силовой параметр и параметры трещиностойкости материала пластины объединим в параметры модели ρ_2 и k_δ . Первый из указанных параметров равен отношению приложенных к берегам зоны нелинейных деформаций напряжений σ_0 (в рамках используемой модели) к уровню интенсивности внешней нагрузки p (выражение (4)). Второй из указанных параметров характеризует уровень критического раскрытия трещины в пластине из материала с вязкоупругими свойствами.

Решения получим для значений параметра $6 \leq \rho_2 \leq 10$.

Если для задачи о росте одной трещины единичной длины определить раскрытие в вершинах трещины (в обозначениях данной работы оно в обоих концах будет равным величине $L(t) p v(0,5;0;0,5)$, которая зависит от параметра ρ_2), вычислить

$$v_{\min} = \min_{\max} \{I(t) v(0,5;0;0,5)\}$$

и рассматривать уровни критических перемещений $v^* = v_1^*/(L_0 p)$, где v_1^* определяется уровнем параметра k_δ следующим образом

$$\lg v_1^* = \lg v_{\min} + k_\delta (\lg v_{\max} - \lg v_{\min}),$$

то при $0 < k_\delta < 1$ трещина обязательно начнет докритический рост.

Далее конкретизируем ядро интегральных операторов в уравнениях докритического роста трещин.

Функции релаксации, введенные в уравнениях связи между напряжениями и деформациями (1) с необходимой точностью можно представить в виде ряда [6]

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1}{E_0} \left[1 + \sum_i \lambda_i R_\alpha^*(\beta_i) \right], \quad (14)$$

где λ_i , β_i и α – реологические параметры материала пластины; $R_\alpha^*(\beta)$ – интегральный оператор, действие которого на функцию времени описывается в форме

$$R_\alpha^*(\beta) \cdot f(t) = \int_{-\infty}^t R_\alpha(\beta, t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad (15)$$

R_α – ядро, в качестве которого используем функцию Работнова

$$R_\alpha(\beta, t) = t^{-\alpha} E_{\delta, \delta}(-\beta t^\delta) \quad \text{è è è} \quad R_\alpha(\beta, t) = -(\beta t)^{-1} E_{\delta, 0}(-\beta t^\delta),$$

$E_{\delta, \gamma}$ – функция Миттаг-Леффлера; $\delta = 1 - \alpha$.

Для проведения качественных исследований будем использовать лишь одно слагаемое в представлении (14). В этом случае модуль Юнга E как функцию времени, применяя алгебру резольвентных операторов, получим в форме

$$E^* \cdot 1 = E_\infty + (E_0 - E_\infty) E_{\delta, 1}(-bt^\delta), \quad E_\infty = E_0 \left(1 + \frac{\lambda}{\beta} \right)^{-1}, \quad b = \lambda + \beta. \quad (16)$$

Все численные исследования проведены для материала пластины со следующими реологическими параметрами модели (16):

$$E_0 = 4000 \text{ МПа}, \quad E_\infty = 40 \text{ МПа}, \quad \delta = 0,5, \quad b = 0,1 \text{ сек}^{-\delta}.$$

На рис. 3 приведены кинетические кривые роста трещин для сле-

дующих параметров задачи: $a_0 = 0,5$ (начальное расстояние между трещины равно начальной длине каждой из трещин), решения, приведенные на рис. 3,а, получены при $k_8 = 0,3$, на рис. 3,б – при $k_8 = 0,7$, кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям 6, 8 и 10 параметра ρ_2 . На рис. 4 приведены аналогичные зависимости для $a_0 = 0,1$ (начальное расстояние между трещины равно пятой части начальной длины каждой из трещин), на рис. 5 – для $a_0 = 0,06$. Точки (a_i, t_i) и (b_i, t_i) на кинетических кривых соответствуют узлам разбивки. Анализируя полученные численные результаты, отметим следующее: при начальном расстоянии между сливающимися трещинами, равному начальной

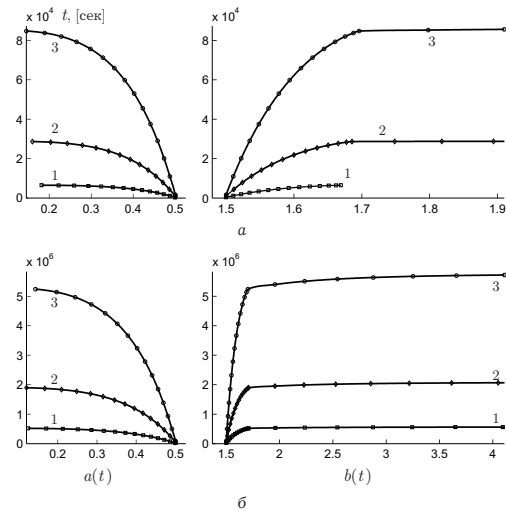


Рис. 3

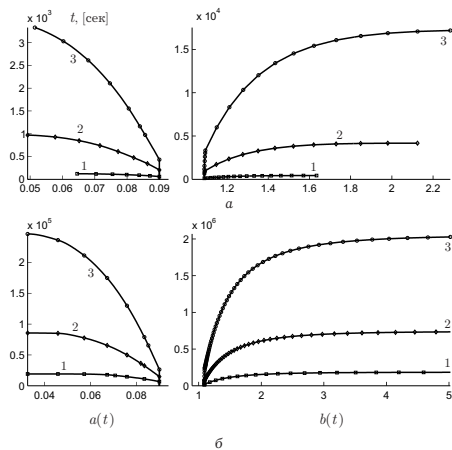


Рис. 4

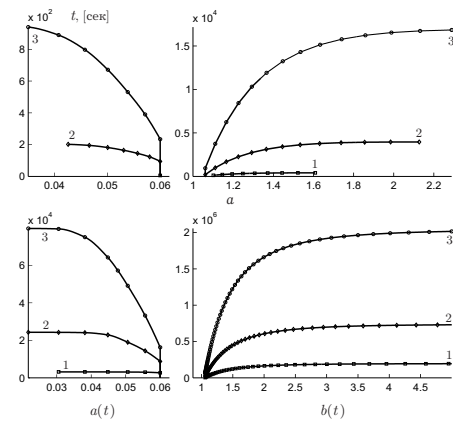


Рис. 5

длине каждой из трещин, время до слияния практически совпадает с общим временем докритического роста. Данные рис. 3 свидетельствуют о незначительном отличии скоростей перемещения концов трещины, практически сразу же после слияния начинается динамический этап распространения. При сближении начальных положений внутренних концов единичных трещин (рис. 4 и 5) наблюдается уменьшение отношения времени слияния к общему времени докритического роста коллинеарных трещин.

РЕЗЮМЕ. На основі лінійної теорії в'язкопружності та отриманого в рамках моделі Леонова-Панасюка-Дагдейла розкриття в зоні нелінійних деформацій побудовані рівняння докритичного зростання двох колінарних тріщин нормального відриву рівної довжини та наведено чисельний алгоритм їх розв'язання. Розв'язки рівнянь докритично-

го розвитку тріщин отримано для широкого діапазону параметрів моделі, зокрема геометричних параметрів задачі, інтенсивності зовнішнього навантаження та параметрів тріщиностійкості.

Ключові слова: колінеарні тріщини, поширення тріщин, лінійна в'язкопружність

SUMMARY. Equations of subcritical collinear crack growth are obtained for two equal mode I cracks with Leonov-Panasyuk-Dugdale-type process zones for linear viscoelastic body. To solve these equations the numerical algorithm is proposed. The problem is solved for the wide range of model parameters, i.e. parameters of geometry, parameters of loading intensity, and crack strength parameters.

Keywords: collinear cracks, crack growth, linear viscoelasticity

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Витвицкий П. М.* Полосы скольжения при растяжении тонких пластин с прямолинейными разрезами // Концентрация напряжений. – К.: Наук. думка, 1965. – С. 77–85.
2. *Гуцул В. И., Каминский А. А.* Кинетика разрушения вязкоупругой пластины с двумя трещинами // Прикладная механика. – 1989. – Т. 25, № 5. – С. 62–68.
3. *Каминский А. А.* Разрушение вязкоупругих тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1990. – 310 с.
4. *Каминский А. А., Гуцул В. И., Галатенко Г. В.* Взаимодействие двух коллинеарных макротрещин равной длины с учетом их подрастания // Прикладная механика – 1987. – Т. 23, № 7. – С. 61–67.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
6. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
7. *Chang Y. S., Huh N. S., Kim Y. J., Lee J. H., Choi Y. H.* Coalescence evaluation of collinear axial through-wall cracks in steam generator tubes // Nuclear Engineering and Design. – 2007. – Vol. 237, No. 12-13. – P. 1460–1467.
8. *Collins R. A., Cartwright D. J.* An analytical solution for two equal-length collinear strip yield cracks // Eng. Fract. Mech. – 2001. – Vol. 68, No. 7 – P. 915–924.
9. *Feng X. Q., Gross D.* On the coalescence of collinear cracks in quasi-brittle materials // Eng. Fract. Mech. – 2000. – Vol. 65, No. 5. – P. 511–524.
10. *Kachanov M.* On the problem of crack interaction and crack coalescence // Int. J. of Fract. – 2003. – Vol. 120. – P. 537–543.
11. *Krenk S.* The stress distribution in an infinite anisotropic plate with co-linear cracks // Int. J. of Solids and Structures. – 1975. – Vol. 11, No 4. – P. 449–460.
12. *Nishimura T.* Strip yield analysis of two collinear unequal cracks in an infinite sheet // Eng. Fract. Mech. – 2002. – Vol. 69, No. 11. – P. 1173–1191.
13. *Theocaris P. S.* Dugdale models for two collinear unequal cracks // Eng. Fract. Mech. – 1983. – Vol. 18, No 3. – P. 545–559.
14. *Viola E.* Non-singular stresses effects on two interacting equal collinear cracks // Eng. Fract. Mech. – 1983. – Vol. 18, No 4. – P. 801–814.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 15.05.2011

УДК 539.3

С. А. КАЛОЕРОВ д-р физ.-мат. наук, О. А. ПАРШИКОВА

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ
ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

Предложен метод решения задач термовязкоупругости для многосвязных анизотропных пластин. Методом малого параметра задача сведена к рекуррентной последовательности задач термоупругости, решаемых с использованием комплексных потенциалов. В качестве примера получено аналитическое решение задачи для пластинки с эллиптическим жестким или линейным включением. Приведены результаты численных исследований изменения термонапряженного состояния в зависимости от времени.

Ключевые слова: анизотропная пластинка, комплексные потенциалы, термовязкоупругости.

В связи с широким использованием полимерных и композиционных материалов в последние десятилетия большое внимание уделяется разработке методов определения напряженно-деформированного состояния (НДС) вязкоупругих пластинок, позволяющих находить их НДС в любой момент времени. Но к настоящему времени достаточно надежные методы решения задач такого направления предложены лишь для изотропных пластин, находящихся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния [8, 9, 17] или изгиба [6, 10]. Для анизотропных пластин аналогичные исследования выполнены только для случая действия механических сил, когда рассматриваются односвязные области [2, 11, 12] или многосвязные области [3, 7]. Методы же решения задач термовязкоупругости для анизотропных пластинок не разработаны. В данной статье предложена методика решения таких задач для любых многосвязных анизотропных пластин. В качестве примера приведено решение одной частной задачи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим отнесенную к прямоугольной декартовой системе координат Oxy конечную многосвязную анизотропную пластинку, занимающую область S , ограниченную внешним контуром L_0 и контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, L}$) (рис. 1). На контурах пластинки заданы значения температуры T_l или плотности потока тепла q_{nl} ; во внутренних точках $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$ ($r = \overline{1, R}$) действуют сосредоточенные источники тепла с мощностями q_r^0 . В частном случае, когда контур L_0 полностью уходит в бесконечность, будем рассматривать бесконечную многосвязную пластинку. В последнем случае будем предполагать, что на бесконечности задан

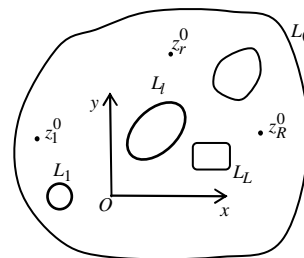


Рис. 1

однородный поток тепла интенсивности q под углом α к оси Ox или температура ограничена. Материал пластинки обладает свойствами, описываемыми линейной теорией вязкоупругости.

Определение термовязкоупругого состояния рассматриваемой пластинки сводится к решению основной системы уравнений термоупругости, состоящей из уравнения равновесия, закона Гука и соотношений Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0; \\ \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy} + \alpha_1\Delta T, \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy} + \alpha_2\Delta T, \\ \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy} + \alpha_6\Delta T; \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \end{aligned}$$

где a_{ij} – коэффициенты деформации материала; α_1, α_2 – коэффициенты линейного теплового расширения, α_6 – угловой коэффициент теплового расширения; $\Delta T = T - T_H$; T_H – начальная температура пластинки, при которой напряжения и деформации в ней отсутствуют, T – температура в данный момент времени. Основную систему уравнений необходимо интегрировать при соответствующих граничных условиях.

Рассматриваемую задачу термовязкоупругости будем решать, используя принцип Вольтера [18], в соответствии с которым нужно вначале решить задачу термоупругости, затем в полученном решении заменить упругие постоянные соответствующими временными операторами и определить воздействия получившихся операторных функций на функции координат. Но для решения несвязной задачи термоупругости сперва нужно решить задачу теплопроводности, а лишь затем термоупругости. Эти решения будем строить с использованием обобщенных комплексных потенциалов.

2. Комплексные потенциалы теплопроводности. Определение температурного поля в анизотропной пластинке при использовании комплексных потенциалов сводится к нахождению функции $F_3(z_3)$ из соответствующих граничных условий. Если она определена, то температура и поток тепла через площадку с нормалью \vec{n} вычисляются по формулам [13]

$$T(x, y) = T_H + T^* + 2 \operatorname{Re} F_3(z_3), \quad (2.1)$$

$$q_n = q_n^* - 2 \operatorname{Re} [i \varkappa \partial_{3s} F_3'(t_3)]. \quad (2.2)$$

Здесь T^* – температура в бесконечной сплошной пластинке, возникающая за счет действия однородного потока тепла и представимая в виде [5]

$$T^*(x, y) = q(r_x x + r_y y); \quad r_x = \frac{k_{22} \cos \alpha - k_{12} \sin \alpha}{\varkappa^2}, \quad r_y = \frac{k_{11} \sin \alpha - k_{12} \cos \alpha}{\varkappa^2};$$

$F_3(z_3)$ – произвольная функция, аналитическая в области изменения обобщенной комплексной переменной

$$z_3 = x + \mu_3 y; \quad (2.3)$$

$\mu_3 = (-k_{12} + i\alpha) / k_{22}$ – корень характеристического уравнения

$$k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} = 0; \quad (2.4)$$

$\alpha = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}$, $\partial_{3s} = \mp dz_3 / ds$; q_n^* – плотность потока тепла в сплошной пластинке, возникающего под действием однородного потока тепла; k_{ij} – коэффициенты теплопроводности; верхние знаки относятся к внешнему контуру, нижние – к контурам отверстий.

Граничные условия для определения функции $F_3(z_3)$ имеют вид [13]

$$2 \operatorname{Re} F_3(z_3) = T_l - T^* - T_H \quad (2.5)$$

в случае задания на контуре температуры T_l ,

$$2 \operatorname{Re} [i \alpha F_3(t_3)] = \pm \int_0^s [q_{nl} - q_n^*(t)] ds + c, \quad (2.6)$$

если на контуре области L_l задана плотность потока тепла $q_{nl}(t)$,

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} [F_3(z_3) - F_3^l(z_3^l)] &= -T^*(t), \\ 2 \operatorname{Re} \left[i \left(\alpha \partial_{3s} (F_3(t_3))' + \alpha^l \partial_{3s}^l (F_3^l(t_3^l))' \right) \right] &= q_n^*(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

в случае идеального теплового контакта пластинки и включения. Здесь и далее величины со значком l вверху относятся к включению с областью S^l , без такого знака – к пластинке.

Комплексный потенциал теплопроводности $F_3(z_3)$ определен в области S_3 , получаемой из заданной области S аффинными преобразованиями (2.3). Область S_3 ограничена контурами L_{3l} , соответствующими контурам L_l области S . При этом функция $F_3(z_3)$ имеет вид [13]

$$F_3(z_3) = c_0 + \sum_{l=1}^L D_{3l} \ln(z_3 - z_{3l}) + \sum_{r=1}^R \delta_{3r}^0 \ln(z_3 - z_{3r}^0) + F_{30}(z_3), \quad (2.8)$$

где $D_{3l} = -\frac{q_l}{4\pi\alpha}$, $\delta_{3r}^0 = -\frac{q_r^0}{4\pi\alpha}$; q_l и q_r^0 – соответственно суммарный поток тепла через контур L_l в область S и мощность сосредоточенного источника тепла в точке z_r^0 ; c_0 – вещественная константа, равная нулю для конечной области и определяемая из граничных условий в случае беско-

нечной области; z_{3l} – точки, соответствующие при аффинном преобразовании $z_3 = x + \mu_3 y$ произвольным точкам z_l внутри контуров L_l области S ; $z_{3r}^0 = x_r^0 + \mu_3 y_r^0$; $F_{30}(z_3)$ – функция, голоморфная в многосвязной области S_3 . При этом, если область S бесконечна, то из условий ограниченности температуры на бесконечности следует, что $\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{3l} + \sum_{r=1}^R \delta_{3r}^0 = 0$.

3. Комплексные потенциалы термоупругости. При решении задачи термоупругости с использованием комплексных потенциалов определение термонапряженного состояния пластинки сводится к нахождению потенциалов $\Phi_k(z_k)$ ($k=1, 2$) из соответствующих граничных условий [4]. После нахождения этих потенциалов, напряжения и перемещения вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k), \\ (u, v) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_k, q_k) \Phi_k(z_k) + (u^* - \omega_3 y + u_0, v^* + \omega_3 x + v_0), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где μ_k – корни характеристического уравнения термоупругости [13]

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0; \quad (3.2)$$

$$p_k = a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k + \delta_{k3}\alpha_1 / r_3, \quad q_k = a_{12}\mu_k + \frac{a_{22}}{\mu_k} - a_{26} + \frac{\delta_{k3}\alpha_2}{r_3\mu_k}; \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{q}{8} (\alpha_1 r_x a^2 + (\alpha_2 r_x - \alpha_6 r_y) b^2 + 2\alpha_1 r_y a b i), \\ v^* &= -\frac{q}{8} ((\alpha_1 r_y - \alpha_6 r_x) a^2 + \alpha_2 r_y b^2 - 2\alpha_2 r_x a b i); \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\Phi_k(z_k) = F'_k(z_k) \quad (k=1, 2), \quad \Phi_3(z_3) = r_3 \int F_3(z_3) dz_3; \quad (3.5)$$

$$r_3 = -\frac{\alpha_1 \mu_3^2 - \alpha_6 \mu_3 + \alpha_2}{a_{11} \mu_3^4 - 2a_{16} \mu_3^3 + (2a_{12} + a_{66}) \mu_3^2 - 2a_{26} \mu_3 + a_{22}}; \quad (3.6)$$

$-\omega_3 y + u_0$, $\omega_3 x + v_0$ – жесткие перемещения пластинки как целого; ω_3 – угол поворота плоскости Oxy против часовой стрелки как целого, причем $\omega_3 = (\partial v^\infty / \partial x - \partial u^\infty / \partial y) / 2$.

Функции $\Phi_k(z_k)$ должны удовлетворять граничным условиям [13]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}) \Phi_k(z_k) = (c_{1l}, c_{2l}), \quad (3.7)$$

в случае неподкрепленного контура,

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_k, q_k) \Phi_k(t_k) = (u_* - u^* + \omega_3 y - u_0, v_* - v^* - \omega_3 x - v_0), \quad (3.8)$$

если на контуре заданы перемещения u_* , v_* , или

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 [(\lambda_{6k}, \lambda_{2k}) \Phi_k(z_k) - (\lambda_{6k}^l, \lambda_{2k}^l) \Phi_k^l(z_k^l)] &= (c_{1l}, c_{2l}), \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 [(p_k, q_k) \Phi_k(z_k) - (p_k^l, q_k^l) \Phi_k^l(z_k^l)] &= \\ &= (-u^* + \omega_3 y - \omega_3^l y + u_0^l - u_0, -v^* - \omega_3 x + \omega_3^l x + v_0^l - v_0), \end{aligned} \quad (3.9)$$

в случае идеального контакта пластинки с упругим включением S^l . Здесь $\lambda_{1k} = \mu_k^2$, $\lambda_{2k} = 1$, $\lambda_{6k} = -\mu_k$; c_{1l} , c_{2l} – произвольные постоянные.

Функции $\Phi_k(z_k)$ ($k = 1, 2$) определены в областях S_k , получаемых из S аффинными преобразованиями, и в случае многосвязной пластинки представляются в виде [13]

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_k) &= \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \\ &+ \sum_{r=1}^R A_{kr}^0 (z_k - z_{kr}^0) \ln(z_k - z_{kr}^0) + \Phi_k^0(z_k), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где Γ_k , A_{kl} , B_{kl} , A_{kr}^0 – постоянные, которые в общем случае действия силовых и температурных полей определяются из систем уравнений [13], которые можно записать в виде

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{a_{22} - a_{11} \mu_k^4}{\mu_k} \right) \Gamma_k &= (\sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, \\ &2\omega_3^\infty - a_{16} \sigma_x^\infty + a_{26} \sigma_y^\infty + 2 \operatorname{Re} \frac{\alpha_1 \mu_3^2 - \alpha_2}{r_3 \mu_3} \Gamma_3), \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kl} &= \left(\frac{Y_l}{2\pi}, -\frac{X_l}{2\pi}, -\frac{a_{16}}{a_{11}} \frac{X_l}{2\pi} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{Y_l}{2\pi} - 2 \operatorname{Re} i \frac{\alpha_1 A_{3l}}{a_{11} r_3}, \right. \\ &\left. \frac{a_{12}}{a_{22}} \frac{X_l}{2\pi} + \frac{a_{26}}{a_{22}} \frac{Y_l}{2\pi} - 2 \operatorname{Re} i \frac{\alpha_2 A_{3l}}{a_{22} r_3 \mu_3} \right), \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kr}^0 &= \left(\frac{Y_r^0}{2\pi}, -\frac{X_r^0}{2\pi}, -\frac{a_{16}}{a_{11}} \frac{X_r^0}{2\pi} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{Y_r^0}{2\pi} - 2 \operatorname{Re} i \frac{\alpha_1 \alpha_{3r}^0}{a_{11} r_3}, \right. \\ &\left. \frac{a_{12}}{a_{22}} \frac{X_r^0}{2\pi} + \frac{a_{26}}{a_{22}} \frac{Y_r^0}{2\pi} - 2 \operatorname{Re} i \frac{\alpha_2 \alpha_{3r}^0}{a_{22} r_3 \mu_3} \right), \end{aligned}$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i B_{kl} = \left(\frac{Y_l}{2\pi}, -\frac{X_l}{2\pi}, -\frac{a_{16}}{a_{11}} \frac{X_l}{2\pi} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{Y_l}{2\pi} - 2 \operatorname{Re} i \frac{\alpha_1 B_{3l}}{a_{11} r_3}, \right. \\ \left. \frac{a_{12}}{a_{22}} \frac{X_l}{2\pi} + \frac{a_{26}}{a_{22}} \frac{Y_l}{2\pi} - 2 \operatorname{Re} i \frac{\alpha_2 B_{3l}}{a_{22} r_3 \mu_3} \right), \quad (3.11)$$

где

$$\Gamma_3 = r_3 c_{30}, \quad A_{3l} = r_3 D_{3l}, \quad B_{3l} = r_3 (b_{3l} - z_{3l} D_{3l}), \quad A_{3r}^0 = r_3 \delta_{3r}^0; \quad (3.12)$$

z_{kl} – точки, соответствующие при аффинных преобразованиях $z_k = x + \mu_k y$ произвольным точкам внутри L_l ; $z_{kr}^0 = x_r^0 + \mu_k y_r^0$; $\Phi_k^0(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k ; b_{3l} – коэффициент при $(z_3 - z_{3l})^{-1}$ в разложении $F_{30}(z_3)$ в ряд Лорана в окрестности z_{3l} .

Учитывая, что для термоупругости $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = \omega_3^\infty = X_l = Y_l = 0$, а также выражения (3.3) и первые три уравнения систем, из систем (3.11) получаем

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{a_{22} - a_{11} \mu_k^4}{\mu_k} \right) \Gamma_k = \left(0, 0, 0, 2 \operatorname{Re} \frac{\alpha_1 \mu_3^2 - \alpha_2}{r_3 \mu_3} \Gamma_3 \right); \quad (3.13)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kl} = \left(0, 0, -2 \operatorname{Re} i \frac{\alpha_1 A_{3l}}{a_{11} r_3}, -2 \operatorname{Re} i \frac{\alpha_2 A_{3l}}{a_{22} r_3 \mu_3} \right); \quad (3.14)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i B_{kl} = \left(0, 0, -2 \operatorname{Re} i \frac{\alpha_1 B_{3l}}{a_{11} r_3}, -2 \operatorname{Re} i \frac{\alpha_2 B_{3l}}{a_{22} r_3 \mu_3} \right); \quad (3.15)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kr}^0 = \left(0, 0, -2 \operatorname{Re} i \frac{\alpha_1 A_{3r}^0}{a_{11} r_3}, -2 \operatorname{Re} i \frac{\alpha_2 A_{3r}^0}{a_{22} r_3 \mu_3} \right). \quad (3.16)$$

4. Решение задачи термовязкоупругости. Как уже указывалось, принцип Вольтерра применяется при решении простейших задач, когда в полученные выражения напряжений упругие постоянные входят явным образом. Для многосвязных областей такие решения получать невозможно. Поэтому непосредственное применение принципа Вольтерра к анализу НДС многосвязных тел невозможно. В связи с этим возникает необходимость и в этом случае получить такие решения, которые явным образом содержали бы упругие постоянные. Это можно сделать, выделив из постоянных упругости величину, меньшую единицы, и разложив все решение задачи в ряд по ней, как по малому параметру.

Из уравнения закона Гука для отротропного тела имеем

$$\varepsilon_x = a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{13} \sigma_z + \alpha_1 \Delta T, \quad \varepsilon_y = a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y + a_{23} \sigma_z + \alpha_2 \Delta T, \\ \varepsilon_z = a_{13} \sigma_x + a_{23} \sigma_y + a_{33} \sigma_z + \alpha_3 \Delta T, \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{1}{E_1}, & a_{22} &= \frac{1}{E_2}, & a_{33} &= \frac{1}{E_3}, & a_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \\
a_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}, & a_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{\nu_{32}}{E_3};
\end{aligned} \tag{4.2}$$

E_i , ν_{ij} – модули Юнга и коэффициенты Пуассона для соответствующих направлений. Из этих постоянных меньшими единицы являются только коэффициенты Пуассона ν_{ij} . Поэтому в качестве малого параметра, по которому можно разлагать решение задачи, можно взять любой из коэффициентов, например, ν_{12} . Но сходимость получаемых решений ускорится, если в качестве малого параметра брать не коэффициент Пуассона ν_{12} , а его изменение λ с течением времени, т. е. представить ν_{12} в виде

$$\nu_{12} = \nu_{12}^0 + \lambda. \tag{4.3}$$

Здесь ν_{12}^0 – мгновенно-упругое значение коэффициента Пуассона ν_{12} .

Учитывая равенства (4.3), из выражения (4.2), а затем (3.3) находим

$$a_{12} = a_{12}^0 - \lambda a_{11}, \quad p_k = p_{k0} + \lambda p_{k1}, \quad q_k = q_{k0} + \lambda q_{k1}, \tag{4.4}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{12}^0 &= -\nu_{12}^0 a_{11}, & p_{k1} &= -a_{11} - \frac{\delta_{k3} \alpha_1 d}{r_3^0}, & q_{k1} &= -a_{11} \mu_k - \frac{\delta_{k3} \alpha_2 d}{\mu_k r_3^0}, \\
p_{k0} &= (\mu_k^2 - \nu_{12}^0) a_{11} - a_{16} \mu_k + \frac{\delta_{k3} \alpha_1}{r_3^0}, & q_{k0} &= -\mu_k \nu_{12}^0 a_{11} + \frac{a_{22}}{\mu_k} - a_{26} + \frac{\delta_{k3} \alpha_2}{r_3^0 \mu_k}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

При выводе (4.4) учтено разложение $\frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_3^0} (1 - d\lambda)$, где

$$\begin{aligned}
r_3^0 &= -\frac{\alpha_1 \mu_3^2 - \alpha_6 \mu_3 + \alpha_2}{a_{11} \mu_3^4 - 2a_{16} \mu_3^3 + (2a_{12}^0 + a_{66}) \mu_3^2 - 2a_{26} \mu_3 + a_{22}}, \\
d &= \frac{2a_{11} \mu_3^2}{a_{11} \mu_3^4 - 2a_{16} \mu_3^3 + (2a_{12}^0 + a_{66}) \mu_3^2 - 2a_{26} \mu_3 + a_{22}}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Разложим постоянные Γ_k , A_{kl} , B_{kl} , A_{kr}^0 , функции $\Phi_k(z_k)$ и углы поворотов ω_3 в ряды по степеням малого параметра λ

$$\Gamma_k = \sum_{j=0} \lambda^j \Gamma_{jk}, \quad A_{kl} = \sum_{j=0} \lambda^j A_{jkl}, \quad B_{kl} = \sum_{j=0} \lambda^j B_{jkl}, \quad A_{kr}^0 = \sum_{j=0} \lambda^j \alpha_{jkr}^0. \tag{4.7}$$

$$(\Phi_k^0(z_k), \omega_3) = \sum_{j=0} \lambda^j (\Phi_{jk}(z_k), \omega_{j3}). \tag{4.8}$$

При этом постоянные $\Phi_{j3}(z_3)$, Γ_{j3} , A_{j3l} , B_{j3l} , A_{j3r}^0 являются из-

вестными и находятся из представления (3.5) для функции $\Phi_3(z_3)$. Действительно, разложив r_3 в ряд по степеням λ :

$$r_3 = r_3^0 \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j d^j, \quad (4.9)$$

подставив разложение r_3 (4.9) в (3.12) и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях λ в рядах (4.7), (4.8), будем иметь

$$\begin{aligned} \Gamma_{j3} &= r_3^0 c_{30} d^j, & A_{j3l} &= r_3^0 D_{3l} d^j, \\ B_{j3l} &= r_3^0 (b_{3l} - z_{3l} D_{3l}) d^j, & \alpha_{j3r}^0 &= r_3^0 A_{3r}^0 d^j, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\Phi_{j3}(z_3) = d^j r_3^0 \int F_3(z_3) dz_3. \quad (4.11)$$

Подставив разложения (4.7) и выражения (4.4) в системы (3.13) – (3.16), сравнивая в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях λ , для определения постоянных j приближения Γ_{jk} , A_{jkl} , B_{jkl} , A_{jkr}^0 найдем последовательность систем типа (3.13) – (3.16). Системы для определения Γ_{0k} , A_{0kl} , B_{0kl} , A_{0kr}^0 следуют из (3.13) – (3.16), если в последних заменить Γ_k , A_{kl} , B_{kl} , A_{kr}^0 , r_3 на Γ_{0k} , A_{0kl} , B_{0kl} , A_{kr}^0 , r_3^0 . Для Γ_{1k} , A_{1kl} , B_{1kl} , A_{1kr}^0 имеем

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{a_{22} - a_{11} \mu_k^4}{\mu_k} \right) \Gamma_{1k} &= \\ = \left(0, 0, 0, -2 \operatorname{Re} \frac{\delta_{k3} (\alpha_1 \mu_k^2 - \alpha_2) d}{\mu_k r_3^0} \Gamma_{13} \right); \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(\mu_k, 1, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{1kl} &= \\ = \left(0, 0, 2 \operatorname{Re} i \frac{\delta_{k3} \alpha_1 d A_{13l}}{a_{11} r_3^0}, 2 \operatorname{Re} i \frac{\delta_{k3} \alpha_2 d A_{13l}}{a_{22} \mu_3 r_3^0} \right); \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(\mu_k, 1, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i B_{1kl} &= \\ = \left(0, 0, 2 \operatorname{Re} i \frac{\delta_{k3} \alpha_1 d B_{13l}}{a_{11} r_3^0}, 2 \operatorname{Re} i \frac{\delta_{k3} \alpha_2 d B_{13l}}{a_{22} \mu_3 r_3^0} \right); \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(\mu_k, 1, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{1kr}^0 =$$

$$= \left(0, 0, 2 \operatorname{Re} i \frac{\delta_{k3} \alpha_1 d A_{13r}^0}{a_{11} r_3^0}, 2 \operatorname{Re} i \frac{\delta_{k3} \alpha_2 d A_{13r}^0}{a_{22} \mu_3 r_3^0} \right). \quad (4.15)$$

Системы для определения Γ_{jk} , A_{jkl} , B_{jkl} , A_{jkr}^0 ($j > 1$) такие же, как (4.12) – (4.15), с той лишь разницей, что правые их части равны нулю.

Учитывая приведенные разложения, комплексные потенциалы (3.10) представим в виде

$$\Phi_k(z_k) = \sum_{j=0} \lambda^j \Psi_{jk}(z_k), \quad (4.16)$$

где

$$\Psi_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + N_{jk}(z_k) + \Phi_{jk}(z_k); \quad (4.17)$$

$$N_{jk}(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{jkl} z_k + B_{jkl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{r=1}^R A_{jkr}^0 (z_k - z_{kr}^0) \ln(z_k - z_{kr}^0). \quad (4.18)$$

$\Phi_{jk}(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k , ограниченных контурами L_{kl} .

Подставив (4.16) в граничные условия и приравняв в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра λ , получим следующую рекуррентную последовательность граничных условий для определения комплексных потенциалов приближений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}) \Psi_{jk}(t_k) = \delta_{j0} (c_{1l}, c_{2l}) \quad (4.19)$$

для неподкрепленного контура;

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_{k0}, q_{k0}) \Psi_{jk}(t_k) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{j0}) (p_{k1}, q_{k1}) \Psi_{j-1,k}(t_k) + \delta_{j0} (u_* - u^* - u_0, v_* - v^* - v_0) + (\omega_{j3} y, -\omega_{j3} x), \quad (4.20)$$

если на контуре заданы перемещения или

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 [(\lambda_{6k}, \lambda_{2k}) \Psi_{jk}(t_k) - (\lambda_{6k}^l, \lambda_{2k}^l) \Psi_{jk}^l(t_k^l)] &= \delta_{j0} (c_{1l}, c_{2l}), \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 [(p_{k0}, q_{k0}) \Psi_{jk}(t_k) - (p_{k0}^l, q_{k0}^l) \Psi_{jk}^l(t_k^l)] &= \\ = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{j0}) [(p_{k1}, q_{k1}) \Psi_{j-1,k}(t_k) - (p_{k1}^l, q_{k1}^l) \Psi_{j-1,k}^l(t_k^l)] &+ \\ + \delta_{j0} (-u^* + u_0^l - u_0, -v^* + v_0^l - v_0) + ((\omega_{j3} - \omega_{j3}^l) y, -(\omega_{j3} - \omega_{j3}^l) x) & \quad (4.21) \end{aligned}$$

в случае идеального контакта вязкоупругой пластинки S с упругим включением S^l .

После определения из граничных условий функций приближений

$\Psi_{jk}(z_k)$, заменив степени малого параметра λ^j временными операторами, можно найти значения комплексных потенциалов (4.16) и их производных в любой момент времени, а по ним и напряжения (3.1). При таком подходе для нахождения λ^j операторный коэффициент Пуассона v_{12}^* представится в виде [15, 17]

$$v_{12}^* = v_{12}^0 \left(1 + \delta_* \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_*) \right), \quad (4.22)$$

где $\mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_*)$ – оператор Работнова, воздействие которого на 1 имеет вид

$$\mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_*) \cdot 1 = \frac{1}{\beta_*} \left[1 - e^{-\beta_* [(1-\alpha_*)t]^{1-\alpha_*}} \right]; \quad (4.23)$$

α_* , β_* , δ_* – реологические постоянные материала, связанные с изменением v_{12} во времени. Исходя из формул (4.3), (4.22) и из свойств возведения оператора (4.23) в степень, находим

$$\lambda^j = (v_{12}^* - v_{12}^0)^j = \left(\frac{v_{12}^0 \delta_*}{\beta_*} \right)^j \frac{1}{(j-1)!} \frac{\partial \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_*)}{\partial (-\beta_*)^{j-1}}. \quad (4.24)$$

Вычислив по этой формуле λ^j и подставив его, как указано выше, в соответствующие формулы, найдем значения напряжений в любой момент времени. Но описанным подходом можно воспользоваться, если известны реологические постоянные материала, связанные с изменением коэффициента Пуассона v_{12} . Однако для анизотропных материалов в большинстве случаев известны только реологические постоянные, связанные с модулями Юнга E_i для главных направлений. Поэтому, чтобы воспользоваться полученным выше решением, выразим λ^j через E_i , используя условия постоянства во времени модулей объемной деформации и объемного теплового расширения.

Из уравнений закона Гука (4.1) для ортотропного материала имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = & (a_{11} + a_{12} + a_{13})\sigma_x + (a_{12} + a_{22} + a_{23})\sigma_y + \\ & + (a_{13} + a_{23} + a_{33})\sigma_z + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\Delta T \end{aligned} \quad (4.25)$$

или

$$\vartheta = \frac{1}{K_1} \sigma_x + \frac{1}{K_2} \sigma_y + \frac{1}{K_3} \sigma_z + \frac{1}{k_T} \Delta T, \quad (4.26)$$

где ϑ – первый инвариант тензора деформаций, K_1 , K_2 , K_3 – модули деформаций для растяжения-сжатия вдоль главных направлений; k_T – модуль теплового объемного расширения, причем

$$\vartheta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \quad (4.27)$$

$$\frac{1}{K_1} = a_{11} + a_{12} + a_{13}, \quad \frac{1}{K_2} = a_{12} + a_{22} + a_{23}, \quad \frac{1}{K_3} = a_{13} + a_{23} + a_{33},$$

$$\frac{1}{k_T} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3. \quad (4.28)$$

При действии на тело гидростатического давления (всестороннего растяжения-сжатия), когда $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$, учитывая свойства первого инварианта тензора напряжений $\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, формулу (4.26) запишем в виде

$$\vartheta = \frac{1}{K} \theta + \frac{1}{k_T} \Delta T, \quad (4.29)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} &= a_{11} + a_{22} + a_{33} + 2a_{12} + 2a_{13} + 2a_{23} = \\ &= \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{2\nu_{23}}{E_2} - \frac{2\nu_{13}}{E_1}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

K – модуль объемной деформации гидростатического давления.

В связи с тем, что в литературе отсутствуют значения модуля Юнга E_3 , коэффициентов Пуассона ν_{13} , ν_{23} и их реологических постоянных, примем, что $a_{33} = (a_{11} + a_{22})/2$, $a_{13} = a_{23} = a_{12}$, т.е

$$\frac{1}{E_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right), \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}. \quad (4.31)$$

Тогда из (4.30) получим

$$\frac{1}{K} = \frac{3}{2E_1} + \frac{3}{2E_2} - \frac{6\nu_{12}}{E_1}, \quad (4.32)$$

откуда следует, что $\nu_{12} = \frac{1}{6} \left(\frac{3}{2} + \frac{3E_1}{2E_2} - \frac{E_1}{K} \right)$, а на основе (4.3)

$$\lambda = \nu_{12} - \nu_{12}^0 = \frac{1}{6} \left(\frac{3E_1}{2E_2} - \frac{E_1}{K} - \frac{3E_1^0}{2E_2^0} + \frac{E_1^0}{K^0} \right), \quad (4.33)$$

где E_1^0 , E_2^0 – мгновенные значения этих величин.

Учитывая, что по принятому предположению со временем модуль объемной деформации K не изменяется, и заменяя E_1 и $1/E_2$ операторными выражениями

$$E_1^* = E_1^0 \left[1 - \delta_1 \partial_\alpha^* (-\beta_1 - \delta_1) \right], \quad \frac{1}{E_2^*} = \frac{1}{E_2^0} \left[1 + \delta_2 \partial_\alpha^* (-\beta_2) \right]; \quad (4.34)$$

в которых α , δ_1 , β_1 , δ_2 , β_2 - реологические постоянные, найдем

$$\lambda = v_{12}^* - v_{12}^0 = D_1 \cdot \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_1 - \delta_1) + D_2 \cdot \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_2), \quad (4.35)$$

$$D_1 = \frac{\delta_1}{4} \left[\frac{E_1^0}{E_2^0} \frac{\delta_2}{\beta_1 - \beta_2 + \delta_1} + 1 - 4v_{12}^0 \right], \quad D_2 = \frac{\delta_2}{4} \frac{E_1^0}{E_2^0} \left(1 - \frac{\delta_1}{\beta_1 - \beta_2 + \delta_1} \right). \quad (4.36)$$

При выводе (4.35) учтено, что на основе (4.33)

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K^0} = \frac{3}{2E_1^0} + \frac{3}{2E_2^0} - \frac{6v_{12}^0}{E_1^0}.$$

Возведя λ по формуле (4.35) в степень, найдем

$$\begin{aligned} \lambda^j &= \sum_{k=0}^j C_j^k D_1^{j-k} D_2^k \mathcal{E}_\alpha^{*j-k}(-\beta_1 - \delta_1) \cdot \mathcal{E}_\alpha^{*k}(-\beta_2) = \\ &= \sum_{k=0}^j C_j^k D_1^{j-k} D_2^k \frac{\mathcal{E}_\alpha^{*k}(-\beta_2) - \mathcal{E}_\alpha^{*j-k}(-\beta_1 - \delta_1)}{-\beta_2 + \beta_1 + \delta_1}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Вычислив λ^j по формуле (4.37) и подставив его, как и ранее, в выражение (4.17), найдем функции $\Phi_k(z_k)$ и их производные, следовательно, и напряжения в любой момент времени.

Был рассмотрен и случай, когда неизменным во времени считался так называемый модуль обобщенного плоского напряженного состояния $K_{n.l}$. Учитывая, что для обобщенного плоского напряженного состояния $\sigma_z = 0$, а следовательно $\sigma_3 = 0$, по аналогии с приведенным выше находим

$$\vartheta = \frac{1}{K_{n.l}} \theta + \frac{1}{k_T} \Delta T, \quad (4.38)$$

где $\vartheta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $\theta = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2$, $K_{n.l}$ - модуль обобщенного плоского напряженного состояния. По аналогии с объемным всесторонним растяжением-сжатием в случае двухстороннего растяжения-сжатия пластинки, когда $\sigma_1 = \sigma_2 = p$ из (4.30) получаем

$$\frac{1}{K_{n.l}} = a_{11} + a_{22} + 2a_{12} + a_{13} + a_{23} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{4v_{12}}{E_1}, \quad (4.39)$$

откуда следует, что

$$v_{12} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{E_1}{E_2} - \frac{E_1}{K_{n.l}} \right). \quad (4.40)$$

Для вычисления λ и λ^j получим опять формулы (4.35) и (4.37), где D_1 , D_2 - постоянные, вычисляемые по формулам (4.36). Следовательно, использование условия постоянства модуля обобщенного плоского напря-

женного состояния приводит к тем же результатам, которые получаются с учетом постоянства модуля объемной деформации.

Для изотропного материала в приведенных выше формулах нужно положить $E_1 = E_2 = E$, $\nu_{12} = \nu$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. Однако удобнее изотропную пластинку рассматривать как анизотропную с постоянными E_1 , E_2 , незначительно отличными друг от друга. В качестве примеров приложения изложенного дадим решения частных задач для пластинки с эллиптическим отверстием, свободным или жестко подкрепленным контуром.

5. Решение задачи для пластинки с эллиптическим отверстием.

Пусть пластинка с эллиптическим отверстием (рис. 2) находится под действием потока тепла плотности q , направленного под углом α к оси Ox . Обозначим контур отверстия и его полуоси через L_1 , a_1 , b_1 . Рассмотрим вначале случай, когда в эллиптическое отверстие вставлено абсолютно жесткое теплопроводящее ядро.

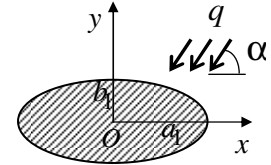


Рис. 2

Определение температурного поля в пластинке и ядре сводится к нахождению комплексных потенциалов $F_3(z_3)$ для пластинки и $F_3^1(z_3^1)$ для ядра, представимых на основании (2.8) в виде

$$F_3(z_3) = c_{30} + F_{30}(z_3), \quad F_3^1(z_3^1) = F_{30}^1(z_3^1), \quad (5.1)$$

где c_{30} – вещественная постоянная, определяемая из граничных условий; $F_{30}(z_3)$ – функция, голоморфная вне эллипса L_{31} , получаемого из L_1 аффинным преобразованием (2.3) и исчезающая на бесконечности; $F_{30}^1(z_3^1)$ – функция, голоморфная в эллипсе L_{31}^1 , получаемом из L_1^1 аффинным преобразованием (2.3), где μ_3 нужно заменить на μ_3^1 – корень характеристического уравнения (2.4), в котором k_{ij} заменяются на коэффициенты теплопроводности k_{ij}^1 для материала ядра.

Отобразим внешность единичного круга на внешности L_{31} , L_{31}^1 :

$$z_3 = R_3 (\zeta_3 + m_3/\zeta_3), \quad z_3^1 = R_3^1 (\zeta_3^1 + m_3^1/\zeta_3^1), \quad (5.2)$$

где

$$R_3 = \frac{a_1 - i\mu_3 b_1}{2}, \quad m_3 = \frac{a_1 + i\mu_3 b_1}{2R_3}, \quad R_3^1 = \frac{a_1 - i\mu_3^1 b_1}{2}, \quad m_3^1 = \frac{a_1 + i\mu_3^1 b_1}{2R_3^1}.$$

В конформно отображенной области функция $F_{30}(z(\zeta_3))$ голоморфна вне круга $|\zeta_3| \geq 1$ и ее можно разложить в ряд Лорана по отрицательным степеням ζ_3 , а функция $F_{30}^1(z(\zeta_3^1))$ голоморфна в эллипсе L_{31}^1 и может быть представлена рядом по полиномам Фабера [13]. Окончательно имеем

$$F_3(z_3) = c_{30} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{3n}}{\zeta_3^n}, \quad F_3^1(z_3) = c_{30}^1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{3n}^1 \left(\left(\zeta_3^1 \right)^n + \frac{\left(m_3^1 \right)^n}{\left(\zeta_3^1 \right)^n} \right). \quad (5.3)$$

Подставляя функции (5.3) в граничные условия (2.7) на контуре включения, где $\zeta_3 = \zeta_3^1 = \sigma = e^{i\vartheta}$, и применяя метод рядов, найдем

$$c_{31} = \frac{q}{2} \left[\frac{(\varkappa + \varkappa^1)(m_3^1 \bar{\varepsilon} + \varepsilon) - \bar{m}_3^1 (\varkappa - \varkappa^1)(m_3^1 \varepsilon + \bar{\varepsilon})}{(\varkappa + \varkappa^1)^2 - |m_3^1|^2 (\varkappa - \varkappa^1)^2} - (r_x a_1 + i r_y b_1) \right],$$

$$c_{31}^1 = \frac{q}{2} \frac{(\varkappa + \varkappa^1) \bar{\varepsilon} - \bar{m}_3^1 (\varkappa - \varkappa^1) \varepsilon}{(\varkappa + \varkappa^1)^2 - |m_3^1|^2 (\varkappa - \varkappa^1)^2}, \quad c_{30} = c_{30}^1 = c_{3n} = c_{3n}^1 = 0 \quad (n \geq 2), \quad (5.4)$$

причем $\varepsilon = \varkappa r_x a_1 + b_1 \cos \alpha + i (\varkappa r_y b_1 + a_1 \sin \alpha)$. Окончательно имеем

$$F_3(z_3) = c_{31} / \zeta_3, \quad F_3^1(z_3^1) = c_{31}^1 z_3^1 / R_3^1. \quad (5.5)$$

Интегрируя (5.5), найдем

$$\Phi_3(z_3) = r_3 \int F_3(z_3) dz_3 = B_{31} \ln \zeta_3 + \frac{a_{32}}{\zeta_3^2}, \quad (5.6)$$

$$\Phi_3^1(z_3^1) = r_3^1 \int F_3^1(z_3^1) dz_3^1 = a_{32}^1 \left(\left(\zeta_3^1 \right)^2 + \frac{\left(m_3^1 \right)^2}{\left(\zeta_3^1 \right)^2} \right). \quad (5.7)$$

Здесь $B_{31} = r_3 R_3 c_{31}$; $a_{32} = r_3 c_{31} R_3 m_3 / 2$.

Из представления функций (5.5) видно, что в данном случае $c_{30} = 0$, $\Gamma_3 = 0$, $A_{31} = 0$, $A_{3r}^0 = 0$. Тогда $\Gamma_k = 0$, $A_{k1} = 0$, $A_{kr}^0 = 0$ ($k = 1, 2$). Следовательно, $\Gamma_{jk} = 0$, $A_{jk1} = 0$, $A_{jkr}^0 = 0$ и для функций (4.18) получим

$$N_{jk}(z_k) = B_{jk1} \ln(z_k - z_{k1}), \quad (5.8)$$

где B_{jk1} — величины, вычисляемые из системы (4.14), в которой

$B_{031} = B_{31} = r_3 R_3 c_{31}$ и $B_{j31} = r_3^0 R_3 c_{31} d^j$. Для функции (4.11) получаем

$$\Phi_{j3}(z_3) = r_3^0 c_{31} / \zeta_3 d^j. \quad (5.9)$$

Отобразим внешность единичного круга на внешности контуров L_{k1} :

$$z_k = R_k (\zeta_k + m_k / \zeta_k). \quad (5.10)$$

Здесь $R_k = (a_1 - i\mu_k b_1) / 2$, $m_k = (a_1 + i\mu_k b_1) / (2R_k)$. Тогда функции $\Phi_{jk}(z_k)$, голоморфные вне отверстий L_{k1} , можно представить в виде рядов Лорана

$$\Phi_{jk}(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{jkn} / \zeta_k^n. \quad (5.11)$$

Подставляя функции (5.11) в (4.20) и применяя метод рядов, находим $a_{jk0} = a_{jk1} = a_{jkn} = 0$ ($n \geq 2$), а для определения a_{jk2} получаем систему

$$\sum_{k=1}^3 (p_{k0}, q_{k0}) a_{jk2} = \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{j0}) (p_{k1}, q_{k1}) a_{j-1,k2} - \delta_{j0} [(p_{k0}, q_{k0}) a_{32} + (u^*, v^*)], \quad (5.12)$$

решением которой будет

$$a_{jk2} = \frac{q_{k+1,0} C_{jp} - p_{k+1,0} C_{jq}}{p_{k0} q_{k+1,0} - p_{k+1,0} q_{k,0}}, \quad (5.13)$$

где $(C_{jp}, C_{jq}) = \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{j0}) (p_{k1}, q_{k1}) a_{j-1,k2} - \delta_{j0} [(p_{k0}, q_{k0}) a_{32} + (u^*, v^*)]$.

Окончательно для функций $\Phi_k(z_k)$ и их производных имеем

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_k) &= \sum_{j=0} \lambda^j \left[B_{jk1} \ln \zeta_k + \frac{a_{jk2}}{\zeta_k^2} \right], \\ \Phi'_k(z_k) &= \sum_{j=0} \lambda^j \left[B_{jk1} - \frac{2a_{jk2}}{\zeta_k^2} \right] \frac{\zeta_k}{R_k (\zeta_k^2 - m_k)}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Заменяя λ^j по формуле (4.37), найдем значения функций $\Phi_k(z_k)$ и их производных, а по ним значения напряжений в любой момент времени.

Были проведены численные исследования распределения напряжений и их изменения в зависимости от геометрических параметров включения и времени приложения нагрузки. Пластика считалась изготовленной из изотропного алюминия (материал М1) [17], из композитного материала на основе полиэтиленового (М2) и эпоксидного (М3) связующих [12]. Упругие и реологические постоянные этих материалов приведены в табл. 1. Для отсутствующих в литературе постоянных материалов М2, М3 принималось,

Таблица 1

Материал	$10^{-4} E_1$, $M\dot{\bar{t}} \dot{\bar{a}}$	$10^{-4} E_2$, $M\dot{\bar{t}} \dot{\bar{a}}$	ν_2	α	$\beta_1, c^{\alpha-1}$	$\delta_1, c^{\alpha-1}$	$\beta_2, c^{\alpha-1}$	$\delta_2, c^{\alpha-1}$
М1	7,10	7,15	0,25	0,500	0,00665	0,00615	0,00664	0,00614
М2	1,97	1,17	0,14	0,717	0,09280	0,0180	0,12830	0,06080
М3	2,30	1,60	0,11	0,846	0,15700	0,0323	0,27450	0,12950

что $k_{22}/k_{11}=2$, $\alpha_1=4\cdot 10^{-5} K^{-1}$, $\alpha_2=3\cdot 10^{-5} K^{-1}$. Для изотропного алюминия М1 $k_{11}=0,2095 Bm/m\cdot K$, $E_1=7,1\cdot 10^4 MПа$, $\alpha_1=2,38\cdot 10^{-5} K^{-1}$, остальные постоянные выбирались таким образом, чтобы корни характеристических уравнений были близки к мнимой единице i и изотропную пластинку можно было рассчитывать, как анизотропную с небольшим отличием постоянных по направлениям, считалось, что $k_{22}=0,2100 Bm/m\cdot K$, $E_2=7,15\cdot 10^4 MПа$, $\alpha_2=2,39\cdot 10^{-5} K^{-1}$. При проведении расчетов в разложениях (4.17) количество членов рядов (приближений j) по степеням малого параметра λ увеличивалось до тех пор, пока последующее приближение изменяло значения максимальных напряжений в предыдущем приближении более чем на 0,01 %. Для удовлетворения этому условию в рассмотренных случаях необходимо было оставлять степени малого параметра λ от 4 до 10. Ниже описаны некоторые из полученных результатов для пластинки с круговым включением при действии потока вдоль оси Oy (т. е. когда угол $\alpha = \pi/2$). Ниже все величины приведены с точностью до интенсивности плотности потока тепла q как множителя.

В табл. 2 для всех указанных выше материалов в зависимости от времени приведены значения нормальных напряжений σ_n и σ_s (на площадках соответственно касательных и перпендикулярных к контуру) в точке B , где они достигают максимальных значений, а на рис. 3 изобра-

Таблица 2

Материал	Величина	t , час					
		0	10	20	30	40	50
М1	σ_n	6,4527	1,8163	1,9156	1,9672	1,9990	2,0205
	σ_s	-9,1413	-4,3451	-4,4444	-4,4960	-4,5278	-4,5493
М2	σ_n	0,2669	0,2150	0,2070	0,1983	0,1930	0,1928
	σ_s	-2,6223	-1,8054	-1,8853	-1,8853	-1,8200	-1,8124
М3	σ_n	0,7822	0,4178	0,4185	0,4190	0,4293	0,4195
	σ_s	-3,0191	-1,4247	-1,4967	-1,4297	-1,4309	-1,4320

жены графики распределения этих напряжений. На рис. 4, 5 представлены графики распределения напряжений σ_n и σ_s около контура включения. Сплошные и пунктирные линии здесь и далее относятся к начальному и стационарному состояниям соответственно.

Из данных табл. 2 и рис. 3–5 следует, что с течением времени значения напряжений в пластинке изменяются. Через 25–30 час в пластинке устанавливается стационарное состояние, когда со временем значения напряжений в пластинке изменяются. Через 25–30 час в пластинке устанавливается стационарное состояние, когда со временем напряжения практически не меняются. Но значительные изменения напряжений проис-

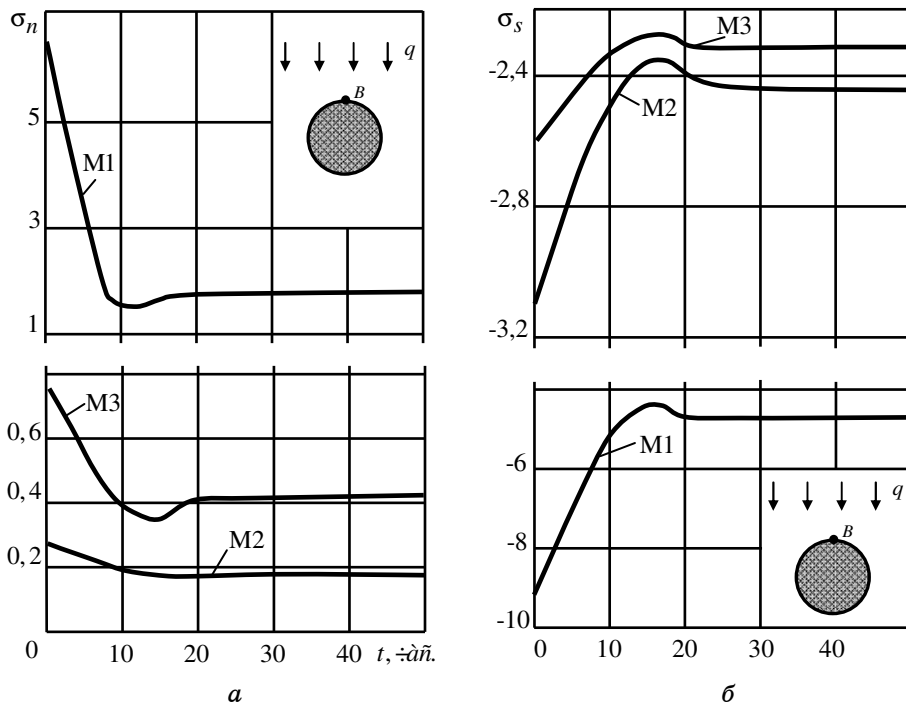


Рис. 3

ходят лишь в начальный период загрузки, в первые 10–15 час. При переходе в стационарное состояние значения напряжений претерпевают значительные изменения, так, максимальные значения σ_s для материала М3 изменяются на 19%, для М2 – на 10% и для М1 – на 53%; максимальные изменения σ_n (в точке В) для М3 изменяются на 54%, для М2 – на 30% и для М1 – на 73%. Также видно, что наибольшие изменения при переходе в стационарное состояние претерпевают значения напряжений для изотропного материала, жесткость которого (значения модуля Юнга) больше, чем у анизотропных материалов.

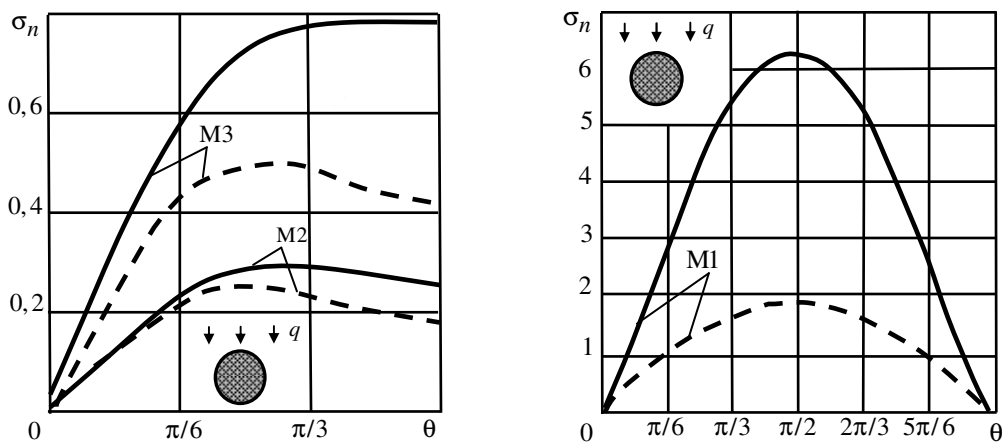


Рис. 4

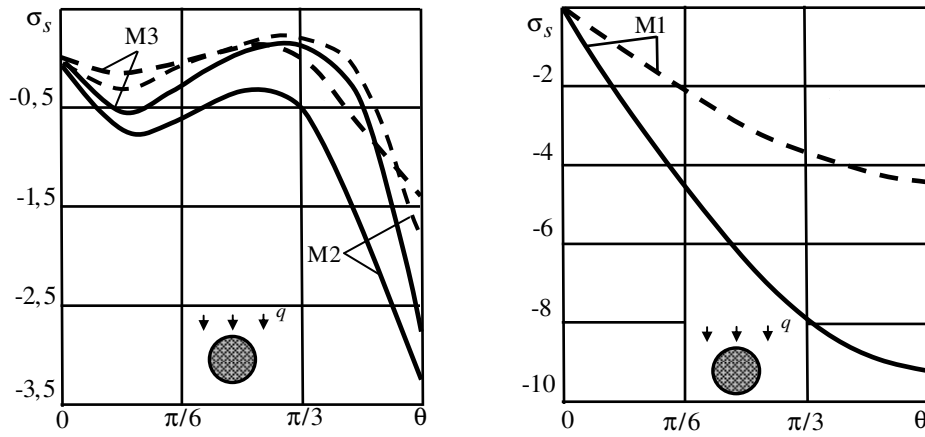


Рис. 5

Заметим, что описанные результаты для изотропной пластинки совпадают с полученными в работе [8]. Для анизотропной пластинки результаты по изменению во времени качественно согласуются с аналогичными для анизотропной пластинки при действии механических сил [3, 12].

Рассмотрим теперь случай, когда контур эллиптического отверстия подкреплён абсолютно жестким тонким кольцом, на котором задана нулевая температура или он теплоизолирован. В этом случае, в отличие от рассмотренного теплопроводящего ядра, функции $F_3^1(z_3^1)$ и $\Phi_3^1(z_3^1)$ отсутствуют, коэффициенты разложения (5.3) функции $F_3(z_3)$ определяются из граничных условий (2.5), (2.6) и получаются в виде (5.4), в которых

$$c_{3n} = -\frac{q}{2}(r_x a_1 + i r_y b_1), \quad (5.15)$$

если на контуре задана нулевая температура, или

$$c_{3n} = \frac{i q}{2\alpha}(a_1 \sin \alpha - i b_1 \cos \alpha), \quad (5.16)$$

если контур теплоизолирован. Для функций $\Phi_{jk}(z_k)$ получаются выражения (5.11), в которых a_{jk2} – коэффициенты, вычисляемые по формулам (5.13). Для этого случая на рис. 6 изображены графики распределения напряжений σ_s около контура жесткого кругового кольца в пластинке из материала М3, когда на контуре задана нулевая температура (рис. 6, а) или он теплоизолирован (рис. 6, б). Видно, подкрепление отверстия жестким кольцом значительно меняет влияние времени на значения напряжений по сравнению с теплопроводящим жестким ядром: так, максимальное изменение σ_s составляет около 40%, если на контуре задана нулевая температура, и 10%, если он теплоизолирован. При этом значительно изменяется характер распределения напряжений, что особенно заметно для случая теплоизолированного контура.

Наконец, рассмотрим случай, когда контур эллиптического отверстия не подкреплён и на нем задана нулевая температура или он теплоизолирован. Тогда в отличие от рассмотренного абсолютно жесткого тонкого коль-

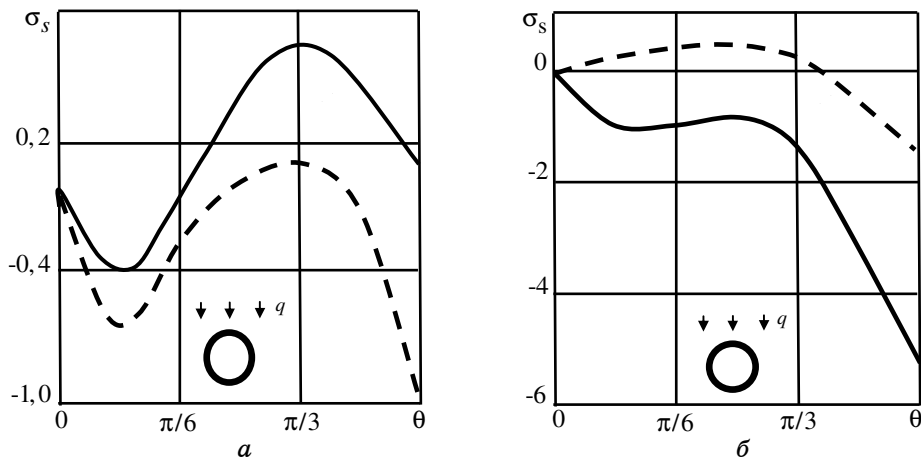


Рис. 6

ца, для функций $\Phi_{jk}(z_k)$ (5.11) коэффициенты a_{jk2} вычисляются в виде

$$a_{jk2} = \frac{\lambda_{6,k+1}C_{jp} - \lambda_{2,k+1}C_{jq}}{\lambda_{6k}\lambda_{2,k+1} - \lambda_{6,k+1}\lambda_{2k}}, \quad (5.17)$$

где $(C_{jp}, C_{jq}) = -\sum_{k=1}^3 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k})a_{j-1,k2} - \delta_{j0}[(\lambda_{6k}, \lambda_{2k})a_{32} + (u^*, v^*)]$.

На рис. 7 представлены графики изменения напряжений вблизи кругового отверстия, на контуре которого задана нулевая температура

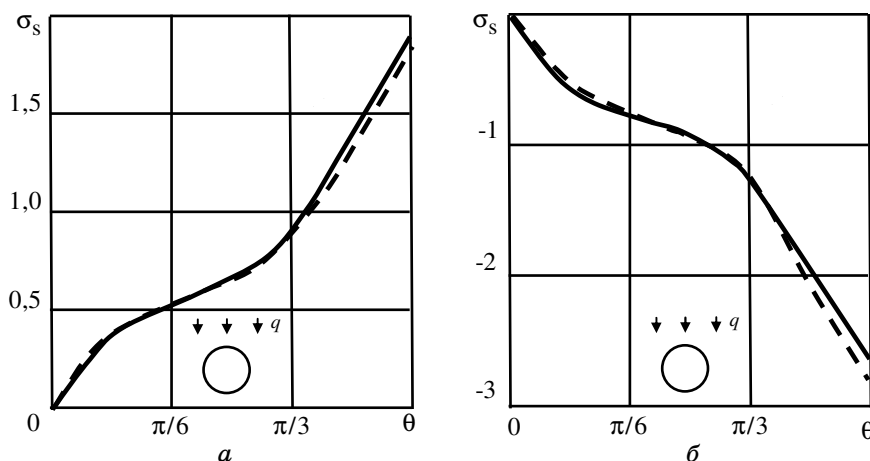


Рис. 7

(рис. 7, а) или он теплоизолирован (рис. 7, б). Из рис. 7 видно, что в случае неподкрепленного контура отверстия значительных изменений напряжений с течением времени не происходит.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано метод розв'язання задач термов'язкопружності для багатозв'язних анізотропних пластин. Методом малого параметра задачу зведено до рекурентної послідовності задач термопружності, які розв'язуються з використанням узагальнених комплексних потенціалів. З використанням розробленої методи отримано аналітич-

ний розв'язок задачі для пластинки з еліптичним жорстким або лінійним включенням. Проведено результати чисельних досліджень змін термонапруженого стану з часом.

Ключові слова: анізотропна пластинка, комплексні потенціали, термов'язкопружність.

SUMMARY. The method of solving the problem of the thermoviscoelasticity of the anisotropic plates is proposed. The problem is reduced to the recurring sequence of thermoelastic problems by the method of small parameter, which is solved by using complex potentials. As example analytical solution for the plate with elliptical rigid or linear inclusion is obtained. Numerical investigations of changing the thermal stress state is depending on the time.

Key words: anisotropic plate, the complex potentials, thermoviscoelasticity.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ван Фо Фы Г. А. Теория армированных материалов с покрытиями. – К.: Наук. думка, 1971. – 332 с.
2. Гузь А. Н., Каминский А. А., Назаренко В. М. Механика разрушения. – К.: Наук. думка, 1996. – 340 с. (Механика композитов: В 12 т. Т 5)
3. Калоеров С. А., Авдюшина Е. В., Коломиец М. А. Задача вязкоупругости для пластинки с жесткими эллиптическими включениями // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 183-194.
4. Калоеров С. А., Антонов Ю. С. Термонапряженное состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 127-136.
5. Калоеров С. А., Антонов Ю. С. Термоупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами при действии линейного потока тепла и температуры на контурах // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 102-116.
6. Калоеров С. А., Баева А. И., Шипоша Ю. С. Определение вязкоупругого состояния многосвязных изотропных плит // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 80-95.
7. Калоеров С. А., Коломиец М. А. Вязкоупругое состояние анизотропной пластинки с упругими включениями // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 79-89.
8. Калоеров С. А., Мироненко А. Б. Исследование вязкоупругого и термовязкоупругого состояния пластинки с включениями // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2007. – Вип. 1. – С. 70-84.
9. Калоеров С. А., Мироненко А. Б. Исследование вязкоупругого состояния пластинки с упругими эллиптическими или линейными включениями // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 2. – С. 88-98.
10. Калоеров С. А., Сенченко Ю. С. Циклическая задача о вязкоупругом изгибе кусочно-однородной плиты // Теорет. и прикладная механика. – 2010. – № 1 (47). – С. 35-44.
11. Каминский А. А. Исследование деформирования анизотропных вязкоупругих тел // Прикладная механика. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 39-63.
12. Каминский А. А., Гаврилов Д. А. Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. – К.: Наук. думка, 1992. – 248 с.
13. Космодамьянский А. С., Калоеров С. А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках. – Донецк, 1983. – 160 с.
14. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
15. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием // Прикладная математика и механика. – 1948. – Т. 12, № 1. – С. 53-62.
16. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
17. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
18. Volterra V. Sulle equazioni integrodifferenziali della theoria dell'elasticita // Atti della Reale Accademia dei Lincei. – 1909. – Vol. 18, № 2. – P. 151-167.

Донецкий национальный университет

Поступила 20.12.2010

УДК 539.3

А. В. ПАВЛЕНКО, д-р физ.-мат. наук,
Т. С. КАГАДИЙ, д-р физ.-мат. наук, О. Д. ОНОПРИЕНКО

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КОНЕЧНОЙ КРИВОЛИНЕЙНО АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ И СЦЕПЛЕНИЯ

Асимптотическим методом решена задача о действии жесткого штампа на свободную грань упругого ортотропного кругового сектора конечных размеров с цилиндрической анизотропией, главные направления которой совпадают с полярными координатами. Пластина закреплена по продольным кромкам. Предполагается, что в области контакта штампа и пластины существуют участки скольжения, где учитывается трение, и участок сцепления.

Ключевые слова: жесткий штамп, контактная задача, цилиндрическая анизотропия.

Изучению напряженно-деформированного состояния деталей и механизмов при контактном взаимодействии посвящены многочисленные исследования. В частности, плоская задача о действии жесткого штампа на границу упругой изотропной полуплоскости с учетом наличия в области контакта участков скольжения и сцепления, впервые была поставлена и приближенно решена Л.А. Галиным еще в 1945 г. Учет анизотропии приводит к значительному усложнению решения. В данной работе с применением асимптотического метода представлено решение задачи, в которой учитывается цилиндрическая анизотропия материала основания, а также его конечные размеры (круговой сектор).

Постановка задачи. Пусть упругая пластина $R_0 \leq r \leq R_1$, $-\gamma \leq \theta \leq \gamma$ закреплена по кромкам $\theta = \pm\gamma$ (рис. 1). На границу $r = R_0$ на участке $-\lambda \leq \theta \leq \lambda$ действует жесткий штамп с основанием, совпадающим с границей, нагруженным нормальным усилием P_0 (штамп перемещается поступательно, параллельно оси Ox). Другая граница, $r = R_1$, остается свободной. Предполагается, что в области контакта штампа с пластиной существуют два участка скольжения, примыкающие к конечным точкам области контакта, и участок сцепления, расположенный между ними. В зонах скольжения сдвигающие усилия направлены в противоположные стороны. Граничные точки участка сцепления ($\theta = \pm\alpha$), которые заранее неизвестны и должны быть определены в ходе решения

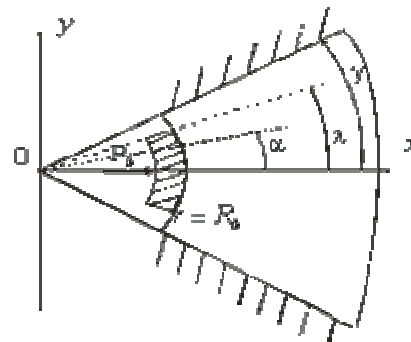


Рис.1

задачи, расположены симметрично относительно оси Ox . Напряжения в этих точках ограничены и непрерывны. Пластина, толщиной δ , работает в условиях обобщенного плоского напряженного состояния. Материал ее является ортотропным, главные направления анизотропии совпадают с полярными координатами r, θ . Требуется определить законы распределения напряжений под штампом и размер участка сцепления.

Если вместо полярных координат r, θ ввести безразмерные координаты ξ, η соотношениями $r = R_0 e^\xi, \theta = \eta$, то поставленная задача может быть сведена к интегрированию уравнений равновесия пластины в перемещениях

$$\begin{aligned} B_1 u_{\xi\xi} + G u_{\eta\eta} - B_2 (v_\eta + u) + G m v_{\xi\eta} - G v_\eta &= 0, \\ G v_{\xi\xi} + B_2 v_{\eta\eta} + B_2 u_\eta + G m u_{\xi\eta} + G (u_\eta - v) &= 0 \end{aligned}$$

при следующих граничных условиях:
вне штампа

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= B_1 (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\xi + \vartheta_2 (v_\eta + u)) = 0, \\ \tau &= G (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\eta + v_\xi - v) = 0 \quad (\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma), \\ u &= v = 0 \quad (\eta = \pm\gamma); \end{aligned}$$

под штампом

$$\begin{aligned} u &= \text{const} = C_0 \quad (\xi = 0, |\eta| \leq \lambda), \quad v = 0 \quad (\xi = 0, |\eta| \leq \alpha), \\ \tau &= \text{sign}(\eta) \rho \sigma_1 \quad (\xi = 0, \alpha < |\eta| < \lambda). \end{aligned}$$

На границе $\xi = h, |\eta| < \gamma$ ($r = R_1, |\theta| < \gamma$)

$$\sigma_1 = \tau = 0.$$

Здесь $u = u_r, v = u_\theta$ – компоненты вектора перемещений пластины; $B_1 = E_1 \delta / (1 - \vartheta_1 \vartheta_2), B_2 = E_2 \delta / (1 - \vartheta_1 \vartheta_2), G = G_* \delta$; σ_1 – нормальное в направлении координаты ξ напряжение; τ – касательное напряжение; E_1, E_2 – модули упругости вдоль главных направлений; G_* – модуль сдвига; $m = 1 + \mu, \mu = \vartheta_2 B_1 / G = 1 + \vartheta_1 B_2 / G$; ϑ_1, ϑ_2 – коэффициенты Пуассона материала пластины; ρ – коэффициент трения ($\rho < 1$); индексы ξ, η обозначают дифференцирование по соответствующим координатам.

Кроме того, должны быть выполнены условия равновесия штампа.

Метод решения. Для решения сформулированной задачи применим асимптотический метод [2–4]. Определение напряженного состояния первого типа (медленно изменяющегося в направлении координаты ξ) в первом приближении сводится к интегрированию уравнения

$$B_1 u_{\xi\xi}^{1,0} + G u_{\eta\eta}^{1,0} = 0, \quad (1)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \sigma_1^0 &= B_1 R_0^{-1} u_\xi^{1,0} = 0 \quad (\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma; \xi = h, |\eta| < \gamma) \\ u^{1,0} &= C_0 \quad (\xi = 0, |\eta| \leq \lambda), \quad u^{1,0} = 0 \quad (\eta = \pm\gamma). \end{aligned} \quad (2)$$

Так как при $\eta = \pm\gamma$ компонента вектора перемещения $u^{1,0}$ равна нулю, то и $u_\xi^{1,0}$ при $\eta = \pm\gamma$ равна нулю. Перемещение $v^{1,0}$, соответствующее данному напряженно-деформированному состоянию, находится из соотношения [3, 4]

$$v_\eta^{1,0} + u^{1,0} = 0. \quad (3)$$

Введем новые независимые переменные $x_1 = (G / B_1)^{1/2} \xi$, $y_1 = \eta$, тогда краевая задача (1), (2) принимает вид

$$u_{x_1 x_1}^{1,0} + u_{y_1 y_1}^{1,0} = 0; \quad (4)$$

$$u_{x_1}^{1,0} = 0 \quad (x_1 = 0, \lambda < |y_1| < \gamma; x_1 = h_1, |y_1| < \gamma),$$

$$u^{1,0} = C_0 \quad (x_1 = 0, |y_1| \leq \lambda), \quad u_{x_1}^{1,0} = 0 \quad (y_1 = \pm\gamma),$$

$$h_1 = (G / B_1)^{1/2} h. \quad (5)$$

Таким образом, требуется найти аналитическую в прямоугольнике $0 \leq x_1 \leq h_1$, $|y_1| \leq \gamma$ функцию $u^{1,0}$ по граничным условиям (5). Эту задачу будем решать отображением прямоугольника в плоскости z_1 ($z_1 = y_1 + ix_1$) в верхнюю полуплоскость изображений ζ_1 ($\zeta_1 = \eta_1 + i\xi_1$). Функция отображения имеет вид [1]

$$\zeta_1 = sn(K(k_1)z_1 / \gamma; k_1). \quad (6)$$

При этом начало координат сохраняет свое положение, а точки $z_1 = \gamma$, $z_1 = \gamma + ih_1$, $z_1 = ih_1$ переходят соответственно в точки $\zeta_1 = 1$, $\zeta_1 = 1 / k_1$, $\zeta_1 = \infty$. Так как $sn(-z) = -sn(z)$, то точки $z_1 = -\gamma$, $z_1 = -\gamma + ih_1$, $z_1 = \pm\lambda$ переходят в точки $\zeta_1 = -1$, $\zeta_1 = -1 / k_1$, $\zeta_1 = \pm sn(K(k_1)\lambda / \gamma; k) = \pm\ell_1$. Здесь $sn(z)$ – эллиптический синус, $K(k_1)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, причем модуль k_1 находится из уравнения [1]

$$K(k_1') / K(k_1) = h_1 / \gamma \quad (k_1' = \sqrt{1 - k_1^2}). \quad (7)$$

Пусть $\varphi^0 = u^{1,0} + i\theta^{1,0}$ ($\theta^{1,0}$ – гармоническая функция, сопряженная с $u^{1,0}$). Тогда

$$\varphi_1^0 = \varphi_{y_1}^0 = u_{y_1}^{1,0} + i\theta_{y_1}^{1,0} = u_{y_1}^{1,0} - iu_{x_1}^{1,0}.$$

Функцию $\varphi_1^0(x_1, y_1)$ можно определить в полуплоскости ζ_1 . Из условий (5) и соотношения (6) следует, что на действительной оси полуплоскости в интервале $|\eta_1| < \ell_1$ известна действительная часть функции φ_1^0 , а на остальных интервалах оси η_1 – ее мнимая часть.

Задача об определении аналитической в полуплоскости функции, когда на некоторых интервалах границы известна действительная, а на других мнимая часть искомой функции, решается с помощью формулы Келдыша-Седова. Так как из условий (5) следует, что на границе полуплоскости ζ_1 в интервале $|\eta_1| < \ell_1$ действительная часть функции φ_1^0 равна нулю, а на остальной части границы мнимая ее часть равна нулю, то решение для функции φ_1^0 во всей полуплоскости имеет вид [5]

$$\varphi_1^0(\zeta_1) = \frac{A}{\sqrt{\zeta_1^2 - \ell_1^2}},$$

где A – действительная постоянная. В последней формуле выбирается та ветвь корня, для которой в окрестности бесконечно удаленной точки $\sqrt{\zeta_1^2 - \ell_1^2} = \zeta_1 + \dots$

Действительная и мнимая части $\varphi_1^0(\zeta_1)$ определяют функции $u_{y_1}^{1,0}$, $u_{x_1}^{1,0}$. В частности, при $\xi_1 = 0$ ($x_1 = 0$ или $y_1 = \pm\gamma$; либо $x_1 = h_1$, $|y_1| < \gamma$)

$$\varphi_1^0(\eta_1) = \frac{A}{\sqrt{\eta_1^2 - \ell_1^2}}, \quad (9)$$

$$u_{y_1}^{1,0} = 0, \quad u_{x_1}^{1,0} = \frac{A}{\sqrt{\ell_1^2 - \eta_1^2}} \quad (|\eta_1| < \ell_1),$$

$$u_{y_1}^{1,0} = \frac{A}{\sqrt{\eta_1^2 - \ell_1^2}}, \quad u_{x_1}^{1,0} = 0 \quad (|\eta_1| < \ell_1),$$

$$\eta_1 = sn(K(k_1)y_1 / \gamma; k). \quad (10)$$

Нормальное напряжение σ_1^0 и составляющая касательного напряжения $\tau^{1,0}$, соответствующая функции $u^{1,0}$, находятся по формулам

$$\sigma_1^0 = B_1(R_0 e^{\xi})^{-1} u_{\xi}^{1,0} = (R_0 e^{\xi})^{-1} \sqrt{GB_1} u_{x_1}^{1,0},$$

$$\tau^{1,0} = G u_{\eta}^{1,0} (R_0 e^{\xi})^{-1} = G (R_0 e^{\xi})^{-1} u_{\eta_1}^{1,0}.$$

Постоянная A определяется из условия равновесия штампа и равна

$$A = -P_0 R_0 \left[2\sqrt{GB_1 C_1 B} \right]^{-1}, \quad (11)$$

$$C_1 = \frac{\gamma}{K(k_1)}, \quad B = \int_0^{\ell_1} \frac{dt}{\sqrt{(\ell_1^2 - t^2)(1 - t^2)(1 - k_1^2 t^2)}}.$$

Тогда давление под штампом в первом приближении выражается следующим образом:

$$\sigma_1^0 = -\frac{P_0}{2C_1 B} \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - \eta_1^2}}, \quad (12)$$

а функция $u_{y_1}^{1,0}$ при $\xi = 0, |\eta_1| > \ell_1$ находится по формуле

$$u_{y_1}^{1,0} = A \left(\eta_1^2 - \ell_1^2 \right)^{-1/2}, \quad (13)$$

где A дается выражением (11).

Составляющая $v^{1,0}$ компоненты вектора перемещений v^0 , соответствующая данному напряженному состоянию, определяется из уравнения (3). Функция $u^{1,0}$ находится из соотношений для $u_{x_1}^{1,0}$, $u_{y_1}^{1,0}$ соответственно при $|\zeta_1| < \ell_1$, $|\zeta_1| > \ell_1$ с учетом, что при $y_1 = \eta = \pm\gamma$ $u^{1,0} = 0$. Вторая составляющая $v^{2,0}$ компоненты вектора перемещений v^0 , соответствующая напряженному состоянию типа пограничного слоя, находится из уравнения [3]

$$Gv_{\xi\xi}^{2,0} + B_2 v_{\eta\eta}^{2,0} = 0. \quad (14)$$

Так как $v^{1,0}$ и $v^{2,0}$ имеют один и тот же порядок по $\varepsilon = G / B_1$, а производная $v_{\xi}^{2,0}$ больше производной $v_{\xi}^{1,0}$ на два порядка при $q = B_2 / B_1 \approx 1$, то в данном приближении граничные условия для определения $v^{2,0}$ из уравнения (14) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} v^0 &= v^{1,0} + v^{2,0} = 0 \quad (\xi = 0, |\eta| \leq \alpha), \\ GR_0^{-1} v_{\xi}^{2,0} &= \text{sign}(\eta) \rho \sigma_1^0 \quad (\xi = 0, \alpha \leq |\eta| < \lambda), \\ v_{\xi}^{2,0} &= -u_{\eta}^{1,0} \quad (\xi = 0, \lambda \leq |\eta| < \gamma; \xi = h, |\eta| < \gamma), \\ v_{\xi}^{2,0} &= 0 \quad (\eta = \pm\gamma). \end{aligned} \quad (15)$$

При этом, как предполагалось в постановке задачи, $\rho < 1$ ($\rho = \rho_0 \varepsilon^{1/2}$, $\rho_0 \approx 1$), а σ_1^0 под штампом находится по формуле (12).

Компонента $u^{2,0}$, соответствующая данному напряженному состоянию, удовлетворяет условию [3] $u_{\xi\xi}^{2,0} = 0$. После введения новых независимых переменных $x_2 = (B_2 / G)^{1/2} \xi$, $y_2 = \eta$ краевая задача (14), (15) принимает вид

$$v_{x_2 x_2}^{2,0} + v_{y_2 y_2}^{2,0} = 0; \quad (16)$$

$$v_{x_2}^{2,0} = -v_{y_2}^{1,0} \quad (x_2 = 0, |y_2| \leq \alpha), \quad v_{x_2}^{2,0} = 0 \quad (y_2 = \pm\gamma),$$

$$v_{x_2}^{2,0} = \text{sign}(y_2) \rho R_0 (GB_2)^{-1/2} \sigma_1^0 \quad (x_2 = 0, \alpha < |y_2| < \lambda)$$

$$v_{x_2}^{2,0} = -\sqrt{\frac{G}{B_2}} u_{y_2}^{1,0} \quad (x_2 = 0, \lambda < |y_2| < \gamma; x_2 = h_2, |y_2| < \gamma),$$

$$h_2 = (B_2 / G)^{1/2} h \quad (17)$$

Задача (16), (17) является смешанной задачей для аналитической функции $v^{2,0}$ в прямоугольнике $0 \leq x_2 \leq h_2$, $-\gamma \leq y_2 \leq \gamma$, которая может быть решена отображением прямоугольника в плоскости z_2 ($z_2 = y_2 + ix_2$) на верхнюю полуплоскость изображений ζ_2 ($\zeta_2 = \eta_2 + i\xi_2$). Функция отображения аналогично имеет вид (6), где нужно z_1 заменять на z_2 , k_1 на k_2 , причем модуль k_2 определяется из уравнения (7) также при замене k_1 на k_2 , h_1 на h_2 .

В основе решения задачи лежит асимптотический метод [3, 4], где предполагается, что $G / B_1 = \varepsilon$ является малым параметром, $B_2 \approx B_1$. Поэтому $h_2 = (B_2 / G)^{1/2} h$ много больше $h_1 = (G / B_2)^{1/2} h$ ($h_2 / h_1 \gg 1$) и k_2 оказывается близким к нулю. Но при малых значениях k_2 $K(k_2) \approx \pi / 2$ и функция отображения (6) переходит в функцию $\zeta_2 = C_2 \sin(\pi z_2 / 2\gamma)$, действительная и мнимая части которой записываются соответственно

$$\eta_2 = C_2 \sin \frac{\pi y_2}{2\gamma} \text{ch} \frac{\pi x_2}{2\gamma}, \quad \xi_2 = C_2 \cos \frac{\pi y_2}{2\gamma} \text{sh} \frac{\pi x_2}{2\gamma}.$$

Постоянную C_2 определяют из условия, чтобы точки $x_2 = 0$, $y_2 = \pm\lambda$ отображались в точки $\xi_2 = 0$, $\eta_2 = \pm\ell_1$. Тогда получим

$$C_2 = \ell_1 / \sin(\pi\lambda / 2\gamma), \quad \ell_1 = \text{sn}(K(k_1)\lambda / \gamma; k_1).$$

Точки $x_2 = 0$, $y_2 = \pm\gamma$ переходят в точки $\xi_2 = 0$, $\eta_2 = \pm C_2$, а точки $x_2 = 0$, $y_2 = \pm\alpha$ — в точки $\xi_2 = 0$, $\eta_2 = \pm\alpha_2$, где

$$\alpha_2 = C_2 \sin \frac{\pi\alpha}{2\gamma} = \frac{sn(K(k_1)\lambda / \gamma; k_1) \sin(\pi\alpha / 2\gamma)}{\sin(\pi\lambda / 2\gamma)}.$$

Таким образом, для второго напряженного состояния (типа пограничного слоя [2–4]) вместо прямоугольника фактически имеем полуполосу и задача с учетом (17), (12), (13) сводится к следующей: найти аналитическую в полуплоскости ζ_2 функцию $v^{2,0}$ при условии, что на действительной оси полуплоскости производные функции $v^{2,0}$ принимают значения

$$\begin{aligned} v_{y_2}^{2,0} &= -v_{\eta}^{1,0} = C_0 (|\eta_2| \leq \alpha_2) v_{x_2}^{2,0} = 0 (|\eta_2| \geq C_2), \\ v_{x_2}^{2,0} &= \text{sign}(y_2) \rho A \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \frac{1}{\sqrt{\ell_1^2 - \eta_2^2}} (\alpha_2 < |\eta_2| < \ell_1), \\ v_{x_2}^{2,0} &= -A \sqrt{\frac{G}{B_2}} \frac{1}{\sqrt{\eta_2^2 - \ell_1^2}} (\ell_1 < |\eta_2| < C_2). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь A – величина, вычисляемая по формуле (11). Учтено соотношение (3), C_0 – осадка штампа. На бесконечности напряжения убывают.

Если $\psi^0 = v^{2,0} + iQ^{2,0}$ ($Q^{2,0}$ – гармоническая функция, сопряженная с $v^{2,0}$), то $\psi_1^0 = i\psi_{y_2}^0 = v_{x_2}^{2,0} + iv_{y_2}^{2,0}$. Функцию ψ_1^0 в любой точке верхней полуплоскости ζ_2 можно определить при помощи формулы Келдыша-Седова, которая при указанных условиях (18) и ограниченности в точках $\zeta_2 = \pm\alpha_2$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_1^0(\zeta_2) &= -\frac{A}{\pi i} \sqrt{\zeta_2^2 - \alpha_1^2} \times \left(\sqrt{\frac{G}{B_2}} \left[\int_{-C_2}^{-\ell_1} \frac{f(t)dt}{t - \zeta_2} + \int_{\ell_1}^{C_2} \frac{f(t)dt}{t - \zeta_2} \right] - \right. \\ &\quad \left. -\rho \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \left[\int_{-\ell_1}^{-\alpha_2} \frac{f(t)dt}{t - \zeta_2} + \int_{\alpha_2}^{\ell_1} \frac{f(t)dt}{t - \zeta_2} \right] \right) + \frac{C_0}{\pi i} i\sqrt{\zeta_2^2 - \alpha_2^2} \int_{-\alpha_2}^{\alpha_2} \frac{1}{\sqrt{t^2 - \alpha_2^2}} \frac{dt}{t - \zeta_2}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$f(t) = \left[(t^2 - \alpha_2^2)(|t^2 - \ell_1^2|) \right]^{-1/2}.$$

Для убывания напряжений с уходом на бесконечность необходимо, чтобы $\psi_1^0(\zeta_2) \rightarrow 0$ при $|\text{Re } \zeta_2| \rightarrow \infty$. Так как последнее слагаемое в (19) стремится к нулю, то из указанного условия получим соотношение

$$\sqrt{\frac{G}{B_1}} \left(\int_{-C_2}^{-\ell_1} f(t)dt + \int_{\ell_1}^{C_2} f(t)dt \right) = \rho \left(\int_{-\ell_1}^{-\alpha_2} f(t)dt + \int_{\alpha_2}^{\ell_1} f(t)dt \right),$$

которое может быть записано в виде

$$\sqrt{\frac{G}{B_1}} \int_1^c \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau^2 - \alpha_*^2)(\tau^2 - 1)}} = \rho \int_{\alpha_*}^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau^2 - \alpha_*^2)(1 - \tau^2)}}, \quad (20)$$

где

$$\tau = \frac{t}{\ell_1}, \quad c = \frac{C_2}{\ell_1} = \frac{1}{\sin(\pi\lambda / 2\gamma)},$$

$$\alpha_* = \frac{\alpha_2}{\ell_1} = \frac{\sin(\pi\alpha / 2\gamma)}{\sin(\pi\lambda / 2\gamma)}, \quad c > 1 > \alpha_* > 0.$$

Интеграл в левой части соотношения (20) есть неполный эллиптический интеграл первого рода $F(\varphi, \alpha_*)$, причем φ определяется равенством

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{c^2 - 1}{c^2 - \alpha_*^2}}. \quad (21)$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства (20) является полным эллиптическим интегралом первого рода $K(\sqrt{1 - \alpha_*^2}) = K(\alpha'_*) = K'(\alpha_*)$, где $\alpha'_* = \sqrt{1 - \alpha_*^2}$. Поэтому равенство (20) может быть записано следующим образом:

$$F(\varphi, \alpha_*) = \rho (B_1 / G)^{1/2} K'(\alpha_*). \quad (22)$$

Основные результаты и выводы. Соотношение (22) устанавливает связь между размерами участка сцепления, области контакта, угла раствора сектора, а также коэффициентом трения и жесткостными характеристиками материала пластины. Оно оказывается таким же, как и в случае, если бы пластина представляла собой полубесконечный круговой сектор. Это связано с характером данного напряженного состояния (напряженного состояния типа пограничного слоя), которое быстро изменяется в направлении координаты ξ .

Из равенства (19) при $\xi_2 = 0, |\eta_2| < \alpha_2$ (на участке сцепления) получим

$$\psi_1^0(\eta_2) = v_{x_2}^{2,0} = -\frac{2A}{\pi} \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \eta_2 \sqrt{\alpha_2^2 - \eta_2^2} \left(\sqrt{\frac{G}{B_1}} \int_{\ell_1}^{C_2} \frac{1}{\sqrt{(t^2 - \alpha_2^2)(t^2 - \ell_1^2)}} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{dt}{(t^2 - \eta_2^2)} - \rho \int_{\alpha_2}^{\ell_1} \frac{1}{\sqrt{(t^2 - \alpha_2^2)(\ell_1^2 - t^2)}} \frac{dt}{(t^2 - \eta_2^2)} \right) \quad (23)$$

Последнее слагаемое в выражении (19) при $\xi_2 = 0, |\eta_2| < \alpha_2$ дает чисто

мнимую величину iC_0 . Учитывая представления интегралов, выражение (23) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} v_{x_2}^{2,0} = & \frac{2A}{\pi \ell_1} \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \eta_2 \sqrt{\alpha_2^2 - \eta_2^2} \left(\sqrt{\frac{G}{B_1}} \frac{1}{(\ell_1^2 - \eta_2^2)(\alpha_2^2 - \eta_2^2)} \times \right. \\ & \times \left[(\ell_1^2 - \alpha_2^2) \Pi \left(\varphi, \frac{\alpha_2^2 - \eta_2^2}{\ell_1^2 - \eta_2^2}, \alpha_* \right) - (\ell_1^2 - \eta_2^2) F(\varphi, \alpha_*) \right] + \\ & \left. + \frac{\rho}{(\ell_1^2 - \eta_2^2)} \Pi_1 \left(\frac{\ell_1^2 - \alpha_2^2}{\ell_1^2 - \eta_2^2}, \alpha_*' \right) \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь $\alpha_* = \alpha_2 / \ell_1$ находится из (22), $|\eta_2| < \alpha_2$, $\Pi_1(\vartheta, \alpha_*')$, $\alpha_*' = \sqrt{1 - \alpha_*^2}$ – полный эллиптический интеграл третьего рода, $\Pi(\varphi, \mu, \alpha_*)$ – неполный эллиптический интеграл третьего рода. Для касательного напряжения под штампом в первом приближении получаем формулы

$$\begin{aligned} \tau = & \text{sign}(\eta) \rho \sigma_1^0 \quad (\alpha \leq |\eta| < \lambda), \\ \tau = & R_0^{-1} \sqrt{GB_2} v_{x_2}^{2,0} \quad (|\eta| \leq \alpha), \end{aligned} \quad (25)$$

где σ_1^0 , $v_{x_2}^{2,0}$ – величины, вычисляемые по формулам (12) и (24).

Так как $0 < \alpha_* < \ell_1 < c > 1$, то

$$\frac{C_2 - 1}{c^2 - \alpha_*^2} = 1 - \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = \frac{1 - \alpha_*^2}{c^2 - \alpha_*^2} \square 1.$$

Тогда равенство (21) можно записать в виде

$$\varphi = \arcsin \sqrt{1 - \varepsilon_1} = \arcsin(1 - \varepsilon_1/2 + \dots) \approx \arcsin(1 - \varepsilon_1/2),$$

из которого следует, что

$$\varphi = \pi/2 - \varepsilon_1^{1/2} - o(\varepsilon_1^{3/2}).$$

В первом приближении по ε_1 имеем $\varphi^0 = \pi/2$ и интеграл $F(\varphi^0, \alpha_*^0)$ становится полным эллиптическим интегралом первого рода $K(\alpha_*^0)$, а равенство (22) можно переписать в виде:

$$K'(\alpha_*^0) / K(\alpha_*^0) = (G / B_1)^{1/2} / \rho. \quad (26)$$

В этом случае

$$q = \exp\left(-\frac{\pi}{\rho} \sqrt{\frac{G}{B_1}}\right), \quad \alpha_*^0 = 4 \left(\left[\sum_{v=0}^{\infty} q^{(v+1/2)^2} \right] \left[1 + 2 \sum_{v=0}^{\infty} q^{v^2} \right]^{-1} \right)^2.$$

Тогда $K = \frac{\pi}{2} \left(1 + 2 \sum_{v=1}^{\infty} q^{v^2} \right).$

Если коэффициент трения ρ равен нулю, то $q = 0$, $\alpha_*^0 = 0$, т.е. участок сцепления исчезает. С ростом ρ этот участок возрастает, кроме того, он зависит от жесткостных характеристик материала пластины. Так, при уменьшении $(G/B_1)^{1/2}$ и постоянном $\rho \neq 0$ размер участка сцепления увеличивается.

На этом решение задачи в первом приближении заканчивается. Так как $u_{\xi}^{2,0} = 0$, то граничные условия для определения функций $u^{1,1}$, $v^{2,1}$ во втором приближении оказываются нулевыми [3, 4]. Соответственно нулевыми будут и решения, т.е. второе приближение не вносит поправки в первое.

Отметим также, что если в напряженном состоянии типа пограничного слоя рассматривать не полуполосу, а прямоугольник, то отображение его на полуплоскость лучше совершать не так, как указано выше, а потребовать, чтобы точки $x_2 = 0, y_2 = \pm\lambda$; $x_2 = 0, y_2 = \pm\gamma$ отображались соответственно в точки $\xi_2 = 0, \eta_2 = \pm\ell_1$; $\xi_2 = 0, \eta_2 = \pm 1$. Это позволит избежать перехода от одних координат к другим при составлении граничных условий и достигается выбором одной из постоянных в функции отображения. Вторая постоянная (модуль k_2) при этом определяется из условия, что точки $z_2 = \pm\gamma + ih_2$ отображаются в точки $\zeta_2 = \pm 1/k_2$. Дальнейший анализ и в этом случае производится аналогично изложенному выше, однако это возможно лишь при достаточно малых значениях $h = \ln(R_1/R_0)$.

Влияние трения на давление под штампом сказывается лишь с третьего приближения. В этом случае возникает невязка по деформации u_{ξ} ($\xi = 0, \ell_1 < |\eta_1| < 1$), которая исчезает при решении уравнения (1) для функции $u^{1,2}$ с граничными условиями

$$u_{\xi}^{1,2} = u_{\xi}^{1,0} - \mu v_{\eta}^{1,0} \quad (\ell_1 < |\eta_1| < 1), \quad u_{\eta}^{1,2} = 0 \quad (|\eta_1| < \ell_1).$$

На границе $\xi = h$ все функции обращаются в нуль. Так как $u_{\xi}^{1,0} = 0$ ($|\eta_1| > \ell_1$) то $u_{\xi}^{1,2} = -\mu v_{\eta}^{1,0} = \mu u^{1,0}$ ($\xi = 0, \ell_1 < |\eta_1| < 1$). Здесь $\mu = \vartheta_1 B_2 / G = \vartheta_2 B_1 / G$ и учтена связь между $v_{\eta}^{1,0}$, $u^{1,0}$, обусловленная равенством (3).

Таким образом, невязка по нормальным напряжениям σ_1 при $\xi = 0$,

$\ell_1 < |\eta_1| < 1$ вызвана лишь учетом коэффициента Пуассона. Решение последней задачи повторяет изложенное выше, но при указанных выше условиях.

РЕЗЮМЕ. Асимптотичним методом вивчається нова задача про дію жорсткого штамп на вільну границю пружного ортотропного кругового сектору кінцевих розмірів з циліндричною анізотропією, головні напрямки якої співпадають з полярними координатами. Пластину закріплено по бічним кромкам. В області контакту штамп і пластини існують відрізки ковзання, де враховується тертя, та відрізок зчеплення.

Ключові слова: циліндрична анізотропія, контактна задача, жорсткий штамп.

SUMMARY. The problem on action of a rigid stamp on a free side elastic orthotropic circular sector of the final sizes with the cylindrical anisotropy, which mainstreams coincide with polar coordinates is solved with the asymptotic method. The plate is fixed on longitudinal edges. It is supposed that in the field of contact of a stamp and plates there are sliding sites where the friction, and a coupling site is considered.

Key words: cylindrical anisotropy, contact problem, solid stamp.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
2. *Маневич Л. И., Павленко А. В.* Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов. – К.: Вища шк., 1991. – 131 с.
3. *Маневич Л. И., Павленко А. В., Коблик С. Г.* Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. – К., Донецк: Вища шк., 1982. – 153 с.
4. *Павленко А. В.* Плоская задача теории упругости для пластинок с криволинейной анизотропией // Изв. АН СССР. МТТ. – 1979. – № 3 – С. 70–82.
5. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М.: Наука, 1966. – 448 с.

*Национальная металлургическая
академия Украины, г. Днепропетровск,
Национальный горный университет
Украины, г. Днепропетровск*

Поступила 29.03.2011

УДК 534-21:537.226.8

М.О. ШУЛЬГА, д-р физ.-мат. наук,
Л.О. ГРИГОРЬЕВА, канд. физ.-мат. наук,
И.О. ЛАСТИВКА, канд. техн. наук, Н.О. БАБКОВА

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

Развит численный алгоритм анализа планарных нестационарных осесимметричных колебаний пьезокерамических поляризованных по толщине круглых пластин при электрическом возбуждении. Проведено исследование колебаний кольцевых пластин со свободными торцевыми поверхностями, установлена зависимость колебаний от частоты мгновенно приложенного гармонического электрического возбуждения и отношения внешнего и внутреннего радиусов пластины.

Ключевые слова: нестационарные упругоэлектрические колебания, пьезоэлектрические пластины с круговыми границами, численный метод, электрическое возбуждение

Пьезоэлектрические элементы пластинчатой формы являются наиболее распространенными электромеханическими преобразователями при гармонических установившихся и импульсных электрических и механических возбуждениях. Основное внимание в экспериментальных и теоретических исследованиях их динамических характеристик уделяется установившимся гармоническим колебаниям [1, 5, 7, 8 и др.]. Вопросы нестационарных колебаний изучены менее полно [2, 8 и др.]. В статьях [6, 9–11] различными методами изучались толщинные колебания пластинчатых преобразователей. Конфигурация преобразователей в плоскости на протяжении волновых процессов при этом естественно не учитывалась. В случае тонких преобразователей это упущение можно устранить, если ограничиться теорией их механического деформирования в приближении плоского напряженного состояния и линейным распределением электрического потенциала по толщине. В такой постановке в данной статье изучаются нестационарные осесимметричные электромеханические колебания поляризованных по толщине пьезокерамических тонких круглых пластин при электрическом возбуждении. Разбит численный алгоритм решения задачи и проведен анализ нестационарных колебаний кольцевых пластин со свободными торцевыми поверхностями, установлена зависимость перемещений и напряжений от частоты мгновенно приложенного гармонического электрического возбуждения и отношения внешнего и внутреннего радиусов пластины.

1. Постановка задачи. Рассмотрим поляризованную по толщине тонкую пьезокерамическую пластину с электродированными плоскостями $z = \pm h/2$. Механические напряжения σ_r , σ_θ при осесимметричной деформации определяются [5, 7] через перемещения u_r и напряженность

электрического поля E_z по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \frac{u_r}{r} - (1+\nu_E) d_{31}^E E_z \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)} \left(\nu_E \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - (1+\nu_E) d_{31}^E E_z \right),\end{aligned}\quad (1.1)$$

в которых использованы выражения для деформаций в цилиндрических координатах и $\nu_E = -s_{12}^E/s_{11}^E$.

Уравнение колебаний

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

после подстановки в него формул (1.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (1.3)$$

где $a = 1 / \sqrt{(1-\nu_E^2) s_{11}^E \rho}$ – скорость волны в пластине.

В начальный момент времени задаются [4] перемещения точек пластины и их скорости

$$u_r(r, t=0) = u^0(r), \quad \partial_t u_r(r, t=0) = u^1(r). \quad (1.4)$$

Для кольцевой пластины $R_0 < r < R_1$ возможные граничные условия на краях $r = R_0$ и $r = R_1$ следует выбирать по одному из двух альтернативных пар

$$\begin{aligned}u_r(R_0, t) = 0 \quad \vee \quad \sigma_r(R_0, t) = 0, \\ u_r(R_1, t) = 0 \quad \vee \quad \sigma_r(R_1, t) = 0.\end{aligned}\quad (1.5)$$

В случае сплошной пластины на внешнем крае

$$u_r(R_1, t) = 0 \quad \vee \quad \sigma_r(R_1, t) = 0. \quad (1.6)$$

а при $r = R_0 = 0$ из условия симметрии перемещение $u_r(0, t) = 0$.

После перехода к безразмерным величинам $\bar{r}R = r$, $\bar{t} = ta/R$, $\bar{u}_r R = u_r$, $\bar{\sigma}_{r,\theta} = \sigma_{r,\theta} s_{11}^E (1-\nu_E^2)$ формулы (1.1) для механических напряжений принимают вид

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_r &= \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \nu_E \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}} - (1+\nu_E) d_{31}^E E_z, \\ \bar{\sigma}_\theta &= \nu_E \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}} - (1+\nu_E) d_{31}^E E_z,\end{aligned}\quad (1.7)$$

а уравнение колебаний (1.3) переходит в

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{t}^2}. \quad (1.8)$$

Граничные условия (1.5) принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{u}_r(\bar{R}_0, \bar{t}) = 0 \quad \vee \quad \bar{\sigma}_r(\bar{R}_0, \bar{t}) = 0, \\ \bar{u}_r(\bar{R}_1, \bar{t}) = 0 \quad \vee \quad \bar{\sigma}_r(\bar{R}_1, \bar{t}) = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

а начальные условия (1.4) запишутся так

$$\bar{u}_r(\bar{r}, \bar{t} = 0) = R^{-1} u(\bar{r}), \quad \partial_{\bar{t}} \bar{u}_r(\bar{r}, \bar{t} = 0) = a^{-1} u(\bar{r}). \quad (1.10)$$

Далее знаки безразмерности будут опускаться.

Для тонких пластин электрический потенциал внутри пластины изменяется [5, 7] по линейному закону $\phi = V(t)z / h$ и тогда напряженность электрического поля

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \rightarrow E_z(t) = -\frac{V(t)}{h} \quad (1.11)$$

зависит только от времени.

2. Построение разностной схемы. Для построения разностной схемы при численном решении системы (1.7), (1.8) при начальных условиях (1.10) и граничных условиях (1.9) воспользуемся следующими аппроксимациями. Введем разбиение отрезка $R_0 < r < R_1$

$$\Omega = \{r_i = R_0 + (i - 0.5)\Delta_r \mid \Delta_r = (R_1 - R_0) / n, i = 0 \dots n + 1\}, \quad (2.1)$$

которое включает в себя законтурные точки, находящиеся на расстоянии в половину шага сетки от концов интервала. При замене производных по пространственной координате центрально-разностными выражениями уравнение движения (1.8) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{i+0.5}}{\partial t^2} = \frac{u_{i+1+0.5} - 2u_{i+0.5} + u_{i-0.5}}{\Delta_r^2} + \\ + \frac{u_{i+1+0.5} - u_{i-0.5}}{2r_{i+0.5}\Delta_r} - \frac{u_{i+0.5}}{r_{i+0.5}^2}, \quad i = 0 \dots n - 1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В аппроксимации уравнений (2.2) входят значения перемещений в законтурных точках $u_{-0.5}$ и $u_{n+0.5}$, которые необходимо определить из граничных условий.

Если при $r = R_0$ и $r = R_1$ заданы соответственно перемещения $u_r(R_0, t) = 0$ и $u_r(R_1, t) = 0$, то $u_{-0.5} = -u_{0.5}$ и $u_{n+0.5} = -u_{n-0.5}$.

Если на границах $r = R_0$ и $r = R_1$ заданы соответственно напряжения $\sigma_r(R_0, t) = 0$ и $\sigma_r(R_1, t) = 0$, то используя аппроксимацию выражения (1.7) для напряжения σ_r , найдем

$$\left(1 - \frac{v_E \Delta_r}{2R_0}\right) u_{-0.5} = \left(1 + \frac{v_E \Delta_r}{2R_0}\right) u_{0.5} - (1 + v_E) d_{31} E_z \Delta_r. \quad (2.3)$$

$$\left(1 + \frac{v_E \Delta_r}{2R_1}\right) u_{n+0.5} = \left(1 - \frac{v_E \Delta_r}{2R_1}\right) u_{n-0.5} + (1 + v_E) d_{31} E_z \Delta_r. \quad (2.4)$$

Для интегрирования по времени разбиваем исследуемый временной участок на интервалы длиной Δ_t и применяем общепринятые методы, например, явную численную схему. В явной схеме перемещения на $(k+1)$ -ом слое находятся по известному распределению перемещений на k -ом и $(k-1)$ -ом временных слоях следующим образом

$$u_{i+0.5}^{k+1} = \Delta_t^2 \left[\left(\frac{1}{\Delta_r^2} + \frac{1}{2r_{i+0.5} \Delta_r} \right) u_{i+1+0.5}^k - \left(\frac{2}{\Delta_r^2} + \frac{1}{r_{i+0.5}^2} \right) u_{i+0.5}^k + \left(\frac{1}{\Delta_r^2} - \frac{1}{2r_{i+0.5} \Delta_r} \right) u_{i-0.5}^k \right] + 2u_{i+0.5}^k - u_{i+0.5}^{k-1}. \quad (2.5)$$

Значение перемещений на временных слоях $t_0 = 0$ и $t_1 = \Delta_t$ определяются по начальным условиям (1.10).

Вследствие условной устойчивости явной численной схемы шаг по времени должен быть в несколько раз меньше шага по пространственной координате. Обычно при принятом обезразмеривании достаточно взять $\Delta_t \approx 0.1 \Delta_r$.

3. Анализ полученных результатов. Проанализируем колебания пластины в форме кольцевого диска со свободными торцами из пьезокерамики ЦТС-19 с материальными параметрами [5, 7]:

$$s_{11}^E = 15.2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{Н}, \quad c_{12}^E = -5.8 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{Н},$$

$$d_{13} = -125 \cdot 10^{-12} \text{ Кл} / \text{Н}, \quad \varepsilon_{33}^S = 1360 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} / \text{м}, \quad \rho = 7740 \text{ кг} / \text{м}^3.$$

При таких данных скорость распространения электроупругой волны в пластине $a = 3150$ м/с. Толщина пластины $h = 2$ мм, внутренний радиус $R_0 = 2$ см, внешний $R_1 = 5$ см. При расчетах принималось $R = R_1$. Возмущение задается мгновенно приложенной при $t = 0$ разностью потенциалов $V(t) = V_0 \sin \omega t$, где $V_0 = 1200$ В. Безразмерная частота $\bar{\omega} = 1$, которой соответствует частота в герцах $f = 6.31 \cdot 10^4 \text{ рад} / \text{с}$, $f = 10^4 \text{ Гц}$.

Данные рис. 1 иллюстрируют динамику колебаний торцевых поверхностей пластины в безразмерных величинах. Максимальные перемещения точек пластины достигают значения $u_{r, \max} = 10^{-5} \text{ м}$.

Изменение радиальных напряжений σ_r при $r = (R_0 + R_1) / 2$ приведено на рис. 2. Графики окружных напряжений σ_θ на торцевых поверхностях иллюстрирует рис. 3. Максимальные окружные напряжения возникают на поверхности внутреннего торцевого отверстия и превышают

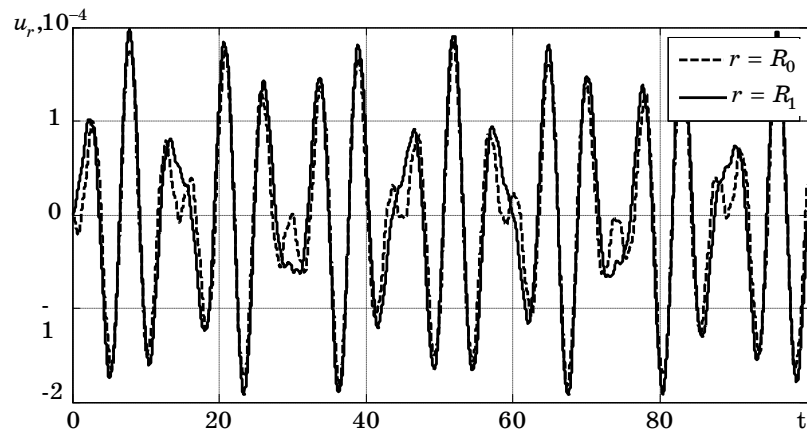


Рис.1

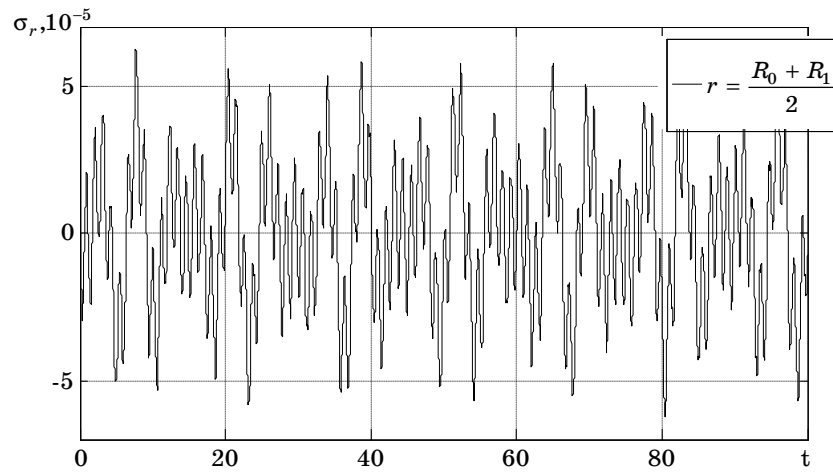


Рис.2

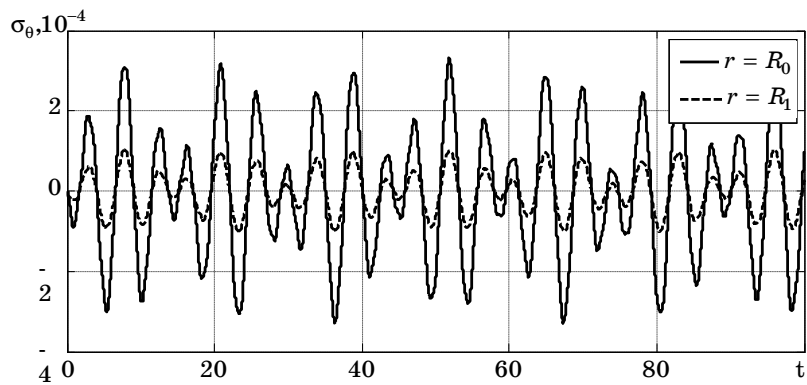


Рис.3

максимальные радиальные напряжения почти в пять раз.

Зависимость колебаний от соотношения радиусов кольцевой пластины показана на рис. 4, на котором приведены графики перемещений внеш-

ней торцевой поверхности при разных значениях внутреннего радиуса. При внешнем радиусе $R_1 = 5 \text{ см}$ приведенные кривые соответствуют пластинам с внутренними радиусами $R_0 = 1 \text{ см}$, $R_0 = 2 \text{ см}$, $R_0 = 3 \text{ см}$ соответственно. Как следует из рис.4, с увеличением внутреннего отверстия ам-

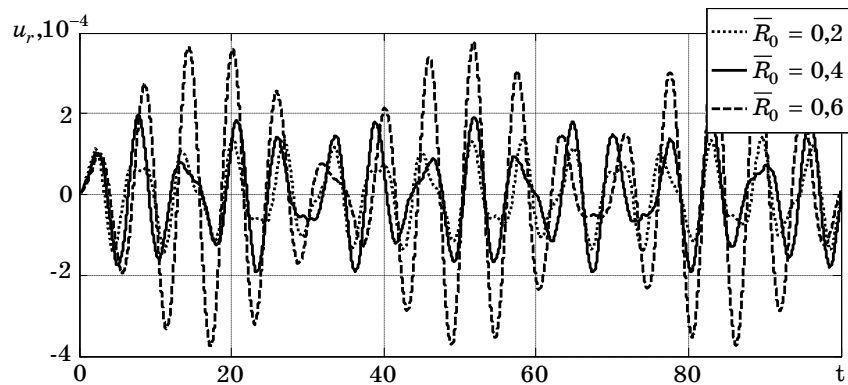


Рис.4

плитуда колебаний внешнего контура значительно возрастает (при $R_0 = 3 \text{ см}$ перемещения практически в два раза выше, чем при других рассмотренных значениях внутреннего радиуса).

Графики перемещений внешнего контура пластины с $R_1 = 5 \text{ см}$, $R_0 = 2 \text{ см}$ при разных значениях безразмерных частот электрического возмущения приведены на рис. 5. При $\bar{\omega} = 1$ перемещения значительно выше, чем при других рассмотренных значениях.

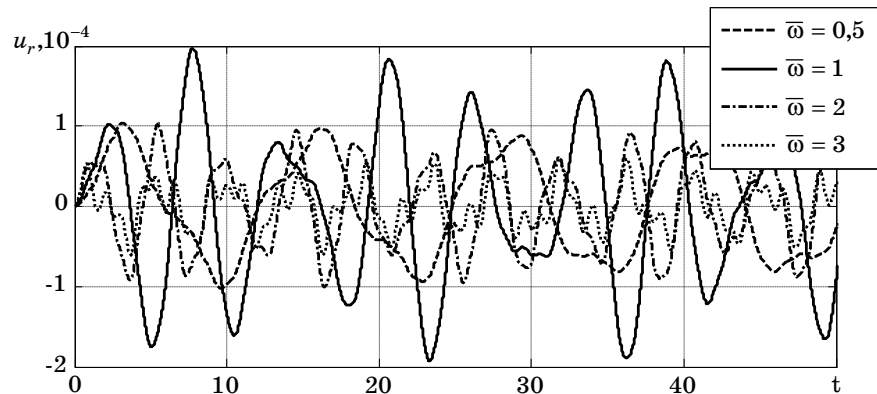


Рис.5

Таким образом, в статье развит алгоритм численного исследования нестационарных колебаний круглых пьезоэлектрических пластин. Проведен анализ колебаний кольцевых пластин со свободными торцевыми поверхностями, установлена зависимость колебаний от частоты мгновенно приложенного гармонического электрического возбуждения и отношения

внешнего и внутреннего радиусов пластины.

РЕЗЮМЕ. Розвинуто чисельний алгоритм аналізу планарних нестационарних осесиметричних коливань п'єзокерамічних поляризованих по товщині круглих пластин при електричному збудженні. Досліджена зміна динамічних характеристик електромеханічного стану кільцевої пластины, встановлено залежність характеру нестационарних коливань від частоти при миттєвому прикладанні електричного потенціалу та відношення зовнішнього і внутрішнього радіусів пластины.

Ключові слова: п'єзоелектричні пластины із круговими границями, нестационарні пружноелектричні коливання, електричне збудження, чисельний метод

SUMMARY. The numeral algorithm of analysis of planar nonstationary axially symmetrical vibrations of piezoceramic of the round plates polarized on a thickness is developed at electric excitation. The change of dynamic descriptions of the electromechanics state of circular plate is investigational, set dependence of character of nonstationary vibrations on frequency at the sudden load of electric potential and relation external and internal radiuses of plate.

Key words: piezoelectrical circular plate, elasticoelectric nonstationary vibration, electric excitation, numerical method

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. – М.: Наука, 1982. – 424 с.
2. Жарий О. Ю., Улитко А. Ф. Введение в механику нестационарных колебаний и волн. К.: Вища шк., 1989. – 184 с.
3. Ляшко И. И., Макаров В. Л., Скоробогатько А. А. Методы вычислений. – К.: Вища шк., 1977. – 408 с.
4. Шульга М. О. Про варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського і початково-крайові задачі електропружності // Доп. НАН України. – 2008. – № 7. – С. 76–81.
5. Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезоэлектрических тел. – К: Наук. думка, 1990. – 228 с.
6. Шульга Н. А., Григорьева Л. О. Сравнительный анализ вынужденных упругоэлектрических толщинных колебаний слоев с искривленными границами // Прикладная механика. – 2011. – Т. 47, № 2. – С. 86–95.
7. Шульга М. О., Карлаш В. Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – К.: Наук. думка, 2008. – 270 с.
8. Mazon W. P. Piezoelectricity, its history and applications // J. Acoust. Soc. Am. – 1981. – Vol. 70, № 6. – P. 1561–1566.
9. Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O. Method of Characteristics in Analysis of the Propagation of Electroelastic Thickness Oscillations in a Piezoceramic Layer under Electric Excitation // Int. Appl. Mech. – 2008. – Vol. 44, № 10. – P. 1093–1097.
10. Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O. Method of Characteristics in Electroelastic Analysis of a Layer Subject to Dynamic Mechanical Loading // Int. Appl. Mech. – 2009. – Vol. 45, № 1. – P. 66–73.
11. Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O. Electroelastic Nonstationary Vibration of a Piezoceramic Layer // Int. Appl. Mech. – 2009. – Vol. 45, № 3. – P. 282–290.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев
Киевский национальный университет строительства и архитектуры*

Поступила 20.04.2011

УДК 539.3

В. Г. КАРНАУХОВ, д-р физ.-мат.наук,
В. И. КОЗЛОВ, д-р физ.-мат.наук,
В. М. СИЧКО, канд. физ.-мат.наук, М. И. ВЕРТЕЛЕЦКИЙ

**ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ
ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ
С НЕЗАВИСЯЩИМИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ СВОЙСТВАМИ
В УТОЧНЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ**

Рассмотрена задача о вынужденных резонансных колебаниях и диссипативном разогреве вязкоупругой цилиндрической панели с шарнирно опертыми торцами при учете поперечных деформаций сдвига. Предполагается, что свойства материала не зависят от температуры. Разработан конечно-элементный метод решения этой задачи. Рассчитаны амплитудно- и температурно-частотные характеристики панели при колебаниях на первой изгибной моде.

Ключевые слова: цилиндрическая панель, резонансные колебания, диссипативный разогрев.

Как конструктивные элементы, цилиндрические панели из вязкоупругих материалов и композитов на их основе широко используются во многих областях современной техники [1, 12, 16]. При резонансных колебаниях в них может иметь место существенное повышение температуры диссипативного разогрева и разрушение из-за достижения ею некоторых критических точек, например, точки плавления или деструкции материала [6]. Из-за присущих вязкоупругим материалам высоких потерь они получили особенно широкое распространение при разработке технологий пассивного демпфирования колебаний элементов конструкций, в том числе и цилиндрических панелей [12, 15]. В связи с этим возрастает потребность в разработке эффективных и достаточно обоснованных моделей, описывающих поведение этих элементов в условиях механического и температурного воздействия. Одним из самых распространенных типов нагружения элементов конструкции из указанных материалов является длительное циклическое нагружение. Этот тип нагружения приводит к необходимости учета связанности механических и тепловых полей, вызванной такой специфической особенностью поведения элементов конструкций из полимерных и композитных материалов при гармоническом нагружении (особенно при резонансных частотах), как существенное повышение температуры в результате гистерезисных потерь в материалах – так называемый диссипативный разогрев. Длительное гармоническое нагружение из-за малой теплопроводности и значительных гистерезисных потерь может привести к резкому повышению температуры в результате рассеяния механической энергии в тепловую. Диссипативный разогрев оказывает существенное влияние на все стороны механического поведения элементов конструкции из полимерных и композитных материалов – на распределение механических полей, на амплитудно-частотные харак-

теристики, на статическую и динамическую устойчивость тонкостенных элементов конструкций, на эффективность пассивного и активного демпфирования колебаний и др.

Для математического описания колебаний и диссипативного разогрева тонкостенных элементов конструкций из вязкоупругих и полимерных материалов используются модели разного уровня строгости с использованием классических гипотез Кирхгоффа-Лява и уточненных гипотез типа Тимошенко. Один из эффективных подходов к учету деформаций сдвига разработан в [13]. Этот вариант уточненной теории и используется в данной работе для расчета таких динамических характеристик, как амплитудно- и температурно-частотная характеристики вязкоупругих оболочек вращения. Свойства материала считаются независимыми от температуры. В этом случае решение исходной нелинейной задачи сводится к последовательному решению трех задач [4, 5]: 1) задачи о вынужденных колебаниях вязкоупругой цилиндрической панели при моногармоническом механическом нагружении; 2) расчету диссипативной функции по известному механическому состоянию тела; 3) решению задачи теплопроводности с известным источником тепла, определяемом диссипативной функцией. Для моделирования механического поведения неупругого материала при моногармонических колебаниях используем концепцию комплексных характеристик монографии [4, 5, 8]. Задачи механики и теплопроводности решаются методом конечных элементов [2, 3, 7, 10, 11, 14]. В качестве примера рассчитаны динамические характеристики цилиндрической однослойной и трехслойной панели.

Постановка задачи. Рассмотрим трехслойную оболочку вращения, составленную из двух внешних слоев одинаковой толщины h_1 с одинаковыми вязкоупругими характеристиками и внутреннего вязкоупругого слоя толщиной h_2 . Оболочка отнесена к ортогональной системе координат (s, θ, z) . В качестве базисной поверхности выбираем срединную поверхность внутреннего слоя. Для сведения трехмерной задачи к двумерной принимаем, что $\sigma_{zz} = 0$. При этом комплексные уравнения состояния для k -го слоя принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ss}^k &= B_{11}^k \varepsilon_{ss}^k + B_{12}^k \varepsilon_{\theta\theta}^k, & \sigma_{\theta\theta}^k &= B_{12}^k \varepsilon_{ss}^k + B_{22}^k \varepsilon_{\theta\theta}^k, \\ \sigma_{s\theta}^k &= 2G_{12}^k \varepsilon_{s\theta}^k, & \sigma_{sz}^k &= 2G_{13}^k \varepsilon_{sz}^k, & \sigma_{\theta z}^k &= 2G_{23}^k \varepsilon_{\theta z}^k, \end{aligned} \quad (1)$$

где для трансверсально-изотропного материала

$$\begin{aligned} B_{11}^k &= \frac{E_{11}^k}{[1 - (\nu^k)^2]}, & B_{12}^k &= \nu^k B_{11}^k, & B_{22}^k &= B_{11}^k, \\ G_{12}^k &= \frac{1 - \nu^k}{2} B_{11}^k, & G_{13}^k &= G_{23}^k. \end{aligned} \quad (2)$$

Входящие в уравнения состояния (1) сдвиговые деформации ε_{sz} , $\varepsilon_{\theta z}$ в пределах каждого слоя аппроксимируются квадратичными функциями

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{sz}^k &= \frac{1}{2} u_1(s, \theta) q^k(z), & \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} v_1(s, \theta) q^k(z), \\
q^1(z) &= \frac{B_{11}^1}{2G_{13}^1} \left(1 - \frac{z^2}{a_0^2} \right), & q^2(z) &= \frac{B_{11}^2}{2G_{13}^2} \left[\frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{z^2}{B_{11}^2} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2} \right) \right], \\
q^3(z) &= \frac{B_{11}^3}{2G_{13}^3} \left(1 - \frac{z^2}{a_3^2} \right),
\end{aligned} \tag{3}$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 – координаты поверхностей слоев оболочки, $u_1(s, \theta)$, $v_1(s, \theta)$ – искомые функции.

Будем рассматривать такие оболочки, для которых можно пренебречь величинами $z/R_1, z/R_2$ по сравнению с 1 (R_1, R_2 – радиусы главных кривизн поверхности отсчета). Тогда выражения для компонент вектора перемещений будут иметь вид

$$u^k = u_0 - \frac{\partial w}{\partial s} z + u_1 f^k(z), \quad v^k = v_0 - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} z + v_1 f^k(z), \quad w^k = w, \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}
f^1(z) &= \frac{B_{11}^1}{2G_{13}^1} \left(z - \frac{z^3}{3a_0^2} \right) + \frac{B_{11}^2}{2G_{13}^2} \left[\frac{2}{3} \frac{a_1^3}{a_0^2} + \frac{B_{11}^1}{B_{11}^2} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2} \right) a_1 \right] - \\
&\quad - \frac{B_{11}^1}{2G_{13}^1} \left(1 - \frac{a_1^2}{3a_0^2} \right) a_1, \\
f^2(z) &= \frac{B_{11}^2}{2G_{13}^2} \left[\frac{a_1^2}{a_0^2} z - \frac{z^3}{3a_0^2} + \frac{B_{11}^1}{B_{11}^2} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2} \right) z \right], \\
f^3(z) &= \frac{B_{11}^3}{2G_{13}^3} \left(z - \frac{z^3}{a_3^2} \right) - \frac{B_{11}^2}{2G_{13}^2} \left[\frac{2}{3} \frac{a_1^3}{a_0^2} + \frac{B_{11}^1}{B_{11}^2} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2} \right) a_1 \right] + \\
&\quad + \frac{B_{11}^1}{2G_{13}^1} \left(1 - \frac{a_1^2}{3a_0^2} \right) a_1;
\end{aligned} \tag{5}$$

u_0, v_0 , – тангенциальные перемещения поверхности $z=0$; w – нормальный прогиб оболочки. При этом следует учесть, что в рассматриваемом случае $a_3 = -a_0, a_2 = -a_1, B_{11}^1 = B_{11}^3, G_{13}^1 = G_{13}^3$. Используя соотношения Коши и зависимости (3), (4), компоненты тензора деформаций k -го слоя оболочки запишем в виде

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ss}^k &= \varepsilon_{ss}^0 + \chi_{ss} z + \delta_{ss} f^k(z), \\
\varepsilon_{\theta\theta}^k &= \varepsilon_{\theta\theta}^0 + \chi_{\theta\theta} z + \delta_{\theta\theta} f^k(z),
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{s\theta}^k = \varepsilon_{s\theta}^0 + \chi_{s\theta} z + \delta_{s\theta} f^k(z). \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{w}{R_1}, \quad \chi_{ss} = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \delta_{ss} = \frac{\partial u_1}{\partial s}, \\ \varepsilon_{\theta\theta}^0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r} u_0 + \frac{w}{R_2}, \\ \chi_{\theta\theta} &= -\left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \right), \quad \delta_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r} u_1, \\ \varepsilon_{s\theta}^0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{\cos \phi}{r} v_0 \right), \\ \chi_{s\theta} &= -\left(\frac{\partial^2 w}{r \partial \theta \partial s} - \frac{\cos \phi}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \\ \delta_{s\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{\cos \phi}{r} v_1 \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (7) в (1) и учитывая (3), (5), запишем уравнения состояния в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ss}^k &= B_{11}^k \left[\varepsilon_{ss}^0 + \chi_{ss} z + \delta_{ss} f^k(z) \right] + B_{12} \left[\varepsilon_{\theta\theta}^0 + \chi_{\theta\theta} z + \delta_{\theta\theta} f^k(z) \right], \\ \sigma_{\theta\theta}^k &= B_{12}^k \left[\varepsilon_{ss}^0 + \chi_{ss} z + \delta_{ss} f^k(z) \right] + B_{11} \left[\varepsilon_{\theta\theta}^0 + \chi_{\theta\theta} z + \delta_{\theta\theta} f^k(z) \right], \\ \sigma_{s\theta}^k &= 2G_{12}^k \left[\varepsilon_{s\theta}^0 + \chi_{s\theta} z + \delta_{s\theta} f^k(z) \right], \\ \sigma_{sz}^k &= 2G_{13}^k \varepsilon_{sz}^k = G_{13}^k u_1 g^k(z), \\ \sigma_{\theta z}^k &= 2G_{13}^k \varepsilon_{\theta z}^k = G_{13}^k v_1 g^k(z) \end{aligned} \quad (8)$$

Решение связанной задачи методом конечных элементов. Для исследования термомеханического поведения оболочки применим метод конечных элементов с использованием вариационной формулировки данной задачи. При этом задача сводится к нахождению стационарных точек двумерного функционала [3, 10, 11]

$$\partial \mathcal{A} = 0 \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \iint_F \left\{ c_{11} \left(\varepsilon_{ss}^0 \right)^2 + 2c_{12} \varepsilon_{ss}^0 \varepsilon_{\theta\theta}^0 + c_{11} \left(\varepsilon_{\theta\theta}^0 \right)^2 + 4c_{44} \left(\varepsilon_{s\theta}^0 \right)^2 + D_{11} \chi_{ss}^2 + \right. \\ &+ 4D_{44} \chi_{s\theta}^2 + 2D_{12} \chi_{ss} \chi_{\theta\theta} + D_{11} \chi_{\theta\theta}^2 + 2D_{11}^{\chi} \chi_{ss} \delta_{ss} + 2D_{12}^{\chi} \chi_{ss} \delta_{\theta\theta} + \\ &+ 2D_{21}^{\chi} \chi_{\theta\theta} \delta_{ss} + 2D_{11}^{\chi} \chi_{\theta\theta} \delta_{\theta\theta} + 8D_{44}^{\chi} \chi_{s\theta} \delta_{s\theta} + D_{11}^{\delta} \delta_{ss}^2 + 2D_{12}^{\delta} \delta_{ss} \delta_{\theta\theta} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + D_{11}^{\delta} \delta_{\theta\theta}^2 + 4D_{44}^{\delta} \delta_{s\theta}^2 + c_{55} u_1^2 + c_{55} v_1^2 - \omega^2 \rho_1 (u_0^2 + v_0^2 + w^2) - \\
& - \omega^2 \rho_2 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \omega^2 \rho_3 (u_1^2 + v_1^2) + \\
& + 2\omega^2 \rho_4 \left(\frac{\partial w}{\partial s} u_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} v_1 \right) - P_z w \} r ds d\theta; \tag{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{ij} &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} B_{ij}^k dz, \quad D_{ij} = \int_{a_{k-1}}^k B_{ij}^k z^2 dz, \\
D_{ij}^{\chi} &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} B_{ij}^k z f^k(z) dz, \quad D_{ij}^{\delta} = \int_{a_{k-1}}^{a_k} B_{ij}^k (f^k(z))^2 dz, \\
c_{44} &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^k dz, \quad D_{44} = \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^k z^2 dz, \\
D_{44}^{\chi} &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^k z f^k(z) dz, \quad D_{44}^{\delta} = \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^k (f^k(z))^2 dz, \\
c_{55} &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{13}^k (q^k(z))^2 dz, \quad \rho_1 = \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^k dz, \\
\rho_2 &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^k z^2 dz, \quad \rho_3 = \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^k z f^k(z) dz, \\
\rho_4 &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^k (f^k(z))^2 dz; \tag{11}
\end{aligned}$$

ρ^k – плотность материалов слоев, P_z – интенсивность поверхностной нагрузки в выражениях. В (11) следует проводить суммирование по индексу k ($k = \overline{1, 3}$).

Для определения температуры диссипативного разогрева используем трехмерное вариационное уравнение энергии [3, 14]

$$\begin{aligned}
& \iiint_V \left[c_T^k \rho^k \frac{\partial T}{\partial t} \delta T + \lambda_T^k \left(\frac{\partial T}{\partial z} \delta \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial s} \delta \frac{\partial T}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \delta \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \right. \\
& \left. + Q_k \delta T \right] r ds d\theta dz + \iint_F \alpha_T (T - T_c) \delta T dF = 0, \tag{12}
\end{aligned}$$

где c_T^k – коэффициент теплоемкости материала слоя оболочки; α_T – коэффициент конвективного теплообмена на поверхности F со средой с температурой T_c ; λ_T^k – коэффициент теплопроводности материала; t – время.

Для сведения трехмерной вариационной задачи

$$\delta I(s, z, \theta, t) = 0 \quad (13)$$

к двумерной примем, что нормальная составляющая q_z теплового потока изменяется по толщине оболочки по линейному закону

$$q_z = q_0 + q_1 z = -\lambda_z^k \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (14)$$

В этом случае температура в k слое оболочки аппроксимируется квадратичным полиномом по толщине координате z :

$$T = p_0 T_1 + p_1 T_2 + p_2 T_3. \quad (15)$$

Здесь

$$p_0 = 1, \quad p_1 = \frac{\bar{\lambda}}{H^2} \int_{a_0}^z \frac{dz}{\lambda^k}, \quad p_2 = \frac{\bar{\lambda}}{H^3} \int_{a_0}^z \frac{z dz}{\lambda^k},$$

$$\bar{\lambda} = \int_{a_0}^{a_1} \lambda^1 dz + \int_{a_1}^{a_2} \lambda^2 dz + \int_{a_2}^{a_3} \lambda^3 dz, \quad (16)$$

H – толщина оболочки.

Решение вариационной задачи (9) найдем методом конечных элементов с использованием двенадцатиузловых изопараметрических четырехугольных элементов с аппроксимацией перемещений и геометрии оболочки полиномами третьей степени в пределах четырехугольника [3, 10, 11]. При этом прогиб в пределах элемента аппроксимируется бикубическими полиномами Эрмита

$$w = \sum_{i=1}^4 L_i w_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+4} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+8} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+12} \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \theta} \right)_i, \quad (17)$$

где $w_i, \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_i, \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)_i, \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \theta} \right)_i$ – амплитудные значения прогиба и его производных в узловых точках, L_K – полиномы Эрмита [3, 10, 11], причем

$$L_1 = \frac{1}{16} (2 - 3\xi + \xi^3) (2 - 3\eta + \eta^3),$$

$$L_2 = \frac{1}{16} (2 + 3\xi - \xi^3) (2 - 3\eta + \eta^3),$$

$$L_3 = \frac{1}{16} (2 + 3\xi - \xi^3) (2 + 3\eta - \eta^3),$$

$$L_4 = \frac{1}{16} (2 - 3\xi + \xi^3) (2 + 3\eta - \eta^3),$$

$$L_5 = \frac{l_{12}}{32} (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) (2 - 3\eta + \eta^3),$$

$$L_6 = \frac{l_{12}}{32} (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) (2 - 3\eta + \eta^3),$$

$$\begin{aligned}
L_7 &= \frac{l_{34}}{32} (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) (2 + 3\eta - \eta^3), \\
L_8 &= \frac{l_{34}}{32} (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) (2 + 3\eta - \eta^3), \\
L_9 &= \frac{l_{14}}{32} (2 - 3\xi + \xi^3) (1 - \eta - \eta^2 + \eta^3), \\
L_{10} &= \frac{l_{23}}{32} (2 + 3\xi - \xi^3) (1 - \eta - \eta^2 + \eta^3), \\
L_{11} &= \frac{l_{23}}{32} (2 + 3\xi - \xi^3) (-1 - \eta - \eta^2 + \eta^3), \\
L_{12} &= \frac{l_{14}}{32} (2 - 3\xi - \xi^3) (-1 - \eta + \eta^2 + \eta^3), \\
L_{13} &= \frac{l_{12}l_{14}}{64} (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) (1 - \eta - \eta^2 + \eta^3), \\
L_{14} &= \frac{l_{12}l_{23}}{64} (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) (1 - \eta - \eta^2 + \eta^3), \\
L_{15} &= \frac{l_{23}l_{34}}{64} (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) (-1 - \eta + \eta^2 + \eta^3), \\
L_{16} &= \frac{l_{14}l_{34}}{64} (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) (-1 - \eta + \eta^2 + \eta^3); \tag{18}
\end{aligned}$$

l_{ij} – расстояние между соответствующими вершинами элементов.

Тангенциальные составляющие перемещений срединной поверхности и сдвиговые деформации оболочки в пределах элемента аппроксимируем кубическими полиномами:

$$u_0 = \sum_{i=1}^{12} N_i u_0^i, \quad v_0 = \sum_{i=1}^{12} N_i v_0^i, \quad u_1 = \sum_{i=1}^{12} N_i u_1^i, \quad v_1 = \sum_{i=1}^{12} N_i v_1^i, \tag{19}$$

в которых

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{32} (1 - \xi)(1 - \eta) [9(\xi^2 + \eta^2) - 10], \\
N_2 &= \frac{1}{32} (1 + \xi)(1 - \eta) [9(\xi^2 + \eta^2) - 10], \\
N_3 &= \frac{1}{32} (1 + \xi)(1 + \eta) [9(\xi^2 + \eta^2) - 10], \\
N_4 &= \frac{1}{32} (1 - \xi)(1 + \eta) [9(\xi^2 + \eta^2) - 10], \\
N_5 &= \frac{9}{32} (1 - \xi^2)(1 - 3\xi)(1 - \eta), \\
N_6 &= \frac{9}{32} (1 - \xi^2)(1 + 3\xi)(1 - \eta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_7 &= \frac{9}{32}(1+\xi)(1-\eta^2)(1-3\eta), \\
N_8 &= \frac{9}{32}(1+\xi)(1-\eta^2)(1+3\eta), \\
N_9 &= \frac{9}{32}(1-\xi^2)(1+3\xi)(1+\eta), \\
N_{10} &= \frac{9}{32}(1-\xi^2)(1-3\xi)(1+\eta), \\
N_{11} &= \frac{9}{32}(1-\xi)(1-\eta^2)(1+3\eta), \\
N_{12} &= \frac{9}{32}(1-\xi)(1-\eta^2)(1-3\eta).
\end{aligned} \tag{20}$$

В качестве глобальной системы координат, в которой объединяются все конечные элементы, используем цилиндрическую систему координат (r, θ, s) . Меридиональная s и осевая x координаты связаны соотношениями $ds = Adx$, $A = \sqrt{1 + (dr/dx)^2}$. В качестве локальной системы координат, в которой определяются аппроксимирующие функции и производится интегрирование, используется нормализованная система координат ξ, η . При этом связь между координатами s, r, θ и координатами ξ, η определяется зависимостями

$$s = \sum_{i=1}^{12} N_i s_i, \quad r = \sum_{i=1}^{12} N_i r_i, \quad \theta = \sum_{i=1}^{12} N_i \theta_i, \tag{21}$$

где s_i, r_i, θ_i – узловые значения координат.

Соотношения (17), (19) показывают, что используемый элемент имеет 64 степени свободы: 8 степеней ($w, \partial w/\partial s, u, v, \partial w/r\partial\theta, \partial^2 w/r\partial s\partial\theta, u_0, v_0, u_0, v_0$) в каждой узловой точке и 4 степени свободы (u_0, v_0, u_0, v_0) в каждом узле, расположенном на сторонах четырехугольника. Представим компоненты механического и электрического нагружения, которые действуют в пределах элемента, в виде разложения

$$P_i = \sum_{i=1}^{12} N_i P_i, \quad V_i = \sum_{i=1}^{12} N_i V_i. \tag{22}$$

Учитывая выражения для перемещений и деформаций (4), (7), из условия стационарности функционала (9) получим комплексную систему линейных алгебраических уравнений относительно тангенциальных перемещений, деформаций сдвига, погиба и его производной

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_j} = \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_j} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_i^s} = \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_i^s} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_1^j} = \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial v_1^j} = 0. \quad (23)$$

При этом дифференцирование по w , w^S , w^θ , $w^{S\theta}$ производится только в угловых точках, а по u_0 , v_0 , u_1 , v_1 – во всех точках элемента. Комплексные коэффициенты системы алгебраических уравнений (23) выражаются через механические и геометрические характеристики оболочки, а правые части определяются путем разложения механической нагрузки по системе аппроксимирующих функций. Такой подход позволяет получить решение линейной задачи для слоистых оболочек вращения как при механическом нагружении.

Двумерное вариационное уравнение энергии решается на той же сетке конечных элементов. При этом производная по времени dT/dt не варьируется и заменяется выражением $dT/dt = T(t + \Delta t) - T(t) / \Delta t$. В дальнейшем используем неявную схему решения уравнения энергии.

Анализ численных результатов. Вычислены амплитудно-частотные (АЧХ) и температурно-частотные (ТЧХ) динамические характеристики однослойной и трехслойной вязкоупругой цилиндрической панели. Панель имеет следующие геометрические размеры и теплофизические свойства материалов слоев: $R = 0,1 \text{ м}$; $h_1 = h_3 = 0,0005 \text{ м}$; $h_2 = 0,009 \text{ м}$; $\rho_1 = \rho_3 = 2700 \text{ кг/м}^3$; $\rho_2 = 929 \text{ кг/м}^3$; $a = b = 0,05 \text{ м}$; модуль упругости внешних слоев $E = 7,3 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; для внутреннего слоя $G' = 794 \cdot 10^6$; $G'' = 73,1 \cdot 10^6 \text{ Па}$; коэффициент теплопроводности обжимающих слоев $0,2 \cdot 10^3 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$; коэффициент теплопроводности внутреннего слоя $0,5 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$.

На рис. 1–4 представлены АЧХ и ТЧХ (амплитудно-частотные (рис. 1, 3) и температурно-частотные (рис. 2, 4) характеристики) цилиндрической панели с шарнирно опертыми торцами в окрестности первого

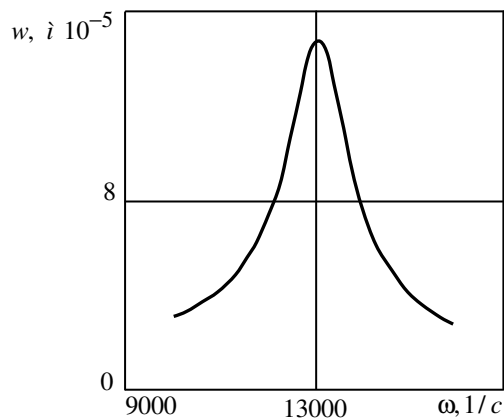


Рис.1

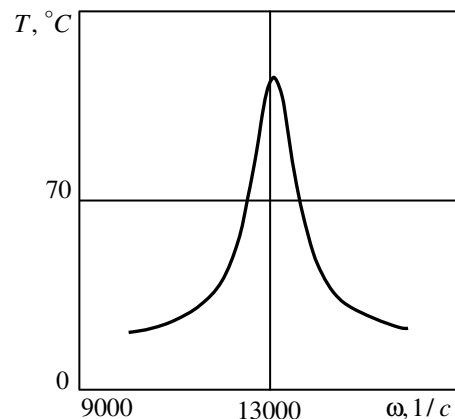


Рис.2

резонанса при $P_0 = 0,13 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

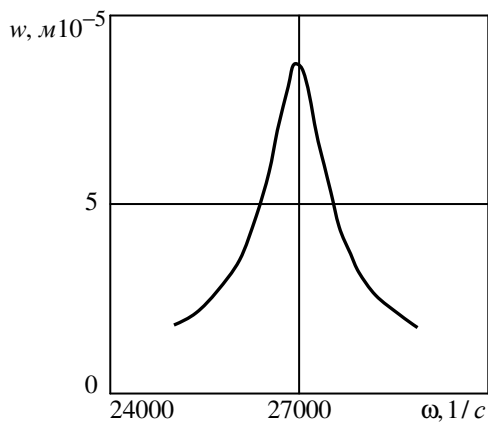


Рис.3

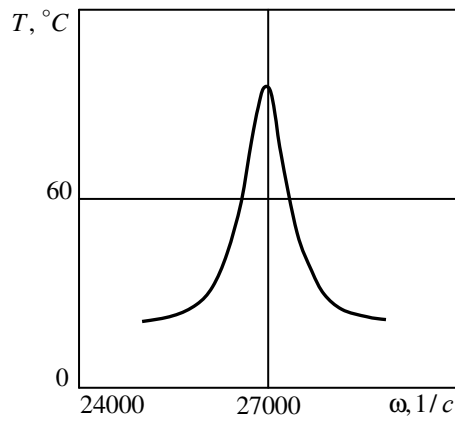


Рис.4

На рис. 1, 2 представлены АЧХ и ТЧХ однослойной цилиндрической панели, в окрестности первого резонанса, а на рис. 3, 4 аналогичные характеристики для трехслойной панели. При этом в первом случае толщина однослойной панели $H = h_1 + h_2 + h_3$. При расчете динамических характеристик трехслойной панели выбирались указанные выше размеры. Из представленных графиков видно, что собственная частота колебаний однослойной панели гораздо ниже собственной частоты трехслойной панели. Объясняется это тем, что отношение жесткости к приведенной массе панели в первом случае существенно меньше соответствующего отношения для трехслойной панели. Из приведенных рисунков также можно заключить, что амплитуда колебаний и температура однослойной панели выше соответствующих динамических характеристик трехслойной панели. Вызвано это специфическим взаимодействием диссипативных, жесткостных и геометрических характеристик рассмотренных однослойных и трехслойных цилиндрических панелей.

РЕЗЮМЕ. Розглянута задача про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів шарнірно опертій в'язкопружної циліндричної панелі з врахуванням поперечних деформацій зсуву. Вважається, що властивості матеріалу не залежать від температури. Розроблено скінченно-елементний метод розв'язування цієї задачі. Розраховані амплітудно- та температурно-частотні характеристики панелі при її коливаннях на першій згинній моді.

Ключові слова: циліндрична панель, резонансні коливання, дисипативний розігрів.

SUMMARY. The problem on the forced harmonic vibrations and dissipative heating of a simply supported viscoelastic cylindrical panel with simply supported with taking into account a transverse shear strain is considered. It is supposed that the properties don't depend on temperature. A finite - element method is developed for a solution of the problem. The amplitude- and temperature characteristics of the panel are calculated under the vibrations on the first bending mode.

Key words: cylindrical panel, resonant vibrations, dissipative heating.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. - М.: Наука, 1974. - 446 с.
2. *Григоренко Я. М., Шевченко Ю. Н., Василенко А. Т. и др.* Численные методы. - К.: А.С.К., 2002. - 448 с. (Механика композитов; в 12-ти томах; т.11).
3. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, 1975. - 541 с.
4. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. - К., Наук. думка. - 1986. - 224 с.
5. *Карнаухов В. Г.* Связанные задачи термовязкоупругости. - К.: Наук. думка. - 1982. - 260 с.
6. *Карнаухов В. Г.* Тепловое разрушение полимерных элементов конструкций при моногармоническом деформировании // Прикладная механика. - 2004. - Т. 40, №6. - С. 30-70.
7. *Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Рассказов А. О., Карнаухова О. В.* Параметрические колебания трехслойной конической пьезооболочки // Механика композитных материалов. - 2003. - Т. 39, № 1. С. 25-38.
8. *Карнаухов В. Г., Михайленко В. В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. - Житомир: 2005. - 428 с.
9. *Коваленко А. Д.* Введение в термоупругость. - К.: Наук. думка, 1970. - 307 с.
10. *Козлов В. И.* Колебания и диссипативный разогрев многослойной оболочки вращения из вязко-упругого материала // Прикладная механика - 1996. - Т. 32, № 6. - с. 82-89.
11. *Козлов В. И., Якименко С. Н.* Термомеханическое поведение вязко-упругих тел вращения при осесимметричном гармоническом деформировании // Прикладная механика. - 1989. - Т. 25, № 5. С. 22-28.
12. Механика композитов: В 12 т., Т.1 -12/Под общей ред. А.Н.Гузя. - К.: А.С.К., 1992-2005.
13. *Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А.* Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. - К.: Вища шк., 1986. -191 с.
14. *Савченко Е. В.* Пассивное демпфирование колебаний композитных конструкций. - Нежин: Аспект -Поліграф, 2006. - 232 с.
15. *Hamid R. Hamidzaden, Reza N. Jazar.* Vibrations of Thick Cylindrical Structural. - New York-Dordrecht-Heidelberg-London: Springer. - 2010.- 201 p.
16. *Hensen J. S., Heppeler G. K.* A Mindlin shell element that satisfies rigid - body requirements // ALAA J. - 1985. - Vol. 22, №2. - P. 288-295.
17. *Jones D. I. G.* Handbook of Viscoelastic Vibrations Damping.-New York: John Wiley and Sons, 2001. - 391 p.
18. *Karnaikhov V. G.* Thermomechanics of coupled fields in passive and piezoactive inelastic bodies under harmonic deformations // Journal of thermal stresses. - 2005. - Vol. 28, № 6-7. - P. 783-815.

*Институт механики НАНУ, г.Киев
Николаевский государственный университет, г. Николаев*

Поступила 05.05.2011

УДК 534.21:537.226.86

В. В. ЛЕВЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук,
Л. П. ЗИНЧУК, канд. физ.-мат. наук,
К. В. МЕДВЕДЕВ, канд. физ.-мат. наук

ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ОБЪЕМНЫЕ ВОЛНЫ СДВИГА В СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКАХ

Решена задача о распространении сдвиговых объемных волн в сегнетоэлектрической сверхрешетке. Получены дисперсионные соотношения для спектра объемных волн в структуре образованной чередованием двух одинаковых слоев, но противоположно поляризованных. Представлены численные результаты для сегнетоэлектрика класса 4mm.

Ключевые слова: сегнетоэлектрик, дисперсионные соотношения, объемные сдвиговые волны, сверхрешетка, уравнения электроупругости

Наличие спонтанной поляризации является отличительной особенностью сегнетоэлектриков. В настоящее время разработаны методики формирования в них идеальных периодических структур [1, 2]. Анализ особенностей распространения волн различной природы в таких искусственных периодических структурах вызывает внимание исследователей благодаря возможности эффективного управления их свойствами в электрических и магнитных полях. Целью настоящей работы является изучение особенностей спектра объемных электроупругих волн сдвига в сегнетоэлектриках класса 4mm.

Постановка задачи и метод решения. Решение задачи о распространении волн в сегнетоэлектриках основано на методах, развитых в теории волн в периодических структурах [3, 6, 7]. При температурах, которые соответствуют условиям эксплуатации изделий, сегнетоэлектрики имеют пьезоэлектрические свойства и волновые процессы в них описываются системой уравнений электроупругости [5].

Распространение упругоэлектрических сдвиговых волн в плоскости $xу$ в линейной теории электроупругости описывается [4, 5] уравнением колебаний относительно механических напряжений $\sigma_{xz}(x, y, t)$, $\sigma_{yz}(x, y, t)$, перемещения $w(x, y, t)$ и уравнением Гаусса относительно компонент вектора электрической индукции

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Для пьезоэлектрических материалов тетрагональной системы класса 4mm (ось симметрии четвертого порядка направлена вдоль оси z) материальные соотношения имеют вид [5]

$$\sigma_{yz} = c_{55} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{51} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \sigma_{xz} = c_{55} \frac{\partial w}{\partial x} + e_{51} \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

$$D_x = -\varepsilon_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x} + e_{51} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad D_y = -\varepsilon_{11} \frac{\partial \phi}{\partial y} + e_{51} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2)$$

В зависимостях (2) учтены формулы Коши для деформаций и градиентное представление вектора напряженности электрического поля через электрический потенциал $\phi(x, y, t)$.

Систему уравнений (1) – (2) можно свести к двум уравнениям

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c_{55^*} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad (3)$$

где функция $\psi = \phi - (e_{51}/\varepsilon_{11})w$ и $c_{55^*} = c_{55} + e_{51}^2/\varepsilon_{11}$.

Рассмотрим сегнетоэлектрик класса 4mm, образованный периодическим повторением вдоль оси x пакета из двух слоев равной толщины h , и предположим, что толщина доменных границ равна нулю. Слои пакета имеют противоположные направления поляризации, что влечет изменение знака электроупругой связи в соседних слоях $e_q = (-1)^q e_{51}$, где q – номер слоя в пакете, $e_{51} > 0$. Остальные физико-механические параметры слоев совпадают.

Решение системы уравнений (3) в каждом из слоев будем искать в виде

$$\begin{aligned} w &= B_{2n+q}^{(1)} \sin \Omega(x - x_{n,q}^*) + B_{2n+q}^{(2)} \cos \Omega(x - x_{n,q}^*), \\ \psi &= D_{2n+q}^{(1)} \operatorname{sh} k(x - x_{n,q}^*) + D_{2n+q}^{(2)} \operatorname{ch} k(x - x_{n,q}^*), \\ x_{n-1,q}^* &< x < x_{n,q}^*, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad q = 1, 2, \end{aligned} \quad (4)$$

где $x_{n,q}^* = 2nh + qh$, $\Omega = (\tilde{k}^2 - k^2)^{1/2}$, $\tilde{k}^2 = \omega^2/\tilde{c}^2$, $\tilde{c}^2 = c_{55^*}/\rho$, k – волновое число, ω – круговая частота. В формулах (4) множитель $\exp(iky - i\omega t)$ опущен.

При совершенном механическом и электрическом контактах на плоскостях раздела слоев пакета выполняются условия непрерывности механического перемещения w и напряжения σ_{xz} , а также электрического потенциала ϕ и нормальной компоненты электрической индукции D_x . Эти условия можно записать следующим образом

$$[w] = 0, \quad [c_{55^*} \partial_x w + e_q \partial_x \psi] = 0, \quad [\partial_x \psi] = 0, \quad [\phi] = 0. \quad (5)$$

Подставив решение (4) в граничные условия (5), исходную задачу сведем к бесконечной системе уравнений относительно неизвестных

$$\bar{C}_i = \operatorname{col}(B_i^{(1)}, B_i^{(2)}, D_i^{(1)}, D_i^{(2)}),$$

$$\begin{aligned}
N(e_1; h)\bar{C}_{2n-1} &= N(e_2; 0)\bar{C}_{2n}, \\
N(e_2; h)\bar{C}_{2n} &= N(e_1; 0)\bar{D}_{2n+1}.
\end{aligned} \tag{6}$$

В системе (6) введены матрицы

$$N(e_q, h) = \begin{bmatrix} \alpha \cos(\theta) & \alpha \sin(\theta) & \beta_q ch(kh) & \beta_q sh(kh) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k\varepsilon_{11} ch(kh) & k\varepsilon_{11} sh(kh) \\ -e_q^* \sin(\theta) & e_q^* \cos(\theta) & -sh(kh) & ch(kh) \end{bmatrix},$$

и обозначения $\alpha = c_{55}^* \Omega$, $\beta_q = ke_q$, $e_q^* = \frac{e_q}{\varepsilon_{11}}$, $\theta = h\Omega$.

Матрицу M преобразования периода структуры находим перемножая матрицы преобразования слоев пакета в виде [3]

$$M = N(e_1, h)N^{-1}(e_1, 0)N(e_2, h)N^{-1}(e_2, 0).$$

Непосредственные вычисления показывают, что $\det M = 1$. Учитывая условие периодичности и выполнив ряд преобразований, получим характеристическое уравнение для матрицы M

$$\chi^4 - (b_0^1 + b_0^2)\chi^3 + (b_0^1 b_0^2 + 2 + K_0)\chi^2 - (b_0^1 + b_0^2)\chi + 1 = 0, \tag{7}$$

где $\chi = \exp(i\xi h)$, $b_0^1 = M^{11} + M^{22}$, $b_0^2 = M^{33} + M^{44}$, ξ – блоховское волновое число.

Такой вид уравнения (7) говорит о существовании в периодической структуре двух зонных спектров со своими блоховскими числами, которые определяются из дисперсионных уравнений

$$\cos(\xi_1 h) = -b_1/2, \quad \cos(\xi_2 h) = -b_2/2, \quad ,$$

где

$$\begin{aligned}
b_j &= -\frac{b_0^1 + b_0^2}{2} + (-1)^j \sqrt{d}, \\
d &= \frac{(b_0^1 + b_0^2)^2}{4} - (b_0^1 b_0^2 + 2 + K_0) + 2, \\
K_0 &= \frac{16e_{51}^2 k}{\varepsilon_{11} c_{55}^* \Omega} \sin(\theta) sh(kh) (\cos(\theta) - ch(kh))^2, \quad j = 1, 2.
\end{aligned}$$

Зоны пропускания для парциальных объемных волн [3,6] определяются из соотношений

$$\text{Im } b_j = 0, \quad |\text{Re } b_j| \leq 2, \tag{8}$$

которые неявно связывают частоту ω и волновое число k . Для существования объемных сдвиговых волн условия (8) должны выполняться хотя бы

при одном значении j .

Величина K_0 определяет связанность акустических и электромагнитных процессов. При $\sin \theta = 0$, или нормальном распространении волны, или отсутствии электромеханической связи уравнение (7) распадается на два уравнения

$$(\chi^2 - b_0^1 \chi + 1) = 0, \quad (\chi^2 - b_0^2 \chi + 1) = 0,$$

что означает отсутствие взаимодействия механической и электрической подсистем.

Анализ численных результатов. Вычисления проводились для кристалла титаната бария $BaTiO_3$ с физико-механическими параметрами, которые приведены в [5]. Полученные расчеты показали, что одна из величин b_j изменяется подобно косинусу (b_1), а вторая знакопостоянна (b_2). На рис.1 приведены зависимости величин b_1 (сплошные линии) и d (точечные линии) от безразмерной частоты $\bar{\omega} = h\omega\sqrt{\rho_0/c_0}$ при безразмерном волновом числе $\bar{k} = kh = 0.01$ ($\rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $c_0 = 10^{10} \text{ Н/м}^2$). Области, где b_1 принимает комплексные значения, на рис. 1 не нанесены.

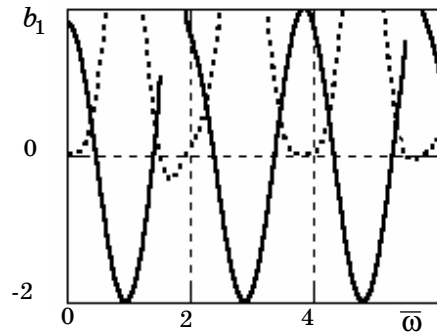


Рис.1

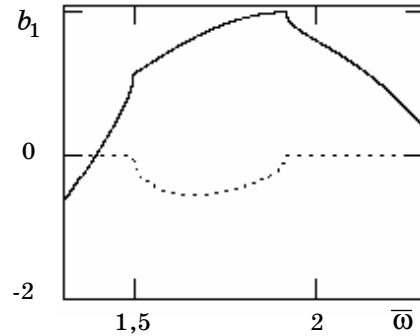


Рис.2

Как показали расчеты, зоны запираения волн локализованы в малой окрестности собственных частот слоя сегнетоэлектрика, где $b_1 \geq 2$ и $\theta \rightarrow \pi$. Вблизи этих же областей зарождаются зоны комплексности корней уравнения (7), где $d \leq 0$. На рис. 2 приведены зависимости действительной (сплошная линия) и мнимой части (точечная линия) величины b_1 от частоты $\bar{\omega}$ для одного из диапазонов. Видно, что точки экстремума $\text{Im } b_1$ расположены ближе к центру соответствующей зоны комплексности. Представленные на графике результаты позволяют сделать вывод о том, что в зонах комплексности волны будут относительно слабо затухающими. При θ стремящихся к $\pi/2 + \pi$ значение b_1 становится близким к -2 . Но, как показали вычисления, для выбранных значений параметров сверхрешетки не существует решения неравенства $b_1 \leq -2$. Это

означает отсутствие зон запираания в окрестности решения уравнения $\cos \theta = 0$.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы. Рассмотренная структура зон запираания для кристалла титаната бария не имеет аналогов в структурах, состоящих из слоев с различными физико-механическими параметрами. Результаты проведенных исследований показывают зонный характер распространения волн сдвига в сегнетоэлектрических сверхрешетках. Зоны запираания объемных волн зарождаются и локализованы в малой окрестности собственных частот волн сдвига в слое сегнетоэлектрика, а их ширина зависит от электрических параметров ϵ_{11} , e_{51} и относительно мала по сравнению с шириной зон пропускания.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу про поширення об'ємних хвиль зсуву в сегнетоелектричній надгратці. Отримані дисперсійні співвідношення для спектру об'ємних хвиль в структурі, що утворена чергуванням двох однакових шарів, але протилежно поляризованих. Представлені чисельні результати для сегнетоелектрика класу $4mm$.

Ключові слова: сегнетоелектрик, дисперсійні співвідношення, об'ємні хвилі зсуву, надгратка, рівняння електропружності

SUMMARY. The problem about propagation of bulk shear waves in a ferroelectric superlattice is considered. Dispersive relations are got for the spectrum of bulk waves in a structure formed by alternation of two identical layers, but oppositely polarized. Numerical results are presented for the ferroelectric of $4mm$ class.

Key words: ferroelectric, dispersive relations, bulk shear waves, superlattice, electroelasticity equations

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Голенищев-Кутузов А. В., Голенищев-Кутузов В. А., Каллимуллин Р. И. – Индустриализированные доменные структуры в электро-магнитоупорядоченных веществах. – М.: Физматгиз, 2003. – 136 с.
2. Смоленский Т. А., Боков В. А., Крайник Н. Н. Сегнетоэлектрики и антисегнетоэлектрики. – М.: Наука, 1971. – 259 с.
3. Шульга Н. А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. - К.: Наук, думка, 1981. – 200 с.
4. Шульга Н. А., Болкисев А. Колебания пьезоэлектрических тел. – К.: Наук. думка, 1990. – 228с.
5. Шульга М. О., Карлаш В. Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – К.: Наук. думка. –2008. – 271с.
6. Shul'ga N. A. Propagation of coupled waves snteracting with an electromagnetic field in periodically inhomogeneous media // Int. Appl. Mech. – 2003. – Vol. 39, N 10. – P. 1146–1172.
7. Shul'ga N. A. Theory of dynamic processes in mechanical systems and materials of regular structure // Int. Appl. Mech. –2009. – Vol. 45, N 12. – P. 1301–1330.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 05.05.2011

УДК 539.3

Е. В. АЛТУХОВ, канд. физ.-мат. наук, А. В. ВИННИК

СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

В трехмерной постановке методом однородных решений получено точное аналитическое решение задачи об упругом равновесии ортотропной прямоугольной пластины. На плоских гранях пластины имеют место смешанные граничные условия плоского торца. Две противоположные стороны пластины связаны с диафрагмой, а на оставшихся сторонах заданы нормальные усилия.

Ключевые слова: ортотропная прямоугольная пластина, смешанные граничные условия, однородные решения, точное аналитическое решение.

Построение точных аналитических решений трехмерных задач статики анизотропного тела представляет актуальное направление исследований в области механики деформируемого твердого тела [7, 8]. В обзорных статьях [2, 7–9] систематизированы результаты научных исследований в данной области. Важную роль в развитии аналитических методов решения краевых задач теории упругости анизотропных пластин сыграли однородные решения [1, 5, 6, 11]. В статье [11] получены однородные решения уравнений упругого равновесия ортотропных пластин, на плоских гранях которых нормальная составляющая вектора перемещений и касательные напряжения равны нулю. На основе результатов [11] в данной статье получено точное решение задачи о напряженном состоянии в прямоугольной пластине в случае действия постоянной по толщине нагрузки.

Постановка и решение задачи. Рассмотрим прямоугольную ортотропную пластинку, занимающую в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ область

$$V = \{|x_1| \leq a, |x_2| \leq b, |x_3| \leq h\}.$$

На плоских гранях пластины и на боковых поверхностях имеют место граничные условия:

$$u_3(x_1, x_2, \pm h) = 0, \quad \sigma_{j3}(x_1, x_2, \pm h) = 0 \quad (j = \overline{1,2}); \quad (1)$$

$$u_1(x_1, \pm b, x_3) = 0, \quad u_3(x_1, \pm b, x_3) = 0, \quad \sigma_{22}(x_1, \pm b, x_3) = 0; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(\pm a, x_2, x_3) &= Q \cdot f(x_2, x_3), \\ \sigma_{12}(\pm a, x_2, x_3) &= \sigma_{13}(\pm a, x_2, x_3) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где Q – произвольная постоянная.

Уравнения равновесия в перемещениях в данном случае имеют вид [3, 4]

$$(L_{11} + A_{55}\partial_3^2)u_1 + L_{12}u_2 + L_{13}\partial_3u_3 = 0,$$

$$\begin{aligned}
L_{21}u_1 + (L_{22} + A_{44}\partial_3^2)u_2 + L_{23}\partial_3u_3 &= 0, \\
L_{31}\partial_3u_1 + L_{32}\partial_3u_2 + (L_{33} + A_{33}\partial_3^2)u_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
L_{11} &= A_{11}\partial_1^2 + A_{66}\partial_2^2, & L_{12} &= L_{21} = (A_{12} + A_{66})\partial_1\partial_2, \\
L_{13} &= L_{31} = (A_{13} + A_{55})\partial_1, & L_{22} &= A_{66}\partial_1^2 + A_{22}\partial_2^2, \\
L_{23} &= L_{32} = (A_{23} + A_{44})\partial_2, & L_{33} &= A_{55}\partial_1^2 + A_{44}\partial_2^2, & \partial_i &= \partial/\partial x_i;
\end{aligned}$$

A_{ij} – модули упругости.

Задача определения напряженно-деформированного состояния рассматриваемой пластинки сводится к решению системы уравнений равновесия (4), удовлетворяющих граничным условиям (1)–(3).

Для построения однородных решений уравнений (4), удовлетворяющих граничным условиям (1) в случае симметричного относительно срединной плоскости пластины деформирования компоненты вектора перемещения представим в виде [8]

$$\begin{aligned}
u_i &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{ik}(x_1, x_2) \cos(\delta_k x_3) \quad (i = 1, 2); \\
u_3 &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{3k}(x_1, x_2) \sin(\delta_k x_3), \quad \delta_k = k\pi/h.
\end{aligned}$$

При этом граничные условия (1) будут удовлетворены, а из уравнений (4) при $k = 0$ следует, что

$$L_{11}u_{10} + L_{12}u_{20} = 0, \quad L_{21}u_{10} + L_{22}u_{20} = 0. \tag{5}$$

Для каждого $k \geq 1$ имеем систему 3 уравнений в частных производных

$$\sum_{n=1}^3 D_{in}^{(k)} u_{nk} = 0 \quad (i = \overline{1, 3}),$$

в которых

$$\begin{aligned}
D_{11}^{(k)} &= L_{11} - \delta_k^2 A_{55}; & D_{12}^{(k)} &= L_{12}; & D_{13}^{(k)} &= \delta_k L_{13}; \\
D_{21}^{(k)} &= L_{12}; & D_{22}^{(k)} &= L_{22} - \delta_k^2 A_{44}; & D_{23}^{(k)} &= \delta_k L_{23}; \\
D_{31}^{(k)} &= -\delta_k L_{13}; & D_{32}^{(k)} &= -\delta_k L_{23}; & D_{33}^{(k)} &= L_{33} - \delta_k^2 A_{33}.
\end{aligned}$$

Если нагрузка по толщине не изменяется, то граничные условия (2), (3) примут вид

$$u_{10}(x_1, \pm b) = 0, \quad \sigma_{22}(x_1, \pm b) = 0; \tag{6}$$

$$\sigma_{11}(\pm a, x_2) = Q \cdot f(x_2), \quad \sigma_{12}(\pm a, x_2) = 0; \tag{7}$$

а уравнения равновесия (4) – вид (5).

Для построения однородных решений уравнений (5), удовлетворяющих граничным условиям (6), компоненты вектора перемещения представим в виде

$$u_{10}(x_1, x_2) = e^{\lambda x_1} f_{10}(x_2), \quad u_{20}(x_1, x_2) = e^{\lambda x_1} f_{20}(x_2), \quad (8)$$

где λ – параметр разделения переменных.

После подстановки выражений (8) в уравнения (5), (6) и уравнения обобщенного закона Гука получим соотношения для характеристик напряженно-деформированного состояния:

$$\begin{aligned} u_{10}^+ &= 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 H_{jp}^+ \operatorname{ch} \left(\frac{\pi(2p-1)}{2bs_j} x_1 \right) \cos \left(\frac{\pi(2p-1)}{2b} x_2 \right), \\ u_{10}^- &= 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 H_{jp}^- \operatorname{sh} \left(\frac{\pi p}{bs_j} x_1 \right) \sin \left(\frac{\pi p}{b} x_2 \right), \\ u_{20}^+ &= 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 H_{jp}^+ P_{jp} \operatorname{sh} \left(\frac{\pi(2p-1)}{2bs_j} x_1 \right) \sin \left(\frac{\pi(2p-1)}{2b} x_2 \right), \\ u_{20}^- &= C_1 x_1 - 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 H_{jp}^- P_{jp} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi p}{bs_j} x_1 \right) \cos \left(\frac{\pi p}{b} x_2 \right), \\ \sigma_{11}^+ &= \frac{\pi}{b} \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 (2p-1) H_{jp}^+ B_j^+ \operatorname{sh} \left(\frac{\pi(2p-1)}{2bs_j} x_1 \right) \cos \left(\frac{\pi(2p-1)}{2b} x_2 \right), \\ \sigma_{11}^- &= \frac{2\pi}{b} \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 p H_{jp}^- B_j^- \operatorname{ch} \left(\frac{\pi p}{bs_j} x_1 \right) \sin \left(\frac{\pi p}{b} x_2 \right), \\ \sigma_{22}^+ &= \frac{\pi}{b} \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 (2p-1) H_{jp}^+ D_j^+ \operatorname{sh} \left(\frac{\pi(2p-1)}{2bs_j} x_1 \right) \cos \left(\frac{\pi(2p-1)}{2b} x_2 \right), \\ \sigma_{22}^- &= \frac{2\pi}{b} \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 p H_{jp}^- D_j^- \operatorname{ch} \left(\frac{\pi p}{bs_j} x_1 \right) \sin \left(\frac{\pi p}{b} x_2 \right), \\ \sigma_{33}^+ &= \frac{\pi}{b} \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 (2p-1) H_{jp}^+ E_j^+ \operatorname{sh} \left(\frac{\pi(2p-1)}{2bs_j} x_1 \right) \cos \left(\frac{\pi(2p-1)}{2b} x_2 \right), \\ \sigma_{33}^- &= \frac{2\pi}{b} \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 p H_{jp}^- E_j^- \operatorname{ch} \left(\frac{\pi p}{bs_j} x_1 \right) \sin \left(\frac{\pi p}{b} x_2 \right), \\ \sigma_{12}^+ &= -\frac{A_{66}\pi}{b} \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 (2p-1) H_{jp}^+ K_j^+ \operatorname{ch} \left(\frac{\pi(2p-1)}{2bs_j} x_1 \right) \sin \left(\frac{\pi(2p-1)}{2b} x_2 \right), \\ \sigma_{12}^- &= A_{66} C_1 + \frac{2A_{66}\pi}{b} \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 p H_{jp}^- K_j^- \operatorname{sh} \left(\frac{\pi p}{bs_j} x_1 \right) \cos \left(\frac{\pi p}{b} x_2 \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
B_j^\pm &= (A_{11}/s_j \pm A_{12}P_j), & D_j^\pm &= (A_{12}/s_j \pm A_{22}P_j), \\
E_j^\pm &= (A_{13}/s_j \pm A_{23}P_j), & K_j^\pm &= (1 \mp P_j/s_j), \\
P_m &= \frac{(A_{66} + A_{12})s_m}{A_{66} - A_{22}(s_m)^2}, & s_{1,2} &= \sqrt{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - b_2}}, \\
b_1 &= (A_{11}A_{22} - 2A_{12}A_{66} - A_{12}^2)/(2A_{22}A_{66}), & b_2 &= A_{11}/A_{22}.
\end{aligned}$$

Знаки «+» и «-» соответствуют случаям симметричного и кососимметричного относительно оси x_2 деформирования пластины.

Подставляя выражения σ_{11} , σ_{12} по формулам (9) в граничные условия (7) и представляя $f(x_2)$ в виде ряда Фурье через систему ортогональных функций $\left\{ \begin{array}{l} \cos(\gamma_p^\pm x_2), \quad \sin(\gamma_p^\pm x_2), \quad \gamma_p^+ = \frac{\pi(2p-1)}{2b}, \quad \gamma_p^- = \frac{\pi p}{b}, \\ p = 1, 2, \dots \end{array} \right\}$, приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно H_{jp} ($p = 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned}
H_{1p}^+ K_1^+ \operatorname{ch} \left(\frac{\gamma_p^+ a}{s_1} \right) + H_{2p}^+ K_2^+ \operatorname{ch} \left(\frac{\gamma_p^+ a}{s_2} \right) &= 0, \\
H_{1p}^+ B_1^+ \operatorname{sh} \left(\frac{\gamma_p^+ a}{s_1} \right) + H_{2p}^+ B_2^+ \operatorname{sh} \left(\frac{\gamma_p^+ a}{s_2} \right) &= \frac{\alpha_p^+ Q}{2\gamma_p^+}; \\
H_{1p}^- K_1^- \operatorname{sh} \left(\frac{\gamma_p^- a}{s_1} \right) + H_{2p}^- K_2^- \operatorname{sh} \left(\frac{\gamma_p^- a}{s_2} \right) &= 0, \\
H_{1p}^- B_1^- \operatorname{ch} \left(\frac{\gamma_p^- a}{s_1} \right) + H_{2p}^- B_2^- \operatorname{ch} \left(\frac{\gamma_p^- a}{s_2} \right) &= \frac{\alpha_p^- Q}{2\gamma_p^-}, \tag{10}
\end{aligned}$$

где $\alpha_p^+ = \frac{1}{b} \int_{-b}^b f(x_2) \cos(\gamma_p^+ x_2) dx_2$, $\alpha_p^- = \frac{1}{b} \int_{-b}^b f(x_2) \sin(\gamma_p^- x_2) dx_2$.

Решение системы (10) имеет вид

$$\begin{aligned}
H_{1p}^+ &= \frac{1}{\Delta_p^+} \frac{\alpha_p^+}{2\gamma_p^+} K_2^+ \operatorname{ch} \left(\frac{\gamma_p^+ a}{s_2} \right), & H_{2p}^+ &= -\frac{1}{\Delta_p^+} \frac{\alpha_p^+}{2\gamma_p^+} K_1^+ \operatorname{ch} \left(\frac{\gamma_p^+ a}{s_1} \right), \\
H_{1p}^- &= \frac{1}{\Delta_p^-} \frac{\alpha_p^-}{2\gamma_p^-} K_2^- \operatorname{sh} \left(\frac{\gamma_p^- a}{s_2} \right), & H_{2p}^- &= -\frac{1}{\Delta_p^-} \frac{\alpha_p^-}{2\gamma_p^-} K_1^- \operatorname{sh} \left(\frac{\gamma_p^- a}{s_1} \right). \tag{11}
\end{aligned}$$

Здесь

$$\Delta_p^+ = B_1^+ \operatorname{sh} \left(\frac{\gamma_p^+ a}{s_1} \right) K_2^+ \operatorname{ch} \left(\frac{\gamma_p^+ a}{s_2} \right) - B_2^+ \operatorname{sh} \left(\frac{\gamma_p^+ a}{s_2} \right) K_1^+ \operatorname{ch} \left(\frac{\gamma_p^+ a}{s_1} \right),$$

$$\Delta_p^- = B_1^- \operatorname{ch} \left(\frac{\gamma_p^- a}{s_1} \right) K_2^- \operatorname{sh} \left(\frac{\gamma_p^- a}{s_2} \right) - B_2^- \operatorname{ch} \left(\frac{\gamma_p^- a}{s_2} \right) K_1^- \operatorname{sh} \left(\frac{\gamma_p^- a}{s_1} \right).$$

Таким образом, получено точное аналитическое решение задачи (1), (2), (3).

Результаты численных исследований. Численные исследования проводились для нагрузок на сторонах пластины в виде $\sigma_{11} = q f(x_2, x_3)$, когда $f(x_2) = \cos(x_2 \pi / b) + 1$ (задача А) или $f(x_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2b} x_2\right)$ (задача В). В

случае задачи В полученное решение является точным и имеет вид (11). Для задачи А точность решения контролировалась проверкой граничных условий. Относительное отклонение полученных значений напряжений σ_{11} от заданных при количестве слагаемых в рядах не более 10 не превышало величины 0,001. Обе задачи соответствуют симметричному деформированию.

Расчеты напряженного состояния пластины были проведены для материалов, технические упругие постоянные которых представлены в таблице. Здесь значения модулей упругости и модулей сдвига отнесены к

Материалы	Постоянные							
	E_1/E	E_2/E	E_3/E	G_{12}/E	ν_{12}	ν_{23}	ν_{31}	s_1/s_2
M_1	4,292	1,387	1,047	0,285	0,154	0,604	0,061	10,910
M_2	4,552	4,574	8,755	1,330	0,634	0,350	0,320	1,518
M_3	4,544	4,574	8,755	1,397	0,634	0,350	0,320	1,011

величине $E = 10^4 \text{ МПа}$, M_1 (пентаборат калия, [10]) и M_2 (серноокислый стронций или целестит, [10]) – ортотропные материалы, а M_3 – псевдоортотропный материал, смоделированный на основе M_2 таким образом, чтобы по своим свойствам быть близким к изотропному материалу (об этом свидетельствует отношение s_1/s_2 , примерно равное единице). Ниже приведены некоторые из полученных результатов, причем, если другое не оговорено, то они относятся к задаче А. Во всех задачах считалось, что сторона $a = 1$.

На рис. 1, 2 показаны изменения напряжений σ_{11} и $-\sigma_{12}$ в области квадратной пластинки ($a = b = 1$) из материала M_1 . При этом на рис.1 отражена зависимость характеристик от переменной x_2 в сечениях $x_1 = 0,75$ (кривая 1 для σ_{11} и кривая 3 для $-\sigma_{12}$) и $x_1 = 0,5$ (кривая 2

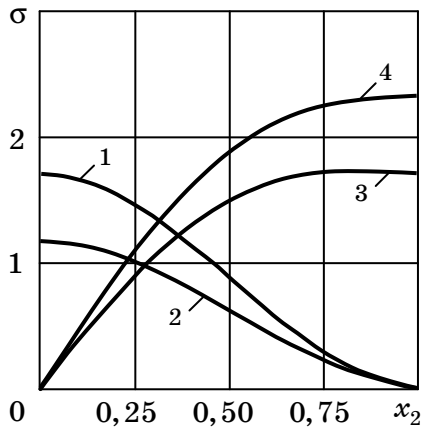


Рис.1

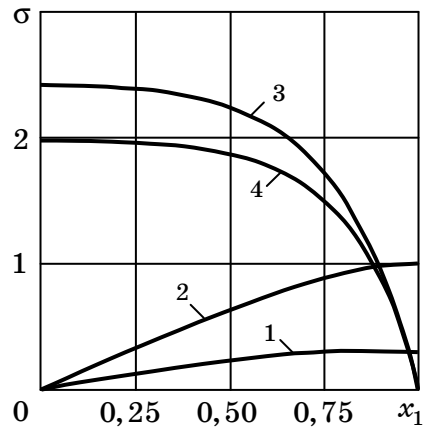


Рис.2

для σ_{11} и кривая 4 для $-\sigma_{12}$), а на рис.2 — от x_1 в соответствующих сечениях x_2 и с соответствующими кривыми. Следует отметить, что при отходе от границы $x_1 = 1$ в область происходит затухание σ_{11} и рост σ_{12} . В свою очередь, при отходе от границы $x_2 = 1$ в область происходит рост σ_{11} и затухание σ_{12} .

На рис. 3 изображены изменения напряжений σ_{22} и σ_{33} на границе $x_1 = 1$ квадратной пластинки. Кривые 1 и 3 соответствуют зависимостям σ_{22} и σ_{33} от переменной x_2 для ортотропного материала M_1 , а кривые 2 и 4 — для псевдоортотропного материала M_3 . Как видно из рис.3, напряжения σ_{22} и σ_{33} достигают своего максимального значения в точке $x_2 = 0$ и минимального — в точке $x_2 = 1$.

На рис. 4 для прямоугольной пластинки приведена зависимость на-

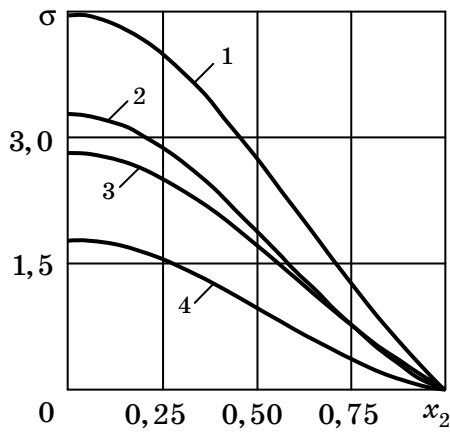


Рис.3

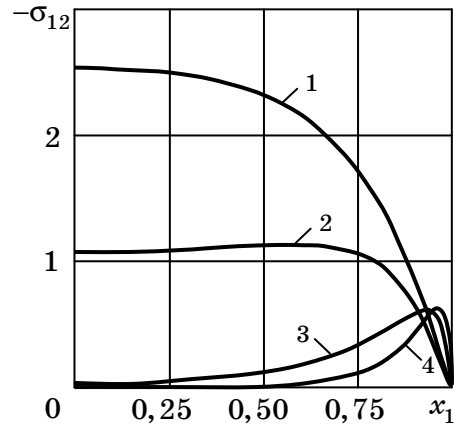


Рис.4

пряжения $-\sigma_{12}$ от переменной x_1 на границе $x_2 = b$ пластины из материала M_1 . При этом кривые 1-4 соответствуют значениям величины b , равным 1; 0,5; 0,1; 0,05. Следует отметить, что при уменьшении значениям величины b происходит концентрация напряжения σ_{12} около точки $x_1 = 1$.

Сравнение численных результатов распределения напряжений σ_{22} и σ_{33} на границе $x_1 = 1$ квадратной пластинки из материала M_1 задачи A и C показано на рис.5. Под задачей C понимается задача из работы [1], где расчеты для функции $f(x_2) = \cos(x_2\pi/b)$ преобразованы для нагрузки (12). Кривые 1, 3 соответствуют σ_{22} , σ_{33} задачи A , а кривые 2, 4 — задачи C .

На рис.6 для квадратной пластинки из M_1 изображено сравнение численных результатов задачи A и B . Подобно рис.5, кривые 1, 3 соответствуют поведению напряжений σ_{22} , σ_{33} на границе $x_1 = 1$ для задачи A , а кривые 2, 4 — для задачи B . Приведенные на рис.5 и рис.6 данные свиде-

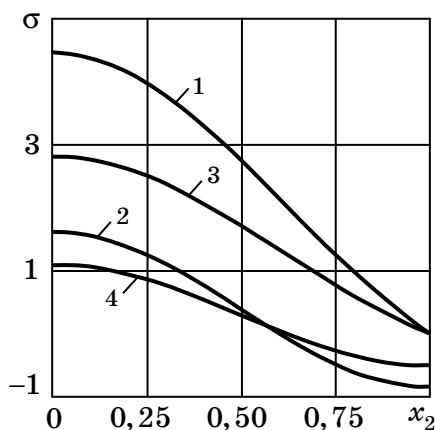


Рис.5

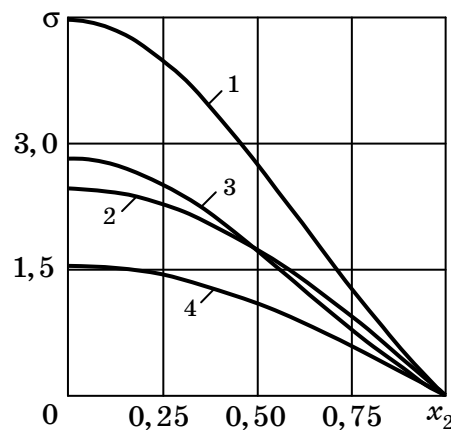


Рис.6

тельствуют о том, что своего максимального значения напряжения σ_{22} и σ_{33} достигают в точке $x_2 = 0$, минимального — в точке $x_2 = 1$.

РЕЗЮМЕ. У тривимірній постановці розглянуто задачу про пружну рівновагу ортотропної прямокутної пластини. На плоских гранях пластини мають місце змішані граничні умови плоского торця. Дві протилежні сторони пластини пов'язано з діафрагмою, а на сторонах, що залишилися, задані нормальні зусилля. Методом однорідних рішень отримано точне аналітичне рішення задачі.

Ключові слова: ортотропна прямокутна пластинка, змішані граничні умови, однорідні розв'язки, точний аналітичний розв'язок.

SUMMARY. A problem of the elastic equilibrium of orthotropic rectangular plate is considered in the three-dimensional formulation. On plane edges of the plate take place the mixed boundary conditions of plane butt-end area. Two opposite sides of plate are related to the dia-

phragm, and on remaining sides normal efforts are set. The exact analytical solution of the problem is obtained by the method of homogeneous solutions.

Key words: orthotropic rectangular plate, mixed boundary conditions, homogeneous solutions, exact analytical solution.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алтухов Е. В., Винник А. В. Напряженное состояние ортотропной прямоугольной пластины // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2010. – № 2. – С. 29-37.
2. Космодамианский А. С. Концентрация внутренней энергии в многосвязных телах // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38, № 4. – С. 21-48.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
4. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
5. Лурье С. А. Изгиб прямоугольной ортотропной пластинки, заземленной по контуру // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – № 1. – С. 159-168.
6. Лурье С. А. Метод однородных решений в задачах о плоском напряженном состоянии и изгибе ортотропных пластин // Изв. АН Арм. ССР. – 1984. – Т. 37, № 6. – С. 27-38.
7. Немиш Ю. Н. Развитие аналитических методов в трехмерных задачах статики анизотропных тел (обзор) // Прикладная механика. – 2000. – Т. 36, № 2. – С. 3-38.
8. Немиш Ю. Н., Хома И. Ю. Напряженное состояние не тонких оболочек и пластин. Трехмерная теория (обзор) // Прикладная механика. – 1991. – Т. 27, № 11. – С. 3-27.
9. Подильчук Ю. Н. Точные аналитические решения пространственных граничных задач статики трансверсально-изотропного тела в канонической форме (обзор) // Прикладная механика. – 1997. – Т. 33, № 10. – С. 3-30.
10. Хантингтон Г. Упругие постоянные кристаллов // Успехи Физических Наук. – 1961. – Вып. 3. – С. 461-520.
11. Altukhov E. V., Neskorodev R. N. Solving three-dimensional static problems for orthotropic plates with sliding edge conditions // Int. App. Mech. – 2008. – Vol. 44, № 8. – P. 927-937.

Донецкий национальный университет

Поступила 17.04.2011

УДК 539.3

Н. П. СЕМЕНЮК, д-р. техн. наук,
Н. Б. ЖУКОВА, канд. физ.-мат. наук,
Ю. Я. ДУШЕК, канд. физ.-мат. наук

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РАСЧЕТУ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Предложен подход определения критических нагрузок и форм потери устойчивости оболочек, в основу которого положено решение однородной задачи как частного случая неоднородной. Эффективность предложенного алгоритма показана на примере расчета волнообразной оболочки, меридиан которой образован сопряженными дугами окружностей.

Ключевые слова: оболочки вращения, критические нагрузки, формы потери устойчивости, нелинейная теория оболочек, метод дискретной ортогонализации, неоднородная краевая задача

К настоящему времени разработаны многочисленные алгоритмы решения задач об устойчивости оболочек из традиционных конструкционных материалов и композитов [2, 3, 7]. Заключительным этапом большинства из этих алгоритмов является определение наименьшего собственного числа матрицы однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов аппроксимации разрешающих функций либо определение значений этих функций в дискретном наборе точек поверхности оболочки. После этого, при необходимости, находится решение исходной задачи, позволяющее получить представление о форме выпучивания оболочки. Так как система алгебраических уравнений однородна, то одна из констант полагается известной, а остальные находятся с точностью до принятого произвольного значения. Такой подход содержит недостаток, заключающийся в том, что априори неизвестно, какую из констант считать заданной. От этого выбора зависит обусловленность матрицы и, следовательно, точность решения.

Ниже предлагается подход к определению критических нагрузок и форм потери устойчивости, лишенный указанного недостатка. В его основу положена идея о равноправности всех неизвестных, включая параметр нагрузки [5], а также решение однородной задачи как частного случая неоднородной.

Постановка задачи. При разработке расчетной методики воспользуемся вариантом соотношений нелинейной теории слоистых анизотропных оболочек, предложенным в работе [8]. Из условия стационарности смешанного функционала имеем следующую разрешающую систему дифференциальных уравнений [8]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}(u) - A_{11}T_{11} - A_{12}T_{12} - A_{13}M_{11} + d_{11}\varepsilon_{22} + d_{12}k_{22} + d_{13}k_{12} &= 0, \\ \varepsilon_{12}(u) - A_{12}T_{11} - A_{22}T_{12} - A_{23}M_{11} + d_{21}\varepsilon_{22} + d_{22}k_{22} + d_{23}k_{12} &= 0, \\ k_{11}(u) - A_{13}T_{11} - A_{23}T_{12} - A_{33}M_{11} + d_{31}\varepsilon_{22} + d_{32}k_{22} + d_{33}k_{12} &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \theta_1(u) + \theta = 0, \\
& \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{21}^*}{\partial \phi} + a_1(T_{12}^* + T_{21}^*) + a_2(T_{11} - T_{22}) - \frac{1}{R_1} T_{13}^* + q_1 = 0, \\
& \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{12}^*}{\partial x} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{22}^*}{\partial \phi} + a_2(T_{12}^* + T_{21}^*) - a_1(T_{11} - T_{22}) - \frac{1}{R_2} T_{23}^* + q_1 = 0, \\
& \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{13}^*}{\partial x} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{23}^*}{\partial \phi} + a_2 T_{13}^* + a_1 T_{23}^* + \frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{23}}{R_2} + q_3 = 0, \\
& \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{12}}{\partial \phi} + 2a_1 M_{12} + a_2(M_{11} - M_{22}) - T_{13} = 0, \tag{1}
\end{aligned}$$

где A_{ij} и d_{ij} – коэффициенты, вычисляемые через жесткостные параметры соотношений обобщенного закона Гука [1, 2]; T_{ij}^* – проекции усилий на направления осей до деформации, для которых имеют место формулы

$$\begin{aligned}
T_{12}^* &= T_{12} + T_{11}\omega_1 - \frac{2}{R_2} M_{12}, & T_{21}^* &= T_{12} + T_{22}\omega_2, \\
T_{13}^* &= T_{13} + T_{11}\theta_1 + T_{12}\theta_2, \\
T_{23}^* &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \phi} - a_1(M_{11} - M_{22}) + 2a_2 M_{12} + T_{12}\theta_1 + T_{22}\theta_2. \tag{2}
\end{aligned}$$

Разрешающая система дифференциальных уравнений (1) в частных производных после разделения переменных представляется как нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Для ее решения воспользуемся методом дискретной ортогонализации [4].

Граничные условия, которые также вытекают из вариационного принципа [8], формулируются относительно четырех функций, взятых по одной из четырех пар:

$$(T_{11}, w), \quad (T_{12}^*, v), \quad (T_{13}^*, w), \quad (M_{11}, \theta). \tag{3}$$

Расчет критических нагрузок и форм потери устойчивости. Пусть на оболочку действует равномерное осесимметричное давление q_3 . Тогда докритическое состояние оболочки вращения при независимых от окружной координаты ϕ жесткостях и граничных условиях будет также осесимметричным. Нелинейные уравнения (1) сохраняют свой вид, но частные производные по координате x становятся обыкновенными, а производные по координате ϕ следует положить равными нулю. Решение осесимметричной краевой задачи после ее линеаризации находится численным методом дискретной ортогонализации [4]. В частности, применение этого метода не ограничивается нагрузками, меньшими предельных критических значений. Показано [10], что при движении по траектории нагружения в рамках инкрементальной процедуры прохождение регулярных и предельных точек осуществляется по единому алгоритму. Если принять во внимание это обстоятельство, то оказывается, что при расчете

критических нагрузок, соответствующих явлению бифуркации, нет необходимости в применении критерия Эйлера о существовании смежных форм равновесия при одной и той же нагрузке. Вместо решения однородной краевой задачи, которая является следствием применения критерия Эйлера, для определения нагрузок бифуркации будем искать решение неоднородной краевой задачи с неизвестным параметром нагружения.

Является ли состояние оболочки устойчивым после достижения нагрузкой некоторого значения q_0 можно проверить, приложив малое неосесимметричное давление $\delta q \cos n\phi$. Амплитуда δq полагается неизвестной, но достаточно малой, чтобы реакция оболочки на эту нагрузку была линейной. Разрешающие функции в возмущенном состоянии будут равны сумме их значений в исходном состоянии $(T_{1,c}, \theta_{1,c}, \dots)$ и сумме малых приращений в близком неосесимметричном состоянии, для которых новых обозначений вводить не будем.

Ввиду замкнутости оболочки по окружной координате усилия, моменты и перемещения являются периодическими функциями координаты ϕ . В рассматриваемом случае решение может быть представлено в виде рядов Фурье

$$\begin{aligned} (T_{11}, T_{13}^*, M_{11}, u, w, \theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (T_{11,n}, T_{13,n}, M_{11,n}, u_n, w_n, \theta_n) \cos n\phi, \\ (T_{12}^*, v) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (T_{12,n}, v_n) \sin n\phi. \end{aligned} \quad (4)$$

После подстановки разложения (4) в линеаризованные уравнения (1) и интегрирования в соответствии с методом Бубнова-Галеркина, получим систему из восьми обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальном виде

$$\frac{dy_i}{d\alpha_1} = F_i(y_{i,c}, y_i), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} y_1 &= T_{11,n}, & y_2 &= T_{12,n}^*, & y_3 &= T_{13,n}^*, & y_4 &= M_{11}, \\ y_5 &= u, & y_6 &= v, & y_7 &= w, & y_8 &= \theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Если ввести вектор Y , компонентами которого являются функции y_i и матрицы B_1 и B_2 размером 4×8 , то граничные условия удобно сформулировать в виде $B_1 Y = b_1$, $B_2 Y = b_2$ соответственно при $x = 0$ и $x = L$.

Для решения системы уравнений (5) при соответствующих граничных условиях используем метод дискретной ортогонализации [4, 5, 6]. Весь интервал интегрирования $\alpha_{1,0} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{1,l}$ делится на k участков. На j -м участке полное решение записывается в виде

$$Y^{(j)} = \bar{Y}^{(j)} C^{(j)}, \quad (7)$$

где $\bar{Y}^{(j)}$ – матрица решений, состоящая из четырех векторов-решений однородной системы и одного решения неоднородной системы.

Решение удовлетворяет граничным условиям при $x = 0$ независимо от значения констант C_i . Для определения этих констант используются граничные условия при $x = L$. Подставив (7) в последние граничные условия, получим

$$B_2 \bar{Y}^{(k)} C^{(k)} = 0. \quad (8)$$

Видоизменим процедуру нахождения решения [6], учитывая то, что компоненты столбца матрицы, являющиеся решением неоднородной задачи, пропорциональны значению возмущающей нагрузки δq (или δP). Будем считать величину δq заданной с некоторым коэффициентом c_5^j . Тогда вектор $C^{(j)}$ будет определяться пятью компонентами [5, 9, 10]

$$C^{(j)} = (c_1^j, c_2^j, c_3^j, c_4^j, c_5^j). \quad (9)$$

При этом система уравнений

$$B_2 \bar{y}^j C^{(j)} = 0 \quad (10)$$

состоит из четырех уравнений относительно пяти неизвестных. Дополнительное уравнение примем в таком же виде, как при шаговом нагружении вдоль кривой множества решений системы [9, 10]. Указанное уравнение выражает тот факт, что вектор $C^{(j)}$ на бифуркационной траектории – единичный:

$$(c^j, c^j) = 1. \quad (11)$$

Решение системы (10) при условии (11) имеет вид

$$c_i^j = \frac{\pm \Delta_i}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta^2}}, \quad c_5^j = \frac{\pm \Delta}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta^2}}, \quad (12)$$

где Δ_i – определители 4-го порядка, которые образуются из основного определителя Δ путем замены i -го столбца столбцом коэффициентов при неизвестном c_5^j с обратным знаком. Если ранг расширенной матрицы B_2 равен 4, то решение в виде (12) существует независимо от того, равен определитель Δ нулю или нет. При критической нагрузке $\Delta = 0$, поэтому

$$c_i^j = \frac{\Delta_i}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta^2}}, \quad c_5^j = 0. \quad (13)$$

Отсюда следует, что c_i^j не зависят от значения δq , а система уравнений (10) будет однородной.

Если нагрузка q_0 равна критической, то амплитуда возмущения δq

равна нулю. Это, с одной стороны, подтверждает справедливость критерия Эйлера, а с другой стороны, указывает на то, что применение приведенного подхода не противоречит традиционной постановке задачи устойчивости. Преимущество использования предлагаемого варианта расчета заключается в том, что упрощается расчет формы выпучивания. Однако возникает вопрос о применимости приведенного подхода в случае совпадения нескольких собственных значений, что соответствует вырождению матрицы, из равенства нулю определителя которой находится критическая нагрузка, более, чем на единицу. В задаче рассматриваемого в настоящей работе типа возникновение указанной проблемы невозможно. Это следует из того, что при использовании рядов (4) система дифференциальных уравнений распадается на независимые для каждого значения n . Минимальные собственные значения некоторых из этих систем могут совпадать, но формы выпучивания будут различные вследствие указанной независимости. При определении закритического поведения рассматриваемых оболочек необходимо учитывать кратность собственных значений.

Примеры расчета и их обсуждение. Рассмотрим при внешнем давлении оболочку, срединная поверхность которой образуется при вращении вокруг оси x сопряженных дуг окружности (рис. 1), заданных в плоскости y, x уравнением

$$y = y_{0,i} + R_{1,i} \sqrt{1 - \frac{(x - x_{0,i})^2}{R_{1,i}^2}}, \quad (14)$$

где $x_{0,i}, y_{0,i}$ – координаты центра i -й окружности. Геометрию дуг определим с помощью длины хорды l_i и стрелы подъема h_i (рис. 1). Кривизну дуги найдем по формуле

$$\frac{1}{R_{1,i}} = \frac{8h_i}{l_i^2 + 4h_i^2}. \quad (15)$$

Знак кривизны определяется знаком стрелы подъема h_i . Координаты центров окружности также находятся с помощью величин l_i и h_i :

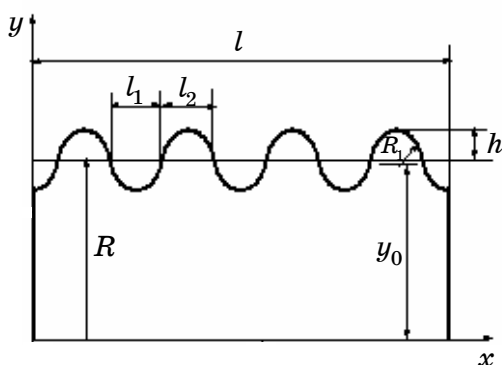


Рис.1

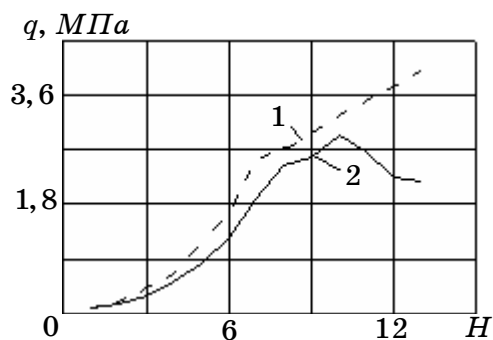


Рис.2

$$x_{0,i} = \frac{l_i}{2} + \sum_{k=1}^{i-1} l_k, \quad y_{0,i} = h_i + R - R_{1,i}, \quad (16)$$

где R – радиус цилиндрической поверхности, образующейся при вращении вокруг оси x хорды i -й дуги. Система ортогональных координат на поверхности вращения α_1, α_2 совпадает с сетью меридианов и параллелей, причем α_1 – длина дуги меридиана, α_2 – длина дуги параллели, отсчитываемые соответственно от параллели и меридиана, принятых за начальные. Учитывая то, что $d\alpha_1^2 = dy^2 + dx^2$, длину элемента дуги меридиана можно представить как $d\alpha_1 = A_1 dx$, а длину элемента параллели как $d\alpha_2 = A_2 d\phi$, где A_1 и A_2 – параметры Ляме, а ϕ – центральный угол, отсчитываемый от плоскости, проходящей через начальный меридиан. В данном случае

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(x - x_{0,i})^2}{R_{1,i}^2}}}, \quad A_2 = y. \quad (17)$$

Нормальные кривизны поверхности в направлениях меридиана и параллели вычислим по формулам

$$k_{1,i} = \frac{1}{R_{1,i}}, \quad k_{2,i} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{A_1 A_2}, \quad (18)$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны координатных линий.

Кривизна k_1 у оболочки с меридианом (14) знакопеременная. Так как $k_2 > 0$, то знакопеременной в этом случае будет также гауссова кривизна $k = k_1 k_2$.

При проведении расчетов считалось, что оболочка изготовлена из композита с такими механическими характеристиками:

$$E_1 = 0,5092 * 10^5 \text{ МПа}, \quad E_2 = 0,1303 * 10^5 \text{ МПа}, \\ G_{12} = 0,5552 * 10^4 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,3621.$$

Неизменными геометрическими параметрами оболочки были длина L , радиус R , толщина t , причем $L/R = 2$, $t/R = 0,01$ и $t = 0,01$ м.

Если отношение стрелы подъема h к длине хорды l , меньше $1/5$, то дуги окружностей можно считать пологими [1]. При росте стрелы подъема h радиус R_1 уменьшается и при $h = R_1$ будет $R_1 = \frac{l}{2}$, т.е. дуга будет полуокружностью. В предлагаемой расчетной методике необходимо, чтобы $h < R_1$.

При расчете оболочек, меридиан которых на рис. 1 представляется

волнистой кривой, кривизна вогнутых участков определяется по формуле (18) при отрицательных значениях стрелы подъема h . Угол наклона касательной к сопряженным дугам изменяется непрерывно. Если длина первой хорды равна l_1 , второй – l_2 , то производная при подходе слева к

точке сопряжения $y' = l_1 / \left(2R_{1,1} \sqrt{1 - \frac{l_1^2}{4R_{1,1}^2}} \right)$, а при подходе справа

$y' = -l_2 / \left(2R_{1,2} \sqrt{1 - \frac{l_2^2}{4R_{1,2}^2}} \right)$. Т.к. $R_{1,2} < 0$, то для непрерывности производ-

ной нужно, чтобы при переходе от одной дуги к другой отношение длины хорды к радиусу кривизны было неизменным. Это условие эквивалентно неизменности отношения h/l , что вытекает из формулы (15).

На рис. 2 приведены кривые, описывающие зависимость критических значений интенсивности внешнего давления от амплитуды волн для оболочек вращения, меридиан которых образован 4-мя плавно сопряженными дугами положительной и отрицательной кривизны равной абсолютной величины. Кривая (1) соответствует оболочке с шарнирно-неподвижным закреплением торцов, кривая (2) – оболочке, когда один из торцов не имеет ограничений на перемещения в направлении координаты α_1 . Оказывается, что для оболочек с волнообразной образующей эффект неподвижности торцевых сечений более существен, чем для оболочек, у которых образующая прямолинейна. Отличаются также формы потери устойчивости.

На рис. 3 показаны формы образующей до потери устойчивости (сплошная кривая), форма выпучивания (кривая (1)) оболочки при неподвижных торцах, а также форма меридиана при выпучивании оболочки с одним подвижным торцом (кривая (2)). Эти кривые вычислены для пологих волн в оболочке ($h/l_1 = 1/6$). Количество поперечных волн $n = 4$ в первом варианте закрепления и $n = 3$ – во втором. С увеличением амплитуды h наблюдается рост критических нагрузок, изменяются также формы потери устойчивости. На рис. 4 показаны моды выпучивания для оболочек с более подъемистыми волнами ($h/l_1 = 1/3$). Обозначения здесь те же, что и на рис. 3. У оболочек с неподвижным закреплением

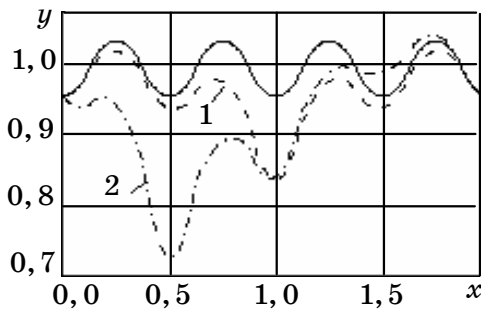


Рис.3

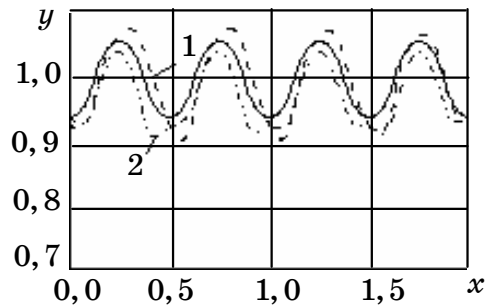


Рис.4

наблюдается локальное выпучивание кривых с отрицательной кривизной, у оболочек с одним подвижным краем выпучиваются наклонные участки.

Изложенный подход для расчета на устойчивость оболочек вращения интересен с двух точек зрения. Во-первых, его можно рассматривать как один из вариантов численного доказательства справедливости критерия Эйлера и, во-вторых, его можно использовать как эффективный численный метод, позволяющий выполнять детальный параметрический анализ геометрически сложных оболочечных конструкций без значительных затрат времени счета.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано підхід до визначення критичних навантажень та форм втрати стійкості оболонок, в основу якого покладено розв'язок однорідної задачі, як частинного випадку неоднорідної. На прикладах розрахунку хвилеподібних оболонок показано ефективність наведеного алгоритму.

Ключові слова: оболонки обертання, критичні навантаження, форми втрати стійкості, нелінійна теорія оболонок, метод дискретної ортогоналізації, неоднорідна крайова задача.

SUMMARY. The approach to the definition of critical loads and buckling modes is proposed in which the solution of homogeneous problem as a special case of inhomogeneous one underlie. The efficiency of this algorithm is demonstrated on the example of wavelike shells, inhomogeneous boundary-value problem.

Key words: shells of revolution, buckling loads, loss-of-stability forms, nonlinear theory of shells, discrete-orthogonalization method

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448 с.
2. Ванин Г. Л., Семенюк Н. П., Емельянов Р. Ф. Устойчивость оболочек из армированных материалов. – К.: Наук. думка, 1978. – 212 с.
3. Волжмир А. С. Устойчивость упругих систем. – М.- Физматгиз. – 1963. – 879 с.
4. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1961. – Т. 16, Вып. 3. – С. 171–174.
5. Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого тела. – М.: Наука, – 1988. – 232 с.
6. Григоренко Я. М., Крюков Н. Н. Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. – К., Наук. думка, 1988. – 264 с.
7. Кармишин А. В., Ляковец В. А., Мясников В. И., Фролов А. Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. – М., Машиностроение, 1975. – 376 с.
8. Voriseiko A. V., Semenyuk N. P., Trach V. M. On canonical equations of Geometrically Nonlinear Theory of Thin Anisotropic Shells // Int. Appl. Mech. – 2010. – Vol. 46, № 2. – P. 125–131.
9. Semenyuk N. P., Trach V. M., Ostapchuk V. V. On the Nonlinear Axisymmetric Deformation of Anisotropic Spherical Shells // Int. Appl. Mech. – 2009. – Vol. 45, № 10. – P. 1125–1131.
10. Semenyuk N. P., Trach V. M., Zhukova N. B. Incremental Analysis of the Nonlinear Behavior of Thin Shells // Int. Appl. Mech. – 2008. – Vol. 44, № 9. – P. 1025–1031.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 15.06.2010

УДК 539.3

И. Ю. ХОМА, д-р физ.-мат. наук,
О. А. СТРИГИНА, канд. физ.-мат. наук

**СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ
НЕОДНОРОДНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО
ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ**

Методом разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра получены уравнения равновесия неоднородных по толщине упругих анизотропных оболочек. Изложен способ представления общего аналитического решения уравнений равновесия трансверсально-изотропной сферической оболочки. Рассмотрена задача о напряженном состоянии пологой неоднородной сферической оболочки с круговым отверстием, на поверхности которого заданы нормальные перемещения и поперечные касательные напряжения.

Ключевые слова: неоднородность, анизотропия, трансверсально-изотропная сферическая оболочка, круговое отверстие

В работах [2, 6, 9] предложены разные методы решения задач о напряженном состоянии неоднородных упругих оболочек и пластин. Некоторые проблемы трехмерной теории неоднородных упругих тел изложены в [3, 10, 11]. Методом разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра в [5] найдено решение задачи о напряженном состоянии пологой неоднородной по толщине трансверсально-изотропной сферической оболочки с круговым отверстием, на поверхности которого заданы внешние усилия. В данной работе решается аналогичная задача при смешанных граничных условиях на контуре отверстия. Предполагаются заданными нормальные перемещения и поперечные касательные напряжения.

Постановка задачи и исходные уравнения. Отнесем оболочку, занимающую область $\Omega = S \times [-h, h]$ трехмерного пространства, к криволинейной системе координат x^i ($i = 1, 2, 3$), нормально связанной со срединной поверхностью S . Пусть x^α ($\alpha = 1, 2$) совпадают с гауссовыми координатами поверхности S , а $x^3 \in [-h, h]$. Оболочка изготовлена из функционально неоднородного по толщине анизотропного материала, уравнения состояния которого имеют вид

$$\sigma^{ij} = \bar{c}^{ijlm}(x^3) e_{lm}, \quad (1.1)$$

где σ^{ij} и e_{lm} – компоненты тензора напряжений и деформаций, $\bar{c}^{ijlm}(x^3)$ – модули упругости, представляемые формулами

$$\bar{c}^{ijlm}(x^3) = c^{ijlm}q(x^3), \quad (1.2)$$

в которых c^{ijlm} – постоянные величины, удовлетворяющие условиям симметрии, $q(x^3)$ – непрерывная функция координаты толщины x^3 .

При неизменной метрике по толщине оболочки градиентные уравнения записываются таким образом

$$2e_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i, \quad (1.3)$$

где ∇_i – символ ковариантной производной, u_j – составляющие вектора перемещений.

Представим перемещения u_j и напряжения σ^{ij} в виде конечных рядов Фурье по полиномам Лежандра $P_k(\zeta)$ [5]

$$\{u_j(x^1, x^2, x^3), \sigma^{ij}(x^1, x^2, x^3)\} = \sum_{k=0}^N \{u_j^{(k)}(x), h^{-1}\sigma_{(k)}^{ij}(x)P_k(\zeta)\}. \quad (1.4)$$

Здесь $x = (x^1, x^2) \in S$, $\zeta = h^{-1}x^3$, $u_j^{(k)}(x)$, $\sigma_{(k)}^{ij}(x)$ – коэффициенты разложения, именуемые ниже моментами (номер момента соответствует порядку полинома Лежандра). Имеют место обратные равенства

$$\{u_j^{(k)}(x), \sigma_{(k)}^{ij}(x)\} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{h} \int_{-h}^h \{u_j(x^1, x^2, x^3), h\sigma^{ij}(x^1, x^2, x^3)\} P_k(\zeta) dx^3. \quad (1.5)$$

На основе формул (1.4), (1.5) деформации (1.3) преобразуются к виду

$$e_{ij} = \sum_{k=0}^N e_{ij}^{(k)}(x) P_k(\zeta), \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} 2e_{\alpha\beta}^{(k)} &= \nabla_\alpha u_\beta^{(k)} + \nabla_\beta u_\alpha^{(k)} - 2b_{\alpha\beta} u_3^{(k)}, \\ 2e_{\alpha 3}^{(k)} &= \nabla_\alpha u_3^{(k)} + b_\alpha^\beta u_\beta^{(k)} + h^{-1} u_\alpha'^{(k)}, \\ e_{33}^{(k)} &= h^{-1} u_3'^{(k)} \quad (\alpha, \beta = 1, 2; k = \overline{0, N}); \end{aligned}$$

$b_{\alpha\beta}$ – коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S : $u_j'^{(k)} = (2k+1)(u_j^{(k+1)} + u_j^{(k+3)} + \dots)$, причем $u_j^{(n)} = 0$, если $n > N$.

Учитывая выражения (1.6), из равенств (1.1) получаем соотношения

$$\sigma_{(k)}^{ij} = \sum_{n=0}^N c^{ijlm} e_{lm}^{(n)} \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{h} \int_{-h}^h q(\zeta) P_k(\zeta) P_n(\zeta) dx^3. \quad (1.7)$$

Если $q(\zeta)$ является линейной функцией, т.е. $q(\zeta) = \delta = const$, то из (1.7) с учетом рекуррентных соотношений для полиномов Лежандра следует, что

$$\sigma_{(k)}^{ij} = hc^{ijlm} \left(e_{lm}^{(k)} + \delta e_{lm}^{(k\pm 1)} \right), \quad (1.8)$$

где

$$e_{lm}^{(k\pm 1)} = \frac{k+1}{2k+3} e_{lm}^{(k+1)} + \frac{k}{2k-1} e_{lm}^{(k-1)}. \quad (1.9)$$

При $q(\zeta) = 1 + \delta_1 \zeta + \delta_2 \zeta^2$, то уравнения состояния примут вид

$$\sigma_{(k)}^{ij} = hc^{ijlm} \left(e_{lm}^{(k)} + \delta_1 e_{lm}^{(k\pm 1)} + \delta_2 e_{lm}^{(k\pm 2)} \right). \quad (1.10)$$

Моменты напряжений $\sigma_{(k)}^{ij}$ удовлетворяют системе уравнений [7]

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} - b_{\alpha}^{\beta} \sigma_{(k)}^{\alpha 3} - (2k+1) h^{-1} \sum_{s=0}^{[K]} \sigma_{(k-2s-1)}^{3\beta} &= 0 \quad (b = 1, 2), \\ \nabla_{\alpha} \sigma_{(k)}^{\alpha 3} - b_{\alpha\beta} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} - (2k+1) h^{-1} \sum_{s=0}^{[K]} \sigma_{(k-2s-1)}^{33} + f_3^{(k)} &= 0 \quad (k = \overline{0, N}), \end{aligned} \quad (1.11)$$

в которой $K = (k-1)/2$, $[K]$ обозначает целую часть K :

$$f_3^{(k)} = \left(k + \frac{1}{2} \right) \left[\sigma_{33}^{+} - (-1)^k \sigma_{33}^{-} \right],$$

σ_{33}^{+} и σ_{33}^{-} – заданные значения напряжений на лицевых граничных поверхностях.

Равенства (1.11) совместно с (1.8) или (1.10) образуют замкнутую систему уравнений для определения неизвестных функций. Рассмотрим частные случаи анизотропии материала оболочки.

Трансверсально изотропная сферическая оболочка. Пусть материал оболочки трансверсально изотропный с поверхностью изотропии совпадающей с S , которая представляет сферу радиуса R и оболочка находится под действием постоянного внутреннего давления интенсивности q ($q = const$), т.е. $\sigma_{33}^{+} = 0$, $\sigma_{33}^{-} = -q$.

На поверхности сферы, как известно [1], можно ввести изометрическую систему координат x, y , относительно которой первая квадратичная форма принимает вид: $ds^2 = \Lambda(dx^2 + dy^2)$, $\Lambda > 0$. В изометрической системе координат целесообразно использовать комплексную форму рассматриваемых уравнений. Вводя комплексные переменные $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, систему уравнений (1.11) запишем в виде [8]

$$\begin{aligned}
& \Lambda^{-1} \partial_z \left(\sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} + 2i \sigma_{12}^{(k)} \right) + \partial_{\bar{z}} \Lambda^{-1} \left(\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} \right) + \\
& + R^{-1} \sigma_+^{(k)} - (2k+1) h^{-1} \sum_{s=0}^{[K]} \sigma_+^{(k-2s-1)} = 0 \quad (k = \overline{0, N}), \\
& \Lambda^{-1} (\partial_z \sigma_+^{(k)} + \partial_{\bar{z}} \bar{\sigma}_+^{(k)}) - (R\Lambda)^{-1} \left(\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} \right) - \\
& - (2k+1) h^{-1} \sum_{s=0}^{[K]} \sigma_{33}^{(k-2s-1)} = -(-1)^k \left(k + \frac{1}{2} \right) q, \tag{2.1}
\end{aligned}$$

где $\partial_{\bar{z}} = \partial / \partial \bar{z}$; $\sigma_+^{(k)} = \sigma_{13}^{(k)} + i \sigma_{23}^{(k)}$.

Соотношения упругости (1.8) для трансверсально изотропной оболочки записываются таким образом:

$$\begin{aligned}
& \sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} = 2h\Lambda \left[(c_{12} + c_{66}) \left(\underline{e}^{(k)} + 2R^{-1} \underline{u}_3^{(k)} \right) + c_{13} h^{-1} \underline{u}'_3^{(k)} \right], \\
& \sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} + 2i \sigma_{12}^{(k)} = 4c_{66} h \Lambda \partial_{\bar{z}} \left(\Lambda^{-1} \underline{u}_+^{(k)} \right), \\
& \sigma_{33}^{(k)} = h \left[c_{13} \left(\underline{e}^{(k)} + 2R^{-1} \underline{u}_3^{(k)} \right) + c_{33} h^{-1} \underline{u}'_3^{(k)} \right]. \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Здесь c_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), c_{44} , c_{66} – двухиндексные обозначения упругих постоянных;

$$\begin{aligned}
& \underline{u}_+^{(k)} = \underline{u}_1^{(k)} + i \underline{u}_2^{(k)}; \quad \underline{u}_j^{(k)} = u_j^{(k)} + \delta u_j^{(k\pm 1)}; \\
& \underline{e}^{(k)} = e^{(k)} + \delta e^{(k\pm 1)}; \quad e^{(k)} = \Lambda^{-1} (\partial_z u_+^{(k)} + \partial_{\bar{z}} \bar{u}_+^{(k)}); \tag{2.3}
\end{aligned}$$

$\underline{u}'_j^{(k)}$ ($j = 1, 2, 3$) – функции, принимающие при четных $N = 2n$ ($n = 0, 1, \dots < \infty$) значения

$$\begin{aligned}
& \underline{u}'_j^{(2k)} = 2k \delta u_j^{(2k)} + (4k+1) \sum_{s=k+1}^n \left(u_j^{(2s-1)} + \delta u_j^{(2s)} \right), \\
& \underline{u}'_j^{(2k-1)} = -2k \delta u_j^{(2k-1)} + (4k-1) \sum_{s=k}^n \left(u_j^{(2s)} + \delta u_j^{(2s-1)} \right). \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Подставляя моменты (2.2) в равенства (2.1), получаем уравнения

$$\begin{aligned}
& 4c_{66} \Lambda^{-1} \partial_z \Lambda \partial_{\bar{z}} \left(\Lambda^{-1} \underline{u}_+^{(2k)} \right) + 2(c_{12} + c_{66}) \partial_{\bar{z}} \left(\underline{e}^{(2k)} + 2R^{-1} \underline{u}_3^{(2k)} \right) + \\
& + c_{44} R^{-1} (2\partial_{\bar{z}} \underline{u}_3^{(2k)} - R^{-1} \underline{u}_+^{(2k)}) + \delta c_{44} h^{-1} (2c'_{2k} \partial_{\bar{z}} \underline{u}_3^{(2k)} - R^{-1} \underline{u}_+^{(2k)}) + \\
& + (4k+1) h^{-1} \left\{ \sum_{s=1}^n [2\lambda_{2s-1}^{(k)} \partial_{\bar{z}} \underline{u}_3^{(2s-1)} - c_{44} h^{-1} (\delta \alpha_{2s-1}^{(k)} - h R^{-1}) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\times u_+^{(2s-1)}] + \sum_{s=0}^n [2\delta\tilde{\lambda}_{2s}^{(k)}\partial_{\bar{z}}u_3^{(2s)} - c_{44}h^{-1}(\beta_{2s}^{(k)} - \delta hR^{-1})u_+^{(2s)}] = 0; \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} & c_{44} \left(\nabla^2 \underline{u}_3^{(2k)} - R^{-1} \underline{e}^{(2k)} \right) + 2(c_{12} + c_{66}) R^{-1} \left(\underline{e}^{(2k)} + 2R^{-1} \underline{u}_3^{(2k)} \right) + \\ & + \delta h^{-1} (c_{2k}' c_{44} e^{(2k)} + 2c_{13} R^{-1} u_3^{(2k)}) + (4k+1) h^{-1} \left\{ \sum_{s=1}^n [\gamma_{2s-1}^{(k)} e^{2s-1} - \right. \\ & \left. - c_{33} h^{-1} (\delta \alpha_{2s-1}^{(k)} + \frac{2c_{13}h}{c_{33}R}) u_3^{(2s-1)} \right] + \sum_{s=0}^n [\delta \tilde{\gamma}_{2s}^{(k)} e^{(2s)} - \\ & \left. - c_{33} h^{-1} \left(\beta_{2s}^{(k)} + \frac{2\delta c_{13}h}{c_{33}R} \right) u_3^{(2s)} \right] \right\} = - \left(2k + \frac{1}{2} \right) h^{-1} q \quad (k = \overline{0, n}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

и аналогичные равенства для нечетных значений k при старших производных, т.е.

$$\begin{aligned} & 4c_{66}\Lambda^{-1}\partial_z\Lambda\partial_{\bar{z}} \left(\Lambda^{-1} \underline{u}_+^{(2k-1)} \right) + 2(c_{12} + c_{66}) \partial_{\bar{z}} \left(\underline{e}^{(2k-1)} + 2R^{-1} \underline{u}_3^{(2k-1)} \right) + \\ & + c_{44} R^{-1} (2\partial_{\bar{z}} \underline{u}_3^{(2k-1)} - R^{-1} \underline{u}_+^{(2k-1)}) + \delta c_{44} h^{-1} (2c_{2k-1}' \partial_{\bar{z}} u_3^{(2s-1)} + \\ & + R^{-1} u_3^{(2s-1)}) + (4k-1) h^{-1} \left\{ \sum_{s=0}^n [2\lambda_{2s}^{(k)} \partial_{\bar{z}} u_3^{(2s)} - c_{44} h^{-1} (\delta \beta_{2s}^{(k)} - hR^{-1}) \times \right. \\ & \left. \times u_+^{(2s)} \right] + \sum_{s=1}^n [\tilde{\lambda}_{2s-1}^{(k)} \partial_{\bar{z}} u_3^{(2s-1)} - c_{44} h^{-1} (\alpha_{2s-1}^{(k)} - \delta hR^{-1}) u_+^{(2s-1)}] \right\} = 0; \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} & c_{44} \left(\nabla^2 \underline{u}_3^{(2k-1)} - R^{-1} \underline{e}^{(2k-1)} \right) + 2(c_{12} + c_{66}) R^{-1} \left(\underline{e}^{(2k-1)} + 2R^{-1} \underline{u}_3^{(2k-1)} \right) - \\ & - \delta h^{-1} (c_{2k-1}' c_{44} e^{(2k-1)} - 2c_{13} R^{-1} u_3^{(2k-1)}) + (4k-1) h^{-1} \left\{ \sum_{s=0}^n [\gamma_{2s}^{(k)} e^{2s} - \right. \\ & \left. - c_{33} h^{-1} (\delta \beta_{2s}^{(k)} + \frac{2c_{13}h}{c_{33}R}) u_3^{(2s)} \right] + \sum_{s=1}^n [\delta \tilde{\gamma}_{2s-1}^{(m)} e^{(2s-1)} - \\ & \left. - c_{33} h^{-1} \left(\alpha_{2s-1}^{(m)} + \frac{2\delta c_{13}h}{c_{33}R} \right) u_3^{(2s-1)} \right] \right\} = \left(2k - \frac{1}{2} \right) h^{-1} q \quad (k = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь $\nabla^2 = 4\Lambda^{-1}\partial_z\partial_{\bar{z}}$ – оператор Лапласа на поверхности сферы, $\lambda_{2s-1}^{(n)}$, $\lambda_{2s}^{(k)}$, $\gamma_{2s-1}^{(n)}$, $\gamma_{2s}^{(k)}$ – постоянные вида [8]

$$\begin{aligned} \lambda_{2s-1}^{(k)} &= \begin{cases} -c_{44}, & 1 \leq s \leq k; \\ c_{13}, & k < s \leq n; \end{cases} & \lambda_{2s}^{(k)} &= \begin{cases} -c_{44}, & 0 \leq s < k; \\ c_{13}, & k \leq s \leq n; \end{cases} \\ \gamma_{2s-1}^{(k)} &= \begin{cases} -c_{33}, & 1 \leq s \leq k; \\ c_{44}, & k < s \leq n; \end{cases} & \gamma_{2s}^{(k)} &= \begin{cases} -c_{13}, & 0 \leq s < k; \\ c_{44}, & k \leq s \leq n; \end{cases} \end{aligned}$$

$$c'_m = \begin{cases} 2k+1+2kc_{13}/c_{44}, & m=2k, \\ 2k-1+2kc_{13}/c_{44}, & m=2k-1; \end{cases}$$

$$c''_m = \begin{cases} 2k+(2k+1)c_{13}/c_{44}, & m=2k, \\ 2k+(2k-1)c_{13}/c_{44}, & m=2k-1; \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\alpha_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} s(2s-1), & 1 \leq s \leq k, \\ k(2k-1), & k \leq s \leq n; \end{cases} \quad \beta_{2s}^{(k)} = \begin{cases} s(2s+1), & 1 \leq s \leq k, \\ k(2k+1), & k \leq s \leq n; \end{cases}$$

$$\alpha_{2s-1}^{*(k)} = \begin{cases} s(2s-1), & 1 \leq s \leq k, \\ k(2k+1), & k < s \leq n; \end{cases} \quad \beta_{2s}^{*(k)} = \begin{cases} s(2s+1), & 1 \leq s < k, \\ k(2k-1), & k \leq s \leq n. \end{cases} \quad (2.10)$$

Общее решение задачи. Для построения общего решения системы уравнений (2.5) – (2.8) проведем некоторые преобразования. Применим к уравнению (2.5) операцию $\Lambda^{-1}\partial_z$ и в найденном равенстве рассмотрим вещественную часть. Учитывая при этом обозначения (2.3), будем иметь

$$c_{11}\nabla^2 \underline{e}^{(2k)} + c^* c_{44} R^{-2} \underline{e}^{(2k)} + c_* c_{44} R^{-1} \nabla^2 \underline{u}_3^{(2k)} + \delta c_{44} h^{-1} (c'_{2k} \nabla^2 u_3^{(2k)} - R^{-1} e^{(2k)}) + (4k+1) h^{-1} \left\{ \sum_{s=1}^n [\lambda_{2s-1}^{(k)} \nabla^2 u_3^{(2s-1)} - c_{44} h^{-1} (\delta \alpha_{2s-1}^{*(k)} - h R^{-1}) e^{(2s-1)}] + \sum_{s=0}^n [\delta \tilde{\lambda}_{2s}^{(k)} \nabla^2 u_3^{(2s)} - c_{44} h^{-1} (\beta_{2s}^{(k)} - \delta h R^{-1}) e^{(2s)}] \right\} = 0 \quad (k = \overline{0, n}). \quad (3.1)$$

Из (2.7) после выполнения аналогичных преобразований получаем уравнение

$$c_{11}\nabla^2 \underline{e}^{(2k-1)} + c^* c_{44} R^{-2} \underline{e}^{(2k-1)} + c_* c_{44} R^{-1} \nabla^2 \underline{u}_3^{(2k-1)} - \delta c_{44} h^{-1} (c'_{2k-1} \nabla^2 u_3^{(2k-1)} + R^{-1} e^{(2k-1)}) + (4k-1) h^{-1} \left\{ \sum_{s=0}^n [\lambda_{2s}^{(k)} \nabla^2 u_3^{(2s)} - c_{44} h^{-1} (\delta \beta_{2s}^{*(k)} - h R^{-1}) e^{(2s)}] + \sum_{s=1}^n [\delta \tilde{\lambda}_{2s-1}^{(k)} \nabla^2 u_3^{(2s-1)} - c_{44} h^{-1} (\beta_{2s}^{(k)} - \delta h R^{-1}) e^{(2s-1)}] \right\} = 0 \quad (k = \overline{1, n}), \quad (3.2)$$

где $c_* = 1 + 2(c_{12} + c_{66})/c_{44}$; $c^* = -1 + 2c_{66}/c_{44}$.

Равенства (3.1), (3.2) совместно с (2.6), (2.8) составляют систему уравнений $4(2n+1)$ -го порядка относительно моментов перемещений $u_3^{(k)}$ и деформаций $e^{(k)}$. Решение ее примем в виде

$$c_{66}u_3^{(k)} = \eta_3^{(k)} ph + u_{2k+1}; \quad c_{66}he^{(k)} = u_{2k+2} \quad (k = \overline{0, 2n}), \quad (3.3)$$

в котором $p = qR/2h$, u_k – функции, выражающие общее решение однородной системы, записываемой в стандартной форме так:

$$\sum_{l=1}^{4n+2} (a_{kl} - b_{kl}h^2\nabla^2) u_l = 0 \quad (k = \overline{2(2n+1)}), \quad (3.4)$$

$\eta_3^{(n)}$ – постоянные, определяемые из решения алгебраической системы уравнений [7].

$$\begin{aligned} & \frac{4(c_{12} + c_{66})h}{(4k+1)c_{66}R} \eta_3^{(2k)} - \frac{2\delta c_{13}}{(4k+1)c_{66}} \eta_3^{(2k)} + \frac{c_{33}R}{c_{66}h} \left[\sum_{s=0}^n (\beta_{2s}^{(k)} + \right. \\ & \left. + \frac{2\delta c_{13}h}{c_{66}R}) \eta_3^{(2s)} + \sum_{s=1}^n (\delta\alpha_{2s-1}^{*(k)} + \frac{c_{13}h}{c_{66}R}) \eta_3^{(2s-1)} \right] = 1 \quad (k = \overline{0, n}); \\ & \frac{4(c_{12} + c_{66})h}{(4k-1)c_{66}R} \eta_3^{(2k-1)} - \frac{2\delta c_{13}}{(4k-1)c_{66}} \eta_3^{(2k-1)} + \frac{c_{33}R}{c_{66}h} \left[\sum_{s=0}^n (\alpha_{2s-1}^{(k)} + \right. \\ & \left. + \frac{2\delta c_{13}h}{c_{66}R}) \eta_3^{(2s-1)} + \sum_{s=0}^n (\delta\beta_{2s}^{*(k)} + \frac{2c_{13}h}{c_{66}R}) \eta_3^{(2s)} \right] = -1 \quad (k = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\det \|a_{kl} - kb_{kl}\| = 0, \quad (3.5)$$

и будем считать, что оно имеет простые, не равные нулю корни k_m . Тогда из (3.4) операторным методом [7] находим

$$u_k = \sum_{m=1}^{4n+2} D_m^{(k)} V_m, \quad (3.6)$$

где V_m – метатармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\nabla^2 V_m - k_m h^{-2} V_m = 0, \quad (3.7)$$

$D_m^{(n)}$ – постоянные, определяемые как алгебраические дополнения элементов какой-нибудь строки определителя $|a_{kl} - k_m b_{kl}|$.

Согласно (3.6) функции (3.3) примут вид

$$c_{66}u_3^{(k)} = \eta_3^{(k)} ph + \sum_{m=1}^{4n+2} c_m^{(k)} V_m, \quad c_{66}e^{(k)} = h^{-1} \sum_{m=1}^{4n+2} \tilde{c}_m^{(n)} V_m, \quad (3.8)$$

причем $c_m^{(k)} = D_m^{(2k+1)}$, $\tilde{c}_m^{(k)} = D_m^{(2k+2)}$.

Учитывая формулы (2.3), (3.6), (3.7), для моментов деформаций $e^{(k)}$ получаем выражения

$$c_{66}\Lambda^{-1}(\partial_z u_+^{(n)} + \partial_{\bar{z}} \bar{u}_+^{(n)}) = 2h \sum_{m=1}^{4n+2} a_m^{(n)} \Lambda^{-1} \partial_z \partial_{\bar{z}} V_m,$$

из которых находим

$$c_{66} u_+^{(k)} = h \sum_{m=1}^{4n+2} a_m^{(k)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \partial_{\bar{z}} y_k. \quad (3.9)$$

Здесь $a_m^{(k)} = 2k_m^{-1} \bar{c}_m^{(k)}$, y_k – произвольные достаточно гладкие вещественные функции, которые необходимо выбирать такими, чтобы выполнялись равенства (2.5), (2.7). если внести в (2.5), (2.7) выражения моментов (3.8), (3.9), то получим относительно комплексной функции $U_k = X_k + iY_k$ равенство

$$\partial_{\bar{z}} U_k = 0, \quad (3.10)$$

действительная часть X_k которой представляет собой линейную комбинацию метагармонических функций V_m , т.е.

$$X_k = c_0 \sum_{m=1}^{4n+2} O_m^{(k)} V_m,$$

а мнимая часть Y_k определяется формулами

$$\begin{aligned} Y_{2k} &= \nabla^2 \underline{y}_{2k} + \frac{c^* c_{44}}{c_{66} R^2} \underline{y}_{2k} - \frac{\delta c_{44}}{c_{66} R h} y_{2k} - \\ &\quad - \frac{(4k+1) c_{44}}{c_{66} h^2} \left[\sum_{s=0}^n \left(\beta_{2s}^{(k)} - \frac{\delta h}{R} \right) y_{2s} + \sum_{s=1}^n \left(\delta \alpha_{2s-1}^{*(k)} - \frac{h}{R} \right) y_{2s-1} \right], \\ Y_{2k-1} &= \nabla^2 \underline{y}_{2k-1} + \frac{c^* c_{44}}{c_{66} R^2} \underline{y}_{2k-1} - \frac{\delta c_{44}}{c_{66} e h} y_{2k-1} - \\ &\quad - \frac{(4k-1) c_{44}}{c_{66} h^2} \left[\sum_{s=1}^n \left(\alpha_{2s-1}^{(k)} - \frac{\delta h}{R} \right) y_{2s-1} + \sum_{s=0}^n \left(\delta \beta_{2s}^{*(k)} - \frac{h}{R} \right) y_{2s} \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь $c_0 = c_{11} / 2c_{66} h$, $\underline{y}_k = y_k + \delta y_{k+1}$, $O_m^{(k)}$ – постоянные, тождественно равные нулю.

Равенство (2.10) после интегрирования по переменной \bar{z} принимает вид

$$U_k = f_k(z) \quad (k = \overline{0, 2n}),$$

в котором $f_k(z)$ – произвольные аналитические функции. Из последнего равенства вытекает, что действительная часть U_k должна быть гармонической функцией, а постольку она тождественно равна нулю, то

$\text{Re}[f_k(z)] = 0$ и, следовательно, $f_k = ic_k$. Учитывая, что функции y_k определяются с точностью до постоянных слагаемых, можно положить $c_k = 0$. Таким образом, из равенств $Y_k = 0$ получаем систему уравнений, которую в стандартной форме запишем таким образом

$$\sum_{l=0}^{2n} (\alpha_{kl} - \beta_{kl} h^2 \nabla^2) y_l = 0 \quad (k = \overline{0, 2n}). \quad (3.12)$$

При условии, что характеристическое уравнение

$$\det \|a_{kl} - \lambda \beta_{kl}\| = 0 \quad (3.13)$$

имеет простые отличные от нуля корни λ_s , из системы (3.12) описанным выше способом находим

$$y_k = \sum_{s=1}^{2n+1} b_s^{(k)} \omega_s, \quad (3.14)$$

где ω_s – метагармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\nabla^2 \omega_s - \lambda_s h^{-2} \omega_s = 0, \quad (3.15)$$

$b_s^{(k)}$ – постоянные, определяемые алгебраическими дополнениями элементов любой строки определителя $|a_{kl} - \lambda_s \beta_{kl}|$

Подставляя выражения (3.14) в формулы (3.9), будем иметь

$$c_{66} u_+^{(k)} = h \sum_{m=1}^{4n+2} a_m^{(k)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \sum_{s=1}^{2n+1} b_s^{(k)} \partial_{\bar{z}} \omega_s. \quad (3.16)$$

Найденные таким образом значения функций (3.8), (3.16) дают общее аналитическое решение системы уравнений (2.5) – (2.8).

Пологая сферическая оболочка с круговым отверстием. Для полых оболочек, срединная поверхность которых незначительно отличается от плоскости, величину Λ можно принять равной единице, а оператор ∇^2 заменить оператором Лапласа Δ на плоскости. Учитывая сказанное, введем в области S полярную систему координат r, ϑ и воспользуемся формулами преобразования компонент тензора напряжений. В этом случае соотношение (2.2) с учетом формул (3.8), (3.16) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(k)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(k)} &= \gamma_k p h + 2 \sum_{m=1}^{4n+2} d_m^{(k)} V_m, & \sigma_{33}^{(k)} &= \gamma_{3k} p h + 2 \sum_{m=1}^{4n+2} d_{3m}^{(k)} V_m, \\ \sigma_{rr}^{(k)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(k)} + 2i \sigma_{r\vartheta}^{(k)} &= 4h e^{-2i\vartheta} \left(\sum_{m=1}^{4n+2} \underline{a}_m^{(k)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m + i \sum_{s=1}^{2n+1} \underline{b}_s^{(k)} \partial_{\bar{z}}^2 \omega_s \right), \\ \sigma_{r3}^{(k)} + i \sigma_{\vartheta 3}^{(k)} &= 2h e^{-i\vartheta} \left(\sum_{m=1}^{4n+2} p_m^{(k)} \partial_{\bar{z}} V_m + i \sum_{s=1}^{2n+1} q_s^{(k)} \partial_{\bar{z}} \omega_s \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\gamma_k = \frac{4(c_{12} + c_{66})}{c_{66}} \eta_3^{(k)} + \frac{2c_{13}}{c_{66}} \eta_3^{\prime(k)},$$

$$d_m^{(k)} = \frac{c_{12} + c_{66}}{c_{66}} \left(\bar{c}_m^{(k)} + \frac{2h}{R} c_m^{(k)} \right) + \frac{c_{13}}{c_{66}} c_m^{\prime(k)}.$$

Моменты перемещений (3.16) в полярной системе координат представляются равенствами

$$c_{66}(u_r^{(k)} + iu_\vartheta^{(k)}) = he^{-i\vartheta} \left(\sum_{m=1}^{4n+2} a_m^{(k)} \partial_{\bar{z}} V_m + i \sum_{s=1}^{2n+1} b_s^{(k)} \partial_{\bar{z}} \omega_s \right). \quad (4.2)$$

Рассмотрим случай пологой сферической оболочки с круговым отверстием радиуса r_0 . Оболочка находится под действием постоянного внутреннего давления интенсивности q . Отверстие закрыто крышкой, которая передает на контур отверстия действие перерезывающей силы [4]. Будем считать, что крышка жесткая и не деформируется в радиальном направлении. Это приводит к выполнению условий

$$u_r^{(k)}(r) \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (k = \overline{0, N}),$$

$$\sigma_{r3}^{(0)}(r) \Big|_{r=r_0} = -qr_0/2, \quad \sigma_{r3}^{(k)}(r) \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (k = \overline{1, N}). \quad (4.3)$$

Учитывая формулы (4.1), (4.2), граничные условия (4.3) запишем через метагармонические функции V_m (функции ω_s вихревого решения в осесимметричной задаче отсутствуют). Вид функций V_m зависит от значений корней характеристического уравнения (3.5), которое может иметь разное количество действительных и комплексных корней. Если имеется $2l+1$ вещественных отрицательных, $2p+1$ вещественных положительных и $2(2n-l-p)$ – комплексно-сопряженных корней, то в граничных условиях осевой симметрии будем иметь

$$V_m = A_0^{(m)} Y_0 \left(rh^{-1} \sqrt{-k_m} \right) \quad (m \in [1, 2l+1]),$$

$$V_m = B_0^{(m)} K_0 \left(rh^{-1} \sqrt{k_m} \right) \quad (m \in [2l+2, 2(l+p+1)]),$$

$$V_{2m+1} = C_0^{(2m+1)} H_0 \left(rh^{-1} \sqrt{-k_{2m+1}} \right),$$

$$V_{2m+2} = D_0^{(2m+1)} H_0^{(2)} \left(rh^{-1} \sqrt{-k_{2m+2}} \right) \quad (m \in [l+p+1, 2n]), \quad (4.4)$$

где Y_0 , K_0 , $H_0^{(1)}$ и $H_0^{(2)}$ – цилиндрические функции Бесселя, Ханкеля первого и второго рода, A_0 , B_0 , C_0 и D_0 – постоянные, значения которых определяем из выполнения граничных условий.

Числовые исследования проведены для пологой сферической оболочки с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,25$ и $\nu' = 0.25$ соответственно в

плоскости изотропии и нормальной к ней плоскости при отношениях модулей упругости $E/E' = 1$, $E/G' = 7.5$ и $h/R = 0,05$. В табл. 1, 2 приведены значения радиальных σ_{rr}/p и кольцевых $\sigma_{\vartheta\vartheta}/p$ напряжений на контуре отверстия $r/r_0 = \rho = 1$ в точках $\zeta = 0$ на срединной и $\zeta = 1$, $\zeta = -1$ на граничных поверхностях в зависимости от изменения парамет-

Таблица 1

Напр.	δ	ζ	$\rho = r/r_0$						
			1.0	1.04	1.08	1.12	1.16	1.20	1.24
σ_{33}/p	0	1	0.023	-0.007	-0.004	-0.002	-0.002	-0.002	0.000
		0	-0.090	-0.092	-0.090	-0.087	-0.084	-0.081	-0.077
		-1	-0.138	-0.105	-0.102	-0.100	-0.100	-0.099	-0.099
	0.1	1	0.056	0.017	0.008	0.003	0.000	-0.001	-0.002
		0	-0.192	-0.167	-0.153	-0.144	-0.136	-0.129	-0.122
		-1	-0.107	-0.081	-0.090	-0.096	-0.099	-0.101	-0.102

Таблица 2

Напр.	ζ	δ						
		0	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
σ_{rr}/p	1	2.768	3.071	3.220	3.367	3.513	3.656	3.798
	0	0.433	0.431	0.430	0.428	0.425	0.421	0.416
	-1	-1.884	-1.683	-1.579	-1.473	-1.365	-1.255	-1.142
$\sigma_{\vartheta\vartheta}/p$	1	1.964	2.181	2.281	2.399	2.508	2.618	2.727
	0	1.380	1.369	1.360	1.351	1.344	1.337	1.321
	-1	0.782	0.751	0.719	0.687	0.655	0.623	0.590

ра δ . При увеличении параметра δ напряжения повышаются на внешней граничной поверхности $\zeta = 1$ и снижаются (по абсолютной величине) на внутренней поверхности $\zeta = -1$.

Окружные напряжения положительны во всех точках поперечного сечения и имеют аналогичную тенденцию к изменению на лицевых граничных поверхностях при увеличении параметра δ .

Данные таблицы 2 характеризуют изменения нормальных поперечных напряжений σ_{33}/p в зависимости от изменения координаты $\rho = r/r_0$ для двух значений параметра $\delta = 0$ и $\delta = 0.1$. При удалении от контура отверстия $\rho = 1$, напряжения σ_{33} на внешней (не нагруженной) поверхности $\zeta = 1$ быстро затухают, приближаясь к нулю, а на внутренней (нагруженной) поверхности $\zeta = -1$ они стремятся к заданному значению $\sigma_{33} = -0.1p = -q$ (при $p = qR/2h$ и $R/h = 20$).

РЕЗЮМЕ. Методом розвинення шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра знайдено рівняння рівноваги неоднорідних по товщині пружних анізотропних оболонок. Викладено спосіб представлення загального аналітичного розв'язку системи рівнянь рівноваги трансверсально ізотропної сферичної оболонки. Розв'язана задача про напружений стан пологої неоднорідної сферичної оболонки з круговим отвором, на поверхні якого задані нормальні переміщення і поперечні дотичні напруження.

Ключові слова. Неоднорідність, анізотропія, трансверсально-ізотропна сферична оболонка, круговий отвір.

SUMMARY. By using a method of expanding of the unknown functions in a Fourier series in Legendre polynomials, the equilibrium equations for elastic anisotropic shells non-homogeneous on the thickness are found. A method of a construction of a general analytical solution of system of equilibrium equations for transversally isotropic spherical shell is given. A stress state problem for hollow a non-homogeneous spherical shell with a circular hole the surfaces of which are subjected by normal displacements and transverse stresses is solved.

Key words: non-homogeneous, anisotropic, transversally-isotropic spherical shells, circular hole.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. *Векуа И. Н.* Основы тензорного анализа и теории ковариантов. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
2. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т.* Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. – М.: Наука, 1992. – 332 с.
3. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 367 с.
4. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. / Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Чехов Вал. Н. и др. – К.: Наук. думка, 1980. – 635 с. (Методы расчета оболочек: В 10 т. Т. 1).
5. *Хома И. Ю.* Напряженное состояние неоднородной трансверсально изотропной сферической оболочки с круговой полостью при заданных нелинейно изменяющихся касательных напряжениях // Прикладная механика. – 1996. – Т. 32, № 12. – С. 55–63.
6. *Хома И. Ю.* Об интегрировании системы уравнений упругого равновесия неоднородных по толщине трансверсально изотропных пластин // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38, № 11. – С. 100–109.
7. *Хома И. Ю., Стрыгина О. А.* О решении смешанной задачи для пологой трансверсально изотропной сферической оболочки с круговым отверстием // Theoret. Found. Civil Eng. (Warsaw). – 2009. – № 17. – Р. 119–126.
8. *Хома И. Ю., Стрыгина О. А.* Напряженное состояние пологой сферической оболочки с круговым отверстием, на поверхности которого заданы касательные напряжения // Теорет. и прикладная механика. – 2010. – № 1 (47). – С. 62–68.
9. *Хорошун Л. П., Козлов С. В., Иванов Ю. А., Кошевой И. К.* Обобщенная теория неоднородных по толщине пластин и оболочек. – К.: Наук. думка, 1988. – 152 с.
10. *Шалдырван В. А.* Упругое равновесие толстых пластин с усложненными свойствами. Учеб. пособие. – Донецк, 1980. – 116 с.
11. *Kashtalian M., Rushchitsky I. I.* Revisiting displacement functions in three-dimensional elasticity of inhomogeneous media // Int. J. Sol. Streect. – 2009. – № 46. – Р. 3463–3470.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев
Луганский национальный университет*

Поступила 15.05.2011

Вниманию авторов статей.

1. В журнале публикуются статьи, содержащие новые результаты теоретических и экспериментальных исследований в области двумерной и трехмерной механики деформируемого твердого тела, теории упругости и пластичности, механики разрушения, а также гидромеханики.

2. Статья, подготовленная в текстовом редакторе Word, направляется по e-mail: journaltam@matfak.dongu.donetsk.ua, kaloerov@mail.ru

3. При подготовке статьи необходимо соблюдать структуру изложения: в начале приводится УДК, авторы (с указанием научной степени) и название статьи, затем аннотация и ключевые слова, потом введение (история вопроса и место данной работы), постановка задачи (физическая, математическая), метод и построение решения (без анализа результатов других работ), анализ полученных теоретических и числовых результатов с выводами. В конце статьи приводится список литературы, а также на украинском и английском языках – резюме и ключевые слова (переводы аннотации в начале статьи). Статья должна быть научно и литературно обработана. Особое внимание нужно уделять правильному использованию общепринятой терминологии. Авторам нужно учитывать правильное использование понятий «величина» и «значение» и не допускать стилистических и терминологических погрешностей. Все числовые значения используемых величин должны приводиться в системе Си. В десятичных дробях целая часть должна отделяться от дробной запятой (а не точкой).

4. Текст статьи в редакторе Word набирается шрифтом UkrainianSchoolBook (размером 11), аннотация, ключевые слова, резюме и список литературы, табличный материал – тем же шрифтом размером 9. Формулы набираются с использованием Microsoft Equation или MathType шрифтом UkrainianSchoolBook и Symbol: Full – 11 pt, subscript /superscript – 70 %, sub-subscript/ superscript – 60 %, symbol – 150 %, sub-symbol – 100 %; текст и переменные – курсивом. Указанным способом набираются также все буквы латинского и греческого алфавитов, встречающиеся в тексте. Межстрочный интервал – одинарный. Каждая формула отделяется от основного текста интервалом в 5 пунктов. Параметры страницы: формат – В5 (176×250 мм), поля зеркальные; сверху – 1,7 см, снизу – 2,2 см, внутри – 1,8 см, снаружи – 1,5 см, абзацный отступ 1 см

5. Группы формул отделяются друг от друга знаком точки с запятой, внутри группы формулы отделяются друг от друга знаком запятой. Каждая строка формул набирается отдельным объектом Microsoft Equation. Во всех случаях после знаков препинания ставится один (в объектах Microsoft Equation – два) пробел. Если в строке за формулой в скобках приведены расшифровки величин, то перед скобкой знак запятой или точки с запятой не ставится, но ставятся один пробел. В тех случаях, когда скобки или знаки арифметических действий внутри формул сливаются с соседними символами, нужно ставить пробелы внутри объекта Microsoft Equation. Номер формулы или группы формул ставится в конце последней строки формул. Если подряд приводятся несколько групп формул, то они отделяются друг от друга знаком точки с запятой.

6. Рисунки изготавливаются с использованием графического редактора и представляются в электронном виде в двух экземплярах: «немой» (в формате jpg, bmp и т. д., без подписей), для редактирования при необходимости, и с обозначениями. Сканированные рисунки не принимаются. На рисунки наносятся негустые равномерные сетки, основные линии выполняются толще, чем линии сетки и осей координат; буквенные обозначения набираются размером 9.

7. К статье прилагаются на отдельном листе данные об авторе (авторах) – фамилия, имя, отчество, адрес, телефон, а также на украинском и английском языках фамилии и инициалы авторов и название статьи.