

№ 3-4 (60-61) / 2017

Основан в 1970г.

ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Механика твердого тела

<i>Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б.</i> Теорема Рауса-Ляпунова и ее обобщения	3
<i>Андрюхин А.И., Ковалев А.М., Судаков С.Н.</i> Задача трех тел и определение направления на Луну и Солнце в заданной точке поверхности Земли	11
<i>Горр Г.В., Данилюк Д.А., Ткаченко Д.Н.</i> Кинематическое истолкование движения тела в одном частном случае решения Горячева-Чаплыгина.....	19

Механика деформируемого твердого тела

<i>Болнокин В.Е., Зыонг Минь Хай, Номбре С.Б., Сторожев С.В.</i> Нечеткая модель отражения и преломления гидроакустических волн при наклонном падении на окруженный жидкостью изотропный слой.....	33
<i>Калоеров С.А., Авдюшина Е.В., Занько А.И.</i> Периодическая и двоякопериодическая задачи для анизотропной пластинки с эллиптическими отверстиями или трещинами	46
<i>Нескородев Р.Н.</i> Решение задачи изгиба ортотропной плиты в уточненной постановке	60
<i>Вовк Л.П., Кисель Е.С.</i> Оценка интенсивности локальной концентрации напряжений в окрестности границ сопряжения двух термоупругих сред	69

<i>Kisel K.S.</i> Qualitative analysis of concentration singularity of thermal stresses in machine parts with the irregular boundary	81
--	----

Механика жидкости, газа и плазмы

<i>Белоусов В.В., Коркишко В.В.</i> Математическое моделирование гидродинамических процессов переноса в промежуточном ковше	87
---	----

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 531.36

©2017. Б.И. Коносевиц, Ю.Б. Коносевиц

ТЕОРЕМА РАУСА–ЛЯПУНОВА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

Первые исследования устойчивости стационарных движений консервативных механических систем с циклическими координатами провел Е. Раус, изучавший устойчивость стационарных движений таких систем в случае, когда приведенная потенциальная энергия имеет в стационарной точке изолированный минимум по нециклическим координатам. Требование, чтобы возмущения начальных данных не изменяли констант циклических интегралов, содержащиеся в теореме Е. Рауса, было частично снято А.М. Ляпуновым. Вместо этого А.М. Ляпунов предполагал, что приведенная потенциальная энергия имеет строгий минимум при всех достаточно малых возмущениях циклических постоянных, причем точка минимума является их непрерывной функцией. Л. Сальвадори существенно ослабил это условие и показал, что для устойчивости достаточно, чтобы приведенная потенциальная энергия имела изолированный условный минимум лишь при невозмущенных значениях констант циклических интегралов. Затем Л. Сальвадори развил это направление теории устойчивости применительно к диссипативным механическим системам и далее — к неавтономным системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В настоящей работе дано простое доказательство теоремы, обобщающей основную теорему Л. Сальвадори. Отмечено, что теорема Л. Сальвадори позволяет свести задачу об определении достаточных условий устойчивости стационарного решения автономной системы ОДУ с первыми интегралами к задаче об условном минимуме функции нескольких переменных.

Ключевые слова: механические системы, стационарные движения, устойчивость, циклическая координата, теорема Рауса-Ляпунова.

Введение. Одним из самых старых и известных результатов в теории устойчивости является теорема Лагранжа–Дирихле, в которой устанавливается устойчивость положения равновесия консервативной механической системы при наличии изолированного минимума ее потенциальной энергии. Эта теорема привела А.М. Ляпунова к созданию метода функций Ляпунова, в котором вместо положений равновесия механических систем рассматриваются решения систем ОДУ, а вместо энергии используются функции фазовых переменных и времени, обладающие аналогичными свойствами. В случае стационарных решений систем ОДУ основная теорема Ляпунова об устойчивости, как и теорема Лагранжа–Дирихле, сводит вопрос об устойчивости таких решений к определению условий минимума функции фазовых переменных

В механике часто встречаются системы, у которых часть обобщенных координат, определяющих положение системы в каждый момент времени, не входит явно в выражение кинетической и потенциальной энергии. При этом в выражение кинетической энергии входят производные по времени от таких координат.

Эти обобщенные координаты называют циклическими, а остальные — нециклическими (позиционными). Каждой из циклических координат соответствует интеграл движения. Пользуясь этими интегралами, можно выразить циклические скорости (производные по времени от циклических координат) через позиционные координаты и их производные по времени. Подстановка таких выражений в уравнения движения позволяет получить так называемую приведенную систему уравнений движения, которая имеет меньший порядок, чем исходная. Стационарные решения (положения равновесия) приведенной системы соответствуют стационарным движениям исходной системы, то есть движениям, для которых позиционные координаты и циклические скорости постоянны.

Начиная с Е. Рауса и А.М. Ляпунова, многие ученые занимались исследованием устойчивости стационарных движений консервативных механических систем с циклическими координатами. Наиболее полные результаты здесь получил Л. Сальвадори, который развил соответствующую теорию для случая нестационарных решений неавтономных систем ОДУ.

В настоящей статье дано краткое изложение этих результатов, а затем приведено обобщение основной теоремы Л. Сальвадори.

1. Результаты Е. Рауса и А.М. Ляпунова. Изложим результаты работ Е. Рауса и А.М. Ляпунова, относящиеся к исследованию устойчивости стационарных движений механической системы с n степенями свободы, имеющей циклические координаты. Соответствующая приведенная система может рассматриваться как механическая система, кинетическая энергия которой T_* определенным образом выражается через позиционные координаты и их производные по времени, а потенциальная энергия U_* выражается через позиционные координаты и постоянные циклических интегралов [1]. Таким образом, потенциальная энергия приведенной системы имеет вид $U_* = U_*(q_1, \dots, q_m, C_{m+1}, \dots, C_n)$, где q_1, \dots, q_m — позиционные координаты, C_{m+1}, \dots, C_n — циклические постоянные.

Кинетическая энергия T исходной системы является квадратичной формой всех обобщенных скоростей с коэффициентами, зависящими от позиционных координат. При любых значениях позиционных координат эта квадратичная форма определенно положительна по отношению к обобщенным скоростям, и поэтому для коэффициентов такой квадратичной формы выполняются неравенства Сильвестра. Из них следует, что кинетическая энергия приведенной системы T_* является определенно положительной квадратичной формой производных по времени от позиционных координат при любых значениях этих координат.

Пусть q_{i0} ($i = 1, \dots, m$), C_{j0} ($j = m + 1, \dots, n$) — значения позиционных координат q_i и циклических постоянных C_j , соответствующие рассматриваемому стационарному движению. Е. Раус рассматривал случай консервативной механической системы с интегралом энергии и при этом предполагал, что выполняются следующие два условия:

- 1) функция $U_*(q_1, \dots, q_m, C_{m+1,0}, \dots, C_{n,0})$ имеет при $q_i = q_{i0}$ ($i = 1, \dots, m$) изолированный минимум по q_i ($i = 1, \dots, m$);
- 2) исходные значения циклических постоянных C_{j0} ($j = m + 1, \dots, n$) не из-

меняются вследствие начальных возмущений.

При таких предположениях Раус доказал устойчивость стационарного движения. Это сразу следует из теоремы Ляпунова об устойчивости [2, 3], если принять в качестве функции Ляпунова полную энергию возмущенного движения приведенной системы

$$V = T_*(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, q_1, \dots, q_m) + \\ + U_*(q_1, \dots, q_m, C_{m+1,0}, \dots, C_{n0}) - U_*(q_{10}, \dots, q_{m0}, C_{m+1,0}, \dots, C_{n0}),$$

где T_* — кинетическая энергия возмущенного движения приведенной системы. Действительно, функция T_* является определенно положительной по нециклическим скоростям \dot{q}_i ($i = 1, \dots, m$), а разность приведенных потенциальных энергий является (по предположению 1) определенно положительной по возмущениям $q_i - q_{i0}$ ($i = 1, \dots, m$) нециклических координат. Поэтому функция V является определенно положительной по возмущениям нециклических координат и скоростей. Производная функции V по t силу уравнений движения равна $\dot{V} = 0$. Отсюда, по теореме Ляпунова [2, 3], сразу следует устойчивость стационарного движения $\dot{q}_i = 0$, $q_i = q_{i0}$ ($i = 1, \dots, m$) приведенной системы при фиксированных значениях $C_j = C_{j0}$ ($j = m + 1, \dots, n$) циклических постоянных.

Ляпунов показал, что от второго требования Рауса можно отказаться, если усилить первое требование [4]. Он предполагал, что приведенная потенциальная энергия U_* имеет изолированный минимум по позиционным координатам при любых значениях постоянных C_j ($j = m + 1, \dots, n$), близких к C_{j0} , причем точка минимума $q_i = F_i(C_{m+1}, \dots, C_n)$ ($i = 1, \dots, m$) непрерывно зависит от C_j ($j = m + 1, \dots, n$).

Фактически Ляпунов рассматривал не консервативную механическую систему с циклическими координатами, а автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $f : \Omega \rightarrow R^n$ — гладкая функция, Ω — область в R^n , содержащая исследуемую на устойчивость стационарную точку. Путем переноса начала координат в эту точку обеспечивается выполнение равенства $f(0) = 0$, так что система (1) имеет нулевое решение $x = 0$. Предполагается, что система (1) имеет не зависящие от времени первые интегралы

$$u_0(x) = c_0, \quad u_1(x) = c_1, \quad \dots, \quad u_m(x) = c_m \\ (u_0(0) = u_1(0) = \dots = u_m(0) = 0), \tag{2}$$

которые удовлетворяют одному из условий:

А) функция $u_0(x)$ имеет в точке $x = 0$ изолированный минимум на множестве тех точек x , где $u_i(x) = 0$ ($i = 1, \dots, m$);

Б) при любых близких к $c_i = 0$ значениях c_i ($i = 1, \dots, m$) интегралов $u_1(x), \dots, u_m(x)$ функция $u_0(x)$ имеет изолированный минимум в точке $x = x(c_1, \dots, c_m)$, причем функция $x(c_1, \dots, c_m)$ непрерывна, $x(0, \dots, 0) = 0$.

Тогда при условии А решение $x = 0$ рассматриваемой системы устойчиво по крайней мере для возмущений, не изменяющих констант интегралов $u_i(x)$ ($i = 1, \dots, m$), а при условии Б решение $x = 0$ устойчиво для всяких возмущений.

2. Теоремы Л. Сальвадори. В работе [5] Л. Сальвадори установил более сильный результат.

Теорема 1. *Нулевое решение $x = 0$ автономной системы (1) с первыми интегралами (2) устойчиво для любых начальных возмущений при одном лишь условии А.*

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(x) = u_0^2(x) + u_1^2(x) + \dots + u_m^2(x). \quad (3)$$

Согласно (2) имеем $V(0) = 0$. Далее, на множестве точек $x \neq 0$, где $u_i(x) = 0$ ($i = 1, \dots, m$), по условию А имеем $u_0(x) > 0$, и поэтому $V(x) > 0$. Вне этого множества при $x \neq 0$ имеем $u_i(x) \neq 0$ хотя бы для одного номера $i = 1, \dots, m$, и поэтому снова $V(x) > 0$. Значит, функция (3) является определенно положительной относительно x . Так как функции u_0, u_1, \dots, u_m — интегралы рассматриваемой системы уравнений, то производная функции V по t в силу системы (1) равна $\dot{V}(x) = 0$. Следовательно, выполнены условия теоремы Ляпунова об устойчивости [2, 3], и поэтому стационарное решение $x = 0$ устойчиво. \square

В случае консервативных механических систем с циклическими координатами из теоремы 1 следует, что для устойчивости стационарного движения достаточно, чтобы приведенная потенциальная энергия имела условный минимум по позиционным координатам при невозмущенных значениях циклических постоянных.

Теорема 1 может быть распространена на случай, когда функции $u_i(x)$ ($i = 1, \dots, m$) по-прежнему являются интегралами, но функция $u_0(x)$ интегралом не является, а удовлетворяет условию $\dot{u}_0(x) \leq 0$. Доказательство этого результата принадлежит Л. Сальвадори (см. [3]). Заметим, что функция (3) здесь не удовлетворяет условию $\dot{V} \leq 0$ теоремы Ляпунова, так как производная $\dot{V}(x) = 2\dot{u}_0(x)u_0(x)$ может быть положительной при $\dot{u}_0(x) < 0$, если $u_0(x) < 0$.

Таким образом, Л. Сальвадори распространил полученный им ранее результат на консервативные механические системы с циклическими координатами при наличии частичной диссипации энергии. Затем он обобщил его на широкий класс систем ОДУ с многомерным первым интегралом (см. [3]). Существенным обобщением этих результатов является приведенная ниже теорема Л. Сальвадори [6], в которой для неавтономной системы ОДУ вместо векторного первого интеграла рассматривается вектор-функция w , удовлетворяющая условию $\dot{W}(t, x) \leq 0$, где $W(t, x) = \|w(t, x)\|^2$.

Пусть Ω — область в R^n , содержащая точку $x = 0$, $I = [\tau, \infty)$ — числовая полуось ($\tau \in R$), $f : I \times \Omega \rightarrow R^n$ — непрерывная функция такая, что $f(t, 0) \equiv 0$ и для любой пары $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ система

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (4)$$

имеет единственное решение $x(t, t_0, x_0)$, удовлетворяющее условию $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$. Правый максимальный интервал существования этого решения обозначается через $J^+(t_0, x_0)$ или просто J^+ . Система (4) допускает нулевое решение $x = 0$.

Пусть заданы также функции $V : I \times \Omega \rightarrow R$, $w : I \times \Omega \rightarrow R^m$ ($m < n$), причем $V(t, 0) \equiv 0$, $w(t, 0) \equiv 0$. Обозначая через $\|\cdot\|$ какие-либо нормы в R^n и R^m , приведем в удобной форме два определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Согласно А.М. Ляпунову [4], нулевое решение системы (4) устойчиво по отношению к функции w , если для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 > \tau$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого $x_0 \in \Omega$, удовлетворяющего условию $\|x_0\| < \delta$, при всех $t \in J^+(t_0, x_0)$ выполнено неравенство $\|w(t, x(t, t_0, x_0))\| < \varepsilon$.

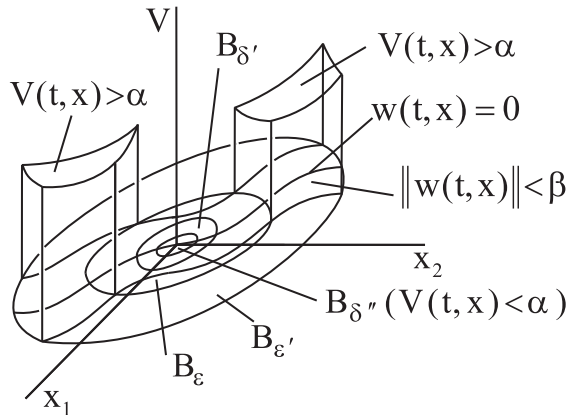


Рис. 1. Положительная определенность V на множествах $E_t(w = 0)$.

В частном случае $w(t, x) \equiv x$ получаем отсюда обычное определение устойчивости по Ляпунову. Очевидно, что любое решение системы (4) устойчиво по отношению к ее непрерывному первому интегралу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. (Л. Сальвадори [6]). Функция V называется положительно определенной на множествах $E_t(w = 0)$, если существует $\varepsilon' > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$ найдутся $\alpha, \beta > 0$ такие, что $V(t, x) > \alpha$ для всех $(t, x) \in I \times \Omega$, удовлетворяющих условиям $\varepsilon \leq \|x\| \leq \varepsilon'$, $\|w(t, x)\| < \beta$.

Геометрический смысл определения 2 ясен из рис. 1. В качестве исходной области рассматривается шар $B_{\varepsilon'}$ радиуса ε' с центром в нуле. Выберем любое $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$. Тогда найдутся $\alpha, \beta > 0$ такие, что при всех $t \in I$ будет $V(t, x) > \alpha$ для точек x из пересечения кольца $\varepsilon \leq \|x\| \leq \varepsilon'$ и β -окрестности множества $\|w(t, x)\| = 0$. Эта β -окрестность $\|w(t, x)\| < \beta$ на рис. 1 заштрихована.

Теорема 2. (Л. Сальвадори [6]). Пусть для неавтономной системы (4) существуют функции $V : I \times \Omega \rightarrow R$, $w : I \times \Omega \rightarrow R^m$, которые удовлетворяют условиям:

$$1) \quad V(t, 0) = 0, \quad w(t, 0) = 0, \quad t \in I;$$

2) функция V положительно определена на множествах $E_t(w = 0)$;

3) производная функции V по t в силу системы (4) удовлетворяет неравенству $\dot{V}(t, x) \leq 0$, $(t, x) \in I \times \Omega$;

4) $\dot{W}(t, x) \leq 0$, $(t, x) \in I \times \Omega$, $W(t, x) = \|w(t, x)\|^2$.

Тогда нулевое решение системы (4) устойчиво.

Для применения этой теоремы к исследованию устойчивости стационарных движений механических систем с частичной диссипацией энергии в качестве функций V и w достаточно взять полную энергию возмущений и набор циклических интегралов уравнений возмущенного движения.

3. Обобщение теоремы Л. Сальвадори. Сначала докажем анонсированную в [7] теорему, обобщающую теорему Сальвадори, а затем получим из нее теорему Сальвадори 2.

Теорема 3. Пусть для системы (4) существуют непрерывно дифференцируемая функция $V : I \times \Omega \rightarrow R$ и непрерывная функция $w : I \times \Omega \rightarrow R^m$ ($m < n$), которые удовлетворяют условиям:

1) $V(t, 0) = 0$, $w(t, 0) = 0$, $t \in I$;

2) функция V положительно определена на множествах $E_t(w = 0)$;

3) $\dot{V}(t, x) \leq 0$, $(t, x) \in I \times \Omega$;

4) нулевое решение системы (4) устойчиво по отношению к функции w .

Тогда нулевое решение системы (4) устойчиво.

Доказательство. По условию 2, для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$ существуют $\alpha, \beta > 0$ такие, что $V(t, x) > \alpha$ для всех $(t, x) \in I \times \Omega$, удовлетворяющих неравенствам $\varepsilon \leq \|x\| \leq \varepsilon'$, $\|w(t, x)\| < \beta$. Пусть $t_0 \in I$. Воспользовавшись условием 4, находим $\delta' \in (0, \varepsilon)$ такое, что для любого $x_0 \in \Omega$, удовлетворяющего неравенству $\|x_0\| < \delta'$, при всех $t \in J^+(t_0, x_0)$ выполнено неравенство $\|w(t, x(t, t_0, x_0))\| < \beta$, и поэтому $V(t, x(t, t_0, x_0)) > \alpha$ при $\varepsilon \leq \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \varepsilon'$. Так как функция V непрерывна и $V(t, 0) \equiv 0$, найдется $\delta'' \in (0, \varepsilon)$ такое, что $V(t_0, x_0) < \alpha$ при $\|x_0\| < \delta''$.

Покажем, что если $\|x_0\| < \delta$, где $\delta = \min(\delta', \delta'')$, то $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ для всех $t \in J^+(t_0, x_0)$. В самом деле, если допустить, что это неверно, то для некоторого $t' > t_0$ будем иметь $\|x(t', t_0, x_0)\| = \varepsilon$, и следовательно, $V(t', x(t', t_0, x_0)) > \alpha > V(t_0, x_0)$. Однако, в соответствии с условием 3, функция V не возрастает на решениях системы (1). Теорема 3 доказана. \square

Доказательство теоремы 3 короче и проще доказательства теоремы 2 в [6].

Теорема Сальвадори 2 отличается от теоремы 3 только тем, что в качестве условия 4 в теореме Сальвадори взято неравенство

$$\dot{W}(t, x) \leq 0 \quad (W(t, x) = \|w(t, x)\|^2). \quad (5)$$

Поэтому для доказательства теоремы Сальвадори достаточно установить, что из (5) следует условие 4 теоремы 3. Очевидно, в (5) можно взять $W(t, x) = \|w(t, x)\|$. Пусть заданы $\varepsilon > 0$, $t_0 > \tau$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\|w(t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при $\|x_0\| < \delta$. Это возможно, так как $\|w(t, 0)\| = 0$ и $\|w(t, x)\|$ непрерывна по x .

В соответствии с (5), функция $\|w(t, x)\|$ не возрастает на траектории $x(t, t_0, x_0)$. Поэтому имеем $\|w(t, x(t, t_0, x_0))\| < \varepsilon$, $t \in J^+$. Это означает, что выполнено условие 4 теоремы 3. Теорема Сальвадори доказана.

В теоремах 2, 3 трудно проверяемым является условие 2 положительной определенности функции V на множествах $E_t(w = 0)$. Но, как отмечено в [6], в случае, когда функции V и w не зависят от t и непрерывны, это условие означает, что в точке $x = 0$ функция V имеет изолированный минимум на множестве точек $x \in \Omega$, удовлетворяющих условию $w(x) = 0$. Условие 4 автоматически выполняется, когда функция w — векторный первый интеграл. Следовательно, для автономной системы (1) получаем из теоремы 2 такой результат.

Теорема 4. Пусть непрерывно дифференцируемая функция $V : \Omega \rightarrow R$ и непрерывная функция $w : \Omega \rightarrow R^m$ удовлетворяют условиям:

- 1) $V(0) = 0$, $w(0) = 0$;
- 2) точка $x = 0$ является точкой строгого локального минимума функции V на множестве тех точек $x \in \Omega$, где $w(x) = 0$;
- 3) производная функции V в силу системы (1) удовлетворяет неравенству $\dot{V}(x) \leq 0$, $x \in \Omega$;
- 4) $w(x) = \text{const}$ на решениях системы (1).

Тогда нулевое решение системы (1) устойчиво.

Теорема 4 сводит вопрос об устойчивости стационарного решения автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с первыми интегралами к задаче об условном минимуме функции нескольких переменных. С ее помощью в [8] получено достаточное условие устойчивости стационарных решений для многогоковой модели синхронного гироскопа в кардановом подвесе.

1. Гантмахер Ф.Р. Введение в аналитическую механику. / Ф.Р. Гантмахер – М.: Наука, 1963. – 302 с.
2. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. / И.Г. Малкин – М.: Наука, 1966. – 532 с.
3. Рунд Н. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. / Н. Рунд, П. Абетс, М. Лалуа – М.: Мир, 1980. – 304 с.
4. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. Т. 2. / А.М. Ляпунов – М., Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – 475 с.
5. Salvatory L. Un'osservazione su di un criterio stabilita del Routh / L. Salvatory // Rend. Accad. Sci. Fis. – Mat. Napoli. – 1953. – **20**. – P. 269–272.
6. Salvatory L. Sulla stabilita del movimento / L. Salvatory // Matematiche. – 1969. – **24**. – P. 218–239. (Русский перевод: Сальвадори Л. Об устойчивости движения / Л. Сальвадори // Механика. Периодический сборник переводов иностранных статей. – 1970. – 6 (124). – С. 3–19.
7. Коносевиц Б.И. О критерии устойчивости Рауса–Ляпунова–Сальвадори / Б.И. Коносевиц, А.О. Игнатъев // Доповіди НАН України. – 1997. – № 10. – С. 78–79.
8. Коносевиц Б.И. Устойчивость стационарных решений уравнений многогоковой модели синхронного гироскопа в кардановом подвесе / Б.И. Коносевиц, Ю.Б. Коносевиц // Механика твердого тела. – 2017. – Вып. 47. – С. 87–100.

One of the well-known results of the stability theory is Lagrange–Dirichlet theorem, where stability of an equilibrium of a conservative mechanical system is established in the case of isolated minimum of its potential energy. This theorem induced A.M. Lyapunov to originate his method for stability analysis of time dependent solutions of ODE systems with use of special type functions instead of potential energy. Being applied to steady solutions of autonomous ODE, Lyapunov’s method reduces the problem of their stability to the minimum problem of a function of several variables.

Starting with E.T. Routh and A.M. Lyapunov, many scientists researched the stability problem for steady motions of mechanical systems with ignorable coordinates. Differential equations of motion of this type mechanical systems have a set of the first integrals. L. Salvadore considered equilibriums of corresponding autonomous ODE systems with the first integrals and proved that stability conditions can be obtained here as conditions of constrained minimum of a function of several variables on the set defined by the first integrals at unperturbed values of their constants. The most complete results in this line of investigations were obtained later by L. Salvadore, who developed the theory as applied to non-steady solutions of a wide class of non-autonomous ODE systems.

In the present article, a short proof is given for generalization of the central Salvadore theorem.

Keywords: *mechanical systems, stationary movements, stability, ignorable coordinate, Routh–Lyapunov theorem..*

ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк
konos.donetsk@yandex.ru

Получено 10.11.17

УДК 521.1:531

©2017. А.И. Андрюхин, А.М. Ковалев, С.Н. Судаков

ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ НА ЛУНУ И СОЛНЦЕ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

Движение системы Земля–Луна–Солнце рассматривается как задача трех тел. Уравнения движения записаны в невращающейся системе координат с началом в центре масс Земли. Для решения уравнений использован численный метод Рунге–Кутты. Даны формулы пересчета координат Луны и Солнца в систему координат, связанную с какой-либо точкой поверхности Земли.

Ключевые слова: задача трех тел, система Земля–Луна–Солнце, описание траектории движения, решение в координатах с наблюдателем в центре.

Введение. Задаче трех тел и движению системы Земля–Луна–Солнце посвящена обширная литература [1] – [4]. Эта задача имеет важное научное значение и находит широкие приложения в такой важной современной области техники, как космонавтика. Во многих случаях задача трех тел решается либо в инерциальной, либо в невращающейся системе координат, начало которой совпадает с каким-либо из трех тел, рассматриваемых как точечные массы. В предлагаемой работе уравнения задачи трех тел записываются в невращающейся системе координат, начало которой находится в центре масс Земли. Уравнения движения решаются численным методом Рунге–Кутты. Такой подход позволяет решить задачу трех тел и тем самым описать движение Луны и Солнца относительно Земли на сравнительно коротком интервале времени (месяцы, годы, десятилетия). Однако, он не дает ясного представления наблюдателю, находящемуся в заданной точке поверхности Земли, где именно будут находиться Луна и Солнце в определенный момент времени и какую траекторию они будут описывать по отношению к наблюдателю. Для решения этого вопроса в работе строятся преобразования, позволяющие представить результаты решения в системе координат, начало которой совпадает с положением наблюдателя.

1. Уравнения движения. Обозначим через $O\xi\eta\zeta$ неподвижную декартову систему координат, начало которой совпадает с общим центром масс системы трех тел. В этой системе координат уравнения движения системы трех тел имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}_1 &= \frac{\mu_2}{r_{12}^3}(\xi_2 - \xi_1) + \frac{\mu_3}{r_{13}^3}(\xi_3 - \xi_1), \\ \ddot{\eta}_1 &= \frac{\mu_2}{r_{12}^3}(\eta_2 - \eta_1) + \frac{\mu_3}{r_{13}^3}(\eta_3 - \eta_1), \\ \ddot{\zeta}_1 &= \frac{\mu_2}{r_{12}^3}(\zeta_2 - \zeta_1) + \frac{\mu_3}{r_{13}^3}(\zeta_3 - \zeta_1),\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{\xi}_2 &= \frac{\mu_1}{r_{12}^3}(\xi_1 - \xi_2) + \frac{\mu_3}{r_{23}^3}(\xi_3 - \xi_2), \\
 \ddot{\eta}_2 &= \frac{\mu_1}{r_{12}^3}(\eta_1 - \eta_2) + \frac{\mu_3}{r_{13}^3}(\eta_3 - \eta_2), \\
 \ddot{\zeta}_2 &= \frac{\mu_1}{r_{12}^3}(\zeta_1 - \zeta_2) + \frac{\mu_3}{r_{13}^3}(\zeta_3 - \zeta_2), \\
 \ddot{\xi}_3 &= \frac{\mu_1}{r_{13}^3}(\xi_1 - \xi_3) + \frac{\mu_2}{r_{23}^3}(\xi_2 - \xi_3), \\
 \ddot{\eta}_3 &= \frac{\mu_1}{r_{13}^3}(\eta_1 - \eta_3) + \frac{\mu_2}{r_{23}^3}(\eta_2 - \eta_3), \\
 \ddot{\zeta}_3 &= \frac{\mu_1}{r_{13}^3}(\zeta_1 - \zeta_3) + \frac{\mu_2}{r_{23}^3}(\zeta_2 - \zeta_3),
 \end{aligned}$$

где m_1, m_2, m_3 – соответственно массы Земли, Луны и Солнца; $\mu_i = Gm_i$ $i = 1, 2, 3$, G – гравитационная постоянная; ξ_1, η_1, ζ_1 – координаты центра масс Земли, ξ_2, η_2, ζ_2 – координаты центра масс Луны, ξ_3, η_3, ζ_3 – координаты центра масс Солнца; $r_{12} = \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2}$ – расстояние от Земли до Луны, $r_{13} = \sqrt{(\xi_3 - \xi_1)^2 + (\eta_3 - \eta_1)^2 + (\zeta_3 - \zeta_1)^2}$ – расстояние от Земли до Солнца, $r_{23} = \sqrt{(\xi_2 - \xi_3)^2 + (\eta_2 - \eta_3)^2 + (\zeta_2 - \zeta_3)^2}$ – расстояние от Луны до Солнца.

Через O_1xyz обозначим систему координат, начало O_1 которой совпадает с центром масс Земли, а оси направлены параллельно соответствующим осям системы $O\xi\eta\zeta$. Вводя новые переменные

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \xi_2 - \xi_1, & y_2 &= \eta_2 - \eta_1, & z_2 &= \zeta_2 - \zeta_1, \\
 x_3 &= \xi_3 - \xi_1, & y_3 &= \eta_3 - \eta_1, & z_3 &= \zeta_3 - \zeta_1,
 \end{aligned}$$

представим уравнения движения (1) в виде

$$\begin{aligned}
 \ddot{\xi}_1 &= \frac{\mu_2}{r_{12}^3}x_2 + \frac{\mu_3}{r_{13}^3}x_3, \\
 \ddot{\eta}_1 &= \frac{\mu_2}{r_{12}^3}y_2 + \frac{\mu_3}{r_{23}^3}y_3, \\
 \ddot{\zeta}_1 &= \frac{\mu_2}{r_{12}^3}z_2 + \frac{\mu_3}{r_{13}^3}z_3,
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_2 &= -\frac{\mu_1 + \mu_2}{r_{12}^3}x_2 + \frac{\mu_3}{r_{23}^3}(x_3 - x_2) - \frac{\mu_3}{r_{13}^3}x_3, \\
 \ddot{y}_2 &= -\frac{\mu_1 + \mu_2}{r_{12}^3}y_2 + \frac{\mu_3}{r_{23}^3}(y_3 - y_2) - \frac{\mu_3}{r_{13}^3}y_3, \\
 \ddot{z}_2 &= -\frac{\mu_1 + \mu_2}{r_{12}^3}z_2 + \frac{\mu_3}{r_{23}^3}(z_3 - z_2) - \frac{\mu_3}{r_{13}^3}z_3, \\
 \ddot{x}_3 &= -\frac{\mu_1 + \mu_3}{r_{13}^3}x_3 + \frac{\mu_2}{r_{23}^3}(x_2 - x_3) - \frac{\mu_2}{r_{12}^3}x_2,
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}_3 &= -\frac{\mu_1 + \mu_3}{r_{13}^3}y_3 + \frac{\mu_2}{r_{23}^3}(y_2 - y_3) - \frac{\mu_2}{r_{12}^3}y_2, \\ \ddot{z}_3 &= -\frac{\mu_1 + \mu_3}{r_{13}^3}z_3 + \frac{\mu_2}{r_{23}^3}(z_2 - z_3) - \frac{\mu_2}{r_{12}^3}z_2,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}r_{12} &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}, & r_{13} &= \sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}, \\ r_{23} &= \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2},\end{aligned}$$

x_2, y_2, z_2 и x_3, y_3, z_3 – соответственно, координаты Луны и Солнца в системе координат O_1xyz , начало которой совпадает с центром масс Земли. Система уравнений (3) решается независимо от системы (2). Система (2) решается после того, как будет найдено решение системы (3).

После задания начальных условий уравнения (3) будут описывать движение Луны и Солнца относительно системы координат O_1xyz .

2. Формулы пересчета в систему координат, начало которой совпадает с положением наблюдателя. Введем систему координат $O_1\hat{x}\hat{y}\hat{z}$, жестко связанную с Землей. Начало ее O_1 совпадает с центром масс Земли, ось $O_1\hat{x}$ лежит в экваториальной плоскости и направлена к Гринвичскому меридиану. Ось $O_1\hat{z}$ совпадает с осью вращения Земли и направлена к Северному полюсу.

Положение осей $O_1\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ относительно O_1xyz определим углами Эйлера φ, ψ, θ . Матрица перехода $A = (a_{ij})$ от осей O_1xyz к $O_1\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \theta & -\cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Введем еще систему координат $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$, начало \tilde{O} которой расположено в заданной точке поверхности Земли, ось $\tilde{O}\tilde{x}$ направлена по касательной к параллели, проходящей через точку \tilde{O} , ось $\tilde{O}\tilde{y}$ – по касательной к меридиану, а полуось $\tilde{O}\tilde{z}$ является внешней нормалью к поверхности Земли. Если $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ – координаты какой-либо точки в системе координат $O_1\hat{x}\hat{y}\hat{z}$, то ее координаты $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ в системе $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ определяются формулой

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi} & \sin \tilde{\psi} & 0 \\ -\sin \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta} & \cos \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta} & \sin \tilde{\theta} \\ \sin \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} & -\cos \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix}. \quad (5)$$

где $\tilde{\psi}, \tilde{\theta}$ – углы Эйлера, осуществляющие поворот системы $O_1\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ вокруг ее начала так, чтобы ее оси стали параллельны соответствующим осям системы $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$.

Таким образом, если некоторая точка имеет в осях O_1xyz координаты x, y, z , то в осях $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ ее координаты $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ определяются двумя последовательными ортогональными преобразованиями:

а) преобразование поворота

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где матрица A имеет вид (4);

б) преобразование поворота (5).

В ряде случаев возникает необходимость выполнения обратного преобразования, когда по известным координатам точки $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ в осях $\tilde{O}\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$, нужно найти ее координаты x, y, z в осях O_1xyz . Необходимость такого преобразования возникает, например, тогда, когда известны координаты Луны и Солнца, полученные путем астрономических наблюдений, и их нужно использовать в качестве начальных или граничных условий для расчета орбит.

Для получения формул обратного преобразования, из соотношений (5) находим

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi} & -\sin \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta} & \sin \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} \\ \sin \tilde{\psi} & \cos \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta} & -\cos \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta} \\ 0 & \sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} + R \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Далее, используя матрицу A^T , получающуюся транспонированием матрицы A , находим

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Теперь необходимо задать углы Эйлера φ, ψ, θ , входящие в элементы матрицы A и определяющие положение осей $O_1\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, жестко связанных с Землей, относительно осей O_1xyz . Выше было сделано предположение, что оси $O_1\hat{x}\hat{y}$ лежат в экваториальной плоскости и ось $O_1\hat{x}$ пересекает гринвичский меридиан. Ось $O_1\hat{z}$ направлена по оси вращения Земли и ее положительная полуось проходит через Северный полюс. Угол $\theta = 23^\circ 27'$ – это угол между осями O_1z и $O_1\hat{z}$. В день весеннего равноденствия (21 марта) вектор проведенный из центра масс Земли к центру масс Солнца должен быть ортогонален направляющему вектору оси вращения Земли. Принимая приближенно плоскость O_1xy за плоскость эклиптики, мы можем записать условие ортогональности в виде

$$x_s x_1 + y_s y_1 = 0, \quad (9)$$

где x_s, y_s, z_s – значения координат Солнца x_3, y_3, z_3 в день весеннего равноденствия; x_1, y_1, z_1 – проекции на оси O_1xyz единичного вектора, проведенного из

центра Земли в направлении к Северному полюсу по ее оси вращения. Из (9) следует

$$\frac{x_1}{y_1} = -\frac{y_s}{x_s}. \quad (10)$$

Выражение для угла прецессии ψ , определяющего положение оси вращения Земли, записывается в виде

$$\psi = \frac{3}{2}\pi - \arcsin \frac{|x_1|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}. \quad (11)$$

Используя равенства (10), преобразуем выражение (12) к виду

$$\psi = \frac{3}{2}\pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + (y_s/x_s)^2}}. \quad (12)$$

Угол прецессии ψ изменяется медленно (один градус за 26000 лет), поэтому на сравнительно малых отрезках времени (месяцы, годы, десятилетия) его можно считать постоянным и определять по формуле (12).

Угол φ выбирается так, чтобы гринвичский меридиан лежал в одной плоскости с Солнцем и был освещен. Для этого нужно положить $\varphi = \pi$. Тогда меридиан, соответствующий долготе 180° , будет находиться в тени.

Угол собственного вращения φ является величиной переменной. Приблизительно считая скорость вращения Земли постоянной, можно задать φ формулой

$$\varphi = \omega t + \varphi_0,$$

где ω – скорость собственного вращения Земли, а φ_0 – произвольная постоянная.

3. Численный пример. Решим задачу трех тел, описывающую движение системы Земля–Луна–Солнце. Массы Земли, Луны и Солнца соответственно имеют значения: $m_1 = 5973 \cdot 10^{21} \text{ кг}$, $m_2 = 0.0123 \cdot m_1$, $m_3 = 332946 \cdot m_1$. Гравитационная постоянная $G = 6673 \cdot 10^{-14} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$, средний радиус Земли $R = \sqrt[3]{6378137^2 \cdot 6356752} \text{ м}$. За размерность времени примем $T = 24 \cdot 60^2 \text{ с}$.

Вводя безразмерные переменные

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad X_i = \frac{x}{R}, \quad Y_i = \frac{y}{R}, \quad Z_i = \frac{z}{R}, \quad i = 2, 3, \quad \rho_{ij} = \frac{r_{ij}}{R}, \quad ij = 1, 2, 3$$

и безразмерные коэффициенты

$$B_i = \frac{\mu_i T^2}{R^3}, \quad i = 1, 2, 3,$$

запишем уравнения движения (3) в безразмерных переменных

$$\frac{d^2 X_2}{d\tau^2} = -(B_1 + B_2) \frac{X_2}{\rho_{12}^3} + B_3 \frac{X_3 - X_2}{\rho_{23}^3} - B_3 \frac{X_3}{\rho_{13}^3},$$

$$\frac{d^2 X_3}{d\tau^2} = -(B_1 + B_3) \frac{X_3}{\rho_{23}^3} + B_2 \frac{X_2 - X_3}{\rho_{23}^3} - B_2 \frac{X_2}{\rho_{12}^3},$$

$$(XYZ),$$

где символ (XYZ) означает, что остальные уравнения получаются циклической перестановкой взятых в скобки индексов.

Обозначая компоненты безразмерной скорости Луны и Солнца в осях O_1xyz через U_2, V_2, W_2 и U_3, V_3, W_3 соответственно, запишем уравнения движения в нормальной форме

$$\begin{aligned} \frac{dU_2}{d\tau} &= -(B_1 + B_2) \frac{X_2}{\rho_{12}^3} + B_3 \frac{X_3 - X_2}{\rho_{23}^3} - B_3 \frac{X_3}{\rho_{13}^3}, \\ \frac{dV_2}{d\tau} &= -(B_1 + B_2) \frac{Y_2}{\rho_{12}^3} + B_3 \frac{Y_3 - Y_2}{\rho_{23}^3} - B_3 \frac{Y_3}{\rho_{13}^3}, \\ \frac{dW_2}{d\tau} &= -(B_1 + B_2) \frac{Z_2}{\rho_{12}^3} + B_3 \frac{Z_3 - Z_2}{\rho_{23}^3} - B_3 \frac{Z_3}{\rho_{13}^3}, \\ \frac{dU_3}{d\tau} &= -(B_1 + B_3) \frac{X_3}{\rho_{23}^3} + B_2 \frac{X_2 - X_3}{\rho_{23}^3} - B_2 \frac{X_2}{\rho_{12}^3}, \\ \frac{dV_3}{d\tau} &= -(B_1 + B_3) \frac{Y_3}{\rho_{23}^3} + B_2 \frac{Y_2 - Y_3}{\rho_{23}^3} - B_2 \frac{Y_2}{\rho_{12}^3}, \\ \frac{dW_3}{d\tau} &= -(B_1 + B_3) \frac{Z_3}{\rho_{23}^3} + B_2 \frac{Z_2 - Z_3}{\rho_{23}^3} - B_2 \frac{Z_2}{\rho_{12}^3}, \\ \frac{dX_2}{d\tau} &= U_2, \quad \frac{dY_2}{d\tau} = V_2, \quad \frac{dZ_2}{d\tau} = W_2, \\ \frac{dX_3}{d\tau} &= U_3, \quad \frac{dY_3}{d\tau} = V_3, \quad \frac{dZ_3}{d\tau} = W_3. \end{aligned}$$

Начальные условия зададим так:

$$\begin{aligned} X_2 &= 63.62724948, \quad Y_2 = 0, \quad Z_2 = 5.712981084, \\ X_3 &= 23858.10448, \quad Y_3 = 0, \quad Z_3 = 0, \\ U_2 &= 0, \quad V_2 = 13.12149193, \quad W_2 = 0, \\ U_3 &= 0, \quad V_3 = 397.5596873, \quad W_3 = 0, \end{aligned}$$

при $\tau = 0$. Начальные условия для координат выбирались так, чтобы в начальный момент движения Земля, Луна и Солнце находились на одной прямой, при этом Луна и Солнце находились бы с одной стороны от Земли и были удалены от нее на максимальное расстояние. Начальные значения скорости Солнца выбирались в процессе счета так, чтобы Солнце делало полный оборот за 365,25 суток. Начальная скорость луны выбиралась так, чтобы она делала полный оборот за 27 суток.

Задача трех тел и определение направления

Таблица 1. Координаты Луны

τ	X_2	Y_2	Z_2
0	63.62724948	0	5.712981084
5	31.3248458044429370	53.7586712324535654	2.76199339785978504
10	-33.3929184481833375	47.0891165422071651	-3.09695446938904960
15	-51.6719878844557172	-20.1012305214347826	-4.62000867506137336
20	3.80829900559556345	-59.6916425357193674	0.532026973043737250
25	57.6154051980320290	-26.1098337267741592	5.32794282427876720
27	63.5431069288556502	-.786907207776379902	5.77378855072171770

Таблица 2. Координаты Солнца

τ	X_3	Y_3	Z_3
0	23858.10448	0	0
30	20889.7996222594774	11423.3869643646540	-0.561984029760432061e-2
60	12695.4947662270770	19982.2370688920272	-0.190712434260763702e-1
90	1280.00651829069398	23451.1076996078374	-0.307348773563302300e-1
120	-10455.5820599277486	20814.0582324941098	-0.279051667917281226e-1
150	-19392.9535095986539	12633.8764758080524	-0.257717136820854490e-2
180	-23061.6560668369930	1030.59857057629916	0.0392567598834682730
210	-20423.0684350114389	-10853.7912295782936	0.0777874870506343602
240	-12225.7748008205163	-19791.3752391546514	0.0922456554613577950
270	-747.809635093441216	-23440.1370629697340	0.0732455072778777083
300	10938.7418684421482	-20962.0801515470958	0.0254321028467319431
330	19842.2196027310128	-13126.5785778119371	-0.362447598317099662e-1
360	23772.4837937486154	-1992.98477651382200	-0.915920391147007628e-1
365.25	23856.5079298355050	90.4837017519469384	-.132163248204991035

Результаты расчета представлены в таблицах 1 и 2.

4. Заключение. В работе численным методом Рунге–Кутты решена задача трех тел, описывающая движение системы Земля–Луна–Солнце. Задача решалась в невращающейся системе координат, начало которой совпадает с центром масс Земли. Однако, решение задачи в такой системе координат не дает ясного представления о том, каким будет видеть движение Луны и Солнца наблюдатель, находящийся в заданной точке земной поверхности. Чтобы представить его таким, каким оно видится наблюдателю, в работе даны формулы перехода к системе координат, начало которой совпадает с положением наблюдателя, а оси неизменно связаны с поверхностью Земли.

А.И. Андрухин, А.М. Ковалев, С.Н. Судаков

1. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. / Г.Н. Дубошин – М.: Физматгиз, 1963.– 586 с.
2. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. / Г.Н. Дубошин – М.: Наука, 1964.– 560 с.
3. Мориц Г. Вращение Земли: теория и наблюдения. / Г. Мориц, А. Мюллер – Киев: Наукова думка, 1992.– 512 с.
4. Смарт У.М. Небесная механика. / У.М. Смарт – М.:Мир, 1965.– 504 с.

A.I. Andruhin, A.M. Kovalev, S.N. Sudakov

Mathematical modeling of transfer processes in the tundish ladle.

Motion of the system Earth-Moon-Sun was described by the three bodies problem. The equations of motions were represented in the non-rotating coordinate system, origin of which is coinciding with the center of the mass of the Earth. In order to get the decision of the equations of motion the numerical method of Runge-kutta was used. The formulas for count of coordinates of Moon and Sun into the system of coordinates, related to a some point of the surface of the Earth, was obtained.

Keywords: *three bodies problem, system Earth-Moon-Sun, trajectory description, solution in coordinates with the observer in the center.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный техн. ун-т”,
ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк
sudakov@iamm.su

Получено 28.11.17

УДК 531.38; 531.39

©2017. Г.В. Горр, Д.А. Данилюк, Д.Н. Ткаченко

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА В ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ РЕШЕНИЯ ГОРЯЧЕВА–ЧАПЛЫГИНА

Рассмотрен один частный вариант решения Д.Н. Горячева–С.А. Чаплыгина в задаче о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Для кинематического истолкования использованы: комплексный подход, основанный на модифицированном методе Пуансо; углы Эйлера; параметры Родрига–Гамильтона; эллиптические функции Якоби.

Ключевые слова: массивное твердое тело, истолкование движения, комплексный подход, решение Горячева–Чаплыгина, движение эллипсоида в неподвижном пространстве.

Введение. В динамике твердого тела большое внимание уделяется истолкованию движения в интегрируемых случаях уравнений движения. Л. Пуансо [1] утверждал, что получение аналитических зависимостей основных переменных задачи недостаточно для того, чтобы представить движение тела в течение всего времени движения. Свой подход он продемонстрировал в исследовании движения тела в решении Л. Эйлера, представив его посредством качения без скольжения эллипсоида инерции по неподвижной в пространстве плоскости. Он доказал, что любое движение тела, имеющего неподвижную точку, можно истолковать качением подвижного аксоида угловой скорости по неподвижному аксоиду. Большой вклад в развитие геометрических методов динамики твердого тела внесли В. Гесс, И. Мак-Куллаг, Г. Дарбу, Ж. Кениг, К. Якоби, Ж. Сильвестр, Н.Б. Делоне, Н.Е. Жуковский и другие. Результаты этих ученых в полной мере отражены в монографии Г.К. Сулова [2] и книге [3]. Следует отметить, что для истолкования движения тела применялись различные подходы. Например, И. Мак-Куллаг установил, что при движении свободного твердого тела гирационный эллипсоид, соответствующий точке опоры, проходит во все время движения через точку пространства, лежащую на неизменном главном моменте количества движения. Ж. Сильвестр и К. Якоби изучали свойства вращений Л. Пуансо. Н.Е. Жуковский предлагал метод истолкования движения на основе качения со скольжением аксоидов вектора момента количества движения. Для более полного восприятия визуализации движения тела были предложены конкретные модели: Г. Дарбу и Ж. Кениг построили прибор (герполограф), с помощью которого осуществлялось движение тела по инерции; прибор Боненбергера позволял продемонстрировать движение гироскопа Лагранжа; Г. Шварц предложил модель гироскопа С.В. Ковалевской; Н.П. Мерцалов построил гироскоп, удовлетворяющий приближенно условиям Н.Б. Делоне. Анализ указанных исследований выполнен в монографии [3].

Универсальность метода Л. Пуансо проявилась после получения

П.В. Харламовым [4] уравнений неподвижного годографа вектора угловой скорости, поскольку они содержат компоненты вектора угловой скорости и вектора оси симметрии действующих на тело силовых полей. К настоящему времени во всех решениях уравнений Эйлера–Пуассона исследовано движение тела методом годографов (см. обзоры [5, 6]).

В последние годы метод Пуансо получил дальнейшее развитие. В [7] предложен модифицированный метод Пуансо, позволяющий представить движение тела, имеющего неподвижную точку, качением без скольжения подвижного годографа вектора, коллинеарного вектору угловой скорости, по неподвижному годографу. Этот метод позволяет использовать два подхода в истолковании движения тела, имеющего неподвижную точку. Первый подход основан на выборе подвижного или неподвижного годографа указанного выше вектора в некоторой плоскости в подвижной системе координат. С его помощью показано, что движение тела в решениях В.А. Стеклова [8] и А.И. Докшевича [9] можно представить качением без скольжения поверхностей, направляющие линии которых являются эллипсы. Второй подход заключается в том, что конец вектора, коллинеарного вектору угловой скорости, выбирается на эллипсоиде инерции для неподвижной точки. Он использован в [10] для анализа некоторых частных решений уравнений динамики. Этот подход позволяет визуальное восприятие движения тела устанавливать на основе движения эллипсоида инерции в неподвижном пространстве.

В статье [11] описывается комплексный подход в истолковании движения тела с неподвижной точкой. Целесообразность такого подхода обоснована тем, что на практике необходимо иметь наибольший объем информации о свойствах движения тела (свойства углов Эйлера и параметров Родрига–Гамильтона, свойства годографов угловой скорости, свойства в движении эллипсоида инерции и другие). Он применен в статье [12] при исследовании частных случаев [13, 14] решения С.В. Ковалевской [15]. Данная статья посвящена изучению одного частного случая решения Д.Н. Горячева–С.А. Чаплыгина [17, 18].

1. О комплексном истолковании движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Рассмотрим уравнения движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, в векторном виде:

$$A\dot{\omega} = A\omega \times \omega + s(\mathbf{e} \times \nu), \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega. \quad (1)$$

Эти уравнения допускают три первых интеграла

$$\nu \cdot \nu = 1, \quad A\omega \cdot \nu = k, \quad A\omega \cdot \omega - 2s(\mathbf{e} \cdot \nu) = 2E, \quad (2)$$

где k и E – произвольные постоянные. В (1), (2) обозначено: $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости; $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, указывающий направление силы тяжести; s – произведение веса тела и расстояния от неподвижной точки O до центра тяжести C_i ; $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3) = \frac{OC}{|OC|}$; A – тензор

инерции, построенный в точке O ; точка над переменными $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ обозначает дифференцирование по времени t .

Пусть в результате интегрирования уравнений (1) получены функции

$$\boldsymbol{\omega}(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)), \quad \boldsymbol{\nu}(t) = (\nu_1(t), \nu_2(t), \nu_3(t)), \quad (3)$$

координаты которых определяют фазовое пространство уравнений (1). Задача состоит в том, что на основании зависимостей (3) необходимо установить свойства движений тела, то есть получить истолкование этого движения. В динамике твердого тела создано множество методов, указанных, в частности, во введении.

Рассмотрим первый метод, который предложен Л. Эйлером. Он заключается в нахождении углов φ, ψ, θ , определяющих положение тела в пространстве. В силу известных зависимостей [19]

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, & \omega_2(t) &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_3(t) &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \varphi; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\nu_1(t) = \sin \theta \sin \varphi, \quad \nu_2(t) = \sin \theta \cos \varphi, \quad \nu_3(t) = \cos \theta, \quad (5)$$

углы $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$ можно найти по формулам (используем векторную запись, в которой $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ ($i = \overline{0,3}$) – подвижный ортогональный базис)

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \operatorname{arctg} \frac{\boldsymbol{\nu}(t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1}{\boldsymbol{\nu}(t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2}, & \theta(t) &= \arccos(\boldsymbol{\nu}(t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3), \\ \psi(\tau) &= \int_{t_0}^t \frac{(\boldsymbol{\omega}(\tau) \times \boldsymbol{\varepsilon}_3) \cdot (\boldsymbol{\nu}(\tau) \times \boldsymbol{\varepsilon}_3)}{(\boldsymbol{\nu}(\tau) \times \boldsymbol{\varepsilon}_3)^2} d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

На основании соотношений (6) сформировался метод апекса: исследование свойств характерной оси в теле (например, оси симметрии в случае Ж.Л. Лагранжа [2]).

Второй метод истолкования движения тела применяется в задачах определения ориентации твердого тела. Для его применения выбираются параметры Родрига–Гамильтона [19, 20], которые выражаются через углы Эйлера (6):

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2}, & \lambda_1 &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2}, \\ \lambda_2 &= \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2}, & \lambda_3 &= \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Укажем зависимости углов Эйлера через параметры $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, t$ [20]:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2}{\lambda_0 \lambda_1 + \lambda_2 \lambda_3}, & \operatorname{tg} \psi &= \frac{\lambda_0 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3}{\lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2 \lambda_3}, \\ \cos \theta &= \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Компоненты угловой скорости выражаются через λ_i ($i = \overline{0,3}$) следующим образом:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2(\lambda_0\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_0 + \lambda_3\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_3), \\ \omega_2 &= 2(\lambda_1\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_1 + \lambda_1\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_1), \\ \omega_3 &= 2(\lambda_2\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_2 + \lambda_2\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_2),\end{aligned}\quad (9)$$

$$\nu_1 = 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2), \quad \nu_2 = 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3), \quad \nu_3 = \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2. \quad (10)$$

Формулы (7) используются в случае, когда известны зависимости $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\theta(t)$, а формулы (8) – когда известны зависимости $\lambda_i(t)$ ($i = \overline{0,3}$).

К третьему методу кинематического истолкования отнесен [11] метод годографов Пуансо с использованием уравнений П.В. Харламова [4]. Запишем соотношения (3) с помощью подвижного (связанного с телом) базиса $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \sum_{i=1}^3 \omega_i(t) \mathfrak{e}_i, \quad \boldsymbol{\nu}(t) = \sum_{i=1}^3 \nu_i(t) \mathfrak{e}_i. \quad (11)$$

Для компонент вектора $\boldsymbol{\omega}$ в неподвижной системе координат $O\xi\eta\zeta$ с единичными векторами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ имеем соотношения [4]

$$\begin{aligned}\omega_\xi(t) &= \omega_\rho(t) \cos \alpha(t), \quad \omega_\eta(t) = \omega_\rho(t) \sin \alpha(t), \quad \omega_\zeta(t) = \sum_{i=1}^3 \omega_i(t) \nu_i(t), \\ \omega_\rho^2(t) &= \sum_{i=1}^3 \omega_i^2(t) - \omega_\zeta^2(t), \quad \alpha(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{\omega_\rho^2(\tau)} [\dot{\boldsymbol{\omega}}(\tau) \cdot (\boldsymbol{\nu}(\tau) \times \boldsymbol{\omega}(\tau))] d\tau,\end{aligned}\quad (12)$$

где $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ – производная от $\boldsymbol{\omega}(t)$ по времени t . Определенную сложность в вычислении функции $\alpha(t)$ представляет зависимость этой функции от производной $\dot{\boldsymbol{\omega}}$. В статье [7] получена формула

$$\operatorname{tg}(\alpha(t) - \psi(t)) = \delta \frac{(\boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\nu}(t)) \cdot (\boldsymbol{\nu}(t) \times \mathfrak{e}_3)}{\mathfrak{e}_3 \cdot (\boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\nu}(t))}, \quad (13)$$

где $\delta = 0$, если постоянен угол θ между векторами $\boldsymbol{\nu}(t)$ и \mathfrak{e}_3 , и $\delta = 1$, если $\theta \neq \text{const}$. Поскольку для $\psi(t)$ можно использовать формулу из (6), то для $\alpha(t)$ из (13) получим выражение (полагаем $\delta = 1$)

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \int_{t_0}^t \frac{(\boldsymbol{\omega}(\tau) \times \mathfrak{e}_3) \cdot (\boldsymbol{\nu}(\tau) \times \mathfrak{e}_3)}{(\boldsymbol{\nu}(\tau) \times \mathfrak{e}_3)^2} d\tau + \operatorname{arctg} \frac{(\boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\nu}(t)) \cdot (\boldsymbol{\nu}(t) \times \mathfrak{e}_3)}{\mathfrak{e}_3 \cdot (\boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\nu}(t))}. \quad (14)$$

Как видно из формулы (14), $\alpha(t)$ имеет определенные преимущества перед формулой $\alpha(t)$ из (12). В комплексном подходе истолкования движения тела целе-

сообразно применять и соотношения [11]

$$\omega_\xi(t) = \dot{\psi}(t) + \dot{\varphi}(t) \cos \theta(t), \quad \omega_\rho^2(t) = \dot{\theta}^2(t) + \dot{\varphi}^2(t) \sin^2 \theta(t),$$

$$\alpha(t) = \psi(t) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\dot{\varphi}(t) \sin \theta(t)}{\dot{\theta}(t)}\right),$$

$$\omega_\zeta = 4[(\lambda_0^2 + \lambda_3^2)(\lambda_0 \dot{\lambda}_3 - \lambda_3 \dot{\lambda}_0) + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)(\lambda_1 \dot{\lambda}_2 - \lambda_2 \dot{\lambda}_1)], \quad (15)$$

$$\omega_\rho^2 = 4\Lambda + [(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^\bullet]^2, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_0 \dot{\lambda}_2 + \lambda_1 \dot{\lambda}_3}{\lambda_0 \dot{\lambda}_1 - \lambda_2 \dot{\lambda}_3} + \operatorname{arctg} \frac{2\Lambda}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^\bullet},$$

$$\Lambda = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)(\dot{\lambda}_0 \lambda_3 - \lambda_0 \dot{\lambda}_3) + (\lambda_0^2 + \lambda_3^2)(\lambda_1 \dot{\lambda}_2 - \lambda_2 \dot{\lambda}_1). \quad (16)$$

Таким образом, для нахождения уравнений неподвижного годографа вектора угловой скорости существуют несколько способов: если известны зависимости (11), то применимы формулы (12), (14); если известны функции $\varphi(t), \psi(t), \theta(t)$ – формулы (15); если известны функции $\lambda_i(t)$ ($i = \overline{0,3}$) – формулы (16).

В комплексном истолковании движения тела большое значение имеет модифицированный метод Пуансо (его отнесем к методу 4). Используя первую формулу из (11) и соотношения из (12), запишем уравнения подвижного и неподвижного годографов вектора угловой скорости

$$\omega = \sum_{i=1}^3 \omega_i(t) \mathbf{e}_i, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_\xi(t) \mathbf{i}_1 + \omega_\eta(t) \mathbf{i}_2 + \omega_\zeta(t) \mathbf{i}_3. \quad (17)$$

Если через Ω_0 обозначить начальную точку на подвижном годографе (при $t = 0$), а через Ω'_0 – на неподвижном годографе и Ω^* – точку касания годографов в момент времени t , то из равенства $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d'\omega}{dt}$ следует, что $\sphericalangle \Omega_0 \Omega^* = \sphericalangle \Omega'_0 \Omega^*$. Из последнего условия и вытекает теорема Пуансо о том, что движение тела воспроизводится качением без скольжения подвижного годографа вектора угловой скорости по неподвижному годографу.

Следуя [7], введем в рассмотрение вектор

$$\mathbf{b}(t) = b(t)\boldsymbol{\omega}(t), \quad (18)$$

где $b(t)$ – дифференцируемая функция. На основании вытекающего из (18) условия $d\mathbf{b}(t)/dt = d'\mathbf{b}(t)/dt$ получим, что подвижный и неподвижный годографы вектора $\mathbf{b}(t)$ имеют общую касательную, а длины дуг, описанные за одинаковый промежуток времени концом вектора $\mathbf{b}(t)$ на подвижном и неподвижном годографах, равны. Следовательно, движение тела с неподвижной точкой может быть представлено качением без скольжения подвижного годографа вектора $\mathbf{b}(t)$ по неподвижному годографу этого вектора. Необходимо при таком истолковании учитывать, что вращение тела вокруг вектора $\mathbf{b}(t)$ происходит с

угловой скоростью ω . Он позволил получить дополнительные свойства в частных решениях уравнений Эйлера–Пуассона [7, 10, 12].

Изложенный метод может быть применен в следующих подходах.

Первый подход. Пусть в уравнениях (12) $\omega_\zeta(t) \neq 0$. Выберем в (18) функцию $b(t)$ в виде

$$b(t) = \frac{1}{\omega_\zeta(t)}. \quad (19)$$

В силу (17)–(19) неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ имеет представление

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\omega_\xi(t)}{\omega_\zeta(t)} \mathbf{i}_1 + \frac{\omega_\eta(t)}{\omega_\zeta(t)} \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3. \quad (20)$$

Подвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ найдем из первой формулы системы (17), используя равенство (19),

$$\mathbf{b}(t) = \frac{1}{\omega_\zeta(t)} \sum_{j=1}^3 \omega_j(t) \mathbf{e}_j. \quad (21)$$

Движение тела воспроизводим качением без скольжения аксоида с направляющей (21) по аксоиду с направляющей (20). В силу (20) неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ является плоской кривой. Этот подход позволяет получить картину движения тела, близкую по наглядности к картине движения, указанной Л. Пуансо. В работах [7, 10] показано, что в решениях А.И. Докшевича [9] и В.А. Стеклова [8] движение тела можно представить качением без скольжения двух плоских кривых (эллипсов).

Замечание. Указанный подход может быть обобщен и на случай, когда подвижный годограф является плоской кривой.

Второй подход. Представляется актуальным получение такого метода в истолковании движения, который бы не содержал субъективных факторов конкретного подхода, а был бы универсальным для любых решений уравнений динамики твердого тела. Так как при истолковании движения тела не используется его конструктивное строение, то вполне естественным представляется применить объективный фактор в истолковании движения (как это осуществил Л. Пуансо), а именно свойство движения эллипсоида инерции. Положим, что конец вектора $\mathbf{b}(t)$ принадлежит эллипсоиду инерции в неподвижной точке. Обозначим через A_1, A_2, A_3 главные моменты инерции тела. Тогда уравнение эллипсоида инерции таково

$$A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 = \sigma_0^2, \quad (22)$$

где x, y, z – координаты точек, принадлежащих эллипсоиду, σ_0^2 – постоянная. Потребуем, чтобы конец вектора $\mathbf{b}(t)$ из формулы (18) принадлежал эллипсоиду (22). Для нахождения функции $b(t)$ подставим в (22) вместо x, y, z величины

$b_i = b(t)\omega_i(t)$. Тогда [10]

$$b(t) = \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{A_1\omega_1^2(t) + A_2\omega_2^2(t) + A_3\omega_3^2(t)}}. \quad (23)$$

В силу (17), (18) подвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ найдем в виде

$$\mathbf{b}(t) = b(t)(\omega_1(t)\mathfrak{a}_1 + \omega_2(t)\mathfrak{a}_2 + \omega_3(t)\mathfrak{a}_3), \quad (24)$$

а неподвижный годограф – в виде

$$\mathbf{b}(t) = b(t)(\omega_\rho(t) \cos \alpha(t)\mathbf{i}_1 + \omega_\rho(t) \sin \alpha(t)\mathbf{i}_2 + \omega_\xi(t)\mathbf{i}_3). \quad (25)$$

Функция $b(t)$ определена выражением (23).

Движение тела будем воспроизводить качением годографа (24) по годографу (25).

Если истолкование движения тела проводится для решений уравнений (1), то для упрощения формулы (23) можно использовать интеграл энергии из (2). Тогда вместо (23) целесообразно применить формулу

$$b(t) = \frac{\varkappa_0^2}{\sqrt{E + s(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\nu}(t))}} \quad (\varkappa_0^2 - \text{const}). \quad (26)$$

Таким образом, в комплексном истолковании предлагается [11] использовать указанные выше четыре метода.

2. Решение Д.Н. Горячева–С.А. Чаплыгина. Данный случай характеризуется условиями $A = \text{diag}(4A_3, 4A_3, A_3)$, $e_2 = e_3 = 0$, $k = 0$. Уравнения Эйлера–Пуассона (1) в безразмерном виде можно записать так [16]

$$4\dot{p} = 3qr, \quad 4\dot{q} = -3pr - \nu_3, \quad \dot{r} = \nu_2, \quad (27)$$

$$\dot{\nu}_1 = r\nu_2 - q\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = p\nu_3 - r\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = q\nu_1 - p\nu_2. \quad (28)$$

Уравнения (27), (28) имеют первые интегралы

$$\begin{aligned} \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1, & 4(p\nu_1 + q\nu_2) + r\nu_3 &= 0, \\ 4(p^2 + q^2) + r^2 &= 2(\nu_1 + E), & r(p^2 + q^2) + p\nu_3 &= c_0, \end{aligned} \quad (29)$$

где E, c_0 – произвольные постоянные (постоянную интеграла площадей примем равной нулю). Положим в (29) $2(E + 1) = 3\alpha^2$, $2c_0 = \alpha^3$. Тогда уравнения (27), (28) допускают решение [16]

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{4}(2\alpha + r)\sqrt{\alpha(\alpha - r)}, \\ q &= \frac{1}{4}\sqrt{\alpha(r^3 + 3\alpha r^2 + 4r + 4\alpha(1 - \alpha^2))}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \frac{1}{2}(r - \alpha)(r + 2\alpha) + 1, \\ \nu_2 &= -\sqrt{\alpha(\alpha - r)},\end{aligned}\tag{31}$$

$$\begin{aligned}\nu_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha - r)(r^3 + 3\alpha r^2 + 4r + 4\alpha(1 - \alpha^2))}, \\ \int_{r_0}^r \frac{2 dr}{\sqrt{(\alpha - r)[r^3 + 3\alpha r^2 + 4r + 4\alpha(1 - \alpha^2)]}} &= t - t_0.\end{aligned}\tag{32}$$

В формулах (30)–(32) α – постоянный параметр, который будем полагать меньше единицы. Тогда переменная r изменяется на отрезке

$$0 < r^* \leq r \leq \alpha \quad (\alpha > 1),\tag{33}$$

где r^* – корень уравнения

$$P(r) = r^3 + 3\alpha r^2 + 4\alpha(1 - \alpha^2) = 0,\tag{34}$$

который имеет значение

$$r^* = \sqrt[3]{\alpha^3 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{27\alpha^4 - 36\alpha^2 + 16}{3}}} + \sqrt[3]{\alpha^3 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{27\alpha^4 - 36\alpha^2 + 16}{3}}}.\tag{35}$$

С учетом (35) многочлен $P(r)$ можно записать так

$$P(r) = (r - r^*)(\mu_2 r^2 + \mu_1 r + \mu_0).\tag{36}$$

Здесь $\mu_2 r^2 + \mu_1 r + \mu_0 > 0$ для значений r из интервала (33). Подвижный годограф вектора угловой скорости определяется соотношениями (30), а неподвижный годограф задается формулами [16]:

$$\omega_\zeta = -\frac{3}{4}r\sqrt{\alpha(\alpha - r)},\tag{37}$$

$$\omega_\rho^2(t) = \frac{1}{16}[9\alpha r^3 + (16 - 9\alpha^2)r^2 + 4\alpha r + 4\alpha^2],$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{2\alpha^2[3r^3 + 6\alpha r^2 + 2(2 + 3\alpha^2)r - 2\alpha(3\alpha^2 - 4)]}{\sqrt{2(r^3 + 3\alpha r^2 + 4r + 4\alpha - 4\alpha^2)} [9\alpha r^3 + (16 - 9\alpha^2)r^2 + 4\alpha r + 4\alpha^2]},\tag{38}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha - r)}[3r^3 + 6\alpha r^2 + 2(2 + 3\alpha^2)r - 2\alpha(3\alpha^2 - 4)]}{[9\alpha r^3 + (16 - 9\alpha^2)r^2 + 4\alpha r + 4\alpha^2]}.\tag{39}$$

Чтобы избежать повторения обозначений в (38), (39), полярный угол, характеризующий неподвижный годограф, обозначен через φ . В статье [16] на основании (37)–(39) показано, что движение гироскопа Горячева–Чаплыгина в данном случае периодическое.

Применим **первый** подход модифицированного метода, изложенного выше. В силу $r > 0$ функцию $b(t)$ из (18) выберем в виде

$$b(t) = \frac{1}{r(t)}. \quad (40)$$

Используя компоненты p и q из равенств (30), для подвижного годографа вектора $\mathbf{b}(t)$ получим

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t) = b_1(t)\mathfrak{a}_1 + b_2(t)\mathfrak{a}_2 + b_3(t)\mathfrak{a}_3 = & -\frac{1}{4r}(2\alpha + r)\sqrt{\alpha(\alpha - r)}\mathfrak{a}_1 + \\ & + \frac{1}{4r}\sqrt{\alpha(r^3 + 3\alpha r^2 + 4r + 4\alpha(1 - \alpha^2))}\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3. \end{aligned} \quad (41)$$

Подвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ из (41) является плоской кривой ($b_3 = 1$). Для получения уравнения, описывающего эту кривую, положим $b_1 = x$, $b_2 = y$. Тогда

$$\begin{aligned} x = & -\frac{1}{4r}(2\alpha + r)\sqrt{\alpha(\alpha - r)}, \\ y = & \frac{1}{4r}\sqrt{\alpha(r^3 + 3\alpha r^2 + 4r + 4\alpha(1 - \alpha^2))}. \end{aligned} \quad (42)$$

Из системы (42) следует $4r^2(x^2 + y^2) - \alpha r - \alpha^2 = 0$, то есть

$$r = \frac{\alpha}{8(x^2 + y^2)}(1 + \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}). \quad (43)$$

Второе равенство из (42) запишем так

$$y^2 = \frac{\alpha}{16r^2}\left(r^3 + 3\alpha r^2 + 4r + 4\alpha(1 - \alpha^2)\right). \quad (44)$$

Для аналитического анализа параметрически заданной кривой (42) (или (43), (44)) введем в плоскости (x, y) полярные координаты ρ , β : $x = \rho \cos \beta$, $y = \rho \sin \beta$. Тогда из (43), (44) получим

$$\sin^2 \beta = \frac{\alpha}{16r^2(\rho)}\left(r^3(\rho) + 3\alpha r^2(\rho) + 4r(\rho) + 4\alpha(1 - \alpha^2)\right), \quad (45)$$

где

$$r(\rho) = \frac{\alpha}{8\rho^2}(1 + \sqrt{1 + 4\rho^2}). \quad (46)$$

Используя промежутки изменения переменной r из (33), с помощью формул (45), (46) можно построить кривую (42). Неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ имеет вид

$$\mathbf{b}(t) = b_\xi \mathbf{i}_1 + b_\eta \mathbf{i}_2 + b_\zeta \mathbf{i}_3, \quad (47)$$

где в силу (37), (40)

$$b_\xi = \frac{1}{r}\omega_\rho \cos \varphi, \quad b_\eta = \frac{1}{r}\omega_\rho \sin \varphi, \quad b_\zeta = -\frac{3}{4}\sqrt{\alpha(\alpha - r)}. \quad (48)$$

Функция $\varphi(r)$, определяемая формулами (38), (39), не изменяется. То есть, как и в случае неподвижного годографа вектора $\boldsymbol{\omega}(t)$, она является периодической функцией времени. Поскольку из (37), (48) следует

$$b_\rho^2 = b_\xi^2 + b_\eta^2 = \frac{1}{16r^2} \left[9\alpha r^3 + (16 - 9\alpha^2)r^2 + 4\alpha r + 4\alpha^2 \right], \quad (49)$$

то параметрические уравнения меридиана поверхности вращения, на которой лежит неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$, задаются последним соотношением из (48) и соотношением (49). После исключения в этих равенствах переменной r приходим к алгебраическому уравнению шестого порядка относительно величин b_ρ , b_ζ . Такой же порядок имеет и меридиан поверхности вращения, на которой лежит неподвижный годограф вектора $\boldsymbol{\omega}(t)$.

На основании полученных результатов можно сделать вывод о том, что движение тела в решении (30)–(32) является периодическим. Преимущество первого подхода модифицированного метода истолкования движения перед методом Пуансо состоит в том, что при качении без скольжения канонических поверхностей с направляющими (41) и (47), (48), направляющая (41) – плоская кривая.

Для нахождения скорости прецессии тела воспользуемся формулой (13), которая для решения (30)–(32) принимает вид

$$\operatorname{tg}(\varphi - \psi) = \frac{-3r^3 - 3\alpha r^2 + 2r(3\alpha^2 - 2) + 4\alpha}{r^3 + 3\alpha r^2 + 12r + 4\alpha(1 - \alpha^2)}. \quad (50)$$

Из соотношения (50) установим скорость прецессии

$$\dot{\psi} = \frac{\sqrt{\alpha}[r^3 + 3\alpha r^2 - 4r + 4\alpha(1 - \alpha^2)]}{8\sqrt{\alpha - r}(r + 2\alpha)(r^2 + \alpha r + 2(2 - \alpha^2))}. \quad (51)$$

Данную формулу можно установить из интегрального соотношения из системы (6). Если изучать качественное поведение функции $\psi(t)$, то результаты по истолкованию движения тела на основе прямого метода Пуансо позволяют это сделать без обращения к формуле (51).

Рассмотрим задачу сведения решения (30)–(32) к эллиптическим функциям времени. В силу того, что уравнение (34) имеет действительный корень r^* , преобразуем интеграл (32):

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{(\alpha - r)(r - r^*)(r^2 + pr + q)}} = \frac{1}{2}(t - t_0), \quad (52)$$

где

$$p = 3\alpha + r^*, \quad q = r^{*2} + 3\alpha r^* + 4. \quad (53)$$

Пусть $(r - \alpha)(r - r^*) = r^2 + p'r + q'$. Тогда

$$p' = -(\alpha + r^*), \quad q' = \alpha r^*. \quad (54)$$

Обозначим через μ и ν корни уравнения относительно u

$$2(2\alpha + r^*)u^2 + 2(r^{*2} + 2\alpha r^* + 4)u - [r^{*3} + 5\alpha r^{*2} + 2(2 + 3\alpha^2)r^* + 4\alpha] = 0. \quad (55)$$

Введем в рассмотрение параметры

$$h^2 = \frac{\mu^2 + \mu p + q}{\nu^2 + \nu p + q}, \quad h'^2 = \frac{\mu^2 + \mu p' + q'}{\nu^2 + \nu p' + q'}, \quad (56)$$

где p, q и p', q' имеют значения (53), (54). Для приведения интеграла (52) к каноническому виду введем новую переменную w :

$$r = \frac{\mu w + \nu}{w + 1}. \quad (57)$$

Тогда формулу (52) можно в силу (57) преобразовать к виду

$$\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} = \tau, \quad (58)$$

где

$$k^2 = \frac{h'^2}{h^2 + h'^2}, \quad v^2 = 1 - \frac{1}{h'^2 w^2}, \quad (59)$$

$$\tau = \frac{(t - t_0) \sqrt{(\nu^2 + \nu p + q)(\nu^2 + \nu p' + q')(h^2 + h'^2)}}{2(\mu - \nu)}.$$

С помощью метода приведения интеграла (58) к форме Лежандра на основании формул (57)–(59) получим следующее выражение для переменной r через эллиптическую функцию Якоби $\operatorname{sn}\tau$:

$$r = \frac{\mu + \nu h' \operatorname{sn}\tau}{1 + h' \operatorname{sn}\tau}. \quad (60)$$

Модуль k эллиптической функции $\operatorname{sn}\tau$ находится из первого соотношения системы (59), в котором h^2 и h'^2 имеют значения (56). Отметим, что в формулу (60) в качестве параметров входят μ, ν , которые являются корнями уравнения (55). Несмотря на достаточно трудоемкую процедуру получения зависимости (60) от времени, формула (60) показывает качественный характер изменения переменной $r(\tau)$. При подстановке $r(\tau)$ в (39) можно получить зависимость $\dot{\varphi} = \Phi(t)$, где $\Phi(t)$ – эллиптическая функция. Следовательно, $\varphi(t)$ является интегралом от этой функции. Аналогично, используя (51), функция $\psi(t)$ представима через интеграл от эллиптической функции. Для нахождения параметров Родрига–Гамильтона необходимо использовать формулы (6), (7).

Рассмотрим движение эллипсоида инерции для решения (30)–(32). Из формулы (26) в силу принятых условий и значения ν_1 из (31) получим

$$b(t) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r\alpha + \alpha^2}}, \quad (61)$$

где постоянная \varkappa_0^2 , входящая в (26), принята таким образом, чтобы компоненты b_1, b_2, b_3 удовлетворяли уравнению

$$4(b_1^2 + b_2^2) + b_3^2 = 1. \quad (62)$$

На основании равенства (18) и соотношений (30), (61) имеем

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{1}{4\sqrt{r^2 + r\alpha + \alpha^2}}(2\alpha + r)\sqrt{\alpha(\alpha - r)}, \\ b_2 &= -\frac{1}{4\sqrt{r^2 + r\alpha + \alpha^2}}\sqrt{\alpha(r^3 + 3\alpha r^2 + 4r + 4\alpha(1 - \alpha^2))}, \\ b_3 &= \frac{r}{\sqrt{r^2 + r\alpha + \alpha^2}}. \end{aligned} \quad (63)$$

Для исследования годографа вектора $\mathbf{b}(t)$ будем рассматривать уравнение (62) и уравнение цилиндрической поверхности, которая задается первым и третьим соотношениями системы (63). Введем вместо r новую переменную β :

$$r(\beta) = \frac{2\alpha \sin \beta}{3 - 4 \sin^2 \beta}(\sin \beta + \sqrt{3} \cos \beta). \quad (64)$$

Переменная β изменяется на отрезке

$$\beta \in \left[\beta^*, \frac{\pi}{6} \right], \quad (65)$$

где

$$\beta^* = \arctg \frac{\sqrt{r^{*2} + 2\alpha r^* + 3\alpha^2} - \alpha\sqrt{3}}{2\alpha + r^*}. \quad (66)$$

Внесем $r(\beta)$ из (64) в первое и третье соотношения системы (63)

$$\begin{aligned} b_1(\beta) &= \alpha\sqrt{3} \cos \beta \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{3} \cos 2\beta - \sin 2\beta}{1 + 2 \cos 2\beta}}, \\ b_3(\beta) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \beta. \end{aligned} \quad (67)$$

Данные формулы позволяют численно для каждого α построить кривую в плоскости (b_1, b_3) в промежутке (65), в котором β^* имеет значение (66).

Интерес представляет и другой способ введения новой переменной вместо r :

$$r = \frac{2\alpha R}{\sqrt{3} - R}, \quad (68)$$

где R — новая переменная, которая изменяется на отрезке

$$R \in \left[\frac{r^*\sqrt{3}}{r^* + 2\alpha}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right].$$

В силу (68) величины b_1 , b_3 из (67) таковы

$$b_1 = \alpha \sqrt[4]{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+R^2}} \sqrt{\frac{\sqrt{3}R-1}{R-\sqrt{3}}}, \quad b_3 = \frac{2R}{\sqrt{3(1+R^2)}}. \quad (69)$$

Формулы (69) позволяют установить, что в алгебраической форме кривая (69) является многочленом по b_1 , b_3 , который имеет шестой порядок.

Для получения неподвижного годографа вектора $\mathbf{b}(t)$, конец которого принадлежит поверхности (62), обратимся к формулам (37). Используя выражение (61), из них получим

$$\mathbf{b}(t) = b_\rho \cos \varphi \cdot \mathbf{i}_1 + b_\rho \sin \varphi \cdot \mathbf{i}_2 + b_\zeta \cdot \mathbf{i}_3, \quad (70)$$

где

$$b_\rho^2 = \frac{1}{16(r^2 + \alpha r + \alpha^2)} [9\alpha r^3 + (16 - 9\alpha^2)r^2 + 4\alpha r + 4\alpha^2], \quad (71)$$

$$b_\zeta = -\frac{3r\sqrt{\alpha(\alpha-r)}}{4\sqrt{r^2 + r\alpha + \alpha^2}},$$

а функция $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению (39).

Если подставить в равенства (71) и в уравнение (39) функцию $r(\tau)$ из формулы (60), то получим зависимость переменных b_ρ , b_ζ , φ от времени t .

Движение эллипсоида в неподвижном пространстве можно истолковать, как качение без скольжения подвижного годографа вектора $\mathbf{b}(t)$, заданного формулами (63), по неподвижному годографу этого вектора, заданного формулами (70), (71).

Заключение. В статье для исследования частного случая решения Горячева-Чаплыгина использован комплексный подход, который позволил получить новые свойства движения гироскопа.

1. *Poinsot L.* Theorie nouvelle de la rotation des corps / L. Poinsot // J. Math. Pures et Appl. – 1851. – Vd. 1, № 16. – P. 289–336.
2. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика / Г.К. Суслов. – М.–Л.: Гостехиздат. – 1946. – 655 с.
3. *Горр Г.В.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние / Г.В. Горр, Л.В. Кудряшова, Л.А. Степанова. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
4. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку / П.В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1964. – 28, вып. 3. – С. 502–507.
5. *Гашененко И.Н.* Классические задачи динамики твердого тела / И.Н. Гашененко, Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – Киев: Наук. думка, 2012. – 402 с.
6. *Горр Г.В.* Движение гиростата / Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
7. *Горр Г.В.* Об одном подходе в применении теоремы Пуансо кинематического истолкования движения тела с неподвижной точкой / Г.В. Горр // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 26–36.
8. *Стеклов В.А.* Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку / В.А. Стеклов // Тр. отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1899. – 10, № 1. – С. 1–3.

9. Докшевич А.И. Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона / А.И. Докшевич. – Киев: Наук. думка, 1992. – 168 с.
10. Горр Г.В. О кинематическом истолковании движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой / Г.В. Горр, А.И. Синенко // Прикл. математика и механика. – 2014. – 20, вып. 3. – С. 334–345.
11. Горр Г.В. Применение параметров Родрига–Гамильтона при истолковании движения твердого тела с неподвижной точкой / Г.В. Горр, А.М. Ковалев // Прикл. математика и механика. – 2015. – 79, вып. 5. – С. 635–643.
12. Горр Г.В. О движении тяжелого твердого тела в двух частных случаях решения С.В. Ковалевской / Г.В. Горр, Е.К. Щетинина // Нелинейная динамика. – 2018. – 14, № 1. – С. 123–138.
13. Горр Г.В. Об одном случае движения тяжелого твердого тела в решении С.В. Ковалевской / Г.В. Горр, А.Я. Савченко // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 66–73.
14. Горр Г.В. Об одном периодическом движении в решении С.В. Ковалевской / Г.В. Горр, А.Я. Савченко // Механика твердого тела. – 1971. – Вып. 3. – С. 64–69.
15. Ковалевская С.В. Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки / С.В. Ковалевская // В кн.: Ковалевская С.В. Научные работы. – М.: Изд-во АН СССР, 1948. – С. 153–220.
Kowalevski S. Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta Math. – 1889. – 12, № 2. – P. 177–232.
16. Горр Г.В. Об одном периодическом движении гироскопа Горячева–Чаплыгина / Г.В. Горр, Г.Д. Левицкая // Механика твердого тела. – 1971. – Вып. 3. – С. 101–106.
17. Горячев Д.Н. О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$ / Д.Н. Горячев // Мат. сб. Кружка любителей мат. наук. – 1900. – 21, вып. 3. – С. 431–438.
18. Чаплыгин С.А. Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке / С.А. Чаплыгин // Тр. отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1901. – 10, вып. 2. – С. 32–34.
19. Лурье А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
20. Кошляков В.Н. Параметры Родрига–Гамильтона и их приложения в механике твердого тела / В.Н. Кошляков. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. – 176 с.

G.V. Gorr, D.A. Danil, D.N. Tkachenko

Kinematic interpretation of the motion of the body in one particular case of the solution Goryachev–Chaplygin.

One particular case of solution D.N. Gorachev–S.A. Chaplygin in the problem of motion of a heavy solid body with a fixed point is considered. For the kinematic interpretation was used: an integrated approach based on the modified Poinso method; Euler angles; Rodrigue–Hamilton parameters; elliptic Jacobi functions.

Keywords: massive solid body, interpretation of the movement, integrated approach, solution of Goryachev–Chaplygin, ellipsoid motion in a fixed space.

ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк
ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
gvgorr@gmail.com

Получено 27.11.17

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК УДК 539.3:534.1

©2017. В.Е. Болнокин, Зыонг Минь Хай, С.Б. Номбре, С.В. Сторожев

НЕЧЕТКАЯ МОДЕЛЬ ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ
ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ПРИ НАКЛОННОМ ПАДЕНИИ
НА ОКРУЖЕННЫЙ ЖИДКОСТЬЮ ИЗОТРОПНЫЙ СЛОЙ

Разработан теоретический алгоритм анализа факторов неопределенности в модели наклонного падения волны гидроакустического давления на экран в виде упругого изотропного деформируемого слоя, контактирующего по граням с массивами идеальной слабосжимаемой жидкости. Описываемая нечетко-множественная методика ориентирована на учет неопределенностей в виде разбросов характеристик падающей волны, а также значений неконтрастных экспериментальных геометрических и физико-механических параметров экрана и граничащих с ним жидкостей. В основу предлагаемого алгоритма положено использование результатов аналитического исследования четкого детерминированного варианта рассматриваемой модели и последующее применение альфа-уровневой модификации эвристического принципа обобщения для перехода к нечетким представлениям экзогенных параметров.

Ключевые слова: плоский изотропный гидроакустический экран, модель наклонного падения волны давления, разброс экзогенных физико-механических и геометрических параметров, нечетко-множественное оценивание показателей экранирования, применение модифицированного эвристического принципа обобщения, случай нечетко-интервальных представлений характеристик модели.

Введение и постановка задачи. Развитие исследований в области синтеза, анализа и структурно-параметрической оптимизации систем гидроакустического экранирования [1, 2] в качестве одного из актуальных аспектов предполагает совершенствование подходов к корректному учету факторов неопределенности при задании параметров рассматриваемых моделей. Наряду с применением методов стохастического анализа [3, 4], для решения этой проблемы могут быть альтернативно использованы приемы теории нечетких вычислений (методы теории нечетких множеств) [5 – 13]. В этой связи, целью исследований, представленных в настоящей работе, является разработка и применение нечетко-множественной методики оценивания факторов разброса эндогенных характеристик в модели наклонного падения волны гидроакустического давления на однослойный экран в виде упругого изотропного деформируемого слоя с неконтрастными физико-механическими и геометрическими параметрами, контактирующий по граням с массивами идеальной слабосжимаемой жидкости. Излагаемый подход связан с использованием модифицированного эвристического

принципа обобщения [8 – 13] при переходе к нечетким аргументам в классических четких аналитических расчетных соотношениях для анализируемых величин.

1. Теоретический алгоритм анализа модели. Рассматривается модель наклонного падения плоской гидроакустической волны с циклической частотой ω вдоль задаваемого вектором \vec{n}_- направления на изотропный плоский гидроакустический экран в виде слоя, занимающего в пространстве нормированных прямоугольных декартовых координат $Ox_1x_2x_3$ область $V_L = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 \in [0, h]\}$. Без ограничения общности, в силу типа симметрии механических свойств экрана, анализ волновых процессов реализуется применительно к плоскости Ox_1x_3 с введением исходных представлений для потенциалов гидроакустических волн в занятых жидкостью полупространствах $V_F^{(-)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 \in (-\infty, 0)\}$, $V_F^{(+)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 \in (h, \infty)\}$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^{(-)} &= \tilde{\Phi}_0^{(-)} + \tilde{\Phi}_{01}^{(-)} = \varphi_{01}^{(-)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_F^{(-)}(n_1^{(F-)}x_1 + n_3^{(F-)}x_3))) + \\ &+ \varphi_{02}^{(-)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_F^{(-)}(n_1^{(F-)}x_1 - n_3^{(F-)}x_3))), \\ \tilde{\Phi}^{(+)} &= \varphi_0^{(+)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_F^{(+)}(n_1^{(F+)}x_1 + n_3^{(F+)}x_3))), \end{aligned} \quad (1)$$

а также исходных представлений волновых колебательных смещений в материале экранирующего слоя, характеризуемого параметром плотности ρ и механических постоянных Ламе λ, μ :

$$\begin{aligned} u_j &= u_{0j}^{(P+)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_P(n_1^{(P)}x_1 + n_3^{(P)}x_3))) + \\ &+ u_{0j}^{(S+)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_S(n_1^{(S)}x_1 + n_3^{(S)}x_3))) + \\ &+ u_{0j}^{(P-)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_P(n_1^{(P)}x_1 - n_3^{(P)}x_3))) + \\ &u_{0j}^{(S-)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_S(n_1^{(S)}x_1 - n_3^{(S)}x_3))) \quad (j = \overline{1; 3}). \end{aligned} \quad (2)$$

В представлениях (1), (2) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} k_F^{(\pm)} &= \omega/c_0^{(\pm)}, \quad c_0^{(\pm)} = (\kappa^{(\pm)}\rho_0^{(\pm)})^{-1/2}, \\ n_j^{(F-)} &= \cos(\vec{n}_-, Ox_j), \quad n_j^{(F+)} = \cos(\vec{n}_+, Ox_j), \\ n_j^{(P)} &= \cos(\vec{n}_P, Ox_j), \quad n_j^{(S)} = \cos(\vec{n}_S, Ox_j), \\ k_P &= \omega/c_P, \quad k_S = \omega/c_S, \quad c_P = ((\lambda + 2\mu)/\rho)^{1/2}, \quad c_S = (\mu/\rho)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3)$$

$\rho_0^{(-)}$, $\rho_0^{(+)}$ и $\kappa^{(-)}$, $\kappa^{(+)}$ – соответственно параметры плотности жидкостей в невозмущенном состоянии и их адиабатические модули сжимаемости; \vec{n}_P – направление распространения продольной составляющей преломленной волны деформаций в экранирующем слое; \vec{n}_S – направление распространения поперечной составляющей преломленной волны деформаций в экранирующем слое. Символами $u_{0j}^{(P\pm)}$, $u_{0j}^{(S\pm)}$ обозначены комплексные амплитудные характеристики компо-

нентов векторов колебательных упругих перемещений в продольной и поперечной составляющих для волн деформаций в экранирующем слое, выражаемые через четыре неопределенных множителя $u_0^{(P\pm)}$, $u_0^{(S\pm)}$ по формулам

$$\begin{aligned} u_{01}^{(P\pm)} &= \mp \Delta_{13}^{(P)} u_0^{(P\pm)}, \quad u_{03}^{(P\pm)} = -\Delta_{11}^{(P)} u_0^{(P\pm)}, \\ \Delta_{13}^{(P)} &= -(\lambda + \mu) k_P^2 n_1^{(P)} n_3^{(P)}, \quad \Delta_{11}^{(P)} = \Omega^2 - (\lambda + 2\mu) k_P^2 (n_1^{(P)})^2 - \mu k_P^2 (n_3^{(P)})^2; \\ u_{01}^{(S\pm)} &= \mp \Delta_{13}^{(S)} u_0^{(S\pm)}, \quad u_{03}^{(S\pm)} = -\Delta_{11}^{(S)} u_0^{(S\pm)}, \\ \Delta_{13}^{(S)} &= -(\lambda + \mu) k_S^2 n_1^{(S)} n_3^{(S)}, \quad \Delta_{11}^{(S)} = \Omega^2 - (\lambda + 2\mu) k_S^2 (n_1^{(S)})^2 - \mu k_S^2 (n_3^{(S)})^2; \\ \Omega^2 &= \rho \omega^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Параметр ϕ_0 , через который выражаются величины $n_1^{(F-)} = \cos \phi_0$, $n_3^{(F-)} = \sin \phi_0$, является экзогенным параметром модели.

Функциональные зависимости для углов падения, отражения и преломления, а также входящие в представления (1), (2) шесть неопределенных величин $\varphi_{02}^{(-)}$, $\varphi_0^{(+)}$, $u_0^{(P\pm)}$, $u_0^{(S\pm)}$ отыскиваются из краевых условий рассматриваемой задачи

$$\begin{aligned} (P^-)_{x_3=0} &= (\sigma_{33})_{x_3=0}, \quad (v_3^-)_{x_3=0} = (\partial_t u_3)_{x_3=0}, \quad (\sigma_{31})_{x_3=0} = 0, \\ (P^+)_{x_3=h} &= (\sigma_{33})_{x_3=h}, \quad (v_3^+)_{x_3=h} = (\partial_t u_3)_{x_3=h}, \quad (\sigma_{31})_{x_3=h} = 0, \quad \partial_t = \partial/\partial t, \\ P^- &= (-i\omega)(\varphi_{01}^{(-)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_F^{(-)}(n_1^{(F-)} x_1 + n_3^{(F-)} x_3))) + \\ &\quad + \varphi_{02}^{(-)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_F^{(-)}(n_1^{(F-)} x_1 - n_3^{(F-)} x_3))))), \\ P^+ &= (-i\omega)(\varphi_0^{(+)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_F^{(+)}(n_1^{(F+)} x_1 + n_3^{(F+)} x_3))))), \\ v_3^- &= (\varphi_{01}^{(-)} \cdot (ik_F^{(-)} n_3^{(F-)}) \exp(-i(\omega t - k_F^{(-)}(n_1^{(F-)} x_1 + n_3^{(F-)} x_3))) + \\ &\quad + \varphi_{02}^{(-)} \cdot (-ik_F^{(-)} n_3^{(F-)}) \exp(-i(\omega t - k_F^{(-)}(n_1^{(F-)} x_1 - n_3^{(F-)} x_3))))), \\ v_3^+ &= (\varphi_0^{(+)} \cdot (ik_F^{(+)} n_3^{(F+)}) \exp(-i(\omega t - k_F^{(+)}(n_1^{(F+)} x_1 + n_3^{(F+)} x_3))))), \\ \partial_t u_3 &= (-i\omega)[u_{03}^{(P+)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_P(n_1^{(P)} x_1 + n_3^{(P)} x_3))) + \\ &\quad + u_{03}^{(S+)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_S(n_1^{(S)} x_1 + n_3^{(S)} x_3))) + \\ &\quad + u_{03}^{(P-)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_P(n_1^{(P)} x_1 - n_3^{(P)} x_3))) + \\ &\quad + u_{03}^{(S-)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_S(n_1^{(S)} x_1 - n_3^{(S)} x_3)))]), \\ \sigma_{31} &= \mu[u_0^{(P+)} \cdot (-ik_P n_1^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} - ik_P n_3^{(P)} \Delta_{13}^{(P)}) \cdot \\ &\quad \cdot \exp(-i(\omega t - k_P(n_1^{(P)} x_1 + n_3^{(P)} x_3))) + \\ &\quad + u_0^{(P-)} \cdot (-ik_P n_1^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} + ik_P n_3^{(P)} \Delta_{13}^{(P)}) \exp(-i(\omega t - k_P(n_1^{(P)} x_1 - n_3^{(P)} x_3))) + \\ &\quad + u_0^{(S+)} \cdot (-ik_S n_1^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} - ik_S n_3^{(S)} \Delta_{13}^{(S)}) \exp(-i(\omega t - k_S(n_1^{(S)} x_1 + n_3^{(S)} x_3))) + \\ &\quad + u_0^{(S-)} \cdot (-ik_S n_1^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} + ik_S n_3^{(S)} \Delta_{13}^{(S)}) \exp(-i(\omega t - k_S(n_1^{(S)} x_1 - n_3^{(S)} x_3)))]), \\ \sigma_{33} &= u_0^{(P+)} \cdot (-\lambda + 2\mu) ik_P n_3^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} - \mu ik_P n_1^{(P)} \Delta_{13}^{(P)}. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \exp(-i(\omega t - k_P(n_1^{(P)} x_1 + n_3^{(P)} x_3))) + \\
 & + u_0^{(P-)} \cdot (-(\lambda + 2\mu)ik_P n_3^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} + \mu ik_P n_1^{(P)} \Delta_{13}^{(P)}) \cdot \\
 & \cdot \exp(-i(\omega t - k_P(n_1^{(P)} x_1 - n_3^{(P)} x_3))) + \\
 & + u_0^{(S+)} \cdot (-(\lambda + 2\mu)ik_S n_3^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} - \mu ik_S n_1^{(S)} \Delta_{13}^{(S)}) \cdot \\
 & \cdot \exp(-i(\omega t - k_S(n_1^{(S)} x_1 + n_3^{(S)} x_3))) + \\
 & + u_0^{(S+)} \cdot (-(\lambda + 2\mu)ik_S n_3^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} - \mu ik_S n_1^{(S)} \Delta_{13}^{(S)}) \cdot \\
 & \cdot \exp(-i(\omega t - k_S(n_1^{(S)} x_1 + n_3^{(S)} x_3))),
 \end{aligned}$$

и порождаемой ими системы линейных алгебраических уравнений.

Угловые характеристики определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
 n_1^{(P)} &= n_1^{(F-)} (k_F^{(-)} / k_P), & n_3^{(P)} &= (1 - (n_1^{(P)})^2)^{1/2}; \\
 n_1^{(S)} &= n_1^{(F-)} (k_F^{(-)} / k_S), & n_3^{(S)} &= (1 - (n_1^{(S)})^2)^{1/2}; \\
 n_1^{(F+)} &= n_1^{(F-)} (k_F^{(-)} / k_F^{(+)}), & n_3^{(F+)} &= (1 - (n_1^{(F+)})^2)^{1/2};
 \end{aligned} \tag{6}$$

а система уравнений относительно $\varphi_{02}^{(-)}$, $u_0^{(P\pm)}$, $u_0^{(S\pm)}$, $\varphi_0^{(+)}$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 \varphi_{02}^{(-)} \cdot s_{11} + u_0^{(P+)} \cdot s_{12} + u_0^{(P-)} \cdot s_{13} + u_0^{(S+)} \cdot s_{14} + u_0^{(S-)} \cdot s_{15} &= p_1, \\
 \varphi_{02}^{(-)} \cdot s_{21} + u_0^{(P+)} \cdot s_{22} + u_0^{(P-)} \cdot s_{23} + u_0^{(S+)} \cdot s_{24} + u_0^{(S-)} \cdot s_{25} &= p_2, \\
 u_0^{(P+)} \cdot s_{32} + u_0^{(P-)} \cdot s_{33} + u_0^{(S+)} \cdot s_{34} + u_0^{(S-)} \cdot s_{35} &= 0, \\
 u_0^{(P+)} \cdot s_{42} + u_0^{(P-)} \cdot s_{43} + u_0^{(S+)} \cdot s_{44} + u_0^{(S-)} \cdot s_{45} + \varphi_0^{(+)} \cdot s_{46} &= 0, \\
 u_0^{(P+)} \cdot s_{52} + u_0^{(P-)} \cdot s_{53} + u_0^{(S+)} \cdot s_{54} + u_0^{(S-)} \cdot s_{55} + \varphi_0^{(+)} \cdot s_{56} &= 0, \\
 u_0^{(P+)} \cdot s_{62} + u_0^{(P-)} \cdot s_{63} + u_0^{(S+)} \cdot s_{64} + u_0^{(S-)} \cdot s_{65} &= 0,
 \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= -i\omega, & s_{12} &= -(\lambda + 2\mu)ik_P n_3^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} - \mu ik_P n_1^{(P)} \Delta_{13}^{(P)}, \\
 s_{13} &= -(\lambda + 2\mu)ik_P n_3^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} + \mu ik_P n_1^{(P)} \Delta_{13}^{(P)}, \\
 s_{14} &= -(\lambda + 2\mu)ik_S n_3^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} - \mu ik_S n_1^{(S)} \Delta_{13}^{(S)}, \\
 s_{15} &= -(\lambda + 2\mu)ik_S n_3^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} + \mu ik_S n_1^{(S)} \Delta_{13}^{(S)}, \\
 s_{21} &= -ik_F^{(-)} n_3^{(F-)}, & s_{22} &= -i\omega, \\
 s_{23} &= -i\omega, & s_{24} &= -i\omega, & s_{25} &= -i\omega, \\
 s_{32} &= \mu(-ik_P n_1^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} - ik_P n_3^{(P)} \Delta_{13}^{(P)}), \\
 s_{33} &= \mu(-ik_P n_1^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} + ik_P n_3^{(P)} \Delta_{13}^{(P)}), \\
 s_{34} &= \mu(-ik_S n_1^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} - ik_S n_3^{(S)} \Delta_{13}^{(S)}),
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
s_{35} &= \mu(-ik_S n_1^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} + ik_S n_3^{(S)} \Delta_{13}^{(S)}), \\
s_{42} &= (-\lambda + 2\mu)ik_P n_3^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} - \mu ik_P n_1^{(P)} \Delta_{13}^{(P)} \exp(ik_P n_3^{(P)} h), \\
s_{43} &= (-\lambda + 2\mu)ik_P n_3^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} + \mu ik_P n_1^{(P)} \Delta_{13}^{(P)} \exp(-ik_P n_3^{(P)} h), \\
s_{44} &= (-\lambda + 2\mu)ik_S n_3^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} - \mu ik_S n_1^{(S)} \Delta_{13}^{(S)} \exp(ik_S n_3^{(S)} h), \\
s_{45} &= (-\lambda + 2\mu)ik_S n_3^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} + \mu ik_S n_1^{(S)} \Delta_{13}^{(S)} \exp(-ik_S n_3^{(S)} h), \\
s_{46} &= (-i\omega) \cdot \exp(ik_F^{(+)} n_3^{(F+)} h), \quad s_{52} = (-i\omega) \exp(ik_P n_3^{(P)} h), \\
s_{53} &= (-i\omega) \exp(-ik_P n_3^{(P)} h), \quad s_{54} = (-i\omega) \exp(ik_S n_3^{(S)} h), \\
s_{55} &= (-i\omega) \exp(-ik_S n_3^{(S)} h), \quad s_{56} = (ik_F^{(+)} n_3^{(F+)}) \exp(ik_F^{(+)} n_3^{(F+)} h), \\
s_{62} &= \mu(-ik_P n_1^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} - ik_P n_3^{(P)} \Delta_{13}^{(P)}) \exp(ik_P n_3^{(P)} h), \\
s_{63} &= (-ik_P n_1^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} + ik_P n_3^{(P)} \Delta_{13}^{(P)}) \exp(-ik_P n_3^{(P)} h), \\
s_{64} &= (-ik_S n_1^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} - ik_S n_3^{(S)} \Delta_{13}^{(S)}) \exp(ik_S n_3^{(S)} h), \\
s_{65} &= (-ik_S n_1^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} + ik_S n_3^{(S)} \Delta_{13}^{(S)}) \exp(-ik_S n_3^{(S)} h), \\
p_1 &= i\omega, p_2 = -ik_F^{(-)} n_3^{(F-)}.
\end{aligned}$$

Ее решения, в итоге, описывают характеристики четкой детерминистической версии модели рассматриваемого процесса и могут быть представлены зависимостями

$$\begin{aligned}
\varphi_{02}^{(-)} &= F_1(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0), \\
u_0^{(P+)} &= F_2(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0), \\
u_0^{(P-)} &= F_3(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0), \\
u_0^{(S+)} &= F_4(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0), \\
u_0^{(S-)} &= F_5(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0), \\
\varphi_0^{(+)} &= F_6(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0),
\end{aligned} \tag{9}$$

Данные представления далее могут быть использованы для оценивания эффектов влияния неконтрастности в задании физико-механических и геометрических параметров экрана и массивов идеальной слабосжимаемой жидкости.

Нечеткие оценки $\tilde{Q}_{02}^{(-)}, \tilde{Q}_0^{(+)}$ для значений

$$\begin{aligned} Q_{02}^{(-)} &= F_1(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0) \cdot (\varphi_{01}^{(-)})^{-1}, \\ Q_0^{(+)} &= F_6(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0) \cdot (\varphi_{01}^{(-)})^{-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

формируются на основе расширения областей определения функциональных зависимостей (10) на нечеткие множества и с применением эвристического принципа обобщения в α -уровневой форме [8 – 13]. При использовании данного подхода в рассматриваемом диапазоне изменения неопределенных, имеющих разбросы экспериментальных значений физико-механических параметров экрана, окружающих экран жидкостей и параметров частоты и ориентации падающей волны, вводятся разложения нечетко-интервальных величин $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\rho}, \tilde{\kappa}^{(-)}, \tilde{\kappa}^{(+)}, \tilde{\rho}_0^{(-)}, \tilde{\rho}_0^{(+)}, \tilde{\omega}, \tilde{h}, \tilde{\phi}_0$ по множествам α -срезов

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\lambda^{(1)} + \alpha\lambda^{(2)}, \alpha\lambda^{(3)} + (1-\alpha)\lambda^{(4)}), \\ \tilde{\mu} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\mu^{(1)} + \alpha\mu^{(2)}, \alpha\mu^{(3)} + (1-\alpha)\mu^{(4)}), \\ \tilde{\rho} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\rho}_\alpha, \overline{\rho}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\rho^{(1)} + \alpha\rho^{(2)}, \alpha\rho^{(3)} + (1-\alpha)\rho^{(4)}), \\ \tilde{\kappa}^{(\pm)} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\kappa}_{\pm\alpha}, \overline{\kappa}_{\pm\alpha}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\kappa_{\pm}^{(1)} + \alpha\kappa_{\pm}^{(2)}, \alpha\kappa_{\pm}^{(3)} + (1-\alpha)\kappa_{\pm}^{(4)}), \\ \tilde{\rho}_0^{(\pm)} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\rho}_{\pm\alpha}, \overline{\rho}_{\pm\alpha}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\rho_{\pm}^{(1)} + \alpha\rho_{\pm}^{(2)}, \alpha\rho_{\pm}^{(3)} + (1-\alpha)\rho_{\pm}^{(4)}), \\ \omega &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\omega}_\alpha, \overline{\omega}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\omega^{(1)} + \alpha\omega^{(2)}, \alpha\omega^{(3)} + (1-\alpha)\omega^{(4)}), \\ \tilde{h} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)h^{(1)} + \alpha h^{(2)}, \alpha h^{(3)} + (1-\alpha)h^{(4)}), \\ \tilde{\phi}_0 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\phi}_\alpha, \overline{\phi}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\phi^{(1)} + \alpha\phi^{(2)}, \alpha\phi^{(3)} + (1-\alpha)\phi^{(4)}). \end{aligned} \quad (11)$$

Искомые нечеткие оценки $\tilde{Q}_{02}^{(-)}, \tilde{Q}_0^{(+)}$ также формируются в виде суперпозиций по множествам α -уровня

$$\tilde{Q}_{02}^{(-)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{Q}_{02\alpha}, \overline{Q}_{02\alpha}), \quad \tilde{Q}_0^{(+)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{Q}_{0\alpha}, \overline{Q}_{0\alpha}). \quad (12)$$

При этом для характеристик $\underline{Q}_{02\alpha}, \overline{Q}_{02\alpha}$ и $\underline{Q}_{0\alpha}, \overline{Q}_{0\alpha}$ соответственно записываются представления

$$\begin{aligned}
 \underline{Q}_{02\alpha} &= \inf_{\substack{\lambda \in (\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha) \\ \mu \in (\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha) \\ \rho \in (\underline{\rho}_\alpha, \overline{\rho}_\alpha) \\ \kappa^{(\pm)} \in (\underline{\kappa}_{\pm\alpha}, \overline{\kappa}) \\ \rho_0^{(\pm)} \in (\underline{\rho}_{\pm\alpha}, \overline{\rho}_{\pm\alpha}) \\ \omega \in (\underline{\omega}_\alpha, \overline{\omega}_\alpha) \\ h \in (\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha) \\ \phi_0 \in (\underline{\phi}_\alpha, \overline{\phi}_\alpha)}} F_1(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0) \cdot (\varphi_{01}^{(-)})^{-1}, \\
 \overline{Q}_{02\alpha} &= \sup_{\substack{\lambda \in (\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha) \\ \mu \in (\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha) \\ \rho \in (\underline{\rho}_\alpha, \overline{\rho}_\alpha) \\ \kappa^{(\pm)} \in (\underline{\kappa}_{\pm\alpha}, \overline{\kappa}) \\ \rho_0^{(\pm)} \in (\underline{\rho}_{\pm\alpha}, \overline{\rho}_{\pm\alpha}) \\ \omega \in (\underline{\omega}_\alpha, \overline{\omega}_\alpha) \\ h \in (\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha) \\ \phi_0 \in (\underline{\phi}_\alpha, \overline{\phi}_\alpha)}} F_1(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0) \cdot (\varphi_{01}^{(-)})^{-1}, \\
 \underline{Q}_{0\alpha} &= \inf_{\substack{\lambda \in (\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha) \\ \mu \in (\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha) \\ \rho \in (\underline{\rho}_\alpha, \overline{\rho}_\alpha) \\ \kappa^{(\pm)} \in (\underline{\kappa}_{\pm\alpha}, \overline{\kappa}) \\ \rho_0^{(\pm)} \in (\underline{\rho}_{\pm\alpha}, \overline{\rho}_{\pm\alpha}) \\ \omega \in (\underline{\omega}_\alpha, \overline{\omega}_\alpha) \\ h \in (\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha) \\ \phi_0 \in (\underline{\phi}_\alpha, \overline{\phi}_\alpha)}} F_6(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0) \cdot (\varphi_{01}^{(-)})^{-1}, \\
 \overline{Q}_{0\alpha} &= \sup_{\substack{\lambda \in (\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha) \\ \mu \in (\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha) \\ \rho \in (\underline{\rho}_\alpha, \overline{\rho}_\alpha) \\ \kappa^{(\pm)} \in (\underline{\kappa}_{\pm\alpha}, \overline{\kappa}) \\ \rho_0^{(\pm)} \in (\underline{\rho}_{\pm\alpha}, \overline{\rho}_{\pm\alpha}) \\ \omega \in (\underline{\omega}_\alpha, \overline{\omega}_\alpha) \\ h \in (\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha) \\ \phi_0 \in (\underline{\phi}_\alpha, \overline{\phi}_\alpha)}} F_6(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0) \cdot (\varphi_{01}^{(-)})^{-1},
 \end{aligned} \tag{13}$$

Полученные представления подлежат использованию в вычислительном алгоритме с заданием схемы варьирования значений ω , $\rho_0^{(-)}$, $\rho_0^{(+)}$, $\kappa^{(-)}$, $\kappa^{(+)}$, ρ , λ , μ , h , ϕ_0 в соответствующих пределах на каждом из α -срезов, а количество рассматриваемых α -уровней выбирается из соображений обеспечения необходимой точности вычислений в описании функций принадлежности для нечетко-множественных оценок $\tilde{Q}_{02}^{(-)}$, $\tilde{Q}_{02}^{(+)}$.

Расчет значений $F_1(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0)$, $F_6(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0)$ при реализации алгоритма (13) может осуществляться с использованием аналитических формул решения системы алгебраических

уравнений (7)

$$F_j(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0) = \zeta_j / \zeta \quad (j = \overline{1, 6}) \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_1 = & -p_2 s_{15} s_{34} s_{46} s_{53} s_{62} + p_1 s_{25} s_{34} s_{46} s_{53} s_{62} + p_2 s_{14} s_{35} s_{46} s_{53} s_{62} - \\ & -p_1 s_{24} s_{35} s_{46} s_{53} s_{62} + p_2 s_{15} s_{33} s_{46} s_{54} s_{62} - p_1 s_{25} s_{33} s_{46} s_{54} s_{62} - \\ & -p_2 s_{13} s_{35} s_{46} s_{54} s_{62} + p_1 s_{23} s_{35} s_{46} s_{54} s_{62} - p_2 s_{14} s_{33} s_{46} s_{55} s_{62} + \\ & + p_1 s_{24} s_{33} s_{46} s_{55} s_{62} + p_2 s_{13} s_{34} s_{46} s_{55} s_{62} - p_1 s_{23} s_{34} s_{46} s_{55} s_{62} + \\ & + p_2 s_{15} s_{34} s_{43} s_{56} s_{62} - p_1 s_{25} s_{34} s_{43} s_{56} s_{62} - p_2 s_{14} s_{35} s_{43} s_{56} s_{62} + \\ & + p_1 s_{24} s_{35} s_{43} s_{56} s_{62} - p_2 s_{15} s_{33} s_{44} s_{56} s_{62} + p_1 s_{25} s_{33} s_{44} s_{56} s_{62} + \\ & + p_2 s_{13} s_{35} s_{44} s_{56} s_{62} - p_1 s_{23} s_{35} s_{44} s_{56} s_{62} + p_2 s_{14} s_{33} s_{45} s_{56} s_{62} - \\ & - p_1 s_{24} s_{33} s_{45} s_{56} s_{62} - p_2 s_{13} s_{34} s_{45} s_{56} s_{62} + p_1 s_{23} s_{34} s_{45} s_{56} s_{62} + \\ & + p_2 s_{15} s_{34} s_{46} s_{52} s_{63} - p_1 s_{25} s_{34} s_{46} s_{52} s_{63} - p_2 s_{14} s_{35} s_{46} s_{52} s_{63} + \\ & + p_1 s_{24} s_{35} s_{45} s_{52} s_{63} - p_2 s_{15} s_{32} s_{45} s_{54} s_{63} + p_1 s_{25} s_{32} s_{46} s_{54} s_{63} + \\ & + p_2 s_{12} s_{35} s_{46} s_{54} s_{63} - p_1 s_{22} s_{35} s_{46} s_{54} s_{63} + p_2 s_{14} s_{32} s_{46} s_{55} s_{63} - \\ & - p_1 s_{24} s_{32} s_{46} s_{55} s_{63} - p_2 s_{12} s_{34} s_{46} s_{55} s_{63} + p_1 s_{22} s_{34} s_{46} s_{55} s_{63} - \\ & - p_2 s_{15} s_{34} s_{42} s_{56} s_{63} + p_1 s_{25} s_{34} s_{42} s_{56} s_{63} + p_2 s_{14} s_{35} s_{42} s_{56} s_{63} - \\ & - p_1 s_{24} s_{35} s_{42} s_{56} s_{63} + p_2 s_{15} s_{32} s_{44} s_{56} s_{63} - p_1 s_{25} s_{32} s_{44} s_{56} s_{63} - \\ & - p_2 s_{12} s_{35} s_{44} s_{56} s_{63} + p_1 s_{22} s_{35} s_{44} s_{56} s_{63} - p_2 s_{14} s_{32} s_{45} s_{56} s_{63} + \\ & + p_1 s_{24} s_{32} s_{45} s_{56} s_{63} + p_2 s_{12} s_{34} s_{45} s_{56} s_{63} - p_1 s_{22} s_{34} s_{45} s_{56} s_{63} - \\ & - p_2 s_{15} s_{33} s_{46} s_{52} s_{64} + p_1 s_{25} s_{33} s_{46} s_{52} s_{64} + p_2 s_{13} s_{35} s_{46} s_{52} s_{64} - \\ & - p_1 s_{23} s_{35} s_{46} s_{52} s_{64} + p_2 s_{15} s_{32} s_{46} s_{53} s_{64} - p_1 s_{25} s_{32} s_{46} s_{53} s_{64} - \\ & - p_2 s_{12} s_{35} s_{46} s_{53} s_{64} + p_1 s_{22} s_{35} s_{46} s_{53} s_{64} - p_2 s_{13} s_{32} s_{46} s_{55} s_{64} + \\ & + p_1 s_{23} s_{32} s_{46} s_{55} s_{64} + p_2 s_{12} s_{33} s_{46} s_{55} s_{64} - p_1 s_{22} s_{33} s_{46} s_{55} s_{64} + \\ & + p_2 s_{15} s_{33} s_{42} s_{56} s_{64} - p_1 s_{25} s_{33} s_{42} s_{56} s_{64} - p_2 s_{13} s_{35} s_{42} s_{56} s_{64} + \\ & + p_1 s_{23} s_{35} s_{42} s_{56} s_{64} - p_2 s_{15} s_{32} s_{43} s_{56} s_{64} + p_1 s_{25} s_{32} s_{43} s_{56} s_{64} + \\ & + p_2 s_{12} s_{35} s_{43} s_{56} s_{64} - p_1 s_{22} s_{35} s_{43} s_{56} s_{64} + p_2 s_{13} s_{32} s_{45} s_{56} s_{64} - \\ & - p_1 s_{23} s_{32} s_{45} s_{56} s_{64} - p_2 s_{12} s_{33} s_{45} s_{56} s_{64} + p_1 s_{22} s_{33} s_{45} s_{56} s_{64} + \\ & + p_2 s_{14} s_{33} s_{46} s_{52} s_{65} - p_1 s_{24} s_{33} s_{46} s_{52} s_{65} - p_2 s_{13} s_{34} s_{46} s_{52} s_{65} + \\ & + p_1 s_{23} s_{34} s_{46} s_{52} s_{65} - p_2 s_{14} s_{32} s_{46} s_{53} s_{65} + p_1 s_{24} s_{32} s_{46} s_{53} s_{65} + \\ & + p_2 s_{12} s_{34} s_{46} s_{53} s_{65} - p_1 s_{22} s_{34} s_{46} s_{53} s_{65} + p_2 s_{13} s_{33} s_{46} s_{54} s_{65} - \\ & - p_1 s_{23} s_{32} s_{46} s_{54} s_{65} - p_2 s_{12} s_{33} s_{46} s_{54} s_{65} + p_1 s_{22} s_{33} s_{46} s_{54} s_{65} - \\ & - p_2 s_{14} s_{33} s_{42} s_{56} s_{65} + p_1 s_{24} s_{33} s_{42} s_{56} s_{65} + p_2 s_{13} s_{34} s_{42} s_{56} s_{65} - \\ & - p_1 s_{23} s_{34} s_{42} s_{56} s_{65} + p_2 s_{14} s_{32} s_{43} s_{56} s_{65} - p_1 s_{24} s_{32} s_{43} s_{56} s_{65} - \\ & - p_2 s_{12} s_{34} s_{43} s_{56} s_{65} + p_1 s_{22} s_{34} s_{43} s_{56} s_{65} - p_2 s_{13} s_{32} s_{44} s_{56} s_{65} + \\ & + p_1 s_{23} s_{32} s_{44} s_{56} s_{65} + p_2 s_{12} s_{33} s_{44} s_{56} s_{65} - p_1 s_{22} s_{33} s_{44} s_{56} s_{65}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_2 = & -p_2 s_{11} s_{35} s_{46} s_{54} s_{63} + p_1 s_{21} s_{35} s_{46} s_{54} s_{63} + p_2 s_{11} s_{34} s_{46} s_{55} s_{63} - \\ & -p_1 s_{21} s_{34} s_{46} s_{55} s_{63} + p_2 s_{11} s_{35} s_{44} s_{56} s_{63} - p_1 s_{21} s_{35} s_{44} s_{56} s_{63} - \\ & -p_2 s_{21} s_{34} s_{45} s_{56} s_{63} + p_1 s_{21} s_{34} s_{45} s_{56} s_{63} + p_2 s_{11} s_{35} s_{46} s_{53} s_{64} - \\ & -p_1 s_{21} s_{35} s_{46} s_{53} s_{64} - p_2 s_{11} s_{33} s_{46} s_{55} s_{64} + p_1 s_{21} s_{33} s_{46} s_{55} s_{64} - \\ & -p_2 s_{11} s_{35} s_{43} s_{56} s_{64} + p_1 s_{21} s_{35} s_{43} s_{56} s_{64} + p_2 s_{11} s_{33} s_{45} s_{56} s_{64} - \\ & -p_1 s_{21} s_{33} s_{45} s_{56} s_{64} - p_2 s_{11} s_{34} s_{46} s_{53} s_{65} + p_1 s_{21} s_{34} s_{46} s_{53} s_{65} + \\ & + p_2 s_{11} s_{33} s_{46} s_{54} s_{65} - p_1 s_{21} s_{33} s_{46} s_{54} s_{65} + p_2 s_{11} s_{34} s_{43} s_{56} s_{65} - \\ & -p_1 s_{21} s_{34} s_{43} s_{56} s_{65} - p_2 s_{11} s_{33} s_{44} s_{56} s_{65} + p_1 s_{21} s_{33} s_{44} s_{56} s_{65}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_3 = & p_2 s_{11} s_{35} s_{46} s_{54} s_{62} - p_1 s_{21} s_{35} s_{46} s_{54} s_{62} - p_2 s_{11} s_{34} s_{46} s_{55} s_{62} + \\ & + p_1 s_{21} s_{34} s_{46} s_{55} s_{62} - p_2 s_{11} s_{35} s_{44} s_{56} s_{62} + p_1 s_{21} s_{35} s_{44} s_{56} s_{62} + \\ & + p_2 s_{11} s_{34} s_{45} s_{56} s_{62} - p_1 s_{21} s_{34} s_{45} s_{56} s_{62} - p_2 s_{11} s_{35} s_{46} s_{52} s_{64} + \\ & + p_1 s_{21} s_{35} s_{46} s_{52} s_{64} + p_2 s_{11} s_{32} s_{46} s_{55} s_{64} - p_1 s_{21} s_{32} s_{46} s_{55} s_{64} + \\ & + p_2 s_{11} s_{35} s_{42} s_{56} s_{64} - p_1 s_{21} s_{35} s_{42} s_{56} s_{64} - p_2 s_{11} s_{32} s_{45} s_{56} s_{64} + \\ & + p_1 s_{21} s_{32} s_{45} s_{56} s_{64} + p_2 s_{11} s_{34} s_{46} s_{52} s_{65} - p_1 s_{21} s_{34} s_{46} s_{52} s_{65} - \\ & - p_2 s_{11} s_{32} s_{46} s_{54} s_{65} + p_1 s_{21} s_{32} s_{46} s_{54} s_{65} - p_2 s_{11} s_{34} s_{42} s_{56} s_{65} + \\ & + p_1 s_{21} s_{34} s_{42} s_{56} s_{65} + p_2 s_{11} s_{32} s_{44} s_{56} s_{65} - p_1 s_{21} s_{32} s_{44} s_{56} s_{65}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_4 = & -p_2 s_{11} s_{35} s_{46} s_{53} s_{62} + p_1 s_{21} s_{35} s_{46} s_{53} s_{62} + p_2 s_{11} s_{33} s_{46} s_{55} s_{62} - \\ & -p_1 s_{21} s_{33} s_{46} s_{55} s_{62} + p_2 s_{11} s_{35} s_{43} s_{56} s_{62} - p_1 s_{21} s_{35} s_{43} s_{56} s_{62} - \\ & -p_2 s_{11} s_{33} s_{45} s_{56} s_{62} + p_1 s_{21} s_{33} s_{45} s_{56} s_{62} + p_2 s_{11} s_{35} s_{46} s_{52} s_{63} - \\ & -p_1 s_{21} s_{35} s_{46} s_{52} s_{63} - p_2 s_{11} s_{32} s_{46} s_{55} s_{63} + p_1 s_{21} s_{32} s_{46} s_{55} s_{63} - \\ & -p_2 s_{11} s_{35} s_{42} s_{56} s_{63} + p_1 s_{21} s_{35} s_{42} s_{56} s_{63} + p_2 s_{11} s_{32} s_{45} s_{56} s_{63} - \\ & -p_1 s_{21} s_{32} s_{45} s_{56} s_{63} - p_2 s_{11} s_{33} s_{46} s_{52} s_{65} + p_1 s_{21} s_{33} s_{46} s_{52} s_{65} + \\ & + p_2 s_{11} s_{32} s_{46} s_{53} s_{65} - p_1 s_{21} s_{32} s_{46} s_{53} s_{65} + p_2 s_{11} s_{33} s_{42} s_{56} s_{65} - \\ & -p_1 s_{21} s_{33} s_{42} s_{56} s_{65} - p_2 s_{11} s_{32} s_{43} s_{56} s_{65} + p_1 s_{21} s_{32} s_{43} s_{56} s_{65}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_5 = & p_2 s_{11} s_{34} s_{46} s_{53} s_{62} - p_1 s_{21} s_{34} s_{46} s_{53} s_{62} - p_2 s_{11} s_{33} s_{46} s_{54} s_{62} + \\ & + p_1 s_{21} s_{33} s_{46} s_{54} s_{62} - p_2 s_{11} s_{34} s_{43} s_{56} s_{62} + p_1 s_{21} s_{34} s_{43} s_{56} s_{62} + \\ & + p_2 s_{11} s_{33} s_{44} s_{56} s_{62} - p_1 s_{21} s_{33} s_{44} s_{56} s_{62} - p_2 s_{11} s_{34} s_{46} s_{52} s_{63} + \\ & + p_1 s_{21} s_{34} s_{46} s_{52} s_{63} + p_2 s_{11} s_{32} s_{46} s_{54} s_{63} - p_1 s_{21} s_{32} s_{46} s_{54} s_{63} + \\ & + p_2 s_{11} s_{34} s_{42} s_{56} s_{63} - p_1 s_{21} s_{34} s_{42} s_{56} s_{63} - p_2 s_{11} s_{32} s_{44} s_{56} s_{63} + \\ & + p_1 s_{21} s_{32} s_{44} s_{56} s_{63} + p_2 s_{11} s_{33} s_{46} s_{52} s_{64} - p_1 s_{21} s_{33} s_{46} s_{52} s_{64} - \\ & - p_2 s_{11} s_{32} s_{46} s_{53} s_{64} + p_1 s_{21} s_{32} s_{46} s_{53} s_{64} - p_2 s_{11} s_{33} s_{42} s_{56} s_{64} + \\ & + p_1 s_{21} s_{33} s_{42} s_{56} s_{64} + p_2 s_{11} s_{32} s_{43} s_{56} s_{64} - p_1 s_{21} s_{32} s_{43} s_{56} s_{64}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \zeta_6 = & p_2 s_{11} s_{35} s_{44} s_{53} s_{62} - p_1 s_{21} s_{35} s_{44} s_{53} s_{62} - p_2 s_{11} s_{34} s_{45} s_{55} s_{62} + \\
 & + p_1 s_{21} s_{34} s_{45} s_{53} s_{62} - p_2 s_{11} s_{35} s_{43} s_{54} s_{62} + p_1 s_{21} s_{35} s_{43} s_{54} s_{62} + \\
 & + p_2 s_{11} s_{33} s_{45} s_{54} s_{62} - p_1 s_{21} s_{33} s_{45} s_{54} s_{62} + p_2 s_{11} s_{34} s_{43} s_{55} s_{62} - \\
 & - p_1 s_{21} s_{34} s_{43} s_{55} s_{62} - p_2 s_{11} s_{33} s_{44} s_{55} s_{62} + p_1 s_{21} s_{33} s_{44} s_{55} s_{62} - \\
 & - p_2 s_{11} s_{35} s_{44} s_{52} s_{63} + p_1 s_{21} s_{35} s_{44} s_{52} s_{63} + p_2 s_{11} s_{34} s_{45} s_{52} s_{63} - \\
 & - p_1 s_{21} s_{34} s_{45} s_{52} s_{63} + p_2 s_{11} s_{35} s_{42} s_{54} s_{63} - p_1 s_{21} s_{35} s_{42} s_{54} s_{63} - \\
 & - p_2 s_{11} s_{32} s_{45} s_{54} s_{63} + p_1 s_{21} s_{32} s_{45} s_{54} s_{63} - p_2 s_{11} s_{34} s_{42} s_{55} s_{63} + \\
 & + p_1 s_{21} s_{34} s_{42} s_{55} s_{63} + p_2 s_{11} s_{32} s_{44} s_{55} s_{63} - p_1 s_{21} s_{32} s_{44} s_{55} s_{63} + \\
 & + p_2 s_{11} s_{35} s_{43} s_{52} s_{64} - p_1 s_{21} s_{35} s_{43} s_{52} s_{64} - p_2 s_{11} s_{33} s_{45} s_{52} s_{64} + \\
 & + p_1 s_{21} s_{33} s_{45} s_{52} s_{64} - p_2 s_{11} s_{35} s_{42} s_{53} s_{64} + p_1 s_{21} s_{35} s_{42} s_{53} s_{64} + \\
 & + p_2 s_{11} s_{32} s_{45} s_{53} s_{64} - p_1 s_{21} s_{32} s_{45} s_{53} s_{64} + p_2 s_{11} s_{33} s_{42} s_{55} s_{64} - \\
 & - p_1 s_{21} s_{33} s_{42} s_{55} s_{64} - p_2 s_{11} s_{32} s_{43} s_{55} s_{64} + p_1 s_{21} s_{32} s_{43} s_{55} s_{64} - \\
 & - p_2 s_{11} s_{34} s_{43} s_{52} s_{65} + p_1 s_{21} s_{34} s_{43} s_{52} s_{65} + p_2 s_{11} s_{33} s_{44} s_{52} s_{65} - \\
 & - p_1 s_{21} s_{33} s_{44} s_{52} s_{65} + p_2 s_{11} s_{34} s_{42} s_{53} s_{65} - p_1 s_{21} s_{34} s_{42} s_{53} s_{65} - \\
 & - p_2 s_{11} s_{32} s_{44} s_{53} s_{65} + p_1 s_{21} s_{32} s_{44} s_{53} s_{65} - p_2 s_{11} s_{33} s_{42} s_{54} s_{65} + \\
 & + p_1 s_{21} s_{33} s_{42} s_{54} s_{65} + p_2 s_{11} s_{32} s_{43} s_{54} s_{65} - p_1 s_{21} s_{32} s_{43} s_{54} s_{65},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \zeta = & s_{15} s_{21} s_{34} s_{46} s_{53} s_{62} - s_{11} s_{25} s_{34} s_{46} s_{53} s_{62} - s_{14} s_{21} s_{35} s_{46} s_{53} s_{62} + \\
 & + s_{11} s_{24} s_{35} s_{46} s_{53} s_{62} - s_{15} s_{21} s_{33} s_{46} s_{54} s_{62} + s_{11} s_{25} s_{33} s_{46} s_{54} s_{62} + \\
 & + s_{13} s_{21} s_{35} s_{46} s_{54} s_{62} - s_{11} s_{23} s_{35} s_{46} s_{54} s_{62} + s_{14} s_{21} s_{33} s_{46} s_{55} s_{62} - \\
 & - s_{11} s_{24} s_{33} s_{46} s_{55} s_{62} - s_{13} s_{21} s_{34} s_{46} s_{55} s_{62} + s_{11} s_{23} s_{34} s_{46} s_{55} s_{62} - \\
 & - s_{15} s_{21} s_{34} s_{43} s_{56} s_{62} + s_{11} s_{25} s_{34} s_{43} s_{56} s_{62} + s_{14} s_{21} s_{35} s_{43} s_{56} s_{62} - \\
 & - s_{11} s_{24} s_{35} s_{43} s_{56} s_{62} + s_{15} s_{21} s_{33} s_{44} s_{56} s_{62} - s_{11} s_{25} s_{33} s_{44} s_{56} s_{62} - \\
 & - s_{13} s_{21} s_{35} s_{44} s_{56} s_{62} + s_{11} s_{23} s_{35} s_{44} s_{56} s_{62} - s_{14} s_{21} s_{33} s_{45} s_{56} s_{62} + \\
 & + s_{11} s_{24} s_{33} s_{45} s_{56} s_{62} + s_{13} s_{21} s_{34} s_{45} s_{56} s_{62} - s_{11} s_{23} s_{34} s_{45} s_{56} s_{62} - \\
 & - s_{15} s_{21} s_{34} s_{46} s_{52} s_{63} + s_{11} s_{25} s_{34} s_{46} s_{52} s_{63} + s_{14} s_{21} s_{35} s_{46} s_{52} s_{63} - \\
 & - s_{11} s_{24} s_{35} s_{46} s_{52} s_{63} + s_{15} s_{21} s_{32} s_{46} s_{54} s_{63} - s_{11} s_{25} s_{32} s_{46} s_{54} s_{63} - \\
 & - s_{12} s_{21} s_{35} s_{46} s_{54} s_{63} + s_{11} s_{22} s_{35} s_{46} s_{54} s_{63} - s_{14} s_{21} s_{32} s_{46} s_{55} s_{63} + \\
 & + s_{11} s_{24} s_{32} s_{46} s_{55} s_{63} + s_{12} s_{21} s_{34} s_{46} s_{55} s_{63} - s_{11} s_{22} s_{34} s_{46} s_{55} s_{63} + \\
 & + s_{15} s_{21} s_{34} s_{42} s_{56} s_{63} - s_{11} s_{25} s_{34} s_{42} s_{56} s_{63} - s_{14} s_{21} s_{34} s_{42} s_{56} s_{63} + \\
 & + s_{11} s_{24} s_{35} s_{42} s_{56} s_{63} - s_{15} s_{21} s_{32} s_{44} s_{56} s_{63} + s_{11} s_{25} s_{32} s_{44} s_{56} s_{63} + \\
 & + s_{12} s_{21} s_{35} s_{44} s_{56} s_{63} - s_{11} s_{22} s_{35} s_{44} s_{56} s_{63} + s_{14} s_{21} s_{32} s_{45} s_{56} s_{63} - \\
 & - s_{11} s_{24} s_{32} s_{45} s_{56} s_{63} - s_{12} s_{21} s_{34} s_{45} s_{56} s_{63} + s_{11} s_{22} s_{34} s_{45} s_{56} s_{63} + \\
 & + s_{15} s_{21} s_{33} s_{46} s_{52} s_{64} - s_{11} s_{25} s_{33} s_{46} s_{52} s_{64} - s_{13} s_{21} s_{35} s_{46} s_{52} s_{64} + \\
 & + s_{11} s_{23} s_{35} s_{46} s_{52} s_{64} - s_{15} s_{21} s_{32} s_{46} s_{53} s_{64} + s_{11} s_{25} s_{32} s_{46} s_{53} s_{64} + \\
 & + s_{12} s_{21} s_{35} s_{46} s_{53} s_{64} - s_{11} s_{22} s_{35} s_{46} s_{53} s_{64} + s_{13} s_{21} s_{32} s_{46} s_{55} s_{64} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -s_{11}s_{23}s_{32}s_{46}s_{55}s_{64} - s_{12}s_{21}s_{33}s_{46}s_{55}s_{64} + s_{11}s_{22}s_{33}s_{46}s_{55}s_{64} - \\
 & -s_{15}s_{21}s_{33}s_{42}s_{56}s_{64} + s_{11}s_{25}s_{33}s_{42}s_{56}s_{64} + s_{13}s_{21}s_{35}s_{42}s_{56}s_{64} - \\
 & -s_{11}s_{23}s_{35}s_{42}s_{56}s_{64} + s_{15}s_{21}s_{32}s_{43}s_{56}s_{64} - s_{11}s_{25}s_{32}s_{43}s_{56}s_{64} - \\
 & -s_{12}s_{21}s_{35}s_{43}s_{56}s_{64} + s_{11}s_{22}s_{35}s_{46}s_{56}s_{64} - s_{13}s_{21}s_{32}s_{45}s_{56}s_{64} + \\
 & + s_{11}s_{23}s_{32}s_{45}s_{56}s_{64} + s_{12}s_{21}s_{33}s_{45}s_{56}s_{64} - s_{11}s_{22}s_{33}s_{45}s_{56}s_{64} - \\
 & -s_{14}s_{21}s_{33}s_{46}s_{52}s_{65} + s_{11}s_{24}s_{33}s_{46}s_{52}s_{65} + s_{13}s_{21}s_{34}s_{46}s_{52}s_{65} - \\
 & -s_{11}s_{23}s_{34}s_{46}s_{52}s_{65} + s_{14}s_{21}s_{32}s_{46}s_{53}s_{65} - s_{11}s_{24}s_{32}s_{46}s_{53}s_{65} - \\
 & -s_{12}s_{21}s_{34}s_{46}s_{53}s_{65} + s_{11}s_{22}s_{34}s_{46}s_{53}s_{65} - s_{13}s_{21}s_{32}s_{46}s_{54}s_{65} + \\
 & + s_{11}s_{23}s_{32}s_{46}s_{54}s_{65} + s_{12}s_{21}s_{33}s_{46}s_{54}s_{65} - s_{11}s_{22}s_{33}s_{46}s_{54}s_{65} + \\
 & + s_{14}s_{21}s_{33}s_{42}s_{56}s_{65} - s_{11}s_{24}s_{33}s_{42}s_{56}s_{65} - s_{13}s_{21}s_{34}s_{42}s_{56}s_{65} + \\
 & + s_{11}s_{23}s_{34}s_{42}s_{56}s_{65} - s_{14}s_{21}s_{32}s_{43}s_{56}s_{65} + s_{11}s_{24}s_{32}s_{43}s_{56}s_{65} + \\
 & + s_{12}s_{21}s_{34}s_{43}s_{56}s_{65} - s_{11}s_{22}s_{34}s_{43}s_{56}s_{65} + s_{13}s_{21}s_{32}s_{44}s_{56}s_{65} - \\
 & -s_{11}s_{23}s_{32}s_{44}s_{56}s_{65} - s_{12}s_{21}s_{33}s_{44}s_{56}s_{65} + s_{11}s_{22}s_{33}s_{44}s_{56}s_{65}.
 \end{aligned}$$

Для нечеткой характеристики угла $\phi_+ = (Ox_1 \wedge \vec{n}^{(F+)})$ ориентации волновой нормали гидроакустической волны в среде за экраном на основании следующего из (6) соотношения

$$\phi_+ = \arccos((k_F^{(-)}/k_F^{(+)}) \cos \phi_0) = \arccos(((\rho_0^{(+)} \kappa^{(+)})/(\rho_0^{(-)} \kappa^{(-)}))^{1/2} \cos \phi_0)$$

в рамках предположений (11) и гипотезы о четком задании ϕ_0 может быть записана оценка

$$\tilde{\phi}_+ = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\phi}_{+\alpha}, \bar{\phi}_{+\alpha}) \quad (15)$$

$$\underline{\phi}_{+\alpha} = \left\{ \inf_{\vartheta \in (\underline{\vartheta}_\alpha, \bar{\vartheta}_\alpha)} \arccos(\vartheta^{1/2} \cdot \cos \phi_0) \right\}, \quad \bar{\phi}_{+\alpha} = \left\{ \sup_{\vartheta \in (\underline{\vartheta}_\alpha, \bar{\vartheta}_\alpha)} \arccos(\vartheta^{1/2} \cdot \cos \phi_0) \right\},$$

$$\tilde{\vartheta} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\vartheta}_\alpha, \bar{\vartheta}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\vartheta^{(1)} + \alpha\vartheta^{(2)}, \alpha\vartheta^{(3)} + (1-\alpha)\vartheta^{(4)}),$$

$$\vartheta^{(1)} = (\rho_+^{(1)} \kappa_+^{(1)})/(\rho_-^{(4)} \kappa_-^{(4)}), \quad \vartheta^{(2)} = (\rho_+^{(2)} \kappa_+^{(2)})/(\rho_-^{(3)} \kappa_-^{(3)}),$$

$$\vartheta^{(3)} = (\rho_+^{(3)} \kappa_+^{(3)})/(\rho_-^{(2)} \kappa_-^{(2)}), \quad \vartheta^{(4)} = (\rho_+^{(4)} \kappa_+^{(4)})/(\rho_-^{(1)} \kappa_-^{(1)}).$$

В частности, при задании нормированных неопределенных значений $\tilde{\rho}_0^{(+)}$, $\tilde{\kappa}^{(+)}$, $\tilde{\rho}_0^{(-)}$, $\tilde{\kappa}^{(-)}$ нечеткими интервалами с реперными точками

$$\tilde{\rho}_0^{(+)} : (1.26, 1.28, 1.29, 1.33), \quad \tilde{\kappa}^{(+)} : (6.02, 6.05, 6.07, 6.09),$$

$$\tilde{\rho}_0^{(-)} : (0.96, 0.98, 1.01, 1.04), \quad \tilde{\kappa}^{(-)} : (5.86, 5.88, 5.89, 5.93),$$

и при $\phi_0 = \pi/4$, функция принадлежности для нечетко-множественной характеристики $\tilde{\phi}_+ = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\phi}_{+\alpha}, \bar{\phi}_{+\alpha})$, полученная на основе алгоритма (15), имеет вид, представленный на рисунке.

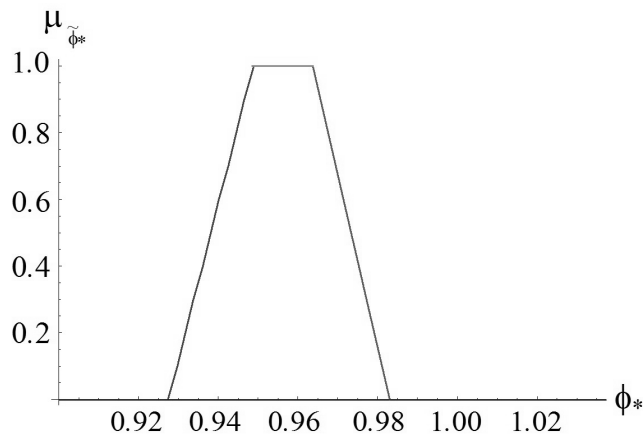


Рис. 1. Функция принадлежности для нечетко-множественной характеристики $\tilde{\phi}_*$.

2. Выводы. Результатом представленных исследований является теоретический алгоритм анализа факторов неопределенности в модели наклонного падения волны гидроакустического давления на экран в виде упругого изотропного деформируемого слоя, контактирующего по граням с массивами идеальной слабосжимаемой жидкости. Описываемая нечетко-множественная методика ориентирована на учет неопределенностей в виде разбросов характеристик падающей волны, а также разбросов значений неконтрастных экспериментальных геометрических и физико-механических параметров экрана и граничащих с ним жидкостей. В основу разработанного алгоритма положено использование результатов аналитического исследования четкого детерминированного варианта рассматриваемой модели и последующее применение альфа-уровневой модификации эвристического принципа обобщения для перехода к нечетким представлениям экзогенных параметров. Рассмотрен пример численной реализации одной из составляющих алгоритма.

1. Болнокин В.Е. Системы гидроакустического экранирования для подводных транспортных средств. / В.Е. Болнокин, В.И. Сторожев, Зыонг Минь Хай – Воронеж, Научная книга, 2017. – 252 с.
2. Глазанов В.Е. Акустические экраны для подводных преобразователей и антенн. Теория и расчет. / В.Е. Глазанов – СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2013. – 175 с.
3. Ларин В.Б. Статистические задачи виброзащиты. / В.Б. Ларин – Киев: Наукова думка, 1974. – 128 с.
4. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. / В.А. Ломакин – М.: Наука, 1970. – 139 с.
5. Алтунин А.Е. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях: Монография / Алтунин А.Е., Семухин М.В. – Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2000. – 352 с.
6. Дилигенский Н.В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология. / Дилигенский Н.В., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В. – М.: Издательство Машиностроение – 1, 2004. – 397 с.

7. Павлов А.Н. Принятие решений в условиях нечеткой информации: учеб. пособие. / А.Н. Павлов, Б.В. Соколов – СПб.: ГУАП, 2006 – 72 с.
8. Ротштейн А.П. Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов. / А.П. Ротштейн, С.Д. Штовба, А.Н. Козачко – Винница: УНІВЕРСУМ, 2007. – 215 с.
9. Сторожев В.И. Нечетко-множественные оценки в моделях теории объемных волн деформаций / В.И. Сторожев, С.В. Сторожев // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 103–111.
10. Сторожев С.В. Нечеткие оценки для характеристик нелинейных вторых гармоник объемных волн сдвига в трансверсально-изотропной упругой среде / С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки. – 2015. – № 2. – С. 38–43.
11. Сторожев С.В. Нечеткие оценки для характеристик нормальных волн деформаций в поперечно-анизотропном упругом слое / С.В. Сторожев // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XVIII Международной конференции (Ростов-на-Дону, 7 – 10 ноября 2016 г.); в 2 т. – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального ун-та, 2016. – Т. 2. – С. 200–204.
12. Storozhev S. V. Uncertainty in the models of the theory of volume elastic waves through the use of the theory of fuzzy sets / S.V. Storozhev // Modeling and information technologies: selected papers of the international scientific school "Paradigma"(Summer-2015, Varna, Bulgaria) / Compiling editor dr. sc., prof. O. Ja. Kravets. - CityplaceYelm, StateWA, country-regionUSA: Science Book Publ. House, 2015. – P. 45–52.
13. Storozhev S. V. Fuzzy Evaluations for Kinematic Characteristics of Nonlinear Second Harmonics of Shear Waves in Transversely Isotropic Medium / S.V. Storozhev // Nonlinear Dynamics – 2016. Proceedings of 5-th International Conference (September 27-30, 2016) / National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute» at al. - CityplaceKharkov, 2016. – P. 509–514.

V.E. Bolnokin, Duong Minh Hai, S.B. Nombre, S.V. Storozhev

Fuzzy model of reflection and refraction of hydroacoustic waves in case of the oblique incidence on isotropic layer in liquid environment .

A theoretical algorithm for analyzing the uncertainty factors in the model of the oblique incidence of a wave of hydroacoustic pressure on a screen in the form of an elastic isotropic deformable layer contacting along the faces with arrays of an ideal weakly compressible liquid is developed. The fuzzy-sets technique is used to allow for uncertainties in the form of the non-contrast values of experimental geometric and physico-mechanical parameters of the screen and the liquids.

Keywords: *flat isotropic hydroacoustic screen, model of the incidence at angle of pressure wave, uncertainty of exogenous physico-mechanical and geometric parameters, fuzzy-set estimation of characteristics of screening, application of heuristic principle of generalization , case of representations for characteristics of models in form of fuzzy intervals.*

ФГУП “Научно-исследовательский и экспериментальный институт автомобильной электроники и электрооборудования”,
Москва
ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства и архитектуры”, Макеевка
stvistvi@mail.ru

Получено 27.10.17

УДК 539.3

©2017. С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина, А.И. Занько

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ И ДВОЙКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОТВЕРСТИЯМИ ИЛИ ТРЕЩИНАМИ

С использованием обобщенных комплексных потенциалов теории упругости анизотропного тела решены периодическая и двойкопериодическая задачи теории упругости для пластинки с эллиптическими отверстиями или трещинами. Разложением голоморфных функций в ряды Лорана получены общие представления соответствующих функций для пластинки с конечным числом отверстий, затем удовлетворением условиям периодичности и двойкопериодичности напряженно-деформированного состояния найдены общие представления искомым комплексным потенциалов, что позволило удовлетворять граничным условиям лишь на одном контуре. Эти условия удовлетворяются обобщенным методом наименьших квадратов, что дает возможность с высокой степенью точности удовлетворять граничным условиям даже для весьма близких расстояний между отверстиями и трещинами при их любой ориентации.

Ключевые слова: анизотропная пластинка, периодическая задача, двойкопериодическая задача, отверстия, трещины, концентрация напряжений.

Введение. Тонкие пластинки из композиционных материалов с отверстиями широко используются в качестве элементов конструкций современного авиа-, машино- и приборостроения. Под действием различных механических сил, около отверстий могут возникать высокие концентрации напряжений, которые необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации таких конструкций. К настоящему времени разработаны различные методы определения напряженного состояния пластин из анизотропных материалов с отверстиями, решен ряд задач. Наиболее важные результаты в этом направлении получены с помощью обобщенных комплексных потенциалов, разработанных и впервые использованных для решения задач С. Г. Лехницким [1]. Для многосвязных областей широкое использование комплексных потенциалов связано с работами А. С. Космодамианского и его учеников [2]. При этом для решения задач в этих работах использовался метод рядов. Но использование этого метода не позволяет получать результаты достаточной степени точности при близких расстояниях между контурами отверстий, а для случаев пересекающихся контуров и когда контуры переходят в разрезы оно не возможно. Для решения задач в этих случаях в работах [3, 4] был использован дискретный метод наименьших квадратов, что позволило рассматривать случаи любых конфигураций и расположений контуров отверстий в пластинке, но получаемое решение оказывается довольно громоздким и при реализации на ЭВМ требует составления программ достаточно сложной структуры. В работе [5] для решения задач исследования напряженного состояния многосвязных пластин был использован обобщенный метод наименьших квадратов (ОМК), что приводит такие задачи к переопределен-

ным системам линейных алгебраических уравнений, которые решаются методами сингулярных разложений. Использование ОМНК значительно упрощает организацию вычислительных работ с сохранением преимуществ дискретного метода наименьших квадратов и улучшением точности получаемых результатов. Этот метод с успехом может использоваться и для решения периодических и дwoякопериодических задач, для решения которых в более ранних работах [2, 6, 7] использовались другие методы.

В данной статье ОМНК решены периодическая и дwoякопериодическая задачи для пластинки с эллиптическими отверстиями или трещинами. Проведены численные исследования распределения напряжений и изменения коэффициентов интенсивности напряжении (КИН).

1. Решение задачи для пластинки с конечным числом отверстий.

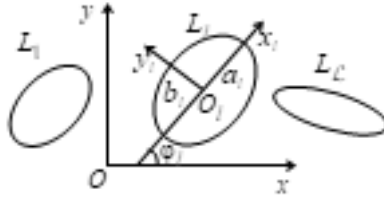


Рис. 1. Многосвязная пластинка

Рассмотрим вначале отнесенную к прямоугольной декартовой системе координат Oxy бесконечную анизотропную пластинку, занимающую многосвязную область S (рис. 1), ограниченную контурами произвольно расположенных эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, L}$) с полуосями a_l, b_l , центрами в точках (x_{0l}, y_{0l}) и углами наклонов φ_l полуосей a_l к оси Ox . На контурах отверстий действуют распределенные внешние усилия или перемещения. На бесконечности заданы напряжения $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$, угол поворота $\omega_3^\infty = 0$.

Определение напряженно-деформированного состояния (НДС) рассматриваемой пластинки сводится к нахождению комплексных потенциалов [1, 4]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kln} a_{kln}, \quad (1)$$

где Γ_k - постоянные, определяемые из системы уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_k = \left(\sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, -\omega_3^\infty + \frac{a_{16}\sigma_x^\infty + (2a_{12} + a_{66})\tau_x^\infty + 3a_{26}\sigma_y^\infty}{2a_{22}} \right), \quad (2)$$

μ_k - корни характеристического уравнения

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0; \quad (3)$$

a_{ij} - коэффициенты деформации материала пластинки;

$$\varphi_{kln} = 1/\zeta_{kl}^n; \quad (4)$$

ζ_{kl} - переменные, определяемые из конформных отображений

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right) \quad (5)$$

внешности единичного круга $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности контуров L_{kl} , соответствующих контурам L_l при аффинных преобразованиях

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (6)$$

причем

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}; \end{aligned} \quad (7)$$

a_{kln} - неизвестные коэффициенты рядов Лорана, определяемые из граничных условий на контурах отверстий, которые в случае многосвязных пластин удобнее использовать в дифференциальной форме, не содержащей постоянных слагаемых в этих условиях. Последние условия на контуре L_p ($p = \overline{1, \mathcal{L}}$) имеют вид [1, 4]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{kpi} \delta_{k,s} \Phi'_k(t_k) = \frac{df_{pi}(t)}{ds} \quad (i = 1, 2), \quad (8)$$

в котором $\delta_{k,s} = dz_k/ds$, а также

$$\begin{aligned} g_{kp1} &= 1, \quad g_{kp2} = \mu_k, \\ \frac{df_{p1}(t)}{ds} &= Y_{pn}, \quad \frac{df_{p2}(t)}{ds} = -X_{pn} \end{aligned} \quad (9)$$

в случае загруженного контура L_p ,

$$\begin{aligned} g_{kp1} &= p_k, \quad g_{kp2} = q_k, \\ \frac{df_{p1}(t)}{ds} &= 0, \quad \frac{df_{p2}(t)}{ds} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

если контур L_p жестко подкреплён. При этом

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k); \quad (11)$$

$$\varphi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{R_{kl}\zeta_{kl}^{n-1}(\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}. \quad (12)$$

После определения постоянных a_{kln} функции $\Phi_k(z_k)$ будут известными и по ним можно вычислять в любой точке пластинки основные напряжения по формулам

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (\mu_k^2, 1 - \mu_k) \Phi'_k(z_k) \quad (13)$$

и напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \sin^2 \varphi_l + \sigma_y \cos^2 \varphi_l - 2\tau_{xy} \sin \varphi_l \cos \varphi_l, \\ \sigma_s &= \sigma_x \cos^2 \varphi_l + \sigma_y \sin^2 \varphi_l + 2\tau_{xy} \sin \varphi_l \cos \varphi_l, \\ \tau_{ns} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi_l \cos \varphi_l + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l) \end{aligned} \quad (14)$$

на произвольных площадках с нормалью n и касательной s . При этом, если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейный разрез (трещину или жесткое линейное включение), то для его концов можно вычислить и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) k_1^\pm и k_2^\pm по формулам [8]

$$\begin{aligned} k_1^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 [\mu_k^2 \sin^2 \varphi_l + \cos^2 \varphi_l + 2\mu_k \sin \varphi_l \cos \varphi_l] M_k, \\ k_2^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 [(1 - \mu_k^2) \cos \varphi_l \sin \varphi_l - \mu_k (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l)] M_k, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$M_k = \pm \frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n+1} n a_{kln}; \quad (16)$$

знаки $+$ и $-$ у КИН в локальной системе координат $O_l x_l y_l$ относятся к правому и левому концам разреза соответственно.

2. Периодическая задача для пластинки с эллиптическими отверстиями или трещинами. Пусть теперь пластинка имеет бесконечное число одинаковых и одинаково ориентированных эллиптических отверстий с контурами L_l ($l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) с центрами вдоль одной прямой (рис. 2), принимаемой за ось Ox прямоугольной системы координат Oxy с началом в центре отверстия с контуром L_0 , называемого основным. Обозначим полуоси эллипсов через a и b , угол наклона полуоси a к оси Ox - через φ , расстояние между центрами соседних отверстий - через h_x . Контур отверстия одинаково нагружены самоуравновешенными внешними усилиями, на бесконечности пластинка находится под действием усилий $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$, угол вращения $\omega_3^\infty = 0$.

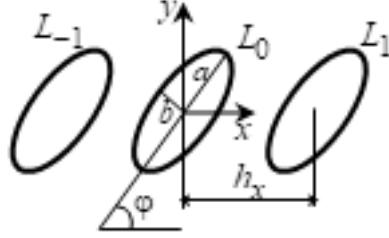


Рис. 2. Пластика с периодическим рядом отверстий

В этом случае комплексные потенциалы и их производные примут вид

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kln} a_{kln}, \quad (17)$$

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi'_{kln} a_{kln},$$

где $\varphi_{kln}(z_k)$ и $\varphi'_{kln}(z_k)$ - функции, вычисляемые по формулам (4) и (12), ζ_{kl} - переменные, определяемые из неявных зависимостей

$$z_k = z_{kl} + R_k \left(\zeta_{kl} + \frac{m_k}{\zeta_{kl}} \right), \quad (18)$$

$$\varphi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{R_k \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_k)},$$

причем $z_{kl} = lh_x$; R_k, m_k - величины, вычисляемые по формулам (7), в которых нужно опускать в индексах номер l .

В силу периодичности напряженного состояния значения напряжений в точках z_k и $z_k + h_x$ будут одинаковыми. Тогда из равенств (13) следует, что $\Phi'_k(z_k) = \Phi'_k(z_k + h_x)$, а следовательно, по (11)

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k + h_x). \quad (19)$$

Из равенств (18) следует, что

$$\begin{aligned} \zeta_{kl}(z_k + h_x) &= \zeta_{kl+1}(z_k), \\ \varphi'_{kln}(z_k + h_x) &= \varphi'_{kl+1, n}(z_k). \end{aligned} \quad (20)$$

Подставляя выражения (20) в (19) и переобозначая индексы суммирования, находим

$$\begin{aligned} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi'_{kl+1, n}(z_k) = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kl-1, n} \varphi'_{kln}(z_k). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых функциях $\varphi'_{kln}(z_k)$, будем иметь $a_{kln} = a_{kl-1, n} = a_{kn}$. Тогда для комплексных потенциалов и их производных окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_k) &= \Gamma_k z_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \psi_{kn}(z_k), \\ \Phi'_k(z_k) &= \Gamma_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \psi'_{kn}(z_k), \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned} \psi_{kn}(z_k) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \varphi_{kln}(z_k), \\ \psi'_{kn}(z_k) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \varphi'_{kln}(z_k). \end{aligned} \tag{22}$$

Теперь для определения неизвестных постоянных a_{kn} нужно удовлетворять граничным условиям (8) лишь на одном из контуров, например, на контуре центрального отверстия L_0 . На остальных контурах в силу периодичности комплексных потенциалов, граничные условия будут удовлетворены автоматически. Граничным условиям (8) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов. Для этого выберем на контуре L_0 систему точек $M_{m0}(x_{m0}, y_{m0})$ ($m = \overline{1, M_0}$), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (21). Тогда для определения неизвестных постоянных a_{kn} получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} g_{k0i} \delta_{k,s} \psi'_{kn}(t_{km}) a_{kn} &= \\ &= \frac{df_{0i}(t_m)}{ds} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{k0i} \delta_{k,s} \Gamma_k \quad (m = \overline{1, M_0}; \quad i = 1, 2). \end{aligned} \tag{23}$$

Систему (23) будем решать с использованием сингулярных разложений [5, 9, 10].

3. Двоякопериодическая задача для пластинки с эллиптическими отверстиями или трещинами. Пусть теперь пластинка имеет m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) одинаковых бесконечных рядов одинаковых и одинаково ориентированных эллиптических отверстий или трещин с контурами L_{ml} ($m, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), полуосями a, b (рис. 3). Обозначим расстояния между центрами соседних отверстий каждого из рядов через h_x , угол между полуосью a и осью Ox - через φ , расстояния между центрами соседних рядов через h_y . Контур отверстия одинаково нагружены самоуравновешенными внешними усилиями, на бесконечности пластинка находится под действием усилий $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$, угол вращения $\omega_3^\infty = 0$.

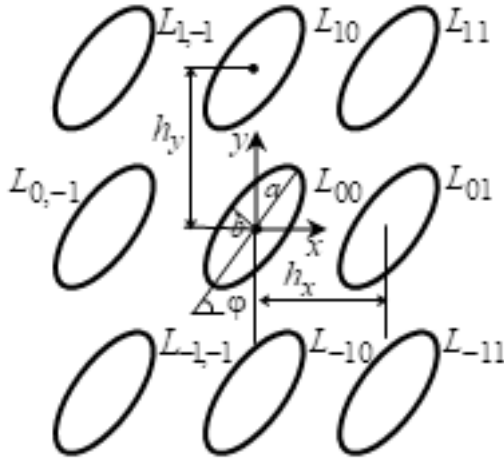


Рис. 3. Пластинка с двоякопериодической системой отверстий

Для рассматриваемого случая комплексные потенциалы (1) и их производные (11) примут вид

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_k) &= \Gamma_k z_k + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kmln}(z_k) a_{kmln}, \\ \Phi'_k(z_k) &= \Gamma_k + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi'_{kmln}(z_k) a_{kmln}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\varphi_{kmln}(z_k)$ и $\varphi'_{kmln}(z_k)$ - функции, вычисляемые по формулам (4) и (12); ζ_{kml} - переменные, определяемые из неявных зависимостей

$$\begin{aligned} z_k &= z_{kl} + R_k \left(\zeta_{kml} + \frac{m_k}{\zeta_{kml}} \right), \\ \varphi'_{kmln}(z_k) &= - \frac{n}{R_k \zeta_{kml}^{n-1} (\zeta_{kml}^2 - m_k)}, \end{aligned} \quad (25)$$

причем $z_{kl} = lh_x + m\mu_k h_y$; R_k, m_k - величины, вычисляемые по формулам (7), в которых нужно опускать в индексах l .

В силу двоякопериодичности напряженного состояния значения напряжений в точках z_k и $z_k + h_x + \mu_k h_y$ одинаковы. Поэтому

$$\Phi'_k(z_k) = \Phi'_k(z_k + h_x + \mu_k h_y), \quad (26)$$

а следовательно по (24)

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kmln} \varphi'_{kmln}(z_k) = \\ & = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kmln} \varphi'_{kmln}(z_k + h_x + \mu_k h_y). \end{aligned} \quad (27)$$

Как и в случае периодической задачи из (25) легко увидеть, что

$$\begin{aligned} \zeta_{kml}(z_k + h_x + \mu_k h_y) &= \zeta_{km+1, l+1}(z_k), \\ \varphi'_{kmln}(z_k + h_x + \mu_k h_y) &= \varphi'_{km+1, l+1, n}(z_k). \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя выражения (28) в (27) и переобозначая индексы суммирования, находим

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kmln} \varphi'_{kmln}(z_k) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kmln} \varphi'_{km+1, l+1, n}(z_k) = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{km-1, l-1, n} \varphi'_{kmln}(z_k). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых функциях $\varphi'_{kmln}(z_k)$, будем иметь $a_{kmln} = a_{km-1, l-1, n} = a_{kn}$. Тогда для комплексных потенциалов и их производных окончательно будем иметь

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \xi_{kn}(z_k), \quad \Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \xi'_{kn}(z_k), \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_{kn}(z_k) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_{klmn}(z_k), \\ \xi'_{kn}(z_k) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi'_{klmn}(z_k). \end{aligned} \quad (30)$$

Для определения неизвестных постоянных a_{kn} нужно опять удовлетворять граничным условиям лишь на контуре центрального отверстия L_0 . Из этих условий получится система, которая следует из системы (23), если в последней $\psi'_{kn}(z_k)$ заменить на $\xi'_{kn}(z_k)$.

4. Описание результатов численных исследований. Были проведены численные исследования напряженного состояния пластинки из изотропного материала алюминий [6] (материал М1) и существенно анизотропных материалов (по общепринятой терминологии "степень анизотропии" определяется степенью отличия отношения a_{11}/a_{22} от 1) березовая фанера [1] с мягкими волокнами вдоль оси Ox (материал М22) и углепластик HMS/DX209 [11, 12] с мягкими волокнами вдоль оси Ox (материал М33). Технические постоянные этих материалов приведены в табл. 1. При проведении численных исследований количество членов в рядах (21), (29) по n и количество точек M_0 на контуре L_0 , в которых удовлетворялись граничные условия при получении систем уравнений (23), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контуре не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (модуль абсолютной погрешности не превышал 10^{-2}). Как показали численные исследования, для такого удовлетворения граничным условиям в рассмотренных задачах в зависимости от близости концентраторов напряжений друг к другу достаточно было оставлять от 10 до 50 членов в рядах (21) по n и на контуре L_0 выбирать от 100 до 500 "коллокационных" точек.

Таблица 1. Постоянные материалов

Материал	$E_1 \cdot 10^{-4}$, МПа	$E_2 \cdot 10^{-4}$, МПа	$G_{12} \cdot 10^{-4}$, МПа	ν_{12}	ν_{21}
М1	7,10000	7,10005	2,84000	0,25000	0,25000
М22	0,58860	1,17720	0,06867	0,03600	0,07100
М33	0,60000	18,88000	0,27000	0,00953	0,30000

В табл. 2 для пластинки с периодическим рядом круговых отверстий радиуса a ($b = a$) вдоль оси Ox при ее растяжении на бесконечности усилиями интенсивности q ($\sigma_y^\infty = q$) в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox , и от отношения c/a , где c - расстояние между контурами ($c = h_x - 2a$), приведены значения нормальных напряжений σ_s/q вблизи контура L_0 на площадках, перпендикулярных к контуру, а на рис. 4 изображены графики распределения этих напряжений. Сплошные, штриховые и штрих-пунктирные линии рисунка относятся к плитам из материалов М33, М22 и М1. Данные для $c/a = \infty$ соответствуют случаю пластинки с одним отверстием.

Из данных табл. 2 и рис. 4 следует, что наибольшая концентрация напряжений наблюдается вблизи контура отверстия в зоне между контурами. Значения напряжений в этой зоне резко растут с приближением контуров друг к другу (с уменьшением отношения c/a), особенно в точке, соединяющей линии центров, соответствующей углу $\theta = 0$. При этом значения напряжений вблизи точки, соответствующей углу $\theta = \pi/2$ изменяются незначительно. Чем выше "степень анизотропии" материала пластинки, тем выше уровень концентрации напряжений. Правда, при сближении отверстий друг с другом это влияние уменьшается, но все время остается большим. При $c/a > 10$ влияние одних отверстий на напряженное состояние около других незначительно, им можно пренебречь и считать

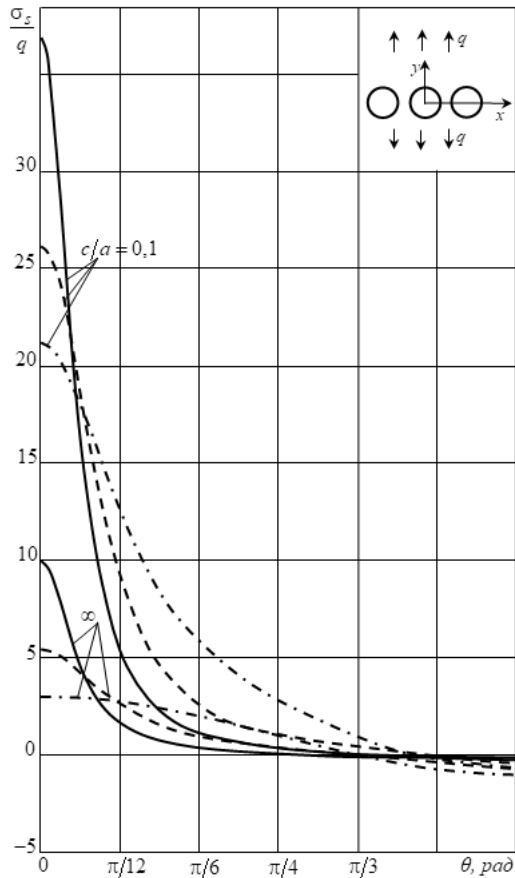


Рис. 4. Графики распределения напряжений около центрального отверстия в пластинке с периодическим рядом круговых отверстий для различных значений параметра c/a

пластинку ослабленной лишь одним отверстием.

Исследованиями установлено, что при уменьшении отношения b/a полуосей эллипсов значения напряжений в окрестности конца большой полуоси растут, стремясь к бесконечности. При $b/a < 10^{-3}$ эллипсы можно считать трещинами и вычислять для их концов КИН. Как показывают расчеты, при сближении трещин друг с другом в случае растяжения пластинки с трещинами, расположенными вдоль оси Ox , усилиями q вдоль направления оси Oy , значения КИН k_1^\pm ($k_2^\pm = 0$) растут. Так, для значений отношения c/a , равных 10; 2; 1; 0,5; 0,1; 0,01, значения k_1^\pm получились такими: 1; 1,0116; 1,1278; 1,2848; 1,5625; 2,9762; 8,9603. Эта зависимость изображена графиком на рис. 5. Заметим, что для такого расположения трещин и действия нагрузки значения КИН не зависят от анизотропии материала.

Несколько другое положение в случае бесконечного ряда трещин поперек

Таблица 2.
Значения напряжений для пластинки с периодическим рядом
круговых отверстий в зависимости от параметра c/a

Материал	θ , рад.	c/a						
		∞	10	2	1	0,5	0,1	0,01
М1	0	3,000	3,003	3,237	3,910	5,713	21,162	189,155
	$\pi/6$	2,000	2,025	2,402	2,955	3,754	5,809	7,036
	$\pi/3$	0,000	0,065	0,439	0,641	0,795	0,968	1,002
	$\pi/2$	-1,000	-0,917	-0,618	-0,571	-0,574	-0,606	-0,672
М22	0	5,453	5,476	6,057	7,145	9,406	26,144	200,372
	$\pi/6$	0,964	0,985	1,172	1,375	1,677	2,559	3,124
	$\pi/3$	0,069	0,108	0,250	0,318	0,381	0,470	0,490
	$\pi/2$	-0,707	-0,604	-0,375	-0,345	-0,342	-0,354	-0,394
М33	0	9,975	10,062	11,074	12,670	15,875	36,904	219,117
	$\pi/6$	0,391	0,402	0,496	0,603	0,749	1,138	1,393
	$\pi/3$	-0,056	-0,047	0,006	0,035	0,057	0,084	0,089
	$\pi/2$	-0,178	-0,167	-0,121	-0,108	-0,104	-0,106	-0,112

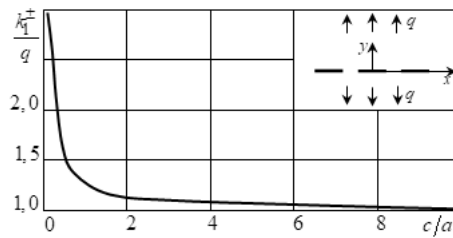


Рис. 5. Значения КИН в вершине центральной трещины

оси Oy параллельных оси Ox . В табл. 3 приведены значения КИН k_1^\pm ($k_2^\pm = 0$) для вершин трещин, а на рис. 6 изображены эти значения. Как видно, с приближением трещин к друг другу значения k_1^\pm уменьшаются. На значения k_1^\pm значительно влияет анизотропия материала, причем чем ближе трещины к друг другу, тем сильнее это влияние, при $c/a > 10$ это влияние отсутствует.

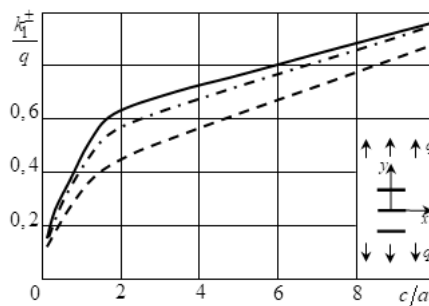


Рис. 6. Значения КИН в вершине центральной трещины

В табл. 4 для пластинки с двоякопериодической системой круговых отвер-

Таблица 3.

Значения напряжений для пластинки с периодическим рядом трещин поперек оси Oy в зависимости от параметра c/a

Материал	c/a						
	∞	10	2	1	0,5	0,1	0,01
M1	1,000	0,954	0,572	0,402	0,287	0,139	0,574
M22	1,000	0,881	0,454	0,324	0,233	0,121	0,384
M33	1,000	0,964	0,634	0,451	0,321	0,155	0,274

стей радиуса a ($b = a$) при ее растяжении на бесконечности усилиями интенсивности q ($\sigma_y^\infty = q$) в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox , и от отношения c/a , где c - расстояние между контурами отверстий, приведены значения нормальных напряжений σ_s/q вблизи контура L_0 на площадках, перпендикулярных к контуру, а на рис. 7 изображены графики распределения этих напряжений.

Таблица 4.

Значения напряжений для пластинки с двоякопериодической системой круговых отверстий в зависимости от параметра c/a

Материал	θ , рад.	c/a						
		∞	10	2	1	0,5	0,1	0,01
M1	0	3,000	2,948	2,782	2,892	3,373	6,781	20,448
	$\pi/6$	2,000	1,973	1,879	1,958	2,095	1,875	0,823
	$\pi/3$	0,000	0,026	0,051	-0,141	-0,411	-0,671	-0,343
	$\pi/2$	-1,000	-0,946	-0,638	-0,482	-0,592	-2,160	-8,533
M22	0	5,453	4,850	4,516	5,191	6,374	11,441	36,413
	$\pi/6$	0,964	0,853	0,655	0,662	0,723	0,812	0,425
	$\pi/3$	0,069	0,077	-0,013	-0,059	-0,096	-0,176	-0,114
	$\pi/2$	-0,707	-0,534	-0,153	-0,183	-0,345	-1,288	-5,856
M33	0	9,975	7,223	6,789	8,185	10,727	20,433	60,031
	$\pi/6$	0,391	0,256	0,115	0,090	0,088	0,130	0,068
	$\pi/3$	-0,056	-0,038	-0,027	-0,025	-0,036	-0,072	-0,046
	$\pi/2$	-0,178	-0,090	-0,018	-0,027	-0,058	-0,278	-1,310

Из данных табл. 4 и рис. 7 видно, что наибольшая концентрация напряжений наблюдается в окрестности угла $\theta = 0$. Значения напряжений в этой зоне, а также в окрестности угла $\theta = \pi/2$ вначале по модулю убывают, а затем возрастают. Сравнивая данные табл. 2 и рис. 4 можно заметить, что в случае двоякопериодической задачи значения напряжений меньше, чем для случая периодической задачи. Существенно на значения напряжений влияет "степень анизотропии".

Заметим, что полученные числовые результаты для пластинки с круговыми отверстиями достаточно хорошо согласуются с полученными методом рядов [2], если отношение $c/a > 0,5$. При меньших расстояниях это отличие, особенно для анизотропной пластинки, значительно. Так, для пластинки из материала M22 (фанера) это отличие составляет более 10%, а более сильная анизотропия M33 вообще не рассматривалась. Более точными оказываются числовые результаты, получаемые при использовании [13] дискретного метода наименьших квадра-

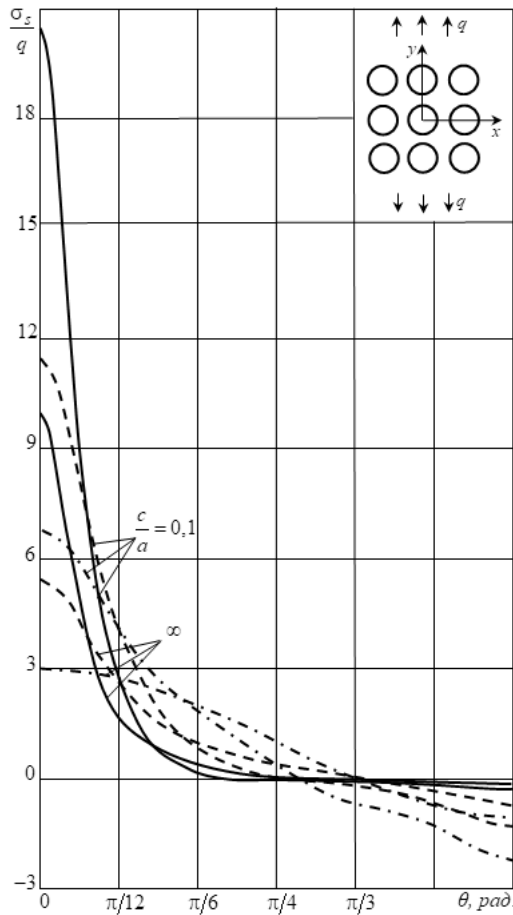


Рис. 7. Графики распределения напряжений около центрального отверстия в пластинке с двоякопериодической системой круговых отверстий для различных значений параметра c/a

тов. Так, для наиболее сложного при численной реализации случая пластинки с трещинами (методом рядов такую задачу решить невозможно) отличие получаемых значений КИН от найденных дискретным методом наименьших квадратов даже для весьма близких расстояний в случае материала с достаточно сильной анизотропией стеклопластика косоугольной намотки составляет около 2%. Но, как уже отмечалось, численная реализация решения задачи приведенным здесь обобщенным методом наименьших квадратов значительно проще, чем дискретным методом наименьших квадратов, и точность получаемых значений несколько выше.

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. / С.Г. Лехницкий – М.: Наука, 1977. – 416 с.
2. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. / А.С. Космодамианский – К., Донецк: Вища шк., 1976. – 200 с.

3. Калоеров С.А. Антиплоская деформация тел с трещиной и эллиптической полостью / С.А. Калоеров, Е.Ф. Косилова, В.А. Лапко // Прикладная механика. – 1989. – Т. 25, № 7. – С. 92–99.
4. Калоеров С.А. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // В кн.: Концентрация напряжений.– 1998.– С. 8–26.– (Механика композитов. В 12 т. Т. 7)
5. Калоеров С.А. Термоупругое состояние кусочно-однородной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, Д.А. Добряк // Вісн. Донец. ун-ту. Сер.А, Природ. науки. – 2006. – Вып. 2. – С. 77–88.
6. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. / Г.Н. Савин – К.:Наук. думка, 1968. – 888 с.
7. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Перфорированные пластины и оболочки. / Э.И. Григолюк, Л.А. Фильштинский – М.:Наука, 1970. – 556 с.
8. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.
9. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. / В.В. Воеводин – М.:Наука, 1977. – 304 с.
10. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений. / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер – М.:Мир, 1969. – 280 с.
11. Композиционные материалы: Справочник. / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин [и др.] Под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского – М.:Машиностроение, 1990. – 512 с.
12. Ni R.G. The damping and dynamic moduli of symmetric laminated composite beams-theoretical and experimental results / R.G. Ni, R.D. Adams // J. Composite materials. – 1984. – Vol. 18. – С. 104–121.
13. Калоеров С.А. Периодические задачи для анизотропной плоскости и полуплоскости с эллиптическими отверстиями или трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская, Е.В. Авдюшина // Вісн. Донец. ун-ту. Сер.А, Природ. науки. – 1997. – Вып. 1. – С. 61–66.

S.A. Kaloevov, E.V. Avdushina, A. I. Zan'ko

Periodic and dual-periodic problems for an anisotropic plate with elliptic holes or cracks.

Using the generalized complex potentials of the theory of elasticity of an anisotropic body, the periodic and doubly periodic problems of the theory of elasticity for a plate with elliptical holes or cracks are solved. The general representations of the corresponding functions for a plate with a finite number of holes were obtained by expanding the holomorphic functions into Laurent series, then satisfying the periodicity conditions and doubly periodicity of the stress-strain state, general representations of the required complex potentials were found, which allowed satisfying the boundary conditions on only one contour. These conditions are satisfied by the generalized least-squares method, which makes it possible to satisfy the boundary conditions with a high degree of accuracy even for very close distances between holes and cracks for any orientation.

Keywords: *anisotropic plate, periodic problem, dual-periodic problem, holes, cracks, concentration of stresses.*

УДК 539.3

©2017. Р.Н. Нескородев

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ОРТОТРОПНОЙ ПЛИТЫ В УТОЧНЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

В статье предложено численно-аналитическое решение задачи изгиба ортотропных плит в уточненной постановке, которое приводится к дифференциальному уравнению шестого порядка. Полученное решение удовлетворяет однородным граничным условиям на плоских гранях плиты и произвольно заданным внешним усилиям по толщине плиты. Проведены численные исследования для бесконечной плиты, ослабленной эллиптической полостью.

Ключевые слова: изгиб, ортотропная плита, уточненная теория, напряжение, эллиптическая полость.

Введение. В процессе дискуссии по теории изгиба пластин признано несостоятельным преобразование крутящего момента к обобщенной перерезывающей силе. Итоги и библиография этой дискуссии приведены в работе [1]. Это обстоятельство вынуждает заключить, что теория Кирхгофа не может претендовать на роль классической теории изгиба плит. В указанной работе в качестве классической теории изгиба плит предлагается признать теорию, приводящую к системе дифференциальных уравнений шестого порядка. Предложен вариант теории, основанный на сравнении выражений для касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} , заданных различными соотношениями.

В работах [2, 3] данная методика была использована для решения задач изгиба изотропных и трансверсально-изотропных плит. В этих задачах система дифференциальных уравнений состоит из бигармонического и метагармонического уравнений, что позволяет ставить граничные задачи с произвольным заданием внешних усилий по толщине плиты.

В данной работе в условиях указанных предположений получено дифференциальное уравнение шестого порядка теории изгиба ортотропных плит. Это уравнение не разделяется на два независимых уравнения четвертого и второго порядков. Однако, это уравнение включает в себя два типа решения – медленно изменяющееся, которое определяет основное состояние пластины, и быстро изменяющееся решение, соответствующее краевому эффекту. При помощи метода малого параметра предложен способ разделения уравнения шестого порядка на два уравнения четвертого и второго порядков. Решение полученных уравнений основано на использовании функций обобщенных комплексных переменных. Численные исследования проведены для бесконечной плиты, ослабленной эллиптической полостью.

1. Основные соотношения уточненной теории изгиба ортотропных плит. Рассмотрим ортотропную плиту, имеющую толщину $2h$ и отнесенную к декартовой системе координат $Oxyz$. Оси Ox и Oy расположены в срединной

плоскости плиты, а Oz - нормальна к этой плоскости. Приведем представления для перемещений, напряжений, а также систему дифференциальных уравнений теории изгиба плит, построенную по предположению, предложенному в работе [1]. Для построения уточненной теории изгиба ортотропных плит используются: уравнения обобщенного закона Гука

$$\sigma_i = A_{i1}\varepsilon_1 + A_{i2}\varepsilon_2 + A_{i3}\varepsilon_3, \quad (i = \overline{1,3}), \quad \sigma_4 = A_{44}\varepsilon_4, \quad \sigma_5 = A_{55}\varepsilon_5, \quad \sigma_6 = A_{66}\varepsilon_6; \quad (1)$$

геометрические соотношения

$$\varepsilon_i = \partial_i u_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad \varepsilon_4 = \partial_3 u_2 + \partial_2 u_3, \quad \varepsilon_5 = \partial_3 u_1 + \partial_1 u_3, \quad \varepsilon_6 = \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1; \quad (2)$$

трехмерные уравнения равновесия без учета объемных сил

$$\partial_1 \sigma_1 + \partial_2 \sigma_6 + \partial_3 \sigma_5 = 0, \quad \partial_1 \sigma_6 + \partial_2 \sigma_2 + \partial_3 \sigma_4 = 0, \quad \partial_1 \sigma_5 + \partial_2 \sigma_4 + \partial_3 \sigma_3 = 0. \quad (3)$$

Здесь введены обозначения

$$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6] \quad \text{для} \quad [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}],$$

$$[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6] \quad \text{для} \quad [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}],$$

$$\partial_1 = \partial/\partial x, \quad \partial_2 = \partial/\partial y, \quad \partial_3 = \partial/\partial z, \quad A_{ij} - \text{модули упругости.}$$

Представления для перемещений выбираются в виде

$$u_1 = p_1(z)\partial_1\varphi_1(x, y), \quad u_2 = p_1(z)\partial_2\varphi_2(x, y), \quad u_3 = w_0(x, y) + p_2(z)w(x, y). \quad (4)$$

где $p_1(z)$ - нечетная по переменной z функция, характеризующая распределение усилий по толщине плиты; $p_2(z) = \int p_1(z)dz$; $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, $w_0(x, y)$, $w(x, y)$ - подлежащие определению функции.

Уравнения закона Гука (1), с учетом соотношений (2) и (4), дают выражения для напряжений в форме

$$\sigma_1 = p_1 s_1, \quad \sigma_2 = p_1 s_2, \quad \sigma_3 = p_1 s_3, \quad \sigma_6 = p_1 s_6; \quad (5)$$

$$\sigma_4 = A_{44}(\partial_2 w_0 + p_2 \partial_2 w + p_0 \partial_2 \varphi_2), \quad \sigma_5 = A_{55}(\partial_1 w_0 + p_2 \partial_1 w + p_0 \partial_1 \varphi_1), \quad (6)$$

где приняты обозначения

$$s_i = A_{i1}\partial_1^2\varphi_1 + A_{i2}\partial_2^2\varphi_2 + A_{i3}w \quad (i = \overline{1,3}), \quad s_6 = A_{66}\partial_1\partial_2(\varphi_1 + \varphi_2), \quad p_0(z) = p_1'(z).$$

Выражения для напряжений σ_3 , σ_4 и σ_5 можно также найти, удовлетворяя уравнениям равновесия (3)

$$\sigma_3 = [p_3(z) - p_2(h)z]S_3, \quad \sigma_4 = P_2(z)S_4, \quad \sigma_5 = P_2(z)S_5, \quad (7)$$

где

$$S_5 = \partial_1 s_1 + \partial_2 s_6, \quad S_4 = \partial_1 s_6 + \partial_2 s_2, \quad S_3 = \partial_1 S_5 + \partial_2 S_4,$$

$$P_2(z) = p_2(h) - p_2(z), \quad p_3 = \int p_2(z) dz.$$

Представления для напряжений σ_4 и σ_5 в представлениях (7) удовлетворяют однородным граничным условиям на плоских гранях плиты: $\sigma_4 = \sigma_5 = 0$ при $z = \pm h$. Однако, эти представления противоречат соотношениям (6). Корректный результат можно получить, введя следующие предположения:

1. Поперечное нормальное напряжение σ_3 равно нулю (как в теории Кирхгофа).

2. Поперечные усилия, полученные интегрированием соотношений (6) и (7) для напряжений σ_4 и σ_5 , равны [1].

Реализация этих предположений приводит к дифференциальным уравнениям, описывающим изгиб плит:

$$s_3 = A_{31}\partial_1^2\varphi_1 + A_{32}\partial_2^2\varphi_2 + A_{33}w = 0; \quad (8)$$

$$S_3 = [A_{11}\partial_1^4 + c_{12}\partial_1^2\partial_2^2] \varphi_1 + [c_{12}\partial_1^2\partial_2^2 + A_{22}\partial_2^4] \varphi_2 + D_2w = 0; \quad (9)$$

$$Q_5 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_5 dz = A_{55} (\partial_1 w_0 + k_0 \partial_1 \varphi_1 + k_1 \partial_1 w) = k_2 S_5,$$

$$Q_4 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_4 dz = A_{44} (\partial_2 w_0 + k_0 \partial_2 \varphi_2 + k_1 \partial_2 w) = k_2 S_4; \quad (10)$$

$$k_0 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h p_0 dz, \quad k_1 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h p_2 dz, \quad k_2 = p_2(h) - k_1,$$

$$D_2 = A_{31}\partial_1^2 + A_{32}\partial_2^2, \quad c_{12} = A_{12} + 2A_{66}.$$

Таким образом, для определения функций φ_1 , φ_2 , w_0 и w имеем систему уравнений (8) - (10). Удовлетворяя уравнениям (8) и (9), находим

$$\varphi_1 = G_2 \partial_2^2 F, \quad \varphi_2 = R_2 \partial_1^2 F, \quad w = -\frac{1}{A_{33}} (A_{31} G_2 + A_{32} R_2) \partial_1^2 \partial_2^2 F,$$

где

$$G_2 = - (D_{12} \partial_1^2 + B_{22} \partial_2^2), \quad R_2 = B_{11} \partial_1^2 + D_{12} \partial_2^2, \quad D_{12} = B_{12} + 2A_{66},$$

$$B_{ik} = A_{ik} - \frac{A_{i3} A_{3k}}{A_{33}} \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad F(x, y) - \text{произвольная функция.}$$

Из уравнений (10) найдем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $F(x, y)$, и представление для функции w_0 :

$$(D_4 L_2 - \lambda^2 P_4) F = 0,$$

$$w_0 = k_0 [B_{22} (\partial_2^2 + q_1 \partial_1^2) \partial_2^2] F - k_2 \frac{B_{22} A_{66} D_4}{A_{55}} \partial_2^2 F + k_1 B_{22} A_{66} (q_3 \partial_2^2 + q_4 \partial_1^2) \partial_1^2 \partial_2^2 F,$$

где

$$D_4 = \partial_2^4 + 2q_0 \partial_2^2 \partial_1^2 + q_2 \partial_1^4, \quad P_4 = \partial_2^4 + 2q_1 \partial_2^2 \partial_1^2 + q_2 \partial_1^4, \quad L_2 = \partial_2^2 + q_5 \partial_1^2,$$

$$\lambda^2 = A_{55} k_0 / (A_{66} k_2), \quad q_0 = (B_{11} - B_{12} q_1) / (2A_{66}), \quad q_1 = D_{12} / B_{22}, \quad q_2 = B_{11} / B_{22},$$

$$q_3 = (A_{32} q_1 - A_{31}) / (A_{33} A_{66}), \quad q_4 = (A_{32} q_2 - A_{31} q_1) / (A_{33} A_{66}), \quad q_5 = A_{55} / A_{44}.$$

Представления для перемещений и напряжений можно записать через произвольную функцию $\Phi(x, y) = B_{22} A_{66} \partial_1 \partial_2 F$

$$u_1 = -\frac{p_1}{A_{66}} (\partial_2^2 + q_1 \partial_1^2) \partial_2 \Phi, \quad u_2 = \frac{p_1}{A_{66}} (q_1 \partial_2^2 + q_2 \partial_1^2) \partial_1 \Phi,$$

$$u_3 = \frac{k_0}{A_{66}} (\partial_2^2 + q_1 \partial_1^2) \frac{\partial_2}{\partial_1} \Phi - \frac{k_2 D_4}{A_{55}} \frac{\partial_2}{\partial_1} \Phi + (k_1 - p_2) (q_3 \partial_2^2 + q_4 \partial_1^2) \partial_1 \partial_2 \Phi; \quad (11)$$

$$\sigma_1 = -2p_1 (q_0 \partial_2^2 + q_2 \partial_1^2) \partial_1 \partial_2 \Phi, \quad \sigma_2 = 2p_1 (\partial_2^2 + q_0 \partial_1^2) \partial_1 \partial_2 \Phi,$$

$$\sigma_6 = p_1 (-\partial_2^4 + q_2 \partial_1^4) \Phi, \quad \sigma_5 = -P_2(z) D_4 \partial_2 \Phi, \quad \sigma_4 = P_2(z) D_4 \partial_1 \Phi; \quad (12)$$

которая определяется из уравнения

$$(D_4 L_2 - \lambda^2 P_4) \Phi = 0. \quad (13)$$

Решение задачи изгиба приведено к нахождению функции $\Phi(x, y)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению шестого порядка (13) и граничным условиям на боковой поверхности плиты.

2. Граничные условия на боковой поверхности. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние плиты, ослабленной криволинейной полостью, боковая поверхность которой представляет собой цилиндр с образующими, нормальными плоским граням. Граничные условия для криволинейного края с нормалью \bar{n} определяются способом закрепления и нагружения поверхности. Пусть $P(x, y, z)$ – нормальная, а $T(x, y, z)$ и $N(x, y, z)$ – касательные составляющие внешних сил, приложенных к боковой поверхности полости. Если $P = T = N = 0$, то полость считается свободной от усилий. На внешней боковой поверхности также могут быть заданы усилия интенсивности $\sigma_1^0 = pp_1(z)$, $\sigma_2^0 = qp_1(z)$ и $\sigma_6^0 = tp_1(z)$. Полагаем, что внешний контур находится вдали от полости и их взаимным влиянием можно пренебречь. Тогда граничные условия на боковой поверхности полости примут вид

$$n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_6 = n_1 (P - pp_1) - n_2 (T + tp_1),$$

$$n_1 \sigma_6 + n_2 \sigma_2 = n_1 (T - tp_1) + n_2 (P - qp_1), \quad n_1 \sigma_5 + n_2 \sigma_4 = N. \quad (14)$$

Направляющие косинусы при параметрическом задании контура будут такими

$$n_1 = \cos(n, x) = dy/ds, \quad n_2 = \cos(n, y) = -dx/ds, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Рассмотрим случай, когда внешние усилия представлены в форме

$$P = p_1(z)P_1(x, y), \quad T = p_1(z)T_1(x, y), \quad N = P_2(z)N_1(x, y).$$

Тогда в соответствии с представлениями (5) и (7) условия (14) запишутся так

$$n_1 s_1 + n_2 s_6 = f_1, \quad n_1 s_6 + n_2 s_2 = f_2, \quad n_1 S_5 + n_2 S_4 = N_1, \quad (15)$$

где

$$f_1 = n_1(P_1 - p) - n_2(T_1 + t), \quad f_2 = n_1(T_1 - t) + n_2(P_1 - q).$$

Интегрирование условий (15) приводит их к виду

$$\begin{aligned} 2(q_0 \partial_2^2 + q_2 \partial_1^2) \partial_1 \Phi &= - \int_0^s \left(f_1 - \frac{dx}{ds} (N_i + c_3) \right) ds + c_1, \\ 2(q_0 \partial_1^2 + \partial_2^2) \partial_2 \Phi &= - \int_0^s \left(f_2 - \frac{dy}{ds} (N_i + c_3) \right) ds + c_2, \\ D_4 \Phi &= N_i + c_3, \quad N_i = - \int_0^s N_1 ds. \end{aligned} \quad (16)$$

Граничные условия (16) используются для определения функции $\Phi(x, y)$.

3. Решение разрешающего дифференциального уравнения. Представления общего решения уравнения (13) найти не удастся. В случае, когда плита изготовлена из изотропного или трансверсально-изотропного материала, операторы P_4 и D_4 становятся бигармоническими. Уравнение (13) в этом случае распадается на основное бигармоническое уравнение и уравнение Гельмгольца, которое относится к типу краевого эффекта. Здесь предлагается для случая тонких и толстых плит осуществить разделение данного уравнения на основное уравнение четвертого порядка и уравнение типа Гельмгольца. Для этого воспользуемся методом штрафов [4]. Этот метод в применении к уравнению (13) состоит в замене оператора D_4 на P_4 или наоборот. Это достигается путем добавления к уравнению дополнительного слагаемого, умноженного на малый параметр. Параметр $\lambda^2 = A_{55}k_0/(A_{66}k_2)$ имеет порядок h^{-2} и для больших толщин плиты он может быть сколь угодно малым. В этом случае добавление к уравнению (13) малой величины $\lambda^2 2(q_1 - q_0) \partial_1^2 \partial_2^2 \Phi$ приводит его к виду

$$D_4 (L_2 - \lambda^2) \Phi = 0. \quad (17)$$

Для малых толщин плиты этот параметр может быть сколь угодно большим. Тогда малый параметр $1/\lambda^2$ будет при операторе шестого порядка. Добавление к уравнению (13) малой величины $\lambda^{-2}2L_2(q_1 - q_0)\partial_1^2\partial_2^2\Phi$ приводит его к виду

$$P_4(L_2 - \lambda^2)\Phi = 0. \quad (18)$$

Для решения уравнений вида (17), (18) можно использовать теорему Боджио [5], согласно которой, общим решением уравнения $G_1G_2\dots G_n\Phi = 0$, где G_1, \dots, G_n - некоторые операторы, является функция $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n$. При этом, функции Φ_k удовлетворяют уравнениям $G_k\Phi_k = 0$ ($k = \overline{1, n}$).

Рассмотрим уравнение (18). Его можно использовать для определения напряженно деформированного состояния тонких плит. Общим решением этого уравнения является функция

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \quad (19)$$

где величины Φ_k удовлетворяют уравнениям

$$P_4\Phi_1 = 0; \quad (20)$$

$$(L_2 - \lambda^2)\Phi_2 = 0. \quad (21)$$

Общим действительным решением уравнения (20) является выражение [6]

$$\Phi_1 = 2Re[\phi_1(z_1) + \phi_2(z_2)], \quad (22)$$

где $\phi_j(z_j)$ - произвольные аналитические функции обобщенных комплексных переменных $z_j = x + \mu_j y$; параметры μ_j являются корнями уравнения

$$P_4(\mu) = \mu^4 + 2q_1\mu^2 + q_2 = 0.$$

Для решения уравнения Гельмгольца (21) в данной работе предлагается воспользоваться уравнением границы области, в которой определяется это решение. Способы построения таких уравнений для практически произвольных областей, с помощью методов алгебры логики и аппарата R-функций, разработаны в работах В.Л. Рвачева и его учеников [7]. Пусть Ω - некоторая область, граница $\partial\Omega$ которой описывается уравнением $\omega = 0$. Полагаем, что для производной первого порядка выполняется условие

$$\omega_2^2 + q_5\omega_1^2 = 1, \quad \text{на } \partial\Omega,$$

где $\omega_1 = \partial_1\omega$, $\omega_2 = \partial_2\omega$.

С целью упрощения последующих выкладок, будем считать, что в окрестности любой заданной точки (x_0, y_0) на граничной линии, функция $\omega(x, y)$ аппроксимирована линейной функцией. Тогда в этой точке производные ω_1 и ω_2 будут постоянными величинами, а производные второго и последующих порядков будут равны нулю.

Параметр $\lambda^2 = A_{55}k_0/(A_{66}k_2)$, входящий в уравнение (21), имеет порядок h^{-2} . Для малых толщин плиты этот параметр может быть сколь угодно большим.

Уравнение (21) запишем в виде

$$[\varepsilon^2 (\partial_2^2 + q_5 \partial_1^2) - 1] \Phi_2 = 0, \quad (23)$$

где $\varepsilon^2 = 1/\lambda^2$ - малый параметр при старших производных.

Метод решения уравнения (23) основан на использовании уравнения границы области и пограничного слоя. Погранслоем - это малый интервал в окрестности границы области, в котором функция Φ_2 сильно изменяется. При значениях параметра $\varepsilon^2 \rightarrow 0$, решение предельного уравнения (23) $\Phi_2 = 0$, близко к точному решению всюду, за исключением малого интервала возле граничной линии $\omega = 0$, где точное решение изменяется так, чтобы удовлетворить краевому условию на границе области. Этот малый интервал, в котором функция Φ_2 очень быстро изменяется, в механике называется пограничным слоем или областью краевого эффекта. Для нахождения решения, пригодного в погранслое, предлагается использование асимптотических методов. Асимптотические разложения позволяют не только получить первое приближение, но и построить, в случае необходимости, высшие. Приближенное решение уравнения (23) представляем в виде произведения

$$\Phi_2 = r(x, y)\Psi(x, y). \quad (24)$$

Функции r и Ψ определим в виде разложений в области краевого эффекта

$$r = \exp(\alpha\omega), \quad \Psi = \psi_0 + \psi_1\omega + \psi_2\omega^2/2.$$

Здесь α - постоянная величина, ψ_0, ψ_1, ψ_2 - функции переменной $x + \mu y$, подлежащие определению в процессе решения уравнения (23). После подстановки представления (24) в уравнение (23) и проведения математических преобразований получим уравнения для функций ψ_i

$$\partial_2^2 \psi_0 + q_5 \partial_1^2 \psi_0 = 0, \quad (25)$$

$$\psi_1 = -(\omega_2 \partial_2 \psi_0 + q_5 \omega_1 \partial_1 \psi_0), \quad \psi_2 = -2(\omega_2 \partial_2 \psi_1 + q_5 \omega_1 \partial_1 \psi_1). \quad (26)$$

Решение уравнения (25) и представления для функций (26) будут такими

$$\psi_0 = 2Re\phi_3(z_3), \quad \psi_1 = 2Re[r_1\phi_3'(z_3)], \quad \psi_2 = 2Re[r_2\phi_3''(z_3)], \quad (27)$$

где принято

$$r_1 = -(\omega_2 \mu_3 + q_5 \omega_1), \quad r_2 = 2r_1^2, \quad \mu_3 = i\sqrt{q_5}, \quad \phi_3' = d\phi_3/dz_3, \quad \phi_3'' = d\phi_3'/dz_3, \quad (28)$$

$\phi_3(z_3)$ - произвольная функция обобщенной комплексной переменной $z_3 = x + \mu_3 y$.

Представление (24) решения уравнения (23) будет таким

$$\Phi_2 = 2Re(\phi_3 + \omega r_1 \phi_3' + (\omega^2/2)r_2 \phi_3'') \exp(\alpha\omega). \quad (29)$$

Это решение, при значениях параметра $\alpha = \pm\lambda$ и величин (28), удовлетворяет уравнению (21) в окрестности граничной линии.

Таким образом, общее решение (19) уравнения (18) представляется в виде суммы функций (22) и (29)

$$\Phi = 2Re [\phi_1 + \phi_2 + (\phi_3 + \omega r_1 \phi'_3 + (\omega^2/2)r_2 \phi''_3) \exp(\alpha\omega)] . \quad (30)$$

Функции $\phi_j(z_j)$ находятся из граничных условий (16). После их определения перемещения и напряжения определяются по формулам (11) и (12) соответственно.

4. Численные исследования. Исследования напряженного состояния были проведены для случая нагружения бесконечной плиты нагрузкой $\sigma_1^0 = pz/h$, ($\sigma_2^0 = \sigma_6^0 = 0$). Эллиптическая полость с полуосями a и b , отложенными по осям x и y соответственно, свободна от усилий. Технические постоянные материалов, из которых изготовлены исследуемые плиты, даны в табл. 1

Таблица 1

Материал	E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{13}	G_{23}	ν_{31}	ν_{23}	ν_{12}
<i>O</i>	4.76	2.07	1.45	0.531	0.501	0.434	0.099	0.325	0.149
<i>И</i>	4.76	4.76	4.76	2.071	2.071	2.071	0.149	0.149	0.149

Константы приведены с точностью до 10^4 МПа. Материал *O* – ортотропный материал (волокнистый стеклопластик ВМ-1 [8]). Материал *И* – модельный изотропный материал. В табл. 2 даны значения максимальных и минимальных напряжений $s_\theta = \sigma_\theta/(pz/h)$ при $z = \pm h$ и максимальных по модулю значений напряжения $s_{z\theta} = |\tau_{z\theta}/P_2|$, возникающих в срединной плоскости в зависимости от соотношения полуосей a/b . Результаты приведены для случая $h = 0.01b$.

Таблица 2

Материал	$a/b = 0.5$			$a/b = 1$			$a/b = 2$		
	max s_θ	min s_θ	$s_{z\theta}$	max s_θ	min s_θ	$s_{z\theta}$	max s_θ	min s_θ	$s_{z\theta}$
<i>И</i>	2.46	0.27	0.81	1.73	0.27	0.54	1.36	0.27	0.41
<i>O</i>	3.48	0.37	0.92	2.24	0.37	0.58	1.62	0.34	0.39

Сравнение результатов, полученных по предложенной методике для тонких плит и по классической теории показало их полное совпадение. Однако, классическая теория не позволяет сделать выводы о поведении касательных напряжений $\tau_{z\theta}$, которые в некоторых случаях составляют около 30% от максимальных напряжений σ_θ .

Исследования позволяют также сделать следующие выводы:

- наличие в материале плиты ортотропных свойств приводит к увеличению концентрации напряжений вблизи полости;
- наибольшие напряжения s_θ возникают в случае, когда эллипс вытянут вдоль оси, перпендикулярной направлению действия изгибающих усилий;

- с уменьшением толщины напряжения $s_{z\theta}$ растут, стремясь к некоторому конечному значению, а не уменьшаются до нуля, как в прикладной теории. С ростом толщины эти напряжения стремятся к нулю.

5. Заключение. Таким образом, в данной работе предложен один из способов получения дифференциального уравнения шестого порядка теории изгиба ортотропных плит. Это уравнение не разделяется на два независимых уравнения четвертого и второго порядков. Однако, это уравнение включает в себя два типа решения – медленно изменяющееся, которое определяет основное состояние пластины, и быстро изменяющееся решение, соответствующее краевому эффекту. При помощи метода малого параметра показана методика разделения уравнения шестого порядка на два уравнения четвертого и второго порядков. Решение полученных уравнений основано на использовании функций обобщенных комплексных переменных, удовлетворяет однородным граничным условиям на плоских гранях плиты и заданным внешним усилиям по толщине плиты. Численные исследования проведены для бесконечной плиты, ослабленной эллиптической полостью.

1. Васильев В.В. Классическая теория пластин - история и современный анализ / В.В. Васильев // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 3. – С. 46–58.
2. Нескородев Р.Н. Представление решения уточненной теории изгиба изотропных плит / Р.Н. Нескородев // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2014. – № 4. – С. 65–73.
3. Шевченко В.П. Об одном варианте уточненной теории изгиба трансверсально-изотропных плит / В.П. Шевченко, Р.Н. Нескородев // Доповіді НАН України. – 2013. – № 3. – С. 50–57.
4. Марчук Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г.И. Марчук, В.И. Агашков. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
5. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
6. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
7. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
8. Ашкенази Е.К. Анизотропия конструкционных материалов. Справочник. / Е.К. Ашкенази, Э.В. Ганов. – Л: Машиностроение, 1980. – 247 с.

R.N. Neskoro dev

The decision of a problem of bend orthotropic plate in the improved theory.

A numerically-analytical solution of the bending problem for orthotropic plates is proposed in the article, which is reduced to a sixth-order differential equation. The solution obtained satisfies homogeneous boundary conditions on the flat faces of the plate and arbitrarily given external forces in the thickness of the plate. Numerical studies have been carried out for an infinite plate weakened by an elliptical cavity.

Keywords: *bending, orthotropic plate, improved theory, strain, elliptical cavity.*

УДК УДК 539.3

©2017. Л.П. Вовк, Е.С. Кисель

ОЦЕНКА ИНТЕНСИВНОСТИ ЛОКАЛЬНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ГРАНИЦ СОПРЯЖЕНИЯ ДВУХ ТЕРМОУПРУГИХ СРЕД

В данной статье исследуется математическая модель процесса постоянных симметричных колебаний конечных изотропных кусочно-неоднородных термоупругих областей с нерегулярной границей. Строится аналитическое решение сформулированной краевой задачи для тела прямоугольного сечения путём модификации метода суперпозиции и асимптотического анализа поведения неизвестных функций в сингулярных точках границы. Рассматриваются некоторые численные результаты, полученные при реализации предложенного численно-аналитического алгоритма исследования установившихся колебаний составной прямоугольной области.

Ключевые слова: гармонические колебания, термоупругое деформирование, обобщенный метод суперпозиции, локальная концентрация напряжений, сингулярные точки границы области.

Введение. Моделирование процессов теплообмена и термоупругого деформирования является одной из важных задач прикладной математики и механики. При деформировании тела от механических или тепловых воздействий, протекающих с большой скоростью, возникает так называемый эффект связанности, обусловленный взаимодействием полей деформации и температуры. Учет связанности полей деформации и температуры дает возможность выявить новые качественные особенности протекания процессов деформирования. Особую важность приобретают эти факторы при оценке локальной концентрации напряжений (ЛКН) в окрестности границ сопряжения нескольких термоупругих сред, поскольку знание величины и характера воздействия термоупругих напряжений необходимо для всестороннего анализа прочности конструкции.

Разработка соответствующих математических моделей, являющаяся альтернативой проведению реальных дорогостоящих экспериментов, приобретает все большее значение, подтверждая актуальность разработки новых аналитико-численных методов исследования связанных термоупругих полей в элементах пространственных кусочно-неоднородных конструкций, широко распространенных в современном строительстве и машиностроении. Это позволяет не только проектировать составные элементы конструкций с усложненной кусочно-неоднородной структурой, а и дать конкретные практические рекомендации по подбору термоупругих характеристик стыкуемых областей с целью минимизации возникающей в особых точках сечения локальной концентрации напряжений.

Результаты исследований термоупругого состояния, а также изучение и исследование термомеханических процессов в телах с учетом взаимодействия полей различной физической природы отражено в работах В.А. Бабешко, В.В. Воровича, А.О. Ватульяна, Я.М. Григоренко, В.Т. Гринченко, С.А. Калоеро-

ва, В.Г. Карнаухова, А.С. Космодамианского, М.Г. Селезнева, А.Н. Соловьева, А.Ф. Улитко, Л.А. Фильштинского и других авторов. В монографии [1] приведен достаточно широкий обзор работ, посвященных термоупругости кусочно-неоднородных тел. Проблеме сингулярности напряжений для неоднородных пластин и клиновидных областей посвящены обзорные работы G. Sinclair [2, 3].

Следует отметить, что в приведенных работах при исследовании ЛКН в прямоугольных термоупругих областях, во-первых, не введены параметры интенсивности ЛКН, аналогичные широко известным коэффициентам концентрации напряжений и, во-вторых, нет анализа особенностей НДС с учетом сингулярности границы области и влияния температурных напряжений на ЛКН.

Таким образом, актуальность данной работы обусловлена целесообразностью распространения метода суперпозиции для расчета термоупругих неоднородных прямоугольных областей с целью определения характера динамического НДС в окрестности сингулярных внутренних угловых точек прямоугольных областей.

1. Постановка задачи. Пусть сечение бесконечной в направлении оси α_3 кусочно-неоднородной упругой призмы занимает в системе координат $\alpha_1 O \alpha_2$ область $D = G^{(1)} \cup G^{(2)}$. Области $G^{(m)}$ ($m = 1, 2$)

$$G^{(1)} = \{(\alpha_1, \alpha_2) : |\alpha_1| \leq c; |\alpha_2| \leq b\},$$

$$G^{(2)} = \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 \in [-a, -c] \cup [c, a]; |\alpha_2| \leq b\},$$

где α_1, α_2 – декартовы координаты безразмерные (отнесённые к ширине прямоугольника) декартовы координаты, склеены друг с другом (рис. 1).

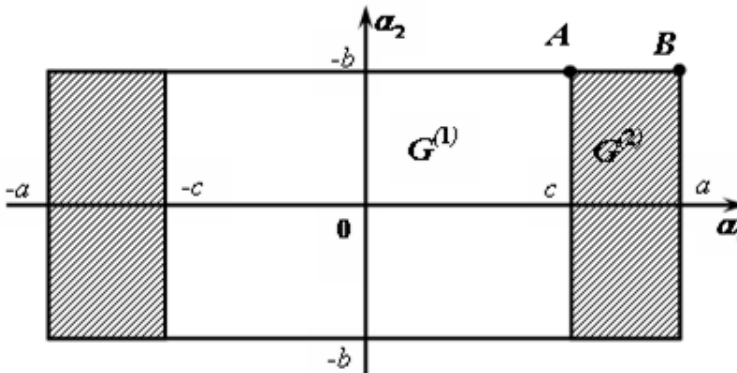


Рис. 1. Геометрия сечения тела, неоднородный прямоугольник

Материалы составных частей призмы являются изотропными и, в общем случае, имеют разные упругие константы.

На границах области $\alpha_1 = \pm a$, $\alpha_2 = \pm b$ заданы нормальные нагружения интенсивности $Q_1(\alpha_1)$ и $Q_2(\alpha_2)$ соответственно, которые изменяются во времени по гармоническому закону с частотой ω . Предполагается, что данная область имеет свободный теплообмен с окружающей средой.

В процессе исследования осуществляется переход к нормированным координатным переменным и вводится локальная безразмерная координата \hat{x} : $x = \frac{\alpha(1)}{a}$; $y = \frac{\alpha 2}{a}$; $\hat{x} = (\alpha_1 - c)/a$, $\hat{x} \in [0, \delta_2]$; $\delta_2 = 1 - \delta$, $\delta = c/a$.

Прирост температуры $\Theta(x, y)$ и безразмерные амплитудные характеристики перемещений $U_i^{(m)}(x, y)$ ($i = m = 1, 2$) определяются системой уравнений связанной термоупругости в безразмерных координатах для областей $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(m)}}\right) \left(\frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial x \partial y}\right) = \\ = \frac{\gamma^{(m)} T_0}{\mu^{(m)}} \cdot \frac{\partial \Theta^{(m)}}{\partial x} - \frac{\rho^{(m)} a^2 \omega^2}{\mu^{(m)}} U_1^{(m)}, \\ \frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(m)}}\right) \left(\frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial x \partial y}\right) = \\ = \frac{\gamma^{(m)} T_0}{\mu^{(m)}} \cdot \frac{\partial \Theta^{(m)}}{\partial y} - \frac{\rho^{(m)} a^2 \omega^2}{\mu^{(m)}} U_2^{(m)}, \\ \frac{\partial^2 \Theta^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta^{(m)}}{\partial y^2} - \frac{a^2 \omega i}{\chi^{(m)}} \cdot \Theta^{(m)} - \frac{\delta^{(m)} a^2 i \omega}{T_0} \cdot \left(\frac{\partial U_1^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial U_2^{(m)}}{\partial y}\right) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$x = \frac{\alpha(1)}{a}; \quad y = \frac{\alpha 2}{a}; \quad U_1^{(m)} = \frac{\tilde{U}_1^{(m)}}{a}; \quad U_2^{(m)} = \frac{\tilde{U}_2^{(m)}}{a};$$

$$\Theta^{(m)} = \frac{\tilde{\Theta}^{(m)}}{T_0}; \quad \sigma_{ij}^{(m)} = \frac{\tilde{\sigma}_{ij}^{(m)}}{\mu^{(m)}}; \quad \tilde{\Theta}^{(m)} = T^{(m)} - T_0;$$

$\tilde{U}_i^{(m)}$ ($i, m = 1, 2$) – компоненты вектора перемещений;

$\tilde{\Theta}^{(m)}$ – прирост температуры;

$T^{(m)}$ – абсолютная температура точек тела;

T_0 – температура тела в недеформированном и ненапряженном состоянии;

$\rho^{(m)}$ – плотность;

$\lambda^{(m)}$, $\mu^{(m)}$ – параметры Ламе,

$$\gamma^{(m)} = (3\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}) \cdot \alpha_t^{(m)};$$

$$\delta^{(m)} = \gamma^{(m)} T_0 / \lambda_0^{(m)};$$

$$\chi^{(m)} = \lambda_0^{(m)} / c_\varepsilon^{(m)}, \text{ где } \alpha_t^{(m)} \text{ – коэффициент линейного расширения;}$$

$\lambda_0^{(m)}$ – коэффициент теплопроводности;

$c_\varepsilon^{(m)}$ – удельная теплоемкость при постоянной деформации.

Запишем граничные условия для областей $\bar{G}^{(1)} = \{(x, y) : |x| \leq \delta; |y| \leq \eta\}$ и

$\bar{G}^{(2)} = \{(\hat{x}, y) : 0 \leq \hat{x} \leq \delta_2; |y| \leq \eta\}$ в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \sigma_{1\beta}^{(1)}(\delta, y) &= r_{21}\sigma_{1\beta}^{(2)}(0, y), \quad U_{\beta}^{(1)}(\delta, y) = U_{\beta}^{(2)}(0, y); \\ \sigma_{22}^{(1)}(x, \eta) &= q_2^{(1)}(x), \quad \sigma_{12}^{(1)}(x, \eta) = 0, \\ \frac{\partial\Theta^{(1)}}{\partial x} &= \frac{\partial\Theta^{(2)}}{\partial \hat{x}}, \quad \Theta^{(1)} = \Theta^{(2)}, \quad \frac{\partial\Theta^{(1)}}{\partial y} + a\frac{\alpha^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}}\Theta^{(1)} = 0, \\ \sigma_{11}^{(2)}(\delta_2, y) &= q_1^{(2)}(y), \quad \sigma_{12}^{(2)}(\delta_2, y) = 0; \\ \sigma_{22}^{(2)}(\hat{x}, \eta) &= q_2^{(2)}(\hat{x}), \quad \sigma_{12}^{(2)}(\hat{x}, \eta) = 0, \\ \frac{\partial\Theta^{(2)}}{\partial y} + a\frac{\alpha^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}}\Theta^{(2)} &= 0, \quad \frac{\partial\Theta^{(2)}}{\partial \hat{x}} + a\frac{\alpha^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}}\Theta^{(2)} = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $q_{\beta}^{(m)} = q_{\beta}/\mu^{(m)}$, $\eta = b/a$, $r_{21} = \mu^{(2)}/\mu^{(1)}$, $\beta = 1, 2$;

$\lambda_1^{(m)}$ – приведенный коэффициент теплопроводности;

$\alpha^{(m)}$ – коэффициент теплоотдачи.

Соответствующие силовые и температурные граничные условия для областей $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ на границах прямоугольника формулируются таким образом, чтобы были выполнены условия контакта областей с различными термоупругими свойствами.

2. Обобщение метода суперпозиции и решение вспомогательной задачи. Следуя методу Неймана-Шварца, общее решение (перемещения и температура для сред) конструируется в виде суммы двух частных решений [4]. При выборе формы этих частных решений необходимо учитывать возможность удовлетворения не только граничных условий на внешней границе области, но и условий сопряжения механических и температурных характеристик на границе раздела двух сред.

Аналогично алгоритму для однородного термоупругого прямоугольника, рассматривается вспомогательная краевая задача (3, 4). Для области $\bar{G}^{(1)}$

$$\begin{aligned} U_1^{(1)}(\delta, y) &= f_1(y), \quad \sigma_{12}^{(1)}(\delta, y) = \varphi_1(y), \quad \left. \frac{\partial\Theta^{(1)}}{\partial x} \right|_{x=\delta} = f_5(y), \\ U_2^{(1)}(x, \eta) &= f_2(x), \quad \sigma_{12}^{(1)}(x, \eta) = 0, \quad \left. \frac{\partial\Theta^{(1)}}{\partial y} \right|_{y=\eta} = f_8(x), \end{aligned} \tag{3}$$

для области $\bar{G}^{(2)}$

$$\begin{aligned}
 U_1^{(2)}(0, y) = f_1(y), \quad \sigma_{12}^{(2)}(0, y) = r_{12}\varphi_1(y), \quad \left. \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=0} &= f_5(y), \\
 U_2^{(2)}(\hat{x}, \eta) = f_4(\hat{x}), \quad \sigma_{12}^{(2)}(\hat{x}, \eta) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial y} \right|_{y=\eta} &= f_7(\hat{x}), \\
 U_1^{(2)}(\delta_2, y) = f_3(y), \quad \sigma_{12}^{(2)}(\delta_2, y) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=\delta_2} &= f_6(y),
 \end{aligned} \tag{4}$$

где $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4(\hat{x})$, $f_5(y)$, $f_6(y)$, $f_7(\hat{x})$, $f_8(x)$, $\varphi_1(y)$ – неизвестные вспомогательные функции.

При заданных граничных условиях вид этой вспомогательной задачи значительно усложняется, поскольку при её формулировке необходимо не только добиться аналитического решения, но и ввести граничные условия и условия сопряжения. Это позволяет максимально упростить вид последующей системы интегральных уравнений. Вспомогательная краевая задача предполагает аналитическое решение и даёт возможность удовлетворить часть начальных граничных условий и выразить все характеристики начальной задачи через коэффициенты Фурье неизвестных функций. Для определения введённых вспомогательных функций составляется система интегральных уравнений (СИУ), с использованием неучтённых граничных условий и условий сопряжения составляющих сред.

3. Асимптотический анализ. Проведем исследование решения СИУ в угловых точках областей $\bar{G}^{(m)}$. В рассматриваемой задаче такими точками являются угловые точки стыка областей A и внешняя угловая точка сечения B . Это позволит определить асимптотику коэффициентов Фурье неизвестных функций в случае, когда $k \rightarrow \infty$ и $j \rightarrow \infty$.

Предположим, что функции $\varphi_{1k}(y)$, $f_{5k}(y)$, $f_{7j}(\hat{x})$, $f_{8j}(x)$ имеют особенность в угловой точке стыка областей $A(\delta, \eta)$, т.е.

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(\xi) &= \Phi_1^A (\eta - \xi)^{\alpha-1}, \quad \xi \rightarrow \eta; \\
 f_5(\xi) &= F_5^A (\eta - \xi)^{\beta-1}, \quad \xi \rightarrow \eta; \\
 f_7(\xi) &= F_7^A \xi^{\beta-1}, \quad \xi \rightarrow 0; \\
 f_8(\xi) &= F_8^A (\delta - \xi)^{\beta-1}, \quad \xi \rightarrow \delta.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Аналогичными будут функции $f_{6k}(y)$, $f_{7j}(\hat{x})$ в окрестности угловой точки $B(\delta_2, \eta)$ области $\bar{G}^{(2)}$

$$\begin{aligned}
 f_6(\xi) &= F_6^B (\eta - \xi)^{\gamma-1}, \quad \xi \rightarrow \eta; \\
 f_7(\xi) &= F_7^B (\delta_2 - \xi)^{\gamma-1}, \quad \xi \rightarrow \delta_2.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Функциями, непрерывными в своих областях определения, производные которых имеют разрыв в угловых точках, в окрестности точки стыка областей $A(\delta, \eta)$ будут функции $f_{1k}(y)$, $f_{2j}(x)$, $f_{4k}(\hat{x})$, т.е.

$$\begin{aligned} f'_1(\xi) &= F_1^A (\eta - \xi)^{\alpha-1} \quad \text{если } \xi \rightarrow \eta; \\ f'_2(\xi) &= F_2^A (\delta - \xi)^{\alpha-1} \quad \text{если } \xi \rightarrow \delta; \\ f'_4(\xi) &= F_4^A \xi^{\alpha-1} \quad \text{если } \xi \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В окрестности точки $B(\delta_2, \eta)$ области $\bar{G}^{(2)}$, такими будут функции $f_{3k}(y)$, $f_{4k}(\hat{x})$, т.е.

$$\begin{aligned} f'_3(\xi) &= F_3^B (\eta - \xi)^{\lambda-1}, \quad \xi \rightarrow \eta; \\ f'_4(\xi) &= F_4^B (\delta_2 - \xi)^{\lambda-1}, \quad \xi \rightarrow \delta_2, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\alpha, \lambda, \beta, \gamma$ – параметры локальной особенности (ПЛО) по напряжениям и температуре соответственно, характеризующие особенности функций $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4(\hat{x})$, $f_5(y)$, $f_6(y)$, $f_7(\hat{x})$, $f_8(x)$, $\varphi_1(y)$, а $F_1^A, F_2^A, \dots, F_7^B, F_8^A$ – произвольные постоянные.

Определяем асимптотику коэффициентов Фурье функций в окрестности точек A и B . Можно показать, что когда $k \rightarrow \infty$, $j \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \varphi_{1k} &\cong_{\xi \rightarrow \eta} \Phi_1 \eta^{-1} \left(\alpha_k^{(1)} \right)^{-\alpha}, \quad f_{1k} \cong_{\xi \rightarrow \eta} F_1 \eta^{-1} \left(\alpha_k^{(1)} \right)^{-\alpha-1}, \\ f_{2j} &\cong_{\xi \rightarrow \delta} F_2 \delta^{-1} \left(\chi_j^{(1)} \right)^{-\alpha-1}, \quad f_{3k} \cong_{\xi \rightarrow \eta} F_3 \eta^{-1} \left(\alpha_k^{(1)} \right)^{-\lambda-1}, \\ f_{4j} &\cong_{\xi \rightarrow \delta_2} F_4 \delta_2^{-1} \left(\chi_j^{(2)} \right)^{-\lambda-1}, \quad f_{4j} \cong_{\xi \rightarrow 0} \bar{F}_4 (-1)^{j+1} \delta_2^{-1} \left(\chi_j^{(2)} \right)^{-\alpha-1}, \\ f_{5k} &\cong_{\xi \rightarrow \eta} F_5 \eta^{-1} \left(\alpha_k^{(1)} \right)^{-\beta}, \quad f_{6k} \cong_{\xi \rightarrow \eta} F_6 \eta^{-1} \left(\alpha_k^{(2)} \right)^{-\gamma}, \\ f_{7j} &\cong_{\xi \rightarrow \delta_2} F_7 \delta_2^{-1} \left(\chi_j^{(2)} \right)^{-\gamma}, \quad f_{7j} \cong_{\xi \rightarrow 0} \bar{F}_7 (-1)^{j+1} \delta_2^{-1} \left(\chi_j^{(2)} \right)^{-\beta}, \\ f_{8j} &\cong_{\xi \rightarrow \delta} F_8 \delta^{-1} \left(\chi_j^{(1)} \right)^{-\beta}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Phi_1 = -2\Phi_1^A \Gamma_1(\alpha)$, $F_1 = 2F_1^A \Gamma_1(\alpha)$, $F_2 = 2F_2^A \Gamma_1(\chi)$, $F_3 = 2F_3^B \Gamma_1(\alpha)$, $\bar{F}_4 = 2F_4^A \Gamma_1(\chi)$, $F_4 = 2F_4^B \Gamma_1(\chi)$, $F_5 = 2F_5^A \Gamma_1(\alpha)$, $F_6 = 2F_6^B \Gamma_1(\alpha)$, $\bar{F}_7 = 2F_7^A \Gamma_1(\chi)$, $F_7 = 2F_7^B \Gamma_1(\chi)$, $F_8 = 2F_8^A \Gamma_1(\chi)$, $\Gamma_1(\alpha) = \Gamma(\alpha) \sin(\pi\alpha/2)$, $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Учет формул (5)–(9) в СИУ делает возможным исследование асимптотического поведения левых частей системы. Таким образом, для определения характера особенности вспомогательных функций в окрестности точки A получим следующие уравнения

$$\begin{aligned} U_2^{(1)}(\delta, y) &= U_2^{(2)}(0, y), \quad \Theta^{(1)}\Big|_{x=\delta} = \Theta^{(2)}\Big|_{\hat{x}=0}, \\ \sigma_{11}^{(1)}(\delta, y) &= \sigma_{11}^{(2)}(0, y) \quad (\text{если } y \rightarrow \eta), \\ \sigma_{22}^{(1)}(x, \eta) &= q, \quad f_8 + T^{(1)}\Theta^{(1)} = 0 \quad (\text{если } x \rightarrow \delta), \\ \sigma_{22}^{(2)}(\hat{x}, \eta) &= q, \quad f_7 + T^{(2)}\Theta^{(2)} = 0 \quad (\text{если } \hat{x} \rightarrow 0). \end{aligned} \tag{10}$$

В окрестности точки B имеем следующие уравнения

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(2)}(\delta_2, y) &= q, \quad f_6 + T^{(2)}\Theta^{(2)} = 0 \quad (\text{если } y \rightarrow \eta), \\ \sigma_{22}^{(2)}(\hat{x}, \eta) &= q, \quad f_7 + T^{(2)}\Theta^{(2)} = 0, \quad (\text{если } \hat{x} \rightarrow \delta_2). \end{aligned} \tag{11}$$

После суммирования рядов и учитывая асимптотическую значимость неизвестных функций для соответствующих точек, получим следующую однородную систему (12-15) алгебраических уравнений для определения ПЛО по напряжениям и температуре

$$\begin{aligned} -m_{12} \sin \frac{\pi\alpha}{2} \Phi_1 + 2 \left(n^{(1)} + r_{21} n^{(2)} \right) \sin \frac{\pi\alpha}{2} F_1 + \\ + 2n^{(1)}\alpha F_2 + 2n^{(2)}r_{21}\alpha \bar{F}_4 = 0, \\ \left(n_{11}^{(1)} + r_{12} n_{11}^{(2)} \right) \sin \frac{\pi\alpha}{2} \Phi_1 + 2m_{12} \sin \frac{\pi\alpha}{2} F_1 + \\ + 2 \left(1 - n^{(1)}\alpha \right) F_2 + 2 \left(1 - n^{(2)}\alpha \right) \bar{F}_4 = 0; \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \left(\left(n^{(1)} \right)^{-1} + \alpha \right) \Phi_1 + 2\alpha F_1 + 2 \sin \frac{\pi\alpha}{2} F_2 = 0, \\ \left(\left(n^{(2)} \right)^{-1} + \alpha \right) r_{12} \Phi_1 + 2\alpha F_1 + 2 \sin \frac{\pi\alpha}{2} \bar{F}_4 = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

$$4F_5 \cos \frac{\pi\beta}{2} + 2F_8 + 2\bar{F}_7 = 0, \quad \bar{F}_7(-\beta) \sin \frac{\pi\beta}{2} = 0, \quad F_8(-\beta) \sin \frac{\pi\beta}{2} = 0;$$

$$\sin \frac{\pi\lambda}{2} F_3 + \lambda F_4 = 0, \quad \lambda F_3 + \sin \frac{\pi\lambda}{2} F_4 = 0; \tag{14}$$

$$F_6(-\gamma) \sin \frac{\pi\gamma}{2} = 0, \quad F_7(-\gamma) \sin \frac{\pi\gamma}{2} = 0. \tag{15}$$

Особенность системы (12)–(15) состоит в том, что она распадается на четыре части. Первые четыре уравнения, объединенных формулами (12), содержат неизвестные $\Phi_1, F_1, F_2, \bar{F}_4$. Они определяют значение α – ПЛО по напряжениям в точке A .

Пятое, шестое и седьмое уравнения (13) содержат неизвестные F_5, \bar{F}_7, F_8 и определяют значение β – ПЛО по температуре в точке A . Уравнения (14) и (15) содержат неизвестные F_3, F_4 и F_6, F_7 соответственно и определяют особенность во внешней угловой точке B – ПЛО по напряжениям и температуре λ и γ .

Уравнения системы для определения ПЛО β и γ дают основание заключить, что температура не имеет особенностей во внутренних граничных и угловых точках области.

При условии существования нетривиального решения уравнений (12), (13) данной системы получим характеристическое уравнение для определения параметра α

$$\alpha^2 - \sin^2(\pi\alpha)/2 = 0. \quad (16)$$

Характеристическое уравнение (16) имеет единственный действительный корень $\alpha_0 = 1$ и множество комплексных корней $\alpha_k = \tau_k \pm i\sigma_k$ [5, 6]. Необходимо учесть лишь те комплексные корни, для которых $Re \alpha_k > 1$.

Уравнения (13), (15) системы дают основание говорить, что температура не имеет особенностей в угловых и внутренних точках области, поскольку из этих уравнений следует, что неизвестные F_5, \bar{F}_7, F_8 и F_6, F_7 равны нулю.

ПЛО α по напряжениям, характеризующий характер разрывов волновых характеристик во внутренней угловой точке A , не зависит от частоты и геометрических параметров сечения (η, δ_2) и определяется только значениями упругих констант. Данный параметр может быть определён из условия существования нетривиального решения системы (12). Эта система является симметричной относительно упругих параметров областей $G^{(m)}$

$$\Delta(\alpha, \lambda^{(1)}, \mu^{(1)}, \lambda^{(2)}, \mu^{(2)}, r_{21}) = 0. \quad (17)$$

При определённых соотношениях термоупругих свойств материалов стыкуемых областей, уравнение (17) имеет вещественный корень $0 < \alpha < 1$, что характеризует возникновение локальных особенностей в значениях напряжений в точке A .

Применим для решения СИУ (12)–(15) метод Бубнова-Галеркина, учитывая при выборе координатных функций характер особенностей решения (9). В результате приходим к бесконечной системе алгебраических уравнений с известной асимптотикой неизвестных, которая определяется корнями уравнений (16), (17).

Приравнивая определитель этой системы к нулю, получим частотное уравнение для определения значений резонансных частот, что дает возможность численно исследовать и собственные формы колебаний.

Следует отметить, что если стоит задача исследования только характера особенности напряженного состояния в окрестности точек A и B , а не во всей

области сечения в целом, то нет необходимости строить решения для конечных прямоугольных областей и решать краевую задачу (1)–(2). Используя методы выделения особенностей [4, 7], можно понизить размерность исходной задачи и определить параметры, характеризующие особенность, из соответствующих граничных условий.

Предлагаемый численно-аналитический метод решения достаточно эффективен и позволяет после выделения особенностей решения в особых точках границы построить простой алгоритм численного исследования собственных частот и форм колебаний областей рассматриваемой геометрии и неоднородности. Анализ влияния температурного поля на спектр резонансных частот для однородной и кусочно-однородной прямоугольной области, свидетельствует, что это влияние существенно зависит от частоты для всех рассматриваемых сочетаний геометрических, упругих и температурных параметров.

Были проанализированы особенности поведения волновых характеристик в различных средах, неоднородного прямоугольника с точки зрения проявления граничных и краевых динамических эффектов. Для этого рассматривались различные значения упругих и геометрических параметров сечения, с целью определения тех, на которых эти эффекты выражены наиболее отчетливо.

4. Анализ зависимости ПЛО от соотношения жесткостей стыкуемых сред. Очевидна существенная зависимость ПЛО от упругих параметров внутренней области. На рис. 2 представлены графики этой зависимости для случая, когда в качестве материала внутренней области принимались сталь, свинец и вольфрам. В качестве основных параметров выберем отношения (18)

$$r_{2S} = \mu^{(2)}/\mu^{(St)}, \quad \nu_{2S} = \nu^{(2)}/\nu^{(St)}, \quad (18)$$

где $\mu^{(St)}$, $\nu^{(St)}$ – модуль сдвига и коэффициент Пуассона стали.

Пунктирной линией изображены кривые, соответствующие значению $\nu_{2S} = 1, 3$; штрих пунктирной – значению $\nu_{2S} = 0, 769$; сплошной – значению $\nu_{2S} = 1$. Для второго и третьего случаев (материал области $G^{(1)}$ – свинец или вольфрам) коэффициент Пуассона материала внешней области принят фиксированным и равным $\nu^{(2)} = 0, 29$.

Очевидно, что параметр α существенно зависит от упругих параметров внутренней области. Для рассмотренных сочетаний упругих постоянных стыкуемых областей не получено комплексных корней уравнения (16) с положительной действительной частью, меньшей единицы. Значение $\alpha = 1$ является корнем уравнения (16) при любых сочетаниях материалов стыкуемых областей.

При сопряжении областей, изготовленных из одинаковых материалов, локальная особенность по напряжениям отсутствует и значение ПЛО α всегда равно единице. При некоторых значениях параметра r_{2S} особенность исчезает и при сопряжении разных материалов, но наименьших положительных корней, больших единицы не возникает ни для каких сочетаний материалов. Размеры диапазона изменения параметра r_{2S} , соответствующие значению $\alpha = 1$, существенно зависят от упругих постоянных внутренней области. Для стали, это

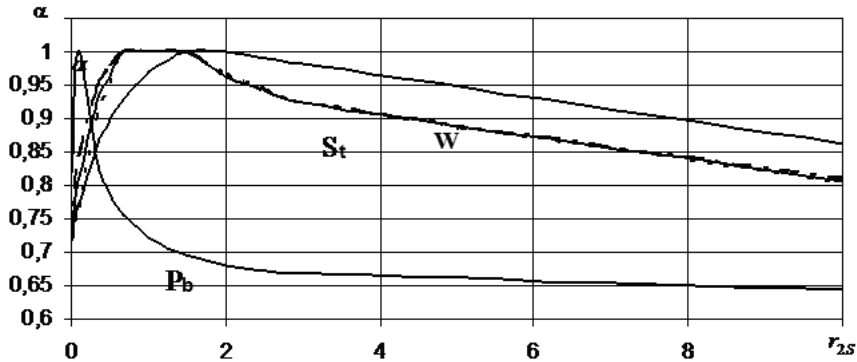


Рис. 2. Зависимость ПЛО $\alpha = \alpha(r_{2s})$ от жесткости наплавки при различных материалах внутренней области ($r_{2s} = \mu(2)/\mu(St)$, $\nu(2) = 0,29$)

значение достигается при $0,60 < r_{2s} < 1,75$; свинца – $0,074 < r_{2s} < 0,081$; вольфрама – $1,82 < r_{2s} < 1,93$.

Следовательно, интенсивность ЛКН в особой точке на стыке двух сред зависит не только от близости значений упругих постоянных стыкуемых областей, но и от типа конкретных зафиксированных материалов одной из областей. Таким образом, выбор упругих параметров наплавки должным образом позволит минимизировать ЛКН в исследуемой точке.

Варьирование значения коэффициента Пуассона материала внешней области оказывает незначительное влияние на величину ПЛО практически при любых соотношениях модулей сдвига стыкуемых областей. При достаточно больших и малых значениях модуля сдвига наплавки значение ПЛО α стабилизируется, стремясь к определенному значению.

На рис. 3 приведен график зависимости $\alpha_0 = \alpha_0(\nu^{(1)})$.

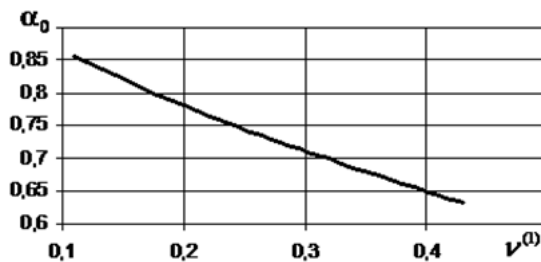


Рис. 3. Зависимость асимптотического значения ПЛО от коэффициента Пуассона внутренней области ($\nu^{(1)} \rightarrow \infty$)

Полученная зависимость имеет практически линейный характер. Уменьшение значения коэффициента Пуассона материала внутренней области вызывает рост асимптотического значения ПЛО α_0 . При стремлении значения параметра r_{2s} к нулю, асимптотическое значение ПЛО будет определяться уже коэффици-

ентом Пуассона для материала внешней области.

Рассмотрен также анализ зависимости ПЛО α от соотношения коэффициентов Пуассона стыкуемых областей при фиксированных модулях сдвига. На рис. 4 представлена указанная зависимость для некоторых значений упругих характеристик стыкуемых областей.

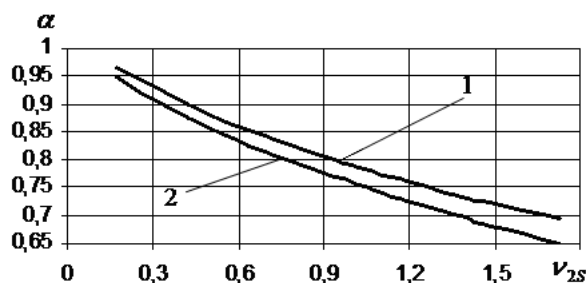


Рис. 4. Зависимость ПЛО от соотношения коэффициентов Пуассона стыкуемых областей

В качестве значения модуля сдвига внешней области принято значение модуля сдвига свинца. Кривой (1) соответствует случай, когда материал области $G^{(1)}$ – сталь, а кривой (2) – вольфрам. Изменение значения отношения коэффициентов Пуассона определяется, как и ранее, параметром ν_{2s} .

Таким образом, происходит уменьшение параметра особенности при увеличении коэффициента Пуассона материала наплавки, а также при увеличении жесткостного параметра r_{2s} .

5. Выводы. Данный метод анализа волновых полей в кусочно-однородных термоупругих средах на этапе определения асимптотического поведения НДС в нерегулярных точках составного сечения, как и ранее, предполагает введение важных параметров – ПЛО по напряжениям. В задаче гармонических колебаний термоупругих тел в сингулярных точках границы таких параметров два: для механических и температурных волновых характеристик соответственно.

Полученные результаты позволяют дать практические рекомендации по подбору упругих параметров стыкуемых областей. Оптимальный подбор материалов кусочно-неоднородного сечения предполагает необходимость выбора материала внешней области как можно более «жесткой», с максимальным коэффициентом Пуассона.

1. Мелешко В.В. Метод суперпозиции в задачах о тепловых напряжениях в прямоугольных пластинах / В.В. Мелешко // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 101 – 117.
2. Мотовиловец И.А. Механика связанных полей в элементах конструкций / И.А. Мотовиловец, В.И. Козлов – Киев: Наук. думка. 1987. – Т. 1, – 264 с.
3. Sinclair G.B. Stress Singularities in Classical Elasticity–I: Removal, Interpretation and Analysis // Applied Mechanics Reviews 2004. – Vol. 57, no. 4. – P. 251 – 297.
4. Sinclair G.B. Stress Singularities in Classical Elasticity–II: Removal, Interpretation and Analysis // Applied Mechanics Reviews 2004. – Vol. 57, no. 5. – P. 385 – 439.

5. Вовк Л.П. Обобщение метода суперпозиции в задачах о гармонических колебаниях прямоугольных областей произвольной кусочно-неоднородной структуры / Л.П. Вовк // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. – 2003. – № 4. – С. 19–23.
6. Вовк Л.П. Особенности гармонических колебаний кусочно-неоднородной прямоугольной области / Л.П. Вовк // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2002. – № 4. – С. 9–13.
7. Вовк Л.П. Особенности локальной концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред / Л.П. Вовк. – Донецк: Норд-Пресс, 2004. – 267 с.
8. Лупаренко Е.В. Эффективный метод решения задачи об установившихся колебаниях симметричных прямоугольных областей общего вида / Е.В. Лупаренко // Вісник Приазовського державного технічного університету. Серія: Технічні науки: зб. наукових праць / ПДТУ. – Маріуполь, 2014. – Вип. 29. – С. 145-152.

L.P. Vovk , E.S. Kisel

Evaluation of the intensity of local stress concentration in the field of borders of the section two thermoelastic media.

In this article, a mathematical model of the process of constant symmetric oscillations of finite isotropic piecewise inhomogeneous thermoelastic regions with an irregular boundary is investigated. An analytical solution is constructed for the formulated boundary value problem for a rectangular body by modifying the superposition method and asymptotic analysis of the behavior of unknown functions at singular points of the boundary. Some numerical results are proposed, obtained by implementing the proposed numerical-analytical algorithm for studying steady-state oscillations of a composite rectangular area.

Keywords: *harmonic oscillations, thermoelastic deformation, generalized superposition method, local stress concentration, singular points of the region boundary.*

АДИ ГОУ ВПО “Донецкий национальный технический университет”, Горловка
lv777@list.ru
e.s.kisel@gmail.com

Получено 27.11.17

UDK 539.3

©2017. E.S. Kisel

QUALITATIVE ANALYSIS OF CONCENTRATION SINGULARITY OF THERMAL STRESSES IN MACHINE PARTS WITH THE IRREGULAR BOUNDARY

The task of thermodynamics deformation of details of vehicles the cut of which has irregular points is examined, that predetermines the concentration of tensions, which determines durability of detail on the whole. The mathematical model of task includes the system of differential equalizations of motion, maximum terms on the lateral surface of detail to the cut. The analytical decision of task is built by modification of method of superposition. These methods can be applied during the calculations of the strength of the dynamic stress-strain state of structural elements and machine parts with complex physical and mechanical properties. In the analysis of the strength characteristics of the local feature accounting for the influence of temperature and stress effects can have a positive impact on the recommendations for the selection of materials that make up the cross section details, as well as to optimize the geometric parameters of the composite section.

Keywords: *dynamical thermoelastic deformation, superposition method, harmonic processes, local stress concentration, singularity, edge resonance.*

Introduction. We consider the problem of thermomechanic strain of machine parts with rectangular section. The analysis of singularities of a stress-strain state at the neighborhood of the irregular points of domain boundary taking into account thermal stress effect on local stress concentration was made [1-3]. Mathematical problem model includes differential equation system of motion, boundary conditions on the lateral surface of the section of a detail. The analytical solution of the problem is constructed by modification of method of superposition.

In previous works [4-6] the modification of method of superposition for boundary value problem of harmonic motion of elastic isotropic domain with a not smooth boundary was constructed. Actually there is no information about dissemination and generalization of this method on thermo-elastic domain.

The purpose of the work is the construction of a new method of solution of elastic boundary value problem of motion of ultimate isotropic thermo-elastic domain with a not smooth boundary. This method is constructed by, with help asymptotic analysis of behavior of unknown functions in the singular points of a boundary. It makes possible to propose effective algorithm of solving of determinative system of integral equations and it can be applied to a very broad class of boundary value problem of elliptic type. At the forefront are the questions of systematization of the results for the purpose of extradition of practical recommendations for optimal design of heterogeneous section details in particular conditions of its operation. Urgent enough is the question of the possibility of neglecting of structural heterogeneity and anisotropy of the section of the body in strengthening calculations and evaluation of possible errors [7]. The mathematical basis for the study is the expressions for

particular solutions of equations of motion, which are sets of plane standing waves. When choosing the form of partial solutions, we must take into account not only the opportunity to satisfy the boundary conditions at the exterior boundary of the field, but also the mechanical properties at the interface of the sphere. This entails the complication of numerical analytical algorithm of solving the problem.

1. Formulation of the problem. We can consider constant symmetric oscillations of homogeneous thermo-elastic domain, the section of which is in the form of rectangular domain $D = \{(x_1, x_2) : |x_1| \leq a; |x_2| \leq b\}$, where x_1, x_2 – Cartesian coordinates. On the sides of rectangle $x_1 = \pm a; x_2 = \pm b$ normal intensive load is established $Q_1(x_1), Q_2(x_2)$ correspondingly, and that is harmonic time variable with a frequency of ω . It is provided that, this domain has free heat exchange with the environment.

Dimensionless amplitude characteristics of displacement $U_i(x, y), i = 1, 2$ and temperature increase $\Theta(x, y)$ are determined by the partial differential equation system (1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y}\right) &= \frac{\gamma T_0}{\mu} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{\rho a^2 \omega^2}{\mu} U_1, \\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y}\right) &= \frac{\gamma T_0}{\mu} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \frac{\rho a^2 \omega^2}{\mu} U_2, \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} - \frac{a^2 \omega i}{\chi} \cdot \Theta - \frac{\delta a^2 i \omega}{T_0} \cdot \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y}\right) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

where $x = \tilde{x}_1/a, y = \tilde{x}_2/a; U_1 = \tilde{U}_1/a, U_2 = \tilde{U}_2/a, \Theta = \tilde{\Theta}/T_0, \sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij}/\mu, \tilde{\Theta} = T - T_0, \tilde{U}_i (i = 1, 2)$ – components of displacement vector; $\tilde{\Theta}$ – temperature increase; T – absolute temperature of points of a solid; T_0 – temperature of a solid in un-deformed and unstrained state; ρ – density; λ, μ – Lamé parameters; $\gamma = (3\lambda + 2\mu) \cdot \alpha_t$; $\delta = (\lambda T_0)/\lambda_0$; $\chi = \lambda_0/c_\varepsilon$, where α_t – linear thermal expansion coefficient; λ_0 – thermal conduction coefficient; c_ε – specific heat at constant deformation.

Boundary conditions are formulated in dimensionless form. If $x = \pm 1$

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{3\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y}\right) - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \cdot a \cdot \Theta\right) &= \frac{1}{\mu} \cdot \sigma_{11} = q_1(y), \\ \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial U_2}{\partial x} &= \frac{1}{\mu} \cdot \sigma_{12} = 0; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial x} + a \cdot \frac{\alpha}{\lambda_1} \cdot \Theta = 0. \end{aligned}$$

If $y = \pm \eta, \eta = b/a$

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(\frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{3\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y}\right) - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \cdot a \cdot \Theta\right) &= \frac{1}{\mu} \cdot \sigma_{22} = q_2(x); \\ \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial U_2}{\partial x} &= \frac{1}{\mu} \cdot \sigma_{12} = 0; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y} + a \cdot \frac{\alpha}{\lambda_1} \cdot \Theta = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

λ_1 – adduced thermal conduction coefficient; α – heat-exchange coefficient.

Differential equation system (1) and boundary conditions (2) formulate the corresponding boundary value problem relative to a component of a displacement vector $-\tilde{U}_i$ ($i = 1, 2$).

2. Auxiliary problem. Procedure of a modified method of superposition was applied for integral equation system. We consider auxiliary problem, which is characterized by the equation system (1) and the following boundary conditions at the boundary of a rectangle

$$U_1(\pm 1, y) = \pm f_1(y); \quad \sigma_{12}(\pm 1, y) = 0; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial x} = f_3(y), \quad \text{if } x = \pm 1. \quad (3)$$

We take into account that $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4(x)$ – are unknown functions, moreover $f_1(y) = f_1(-y)$, $f_2(x) = f_2(-x)$, $f_3(y) = f_3(-y)$, $f_4(x) = f_4(-x)$ it follows from the character of the boundary conditions (3). Auxiliary boundary value problem (1), (3) does not correspond, naturally, to the initial boundary value problem, but assumes analytic solution and permits, firstly, to satisfy a part of initial boundary conditions and, secondly, to express all the characteristics of the initial problem through Fourier coefficients of unknown functions: $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4(x)$.

By solving the auxiliary problem (1)–(3) and taking into account the un-used boundary conditions (2), we reduce the problem to the integral equations system

$$\sum_{\gamma=1}^4 L_{\alpha\gamma} f_{\gamma} = Q_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2; \quad f_3(y) + T_1 \Theta = 0; \quad f_4(y) + T_2 \Theta = 0. \quad (4)$$

Operators $L_{m\gamma}$ are defined by formulas

$$\begin{aligned} L_{11} f_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha_k}{\Omega^2} \Delta_{11k} \cos \alpha_k (y - \eta) \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_{1k} \cos \alpha_k (\xi - \eta) d\xi + \\ &\quad + (E_1 + 1) k_1 \operatorname{ctg} (k_1) \frac{1}{2\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_{1k} (\xi) d\xi, \\ L_{12} f_2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\beta_j}{\Omega^2} \Delta_{12j} \int_{-1}^1 f_{2j} \cos \beta_j (\xi - 1) d\xi + (E_1 - 1) k_2 \frac{\cos (k_2 y)}{\sin (k_2 \eta)} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_{2j} (\xi) d\xi, \\ L_{13} f_3 &= \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_{13k} \cos \alpha_k (y - \eta) \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_{3k} \cos \alpha_k (\xi - \eta) d\xi, \\ L_{14} f_4 &= \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_{14j} \int_{-1}^1 f_{4j} \cos \beta_j (\xi - 1) d\xi, \\ L_{21} f_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha_k}{\Omega^2} \Delta_{21k} \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_{1k} \cos \alpha_k (\xi - \eta) d\xi + \\ &\quad + (E_1 + 1) k_1 \frac{\cos (k_1 x)}{\sin (k_1)} \frac{1}{2\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_{1k} (\xi) d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{22}f_2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\beta_j}{\Omega^2} \Delta_{22j} \cos \beta_j (x-1) \int_{-1}^1 f_{2j} \cos \beta_j (\xi-1) d\xi + \\
 &\quad + (E_1 - 1) k_2 \operatorname{ctg} (k_2 \eta) \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_{2j} (\xi) d\xi, \\
 L_{23}f_3 &= \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_{23k} \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_{3k} \cos \alpha_k (\xi - \eta) d\xi, \\
 L_{24}f_4 &= \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_{24j} \cos \beta_j (x-1) \int_{-1}^1 f_{4j} \cos \beta_j (\xi-1) d\xi,
 \end{aligned}$$

and so on.

3. Asymptotic analysis. Having expanded the hyperbolic and trigonometric functions, which are in the operators structure $L_{\alpha\gamma}$ by trigonometric functions: $\cos \alpha_k (y - \eta)$, $\sin \alpha_k (y - \eta)$, $\cos \beta_j (x - 1)$, $\sin \beta_j (x - 1)$, we reduce (4) to the infinite system of algebraic equations for the definition of Fourier coefficients: f_{1k} , f_{2j} , f_{3k} , f_{4j} . For the effective system solving we investigate behavior of functions: $f_1 (y)$, $f_2 (x)$, $f_3 (y)$, $f_4 (x)$ at the angular points of rectangle. We assume that functions: $f_1 (\xi)$, $f_2 (\xi)$ are continuous in this domain, and their derivatives have singularity at the angular points, that is

$$f_1' (\xi) \underset{\xi \rightarrow \pm \eta}{\rightarrow} \pm A (\eta \pm \xi)^{\lambda-1}, \quad f_2' (\xi) \underset{\xi \rightarrow \pm 1}{\rightarrow} \pm B (1 \pm \xi)^{\lambda-1};$$

functions $f_3 (\xi)$, $f_4 (\xi)$ have singularity at the angular points, that is

$$f_3 (\xi) \underset{\xi \rightarrow \pm \eta}{\rightarrow} \pm C (\eta \pm \xi)^{\beta-1}, \quad f_4 (\xi) \underset{\xi \rightarrow \pm 1}{\rightarrow} \pm D (1 \pm \xi)^{\beta-1}.$$

λ , β are parameters, which characterize singularities of functions $f_1 (\xi)$, $f_2 (\xi)$, $f_3 (\xi)$, $f_4 (\xi)$, and A , B , C , D are the arbitrary constants.

We make asymptotic analysis of the left members of the integral equations system (4) when approaching to the angular point. We set $T = (\alpha/\lambda_1) \cdot a$. We receive system (5)

$$\begin{aligned}
 &\frac{2E_1}{(E_1 + 1)\eta} A \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k (\eta - y)}{\alpha_k^\lambda} + \frac{2E_1}{(E_1 + 1)} B \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j (\eta - y)}}{\beta_j^\lambda} - \right. \\
 &\quad \left. (\eta - y) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j (\eta - y)}}{\beta_j^{\lambda-1}} \right) + \frac{E_1 \Theta_1}{(E_1 + 1)\eta} C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k (\eta - y)}{\alpha_k^{\beta+1}} + \\
 &\quad + \frac{\Theta_1}{(E_1 + 1)} D \left(E_1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j (\eta - y)}}{\beta_j^\beta} + (\eta - y) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j (\eta - y)}}{\beta_j^{\beta+1}} \right) = 0, \\
 &\frac{2E_1}{(E_1 + 1)\eta} A \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k (1-x)}}{\alpha_k^\lambda} - (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k (1-x)}}{\alpha_k^{\lambda-1}} \right) +
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2E_1}{(E_1 + 1)} B \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_j (1-x)}{\beta_j^\lambda} + \frac{\Theta_1}{(E_1 + 1)\eta} C \left(E_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta+1}} + \right. \\
 & \left. + (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta+1}} \right) + \frac{E_1 \Theta_1}{(E_1 + 1)} D \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_j (1-x)}{\beta_j^{\beta+1}} = 0, \\
 & \frac{-\Omega_1 T}{(E_1 + 1)\eta} A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k (\eta - y)}{\alpha_k^{\alpha+1}} + C \frac{1}{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k (\eta - y)}{\alpha_k^{\beta+1}} (T + 1) \right) + \\
 & + \frac{-\Omega_1 T}{(E_1 + 1)} B \times \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\alpha+1}} + (\eta - y) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^\beta} \right) + TD \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^\beta} = 0, \\
 & \frac{-\Omega_1 T}{(E_1 + 1)\eta} A \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\alpha+1}} + (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^\beta} \right) + T \frac{1}{\eta} C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^\beta} + \\
 & + \frac{-\Omega_1 T}{(E_1 + 1)\eta} B \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_j (1-x)}{\beta_j^{\alpha+1}} + D \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_j (1-x)}{\beta_j^{\beta+1}} (T + 1) \right) = 0.
 \end{aligned}$$

After summation of series we receive a system for a definition of parameters λ, β

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi\lambda}{2} \cdot A + \lambda B = 0, \\ \lambda A + \sin \frac{\pi\lambda}{2} \cdot B = 0. \end{cases}$$

From condition for a non-trivial solution of the first two equations of the mentioned system we receive characteristic equation for a definition of parameter λ

$$\lambda^2 - \sin^2(\pi\lambda/2) = 0. \quad (6)$$

Characteristic equation (6) has one real root $\lambda_0 = 1$ and infinite set of the complex roots $\lambda_k = \tau_k \pm i\sigma_k$ [2, 3, 4]. Naturally, it is necessary to take into account only those complex roots, for which $Re\lambda_k > 1$. As we can see, the character of a singularity of a mechanical field at the angular point does not depend on the elastic parameter of a section domain. Taking into account the mechanical content of function $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ and requiring energy boundedness of a whole system we conclude that when constructing the asymptotic decision only one real root $\lambda_0 = 1$ and a plenty of complex roots $\lambda_k = \tau_k \pm i\sigma_k$ with positive real part must be taken into account. Two last equations of the system give grounds for saying that temperature has no singularity at the angular points of a domain, because $D = C = 0$.

After determination of complementary function $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4(x)$ from the integral equations system (4) we have the opportunity to find all unknowns of the boundary value problem (1) – (2) and all characteristics of a wave field. We must note that finding of indices of local singularity λ gives the possibility to research the stress-strain state in the whole domain D , including its angular points. In its

turn it gives the effective valuation of a concentration of dynamic strains at the neighborhoods of the points; that makes strength characteristics of a whole domain.

4. Conclusions. When the wave processes in bounded elastic bodies are examined, we are faced with a significant complication of the structure of the wave field compared to the case of infinite bodies. This is due to the complex nature of the reflection of elastic waves from the boundaries of the body because the direction of the general flow of energy is changed. Even more complicated the structure of the wave field is, if there are inner boundaries between fields with different elastic properties. This entails the emergence of new wave effects associated with the dynamic stress concentration in the vicinity of the internal and external boundaries of the field. The nature of edge effects is changed too. They will depend not only from the size of the field but also from the geometric and thermoelastic parameters defining the nature of heterogeneity.

1. *Grinchenko V.T.* Harmonic oscillations and waves in elastic bodies / V.T. Grinchenko, V.V. Meleshko. – Kiev : Naukova dumka, 1981. – 283 p.
2. *Grinchenko V.T.* Equilibrium of elastic bodies canonical form / V.T. Grinchenko, A.F. Ulitko – Kiev : Naukova dumka, 1985. – 280 p.
3. *Belokon A.B.* A method for solving problems of elasticity theory for bodies of finite size / A.B. Belokon // Dokl. USSR Academy of Sciences. – 1977. – V. 233. – № 1. – P. 56-59.
4. *Vovk L.P.* Symmetric vibrations electroelastic plates / L.P. Vovk // News NCSC high school. – 1982. – № 3. – P. 42-45.
5. *Vovk L.P.* Of steady oscillations electroelastic plates of variable thickness / L.P. Vovk, A.V. Belokon // Journal of Applied Mechanics. – 1982. – V. 18. – № 5. – P. 93-97.
6. *Aksentyan O.K.* Features of stress - strain state in the vicinity of the rib plate / O.K. Aksentyan // Applied mechanics. – 1967. – V. 31. – № 1. – P. 178-186.
7. *Wilde M.V.* Investigation of the boundary resonance phenomenon in plates on the basis of the 3D elasticity theory equations. Mechanics of Deforming Media, Saratov University, Vol. 16, 2010, p. 7-14.

Е.С. Кисель

Качественный анализ концентрации температурных напряжений в призматических сечениях с сингулярной границей.

Работа посвящена совершенствованию методов решения связанных задач динамической термоупругости для тел кусочно-неоднородной внутренней структуры. На основе обобщения метода суперпозиции проанализированы особенности проявления тонких динамических эффектов, связанных с локальной концентрацией динамических напряжений на границе раздела изотропных сред с различными термоупругими свойствами.

Ключевые слова: динамическое термоупругое деформирование, метод суперпозиции, гармонические процессы, локальная концентрация напряжений, сингулярность, краевой резонанс.

Automobile and Highway Institute of Donetsk National Technical University, Horlovka
e.s.kisel@gmail.com

Received 27.11.17

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ

УДК 004.942, 621.74.047

©2017. В.В. Белоусов, В.В. Коркишко

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА
В ПРОМЕЖУТОЧНОМ КОВШЕ

В данной статье рассматривается математическое моделирование гидродинамических и сопряженных с ними теплофизических процессов в промежуточном сталеразливочном ковше на базе нелинейных дифференциальных уравнений переноса в частных производных. Проанализировано преимущество уравнений, записываемых с использованием переменных «вихрь-функция – функция тока». Разработан вычислительный алгоритм, позволяющий рассчитать поля скорости, температуры в расплаве и тепловую обстановку в стенках промежуточного ковша.

Ключевые слова: промежуточный ковш, непрерывное литье, дифференциальные уравнения в частных производных, уравнения Навье-Стокса.

Введение. В современной системе технологий промежуточный ковш МН-ЛЗ (далее ПК) рассматривается как один из важнейших элементов, который самым непосредственным образом влияет на качество непрерывнолитой заготовки. Он выступает в качестве буферного объема при переливании металла из сталеразливочного ковша в кристаллизатор, при этом обеспечивается непрерывное, равномерное поступление металла в кристаллизаторы. Сталь в процессе движения по ковшу различными методами очищается от неметаллических включений. Кроме того, сама конструкция промежуточного ковша удерживает шлак от попадания в кристаллизатор, тем самым повышая чистоту выплавляемой стали. Однако существуют и проблемы, заключающиеся в неравномерном распределении стали по ковшу, замерзании стали в «застойных» областях, недостаточном уровне очищения металла от неметаллических включений. Таким образом, исследование гидродинамических и тепломасообменных процессов в промежуточном ковше является актуальной задачей исследований.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу на примере 2-ручьевого промежуточного ковша. Математическая модель процессов в ПК описывается уравнением количества движения, переноса тепла и неразрывности

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= \nabla \nu \nabla \vec{v} + \vec{g} \beta (T - T_0) - \frac{1}{\rho} \nabla p, \\ \rho c \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) T \right] &= \nabla \lambda \nabla T, \\ \nabla \vec{v} &= 0, \end{aligned}$$

где \vec{v} – вектор скорости расплава, м/с; t – время, с; $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ – Гамильтониан; ν – кинематическая вязкость, м²/с; \vec{g} – ускорение свободного падения, м/с²; β – тепловой коэффициент объемного расширения, 1/К; T – текущая температура расплава, К; T_0 – начальная температура расплава; ρ – плотность расплава, кг/м³; p – давление, Н/м²; c – теплоемкость расплава при постоянном давлении, Дж/(кг/К); λ – теплопроводность, Вт/(мК).

Приняты допущения:

1. В начальный момент времени металл в ковше неподвижен и имеет постоянную температуру по всему объему.
2. Теплофизические параметры материала ковша считать независимыми от температуры, так как процесс достаточно быстро (2-3 минуты) выходит на стационарный режим[1].
3. Теплофизические параметры металла также считать независимыми от температуры, так как температура металла в процессе разливки при установившемся стационарном режиме изменяется в среднем на 3°С/мин, т.е. за 1 час относительное изменение температуры около 4% [2].
4. В области втекающего и вытекающего металла горизонтальный градиент температуры принять равным нулю, так как время контакта выделенного объема металла в этой области с элементами ковша чрезвычайно мало, порядка 0,3 – 0,5 сек, и существенного влияния на температуру металла такой короткий по времени теплообмен не оказывает.
5. Из-за трапецевидного наклона стенок промежуточного ковша, ширина промежуточного ковша не является величиной постоянной, однако, угол наклона настолько мал, что применимо допущение о прямоугольной форме ПК.

2. Выбор метода решения. Основная трудность численного интегрирования системы уравнений связана с определением поля давления. Градиент давления составляет часть источникового члена в уравнении количества движения, при этом нет явного уравнения для определения давления. Чтобы обойти эту проблему из уравнения количества движения исключается давление путем выполнения операции «got».

В таком случае получим уравнение переноса вихря. Вместе с введением функции тока для стационарных двухмерных течений этот метод является основной широко известного метода решения в переменных «функция тока – вихрь-функция». Рассматриваемый метод имеет несколько особенностей. Давление не входит в число зависимых переменных, и вместо того, чтобы описывать процесс двумя уравнениями количества движения (для каждой компоненты скорости v_1 , направленной вдоль координаты x и v_2 – вдоль координаты y) и уравнением неразрывности, необходимо решить только два уравнения: для нахождения

функции тока ψ и вихря ω . Основным недостатком использования переменных «вихрь-функция – функция тока» состоит в том, что необходимо задавать значения вихря на границах расчетной области.

Численная реализация задачи при помощи переменных «вихрь-функция – функция тока» позволяет аппроксимировать уравнения в неявном виде, что позволяет получать более точные решения.

Перейдем к безразмерным уравнениям, приняв за характерную длину ширину ковша L_{x0} , за характерную скорость – $v_0 = a_0/L_{x0}$, за характерную температуру – $T_0 = T_m$, где a_0 – коэффициент температуропроводности и металла, м²/с. Использование критериальной формы уравнений позволяет расширить область применения данной модели, позволяя решать целый класс такого рода задач.

Оценим влияние естественной конвекции на величину вынужденной конвекции. Это отношение определяется критерием Ричардсона (Ri) для тепловой конвекции [3].

$$Ri = \frac{g\beta(T - T_0)}{|\vec{v}_0 \cdot \nabla v_0|} = \frac{g\beta L_{x0} \Delta T}{v_0^2} = \frac{Gr}{Re^2},$$

где β – коэффициент теплового расширения, ΔT – характерная разница температур, $Gr = \frac{g\beta L_{x0}^3 \Delta T}{\nu^2}$ – число Грасгофа, $Re = \frac{v_0 L_{x0}}{\nu}$ – число Рейнольдса.

При малом значении числа Грасгофа по сравнению с числом Рейнольдса преобладает вынужденная конвекция. При условии, что число Рейнольдса много меньше числа Грасгофа, процессом, определяющим перенос тепла, является естественная конвекция.

Учитывая геометрические, динамические и тепловые параметры ПК, критерий Ri равняется:

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2} \approx 0.9 * 10^{-3} \ll 1.$$

Полученный результат означает, что температурная естественная конвекция чрезвычайно слабо влияет на скорость течения, поэтому можно исключить конвективный элемент из уравнения Навье-Стокса.

Таким образом, система уравнений, описывающих состояние расплавленной стали в ковше, примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial Fo} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} &= Pr \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial T}{\partial Fo} + v_1 \frac{\partial T}{\partial y} + v_2 \frac{\partial T}{\partial x} &= a_p \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \\ \omega &= -\Delta \psi, \end{aligned}$$

где ω – z-компонента вектора вихря скорости; $\omega = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}$; $Fo = at/l_{x0}^2$ – критерий Фурье; ψ – функция тока, такая что $\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_1$, $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_2$; $Pr = \nu/a$ – число Прандтля.

3. Формулировка краевых условий. Начальные условия для скорости расплава равны нулю во всей расчетной области, кроме поверхностного слоя, а также входных и выходных отверстий. Согласно условию прилипания скорость на стенках и дне ковша равна нулю. Скорость подъема металла обозначим v_n и будем считать ее одинаковой на всей поверхности ковша. Скорость втекания металла в ковш обозначим $v_M = 0,5$ м/с. Скорость вытекания металла из ковша примем равной $v_M/2$.

Схема расчетной области (рис.1) :

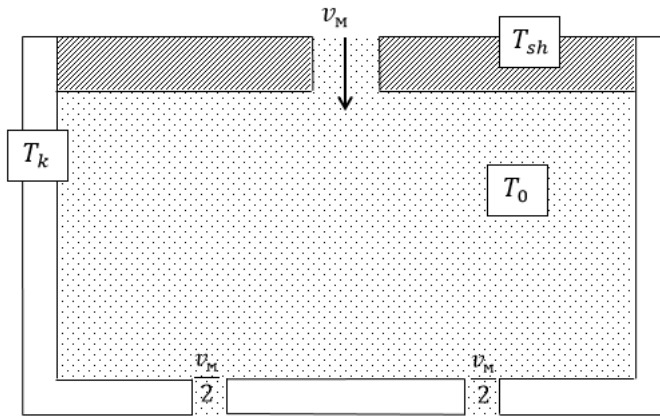


Рис. 1. Схема расчетной области расплава в промежуточном ковше.

Температура в ванне ковша равна начальной температуре расплава $T_0 = 1500^\circ\text{C}$. Начальные условия для температуры элементов ковша исходят из того, что ковш предварительно был прогрет до $T_k = 900^\circ\text{C}$. Температуру шлака примем равным $T_{ш} = 1200^\circ$.

Так как ненулевая скорость наблюдается только в области расплава, то для решения уравнения Навье-Стокса будем рассматривать стенки ковша, как границы расчетной области. Таким образом, уравнение рассматриваемой модели решается в области расплава с такими граничными условиями.

В области втекающего металла скорость считается неизменной: $v_1 = 0$ м/с, $v_2 = v_M$ м/с. Температура также принимается постоянной: $T_0 = 1500^\circ\text{C}$.

В областях вытекающего металла скорость также считается неизменной: $v_1 = 0$ м/с, $v_2 = \frac{v_M}{2}$ м/с. Температура рассчитывается из условия, что $\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_p = 0$.

Для расчета граничных условий для вихря скорости применяется условие Тома:

$$\omega_k = -\frac{2(\psi_{k+1} - \psi_k)}{\Delta h^2} + O(\Delta h),$$

где Δh – расстояние по нормали к стенке от ближайшей к стенке узловой точки $k + 1$ до ее проекции на стенку.

Опишем также процессы теплообмена в шлаковой области и в стенках и дне

Таблица 1. Гидродинамические граничные условия

Область	Координаты	Проекция скорости	Функция тока
Левая стенка	$X = 0,$ $0 \leq Y \leq L_y$	$v_1 = 0 \text{ м/с}$ $v_2 = 0 \text{ м/с}$	$\psi = 0$
Правая стенка	$X = L_x,$ $0 \leq Y \leq L_y$	$v_1 = 0 \text{ м/с}$ $v_2 = 0 \text{ м/с}$	$\psi = 0$
Верхняя поверхность	$Y = 0,$ $0 \leq X \leq R_1$	$v_1 = 0 \text{ м/с}$ $v_2 = -v_{\text{п}} \text{ м/с}$	$\psi = v_{\text{п}}x$
	$Y = 0,$ $R_1 \leq X \leq R_2$	$v_1 = 0 \text{ м/с}$ $v_2 = v_{\text{м}} \text{ м/с}$	$\psi = -v_{\text{м}}(x - R_1) + v_{\text{п}}R_1$
	$Y = 0,$ $R_2 \leq X \leq L_x$	$v_1 = 0 \text{ м/с}$ $v_2 = -v_{\text{п}} \text{ м/с}$	$\psi = v_{\text{п}}x -$ $-v_{\text{м}}(R_2 - R_1) - v_{\text{п}}(R_2 - R_1)$
Нижняя поверхность	$Y = L_y,$ $0 \leq X \leq r_1$	$v_1 = 0 \text{ м/с}$ $v_2 = 0 \text{ м/с}$	$\psi = 0$
	$Y = L_y,$ $r_1 \leq X \leq r_2$	$v_1 = 0 \text{ м/с}$ $v_2 = \frac{v_{\text{м}}}{2} \text{ м/с}$	$\psi = -\frac{v_{\text{м}}}{2}(x - r_1)$
	$Y = L_y,$ $r_2 \leq X \leq r_3$	$v_1 = 0 \text{ м/с}$ $v_2 = 0 \text{ м/с}$	$\psi = -\frac{v_{\text{м}}}{2}(r_2 - r_1)$
	$Y = L_y,$ $r_3 \leq X \leq r_4$	$v_1 = 0 \text{ м/с}$ $v_2 = \frac{v_{\text{м}}}{2} \text{ м/с}$	$\psi = -\frac{v_{\text{м}}}{2}(x - r_3) - \frac{v_{\text{м}}}{2}(r_2 - r_1)$
	$Y = L_y,$ $r_4 \leq X \leq L_x$	$v_1 = 0 \text{ м/с}$ $v_2 = 0 \text{ м/с}$	$\psi = -\frac{v_{\text{м}}}{2}(r_4 - r_3) - \frac{v_{\text{м}}}{2}(r_2 - r_1)$

промежуточного ковша. При формулировании граничных условий для температуры считаем, что контакт между расплавом, шлаком и поверхностью самого ковша является идеальным.

Для шлака (при допущении, что в процессе разливки шлаковая область остается неподвижной) уравнение теплообмена примет следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial Fo} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right).$$

Сверху расплав в промежуточном ковше покрыт шлаковой смесью, которая сво-

бодно контактирует с окружающей средой. Поэтому на границе «шлак-окружающая среда» ставится условие третьего рода. В остальной области формулируются граничные условия четвертого рода при условии идеального контакта «шлак-расплав» и «шлак-стенка».

Для стенок и дна промежуточного ковша уравнение теплообмена имеет следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial Fo} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right),$$

где $\alpha_{шл}$, $\alpha_{ст}$ – коэффициенты теплообмена между шлаком и окружающей средой, стенкой и окружающей средой соответственно Вт/(м²К).

Стенки и дно промежуточного ковша свободно контактируют с окружающей средой за исключением внутренних поверхностей ковша, которые соприкасаются со шлаком и расплавленной сталью. Поэтому на внешней, верхней и нижней поверхностях стенок ставится условие третьего рода. На внутренней области ставятся граничные условия четвертого рода при условии идеального контакта «шлак-стенка», «расплав-стенка» и «расплав-дно» [4].

Таким образом, граничные условия для расчета температуры во всей области расчета формулируются следующим образом:

Таблица 2. Термодинамические граничные условия

Область	Координаты	Температура
Окружающая среда – левая стенка	$X = 0,$ $0 \leq Y \leq L_{yf}$	$\lambda_{ст} \frac{\partial T}{\partial x} = -\alpha_{ст} (T - T_{ср})$
Левая стенка – шлаковая область	$X = L_{st},$ $0 \leq Y \leq L_{sh}$	$\lambda_{шл} \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{шл} = \lambda_{ст} \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{ст},$ $T_{шл} = T_{ст}$
Левая стенка – область расплава	$X = L_{st},$ $L_{sh} < Y < L_d$	$\lambda_{шл} \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{шл} = \lambda_p \frac{\partial T}{\partial x} \Big _p,$ $T_{шл} = T_p$
Шлаковая область – втекающий металл	$0 \leq Y \leq L_{sh},$ $X = R_1$	$\lambda_{шл} \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{шл} = \lambda_p \frac{\partial T}{\partial x} \Big _p,$ $T_{шл} = T_p$
Область втекающего металла	$0 \leq Y \leq L_{sh},$ $R_1 < X < R_2$	$T = T_m$

Таблица 2. Продолжение

Область	Координаты	Температура
Втекающий металл – шлаковая область	$0 \leq Y \leq L_{sh},$ $X = R_2$	$\lambda_p \frac{\partial T}{\partial x} \Big _p = \lambda_{шл} \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{шл},$ $T_{шл} = T_p$
Дно – вытекающий металл	$0 \leq Y \leq L_{sh},$ $X = r_1$	$\lambda_{ст} \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{ст} = \lambda_p \frac{\partial T}{\partial x} \Big _p,$ $T_{ст} = T_p$
Вытекающий металл – дно	$0 \leq Y \leq L_{sh},$ $X = r_2$	$\lambda_p \frac{\partial T}{\partial x} \Big _p = \lambda_{ст} \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{ст},$ $T_{ст} = T_p$
Область вытекающего металла	$0 \leq Y \leq L_{sh},$ $r_1 < X < r_2$	$\frac{\partial T}{\partial y} \Big _p = 0$
Дно – вытекающий металл	$0 \leq Y \leq L_{sh},$ $X = r_3$	$\lambda_{ст} \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{ст} = \lambda_p \frac{\partial T}{\partial x} \Big _p,$ $T_{ст} = T_p$
Вытекающий металл – дно	$0 \leq Y \leq L_{sh},$ $X = r_4$	$\lambda_p \frac{\partial T}{\partial x} \Big _p = \lambda_{ст} \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{ст},$ $T_{ст} = T_p$
Область вытекающего металла	$0 \leq Y \leq L_{sh},$ $r_3 < X < r_4$	$\frac{\partial T}{\partial y} \Big _p = 0$
Шлаковая область – правая стенка	$X = L_{2st},$ $0 \leq Y \leq L_{sh}$	$\lambda_{ст} \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{ст} = \lambda_{шл} \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{шл},$ $T_{шл} = T_{ст}$
Область расплава – правая стенка	$X = L_{2st},$ $L_{sh} < Y < L_d$	$\lambda_p \frac{\partial T}{\partial x} \Big _p = \lambda_{шл} \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{шл},$ $T_{шл} = T_p$

Таблица 2. Продолжение

Область	Координаты	Температура
Шлаковая область – правая стенка	$X = L_{2st},$ $0 \leq Y \leq L_{sh}$	$\lambda_{ст} \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{ст} = \lambda_{шл} \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{шл},$ $T_{шл} = T_{ст}$
Область расплава – правая стенка	$X = L_{2st},$ $L_{sh} < Y < L_d$	$\lambda_p \frac{\partial T}{\partial x} \Big _p = \lambda_{шл} \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{шл},$ $T_{шл} = T_p$
Правая стенка – окру- жающая среда	$X = L_{xf},$ $0 \leq Y \leq L_{yf}$	$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = -\alpha (T - T)$
Окружающая среда – левая стенка	$Y = 0,$ $0 \leq X \leq L_{st}$	$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = -\alpha (T - T)$
Окружающая среда – шлаковая область	$Y = 0,$ $L_{st} < X \leq R_1$	$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = -\alpha (T - T)$
Область втекающего металла	$Y = 0,$ $R_1 < X < R_2$	$T = T_m$
Окружающая среда – шлаковая область	$Y = 0,$ $R_2 \leq X < L_{2st}$	$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = -\alpha (T - T)$
Окружающая среда – правая стенка	$Y = 0,$ $L_{2st} \leq X \leq L_{xf}$	$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = -\alpha (T - T)$
Шлаковая область – расплав	$L_{st} < X \leq R_1,$ $Y = L_{sh}$	$\lambda_{шл} \frac{\partial T}{\partial y} \Big _{шл} = \lambda_p \frac{\partial T}{\partial y} \Big _p,$ $T_{шл} = T_p$
Шлаковая область – расплав	$R_2 \leq X < L_{2st},$ $Y = L_{sh}$	$\lambda_{шл} \frac{\partial T}{\partial y} \Big _{шл} = \lambda_p \frac{\partial T}{\partial y} \Big _p,$ $T_{шл} = T_p$

Таблица 2. Продолжение

Область	Координаты	Температура
Расплав – дно ковша	$L_{st} \leq X \leq r_1,$ $Y = L_d$	$\lambda_p \frac{\partial T}{\partial x} \Big _p = \lambda_{ct} \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{ct},$ $T_{ct} = T_p$
Расплав – дно ковша	$Y = L_d,$ $r_2 \leq X \leq r_3$	$\lambda_p \frac{\partial T}{\partial x} \Big _p = \lambda_{ct} \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{ct},$ $T_{ct} = T_p$
Расплав – дно ковша	$Y = L_d,$ $r_4 \leq X \leq L_{2st}$	$\lambda_p \frac{\partial T}{\partial x} \Big _p = \lambda_{ct} \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{ct},$ $T_{ct} = T_p$
Дно – окружающая среда	$Y = L_{yf},$ $0 \leq X \leq r_1$	$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = -\alpha (T - T)$
Вытекающий металл	$Y = L_{yf},$ $r_1 < X < r_2$	$\frac{\partial T}{\partial y} \Big _p = 0$
Дно – окружающая среда	$Y = L_{yf},$ $r_2 \leq X \leq r_3$	$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = -\alpha (T - T)$
Вытекающий металл	$Y = L_{yf}$ $r_3 < X < r_4$	$\frac{\partial T}{\partial y} \Big _p = 0$
Дно – окружающая среда	$Y = L_{yf},$ $r_4 \leq X \leq L_{xf}$	$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = -\alpha (T - T)$

Конечно-разностная сетка расчетной области является неравномерной. Так как толщина дна ковша и толщина слоя шлака гораздо меньше, чем высота самого ковша, то целесообразным является использование более подробного шага по пространству вдоль оси y для этих областей по сравнению с областью расплавленного металла. Аналогично, так как ширина стенок много меньше ширина ковша, то шаг по пространству вдоль оси x должен быть меньше, чем в области расплава.

В конечно-разностных уравнениях используются центральные разности по пространству и правые разности по времени. Полученные уравнения являются неявными и решаются методом прогонки [5].

Разработанная модель позволяет рассчитать течение расплавленной стали в промежуточном ковше, а также процессы теплообмена в системе ковш-металл-шлак.

На базе описанной модели была создана программа на языке Delphi. Результаты расчетов прилагаются.

На рисунке 2 представлена зависимость кинетической энергии перемешивания расплава ($\varepsilon = \frac{\sum (v_1^2 + v_2^2) * \rho}{2}$) от времени. Из графика видно, что приблизительно через 5 минут перемешивания расплава выходит на стационарный режим.

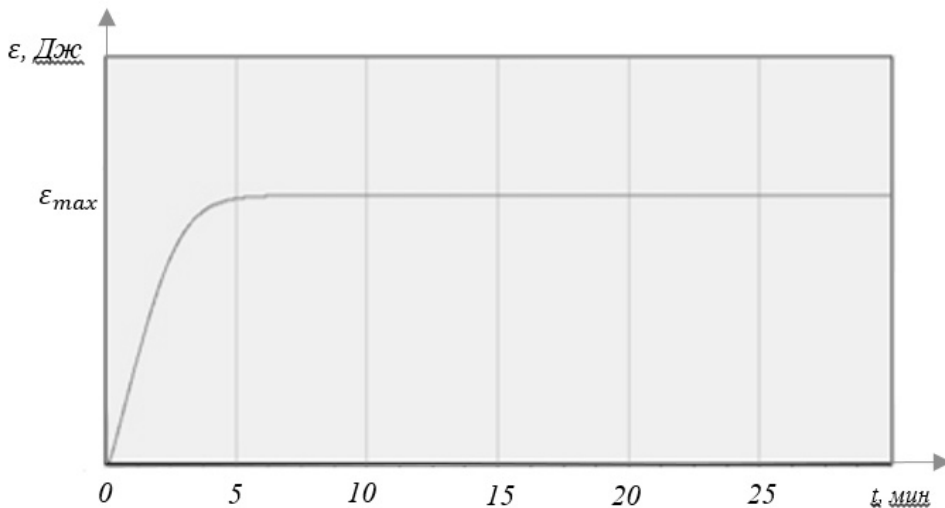


Рис. 2. График зависимости суммарной кинетической энергии расплавленного металла от времени расчета.

На рисунке 3 представлена архитектура вихревого движения расплава. В нашем случае стакан, из которого истекает металл, находится по центру ковша. Симметричное расположение вихревой структуры подтверждает устойчивость сформулированной математической модели и вычислительного алгоритма.

Как видно из рис.4 в промежуточном ковше с обеих сторон от текующего потока металла наблюдаются вихри. Также хорошо видно, что в нижних углах промежуточного ковша скорость движения металла чрезвычайно мала, что приводит к излишнему охлаждению данных областей и повышается вероятность затвердевания стали в данном месте. Это подтверждается данными о температурном распределении в промежуточном ковше (рис. 5).

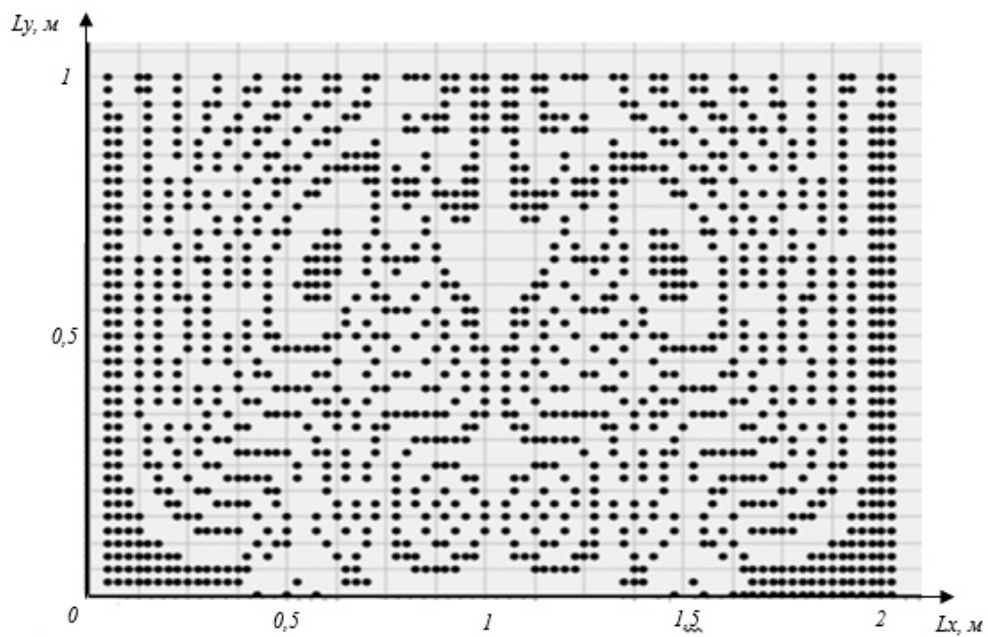


Рис. 3. Распределение изолиний при $t=300$ сек.

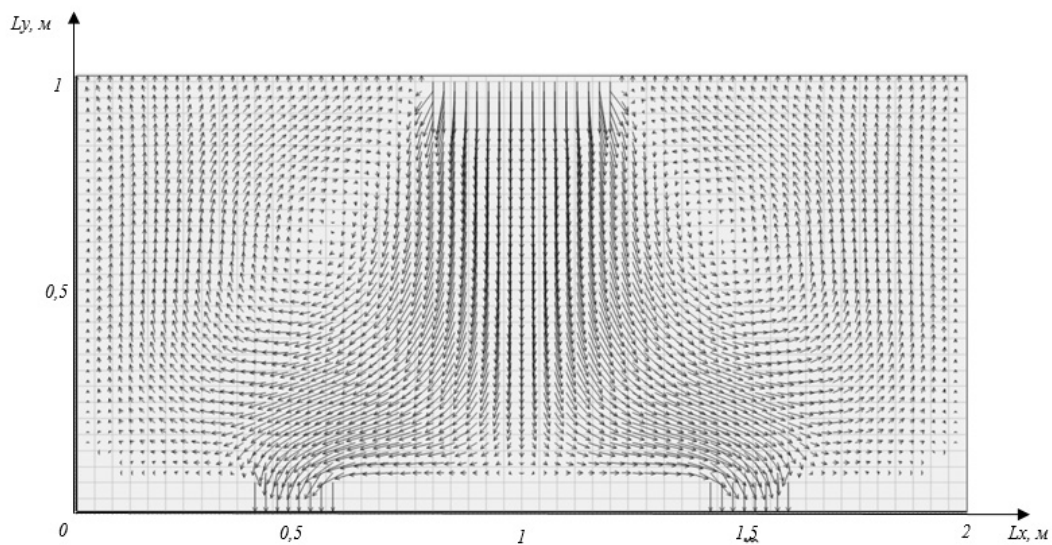


Рис. 4. Поле скоростей расплавленного металла при $t=300$ сек.

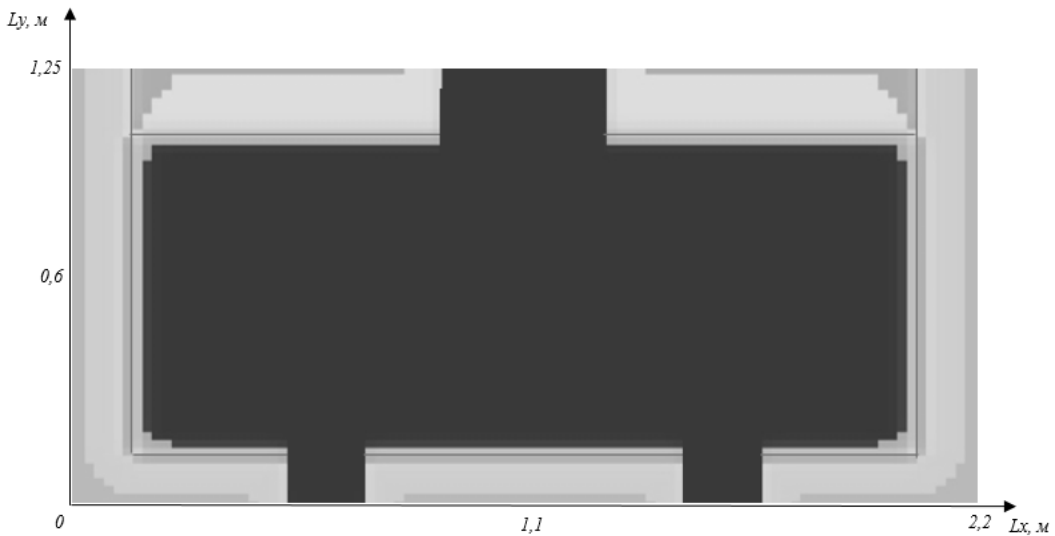


Рис. 5. Поле температур промежуточного ковша при $t=300$ сек.

4. Выводы. Сформулирована математическая модель гидродинамических и теплофизических процессов в промежуточном сталеразливочном ковше на базе нелинейных дифференциальных уравнений переноса в частных производных.

Оценено влияние тепловой конвекции на перемешивания металла, что позволило упростить уравнение переноса количества движения.

Разработан вычислительный алгоритм и создан программный продукт на языке Delphi, позволяющий рассчитать поля скорости, температуры в расплаве и тепловую обстановку в стенках промежуточного ковша.

В результате численного эксперимента показано, что процесс перемешивания в течение 5 мин. Выходит на стационарный режим.

В углах ПК наблюдаются наличие застойных зон, приводящих к понижению температуры расплава в этих областях

Перспективным заданием дальнейших исследований является исследование учета продувки металла аргоном в пристеночной области с целью выведения неметаллических включений в шлаковую область и оценку влияния турбулентности на течение металла в ковше.

1. Цаплин А.И. Моделирование теплофизических процессов и объектов в металлургии: учеб. пособие / А.И. Цаплин, И.Л. Никулин – Пермь: Перм. гос. техн. ун-та, 2011.– 299 с.
2. Кабаков З.К. Математическое моделирование влияния продувки на потери тепла в сталеразливочном ковше / З.К. Кабаков, М.А. Пахолкова, К.Е. Голубенков. Череповец: ГОУ ВПО ЧГУ, 2010. – С. 4-8.
3. Бабанин А.Я. Обработка железо-углеродистых расплавов высокоактивными реагентами: [монография] / А.Я. Бабанин, Б.Ф. Белов, В.В. Белоусов, Я.В. Павлов. – Донецк: Восточ. издат. дом, 2015. – 219 с.

4. Лейбензон В.О. Твердження металів і металевих композицій: підручник для вищих навчальних закладів. / В.О. Лейбензон, В.Л. Пілюшенко, В.М. Кондратенко, В.Є. Хричиков [та ін.]. – К.: Наук. думка, 2009. – 448 с.
5. Самарский А.А. Численные методы математической физики. 2-е изд. / А.А. Самарский, А.В. Гулин. - М.: Науч. мир, 2003.– 316 с.

V.V. Belousov , V.V Korkishko

Mathematical modeling of hydrodynamic transfer processes in the tundish ladle.

Mathematical modeling of hydrodynamic and thermophysical processes in the tundish steel ladle based on nonlinear partial differential transport equations is considered. The advantage of equations using variables "vortex-function – stream function" is analyzed. A computational algorithm is developed to calculate the velocity field, the field of melt steel temperature and thermal setting in the walls of the tundish ladle.

Keywords: *tundish ladle, continuous casting, partial differential equations, Navier-Stokes equations.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
v.v.belousov@gmail.com
supreme-alfa@mail.ru

Получено 04.12.17