

ISSN 0136-4545

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

**Журнал
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ
МЕХАНИКИ**

№ 1 (74)

2021

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: В.И. Сторожев

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА: С.А. Калоеров

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ: Пачева М.Н.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Анциферов А.В.

Болнокин В.Е.

Болонов Н.И.

Ватульян А.О.

Вовк Л.П.

Глазунов В.А.

Глухов А.А.

Гольцев А.С.

Горр Г.В.

Губанов В.В.

Дрибан В.А.

Ковалев А.М.

Коносевиц Б.И.

Левин В.М.

Муцанов В.Ф.

Петраков А.А.

Судаков С.Н.

Улитин Г.М.

Шалдырван В.А.

Адрес редакции:

83001 Донецк, ул. Университетская, 24
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
Тел. 302 92 71
E-mail: jtam_donnu@mail.ru

Технический редактор: Пачева М.Н.

Утверждено к печати ученым советом
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016г.

© Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Донецкий национальный университет», 2021

№ 1 (74) / 2021

Основан в 1970г.

ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Механика деформируемого твердого тела

Вовк Л.П., Кисель Е.С. Моделирование распространения полуэллиптической продольной трещины на внешней поверхности полого цилиндра 5

Калоеров С.А., Авдюшина Е.В., Ермаков О.Э. Исследование напряженного состояния многосвязной анизотропной полуплоскости обобщенным методом наименьших квадратов..... 16

Глушанков Е.С. Решение задачи об изгибе тонкой пьезоэлектрической полосы при действии поперечной нагрузки..... 31

Строительная механика

Левин В.М. Анализ напряженно-деформированного состояния армированной упругопластической пластины в окрестности источников его возмущения 56

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Павлыш В.Н., Сторожев С.В. Нечетко-множественный анализ математической модели устойчивости тороидальных оболочек 65

Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика

Глухов А.А. Алгоритм метода дифрагированных волн по прогнозу дизъюнктивов угольных пластов..... 73

Канин В.А., Васютина В.В. Оценка расслоения пород в кровле пласта... 83

№ 1 (74) / 2021

Founded in 1970.

JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

CONTENTS

Solid Mechanics

- Vovk L.P., Kisel E.S.* Modeling the propagation of a semi-elliptical longitudinal crack on the outer surface of a hollow cylinder..... 5
- Kaloerov S.A., Avdyushina E.V., Ermakov O.E.* Study of the stress state of a multi-coupled anisotropic semi-plane by the generalized least squares method..... 16
- Glushankov E.S.* The solution of the problem of bending of thin piezoelectric strip under transverse loading action..... 31

Structural Mechanics

- Levin V.M.* Analysis of stress-strain state of a reinforced elastoplastic plate in the vicinity of sources of its disturbance..... 56

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes

- Pavlysh V.N., Storozhev S.V.* Fuzzy-set analysis of the mathematical model of the stability of toroidal shells 65

Geomechanics, Rock Damage, Mining Aerogasdynamics and Thermal Physics

- Glukhov A.A.* Algorithm of diffracted wave method to predict coal seam faults..... 73
- Kanin V.A., Vasyutina V.V.* Evaluation of rock cleavage in the seam roof..... 83

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 519.6:539.3

©2021. Л.П. Вовк, Е.С. Кисель

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ
ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПРОДОЛЬНОЙ ТРЕЩИНЫ
НА ВНЕШНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Методом конечных элементов решена задача о распределении коэффициента интенсивности напряжений по фронту полуэллиптической продольной трещины, расположенной на внешней поверхности полого цилиндра, внутренняя поверхность которого подвержена давлению. Расчет выполнен в программном комплексе ANSYS. Получены зависимости механических характеристик от локализации трещины, в частности, угла ее наклона относительно оси цилиндра и схемы нагружения модели. Предложенный информационно-системный подход позволил получить достаточно точное распределение напряжений в области начального надреза на поверхности цилиндра по фронту трещины и в ее вершинах с учетом эффекта раскрытия, а также вычислить коэффициенты интенсивности напряжений при одноосном растяжении по фронту полуэллиптической краевой продольной трещины. Предложены практические рекомендации относительно геометрических параметров модели и схемы нагружения.

Ключевые слова: метод конечных элементов (МКЭ), эллиптическая трещина, коэффициент интенсивности напряжений, фронт трещины, полый цилиндр.

Введение. Для описания поведения объектов, имеющих поверхностные дефекты в зонах конструктивных концентраторов напряжений, необходимо учитывать совокупность таких факторов, как распределение напряжений по толщине элемента, форма дефекта и значение коэффициента интенсивности напряжений (КИН) по контуру поверхностного дефекта. Известно, что КИН позволяет установить взаимосвязь между условиями нагрузки материала в вершине трещины, а также с геометрией и напряженным состоянием тела, содержащего трещину. Распределение КИН по фронту трещин позволяет оценить трещиностойкость и живучесть модели. В этом случае можно применить силовой критерий разрушения Ирвина, что стало возможно в программном комплексе ANSYS [1].

Вопросам прочности областей с трещинами при нагружениях для трех классических типов трещин посвящено большое количество работ. Чаще всего для описания поведения модели с трещиноподобными дефектами применяют стандартные конечно-элементные комплексы, в которых имеется встроенная функция вычисления КИН. Например, в работе [2] для вычисления КИН по фронту полуэллиптической краевой трещины в трубе используется программно-информационная среда ANSYS. Часто при оценке трещиностойкости деталей исполь-

зуют аппроксимационные выражения для КИН. С ними можно ознакомиться в справочной литературе [3-6], а также в работе [7]. Однако не для всех случаев можно найти готовые решения. Следует отметить, что простым и в то же время обладающим приемлемой точностью методом определения КИН является метод сечений [8].

Анализ литературы показывает малое количество исследований об изменении формы поверхностных трещин, развивающихся в зонах концентраторов напряжений, и о критериях, описывающих эту кинетику. В частности, особенностью усталостных повреждений сварных соединений является существенное замедление скорости распространения развития сквозной трещины в глубину материала при выходе ее вершины из зоны концентрации напряжений [3].

Следует отметить, что в литературных источниках приводятся решения с использованием метода сечений в основном только для сквозных трещин, но в них не рассматривается распределение КИН по фронту трещины и в ее вершинах, которое имеет место для несквозных трещин.

Целью настоящей работы стало получение адекватных результатов компьютерного моделирования развития полуэллиптической краевой продольной трещины, расположенной на внешней поверхности цилиндра, вычисление КИН по ее фронту, исследование влияния на КИН угла наклона фронта трещины относительно оси цилиндра и условий нагружения, а также анализ и обобщение полученных результатов численного исследования. В основе алгоритма лежит метод сечений, реализованный в программном комплексе ANSYS 2019 R1.

1. Постановка задачи и методика эксперимента. Расчёты в механике разрушения – это сложные многоступенчатые прочностные расчёты, которые могут учитывать геометрическую нелинейность, пластичность, температурную нагрузку и нагрузку, приложенную к поверхности трещины.

В качестве объекта исследования рассматривается (рис. 1) полый цилиндр со следующими геометрическими и физико-механическими характеристиками [4]: длина цилиндра $6,е-002$ м, больший радиус $3,е-002$ м, меньший радиус $2,е-002$ м; материал – сталь марки 08пс: модуль упругости $2,03 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент

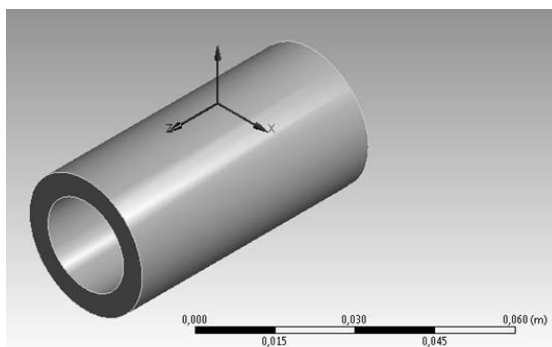


Рис. 1. 3D-геометрия полого цилиндра

Пуассона 0,3; предел текучести 175 МПа, плотность материала 7850 кг/м³. Нагружение осуществляется путем приложения давления $P=180$ Па к внутренней поверхности полого цилиндра.

Задача решается с использованием программного комплекса ANSYS 2019 R1 и возможности автоматического создания полуэллиптической трещины (*Semi-Elliptical Crack*) в любом месте модели. Для задания трещины достаточно указать её положение и ориентацию. Ориентацию трещины определяет введенная вспомогательная система координат, ориентированная таким образом, что ось X перпендикулярна фронту трещины. Большая и меньшая полуоси эллипса определяются следующим образом: $a = 0,006$ м, $c = 0,002$ м. Фронт трещины в данном расчете моделируется параллельно оси цилиндра, перпендикулярно направлению нагружения модели (рис. 2).

Разбиение геометрической модели конечно-элементной сеткой выполняется модулем *Mesh* дерева проекта для получения дальнейшего численного решения. Создается трехмерная модель цилиндрического образца с глобальной сеткой элементов и модель области трещины с локальной сеткой тетраэдрических элементов. Размер элементов глобальной сетки составляет 4-5 мм, локальной 0,2 мм. Конечно-элементная разбивка в окрестности трещины показана на рисунке 2. В настройках элемента *Semi-Elliptical Crack* указывается 6 контуров интегрирования. Следует отметить, что использование здесь регулярной радиальной сетки в объеме, окружающем фронт трещины, обеспечивает высокую точность вычисления энергетических и упругих характеристик в окрестности границы дефекта.

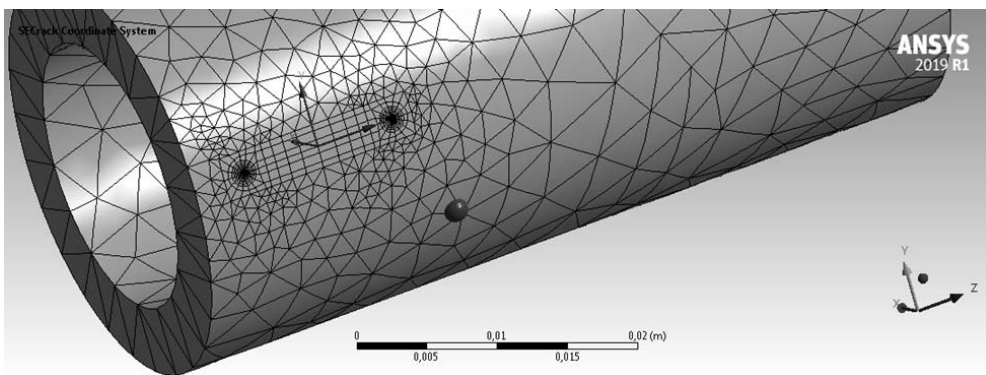


Рис. 2. Конечно-элементная сетка модели полого цилиндра в области трещины

Внешнее воздействие на конструкцию задается следующим образом. Закрепление предполагается на торцевой поверхности цилиндра, расположенной дальше от трещины. В данной задаче рассмотрим поверхностно распределенное давление по внутренней стенке полого цилиндра («*Pressure*», *Applied By* «*Surface Effect*»), величиной 180 Па.

В выводимые результаты включаются: общие перемещения (Total Deformation), эквивалентные напряжения (Equivalent Stress), коэффициент интенсивно-

сти напряжений stress-intensity factors, SIFs (K_I , K_{II} , K_{III}). Моды K_I , K_{II} , K_{III} соответствуют напряжениям, вызывающим раскрытие, поворот и кручение трещины соответственно. Число итераций указывается равным 20 [8].

Основным параметром, описывающим механизм разрушения и режим раскрытия трещины при указанном нагружении для данной модели, является K_I . Величина K_{II} – коэффициента интенсивности напряжений при поперечном сдвиге поверхностей трещины, является вторичной для данной модели, однако может стать определяющей для трещины при возникновении деформации поперечного сдвига (например, несимметричности граничных условий и нагрузок, изменении ориентации трещины относительно оси цилиндра).

2. Анализ численных результатов. Анализ полученных результатов относится к случаю трещины, фронт которой параллелен оси цилиндра. Одним из основных результатов расчета НДС, проводимого с помощью МКЭ в модуле *Static Structural*, является получение эквивалентных напряжений (*Equivalent Stress*) узлов КЭ-модели. Для данной модели максимальное напряжение равно 3,18 МПа наблюдается в вершинах трещины и на линии ее фронта, а минимальное 0,33 МПа на боковой поверхности цилиндра (рис. 3).

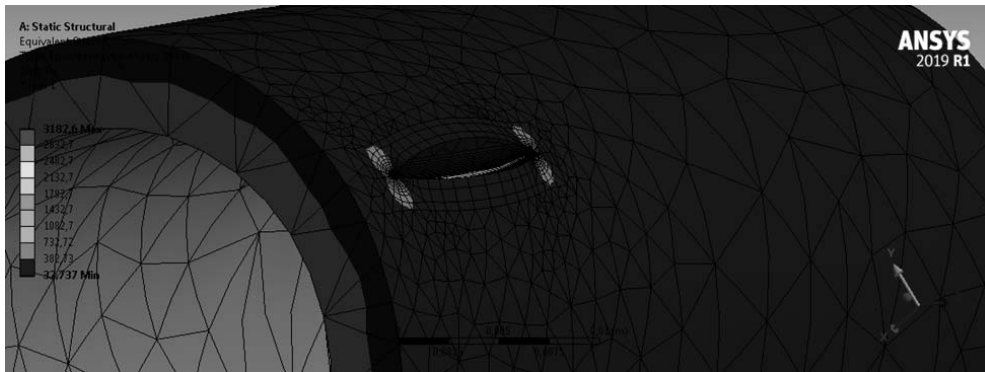


Рис. 3. Результаты расчета эквивалентных напряжений

Для построения конечноэлементных моделей конструкции с повреждениями, включая трещину, существуют несколько подходов. Первый заключается в существенном сгущении сетки элементов в вершине трещины, что очень усложняет моделирование сингулярного характера напряжений. Второй подход заключается в использовании специальных элементов, содержащих трещину. Они требуют предварительного знания коэффициентов интенсивности напряжений, которые обычно заранее неизвестны. Кроме того, характер изменения напряжений является заданным и не существует теоретического обоснования сходимости результатов.

Как наиболее корректный для решения данной задачи, в данном исследовании был выбран подход, заключающийся в применении специальных элементов, которые моделируют сингулярность напряжений и деформаций в вершине трещины (сингулярные элементы). Эти элементы отображают особенности НДС в

окрестности вершины трещины [9].

В механике разрушения мерой напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины является КИН. При использовании МКЭ для получения КИН можно применять, по существу, два способа. Один из них является прямым методом, согласно которому величина КИН определяется по полю напряжений или перемещений. Данный метод используется в данном расчете. Подробно он рассмотрен в работе [10]. Во втором методе величина КИН определяется косвенно – через соотношения с другими величинами, такими, как податливость, упругая энергия или J -интеграл.

В результате вычислений получены значения КИН по контуру поверхностной трещины. На рисунке 4 представлены результаты распределения КИН (K_I) по

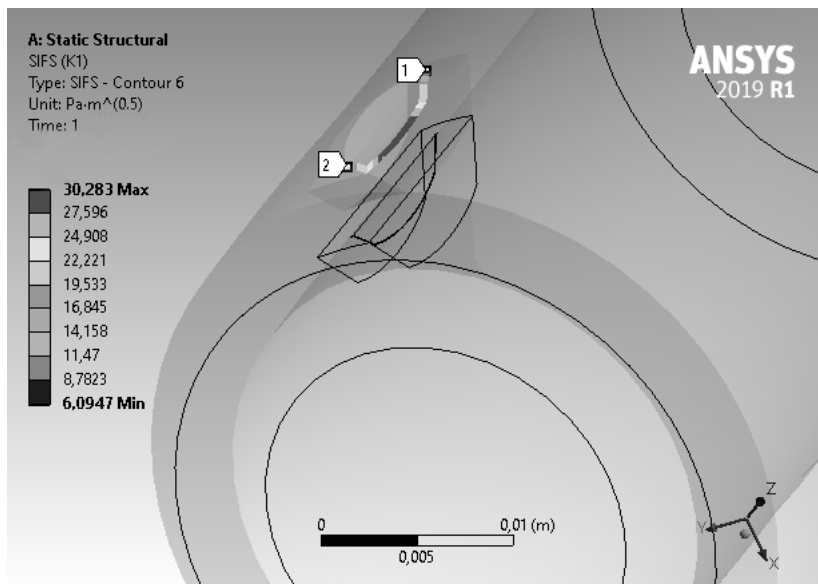


Рис. 4. Расчет КИН (K_I), МПа·м^{1/2} вдоль контура фронта трещины

линии фронта поверхностной трещины от метки (1) к метке (2). На данном рисунке сплошной линией обозначены контуры недеформированного цилиндра и области трещины. Под влиянием давления, приложенного к внутренней поверхности цилиндра, происходит деформация модели. Область раскрытой трещины оказывается выше своего исходного положения. Ее фронт представляет собой полуэллипс, обозначенный на рисунке метками (1)-(2).

Так, для эллиптической трещины КИН первого рода (K_I) достигает максимума в наиболее удаленной по фронту точке, средней точке фронта трещины, а при выходе на поверхность K_I уменьшается. Наибольшее значение K_I – 30,283 МПа·м^{1/2}. Наиболее напряженные элементы располагаются посередине берегов начального надреза; от них начинается распространение трещины. В финальной стадии раскрытия трещины её фронт становится близким к полуэллиптическому (рис. 4), а распределение наибольших главных напряжений –

более равномерным по контуру фронта.

Однако, как показывает практика, достаточно часто в моделях могут образовываться наклонные трещины, которые могут привести к разрушению по наклонным сечениям. Поэтому данный фактор необходимо также учитывать при анализе конструкционной прочности. Возникновение таких трещин как правило связано с главными растягивающими напряжениями, действующими по наклонным площадкам. Решение задачи о трещиностойкости модели по наклонным сечениям, которое было бы приемлемо в инженерной практике, остается актуальным вопросом. Поэтому представляет интерес задача распространения трещины при сложном смешанном нагружении, в котором присутствуют сдвиговые напряжения, вызывающие не только поворот (плоский сдвиг), но и кручение трещины (антиплоский сдвиг). Переход от двумерных задач к трехмерным требует учета только одной дополнительной моды КИН, что, однако, существенно усложняет задачу. В трехмерном случае поверхность трещины описывается не только углом поворота, как в плоском случае, но и углом кручения.

Поэтому в ходе исследований был выполнен численный эксперимент по оценке влияния угла наклона трещины на силовые параметры разрушения. Проведена серия вычислений, где угол наклона фронта трещины относительно оси цилиндра от изменяется от 0° до 90° . Так, на рисунке 5 представлена конечно-элементная сетка модели полого цилиндра, угол наклона фронта трещины составляет 30° с осью цилиндра.

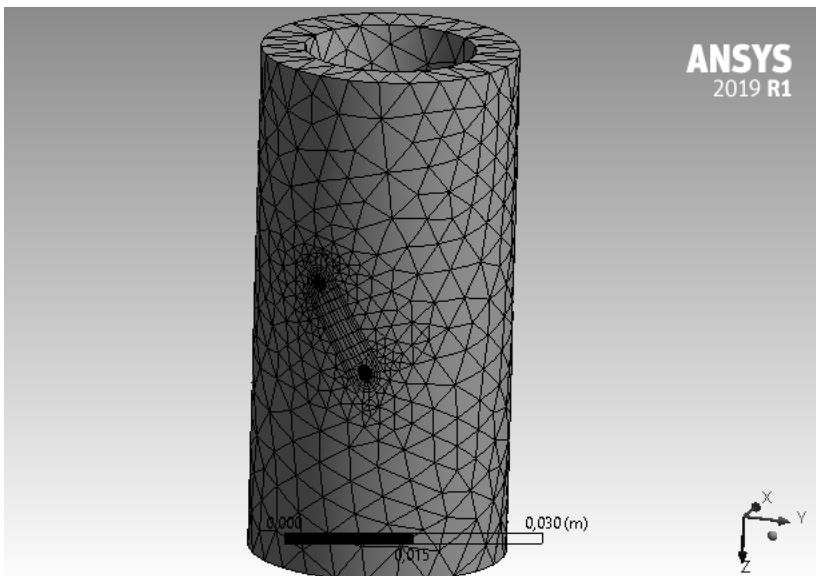


Рис. 5. Конечно-элементная сетка модели полого цилиндра, угол наклона фронта трещины 30°

На рисунке 6 изображено изменение значения K_I в выбранных точках фронта трещины по 6-му контуру в зависимости от значения угла наклона трещины. Рассматривается точка, соответствующая одной из вершин трещины (точка А),

точка, отстоящая от нее на j длины линии фронта (точка В) и точка, отстоящая на S длины (точка С). В приведенных точках фронта с ростом угла наклона отмечается рост значений K_I . Для точки, определяющей максимальную глуби-

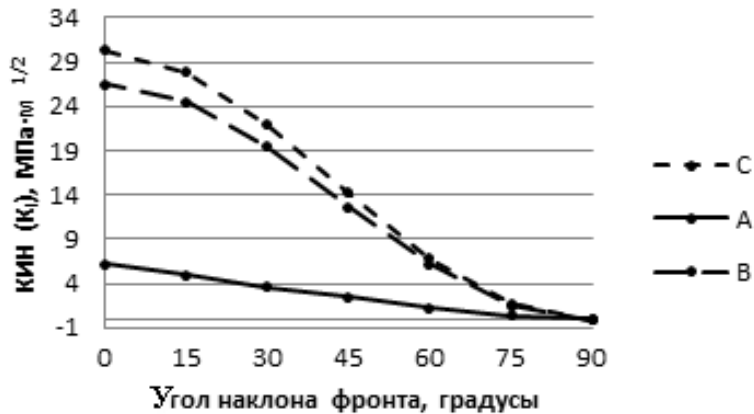


Рис. 6. Изменение значения K_I в выбранных точках фронта трещины по 6-му контуру

ну трещины, наблюдается увеличение значения K_I в 30 раз. Данные результаты закономерны, т.к. основным параметром, описывающим механизм разрушения и режим раскрытия трещины при указанном нагружении для данной модели, является коэффициент интенсивности напряжений K_I .

На рисунке 7 изображено изменение значения K_{II} в выбранных аналогичным



Рис. 7. Изменение значения K_{II} в выбранных точках фронта трещины по 6-му контуру

образом точках фронта трещины по 6-му контуру в зависимости от значения угла наклона трещины. Поскольку коэффициент интенсивности напряжений K_{II} возникает при поперечном сдвиге поверхностей трещины, его минимальное зна-

чение наблюдается в случае, когда фронт трещины параллелен оси цилиндра, а максимальное – для точки, отстоящей от вершины на $1/4$ длины линии фронта и случая, когда угол между фронтом и осью составляет 45° .

Величина прикладываемой нагрузки оказывает значительное влияние на результаты расчета. Так, на рисунке 8 отображено изменение значения K_I в выбранных точках фронта трещины по 6-му контуру при различных значениях прикладываемой нагрузки. Нагружение осуществляется путем приложения давления $P_1=180$ Па, $P_2=400$ Па, $P_3=600$ Па к внутренней поверхности полого цилиндра. Во всех случаях очевиден рост значений K_I , причем тем сильнее, чем ближе к центру фронта трещины расположена точка. Для случая, когда угол между фронтом трещины и осью составляет 90° , K_I равен нулю.

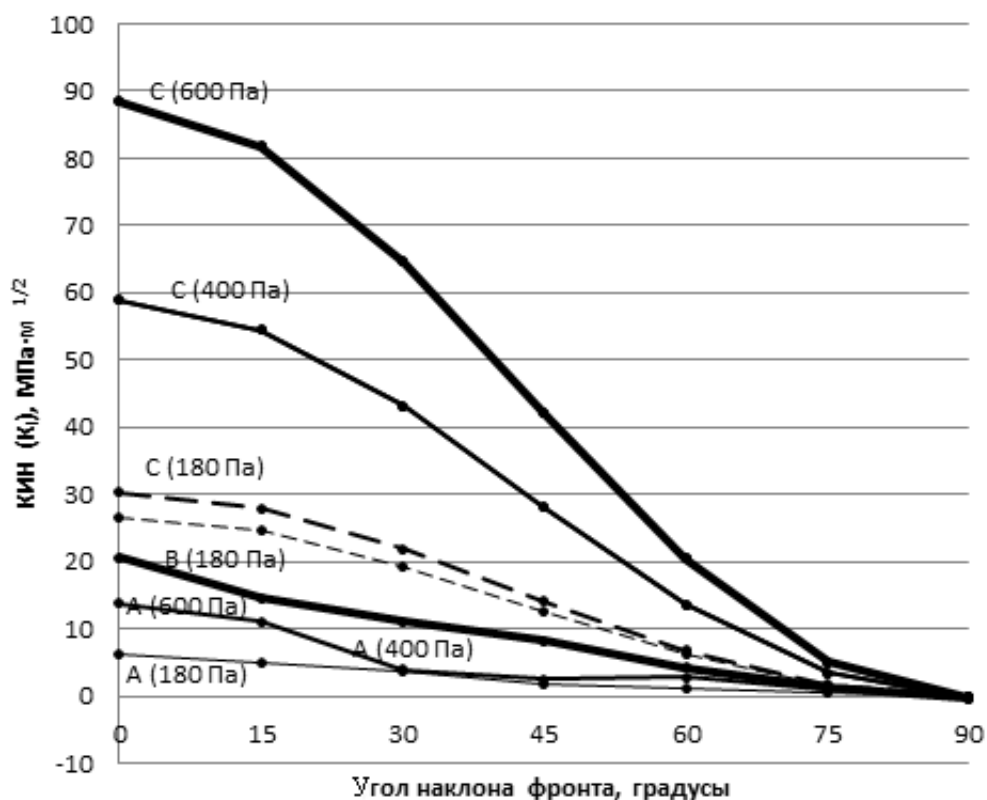


Рис. 8. Изменение значения K_I в выбранных точках фронта трещины по 6-му контуру при различных значениях прикладываемой нагрузки

Выводы. Развитие техники создает условия для совершенствования методов расчета и проектирования на заданный ресурс, методов оценки технического состояния и ресурса в условиях эксплуатации конструкций, деталей машин, подвергающихся действию интенсивных переменных нагрузок. Это объясняется, в первую очередь, появлением прикладных компьютерных программ, с помощью

которых можно моделировать достаточно сложные объекты при любых видах нагружения. Метод конечных элементов дает возможность вычисления коэффициента интенсивности напряжений, J-интеграла или раскрытия вершины трещины. Однако для прямого определения этих величин требуется моделирование трещины и весьма детальный анализ локального напряженного состояния в области ее вершины. Это весьма неудобно при проектировании крупных конструкций, так как значительно усложняет и утяжеляет модель зонами мелкой сетки. Поэтому во многих случаях, получив общее напряженное состояние конструкции, рассчитывают критерии механики разрушения, используя известные решения для коэффициента интенсивности напряжений (КИН).

В данной работе с помощью метода конечных элементов в программе ANSYS Workbench реализовано моделирование полуэллиптической трещины в полем толстостенном цилиндре. Задача решена в линейно-упругой постановке без учета пластических деформаций. Анализ напряжений в вершинах трещины и вдоль ее фронта был выполнен в информационном комплексе ANSYS. Зонами локальной концентрации напряжений стали области, прилегающие к вершинам трещины и линия ее фронта. В рамках линейно-упругой механики разрушения исследовано влияние угла наклона фронта трещины относительно оси цилиндра и величины нагружения в толстостенной модели цилиндра на коэффициент интенсивности напряжений K_I , который использовался в качестве критерия для оценки прочности. На основании проведенных расчетов можно сформулировать следующие выводы:

1. С ростом угла наклона фронта трещины относительно оси цилиндра значение K_I уменьшается, на промежутке (15° ; 75°) особенно быстро. При достижении значения 0° , т.е. когда фронт трещины параллелен оси цилиндра, $K_I = 0$.
2. Для данного вида нагружения модели, с ростом значения P , происходит рост значений K_I , причем, тем стремительней, чем ближе к центру фронта находится исследуемая точка. наибольшее значение КИН K_I наблюдается в точке, определяющей максимальную глубину трещины.
3. Минимальное значение коэффициента интенсивности напряжений K_{II} наблюдается в случае, когда фронт трещины параллелен оси цилиндра, а максимальное для точки, отстоящей от вершины на j длины линии фронта и случая, когда угол между фронтом и осью составляет 45° .

Представляет интерес дальнейшее исследование зависимости КИН от локализации трещины в цилиндре, от геометрических параметров цилиндра.

Результаты работы могут стать основой исследования параметров механики разрушения для сборных сварных конструкций цилиндрических сосудов высокого давления, а также в задачах, где необходим учет упругопластического поведения материала. На основе предложенного метода исследования могут быть выявлены дополнительные факторы, влияющие на рассматриваемые вопросы прочностных расчетов динамического НДС автомобильных деталей. Данную методику целесообразно использовать на стадии проектирования конструкции при применении методов механики разрушения для проверки ее прочности и

долговечности с учетом влияния возможных трещин или трещиноподобных дефектов.

В нелинейных задачах механики разрушения рассматриваются произвольно ориентированные наклонные разветвляющиеся трещины, сочетающие в себе сразу несколько типов деформации и, следовательно, для одной модели иногда невозможно аналитически вывести формулы для расчёта коэффициентов интенсивности, с помощью которых и определяется прочность и предел стойкости конструкции. Поэтому перспективным направлением исследования является изучение влияния на распространение трещины при нагрузке по I типу коэффициента K_{II} , а также влияние смешанной нагрузки по I и II типам, толщины пластины.

1. ANSYS Help – Справочная система ANSYS. URL: <https://www.ansys.com/academic/learning-resources>
2. Глушков С.В. Сравнение результатов решения задачи механики разрушения для трубы с несквозной трещиной / С.В. Глушков, Ю.В. Скворцов, С.Н. Перов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2014. – № 3. – С. 36–49.
3. Механика разрушения и прочность материалов / Справочное пособие под ред. В.В. Панасюка: В 4 т. – Киев: Наукова думка 1988-1990. – Т.2 Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – 620 с.
4. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2 т. / Пер. с англ. под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – Т. 2. – 1016 с.
5. Матвиенко Ю.Г. Модели и критерии механики разрушения / Ю.Г. Матвиенко. – М.: Физматлит, 2006. – 328 с.
6. Сапунов В.Т. Прочность поврежденных трубопроводов: течь и разрушение трубопроводов с трещинами / В.Т. Сапунов. – М.: Ленанд, 2019. – 187 с.
7. Бочектуева Е.Б. Анализ трещиностойкости прокатных валков стана кварто / Е.Б. Бочектуева, В.Е. Рогов // Омский научный вестник. – 2017. – № 6(156). – С. 12–14.
8. Гооге С.Ю. Применение метода плоских сечений для определения коэффициентов интенсивности напряжений / С.Ю. Гооге, И.С. Таболин, Е.И. Ширяев, Л.Б. Шрон // Вестник КузГТУ. – 2012. – № 1. – С. 137–140.
9. Морозов Е.М. Метод конечных элементов в механике разрушения / Е.М. Морозов, Г.П. Никишков. – М.: Наука, 1981. – 254 с.
10. Сиратори Т. Вычислительная механика разрушения / Т. Сиратори, Т. Миёси, Х. Мацусита. – М.: Изд-во Мир, 1986. – 334 с.

L.P. Vovk , E.S. Kisel

Modeling the propagation of a semi-elliptical longitudinal crack on the outer surface of a hollow cylinder.

The finite element method is used to solve the problem of the distribution of the stress intensity factor along the front of a semi-elliptical longitudinal crack located on the outer surface of a hollow cylinder, the inner surface of which is subjected to pressure. The calculation was performed in the ANSYS software package. The dependencies of the mechanical characteristics on the localization of the crack, in particular, the angle of its inclination relative to the cylinder axis and the loading scheme of the model, are obtained. The proposed information-system approach made it possible to obtain a fairly accurate stress distribution in the area of the initial notch on the cylinder surface

Распространение полуэллиптической продольной трещины на поверхности цилиндра

along the crack front and at its tips, taking into account the opening effect, and also to calculate the stress intensity factors for uniaxial tension along the front of a semi-elliptical edge longitudinal crack. Practical recommendations are proposed regarding the geometric parameters of the model and the loading scheme.

Keywords: *finite element method (FEM), elliptical crack, stress intensity factor, crack front, hollow cylinder.*

АДИ ГОУ ВПО “Донецкий национальный технический университет”, Горловка
lv777@list.ru
e.s.kisel@gmail.com

Получено 05.04.2021

УДК 539.3

©2021. С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина, О.Э. Ермаков

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСВЯЗНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

С использованием комплексных потенциалов плоской задачи теории упругости анизотропного тела и обобщенного метода наименьших квадратов дано решение задачи теории упругости для анизотропной полуплоскости с произвольными отверстиями и трещинами. На основе конформных отображений, разложений голоморфных функций в ряды Лорана и использования метода интегралов типа Коши получены общие представления комплексных потенциалов, а затем из граничных условий на контурах отверстий и трещин обобщенным методом наименьших квадратов задача сведена к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов рядов Лорана. Для полуплоскости с одним отверстием или трещиной описаны результаты численных исследований с установлением закономерностей влияния на напряженное состояние полуплоскости геометрических характеристик отверстия и трещины, а также физико-механических свойств материала полуплоскости.

Ключевые слова: полуплоскость, отверстия и трещины, комплексные потенциалы, интегралы типа Коши, обобщенный метод наименьших квадратов.

Введение. В различных областях современной науки и техники широкое распространение в качестве элементов конструкций получили тонкие пластинки из композиционных материалов с отверстиями и трещинами, вблизи которых в процессе эксплуатации конструкций могут возникать высокие концентрации напряжений, приводящие к их разрушению. Особенно большие напряжения возникают в случаях, когда отверстия и трещины находятся вблизи внешнего прямолинейного края пластинки, которую можно рассматривать как полуплоскость с отверстиями. Поэтому актуальны вопросы разработки эффективных методов определения напряженного состояния полуплоскости с отверстиями и трещинами.

Для изотропной полуплоскости этот вопрос рассматривался многими авторами. При этом для полуплоскости с внутренними отверстиями использовались методы комплексных потенциалов [1–3] и сингулярных интегральных уравнений [4]. Для решения задач в случае полуплоскости с внутренними трещинами широкое распространение получили методы сингулярных интегральных уравнений [5, 6]. Если же полуплоскость имеет краевые трещины, то использовались методы конформных отображений [7, 8].

В случае многосвязной анизотропной полуплоскости широкое применение для решения задач получили комплексные потенциалы С.Г. Лехницкого [9]. В работах [10, 11] из граничных условий на незагруженной прямолинейной границе методами интегралов типа Коши были получены общие представления комплексных потенциалов, точно удовлетворяющие граничным условиям на этой

границе, а затем для определения неизвестных коэффициентов рядов Лорана из граничных условий на контурах отверстий методом рядов получены квазирегулярные системы линейных алгебраических уравнений. Но использование метода рядов не позволяло получать результаты достаточной степени точности при весьма близких расстояниях между прямолинейной границей и контурами отверстий, между контурами отверстий, а для случаев, когда в полуплоскости имеются трещины или отверстия или трещины выходят на прямолинейную границу или пересекаются между собой, решение задач удовлетворением граничным условиям на контурах отверстий методом рядов невозможно. Для решения задач в этих случаях в работах [12, 13] предложен и использован дискретный метод наименьших квадратов, когда составлялся функционал невязок граничных значений комбинаций комплексных потенциалов и известных значений правых частей граничных условий и находился минимум этого функционала. Это приводило к системам линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений комплексных потенциалов в ряды Лорана. Такой подход позволял рассматривать случаи любых конфигураций и расположений контуров отверстий в пластинке и полуплоскости и давал возможность решать задачи для многосвязной полуплоскости с отверстиями и трещинами при любом их расположении, в том числе выходящими на прямолинейную границу отверстиями и трещинами [14]. В работе [15] при решении задач по определению напряженного состояния анизотропной пластинки впервые был применен обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК), что приводит рассматриваемые задачи к переопределенным системам линейных алгебраических уравнений, решаемых методами сингулярных разложений. Использование ОМНК для решения задачи о напряженном состоянии полуплоскости [9] значительно упрощает организацию вычислительных работ с сохранением преимуществ дискретного метода наименьших квадратов и улучшением точности получаемых результатов.

В данной статье с использованием метода интегралов типа Коши и ОМНК построены решения задач для растяжения многосвязной полуплоскости. Методом интегралов типа Коши получены общие представления комплексных потенциалов с неизвестными коэффициентами разложений функций в ряды Лорана, для нахождения которых с использованием ОМНК получена переопределенная система линейных алгебраических уравнений. Для полуплоскости с одним отверстием или трещиной описаны результаты численных исследований.

1. Постановка и решение задачи. Рассмотрим анизотропную пластинку, занимающую многосвязную нижнюю полуплоскости с прямолинейной границей L^+ и контурами отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$). Контуров отверстий могут быть произвольной конфигурации, но их можно аппроксимировать дугами эллипсов и берегами прямолинейных разрезов. Поэтому будем считать контуры отверстий эллиптическими или, как частный случай, когда одна из полуосей равна нулю, прямолинейными разрезами. Исходя из этого, под областью S будем понимать полуплоскость, ограниченную прямолинейной границей L^+ и контурами

эллиптических отверстий L_l с полуосями a_l, b_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) (рис. 1). Выберем

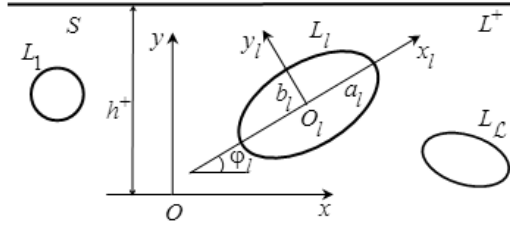


Рис. 1.

прямоугольную систему координат Oxy с началом в произвольной точке полуплоскости, на расстоянии h^+ от границы и осью Ox , параллельной прямолинейной границе, и локальные системы координат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах соответствующих эллипсов и направлениями осей Ox_l вдоль полуосей a_l . Тогда параметрические уравнения эллипсов L_l в локальных системах координат $O_l x_l y_l$ имеют вид

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (1)$$

а в основной системе координат Oxy будут такими:

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \end{aligned} \quad (2)$$

где θ – угловая переменная параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π ; x_{0l}, y_{0l} – координаты начала локальной системы координат $O_l x_l y_l$ в основной системе координат Oxy ; φ_l – угол между направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки.

Будем считать, что прямолинейная граница L^+ не загружена, контуры отверстий L_l загружены распределенными усилиями, главный вектор которых равен нулю на каждом из них. На бесконечности полуплоскость находится под действием растягивающих усилий $\sigma_x^\infty = p$, а напряжения $\sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$ и угол поворота ω_3^∞ равны нулю.

Определение напряженного состояния рассматриваемой полуплоскости при использовании комплексных потенциалов сводится к нахождению функций $\Phi_k(z_k)$ обобщенных комплексных переменных [16]

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (3)$$

где μ_k – корни характеристического уравнения

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0, \quad (4)$$

a_{ij} – коэффициенты деформаций, из граничных условий на контурах L_l

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{ikl} \Phi_k(t_k) = f_{il}(t) \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (5)$$

в которых

$$g_{1kl} = 1, \quad g_{2kl} = -\mu_k,$$

$$f_{1l}(t) = - \int_0^s Y_{ln} ds + c_{1l}, \quad f_{2l}(t) = \int_0^s X_{ln} ds + c_{2l};$$

X_{ln}, Y_{ln} – проекции на оси основной системы координат внешних усилий на контуре L_l ; c_{il} – вещественные постоянные.

Функции $\Phi_k(z_k)$ определены в нижних полуплоскостях S_k , получаемых из заданной полуплоскости S аффинными преобразованиями (3) и ограниченных контурами L_k^+ и L_{kl} , соответствующими контурам L^+ и L_l при этих преобразованиях. Исходя из общих представлений комплексных потенциалов для многосвязной области [13], эти функции после конформных отображений внешностей единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности контуров L_{kl} запишем в виде

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \Phi_{k0}(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}, \quad (6)$$

в котором Γ_k – постоянные, определяемые из решения системы

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_k = \left(0, 0, p, \frac{a_{16}}{2a_{22}} p \right); \quad (7)$$

$\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных нижних полуплоскостях S_k , получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями (3); a_{kln} – неизвестные коэффициенты рядов; ζ_{kl} – переменные, определяемые из конформных отображений [13]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right) \quad (8)$$

внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} областей S_k ;

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \quad (9)$$

$$m_{kl} = \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}.$$

Исходя из (5), граничные условия на L^+ запишем так:

$$\Phi_k(t_k) + \bar{r}_k \overline{\Phi_k(t_k)} + \bar{s}_{k+1} \overline{\Phi_{k+1}(t_{k+1})} = 0, \quad (10)$$

где

$$\bar{r}_k = \frac{\bar{\mu}_k - \mu_{k+1}}{\mu_k - \mu_{k+1}}, \quad \bar{s}_{k+1} = \frac{\bar{\mu}_{k+1} - \mu_{k+1}}{\mu_k - \mu_{k+1}}, \quad (11)$$

$k = \overline{1, 2}$ – индекс, причем значение индекса $k+1$ при $k = 2$ формально полагается равным 1.

Для точек прямолинейной границы L^+ имеем

$$\begin{aligned} x &= t, \quad y = h^+, \quad z = x + iy = t + ih^+, \quad z_k = t_k = x + \mu_k y = t + \mu_k h^+, \\ \overline{t_k} &= x + \overline{\mu_k} y = t + \overline{\mu_k} h^+ = t + \mu_k h^+ + (\overline{\mu_k} - \mu_k) h^+ = t_k + (\overline{\mu_k} - \mu_k) h^+, \\ \overline{t_{k+1}} &= x + \overline{\mu_{k+1}} y = t + \overline{\mu_{k+1}} h^+ = t + \mu_k h^+ + (\overline{\mu_{k+1}} - \mu_k) h^+ = t_k + (\overline{\mu_{k+1}} - \mu_k) h^+. \end{aligned}$$

Последние два соотношения запишем в виде

$$\overline{t_{k+j}} = t_k + (\overline{\mu_{k+j}} - \mu_k) h^+ \quad (j = 0, 1). \quad (12)$$

Подставив функции (6) в граничные условия (10) на прямолинейной границе L^+ , получим равенства

$$\begin{aligned} \Phi_{k0}(t_k) + \overline{r_k} \overline{\Phi}_{k0}(t_k + (\overline{\mu_k} - \mu_k) h^+) + s_{k+1}^- \overline{\Phi}_{k+1,0}(t_k + (\overline{\mu_{k+1}} - \mu_k) h^+) = \\ = - \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} [\Phi_{kl}(t_k) + \overline{r_k} \Phi_{kl}^+(t_k) + s_{k+1}^- \Phi_{k+1l}^+(t_k)]. \end{aligned} \quad (13)$$

При этом учтены равенства $\overline{r_k} \overline{\Gamma}_k + s_{k+1}^- \overline{\Gamma}_{k+1} = -\Gamma_k$, которые легко доказать, подставив в эти равенства значения \overline{r} и s_{k+1}^- и сгруппировав величины в соответствии с равенствами (7).

Для граничных значений сопряженных величин имеем

$$\begin{aligned} \overline{\Phi_{k+j0}(t_{k+j})} &= \overline{\Phi_{k+j0}}(t_k + (\overline{\mu_{k+j}} - \mu_k) h^+), \\ \overline{\Phi_{k+jl}(t_{k+j})} &= \overline{\Phi_{k+jl}}(t_k + (\overline{\mu_{k+j}} - \mu_k) h^+) = \\ &= \Phi_{k+jl}^+(t_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{a_{k+jln}}}{\left[\zeta_{k+jl}^+(t_k + (\overline{\mu_{k+j}} - \mu_k) h^+) \right]^n}. \end{aligned} \quad (14)$$

При этом переменные ζ_{k+jl}^+ получаются на основе перехода в конформных отображениях (8) к сопряженным величинам и замены граничных значений по формулам (12). На этой основе из равенств (8), переходя в них к сопряженным величинам, для граничных значений переменных найдем [16]

$$\overline{z_{k+j}} = t_k + (\overline{\mu_{k+j}} - \mu_k) h^+ = \overline{z_{k+j,l}} + \overline{R_{k+j,l}} \left(\zeta_{k+j,l}^+ + \frac{\overline{m_{k+j,l}}}{\zeta_{k+j,l}^+} \right) \quad (j = 0, 1). \quad (15)$$

Заменяя в этих соотношениях граничные значения t_k переменными z_k областей S_k , получаем зависимости

$$z_k = -(\overline{\mu_{k+j}} - \mu_k) h^+ + \overline{z_{k+j,l}} + \overline{R_{k+j,l}} \left(\zeta_{k+j,l}^+ + \frac{\overline{m_{k+j,l}}}{\zeta_{k+j,l}^+} \right) \quad (j = 0, 1), \quad (16)$$

в которых переменная $\bar{\zeta}$ для лучшего восприятия заменена на ζ^+ , что подчеркивает ее связь с формулируемыми условиями на границе L^+ .

Можно показать, что равенства (16) представляет из себя конформные отображения внешности единичных кругов $|\zeta_{k+jl}^+| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{k+jl}^+ верхней (относительно L^+) полуплоскости S_k^+ переменной z_k . Например, в случае ортотропной полуплоскости, когда комплексные параметры являются чисто мнимыми ($\mu_k = i \beta_k$), эллипсы L_{k+jl}^+ симметричны эллипсам L_{k+jl} полуплоскостей S_k , где заданы исходные комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$. Поэтому функции $\Phi_{k+jl}^+(z_k)$ являются функциями, голоморфными вне эллипсов L_{k+jl}^+ верхних полуплоскостей S_k^+ , а, следовательно, голоморфными и в нижних полуплоскостях S_k .

На основе вышесказанного заключаем, что функции $\Phi_{k0}(t_k)$, $\Phi_{kl}^+(t_k)$, $\Phi_{k+1l}^+(t_k)$ являются граничными значениями соответствующих функций (14), голоморфных в нижних полуплоскостях S_k . Поэтому при умножении обеих частей равенств (13) на ядро Коши и вычислении интегралов типа Коши от этих граничных значений, получаем значения этих функций в нижних полуплоскостях S_k , с противоположным знаком. В то же время функции $\overline{\Phi_{k0}}(t_k + (\bar{\mu}_k - \mu_k)h^+)$, $\overline{\Phi_{k+1,0}}(t_k + (\bar{\mu}_{k+1} - \mu_k)h^+)$, $\Phi_{kl}(t_k)$ являются граничными значениями функций, голоморфных в верхних полуплоскостях S_k^+ , а в нижних полуплоскостях S_k , ввиду наличия особенностей, интегралы типа Коши от них равны нулю. Учитывая указанное и применяя к граничным условиям (13) метод интегралов типа Коши, получаем

$$\Phi_{k0}(z_k) = - \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} [\bar{r}_k \Phi_{kl}^+(z_k) + \bar{s}_{k+1} \Phi_{k+1l}^+(z_k)],$$

с учетом чего из (6) найдем окончательные выражения для комплексных потенциалов

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_k) = & \Gamma_k z_k + \\ & + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_{kln}(z_k) a_{kln} - \bar{r}_k \varphi_{kln}^+(z_k) \bar{a}_{kln} - \bar{s}_{k+1} \varphi_{k+1ln}^+(z_k) \bar{a}_{k+1ln}), \end{aligned} \quad (17)$$

в которых

$$\varphi_{kln} = \frac{1}{\zeta_{kl}^n}, \quad \varphi_{k+jln}^+ = \frac{1}{(\zeta_{k+jl}^+)^n} \quad (j = 0, 1). \quad (18)$$

Функции (17) точно удовлетворяют граничным условиям на прямолинейной границе L^+ . Граничные же условия на контурах отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) будем использовать для определения неизвестных постоянных a_{kln} ($k = 1, 2$; $l = \overline{1, \mathcal{L}}$, $n = 1, 2, \dots$). Для многосвязных областей эти условия удобнее использовать в дифференциальной форме, в которой они не содержат постоянных

слагаемых c_{il} , входящих в граничные условия. Следовательно, нужно найти производные комплексных потенциалов. Имеем

$$\begin{aligned} \Phi'_k(z_k) = & \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi'_{kln}(z_k) a_{kln} - \\ & - \bar{r}_k \varphi'_{kln}(z_k) \bar{a}_{kln} - \bar{s}_{k+1} \varphi'_{k+1ln}(z_k) \bar{a}_{k+1ln}], \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi'_{kln}(z_k) &= -\frac{n}{R_{kl} \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, \\ \varphi'_{kln}(z_k) &= -\frac{n}{\bar{R}_{kl} (\zeta_{k+jl}^+)^{n-1} \left((\zeta_{k+jl}^+)^2 - \bar{m}_{kl} \right)}, \\ \varphi'_{k+jln}(z_k) &= -\frac{n}{\bar{R}_{kl} (\zeta_{k+jl}^+)^{n-1} \left((\zeta_{k+jl}^+)^2 - \bar{m}_{kl} \right)} \quad (j = 0, 1). \end{aligned} \quad (20)$$

Граничным условиям (5) на контурах отверстий в дифференциальной форме будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [17, 18]. Для этого выберем на каждом из контуров L_p области S систему точек $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$ ($p = \overline{1, \mathcal{L}}$, $m = \overline{1, M_p}$), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (19). Тогда для определения неизвестных постоянных a_{kln} получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{kpi} \delta_{k,s} \left[\varphi'_{kln}(t_{kpm}) a_{kln} - \bar{r}_k \varphi'_{kln}(t_{kpm}) \bar{a}_{kln} - \right. \\ \left. - \bar{s}_{k+1} \varphi'_{k+1ln}(t_{kpm}) \bar{a}_{k+1ln} \right] = \frac{df_{pi}(t)}{ds} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \Gamma_k \\ (p = \overline{1, \mathcal{L}}; \quad m = \overline{1, M_p}; \quad i = \overline{1, 2}). \end{aligned} \quad (21)$$

После нахождения решений системы (21) методом сингулярных разложений [18, 19] постоянные a_{kln} , а, следовательно, и функции $\Phi'_k(z_k)$, будут известными и по ним можно вычислять в любой точке пластинки основные напряжения

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k) \quad (22)$$

и напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2(nx) + \sigma_y \cos^2(ny) + 2\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \sigma_s &= \sigma_x \cos^2(ny) + \sigma_y \cos^2(nx) - 2\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \tau_{ns} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos(nx) \cos(ny) + \tau_{xy} (\cos^2(nx) - \cos^2(ny)), \end{aligned} \quad (23)$$

на произвольных площадках с нормалью n и касательной s . При этом, если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейный разрез-трещину, то для его концов можно вычислять и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН), используя формулы [20]

$$k_1^\pm = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 [\mu_k^2 \sin^2 \varphi_l + \cos^2 \varphi_l + 2\mu_k \sin \varphi_l \cos \varphi_l] M_{kl},$$

$$k_2^\pm = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 [(1 - \mu_k^2) \cos \varphi_l \sin \varphi_l - \mu_k (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l)] M_{kl},$$
(24)

где

$$M_{kl} = \pm \frac{1}{\sqrt{a_l}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n-1} n a_{kln},$$
(25)

верхний знак соответствует правому концу трещины в локальной системе координат $O_l x_l y_l$, нижний – левому концу.

2. Описание результатов численных исследований. Были проведены численные исследования распределения напряжений, а в случае трещин и значений КИН для их концов. При проведении расчетов количество членов в рядах (17) по n и количество точек M_p , выбираемых на каждом из контуров отверстий L_p при удовлетворении граничным условиям (21) увеличивались до тех пор, пока граничные условия на каждом из контуров не удовлетворялись с достаточной степенью точности (пока модуль абсолютной погрешности не превышал 10^{-2}). Для такого удовлетворения граничным условиям, как показали численные исследования, достаточно было в указанных рядах оставлять от 10 до 50 членов и на каждом контуре выбирать от 50 до 300 точек. Расчеты проводились для полуплоскости из изотропного материала (материал М1) [21] и из композита с высоким показателем анизотропии на эпоксидном связующем, армированного однонаправленными графитовыми волокнами (материал М3) [22]. Технические постоянные этих материалов приведены в таблице 1. Некоторые из полученных

Таблица 1. Технические постоянные некоторых материалов

Материал	$E_1, \cdot 10^4$ МПа	$E_2, \cdot 10^4$ МПа	$G_{12}, \cdot 10^4$ МПа	ν_{12}	ν_{21}
М1	7,10000	7,10005	2,84000	0,25000	0,25000
М3	18,88000	0,60000	0,27000	0,30000	0,00953

результатов описаны ниже в таблицах и на рисунках. Все величины приведены с точностью до интенсивности приложенных растягивающих усилий $\sigma_z^\infty = p$, как множителя.

В таблице 2 для растяжения полуплоскости с круговым отверстием L_1 радиуса a_1 (рис. 2) приведены значения нормальных напряжений в некоторых ее характерных точках в зависимости от отношения c/a_1 , где c – длина перемычки между контуром отверстия и границей полуплоскости. При этом в качестве

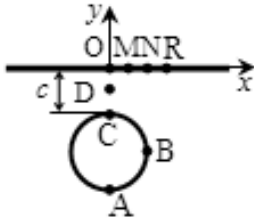


Рис. 2.

характерных были выбраны точки $A(0, -c - 2a_1)$, $B(a_1, -c - a_1)$, $C(0, -c)$, $D(0, -c/2)$, $O(0; h^+)$, $M(0, 5a_1; h^+)$, $N(a_1; h^+)$, $R(1, 5a_1; h^+)$. Для некоторых значений отношения c/a_1 , в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от оси Ox против часовой стрелки, на рисунке 3 изображены графики распределения нормальных напряжений σ_s вблизи контура отверстия на площадках, перпендикулярных контуру. Здесь и далее сплошные линии относятся к материалу М1, штриховые – к материалу М3.

Таблица 2. Значения напряжений в точках полуплоскости с круговым отверстием в зависимости от c/a_1

Материал	Точки	Напряжения	c/a_1				
			2	1	0.5	0.1	0.01
М1	A	σ_x	3.111	3.212	3.339	3.623	3.808
	B	σ_y	-1,127	-1,203	-1,203	-0,837	-0,370
	C	σ_x	3,259	3,722	4,629	9,213	18,648
	D	σ_x	1,243	1,569	2,101	4,512	17,098
	D	σ_y	0,187	0,216	0,193	0,103	-0,018
	O	σ_x	0,811	0,647	0,489	0,246	15,623
	M	σ_x	0,888	0,984	1,499	4,523	3,733
	N	σ_x	1,057	1,483	2,191	2,584	1,243
	R	σ_x	1,205	1,629	1,895	1,329	0,517
М3	A	σ_x	10,176	10,411	10,759	11,773	12,717
	B	σ_y	-0,196	-0,214	-0,232	-0,225	-0,129
	C	σ_x	10,313	10,932	12,296	20,788	46,113
	D	σ_x	1,211	1,507	2,076	5,488	31,667
	D	σ_y	0,035	0,048	0,055	0,067	-0,024
	O	σ_x	0,843	0,689	0,503	-0,206	24,185
	M	σ_x	0,887	0,875	1,100	5,217	9,629
	N	σ_x	0,988	1,217	1,885	5,238	4,435
	R	σ_x	1,086	1,432	2,123	3,895	2,588

Из данных таблицы 2 и рисунка 3 следует, что с приближением отверстия к границе полуплоскости значений напряжений в точках перемычки и вблизи контуров значительно растут, как вблизи контура отверстия, так и вблизи прямолинейной границы, за исключением точки прямолинейной границы $O(0; h^+)$, вблизи которой напряжения сначала уменьшаются, но при дальнейшем уменьшении отношения c/a_1 снова возрастают. Этот рост напряжений особенно значителен для анизотропной полуплоскости, когда значения напряжений в окрестности точек перемычки С и D в несколько десятков раз больше, чем в пластинке без учета прямолинейной границы.

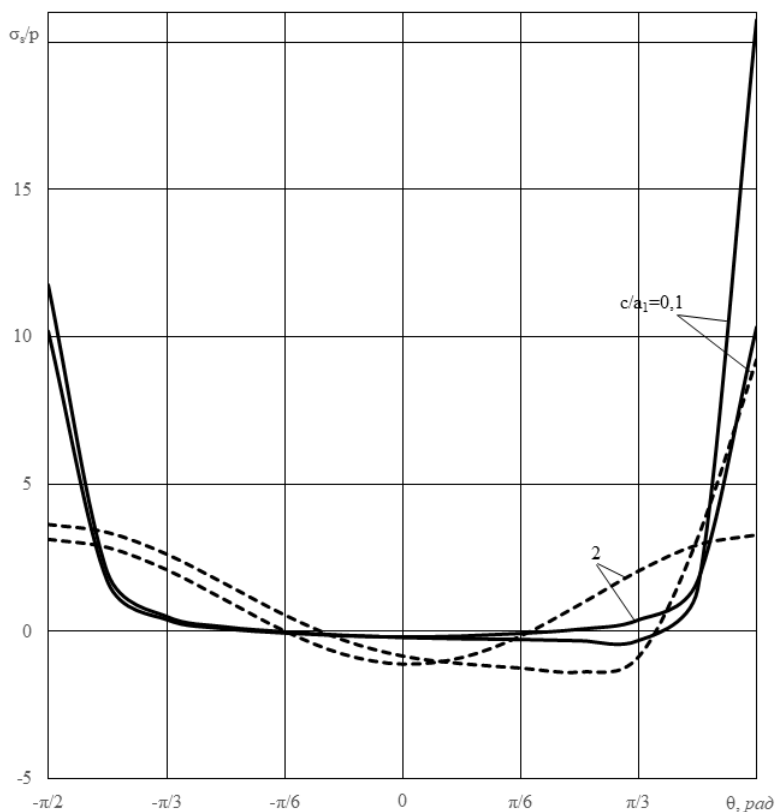


Рис. 3.

Исследованиями установлено, что в случае полуплоскости с эллиптическим отверстием при уменьшении значения отношения полуосей b_1/a_1 вблизи концов большой оси эллипса наблюдается рост значений напряжений. Если малая ось близка к нулю (отверстие переходит в прямолинейный разрез), то эти напряжения велики и в этих случаях нужно вычислять КИН, характеризующие уровень напряжений в окрестности концов трещины. При этом в остальных точках полуплоскости значения напряжений изменяется незначительно. Это следует из данных таблицы 3, где для случая полуплоскости с эллиптическим отверстием L_1 с углом $\varphi_1 = \pi/2$ (рис. 4) и отношения расстояния между прямолинейной границей и контуром отверстия $c/a_1 = 0,5$ для различных отношений полуосей b_1/a_1 приведены значения нормальных напряжений в $A(0; -c - 2a_1)$, $B(b_1; -c - a_1)$, $C(0; -c)$, $D(0; -c/2)$, $O(0; 0)$, $M(0, 5a_1; 0)$, $N(a_1; 0)$, $R(1, 5a_1; 0)$. Для некоторых отношений c/a_1 , в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от оси Ox против часовой стрелки, на рисунке 5 изображены графики распре-

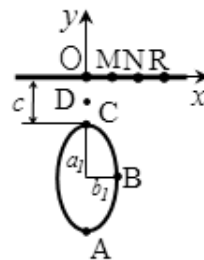


Рис. 4.

деления нормальных напряжений σ_s вблизи контура отверстия на площадках, перпендикулярных контуру. Как видно из таблицы 3 и рисунка 5, действительно, при уменьшении b_1/a_1 в точках А и С значения напряжений σ_y резко рас-

Таблица 3. Значения напряжений в точках полу плоскости с эллиптическим отверстием в зависимости от b_1/a_1

Материал	Точки	Величина	b_1/a_1				
			2	1	0.5	0.1	0.01
М1	A	σ_x	2,222	3,339	5,537	23,071	220,469
	B	σ_y	-1,242	-1,203	-1,159	-1,107	-1,095
	C	σ_x	3,569	4,629	6,773	25,706	242,268
	D	σ_x	-1,176	2,101	2,047	1,973	1,990
	D	σ_y	0,159	0,193	0,439	0,526	0,465
	O	σ_x	0,612	0,489	0,501	0,845	0,983
	M	σ_x	0,966	1,499	1,920	1,990	1,965
	N	σ_x	1,651	2,191	2,026	1,760	1,701
	R	σ_x	2,089	1,895	1,553	1,343	1,305
М3	A	σ_x	5,973	10,759	20,323	96,857	958
	B	σ_y	-0,258	-0,232	-0,216	-0,203	-0,200
	C	σ_x	7,386	12,296	22,354	104,228	1027,550
	D	σ_x	1,660	2,076	2,038	2,009	2,008
	D	σ_y	-0,066	0,055	0,089	0,098	0,088
	O	σ_x	0,531	0,503	0,577	0,876	0,987
	M	σ_x	0,764	1,100	1,469	1,655	1,674
	N	σ_x	1,308	1,885	1,969	1,911	1,893
	R	σ_x	1,879	2,123	2,003	1,896	1,874

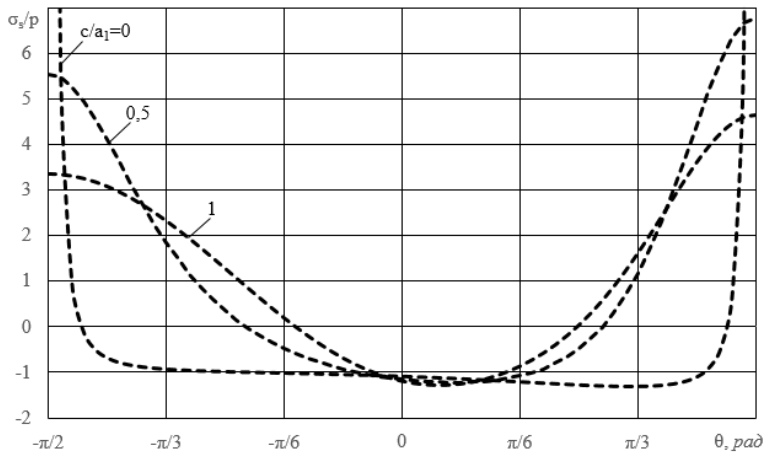


Рис. 5.

тут, тогда, как в остальных точках контура отверстия они уменьшаются. Если $b_1/a_1 \leq 10^{-3}$, то отверстие можно считать трещиной и для его концов считать КИН.

Для растяжения полуплоскости с вертикальной трещиной длины $2l$ (рис. 6) в зависимости от соотношения c/l , где c – длина перемычки между трещиной и прямолинейной границей, в таблице 4 даны значения КИН для вершин трещины и напряжений в характерных точках, в качестве которых выбирались точки $A(0; -c - 2l)$, $B(b_1; -c - l)$, $C(0; -c)$, $D(0; -c/2)$, $O(0; 0)$, $M(0, 5l; 0)$, $N(1; 0)$, $R(1, 5l; 0)$. Для полуплоскости из материала М1 на рисунке 7 изображены графики распределения напряжений σ_x около прямолинейной границы. Видно, что сближение трещины с прямолинейной границей приводит к росту напряжений вблизи перемычки и КИН для ближайшей к прямолинейной границе вершины трещины. При этом в остальных точках эти величины изменяются незначительно. Материал полуплоскости на значения величин влияет незначительно. Влияние трещины на напряженное состояние вблизи прямолинейной границы значительно только на отрезке, равном длине трещины. Вне этого отрезка вдоль границы напряжения такие же, как в сплошной полуплоскости.

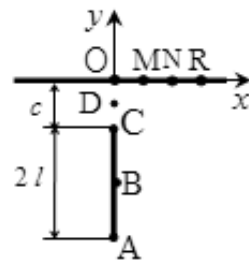


Рис. 6.

Таблица 4. Значения напряжений и КИН для концов трещины для растягиваемой полуплоскости с трещиной в зависимости от c/l

Материал	Точки	Величина	c/l					
			1	0.5	0.25	0.1	0.05	0.01
М1	A	k_1^-	1,054	1,097	1,146	1,211	1,254	1,330
	B	σ_y	-1,059	-1,094	-1,104	-1,058	-0,994	-0,870
	C	k_1^+	1,091	1,204	1,388	1,759	2,155	3,640
	D	σ_x	1,475	1,992	2,923	5,334	8,853	31,551
	D	σ_y	0,245	0,456	0,811	1,713	3,028	11,495
	O	σ_x	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,008
	M	σ_x	1,279	1,962	2,613	2,619	2,365	1,801
	N	σ_x	1,453	1,694	1,597	1,308	1,113	0,798
	R	σ_x	1,358	1,301	1,108	0,873	0,737	0,531
М3	A	k_1^-	1,036	1,066	1,104	1,156	1,192	1,258
	B	σ_y	-0,190	-0,199	-0,209	-0,213	-0,208	-0,184
	C	k_1^+	1,061	1,143	1,289	1,609	1,966	3,328
	D	σ_x	1,470	2,008	3,002	5,607	9,416	34,504
	D	σ_y	0,046	0,086	0,152	0,318	0,558	2,149
	O	σ_x	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,043
	M	σ_x	1,174	1,676	2,737	4,987	6,552	6,581
	N	σ_x	1,340	1,891	2,743	3,813	3,965	3,269
	R	σ_x	1,393	1,871	2,478	2,870	2,717	2,111

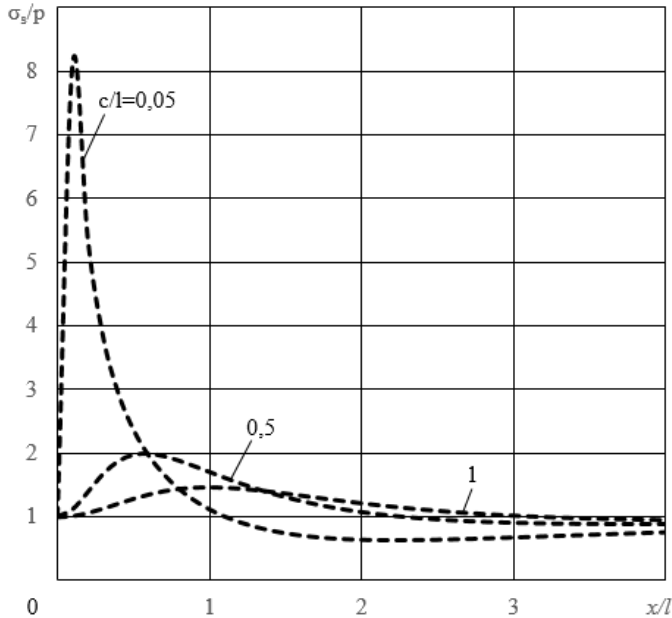


Рис. 7.

Выводы. Таким образом, с использованием комплексных потенциалов и обобщенного метода наименьших квадратов получено решение задачи о напряженном состоянии многосвязной анизотропной полуплоскости с отверстиями и трещинами. На основе обобщенного метода наименьших квадратов оно сведено к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов рядов Лорана. Для полуплоскости с одним отверстием или трещиной описаны результаты численных исследований с установлением механических закономерностей изменения напряженного состояния в зависимости от геометрических характеристик отверстия и трещины, а также физико-механических постоянных материала.

1. Шерман Д.И. Упругая весомая полуплоскость, ослабленная отверстием эллиптической формы, достаточно близко расположенным от ее границы / Д.И. Шерман // Проблемы механики сплошной среды. – М.: Изд-во АН СССР. – 1961. – С. 527–563.
2. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами / А.С. Космодамианский. – К.: Вища школа, 1975. – 227 с.
3. Калоеров С.А. Решение основных задач теории упругости для полуплоскости с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 1998. – Вып.28. – С. 157–171.
4. Саврук М.П. Напряжения около трещины в упругой полуплоскости / М.П. Саврук // Физ.-хим. механика материалов. – 1975. – Т. 11, № 5. – С. 59–64.
5. Панасюк В.В. О предельном равновесии полуплоскости с произвольно ориентированной трещиной, выходящей на ее границу / В.В. Панасюк, А.П. Дацышин // Физ.-хим. механика материалов. – 1971. – Т. 7, № 6. – С. 102–104.
6. Erdogan F.E. The numerical solutions of singular integral equations / F.E. Erdogan, G.D. Gup-

- ta, T.S. Cook // *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*-Leyden: Noordoff Intern. Publ., 1973. – P. 368–425.
7. *Hartranft R.J.* Alternating method applied to edge and surface crack problems / R.J. Hartranft, G.C. Sih // *Methods of analysis and solutions of crack problems*. Leyden: Noordhoff Intern. Publ. – 1973. – P. 179–238.
 8. *Irwin G.R.* Fracture / G.R. Irwin // *Handbuch der Physik*. – Berlin: Springer, 1958. – Vol. 6. – P. 551–590.
 9. *Калоеров С.А.* Напряженное состояние анизотропной полуплоскости с конечным числом эллиптических отверстий / С.А. Калоеров // *Прикладная механика*. – 1966. – Т. 2, № 10. – С. 75–82.
 10. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
 11. *Калоеров С.А.* Напряженное состояние анизотропной полуплоскости с эллиптическим отверстием, близко расположенным от границы / С.А. Калоеров, А.С. Космодамианский // *Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел*. – 1967. – Вып. 3. – С. 51–66.
 12. *Калоеров С.А.* Антиплоская деформация тел с трещиной и эллиптической полостью / С.А. Калоеров, Е.Ф. Косилова, В.А. Лапко. // *Прикладная механика*. – 1989. – Т. 25, № 7. – С. 92–99.
 13. *Калоеров С.А.* Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // *Теорет. и прикладная механика*. – 1995. – Вып. 25. – С. 45–56.
 14. *Калоеров С.А.* Концентрация напряжений в анизотропной полуплоскости с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина // *Теорет. и прикладная механика*. – 1997. – Вып. 27. – С. 63–72.
 15. *Калоеров С.А.* Термоупругое состояние кусочно-однородной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, Д.А. Добряк // *Вісн. Донец. ун-ту. Сер.А, Природ. науки*. – 2006. – Вип. 2. – С. 77–88.
 16. *Калоеров С.А.* Общие решения задач для многосвязных анизотропных полуплоскости и полосы / С.А. Калоеров // *Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки*. – 2018. – № 2. – С. 22–35.
 17. *Воеводин В.В.* Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
 18. *Форсайт Дж.* Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1969. – 280 с.
 19. *Drmac Z.* New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmac, K. Veselic. // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* – 2008. – Vol. 29, № 4. – P. 1322–1362.
 20. *Калоеров С.А.* Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных сред / С.А. Калоеров // *Прикладная механика*. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62 .
 21. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
 22. *Васильев В.В.* Композиционные материалы: Справочник / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др. Под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.

S.A. Kaloerov, E.V. Avdyushina, O.E. Ermakov

Study of the stress state of a multi-coupled anisotropic semi-plane by the generalized least squares method.

Using the complex potentials of the plane problem of the theory of elasticity of an anisotropic body and the generalized least squares method, the solution of the problem of the theory of elasticity

for an anisotropic half-plane with arbitrary holes and cracks is given. On the basis of conformal mappings, expansions of holomorphic functions in Laurent series, and the use of the Cauchy-type integral method, general representations of complex potentials are obtained, and then from the boundary conditions on the contours of holes and cracks by the generalized least squares method, the problem is reduced to solving an overdetermined system of linear algebraic equations with respect to the unknown coefficients of the Laurent series. For a half-plane with one hole or crack, the results of numerical studies are described with the establishment of patterns of influence on the stress state of the half-plane of the geometric characteristics of the hole and crack, as well as the physical and mechanical properties of the material of the half-plane.

Keywords: *half-plane, holes and cracks, complex potentials, Cauchy-type integrals, generalized least squares method.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
kaloerov@mail.ru

Получено 08.04.2021

УДК 539.3

©2021. Е.С. Глушанков

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ТОНКОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ

Решена задача об изгибе тонкой пьезоэлектрической полосы, нагруженной равномерно распределенным давлением (поперечной нагрузкой) по верхнему основанию. Задача сведена к решению системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Получено общее решение этой системы и построены решения некоторых физически реализуемых краевых задач. На основе полученных решений проведены численные исследования влияния свойств материала плиты и условий на краях полосы на электроупругое состояние полосы.

Ключевые слова: теория изгиба тонких плит, пьезоэлектрический материал, электроупругая полоса, система обыкновенных дифференциальных уравнений, функция прогиба, потенциал электрического поля.

Введение. В настоящее время широкое применение в качестве элементов конструкций получили тонкие плиты из пьезоэлектрических материалов. В процессе эксплуатации эти плиты подвергаются различным внешним воздействиям, которые могут приводить к их изгибу. Эти факторы следует учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. При решении задач изгиба пьезоэлектрических плит следует принимать гипотезы Кирхгофа-Лява [1], дополненные гипотезой на электрические компоненты состояния плиты [2]: *гипотеза прямой нормали* (прямолинейные отрезки, нормальные к срединной плоскости до деформации, при изгибе плиты остаются прямолинейными и нормальными к изогнутой срединной поверхности и не меняют своей длины); *гипотеза о нерастяжимости срединной плоскости*; *гипотеза о ненадавливании слоев* (влияние взаимодействия (давления) продольных слоев плиты на удлинения и сдвиги материальных волокон, лежащих в этих слоях, является достаточно малым и им можно пренебречь); *гипотеза о малом потоке электрической индукции по толщине* (поток электрической индукции по толщине является достаточно малым и им можно пренебречь).

К настоящему времени разработаны методы [2, 3] и решены некоторые задачи теории изгиба пьезоэлектрических плит [4].

В данной работе решена задача об изгибе полосы из пьезоэлектрического материала под действием равномерно распределенной нагрузки по верхнему основанию – даны общее решение задачи и частные решения физически реализуемых краевых задач. При этом основания полосы полагаются неэлектропроводными. В работе рассмотрены такие случаи механических граничных условий – один из краев полосы жестко зашпелен, а второй или жестко зашпелен, или свободно оперт, или свободен от внешних воздействий; оба края полосы свободно оперты. Рассмотрены такие случаи электрических граничных условий – оба края поло-

сы неэлектродированы; оба края полосы электродированы; один из краев имеет электродное покрытие, а другой не имеет его. Проведены численные исследования влияния свойств материала полосы и условий на ее краях на электроупругое состояние полосы.

1. Постановка задачи теории изгиба тонких пьезоэлектрических плит.

Рассмотрим тонкую плиту толщины $2h$, отнесенную к декартовой системе координат $Oxyz$ (рис. 1), изготовленную из пьезоэлектрического материала. Срединная плоскость плиты лежит в плоскости Oxy . В каждой точке плиты существует плоскость упругой симметрии, параллельная срединной плоскости. Основания плиты неэлектродированы, на верхнем основании действует нормальное давление $q(x, y)$. По краям плиты распределены механические и электрические воздействия.

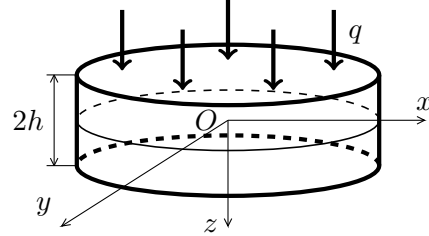


Рис. 1

Определение электроупругого состояния тонкой плиты сводится к решению системы дифференциальных уравнений относительно прогиба плиты $w(x, y)$ и плотности потенциала электрического поля $\varphi_0(x, y)$ [3]

$$\begin{aligned} L_{4S}w(x, y) + L_{3G}\varphi_0(x, y) &= -q(x, y), \\ L_{3G}w(x, y) + L_{2B}\varphi_0(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где L_{4S} , L_{3G} , L_{2B} — дифференциальные операторы, определяемые следующими выражениями:

$$L_{4S} = - \left(\tilde{S}_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4\tilde{S}_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2 \left(\tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{66} \right) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4\tilde{S}_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \tilde{S}_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right),$$

$$L_{3G} = \tilde{G}_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \left(\tilde{G}_{12} + \tilde{G}_{26} \right) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \tilde{G}_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3},$$

$$L_{2B} = \tilde{B}_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\tilde{B}_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \tilde{B}_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{2h^3}{3} S_{ij}, \quad \tilde{G}_{ij} = \frac{2h^3}{3} G_{ij}, \quad \tilde{B}_{ij} = \frac{2h^3}{3} B_{ij};$$

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} & G_{11} & G_{21} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} & G_{12} & G_{22} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} & G_{16} & G_{26} \\ -G_{11} & -G_{12} & -G_{16} & B_{11} & B_{12} \\ -G_{21} & -G_{22} & -G_{26} & B_{12} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix}^{-1};$$

s_{ij} — коэффициенты деформации материала плиты, g_{ij} — пьезоэлектрические модули материала, β_{ij} — коэффициенты диэлектрической проницаемости материала.

Систему уравнений (1) следует интегрировать при соответствующих граничных условиях. После этого прогиб плиты и плотность потенциала электрического поля становятся известными и по ним в любой точке плиты можно находить значения изгибающих моментов M_x и M_y , крутящего момента H_{xy} , перерезывающих сил N_x и N_y , моментов электрической индукции M_{D_x} и M_{D_y} [3]:

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_{-h}^h z \sigma_x dz = - \left(\tilde{S}_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{S}_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{S}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \tilde{G}_{11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \tilde{G}_{21} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right), \\
 M_y &= \int_{-h}^h z \sigma_y dz = - \left(\tilde{S}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{S}_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{S}_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \tilde{G}_{12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \tilde{G}_{22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right), \\
 H_{xy} &= \int_{-h}^h z \tau_{xy} dz = - \left(\tilde{S}_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{S}_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{S}_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \tilde{G}_{16} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \tilde{G}_{26} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right), \\
 N_x &= \int_{-h}^h \tau_{xz} dz = - \left(\tilde{S}_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3\tilde{S}_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (\tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \tilde{S}_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \right. \\
 &\quad \left. - \tilde{G}_{11} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - (\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16}) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - \tilde{G}_{26} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} \right), \quad (2) \\
 N_y &= \int_{-h}^h \tau_{yz} dz = - \left(\tilde{S}_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (\tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3\tilde{S}_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \tilde{S}_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \right. \\
 &\quad \left. - \tilde{G}_{16} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - (\tilde{G}_{12} + \tilde{G}_{26}) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - \tilde{G}_{22} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} \right), \\
 M_{D_x} &= \int_{-h}^h z D_x dz = \tilde{G}_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{G}_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{G}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \tilde{B}_{11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \tilde{B}_{12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \\
 M_{D_y} &= \int_{-h}^h z D_y dz = \tilde{G}_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{G}_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{G}_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \tilde{B}_{12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \tilde{B}_{22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}.
 \end{aligned}$$

Здесь σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} – компоненты тензора напряжений, D_x , D_y – компоненты вектора электрической индукции.

Тогда становится возможным определение моментов и перерезывающих сил на произвольной площадке с нормалью n и касательной s [2, 3]:

$$M_n = M_x \cos^2(nx) + M_y \cos^2(ny) - 2H_{xy} \cos(nx) \cos(ny),$$

$$\begin{aligned}
 M_s &= M_x \cos^2(ny) + M_y \cos^2(nx) + 2H_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\
 H_{ns} &= (M_y - M_x) \cos(nx) \cos(ny) + H_{xy} (\cos^2(nx) - \cos^2(ny)), \\
 N_n &= N_x \cos(nx) + N_y \cos(ny), \\
 N_s &= N_x \cos(ny) - N_y \cos(nx), \\
 M_{Dn} &= M_{Dx} \cos(nx) + M_{Dy} \cos(ny), \\
 M_{Ds} &= M_{Dx} \cos(ny) - M_{Dy} \cos(nx).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Механические граничные условия [1]. Если край плиты жестко защемлен, то механические граничные условия имеют вид

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0. \tag{4a}$$

Если край плиты свободно оперт, то механические граничные условия имеют вид

$$w = 0, \quad M_n = 0. \tag{4б}$$

Если край плиты свободен от механических усилий, то механические граничные условия имеют вид

$$M_n = 0, \quad N_n + \frac{\partial H_{ns}}{\partial s} = 0. \tag{4в}$$

Электрические граничные условия. Вид электрического граничного условия зависит от того, присутствует ли по краю плиты электродное покрытие. Если электродное покрытие по краю плиты отсутствует, то в этом случае момент электрической индукции по направлению нормали равен нулю [2, 5]:

$$M_{Dn} = 0. \tag{5a}$$

Если же электродное покрытие присутствует, то в этом случае по краю задано распределение потенциала электрического поля [5]:

$$\varphi_0 = \varphi_0^*. \tag{5б}$$

2. Постановка задачи об изгибе тонкой полосы. Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат $Oxyz$ тонкую полосу толщины $2h$ и ширины $2a$, изготовленную из пьезоэлектрического материала, ориентированную вдоль оси Oy (рис. 2). Срединная плоскость полосы лежит в плоскости Oxy . Основания полосы лишены электродного покрытия, по верхнему основанию действуют распределенные нормальные усилия $q(x)$. По краю полосы заданы равномерные (одинаковые вдоль края) механические и электрические условия.

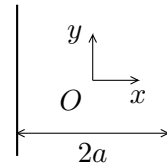


Рис. 2

В этом случае электроупругое состояние полосы не зависит от координаты y . Тогда в системе уравнений (1) все производные по переменной y равны нулю, и получится система обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функции прогиба $w(x)$ и функции плотности потенциала электрического поля $\varphi_0(x)$, которая примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{11} \frac{d^4 w}{dx^4} - \tilde{G}_{11} \frac{d^3 \varphi_0}{dx^3} &= q(x), \\ \tilde{G}_{11} \frac{d^3 w}{dx^3} + \tilde{B}_{11} \frac{d^2 \varphi_0}{dx^2} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Систему уравнений (6) следует решать при соответствующих граничных условиях. После этого прогиб плиты и плотность потенциала электрического поля становятся известными и по ним в любой точке плиты можно находить значения изгибающих моментов M_x , M_y , крутящего момента H_{xy} , перерезывающих сил N_x , N_y , моментов электрической индукции M_{Dx} , M_{Dy} :

$$\begin{aligned} M_x &= -\tilde{S}_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tilde{G}_{11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, & M_y &= -\tilde{S}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tilde{G}_{12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \\ H_{xy} &= -\tilde{S}_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tilde{G}_{16} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \\ N_x &= -\tilde{S}_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \tilde{G}_{11} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}, & N_y &= -\tilde{S}_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \tilde{G}_{16} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}, \\ M_{Dx} &= \tilde{G}_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tilde{B}_{11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, & M_{Dy} &= \tilde{G}_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tilde{B}_{12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}. \end{aligned} \quad (7)$$

После этого становится возможным определение моментов на произвольной площадке с нормалью n и касательной s по формулам (3).

Механические граничные условия. Если край полосы жестко защемлен, то механические граничные условия имеют вид

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (8a)$$

Если край полосы свободно оперт, то механические граничные условия имеют вид

$$w = 0, \quad M_x = 0. \quad (8б)$$

Если край полосы свободен от механических усилий, то механические граничные условия имеют вид

$$M_x = 0, \quad N_x = 0. \quad (8в)$$

Электрические граничные условия. Если край полосы не электродирован, то электрическое граничное условие имеет вид

$$D_x = 0. \quad (9a)$$

Если же край полосы электродирован и задано значение V плотности потенциала электрического поля, то электрическое граничное условие имеет вид

$$\varphi_0 = V. \quad (96)$$

3. Действие равномерной нагрузки по верхнему основанию полосы. Рассмотрим случай действия равномерной нагрузки по верхнему основанию полосы, т.е. $q(x) = q = const$.

Общее решение задачи. Тогда с использованием метода подстановки получим общее решение системы (6) в следующем виде:

$$w(x) = \frac{q}{24} \cdot \frac{\tilde{B}_{11}}{\tilde{S}_{11}\tilde{B}_{11} + \tilde{G}_{11}^2} x^4 + C_1\tilde{B}_{11}x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4,$$

$$\varphi_0(x) = -\frac{q}{6} \cdot \frac{\tilde{G}_{11}}{\tilde{S}_{11}\tilde{B}_{11} + \tilde{G}_{11}^2} x^3 - 3C_1\tilde{G}_{11}x^2 + C_5x + C_6,$$

где C_i ($i = \overline{1, 6}$) – неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий.

Решения краевых задач. Рассмотрим следующие случаи физически реализуемых электрических граничных условий.

1. *Оба края полосы неэлектродированы.* В этом случае на основе (9а) получаем следующие электрические граничные условия: $D_x(-a) = 0$, $D_x(a) = 0$.

а) Оба края полосы жестко заземлены. В этом случае на основе (8а) получаем следующие механические граничные условия: $w(-a) = \frac{dw}{dx}(-a) = 0$, $w(a) = \frac{dw}{dx}(a) = 0$. Решение задачи имеет вид

$$w(x) = \frac{q}{24} \cdot \frac{(a^2 - x^2)^2 \tilde{B}_{11}}{\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2},$$

$$\varphi_0(x) = \frac{q}{6} \cdot \frac{x(a^2 - x^2) \tilde{G}_{11}}{\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2}.$$

Тогда для моментов и перерезывающих сил получаются следующие формулы:

$$M_x = q \cdot \frac{a^2 - 3x^2}{6}, \quad M_y = q \cdot \frac{(a^2 - 3x^2) (\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{12} + \tilde{G}_{11}\tilde{G}_{12})}{6 (\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2)},$$

$$H_{xy} = q \cdot \frac{(a^2 - 3x^2) (\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11}\tilde{G}_{16})}{6 (\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2)},$$

$$N_x = -qx, \quad N_y = -q \cdot \frac{x (\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11}\tilde{G}_{16})}{\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2},$$

$$M_{Dx} = 0, \quad M_{Dy} = q \cdot \frac{(3x^2 - a^2) (\tilde{B}_{11} \tilde{G}_{21} - \tilde{G}_{11} \tilde{B}_{12})}{6 (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2)}.$$

б) Левый край полосы жестко защемлен, правый край свободно оперт. В этом случае на основе (8а), (8б) получаем следующие механические граничные условия: $w(-a) = \frac{dw}{dx}(-a) = 0$, $w(a) = M_x(a) = 0$. Решение задачи имеет вид

$$w(x) = \frac{q}{24} \cdot \frac{(x+a)^2 (x-a) (x-2a) \tilde{B}_{11}}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2},$$

$$\varphi_0(x) = -\frac{q}{24} \cdot \frac{x(4x^2 - 3ax - 6a^2) \tilde{G}_{11}}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2};$$

Тогда для моментов и перерезывающих сил получаются следующие формулы:

$$M_x = q \cdot \frac{(a+2x)(a-x)}{4}, \quad M_y = q \cdot \frac{(a+2x)(a-x) (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{12} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{12})}{4 (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2)},$$

$$H_{xy} = q \cdot \frac{(a+2x)(a-x) (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{16})}{4 (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2)},$$

$$N_x = q \cdot \frac{a-4x}{4}, \quad N_y = q \cdot \frac{(a-4x) (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{16})}{4 (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2)},$$

$$M_{Dx} = 0, \quad M_{Dy} = q \cdot \frac{(a+2x)(x-a) (\tilde{B}_{11} \tilde{G}_{21} - \tilde{G}_{11} \tilde{B}_{12})}{4 (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2)}.$$

в) Левый край полосы жестко защемлен, правый край свободен от механических воздействий. В этом случае на основе (8а), (8в) получаем следующие механические граничные условия: $w(-a) = \frac{dw}{dx}(-a) = 0$, $M_x(a) = N_x(a) = 0$. Решение задачи имеет вид

$$w(x) = \frac{q}{24} \cdot \frac{(x+a)^2 (x^2 - 6ax + 17a^2) \tilde{B}_{11}}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2},$$

$$\varphi_0(x) = -\frac{q}{6} \cdot \frac{x(x^2 - 3ax + 3a^2) \tilde{G}_{11}}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2};$$

Тогда для моментов и перерезывающих сил получаются следующие формулы:

$$M_x = -q \cdot \frac{(a-x)^2}{2}, \quad M_y = -q \cdot \frac{(a-x)^2 \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{12} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{12} \right)}{2 \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2 \right)},$$

$$H_{xy} = -q \cdot \frac{(a-x)^2 \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{16} \right)}{2 \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2 \right)},$$

$$N_x = q \cdot (a-x), \quad N_y = q \cdot \frac{(a-x) \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{16} \right)}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2},$$

$$M_{Dx} = 0, \quad M_{Dy} = q \cdot \frac{(a-x)^2 \left(\tilde{B}_{11} \tilde{G}_{21} - \tilde{G}_{11} \tilde{B}_{12} \right)}{2 \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2 \right)}.$$

2) Оба края свободно оперты. В этом случае на основе (8б) получаем следующие механические граничные условия: $w(-a) = M_x(-a) = 0$, $w(a) = M_x(a) = 0$. Решение задачи имеет вид

$$w(x) = \frac{q}{24} \cdot \frac{(x^2 - a^2)(x^2 - 5a^2) \tilde{B}_{11}}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2},$$

$$\varphi_0(x) = -\frac{q}{6} \cdot \frac{x(x^2 - 3a^2) \tilde{G}_{11}}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2}.$$

Тогда для моментов и перерезывающих сил получаются следующие формулы:

$$M_x = q \cdot \frac{a^2 - x^2}{2}, \quad M_y = q \cdot \frac{(a^2 - x^2) \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{12} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{12} \right)}{2 \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2 \right)},$$

$$H_{xy} = q \cdot \frac{(a^2 - x^2) \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{16} \right)}{2 \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2 \right)},$$

$$N_x = -qx, \quad N_y = -q \cdot \frac{x \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{16} \right)}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2},$$

$$M_{Dx} = 0, \quad M_{Dy} = q \cdot \frac{(x^2 - a^2) \left(\tilde{B}_{11} \tilde{G}_{21} - \tilde{G}_{11} \tilde{B}_{12} \right)}{2 \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2 \right)}.$$

2. Оба края полосы электродированы. Пусть на краях полосы задан нулевой электрический потенциал. В этом случае на основе (9б) получаем следующие электрические граничные условия: $\varphi_0(-a) = 0$, $\varphi_0(a) = 0$.

а) Оба края полосы жестко защемлены. Решение задачи имеет вид

$$w(x) = \frac{q}{24} \cdot \frac{(a^2 - x^2)^2 \tilde{B}_{11}}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2},$$

$$\varphi_0(x) = \frac{q}{6} \cdot \frac{x(a^2 - x^2) \tilde{G}_{11}}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2} + \frac{V}{2} \cdot \frac{a - x}{a};$$

Тогда для моментов и перерезывающих сил получаются следующие формулы:

$$M_x = q \cdot \frac{a^2 - 3x^2}{6} - V \cdot \frac{\tilde{G}_{11}}{2a},$$

$$M_y = q \cdot \frac{(a^2 - 3x^2) (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{12} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{12})}{6 (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2)} - V \cdot \frac{\tilde{G}_{12}}{2a},$$

$$H_{xy} = q \cdot \frac{(a^2 - 3x^2) (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{16})}{6 (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2)} - V \cdot \frac{\tilde{G}_{16}}{2a},$$

$$N_x = -qx, \quad N_y = -q \cdot \frac{x (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{16})}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2},$$

$$M_{Dx} = -V \cdot \frac{\tilde{B}_{11}}{2a}, \quad M_{Dy} = q \cdot \frac{(3x^2 - a^2) (\tilde{B}_{11} \tilde{G}_{21} - \tilde{G}_{11} \tilde{B}_{12})}{6 (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2)} - V \cdot \frac{\tilde{B}_{12}}{2a}.$$

б) Левый край полосы жестко защемлен, правый край свободно оперт. Решение задачи имеет вид

$$w(x) = q \cdot \frac{(x+a)^2 (x-a) \left((4\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2) x - a (8\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 7\tilde{G}_{11}^2) \right) \tilde{B}_{11}}{24 (4\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2) (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2)} +$$

$$+ V \cdot \frac{(x+a)^2 (a-x) \tilde{G}_{11}}{4a^2 (4\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2)},$$

$$\varphi_0(x) = q \cdot \frac{(a-x) \left((4\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2) x^2 + a\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} x - 3a^2 (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2) \right) \tilde{G}_{11}}{6 (4\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2) (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2)} +$$

$$+ V \cdot \frac{(x-a) (3\tilde{G}_{11}^2 x - a (8\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2))}{4a^2 (4\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2)};$$

Тогда для моментов и перерезывающих сил получаются следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 M_x &= q \cdot \frac{(a-x) \left((2\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2) x + a (\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2) \right)}{8\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 6\tilde{G}_{11}^2} - \\
 &\quad - V \cdot \frac{3(a-x) (\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2) \tilde{G}_{11}}{2a^2 (4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2)}, \\
 M_y &= q \cdot \left(\frac{-2 (\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{12} + \tilde{G}_{12}\tilde{G}_{11})}{\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2} x^2 + \frac{4a (\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{12} + \tilde{G}_{12}\tilde{G}_{11})}{4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2} x + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2a^2 \left((6\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 5\tilde{G}_{11}^2) \tilde{B}_{11}\tilde{S}_{12} + (4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2) \tilde{G}_{11}\tilde{G}_{12} \right)}{3 (\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2) (4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2)} \right) + \\
 &\quad + V \cdot \left(\frac{3 (\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{12} + \tilde{G}_{11}\tilde{G}_{12}) \tilde{G}_{11}}{2a^2 (4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2)} x + \frac{\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{12}\tilde{G}_{11} - (4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2) \tilde{G}_{12}}{a (4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2)} \right), \\
 H_{xy} &= q \cdot \left(\frac{-2 (\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{16}\tilde{G}_{11})}{\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2} x^2 + \frac{4a (\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{16}\tilde{G}_{11})}{4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2} x + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2a^2 \left((6\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 5\tilde{G}_{11}^2) \tilde{B}_{11}\tilde{S}_{16} + (4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2) \tilde{G}_{11}\tilde{G}_{16} \right)}{3 (\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2) (4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2)} \right) + \\
 &\quad + V \cdot \left(\frac{3 (\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11}\tilde{G}_{16}) \tilde{G}_{11}}{2a^2 (4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2)} x + \frac{\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{16}\tilde{G}_{11} - (4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2) \tilde{G}_{16}}{a (4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2)} \right), \\
 N_x &= q \cdot \left(\frac{a (\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2)}{4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2} - x \right) + V \cdot \frac{3 (\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2) \tilde{G}_{11}}{2a^2 (4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2)}, \\
 N_y &= q \cdot \left(\frac{a (\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11}\tilde{G}_{16})}{\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2} - \frac{\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11}\tilde{G}_{16}}{4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2} x \right) + V \cdot \frac{3 (\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11}\tilde{G}_{16}) \tilde{G}_{11}}{2a^2 (4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2)}, \\
 M_{Dx} &= -q \cdot \frac{a^2 \tilde{B}_{11} \tilde{G}_{11}}{12\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 9\tilde{G}_{11}^2} - V \cdot \frac{2 (\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2) \tilde{B}_{11}}{a (4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2)}, \\
 M_{Dy} &= q \cdot \left(\frac{-2 (-\tilde{B}_{11}\tilde{G}_{21} + \tilde{B}_{12}\tilde{G}_{11})}{\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2} x^2 + \frac{4a (-\tilde{B}_{11}\tilde{G}_{21} + \tilde{B}_{12}\tilde{G}_{11})}{4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2} x + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{2a^2 \left(- \left(6\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 5\tilde{G}_{11}^2 \right) \tilde{B}_{11}\tilde{G}_{21} + \left(4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2 \right) \tilde{G}_{11}\tilde{B}_{12} \right)}{3 \left(\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2 \right) \left(4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2 \right)} +$$

$$+ V \cdot \left(\frac{3 \left(\tilde{G}_{11}\tilde{B}_{12} - \tilde{B}_{11}\tilde{G}_{21} \right) \tilde{G}_{11}}{2a^2 \left(4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2 \right)} x - \frac{\tilde{B}_{11}\tilde{G}_{21}\tilde{G}_{11} + \left(4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2 \right) \tilde{B}_{12}}{a \left(4\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2 \right)} \right).$$

е) Левый край полосы жестко зашпелен, правый край свободен от механических воздействий. Решение задачи имеет вид

$$w(x) = \frac{q}{24} \cdot \frac{(x+a)^2 \left(\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11}x^2 - 6a\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11}x + a^2 \left(17\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + 8\tilde{G}_{11}^2 \right) \right)}{\tilde{S}_{11} \left(\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2 \right)} -$$

$$- \frac{V}{4} \cdot \frac{(x+a)^2 \tilde{G}_{11}}{a\tilde{S}_{11}},$$

$$\varphi_0(x) = \frac{q}{6} \cdot \frac{(x^2 - a^2) (3a - x) \tilde{G}_{11}}{\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2} + \frac{V}{2} \cdot \frac{a - x}{a};$$

Тогда для моментов и перерезывающих сил получаются следующие формулы:

$$M_x = -q \frac{(a-x)^2}{2},$$

$$M_y = -q \cdot \left(x(x-2a) \left(\tilde{S}_{12}\tilde{B}_{11} + \tilde{G}_{11}\tilde{G}_{12} \right) \tilde{S}_{11} + \frac{a^2 \left(3\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11}\tilde{S}_{12} + 4\tilde{S}_{12}\tilde{G}_{11}^2 - \tilde{S}_{11}\tilde{G}_{11}\tilde{G}_{12} \right)}{3} \right) +$$

$$+ V \cdot \frac{\tilde{S}_{12}\tilde{G}_{11} - \tilde{S}_{11}\tilde{G}_{12}}{2a\tilde{S}_{11}},$$

$$H_{xy} = -q \cdot \left(x(x-2a) \left(\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11}\tilde{G}_{16} \right) \tilde{S}_{11} + \frac{a^2 \left(3\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11}\tilde{S}_{16} + 4\tilde{S}_{16}\tilde{G}_{11}^2 - \tilde{S}_{11}\tilde{G}_{11}\tilde{G}_{16} \right)}{3} \right) +$$

$$+ V \cdot \frac{\tilde{S}_{16}\tilde{G}_{11} - \tilde{S}_{11}\tilde{G}_{16}}{2a\tilde{S}_{11}},$$

$$N_x = q(a-x),$$

$$N_y = q \frac{(a-x) \left(\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11}\tilde{G}_{16} \right)}{\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2},$$

$$M_{Dx} = q \cdot \frac{2a^2\tilde{G}_{11}}{3\tilde{S}_{11}} - V \cdot \frac{\tilde{B}_{11}\tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2}{2a\tilde{S}_{11}},$$

$$M_{Dy} = q \cdot \left(x(x-2a) \left(\tilde{B}_{11} \tilde{G}_{21} - \tilde{G}_{11} \tilde{B}_{12} \right) \tilde{S}_{11} - \frac{a^2 \left(3\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} \tilde{G}_{21} + 4\tilde{G}_{21} \tilde{G}_{11}^2 + \tilde{S}_{11} \tilde{G}_{11} \tilde{B}_{12} \right)}{3} \right) - \\ - V \cdot \frac{\tilde{B}_{12} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{21}}{2a \tilde{S}_{11}}.$$

з) Оба края свободно оперты. Решение задачи имеет вид

$$w(x) = \frac{q}{24} \cdot \frac{(x^2 - a^2) \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} x^2 - a^2 \left(5\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 4\tilde{G}_{11}^2 \right) \right)}{\tilde{S}_{11} \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2 \right)} - \frac{V}{4} \cdot \frac{(x^2 - a^2) \tilde{G}_{11}}{a \tilde{S}_{11}},$$

$$\varphi_0(x) = \frac{q}{6} \cdot \frac{x(a^2 - x^2) \tilde{G}_{11}}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2} + \frac{V}{2} \cdot \frac{a - x}{a}.$$

Тогда для моментов и перерезывающих сил получаются следующие формулы:

$$M_x = q \frac{a^2 - x^2}{2},$$

$$M_y = q \cdot \left(\left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{12} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{12} \right) \tilde{S}_{11} x^2 + \frac{a^2 \left(3\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} \tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{12} \tilde{G}_{11}^2 + \tilde{S}_{11} \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{12} \right)}{3} \right) + \\ + V \cdot \frac{\tilde{S}_{12} \tilde{G}_{11} - \tilde{S}_{11} \tilde{G}_{12}}{2a \tilde{S}_{11}},$$

$$H_{xy} = q \cdot \left(\left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{16} \right) \tilde{S}_{11} x^2 + \frac{a^2 \left(3\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} \tilde{S}_{16} + 2\tilde{S}_{16} \tilde{G}_{11}^2 + \tilde{S}_{11} \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{16} \right)}{3} \right) + \\ + V \cdot \frac{\tilde{S}_{16} \tilde{G}_{11} - \tilde{S}_{11} \tilde{G}_{16}}{2a \tilde{S}_{11}},$$

$$N_x = -qx,$$

$$N_y = -q \frac{x \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{16} \right)}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2},$$

$$M_{Dx} = -q \frac{a^2 \tilde{G}_{11}}{3 \tilde{S}_{11}} - V \cdot \frac{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2}{2a \tilde{S}_{11}},$$

$$M_{Dy} = q \cdot \left(\left(\tilde{G}_{11} \tilde{B}_{12} - \tilde{B}_{11} \tilde{G}_{21} \right) \tilde{S}_{11} x^2 + \frac{a^2 \left(\tilde{S}_{11} \tilde{G}_{11} \tilde{B}_{12} - 3\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} \tilde{G}_{21} - 2\tilde{G}_{21} \tilde{G}_{11}^2 \right)}{3} \right) - \\ - V \cdot \frac{\tilde{B}_{12} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{21}}{2a \tilde{S}_{11}}.$$

3. Левый край полосы электродирован, правый край неэлектродирован. Пусть на левом краю полосы задан нулевой электрический потенциал. В этом случае на основе (9а), (9б) получаем следующие электрические граничные условия: $\varphi_0(-a) = 0$, $D_x(a) = 0$.

а) Оба края полосы жестко заземлены. Решение задачи имеет вид

$$w(x) = \frac{q}{24} \cdot \frac{(a^2 - x^2)^2 \tilde{B}_{11}}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2},$$

$$\varphi_0(x) = \frac{q}{6} \cdot \frac{x(a^2 - x^2) \tilde{G}_{11}}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2} + V;$$

Тогда для моментов и перерезывающих сил получаются следующие формулы:

$$M_x = q \cdot \frac{a^2 - 3x^2}{6}, \quad M_y = q \cdot \frac{(a^2 - 3x^2) (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{12} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{12})}{6 (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2)},$$

$$H_{xy} = q \cdot \frac{(a^2 - 3x^2) (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{16})}{6 (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2)},$$

$$N_x = -qx, \quad N_y = -q \cdot \frac{x (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{16})}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2},$$

$$M_{Dx} = 0, \quad M_{Dy} = q \cdot \frac{(3x^2 - a^2) (\tilde{B}_{11} \tilde{G}_{21} - \tilde{G}_{11} \tilde{B}_{12})}{6 (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2)}.$$

б) Левый край полосы жестко заземлен, правый край свободно оперт. Решение задачи имеет вид

$$w(x) = \frac{q}{24} \cdot \frac{(x+a)^2 (x-a) (x-2a) \tilde{B}_{11}}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2},$$

$$\varphi_0(x) = -\frac{q}{24} \cdot \frac{(x+a) (4x^2 - 7ax + a^2) \tilde{G}_{11}}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2} + V;$$

Тогда для моментов и перерезывающих сил получаются следующие формулы:

$$M_x = q \cdot \frac{(a+2x)(a-x)}{4}, \quad M_y = q \cdot \frac{(a+2x)(a-x) (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{12} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{12})}{4 (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2)},$$

$$H_{xy} = q \cdot \frac{(a+2x)(a-x) (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{16})}{4 (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2)},$$

$$N_x = q \cdot \frac{a - 4x}{4}, \quad N_y = q \cdot \frac{(a - 4x) \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{16} \right)}{4 \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2 \right)},$$

$$M_{Dx} = 0, \quad M_{Dy} = q \cdot \frac{(a + 2x)(x - a) \left(\tilde{B}_{11} \tilde{G}_{21} - \tilde{G}_{11} \tilde{B}_{12} \right)}{4 \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2 \right)}.$$

б) Левый край полосы жестко защемлен, правый край свободен от механических воздействий. Решение задачи имеет вид

$$w(x) = \frac{q}{24} \cdot \frac{(x + a)^2 (x^2 - 6ax + 17a^2) \tilde{B}_{11}}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2},$$

$$\varphi_0(x) = -\frac{q}{6} \cdot \frac{(x + a)(x^2 - 4ax + 7a^2) \tilde{G}_{11}}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2} + V;$$

Тогда для моментов и перерезывающих сил получаются следующие формулы:

$$M_x = -q \cdot \frac{(a - x)^2}{2}, \quad M_y = -q \cdot \frac{(a - x)^2 \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{12} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{12} \right)}{2 \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2 \right)},$$

$$H_{xy} = -q \cdot \frac{(a - x)^2 \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{16} \right)}{2 \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2 \right)},$$

$$N_x = q \cdot (a - x), \quad N_y = q \cdot \frac{(a - x) \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{16} \right)}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2},$$

$$M_{Dx} = 0, \quad M_{Dy} = q \cdot \frac{(a - x)^2 \left(\tilde{B}_{11} \tilde{G}_{21} - \tilde{G}_{11} \tilde{B}_{12} \right)}{2 \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2 \right)}.$$

в) Оба края свободно оперты. Решение задачи имеет вид

$$w(x) = \frac{q}{24} \cdot \frac{(x^2 - a^2)(x^2 - 5a^2) \tilde{B}_{11}}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2},$$

$$\varphi_0(x) = \frac{q}{6} \cdot \frac{(x + a)^2 (2a - x) \tilde{G}_{11}}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2} + V.$$

Тогда для моментов и перерезывающих сил получаются следующие формулы:

$$M_x = q \cdot \frac{a^2 - x^2}{2}, \quad M_y = q \cdot \frac{(a^2 - x^2) \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{12} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{12} \right)}{2 \left(\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2 \right)},$$

$$H_{xy} = q \cdot \frac{(a^2 - x^2) (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{16})}{2 (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2)},$$

$$N_x = -qx, \quad N_y = -q \cdot \frac{x (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{16})}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2},$$

$$M_{Dx} = 0, \quad M_{Dy} = q \cdot \frac{(x^2 - a^2) (\tilde{B}_{11} \tilde{G}_{21} - \tilde{G}_{11} \tilde{B}_{12})}{2 (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2)}.$$

4. Численные исследования. Были проведены численные исследования электроупругого состояния бесконечных полос из следующих материалов: 1) селенид кадмия $CdSe$ [6, 7] (материал ЭМ1); 2) титанат бария $BaTiO_3$ [6, 8] (материал ЭМ4); 3) пьезокерамика $PZT - 4$ [6, 8] (материал ЭМ5); 4) пьезокерамика $PZT - 5A$ [6, 8] (материал ЭМ6). Рассматривались случаи, когда ось поляризации материалов направлена вдоль оси Oy и когда она направлена вдоль оси Ox . Физические постоянные материалов приведены в таблице 1.

Таблица 1. Физические постоянные материалов

Величина	Материалы, поляризованные вдоль Oy			
	ЭМ1(Oy)	ЭМ4(Oy)	ЭМ5(Oy)	ЭМ6(Oy)
s_{11}/s_0	23, 21	8, 70	10, 90	14, 40
s_{22}/s_0	16, 68	7, 10	7, 90	9, 46
s_{66}/s_0	74, 46	17, 50	19, 30	25, 20
s_{12}/s_0	-5, 38	-1, 90	-2, 10	-2, 98
g_{11}/g_0	0, 00	0, 00	0, 00	0, 00
g_{12}/g_0	0, 00	0, 00	0, 00	0, 00
g_{16}/g_0	-124, 40	20, 20	39, 40	38, 20
g_{21}/g_0	-41, 61	-5, 20	-11, 10	-11, 40
g_{22}/g_0	81, 15	12, 60	26, 10	24, 80
g_{26}/g_0	0, 00	0, 00	0, 00	0, 00
β_{11}/β_0	118987, 10	77, 93	76, 61	65, 31
β_{22}/β_0	106071, 50	66, 47	86, 92	66, 46
Величина	Материалы, поляризованные вдоль Ox			
	ЭМ1(Ox)	ЭМ4(Ox)	ЭМ5(Ox)	ЭМ6(Ox)
s_{11}/s_0	16, 68	7, 10	7, 90	9, 46
s_{22}/s_0	23, 21	8, 70	10, 90	14, 40
s_{66}/s_0	74, 46	17, 50	19, 30	25, 20
s_{12}/s_0	-5, 38	-1, 90	-2, 10	-2, 98
g_{11}/g_0	-81, 15	-12, 60	-26, 10	-24, 80
g_{12}/g_0	41, 61	5, 20	11, 10	11, 40
g_{16}/g_0	0, 00	0, 00	0, 00	0, 00
g_{21}/g_0	0, 00	0, 00	0, 00	0, 00
g_{22}/g_0	0, 00	0, 00	0, 00	0, 00
g_{26}/g_0	124, 40	-20, 20	-39, 40	-38, 20
β_{11}/β_0	106071, 50	66, 47	86, 92	66, 46
β_{22}/β_0	118987, 10	77, 93	76, 61	65, 31

Здесь приняты следующие обозначения:

$$s_0 = 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad g_0 = 10^{-3} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м}^2, \quad \beta_0 = 1 \text{ МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}.$$

На рисунке 3 приведены графики распределения значений прогиба w вдоль поляризованной полосы из материалов ЭМ1(Oy) (линия 1), ЭМ4(Oy) (линия 2), ЭМ5(Oy) (линия 3), ЭМ6(Oy) (линия 4) для случаев, когда оба края полосы жестко защемлены (рис. а), когда левый край полосы жестко защемлен, правый край полосы свободно оперт (рис. б), когда левый край полосы жестко защемлен, правый край полосы свободен от внешних воздействий (рис. в), оба края полосы свободно оперты (рис. г).

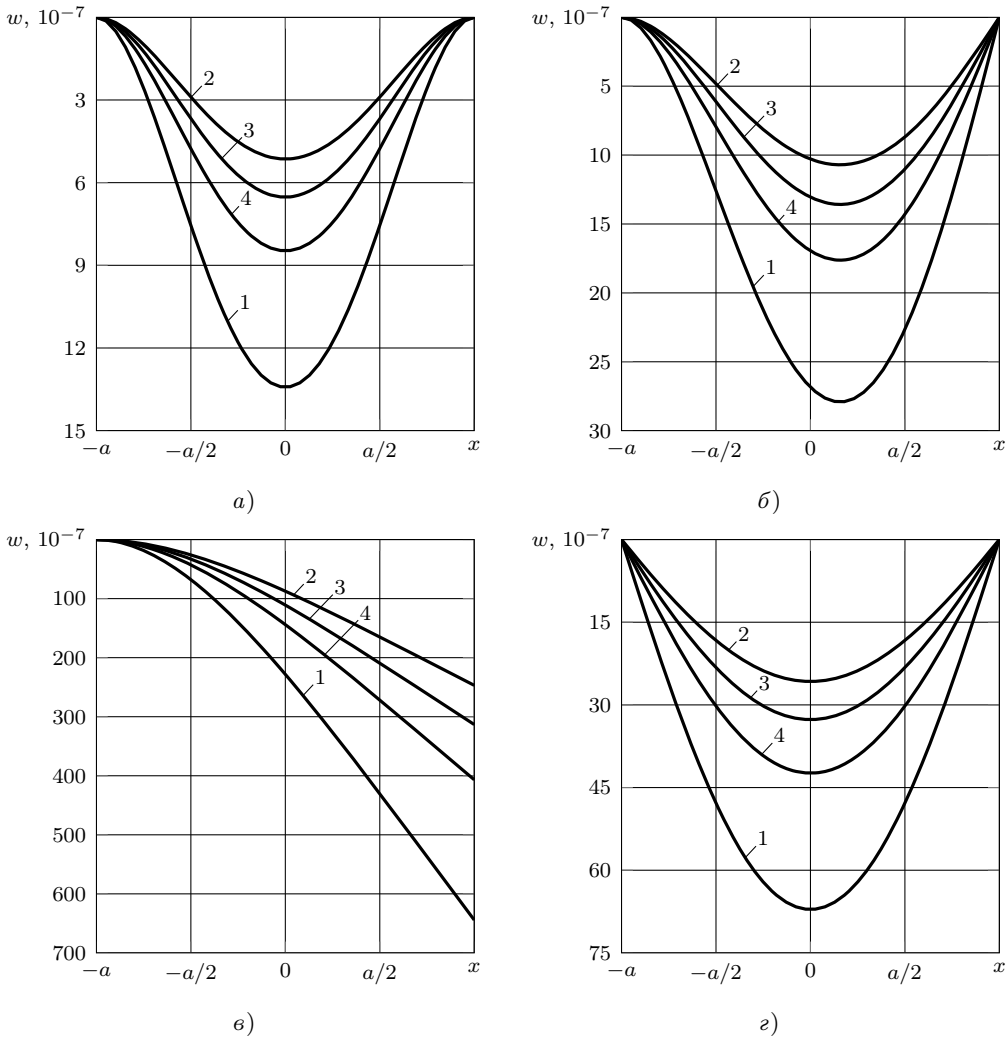


Рис. 3. Графики прогиба срединной плоскости полосы с продольной поляризацией

В таблице 2 приведены значения изгибающих моментов M_x, M_y в некоторых точках (линиях) вдоль поляризованной полосы из материалов ЭМ1(Oy) и ЭМ4(Oy) для различных типов электрических граничных условий (э.г.у.) (тип

Решение задачи об изгибе тонкой пьезоэлектрической полосы

1 – оба края полосы неэлектродированы, тип 2 – оба края полосы электродированы и задан нулевой потенциал электрического поля, тип 3 – левый край полосы электродирован, правый край полосы неэлектродирован) и различных типов механических граничных условий (м.г.у.) (тип *a* – оба края полосы жестко заземлены, тип *б* – левый край полосы жестко заземлен, правый край полосы свободно оперт, тип *в* – левый край полосы жестко заземлен, правый край полосы свободен от внешних воздействий, тип *г* – оба края полосы свободно оперты).

Таблица 2. Значения моментов M_x , M_y в точках (линиях) продольно поляризованной полосы

Величина	Тип э.г.у.	Тип м.г.у.	Точка (линия)						
			$-a$	$-2a/3$	$-a/3$	0	$a/3$	$2a/3$	a
Материал ЭМ1(Oy)									
$M_x, 10^{-2}$	1, 2, 3	<i>a</i>	-33,333	-5,556	11,111	16,667	11,111	-5,556	-33,333
		<i>б</i>	-50,000	-13,889	11,111	25,000	27,778	19,444	0,000
		<i>в</i>	-200,000	-138,889	-88,889	-50,000	-22,222	-5,556	0,000
		<i>г</i>	0,000	27,778	44,444	50,000	44,444	27,778	0,000
$M_y, 10^{-2}$	1, 2, 3	<i>a</i>	-10,774	-1,796	3,591	5,387	3,591	-1,796	-10,774
		<i>б</i>	-16,162	-4,489	3,591	8,081	8,979	6,285	0,000
		<i>в</i>	-64,647	-44,894	-28,732	-16,162	-7,183	-1,796	-0,000
		<i>г</i>	0,000	8,979	14,366	16,162	14,366	8,979	0,000
Материал ЭМ4(Oy)									
$M_x, 10^{-2}$	1, 2, 3	<i>a</i>	-33,333	-5,556	11,111	16,667	11,111	-5,556	-33,333
		<i>б</i>	-50,000	-13,889	11,111	25,000	27,778	19,444	0,000
		<i>в</i>	-200,000	-138,889	-88,889	-50,000	-22,222	-5,556	0,000
		<i>г</i>	0,000	27,778	44,444	50,000	44,444	27,778	0,000
$M_y, 10^{-2}$	1, 2, 3	<i>a</i>	-10,138	-1,690	3,379	5,069	3,379	-1,690	-10,138
		<i>б</i>	-15,206	-4,224	3,379	7,603	8,448	5,914	0,000
		<i>в</i>	-60,826	-42,240	-27,034	-15,206	-6,758	-1,690	-0,000
		<i>г</i>	0,000	8,448	13,517	15,206	13,517	8,448	0,000

В таблице 3 приведены значения момента электрической индукции M_{Dy} в некоторых точках (линиях) продольно поляризованной полосы из материалов ЭМ1(Oy) и ЭМ4(Oy) для этих же типов граничных условий.

Таблица 3. Значения момента M_{Dy} в точках (линиях) продольно поляризованной полосы

Материал	Тип э.г.у.	Тип м.г.у.	Точка (линия)						
			$-a$	$-2a/3$	$-a/3$	0	$a/3$	$2a/3$	a
Значения момента $M_{Dy}, 10^{-5}$									
ЭМ1(Oy)	1, 2, 3	<i>a</i>	0,005	0,001	-0,002	-0,002	-0,002	0,001	0,005
		<i>б</i>	0,007	0,002	-0,002	-0,003	-0,004	-0,003	-0,000
		<i>в</i>	0,028	0,019	0,012	0,007	0,003	0,001	0,000
		<i>г</i>	0,000	-0,004	-0,006	-0,007	-0,006	-0,004	0,000
ЭМ4(Oy)	1, 2, 3	<i>a</i>	0,686	0,114	-0,229	-0,343	-0,229	0,114	0,686
		<i>б</i>	1,029	0,286	-0,229	-0,515	-0,572	-0,400	-0,000
		<i>в</i>	4,116	2,858	1,829	1,029	0,457	0,114	0,000
		<i>г</i>	0,000	-0,572	-0,915	-1,029	-0,915	-0,572	0,000

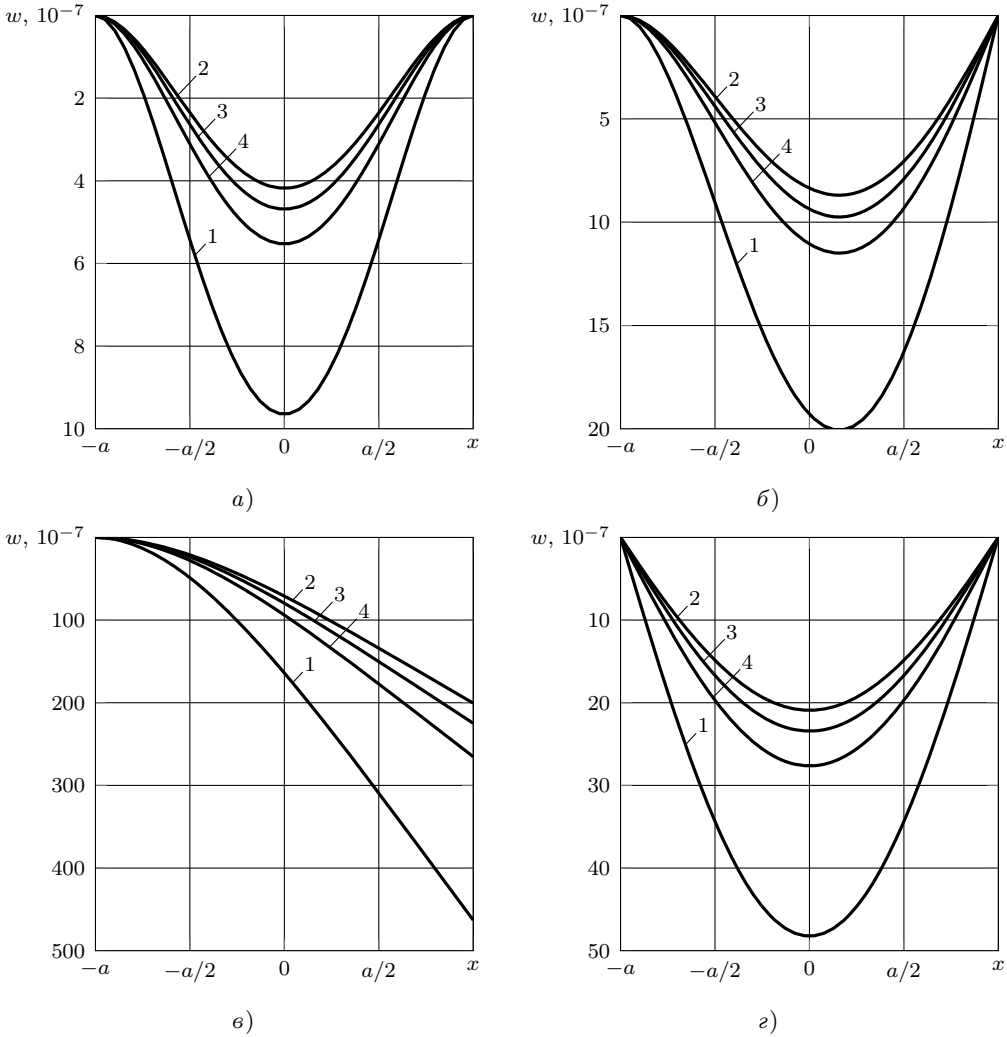


Рис. 4. Графики прогиба срединной плоскости полосы с поперечной поляризацией для случаев, когда оба края неэлектродированы или когда левый край электродирован, а правый край неэлектродирован

На рисунке 4 приведены графики распределения значений прогиба w поперечно поляризованной полосы из материалов ЭМ1(Ox) (линия 1), ЭМ4(Ox) (линия 2), ЭМ5(Ox) (линия 3), ЭМ6(Ox) (линия 4), когда оба края неэлектродированы или когда левый край электродирован и на нем задан нулевой электрический потенциал, а правый край неэлектродирован, для случаев, когда оба края полосы жестко защемлены (рис. а), когда левый край полосы жестко защемлен, правый край полосы свободно оперт (рис. б), когда левый край полосы жестко защемлен, правый край полосы свободен от внешних воздействий (рис. в), оба края полосы свободно оперты (рис. г).

На рисунке 5 приведены графики распределения значений прогиба w по-

Решение задачи об изгибе тонкой пьезоэлектрической полосы

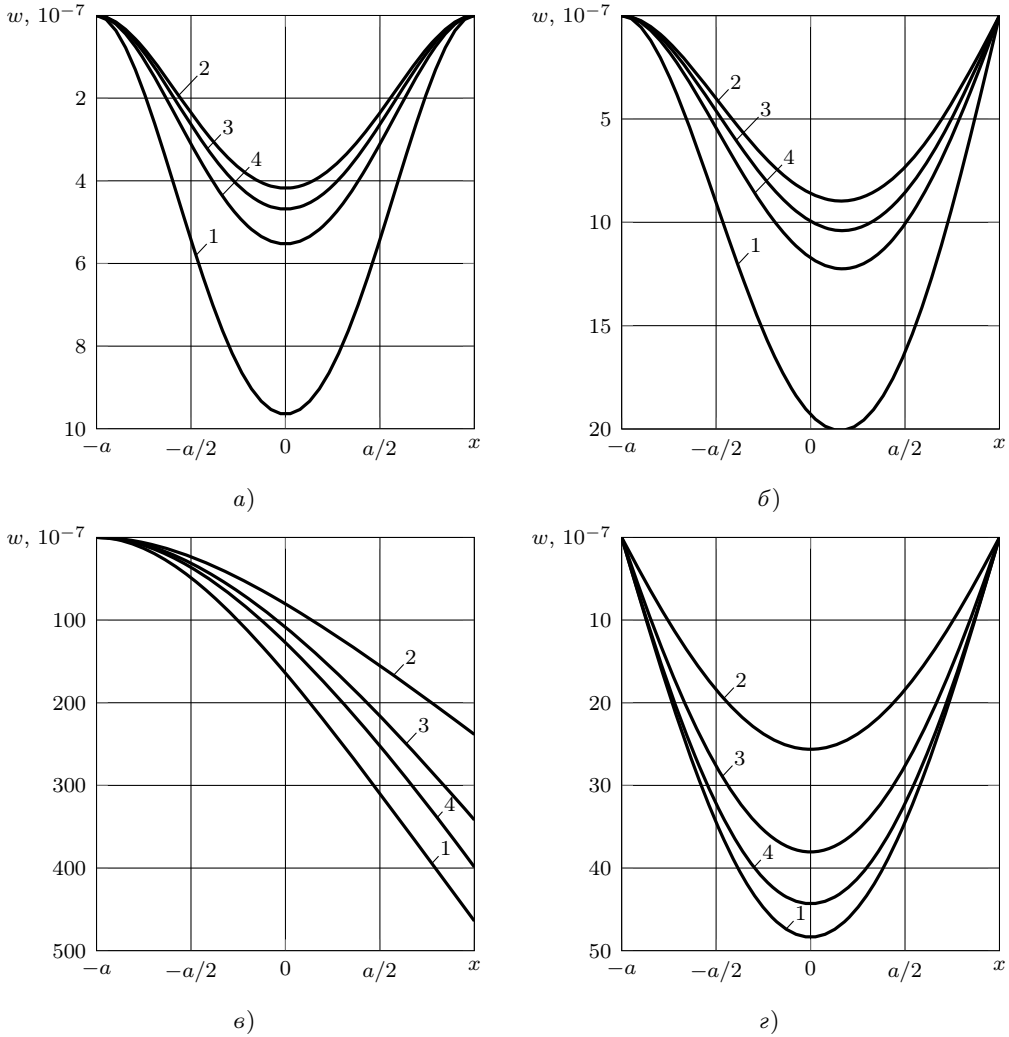


Рис. 5. Графики прогиба срединной плоскости полосы с поперечной поляризацией для случая, когда оба края полосы электродированы

перечно поляризованной полосы из материалов ЭМ1(Ox) (линия 1), ЭМ4(Ox) (линия 2), ЭМ5(Ox) (линия 3), ЭМ6(Ox) (линия 4), оба края которой электродированы и на них задан нулевой электрический потенциал, для случаев, когда оба края полосы жестко защемлены (рис. а), когда левый край полосы жестко защемлен, правый край полосы свободно оперт (рис. б), когда левый край полосы жестко защемлен, правый край полосы свободен от внешних воздействий (рис. в), оба края полосы свободно оперты (рис. г).

На рисунке 6 приведены графики распределения значений плотности потенциала электрического поля φ_0 для поперечно поляризованной полосы из материалов ЭМ1(Ox) (линия 1), ЭМ4(Ox) (линия 2), ЭМ5(Ox) (линия 3), ЭМ6(Ox) (линия 4), оба края которой неэлектродированы, для случаев, когда оба края

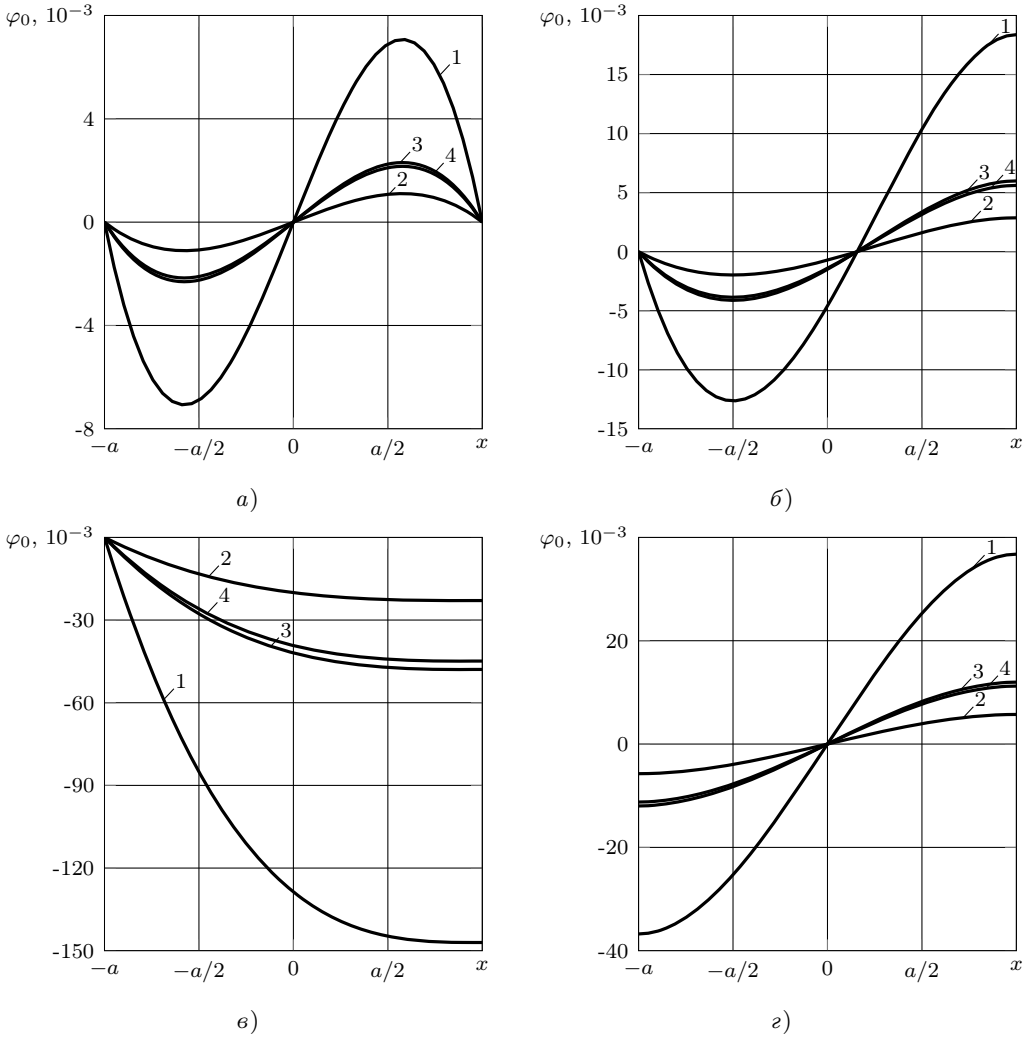


Рис. 6. Графики распределения плотности потенциала электрического поля полосы с поперечной поляризацией для случая, когда оба края полосы неэлектропроводны

полосы жестко заземлены (рис. а), когда левый край полосы жестко заземлен, правый край полосы свободно оперт (рис. б), когда левый край полосы жестко заземлен, правый край полосы свободен от внешних воздействий (рис. в), оба края полосы свободно оперты (рис. г).

На рисунке 7 приведены графики распределения значений плотности потенциала электрического поля φ_0 для поперечно поляризованной полосы из материалов ЭМ1(Ox) (линия 1), ЭМ4(Ox) (линия 2), ЭМ5(Ox) (линия 3), ЭМ6(Ox) (линия 4), оба края которой электропроводны и на них задан нулевой электрический потенциал, для случаев, когда оба края полосы жестко заземлены (рис. а), когда левый край полосы жестко заземлен, правый край полосы свободно оперт (рис. б), когда левый край полосы жестко заземлен, правый край

Решение задачи об изгибе тонкой пьезоэлектрической полосы

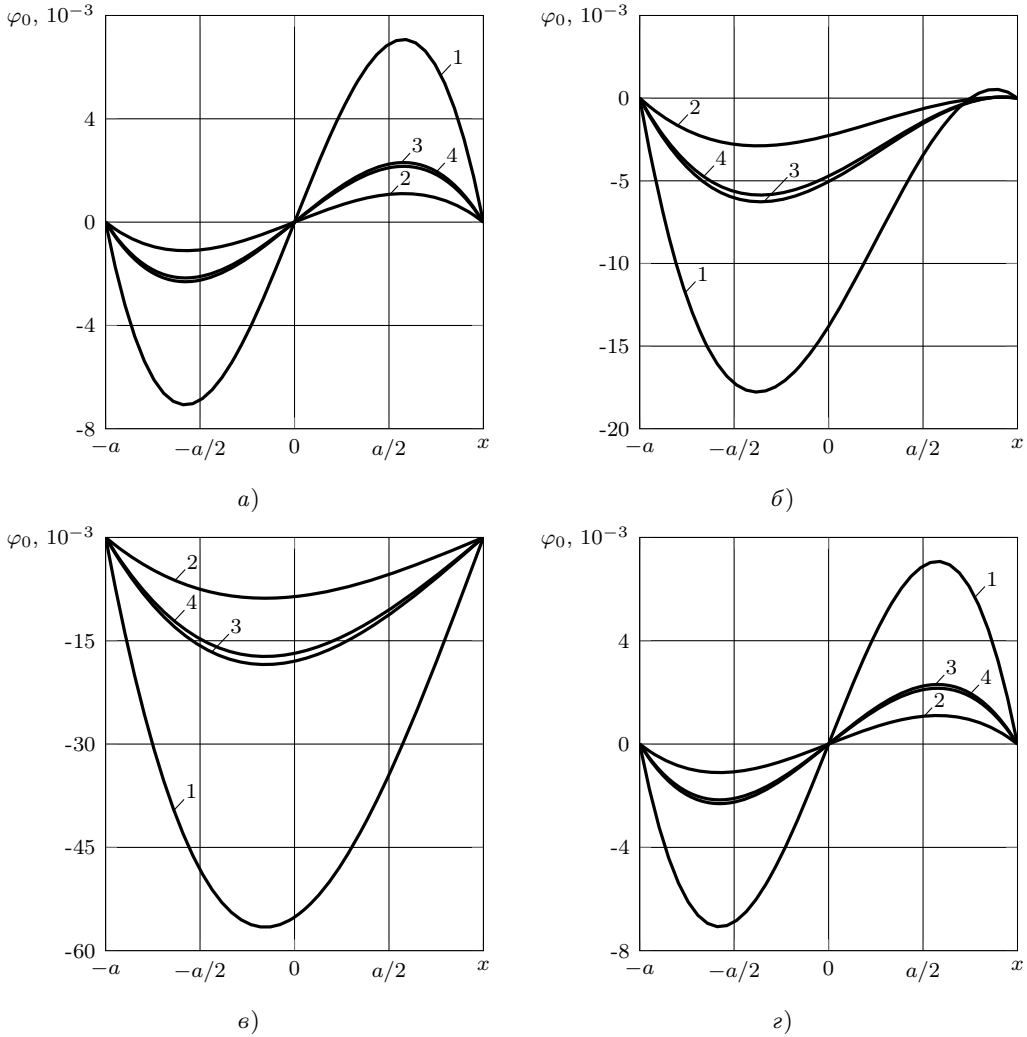


Рис. 7. Графики распределения плотности потенциала электрического поля полосы с поперечной поляризацией для случая, когда оба края полосы электродированы

полосы свободен от внешних воздействий (рис. в), оба края полосы свободно оперты (рис. г).

В таблице 4 приведены значения изгибающих моментов M_x , M_y в некоторых точках (линиях) поперечно поляризованной полосы из материалов ЭМ1(Ox) и ЭМ4(Ox) для различных типов электрических граничных условий (э.г.у.) (тип 1 – оба края полосы неэлектродированы, тип 2 – оба края полосы электродированы и задан нулевой потенциал электрического поля, тип 3 – левый край полосы электродирован, правый край полосы неэлектродирован) и различных типов механических граничных условий (м.г.у.) (тип а – оба края полосы жестко заземлены, тип б – левый край полосы жестко заземлен, правый край полосы свободно оперт, тип в – левый край полосы жестко заземлен, правый край

Таблица 4. Значения моментов M_x , M_y в точках (линиях) поперечно поляризованной полосы

Величина	Тип э.г.у.	Тип м.г.у.	Точка (линия)						
			$-a$	$-2a/3$	$-a/3$	0	$a/3$	$2a/3$	a
Материал ЭМ1(Ox)									
$M_x, 10^{-2}$	1, 2, 3	a	-33, 333	-5, 556	11, 111	16, 667	11, 111	-5, 556	-33, 333
		b	-50, 000	-13, 889	11, 111	25, 000	27, 778	19, 444	0, 000
		c	-200, 000	-138, 889	-88, 889	-50, 000	-22, 222	-5, 556	0, 000
		z	0, 000	27, 778	44, 444	50, 000	44, 444	27, 778	0, 000
$M_y, 10^{-2}$	1	a	-7, 727	-1, 288	2, 576	3, 863	2, 576	-1, 288	-7, 727
		b	-11, 590	-3, 219	2, 576	5, 795	6, 439	4, 507	0, 000
		c	-46, 359	-32, 194	-20, 604	-11, 590	-5, 151	-1, 288	0, 000
		z	0, 000	6, 439	10, 302	11, 590	10, 302	6, 439	0, 000
	2	a	-7, 727	-1, 288	2, 576	3, 863	2, 576	-1, 288	-7, 727
		b	-11, 589	-3, 217	2, 579	5, 800	6, 446	4, 516	0, 010
		c	-46, 442	-32, 277	-20, 687	-11, 673	-5, 234	-1, 371	-0, 083
		z	0, 041	6, 480	10, 343	11, 631	10, 343	6, 480	0, 041
	3	a	-7, 727	-1, 288	2, 576	3, 863	2, 576	-1, 288	-7, 727
		b	-11, 590	-3, 219	2, 576	5, 795	6, 439	4, 507	0, 000
		c	-46, 359	-32, 194	-20, 604	-11, 590	-5, 151	-1, 288	0, 000
		z	0, 000	6, 439	10, 302	11, 590	10, 302	6, 439	0, 000
Материал ЭМ4(Ox)									
$M_x, 10^{-2}$	1, 2, 3	a	-33, 333	-5, 556	11, 111	16, 667	11, 111	-5, 556	-33, 333
		b	-50, 000	-13, 889	11, 111	25, 000	27, 778	19, 444	0, 000
		c	-200, 000	-138, 889	-88, 889	-50, 000	-22, 222	-5, 556	0, 000
		z	0, 000	27, 778	44, 444	50, 000	44, 444	27, 778	0, 000
$M_y, 10^{-2}$	1	a	-7, 280	-1, 213	2, 427	3, 640	2, 427	-1, 213	-7, 280
		b	-10, 920	-3, 033	2, 427	5, 460	6, 066	4, 246	0, 000
		c	-43, 678	-30, 332	-19, 413	-10, 920	-4, 853	-1, 213	0, 000
		z	0, 000	6, 066	9, 706	10, 920	9, 706	6, 066	0, 000
	2	a	-7, 280	-1, 213	2, 427	3, 640	2, 427	-1, 213	-7, 280
		b	-10, 879	-2, 886	2, 679	5, 819	6, 531	4, 818	0, 677
		c	-50, 244	-36, 898	-25, 978	-17, 485	-11, 419	-7, 779	-6, 566
		z	3, 283	9, 349	12, 989	14, 202	12, 989	9, 349	3, 283
	3	a	-7, 280	-1, 213	2, 427	3, 640	2, 427	-1, 213	-7, 280
		b	-10, 920	-3, 033	2, 427	5, 460	6, 066	4, 246	0, 000
		c	-43, 678	-30, 332	-19, 413	-10, 920	-4, 853	-1, 213	0, 000
		z	0, 000	6, 066	9, 706	10, 920	9, 706	6, 066	0, 000

полосы свободен от внешних воздействий, тип z – оба края полосы свободно оперты).

В таблице 5 приведены значения момента электрической индукции M_{Dy} в некоторых точках (линиях) поперечно поляризованной полосы из материалов ЭМ1(Ox) и ЭМ4(Ox) для этих же типов граничных условий.

Из представленных результатов следует, что электроупругое состояние полосы сильно зависит от множества факторов, таких как механические и электрические условия на границах полосы, свойства ее материала, направление ее

Таблица 5. Значения момента M_{Dy} в точках (линиях) поперечно поляризованной полосы

Материал	Тип э.г.у.	Тип м.г.у.	Точка (линия)						
			$-a$	$-2a/3$	$-a/3$	0	$a/3$	$2a/3$	a
Значения момента $M_{Dx}, 10^{-5}$									
ЭМ1(Ox)	2	a	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
		b	-0,006	-0,006	-0,006	-0,006	-0,006	-0,006	-0,006
		e	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046
		z	-0,023	-0,023	-0,023	-0,023	-0,023	-0,023	-0,023
ЭМ4(Ox)	2	a	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
		b	-1,133	-1,133	-1,133	-1,133	-1,133	-1,133	-1,133
		e	10,985	10,985	10,985	10,985	10,985	10,985	10,985
		z	-5,492	-5,492	-5,492	-5,492	-5,492	-5,492	-5,492

электрической поляризации.

Как и ожидалось, наименьший прогиб полосы наблюдался в случае жесткого заземления обоих краев полосы, а наибольшего значения в этом случае он достигал на средней линии полосы. Если один из краев жестко заземлен, а другой свободно оперт, то максимальное значение прогиба возрастало до 2–2,5 раз, а его положение смещалось к опертому краю. Если оба края плиты свободно оперты, то значения прогиба возрастали до 6,5 раз сравнительно со случаем жесткого заземления обоих краев, а если один край жестко заземлен, а второй свободен от внешних воздействий – до 70 раз.

Наибольший прогиб возникал в полосе из материала ЭМ1, который является наиболее мягким (обладает наибольшими значениями коэффициентов деформации). Наличие электродирования обоих краев приводило к заметному росту значений прогиба для поперечно поляризованных полос из материалов ЭМ4, ЭМ5, ЭМ6, а для полосы из материала ЭМ1 рост значений прогиба практически незаметен. Материал ЭМ1 характеризуется наибольшими значениями пьезоэлектрических модулей и коэффициентов диэлектрической проницаемости, поэтому пьезоэлектрический эффект для него слабо выражен.

Если один из краев полосы неэлектродирован, то наличие или отсутствие электродного покрытия на другом краю не влияет на значения прогиба полосы.

При продольной поляризации полосы пьезоэлектрический модуль $g_{11} = 0$ и, как следствие, $G_{11} = \tilde{G}_{11} = 0$, тогда система (6) распадается на два несвязанных уравнения – уравнение упругого изгиба и уравнение электростатики. Поэтому при продольной поляризации значения прогиба определяются только упругими свойствами материала и механическими граничными условиями, а электрические свойства материала и электрические граничные условия влияния на значения прогиба полосы не оказывают.

Схожие закономерности имеют место и для потенциала электрического поля. Если оба края полосы неэлектродированы, то наибольшие по модулю значения потенциала возникали вблизи свободного края в полосе, у которой один край жестко заземлен, а второй край свободен. Для остальных комбинаций гранич-

ных условий значения потенциала оказывались значительно ниже. Если один из краев жестко заземлен, то потенциал электрического поля на нем равен нулю. Если один из краев (или оба) не является жестко заземленным, то на нем достигалось максимальное по модулю значение потенциала. Если же на обоих краях полосы задан нулевой потенциал, то наибольшие значения потенциал электрического поля обретал в одной из точек (линий) ближней к заземленному краю половины полосы.

Если полоса поляризована в продольном направлении, то потенциал электрического поля остается равным нулю независимо от типа электрического граничного условия.

Иные закономерности имеют место для изгибающих моментов и моментов электрической индукции. Так, изгибающий момент M_x (в поперечном направлении) не зависит от упругих и электрических свойств материала полосы, а определяется только шириной полосы и величиной усилий, действующих по основанию полосы. Если полоса поляризована в продольном направлении, то изгибающий момент M_y (в продольном направлении) не зависит от электрических граничных условий и электрических свойств материала полосы. Если оба края полосы жестко заземлены, то и в этом случае значения моментов не зависят электрических граничных условий.

Если один из краев полосы жестко заземлен, то около него возникает наибольшая концентрация моментов; когда второй край свободен, то эта концентрация в 4 раза превышает концентрацию моментов для случая, когда второй край свободно оперт, и до 6–7 раз – когда второй край жестко заземлен. Если оба края полосы оперты, то максимальная концентрация достигается в центре полосы.

Если край полосы не является жестко заземленным, то происходит его разгрузка – не только момент M_x , но и момент M_y равен нулю.

Когда полоса поляризована в продольном или поперечном направлении, то крутящий момент H_{xy} в полосе не возникает.

Если полоса продольно поляризована, то в ней возникает момент электрической индукции M_{Dy} , закономерности изменения которого сходны с закономерностями изменения изгибающего момента M_y . Если полоса поперечно поляризована, то при электродированных краях в ней возникает момент электрической индукции M_{Dx} , значения которого равны во всех точках полосы, и не возникает поток электрической индукции, если один из краев лишен электродного покрытия.

Заключение. Получено общее решение системы уравнений, описывающих изгибное деформирование тонкой пьезоэлектрической полосы под действием изгибной нагрузки, с использованием которого построены решения некоторых физически реализуемых краевых задач. На основе полученных решений проведены численные исследования влияния свойств материала и условий на краях полосы на ее изгибное электроупругое состояние. Установлено, что закономерности влияния типа механических граничных условий на значения моментов электри-

ческой индукции аналогичны закономерностям их влияния на значения изгибающих моментов.

1. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
2. *Калоеров С.А.* Краевые задачи прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2019. – № 1. – С. 42–58.
3. *Калоеров С.А.* Задачи электроупругого, магнитоупругого и упругого изгиба тонких плит как частные задачи электромагнитоупругого изгиба / С.А. Калоеров // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2019. – № 3-4. – С. 58–79.
4. *Глушанков Е.С.* Решение задачи об изгибе заземленной по краю эллиптической пьезоэлектрической плиты / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2020. – № 4(73). – С. 5–15.
5. *Гринченко В.Т.* Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 5).
6. *Калоеров С.А.* Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей / С.А. Калоеров, А.И. Баева, О.И. Бороненко. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 268 с.
7. *Liu J.X.* Anisotropic thermopiezoelectric solids with an elliptic inclusion or a hole under uniform heat flow / J.X. Liu, X.S. Zhang, X.L. Liu, J. Zheng // Acta Mech. Sinica. – 2000. – Vol. 16. – P. 148–163.
8. *Dunn M.L.* Micromechanics of coupled electroelastic composites effective thermal expansion and pyroelectric coefficients / M.L. Dunn // J. Appl. Phys. – 1993. – Vol. 73. – P. 5131–5140.

E.S. Glushankov

The solution of the problem of bending of thin piezoelectric strip under transverse loading action.

A bending problem is solved for thin piezoelectric strip loaded with uniformly distributed pressure along the upper base. The problem is reduced to the system of two ordinary differential equations. The general solution of the system and the solutions of several physically implementable boundary value problems are obtained. The influence of material's properties and boundary conditions on the electro-elastic state of the strip is identified with the numerical studies based on the obtained solutions.

Keywords: *bending theory of thin plates, piezoelectric material, electro-elastic strip, deflection function, electric field potential.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк
eugenij.glushankov@gmail.com

Получено 12.04.2021

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

УДК 519.688:539.37:624.046

©2021. В.М. Левин

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ АРМИРОВАННОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ В ОКРЕСТНОСТИ ИСТОЧНИКОВ ЕГО ВОЗМУЩЕНИЯ

В работе рассматривается анализ напряженного состояния пластины из армированного упругопластического материала (подобного бетону) с тремя источниками его возмущения: проемом, жестким включением и приложенной к нему местной нагрузкой. Применен метод неполной дискретизации, аппроксимация выполнена методом Бубнова – Галеркина, линеаризация осуществлена дискретным методом продолжения по параметру нагрузки с итерационным уточнением на каждом шаге модифицированным методом Ньютона, преобразованным применительно к потребностям данного вычислительного процесса. Условия прочности и деформационные зависимости соответствуют деформационной теории пластичности бетона Круглова – Козачевского, арматуры - в виде укороченной диаграммы Прандтля.

***Ключевые слова:** армированная упругопластическая пластина, напряженно-деформированное состояние, неполная дискретизация, метод Бубнова-Галеркина, метод Ньютона, деформационная теория пластичности бетона.*

Введение. Задача анализа напряженно-деформированного состояния упругих пластин на определенном этапе развития механики деформируемого твердого тела была достаточно актуальна как с точки зрения развития математического аппарата теории упругости, так и благодаря распространенности пластин и пластинчатых систем в строительстве, кораблестроении, тяжелом машиностроении. В это время были получены многие частные решения теории пластин для канонических областей (прямоугольник, круг, кольцо, сектор) – например, полиномиальные решения; решения, основанные на разделении переменных и разложении функций распределения решения вдоль одной из координат в ряд по тригонометрической либо другой ортогональной системе (для нас важно, что при этом требуется однородность пластины хотя бы в направлении этой координаты), однородные решения. Однако, при достаточно широком распространении пластин в различных зданиях и сооружениях потребности практики выдвинули ряд задач, которые не могли быть решены на базе этих решений (наличие проемов, различные случаи местного нагружения). Одновременно с этим потребность разработки более экономичных конструкций требовала учета реальных деформативных и прочностных свойств материалов. Так, известно, что адекватный учет пластических деформаций позволяет уточнить оценку несущей

способности конструкции в сторону ее увеличения. Выполнить указанный учет с применением «точных» (в рамках принимаемых теорий) решений невозможно. Для решения соответствующих задач приходится прибегать к различным численным методам. Это обусловлено двумя проблемами: во-первых, форма области в ряде случаев отличается от канонической, в реальных объектах пластина неоднородна, в ней имеются проемы, ослабленные области, жесткие включения; во-вторых, определяющие соотношения реальных материалов (например, бетона, высокоуглеродистой арматуры, древесины) достаточно сложны, нелинейны и характеризуются существенной асимметрией относительно естественного состояния. Важно, что полученные по экспериментальным данным модели поведения бетона при нагружении либо не могут быть увязаны с хрестоматийными моделями классической теории пластичности, либо требуют существенной модификации последних.

Таким образом, для численного анализа напряженно-деформированного состояния пластин в реальных случаях необходимо преодолеть две трудности: построить решение системы уравнений МДТТ (линейных дифференциальных уравнений в частных производных для статической и геометрической подсистем и нелинейных функциональных для физической подсистемы) на континуальной расчетной схеме с усложненной геометрией и с учетом неоднородности материала.

Это предопределяет необходимость прибегнуть к дискретизации области, на которой задана задача, и к линеаризации полученной нелинейной модели.

1. Исходные положения. Известно, что возможны два уровня дискретизации всей области, на которой задана задача: 1) полная дискретизация - методы конечных разностей (МКР) и конечных элементов (МКЭ); 2) неполная (или в ряде источников – частичная) дискретизация (метод неполной дискретизации – МНД). Иногда метод неполной дискретизации называется полудискретным методом. Кроме этого, с дискретизацией связан известный метод граничных элементов (МГЭ), предусматривающий дискретизацию не всей области, а лишь ее границы. Промежуточное положение между МКЭ и МНД занимает метод конечных полос (МКП), в основу которого положены конечные элементы, простирающиеся на всю длину области, что характерно также и для МНД. Однако, МКП предполагает однородность конструкции вдоль длины и допускает только определенные варианты граничных условий и нагрузок (количество публикаций по МКП достаточно велико, укажем, например, на источники [1, 2, 3]). Мы остановимся на МНД, как на методе, позволяющем достигнуть той же точности, что и МКЭ, при одинаковой сетке узлов на начальной линии.

Алгоритмы преобладающего количества программных комплексов, реализующих МКЭ, МКП и МНД, сформулированы в пространстве перемещений.

Широко известны и повсеместно используются методы полной дискретизации, в том числе практически во всех коммерческих программах расчета объектов строительства, машиностроения, реакторо-, корабле-, авиастроения и т. п. Менее известны и практически не используются в широкой проектной и кон-

структурской практике методы неполной дискретизации.

Строго говоря, схема неполной дискретизации всегда предполагает разделение переменных; она используется и в методе прямых, и при разложении решения в ряд по системе ортогональных функций одной из координат. Однако, в последнем случае дискретизации подвергается не область, а пространство функций, описывающих возможные перемещения системы.

Применение методов дискретизации включает на самом деле два этапа – собственно дискретизацию (области либо функционального пространства) и аппроксимацию искомых полей на дискретной схеме.

Дискретизация пространства функций, описывающих возможные перемещения системы, рассматривается в ряде работ, начиная с классических решений Рибера и Файлона. Затем этот метод был обобщен на оболочки вращения, преимущественно цилиндрические [4 - 7]. В этом случае обычно решения получаются из уравнений теории упругости трехмерного состояния обнулением напряжений на гранях для плосконапряженного состояния или линейных деформаций и поворотов нормали для плоской деформации. Аппроксимация решения осуществляется разложением решения по системе ортогональных функций одной координаты с обычным определением коэффициентов такого ряда. Континуальность области вдоль второй координаты в расчетной схеме сохраняется, система дифференциальных уравнений в частных производных преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод прямых в приложении к задачам расчета пластин также применяется достаточно давно, его идея и история использования показаны, например, в [8 - 10]. В случае прямоугольной области ее дискретизация осуществляется следующим образом: на границе, параллельной одной из координатных осей прямоугольной декартовой системы координат, вводится сетка узлов с малым конечным шагом, после чего через эти узлы, проводятся прямые, параллельные смежной границе, то – есть, второй координатной оси; эти прямые (они и дали название методу) выделяют на заданной области полосы малой конечной ширины. В системе уравнений МДТТ для плоской задачи аппроксимация производных в первом направлении выполняется обычным методом конечных разностей. В результате континуальность области во втором направлении сохраняется, и система дифференциальных уравнений в частных производных преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой завершает этап аппроксимации.

Другой подход к аппроксимации решения на полудискретной расчетной схеме был предложен Л.В. Канторовичем [11, 12] и основан на использовании того или иного вариационного принципа, например минимума полной потенциальной энергии системы Ритца, минимума невязки приближенного решения Бубнова-Галеркина. Использование принципа Ритца требует, чтобы оператор задачи был положительно определенным, при определенных правых частях – положительным; применение принципа Бубнова-Галеркина таких требований не предъявляет. Так как настоящая работа ориентирована на широкий спектр деформатив-

ных свойств материала, остановимся на втором принципе. Следует отметить, что и в [7] также использован вариационный принцип.

Идея метода, основанного на этом принципе, была предложена еще в 1913 году И.Г. Бубновым [13] и развита Б.Г. Галеркиным [14]. Отметим, что он полностью соответствует началу возможных перемещений; при этом множество рассматриваемых возможных перемещений в теоретических исследованиях может быть счетным, а в практических задачах, предполагающих получение численных результатов, оно всегда конечно, то-есть, оно всегда дискретно. Координатные функции, аналогично МКЭ, для тангенциальных перемещений приняты в виде линейных биномов.

Метод неполной дискретизации позднее был применен В.З. Власовым [15] и развит И.Е. Милейковским [16] применительно к расчету пластин и складчатых пластинчатых систем, а позднее – и оболочек и их систем. Модификация метода В.З. Власова, предложенная И.Е. Милейковским в форме «метода исходных уравнений», позволила получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме; решение краевой задачи для таких систем может быть выполнено достаточно универсальным методом С.К. Годунова [17].

И.Е. Милейковскому также принадлежит идея применения теории плит средней толщины при любой заданной их толщине; благодаря появлению новой степени свободы (вместо суммарного угла сдвига, равного нулю, рассматриваются раздельно повороты нормали и элемента тангенциальной координатной оси) математический аппарат метода значительно упрощается и избавляется от противоречия между гипотезой о нулевом сдвиге и использованием поперечной силы для определения одного из этих узлов.

Затем метод исходных уравнений был преобразован автором для распространения на расчет несущих стен башенных сооружений промышленного назначения [18].

Построение определяющих зависимостей для бетона, арматуры и их композиции – железобетона – достаточно сложная задача. Это обусловлено наличием определенных несоответствий в эмпирических данных различных исследователей, что, в свою очередь, вызвано различием в методике экспериментов и, не в последнюю очередь, неоднородностью прочностных и деформативных свойств материала, а также общей для всех материалов сложностью фиксации моментов выхода из упругой области и разрушения материала.

Для плоского напряженного состояния бетона В.М. Кругловым и А.И. Козачевским [19] был предложен специальный вариант деформационной теории пластичности, ориентированный на учет особенностей деформирования и разрушения бетона. Одна из основных из этих особенностей – неупругий и сложный характер зависимости $\sigma_0 \sim \varepsilon_0$ и влияние на нее вида напряженного состояния.

Для арматуры, учитывая, что в стенах рассматриваемых сооружений применяется сравнительно низкопрочная арматура, принимается укороченная диаграмма Прандтля с контролем достигнутых деформаций.

Для железобетона рассматривается две стадии нагружения – до и после об-

разования трещин. До образования трещин усилия в сечении железобетонной конструкции определяются суммированием усилий в бетоне и арматуре; постулируется поточечная совместность деформаций бетона и арматуры. После образования трещин такая совместность уже не имеет места. Выдвигаясь из бетона в трещину, арматура частично разрыхляет тонкий цилиндрический слой окружающего ее бетона вплоть до образования системы конических трещин, и если условно принять толщину этого слоя бесконечно малой, то возникает модельное представление о проскальзывании арматуры в бетоне по цилиндрической поверхности их контакта (подобно модели погранслоя в гидродинамике). Согласно этой модели, между трещинами наблюдается взаимный сдвиг бетона и арматуры, предопределяющий, согласно распространенным моделям контакта, величину касательных напряжений на контакте бетона и арматурного стержня. В результате возникает различие между деформациями и напряжениями арматуры в трещине, наибольшими по длине арматурного стержня, и поэтому используемыми в условиях прочности железобетона, и средними на шаге трещин, используемыми в деформационных соотношениях. Поэтому известны две модели работы железобетона – дискретных трещин и дисперсных трещин. Здесь использована наиболее разработанная и обоснованная экспериментально (в основном – Н.И. Карпенко [20]) вторая модель, использующая идею В.И. Мурашева о закономерной связи введенного им коэффициента, равного отношению средних на шаге трещин деформаций арматурного стержня к его деформации в сечении с трещиной, с уровнем деформаций арматурного стержня. Эта модель учитывает приобретенную анизотропию свойств железобетона, схему трещин, разрыхляющее влияние деформирующейся арматуры на бетон в пределах его полосы между трещинами и некоторые другие эффекты.

Линеаризацию в нашем случае целесообразно выполнять шагово-итерационным методом, по [21] – методом дискретного продолжения по параметру нагрузки с итерационным уточнением на каждом шаге путем применения модифицированного метода Ньютона (несколько видоизмененным нами применительно к особенностям предлагаемого вычислительного процесса).

2. Постановка задачи. Общее напряженно-деформированное состояние пластины и системы пластин, а также местные состояния в окрестности источников возмущения (концентраторы напряжений, местные нагрузки) исследовались ранее при помощи программы КРЕПР (длительное нагружение армированных упруговязких пластин и складок) и ПРОРАБ (кратковременное нагружение армированных упругоупругих пластин и складок, а также кратковременное догружение армированных упруговязкоупругих пластин и складок, ранее подвергнутых длительному нагружению). В частности, в [22, 23] численно изучалось напряженно-деформированное состояние армированной упругоупругой пластины и складки из такого же материала; здесь же прослеживалось последовательное развитие области разрушения материала. В докладе [24] аналогичная задача решалась для складки с жестким включением. В этих работах единственным источником возмущения полей напряжений и деформаций был

проем.

В работе [25] показано, что концентрация напряжений в окрестности угла прямоугольного проема не приводит к появлению сингулярности, характерной для упругой пластины с идеальными углами: это обусловлено неидеальностью геометрии угла проема и упругопластическим характером деформирования материала; там же даны рекомендации по учету указанной неидеальности.

На практике встречаются случаи, когда достаточно близко друг к другу располагается несколько разнообразных источников возмущения, и зоны их влияния пересекаются.

3. Результаты исследований. В настоящей работе численно исследуется напряженно-деформированное состояние армированной упругопластической стены в зоне совместного влияния трех источников его возмущения – проема, жесткого включения и приложенной к нему местной нагрузки (рис. 1). Принятые

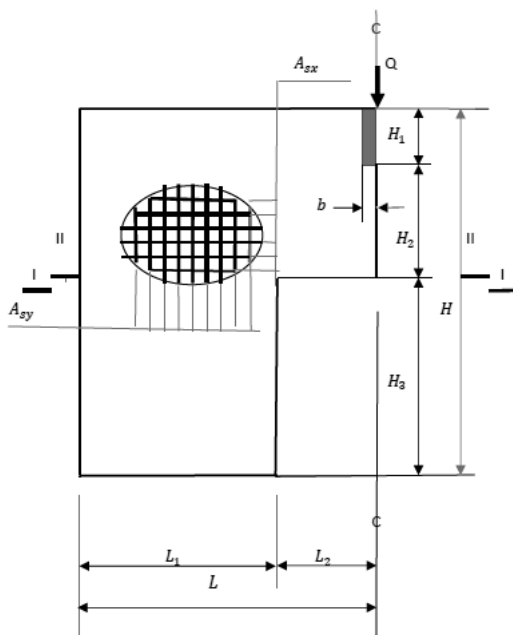


Рис. 1. Железобетонная пластина (к примеру расчета).

прочностные и деформативные свойства материала соответствуют аналогичным свойствам бетона и арматуры до образования трещин, а железобетона – после их образования. Для исследования принята железобетонная пластина шириной $L=6$ м и высотой $H=4$ м, толщиной 300 мм, армирование: вертикальное $A_{sy} = 10\varnothing 20400$ на 1 м сечения, по 5 стержней на метр у каждой грани (интенсивность армирования $31,4 \text{ см}^2/\text{м}$), горизонтальное $A_{sx} = 10\varnothing 16400$ на 1 м сечения, по 5 стержней у каждой грани (интенсивность армирования $20,11 \text{ см}^2/\text{м}$). Бетон класса В30, средняя кубиковая прочность 38,5 МПа (так как задача не

проектная, а исследовательская, то вместо кубиковой прочности с обеспеченностью 0,95, равной 30 МПа, в соответствии с принятым классом бетона, была использована средняя кубиковая прочность); предел текучести арматуры принят, в соответствии с ее классом, равным 400 МПа. Пластина ослаблена проемом шириной $L_2 = 2$ и высотой $H_3 = 2$ м. Над проемом на расстоянии $H_2 = 1,4$ м от верха проема расположена жесткая вставка высотой $H_1 = 0,6$ м и шириной $b = 0,3$ м, нагруженная сверху вертикальной силой Q , которая в процессе реализации шагово-итерационного метода пошагово наращивалась до разрушения пластины. Принималось, что разрушение происходит на том шаге наращивания нагрузки, на котором процесс итерационного уточнения расходится. Разрушающая нагрузка оказалась равной 1,075 МН. Использовалась симметрия пластины и нагрузки.

Расчет выполнялся при помощи программы ПРОРАБ. На рисунке 2 приведены некоторые результаты расчета в виде эпюр: нормальных напряжений в бетоне σ_{by} и арматуре σ_{sy} в горизонтальном сечении I-I по верху простенка (рис. 2, а, б), нормальных напряжений в бетоне σ_{bx} и арматуре σ_{sx} в вертикальных сечениях в зависимости от его абсциссы вдоль координатной линии над проемом (сечение II-II, рис. 2, в, г).

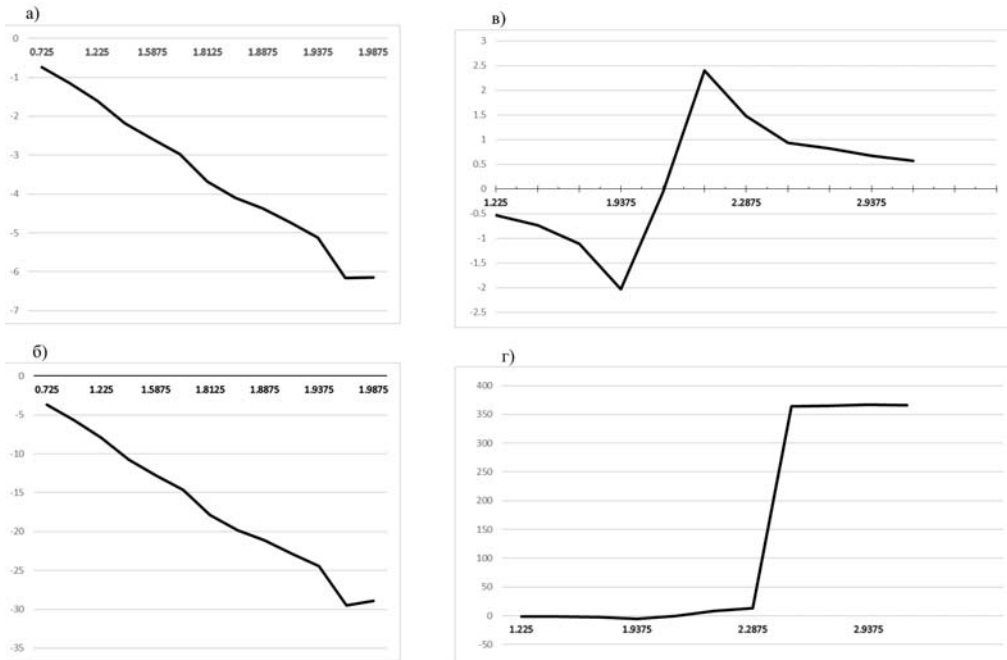


Рис. 2. Эпюры напряжений: а – в бетоне в сечении I-I; б – в арматуре в сечении I-I; в – в бетоне в сечении II-II; г – в арматуре в сечении II-II.

Как показал численный анализ, в простенке на уровне его верха, совпадающего с верхом проема (где в упругом решении имеет место сингулярность) в исследуемой пластине происходит концентрация нормальных напряжений, смяг-

ченная упругопластическим характером деформирования материала и неидеальностью входящего угла.

В горизонтальном волокне, расположенном непосредственно над проемом, в пределах простенка, в бетоне и арматуре действуют сжимающие нормальные напряжения, которые над проемом переходят в растягивающие; на эпюре напряжений в горизонтальной арматуре в сечении, где в растянутом бетоне возникла трещина и установились напряжения остаточного зацепления ее берегов, имеет место скачок напряжений.

Выводы. Дискретизация методом неполной дискретизации в сочетании с методом Бубнова – Галеркина и линеаризация модифицированным методом Ньютона позволяют выполнять анализ напряженно – деформированного состояния пластин, выполненных из армированного упругопластического материала, в области совместного влияния различных источников возмущения этого состояния.

1. *Cheung Y.K.* The Finite Strip Method / Y.K. Cheung, L.G. Tham.– Boca Raton.: CRC Press, 1997. – 416 p.
2. *Friedrich R.* Finite strip method: 30 years A bibliography (1968–1998) / R. Friedrich // Int. J. for computer Aided Engineering. – 2000. – № 17.1. – P. 92–111.
3. *Milasinovic D.* Quasi static and dynamic inelastic buckling and failure of folded-plate structures by a full-energy finite strip method / D. Milasinovic , D. Majstorovic, R. Vukomanovic // Advances in Engineering Software. – 2018. – Vol. 117. – P. 136–152.
4. *Лурье А.И.* Статика тонкостенных упругих оболочек / А.И. Лурье. – М.: Гостехтеориздат, 1947. – 252 с.
5. *Новожилов В.В.* Линейная теория тонких оболочек / В.В. Новожилов, К.Ф. Черных, Е.И. Михайловский. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.
6. *Григоренко Я.М.* Решение задач теории оболочек на ЭВМ / Я.М. Григоренко, А.П. Мукоед. – Киев: Вища школа, 1979. – 280 с.
7. *Трач В.М.* Об одном вариационном принципе теории упругости / В.М. Трач // Вестник Донецкого университета. – Серия А. Естественные науки. – 2006. – № 1. – С. 126–130.
8. *Василенко А.Т.* Исследование напряженного состояния неоднородных цилиндрических оболочек / А.Т. Василенко, Н.Д. Панкратова // Прикл. механика – 1982. – Т. 18. – № 9. – С. 23–29.
9. *Слободянский М.Г.* О построении приближенного решения в линейных задачах / М.Г. Слободянский // Прикл. математика и механика. – 1955. – Т. 19. – Вып. 5. – С. 623–626.
10. *Станкевич А.Н.* История и перспективы развития одного из методов решения многомерных задач строительной механики / А.Н. Станкевич // Вестник МГСУ. – 2015. – № 12. – С. 76–91.
11. *Канторович Л.В.* Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла / Л.В. Канторович // Изв. АН СССР: ОМЭН. – 1933. – № 5. – С. 647–652.
12. *Канторович Л.В.* Использование идеи метода Галеркина в методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям / Л.В. Канторович // Прикл. математика и механика. – 1942. – Т. 6, № 1. – С. 31–40.
13. *Бубнов И.Г.* Отзыв о сочинениях проф. Тимошенко, удостоенных премии им. Журавского / И.Г. Бубнов // Сб. Ин-та инж. путей сообщения. – 1913. – Вып. 81. – С. 33–36.
14. *Галеркин Б.Г.* Стержни и пластины. Ряды в некоторых задачах упругого равновесия стержней и пластин / Б.Г. Галеркин // Вестник инженеров. – 1915. – № 19. – С. 897–908.
15. *Власов В.З.* Общая теория оболочек и ее применения в технике / В.З. Власов. – М.: ГИТТЛ, 1949. – 784 с

16. Милейковский И.Е. Метод исходных уравнений при расчете пологих оболочек на ЭЦВМ / И.Е. Милейковский // Новые методы расчета строительных конструкций: Сб. статей. – М.: Стройиздат, 1968. – С. 20–31.
17. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / С.К. Годунов // Успехи математических наук. – 1962. – Т. 16, № 6. – С. 171–174.
18. Кущенко В.Н. Научные основы обеспечения надежности и экономичности шахтных копров / В.Н. Кущенко, В.М. Левин, В.Ф. Мушанов и др. – Макеевка: ДонНАСА, 2012. – 461 с.
19. Круглов В.М. Основные физические соотношения для бетона в плоском напряженном состоянии / В.М. Круглов, В.И. Козачевский // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1989. – Вып. 55. – С. 71–77.
20. Карпенко В.И. Общие модели механики железобетона / А.И. Карпенко. – М.: Стройиздат, 1986. – 416 с.
21. Григolloк Э.И. Проблемы нелинейного деформирования. Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела / Э.И. Григolloк, В.И. Шалашилин. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
22. Левин В.М. Численный анализ напряженного состояния неупругих складок в окрестности отверстий / В.М. Левин // Вісн. Дніпр. ун-ту. Серія «Механіка». – 2006. – Вип.10, т.2. – С. 103–109.
23. Левин В.М. Напряженно-деформированное состояние и разрушение неупругих складчатых систем с проемами / В.М. Левин, В.А. Митраков // Вестник НИЦ «Строительство». Исследования по теории сооружений. – 2011. – Вып. 3-4. – С.146–156.
24. Левин В.М. Численное моделирование процессов деформирования и разрушения пластин и складок из армированного упругопластического материала при наличии жесткого включения / В.М. Левин, В.А. Митраков // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: Тр. VII Междунар. науч. конф. – Т. 2. – Донецк: ДонНУ, 2013. – С. 20–24.
25. Левин В.М. Исследование напряженного состояния несущих стен железобетонных башенных сооружений в зоне проемов / В.М. Левин, В.Е. Райгородецкий // Пространственные конструкции зданий и сооружений: Сб. статей – ЦНИИСК им. Кучеренко, НИИЖБ. – 1991. – Вып. 7. – С. 37–39.

V.M. Levin

Analysis of stress-strain state of a reinforced elastoplastic plate in the vicinity of sources of its disturbance.

The paper considers the analysis of the stress state of a plate made of a reinforced elastoplastic material (like concrete) with three sources of its disturbance: an opening, a rigid inclusion, and a local load applied to it. The method of incomplete discretization was applied, the approximation was performed by the Bubnov – Galerkin method, the linearization was carried out by the discrete method of continuation in the load parameter with iterative refinement at each step by the modified Newton's method, transformed in relation to the needs of this computational process. Strength conditions and deformation dependences correspond to the deformation theory of plasticity of concrete by Kruglov – Kozachevsky, reinforcement – in the form of a shortened Prandtl diagram.

Keywords: reinforced elastoplastic plate, stress – strain state, incomplete discretization, Bubnov – Galerkin method, Newton's method, deformation theory of concrete plasticity.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 519:539.3:534.1

©2021. В.Н. Павлыш, С.В. Сторожев

НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УСТОЙЧИВОСТИ ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК

Представлено решение задачи распространения численно-аналитической нечетко-множественной методики описания эффектов влияния неконтрастности в значениях исходных физико-механических и геометрических параметров на случай анализа математической модели потери устойчивости тонкой замкнутой изотропной оболочки тороидальной формы, подверженной воздействию интенсивных статических равномерно распределенных по внешней поверхности нормальных сжимающих усилий. Методика предполагает применение приема фаззификации обладающих разбросами экзогенных параметров модели с переходом к их нечетко-интервальным представлениям и последующее расширение области определения функциональных расчетных соотношений детерминистической версии рассматриваемой модели на аргументы нечетко-множественного типа в рамках альфа-уровневой формы эвристического принципа обобщения. Приведены отдельные результаты численных исследований с применением излагаемой методики.

Ключевые слова: тонкие изотропные оболочки, замкнутая тороидальная форма, действие равномерных сжимающих усилий, прикладные модели статического деформирования, эффекты потери устойчивости, неопределенные исходные параметры, учет разбросов значений, методы теории нечетких множеств, эвристический принцип обобщения.

Введение и цели исследования. Исследования статических деформационных моделей устойчивости тонкостенных оболочечных конструкций [1], в частности оболочек замкнутой тороидальной формы, несмотря на достаточно длительную историю сохраняют важное фундаментальное и прикладное значение, практический интерес для инженерных применений в важнейших научно-промышленных отраслях, таких машиностроение, строительство, воздушный и подводный транспорт, аэрокосмическая техника [1 – 7], к которым в последнее время добавились междисциплинарные разработки в области термоядерной энергетики. К сохраняющим крайнюю актуальность аспектам таких исследований относятся вопросы анализа эффектов влияния неопределенности в виде разбросов экспериментальных и технологических расчетных значений неконтрастных физико-механических и геометрических параметров конструкций на подлежащие определению показатели критических интенсивностей внешних нагружений. Развитая практика применения для учета отмеченных факторов неопределенности методов вероятностного стохастического анализа [8, 9] зачастую стал-

квивается с ситуацией отсутствия имеющей корректную статистическую природу исходной информации. Более мягкие условия к характеру неопределенных экзогенных данных и дополнительные возможности в этом направлении, включая возможности использования результатов обработки маломощных частотных выборок и данных субъективных экспертных заключений, а также наличие аппарата непосредственного оперирования неконтрастными величинами без процедур их усреднения, открываются в рамках применения в таких исследованиях методов нечетких множеств (методов теории нечетких вычислений) [10–14]. Данный подход к получению оценок влияния разбросов исходных параметров предполагает осуществление процедуры фазсификации неконтрастных исходных параметров с разбросами значений путем перехода к нечетко-интервальным величинам, используемым далее в качестве нечетко-множественных аргументов в аналитических соотношениях детерминистических версий моделей расчета критических усилий на основе применения модифицированной альфа-уровневой версии эвристического принципа обобщения [15–17].

В контексте изложенных соображений, целью осуществляемых в работе исследований является распространение нечетко-множественной методики получения оценок для эффектов влияния разбросов значений экзогенных механических и геометрических параметров в математических моделях механики деформирования применительно к задачам устойчивости тонкостенных конструкций в виде тонких замкнутых изотропных оболочек тороидальной формы, подверженных действию равномерно распределенных по граничной поверхности сжимающих внешних усилий.

1. Описание критических значений внешнего нормального давления в рамках детерминистической версии модели. В представляемом исследовании используются полученные в [1, 2] результаты решения в классической постановке задачи определения критических значений равномерно распределенных по внешней поверхности нормальных усилий, обуславливающих потерю устойчивости при безмоментном деформировании тонкой замкнутой в обоих направлениях изотропной тороидальной оболочки.

Оболочка характеризуется геометрическими параметрами толщины стенки h , радиуса круговых сечений R_s трубчатой части и расстояния R_l от оси симметрии оболочки до центров поперечных сечений, а также физико-механическими параметрами модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν материала оболочки. Для оболочки с описанными характеристиками, согласно [1], значения критических усилий q_n^* описываются соотношениями

$$\begin{aligned} q_n^* &= \Phi_n(h, R_s, R_l, E, \nu) = \\ &= EhR_s^{-1}(1 - \nu^2)^{-1}(\delta_n(k) + (h^2/(12R_s^2))\lambda_n(k)) \end{aligned} \quad (1)$$

$$(n = 1, 2, \dots),$$

в которых

$$k = R_s/R_l,$$

$$\delta_n(k) = \frac{(1 + k^2/4)^{-1}((k^2/2)(n^2 + ((1 - \nu^2)/2)n^2k^2 + (1 + \nu)^2k^2 + \nu + 1))}{(n^2(n^2(1 + k^2/2) + (1 + \nu)k^2/2))}, \quad (2)$$

$$\lambda_n(k) = \frac{(1 + k^2/4)^{-1}((n^2 - 1 + n^2k^2/2)(n^2(1 + k^2/2) + k^2))}{(n^2(1 + k^2/2) + (1 + \nu)k^2/2) + k^2/2}.$$

При этом для функций $\Phi_n(h, R_s, R_l, E, \nu)$ во всей области их определения выполняются свойства

$$\partial\Phi_n(h, R_s, R_l, E, \nu)/\partial E > 0, \quad \Phi_n(h, R_s, R_l, E, \nu)/\partial h > 0, \quad (3)$$

учитываемые ниже при реализации процедуры перехода в функциональных отображениях (1) к нечетко-интервальным аргументам.

Для оценки меры влияния неконтрастности значений указанных исходных физико-механических и геометрических параметров в модели устойчивости рассматриваемой оболочки на определяемые соотношениями (1), (2) критические величины параметра внешнего нагружения, в данных функциональных соотношениях реализуется переход к нечетко-множественным аргументам с применением α – уровневой формы эвристического принципа расширения [10–17].

2. Получение нечетко-множественных оценок для параметров критических усилий. Исходным этапом процедуры расширения области определения аргументов h, R_s, R_l, E, ν функциональных соотношений (1), (2) на нечетко-множественные величины $\tilde{h}, \tilde{R}_s, \tilde{R}_l, \tilde{E}, \tilde{\nu}$ в виде нормальных трапецеидальных нечетких интервалов является ведение их представлений кортежами из значений границ носителей и границ интервалов модальных значений [18, 19]

$$\begin{aligned} \tilde{h} &= (h_1, h_2, h_3, h_4), \quad \tilde{R}_s = (R_{s1}, R_{s2}, R_{s3}, R_{s4}), \quad \tilde{R}_l = (R_{l1}, R_{l2}, R_{l3}, R_{l4}), \\ \tilde{E} &= (E_1, E_2, E_3, E_4), \quad \tilde{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4). \end{aligned} \quad (4)$$

Далее введенные интервалы представляются разложениями по множествам альфа-срезов в форме

$$\begin{aligned} \tilde{h} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha], \quad \tilde{R}_s = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{s\alpha}, \overline{R}_{s\alpha}], \quad \tilde{R}_l = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{l\alpha}, \overline{R}_{l\alpha}], \\ \tilde{E} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha], \quad \tilde{\nu} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha], \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \underline{h}_\alpha &= (1 - \alpha)h_1 + \alpha h_2, & \overline{h}_\alpha &= \alpha h_3 + (1 - \alpha)h_4; \\ \underline{R}_{s\alpha} &= (1 - \alpha)R_{s1} + \alpha R_{s2}, & \overline{R}_{s\alpha} &= \alpha R_{s3} + (1 - \alpha)R_{s4}; \\ \underline{R}_{l\alpha} &= (1 - \alpha)R_{l1} + \alpha R_{l2}, & \overline{R}_{l\alpha} &= \alpha R_{l3} + (1 - \alpha)R_{l4}; \\ \underline{E}_\alpha &= (1 - \alpha)E_1 + \alpha E_2, & \overline{E}_\alpha &= \alpha E_3 + (1 - \alpha)E_4; \\ \underline{\nu}_\alpha &= (1 - \alpha)\nu_1 + \alpha \nu_2, & \overline{\nu}_\alpha &= \alpha \nu_3 + (1 - \alpha)\nu_4. \end{aligned} \quad (6)$$

Нечетко-множественные описания для эндогенных параметров интенсивности критических усилий с применением α – уровневой формы эвристического принципа расширения [15–17] при учете свойств (3) соответственно записываются в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_n^* &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [q_{n\alpha}^*, \bar{q}_{n\alpha}^*], \\ q_{n\alpha}^* &= \inf_{\substack{R_s \in [\underline{R}_{s\alpha}, \bar{R}_{s\alpha}] \\ R_l \in [\underline{R}_{l\alpha}, \bar{R}_{l\alpha}] \\ \nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha]}} \Phi_n(\underline{h}_\alpha, R_s, R_l, \underline{E}_\alpha, \nu), \\ \bar{q}_{n\alpha}^* &= \sup_{\substack{R_s \in [\underline{R}_{s\alpha}, \bar{R}_{s\alpha}] \\ R_l \in [\underline{R}_{l\alpha}, \bar{R}_{l\alpha}] \\ \nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha]}} \Phi_n(\bar{h}_\alpha, R_s, R_l, \bar{E}_\alpha, \nu). \end{aligned} \quad (7)$$

Данные соотношения позволяют провести расчеты, связанные с получением описаний для функций принадлежности $\mu_{\tilde{q}_n^*}(q_n^*)$ нечетко-множественных характеристик \tilde{q}_n^*

3. Результаты численных исследований. На основе применения описанной методики реализован ряд расчетов, связанных с нечетко-множественным анализом рассматриваемой модели.

При этом полагается, что рассматриваемая оболочка изготовлена из стали, и в качестве задачи численного анализа подлежат расчету функции принадлежности для нечетко-множественных оценок \tilde{q}_n^* в случае задания совокупности нечетко-интервальных исходных параметров вида:

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= (19.7E_*, 19.9E_*, 20.0E_*, 20.2E_*), \quad \tilde{\nu} = (0.276, 0.279, 0.282, 0.285), \\ \tilde{R}_s &= (0.95R_*, 0.99R_*, 1.02R_*, 1.06R_*), \\ \tilde{R}_l &= (104.95R_*, 104.99R_*, 105.02R_*, 105.06R_*), \\ \tilde{h} &= (0.0038R_*, 0.004R_*, 0.0042R_*, 0.0044R_*), \\ E_* &= 10^{10}[\text{Па}], \quad R_* = 1[\text{М}]. \end{aligned} \quad (8)$$

Результаты расчетов $\mu_{\tilde{q}_n^*}(q_n^*)$ с использованием соотношений (1), (2), (7) для этого варианта задания неконтрастных исходных параметров приведены на рисунках 1 – 3. При этом с учетом немонотонной зависимости q_n^* от n и зависимости соответствующей минимальному значению q_n^* величины n от совокупности физико-механических и геометрических характеристик модели, для рассматриваемого варианта нечетких экзогенных параметров дано описание функции принадлежности для минимального по медианному значению нечетко-множественного показателя \tilde{q}_3^* и двух следующих по возрастанию медианных значений на носителях нечетко-множественных величин \tilde{q}_2^* и \tilde{q}_4^* .

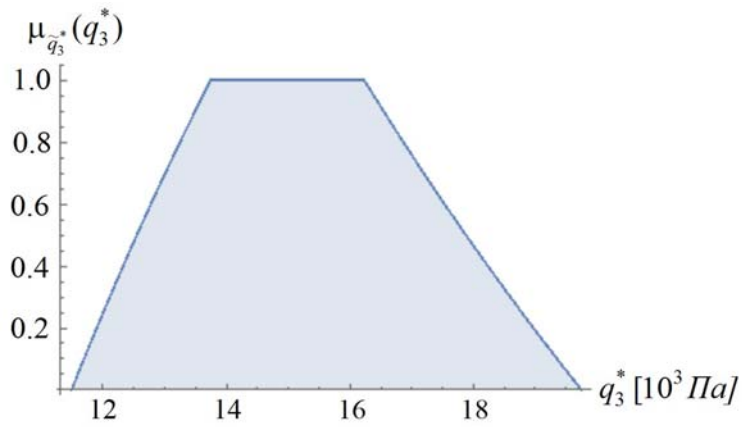


Рис.1. Профиль функции принадлежности $\mu_{q_3^*}(q_3^*)$.

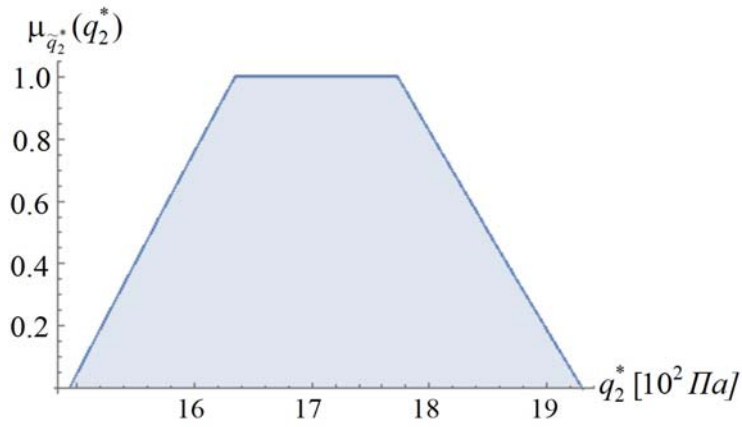


Рис.2. Профиль функции принадлежности $\mu_{q_2^*}(q_2^*)$.

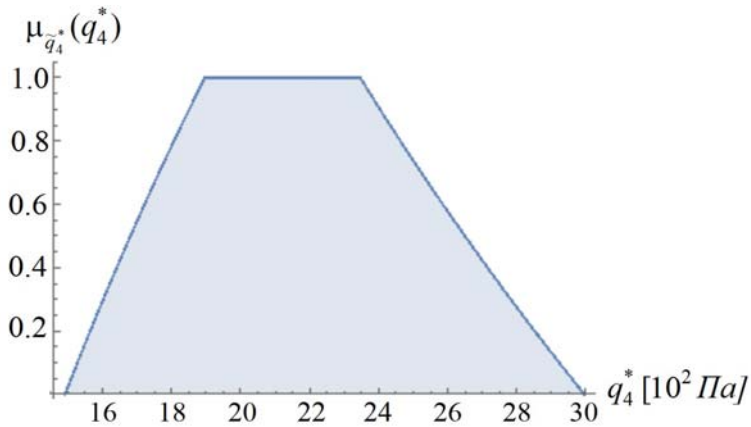


Рис.3. Профиль функции принадлежности $\mu_{q_4^*}(q_4^*)$.

Анализ результатов расчетов позволяет заключить, что максимальные разбросы для задаваемых в виде (8) исходных нечетко-интервальных параметров \bar{E} , $\bar{\nu}$, \bar{R}_i относительно медианных значений на носителях составляют не более 1.6%; для исходного параметра \bar{R}_s этот разброс составляет 5.5%, а для исходного параметра \bar{h} – 7.3%. Расчетный оцениваемый максимально возможный разброс для параметров \tilde{q}_2^* и \tilde{q}_3^* относительно средних значений на интервалах их носителей составляет в данном случае порядка 26.4%, а в диапазонах наиболее достоверных значений на модальных интервалах относительно их средних значений – порядка 8.2%. Для параметра \tilde{q}_4^* оценка максимально возможного разброса на интервале носителя составляет порядка 33.5%, а в диапазоне наиболее достоверных значений на модальном интервале – порядка 10.5%. Вид рассчитанных функций принадлежности позволяет оценить меру возможности достижения соответствующих значений эндогенным параметром интенсивности критического давления q_n^* в случае задания рассматриваемых неконтрастных исходных параметров расчетной модели.

Выводы. Результатами представленных в данной работе исследований является распространение численно-аналитической нечетко-множественной методики учета факторов неопределенности обладающих разбросами значений исходных физико-механических геометрических параметров в процессе анализа модели устойчивости тонкой изотропной идеально упругой замкнутой оболочки тороидальной геометрической формы. Методика базируется на задании фазифицированных неконтрастных исходных параметров с разбросами значений нечетко-интервальными величинами и на расширении областей определения функциональных соотношений детерминистических версий рассматриваемых моделей на нечетко-множественные аргументы. На основании реализованных вычислительных экспериментов получены описания функций принадлежности для рассчитываемых нечетко-множественных эндогенных характеристик интенсивности критических усилий и представлен сопоставительный анализ величин разбросов исходных параметров и разбросов в получаемых нечетко-множественных оценках.

Описываемая методика дает возможность установить диапазоны наиболее достоверных отклонений в значениях эндогенных параметров расчетных моделей при оговариваемых разбросах исходных физико-механических и геометрических параметров и определить предельные границы возможных разбросов для значений исследуемых характеристик на минимальном уровне уверенности.

1. *Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1976. – 984 с.*
2. *Вольмир А.С. Устойчивость тороидальных композитных оболочек / А.С. Вольмир, К.З. Хайрнасов // Механика композитных материалов. – № 3. – 1982. – С. 454–459.*
3. *Wenmin R. A survey of works on the theory of toroidal shells and curved tubes / R. Wenmin // Acta Mechanica Sinica. – Vol. 15. – No. 3. – 1999. – P. 225–234. doi: 10.1007/BF02486150*
4. *Biachut J. On buckling of toroidal shells under external pressure / J. Biachut, O. Jaiswal // Computers & Structures. – Vol. 77. – No. 3. – 2000. – P. 233–251. doi: 10.1016/S0045-7949(99)00226-6*

5. *Croll J.G.A.* Stability in Shells / J.G.A. Croll // *Nonlinear Dynamics*. – Vol. 43. – 2006. – P. 17–28.
6. *Sun B.* Closed-Form Solution of Axisymmetric Slender Elastic Toroidal Shells / B. Sun // *Journal of Engineering Mechanics*. – Vol. 136. – No. 10. – 2010. – P. 1281–1288. doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000175
7. *Asratyan M.G.* Mixed boundary-value problems of thermoelasticity for anisotropic-in-plan inhomogeneous toroidal shells / M.G. Asratyan, R.S. Gevorgyan // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – Vol. 74. – No. 3. – 2010. – P. 306–312. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2010.07.006
8. *Болотин В.В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. – М.: Стройиздат, 1982. – 352 с.
9. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел / В.А. Ломакин. – М.: ЛЕНАНД, 2014. – 144 с.
10. *Дилигенский Н.В.* Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Н.В. Дилигенский, Л.Г. Дымова, П.В. Севастьянов. – М.: Издательство Машиностроение - 1, 2004. – 397 с.
11. *Ротштейн А.П.* Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов / А.П. Ротштейн, С.Д. Штовба, А.Н. Козачко. – Винница: УНІВЕРСУМ, 2007. – 215 с.
12. *Нгуен Куок Ши* Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.
13. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
14. *Bede B.* Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic / B.Bede. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. – 276 p.
15. *Vyskub V.G.* Model of fuzzy estimation of mechanical stress concentration for aerospace and industrial flat structures with polygonal holes of uncertain curvature at rounded corner points / V.G. Vyskub, E.I. Mutina, V.I. Storozhev, S.V. Storozhev // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 537 (2019), 022013, URL: <http://doi:10.1088/1757-899X/537/2/022013>.
16. *Мутин Д.И.* Учет разброса значений экзогенных параметров в модели устойчивости тонкой цилиндрической оболочки при равномерном осевом сжатии / Д.И. Мутин, С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // *Донецкие чтения 2020: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы V Международной научной конференции (Донецк, 17-18 ноября 2020 г.)*. – Том 1: Физико-математические и технические науки. Часть 1. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2020. – С. 77–79.
17. *Выскуп В.Г.* Оценки влияния разброса параметров в прикладных моделях устойчивости цилиндрических оболочек / В.Г. Выскуп, Д.И. Мутин, С.В. Сторожев, Зьюнг Минь Хай // *Механика твердого тела*. – 2020. – Вып. 50. – С. 133–144.
18. *Grzegorzewski P.* Trapezoidal approximations of fuzzy numbers / P. Grzegorzewski, E. Mrowka // *Fuzzy Sets Syst.* – 2005. – Vol. 153. – P. 115–135.
19. *Ban A.I.* Trapezoidal approximation and Aggregation / A.I. Ban, L.C. Coroianu, P. Grzegorzewski // *Fuzzy Sets Syst.* – 2011. – Vol. 177. – P. 45–59.

V.N. Pavlysh, S.V. Storozhev

Fuzzy-set analysis of the mathematical model of the stability of toroidal shells.

The solution of the problem of generalization of a numerical-analytical fuzzy-multiple methodology for describing the effects of the influence of non-contrast in the values of the initial physical-mechanical and geometric parameters for the case of analyzing of the mathematical model of buckling of a thin closed isotropic toroidal shell subjected to intense static uniformly distributed

normal compressive forces on the outer surface is presented. The technique involves the use of fuzzification of the non-contrasted exogenous parameters of the model with a transition to their fuzzy-interval representations and the subsequent expansion of the domain of definition of the functional calculation ratios of the deterministic version of the model under consideration to arguments of fuzzy-set type within applying of the alpha-level form of the heuristic principle of generalization.

Some results of numerical studies using the described technique are presented.

Keywords: *thin isotropic shells, closed toroidal shape, uniform compressive forces, applied models of static deformation, buckling effects, uncertain initial parameters, scatter errors of values, methods of the theory of fuzzy sets, heuristic principle of generalization.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный технический университет”,
Донецк

ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры”, Макеевка
s.storozhev@donnasa.ru

Получено 21.01.2021

ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД,
РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ
ТЕПЛОФИЗИКА

УДК 550.834:622.12

©2021. А.А. Глухов

АЛГОРИТМ МЕТОДА ДИФРАГИРОВАННЫХ ВОЛН
ПО ПРОГНОЗУ ДИЗЪЮНКТИВОВ УГОЛЬНЫХ ПЛАСТОВ

В данной статье приведены математические основы метода дифрагированных волн и дан краткий анализ того, как могут проявляться геологические нарушения на сейсмических изображениях горного массива.

Ключевые слова: шахтная сейсморазведка, прогноз дизъюнктивов, метод дифрагированных волн.

Введение и общая характеристика проблемы. Одной из основных проблем шахтной сейсморазведки является зависимость информативности метода от типа геологического нарушения, от его положения и ориентации в пространстве и целого ряда иных параметров [1]. Особую сложность в обнаружении представляют собой тектонические нарушения ориентированные относительно профиля наблюдений таким образом, что отраженные от него волн, либо преломленные волны не могут быть зарегистрированы. В этом случае методы отраженных (МОВ) либо проходящих (МПВ) волн имеют крайне ограниченное применение.

В настоящее время в качестве альтернативы ведутся исследования в области разработки нового подхода на основе использования дифрагированных волн [2, 3]. Подход апробирован на практике на ряде объектов Украины, России и Казахстана, реализован в специализированном программном обеспечении [4] и может быть рекомендован как дополнительный способ обработки данных сейсморазведки, который не привязан к определенным схемам наблюдений и, в этом плане универсален. Основная проблема метода в том, что для него пока не сформулированы четкие условия применимости и системы прогнозных критериев.

В данной статье приведены математические основы метода дифрагированных волн и дан краткий анализ того, как могут проявляться геологические нарушения на сейсмических изображениях горного массива.

1. Алгоритм реализации метода дифрагированных волн. Рассмотрим систему наблюдений (рис. 1), состоящую из источников сейсмических колебаний S_k ($k = 1..K$) и сейсмоприемников R_l ($l = 1..L$).

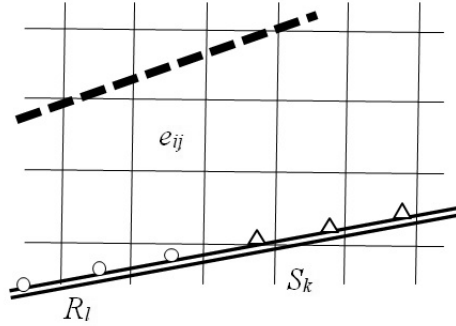


Рис. 1. К пояснению алгоритма получения изображений углепородного массива методом дифрагированных волн.

Получение мигрированных сейсмических изображений базируется на следующем алгоритме. Решается задача в заданной плоскости. Как правило, если исследования проводятся не из полевой выработки, то это плоскость залегания угольного пласта. Для построения сейсмических изображений участок углепородного массива разбивается на регулярную решетку элементарных ячеек e_{ij} с размерами сторон равными h и номерами i и j вдоль координатных осей X и Z , соответственно.

Согласно принципу Гюйгенса-Френеля каждая ячейка рассматривается как источник вторичных колебаний. Рассчитать сейсмическое изображение среды в элементарной ячейке e_{ij} следует используя соотношение:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L A_{ij}^{S_k R_l}, \quad (1)$$

где $A_{ij}^{S_k R_l}$ представляет собой частичное изображение ячейки среды, построенное по сеймотрассе сейсмоприемника l для пункта возбуждения k ; $T_{ij}^{S_k R_l}$ – время, за которое сигнал от пункта возбуждения k через ячейку e_{ij} достигает сейсмоприемника l . Его следует вычислить по формуле:

$$\begin{aligned} T_{ij}^{(R_l)} &= h/V((i - i_{(R_l)})^2 + (j - j_{(R_l)})^2), \\ T_{ij}^{(S_k)} &= h/V((i - i_{(S_k)})^2 + (j - j_{(S_k)})^2), \\ T_{ij}^{(S_k R_l)} &= T_{ij}^{(R_l)} + T_{ij}^{(S_k)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где V – средняя скорость на участках сейсмического луча от источника колебаний до ячейки e_{ij} и далее до сейсмоприемника. При построении изображения следует использовать значения скоростей распространения информативных волновых пакетов, полученные в результате расчета спектров скоростей. В качестве выступают соответствующие моменту времени мгновенные значения амплитуды

сейсмических колебаний на сейсмотрассе волнового поля, возбужденного источником S и зарегистрированного приемником R . Кроме этого, в алгоритме построения сейсмических изображений могут быть использованы коэффициенты учета направленностей источника и приемника. Соответствующее выражение для построения сейсмического изображения ячейки среды имеет вид:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L g_{ij}^l q_{ij}^k A_{ij}^{S_k R_l}, \quad (3)$$

где g_{ij}^l – коэффициент учета направления оптимального приема сейсмоприемника, а q_{ij}^k – коэффициент учета направленности источника колебаний. Пусть диаграмма направленности сейсмоприемника R_l такова, что направление наиболее эффективного приема информативной компоненты смещений частиц среды составляет определенный угол с направлением профиля (рис. 2). Поправка на направленность приемника может быть определена как $g_{ij}^l = g(\beta_l^{ij})$, где β_l^{ij} – угол между направлением приема отражённого сигнала и направлением оптимального приема сигнала. Хотя вид функции $g(\beta_l^{ij})$, как правило, записать в аналитическом виде не представляется возможным, на практике может быть использовано выражение $g_{ij}^l = \cos \beta_l^{ij}$. Аналогичным образом вводится поправка q_{ij}^k на направление удара (за исключением случая использования взрывного источника, для которого $q_{ij}^k = 1$).

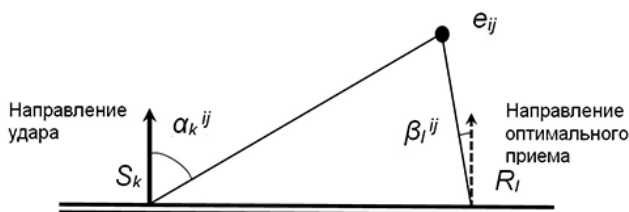


Рис. 2. К пояснению учета направленности источника и приемника.

Обязательной процедурой при использовании метода дифрагированных волн является предварительная нормировка сейсмотрасс. Она необходима для того, чтобы устранить влияние неоднородности уровня их записи, которая возникает по целому ряду причин. Это различные условия контакта сейсмоприемников с породой либо углем, различия в силах ударов (взрывов) источника колебаний и многое другое. Как результат, уровни записи сейсмотрасс могут отличаться на порядок [1]. Нормировка значений сейсмических отсчетов по сейсмотрассе в данном случае производится по формуле :

$$A(t) = A_0(t) K, \quad (4)$$

где $A(t)$ – выходные значения сейсмических отсчетов; $A_0(t)$ – исходные значения; $K = C/\max(A_0(t))$, где C – коэффициент нормировки (одинаков для

всех сеймотрасс); $\max(A_0(t))$ – максимальное значение амплитуды сигнала исходной сеймотрассы. Коэффициент нормировки, по сути, задает новый (одинаковый для всех сеймотрасс) уровень записи. В отдельных случаях может быть использована регулировка уровня записи (АРУ). Она позволяет компенсировать падение амплитуды колебаний, вызванное различными причинами и, в первую очередь, эффектом расхождения волны в пространстве. Используемый для АРУ алгоритм основан на соотношении, которое представляет собой более общий случай соотношения (4):

$$A(t) = A_0(t) K(t), \quad (5)$$

где $K(t) = \frac{C}{\max(A_0(t)) - \delta}$; $\max(A_0(t))$ – максимальное значение амплитуды сигнала на участке исходной сеймотрассы от $t-T/2$, до $t+T/2$, где T – ширина полосы усреднения; δ – значение порогового уровня алгоритма регулировки амплитуд. На рисунке 3 в качестве примера приведен набор теоретических сеймотрасс SH волн, на которых присутствуют как прямые, так и отраженные от нарушения колебания. В зависимости от отношения амплитуд прямых и отраженных волн на исходных сеймотрассах доминируют либо те, либо другие. Процедура нормировки не изменяет данную конфигурацию. Процедура АРУ повышает амплитуду информативных волн (рис. 3, б). Недостаток в том, что она так же действует и на волны-помехи.

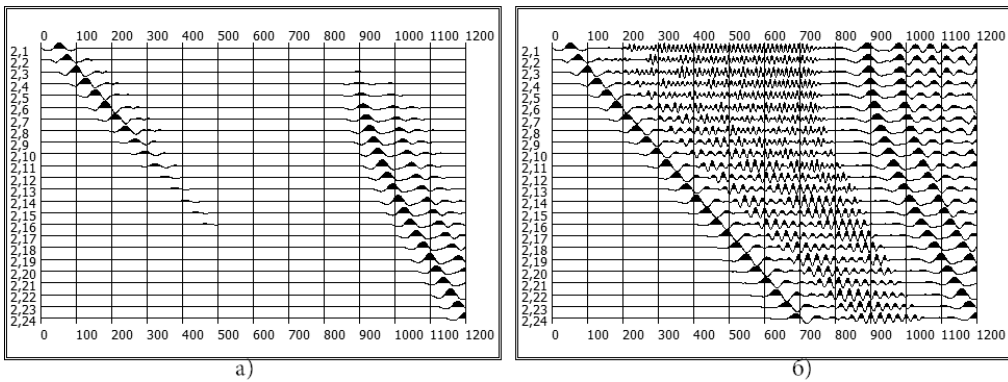


Рис. 3. Пример набора теоретических сеймотрасс SH волн, на которых присутствуют как прямые, так и отраженные от нарушения колебания: а) исходные сеймотрассы, б) после применения процедуры АРУ.

2. Применение метода для прогноза дизъюнктивов угольных пластов. То, как проявляются геологические аномалии на сейсмических изображениях, полученных по методу дифрагированных волн, можно проиллюстрировать следующим путем. На первом этапе для заданных условий средствами математического моделирования [5] производится расчет теоретических сеймотрасс. В качестве моделей использованы однородная среда, представляющая собой ненарушенный горный массив, а также среды, в которых моделировалось

тектоническое нарушение, расположенное под различными углами к профилю наблюдений. Горная выработка с системой наблюдений лежит в плоскости расчета. В качестве вмещающей породы выбран алевролит со скоростями распространения продольных и поперечных волн $V_p=2500$ м/с и $V_s=1550$ м/с, соответственно. Сместитель нарушения моделировался как среда, в которой данные значения уменьшены на 30 м/с. Профиль наблюдений располагается вдоль одиночной прямолинейной выработки. Двадцатьчетыре сейсмоприемника (СП) расположены с регулярным шагом 5 м. Точка пункта возбуждения (ПВ) сейсмических колебаний совпадает с точкой расположения первого из сейсмоприемников. На приведенном ранее рисунке 3 представлен фрагмент работы программного обеспечения [5] по расчету теоретических сейсмотрасс для одной из моделей. Сейсмотрасса № 2.1 соответствует СП, расположенному в точке ПВ, а сейсмотрасса № 2.24 – наиболее удаленному от ПВ сейсмоприемнику. Подобные наборы сейсмотрасс (по одной, группами, либо все сразу) служат для построения сейсмических изображений по методу дифрагированных волн программным комплексом для обработки данных сейсморазведки [4]. На участках ненарушенных пород обработка по методу дифрагированных волн генерирует сейсмические изображения, на которых отражаются только прямые волны в виде эллипсов (рис. 4), четкость которых велика в зоне ПВ и снижается по мере удаления. Это, по сути, образ самого источника колебаний.

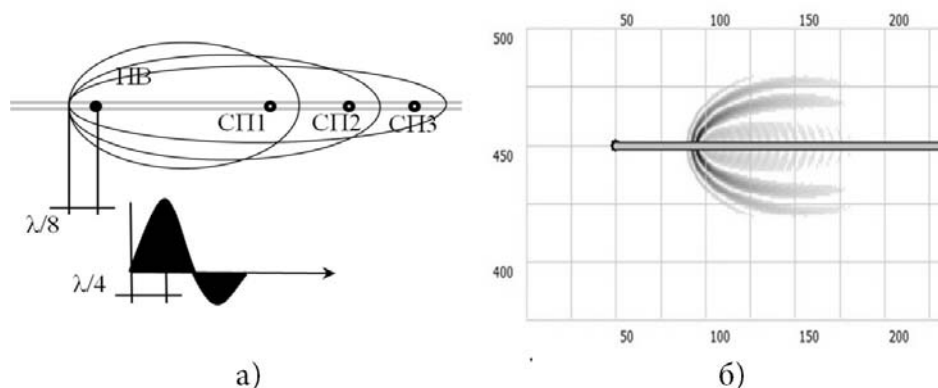


Рис. 4. Схема (а) и результат (б) формирования сейсмического изображения прямых волн на ненарушенном участке горного массива.

Это происходит по той причине, что сигнал имеет свою длительность, и каждый из максимумов исходных колебаний генерируется с задержкой (рис. 4, а). Первые максимум и минимум генерируются с задержками, равными четверти периода и полупериоду характерной длины волны, соответственно. Последующие максимумы и минимумы имеют относительно первых задержки, кратные полупериоду. Важно то, что задержки каждого из максимумов/минимумов не зависят от расстояния между ПВ и СП, а определяются формой сигнала. При использовании процедур обработки по методу дифрагированных волн образом

первого максимума информативной волны является эллипс, дальняя от СП точка которого располагается на расстоянии одной восьмой длины волны сигнала от ПВ (рис. 4, а). В этой точке размещаются образы первого максимума для любого СП, которые, суммируясь, образуют наиболее интенсивный максимум изображения. Подобным образом на расстоянии четверти длины волны от ПВ будет формироваться наиболее четкий минимум. Чем дальше располагается точка среды от указанных точек минимумов и максимумов, тем больше расстояние между эллипсами, являющимися образами максимумов и минимумов сигнала и, в результате, суммирование происходит в различных фазах. Эллипсы размываются, что и наблюдается на рисунке 4, б. В случае если дизъюнктив расположен таким образом, что системой наблюдений могут быть зарегистрированы волны, отраженные от нарушения, то образы точек годографов на сейсмотрассах располагаются вдоль системы эллипсов, общей касательной к которым является само нарушение. Каждый из отдельных эллипсов, согласно закону Снеллиуса, касается в точке, в которой угол падения луча равен был бы углу отражения. Данное свойство является базисом для применения метода эллипсов [6], и оно же является причиной генерации характерных полос синфазности при построении изображений методом дифрагированных волн. На рисунке 5, а изображена схема формирования сейсмического изображения тектонического нарушения на основе отраженных волн, а на рисунке 5, б – результат построения такого изображения. Используются только две сейсмотрассы, СП которых расположены на различных расстояниях от ПВ.

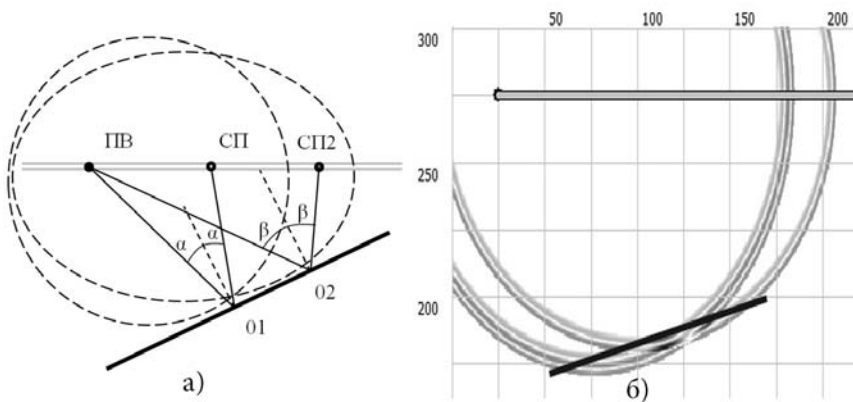


Рис. 5. Схема (а) и результат (б) формирования сейсмического изображения тектонического нарушения на основе использования отраженных волн.

Точки пересечения эллипсов, соответствующие максимумам и минимумам регистрируемого сигнала, размещаются вдоль нарушения. В этих точках происходит суммирование амплитуд колебаний в одинаковых фазах. На рисунке 6 представлено сейсмическое изображение по полному набору сейсмотрасс для всех СП. Результат сложения синфазных колебаний формирует очень четкую картину тектонического нарушения. Результаты моделирования показывают,

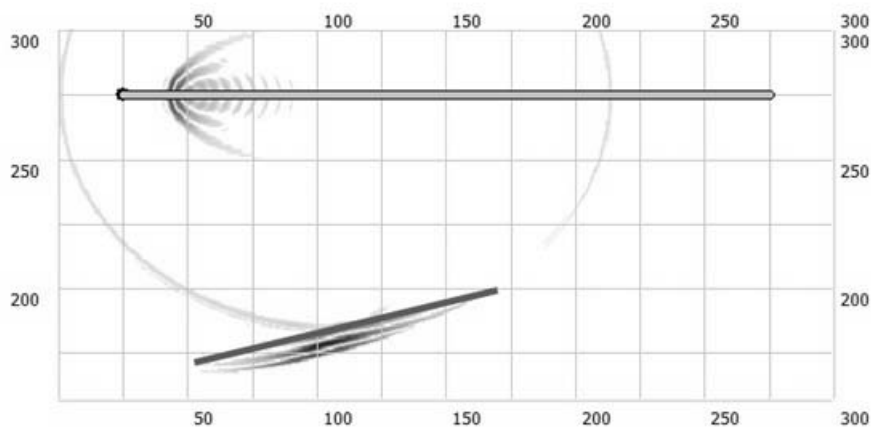


Рис. 6. Сейсмическое изображение нарушения на основе использования отраженных волн.

что точность определения ориентации нарушения относительно профиля наблюдений тем больше, чем больше расстояние между крайними точками отражений сейсмических лучей на нарушении. Оно напрямую зависит от длины профиля наблюдений и от расстояния от профиля до нарушения.

В случае, если дизъюнктив расположен таким образом, что системой наблюдений могут быть зарегистрированы только рассеянные на торце и вдоль нарушения волны, то образы точек географов располагаются на эллипсах, зоной пересечения которых является область рассеяния. Для иллюстрации на рисунке 7 изображена схема и результат формирования сейсмических изображений тектонического нарушения на основе рассеянных волн. Используются две сейсмострассы, СП которых расположены по разные стороны от дизъюнктива.

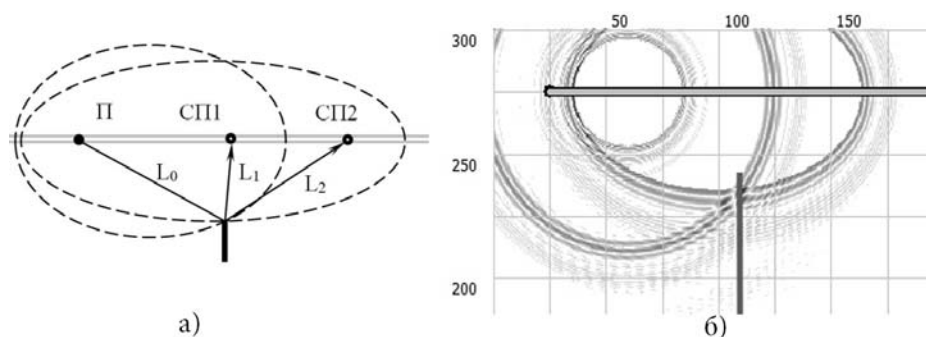


Рис. 7. Схема (а) и результат (б) формирования сейсмического изображения тектонического нарушения на основе использования рассеянных волн.

Поскольку построить общую касательную к такой системе эллипсов нельзя, то определить точно ориентацию нарушения не представляется возможным. Метод дифрагированных волн генерирует изображение края нарушения как об-

ласть, в которой полосы синфазности резко прерываются, либо претерпевают излом. Для иллюстрации этого служат последующие рисунки (рис. 8 и рис. 9). На рисунке 8 представлены результаты расчета для модели, в которой сместитель дизъюнктива расположен перпендикулярно профилю наблюдений строго по середине расстановки СП. При этом ни один из СП не может зарегистрировать отраженную волну. Регистрируется лишь результат рассеяния волн на нарушении.

На рисунке 8, а изображение нарушения получено на основе использования рассеянных SH волн, зарегистрированных тремя СП, расположенными на минимальном расстоянии от ПВ. Область, где колебания суммируются синфазно располагается за нарушением по эллипсу с коэффициентом сжатия близким к 1. В области перед нарушением зона синфазности размывается. На рисунке 8б для изображения нарушения используются волны, зарегистрированных несколькими СП, расположенными на максимальном от ПВ расстоянии. Область, где колебания суммируются синфазно, располагается по эллипсу перед нарушением, резко размываясь за ним. Наибольшие суммарные значения амплитуд наблюдаются в ближней к нарушению зоне. Изображения на рисунке 8, в и рисунке 8, г построены по полному набору сейсмотрасс. Они отличаются тем, что образ нарушения на рисунке 8, в построен с учетом вклада прямых волн. Изображение на рисунке 8, г отличается гораздо большей информативностью. Дизъюнктив проявляется как зона резкого изменения угла полос синфазности, характеризующаяся, в то же время, наибольшими значениями суммарных амплитуд.

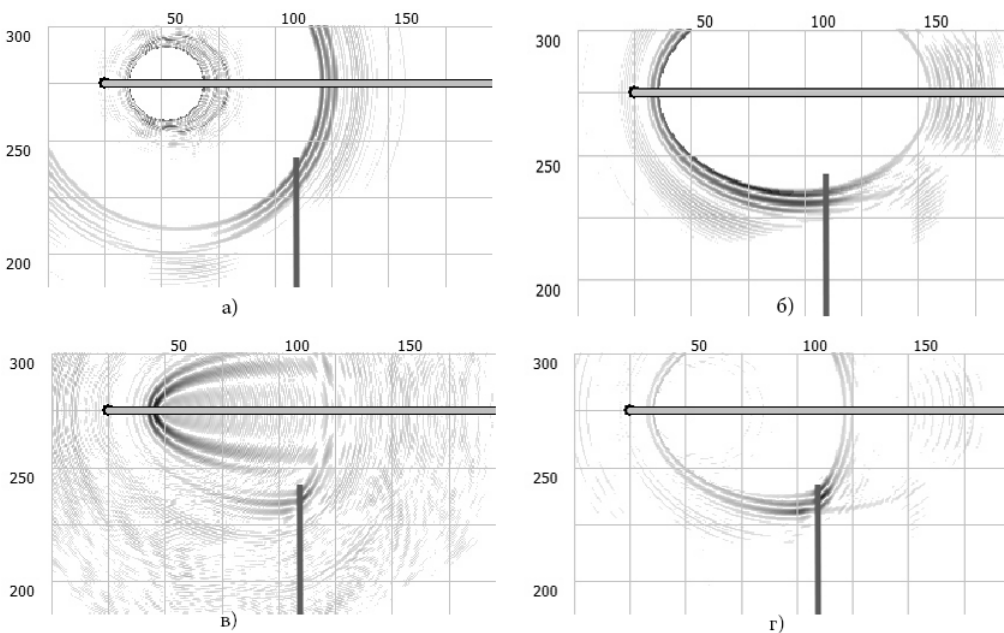


Рис. 8. Сейсмические изображения нарушения построенные на рассеянных волнах.

Результаты расчета для модели, в которой сместитель дизъюнктива расположен на одно прямой с ПВ, представлены на рисунке 9.

На рисунке 9, а изображение нарушения построено на основе использования рассеянных SH волн, зарегистрированных первым и последним СП на профиле наблюдений. На рисунке 9, б и рисунке 9, в для изображения нарушения используются волны, зарегистрированные наборами СП (по три), расположенными вблизи и на наибольшем от ПВ расстоянии, соответственно.

Изображение на рисунке 9, г построено по полному набору сейсмотрасс. Область, где колебания суммируются синфазно, располагается по эллипсу в зоне перед нарушением (относительно ПВ), резко размываясь за его сместителем. Расчеты показывают, что такая картина является типичной для таких углов взаимного расположения дизъюнктива и профиля наблюдений, когда отраженные волны не регистрируются. Следует отдельно отметить, рисунок 9 прекрасно иллюстрирует явление возбуждения вторичных колебаний по пути распространения волны.

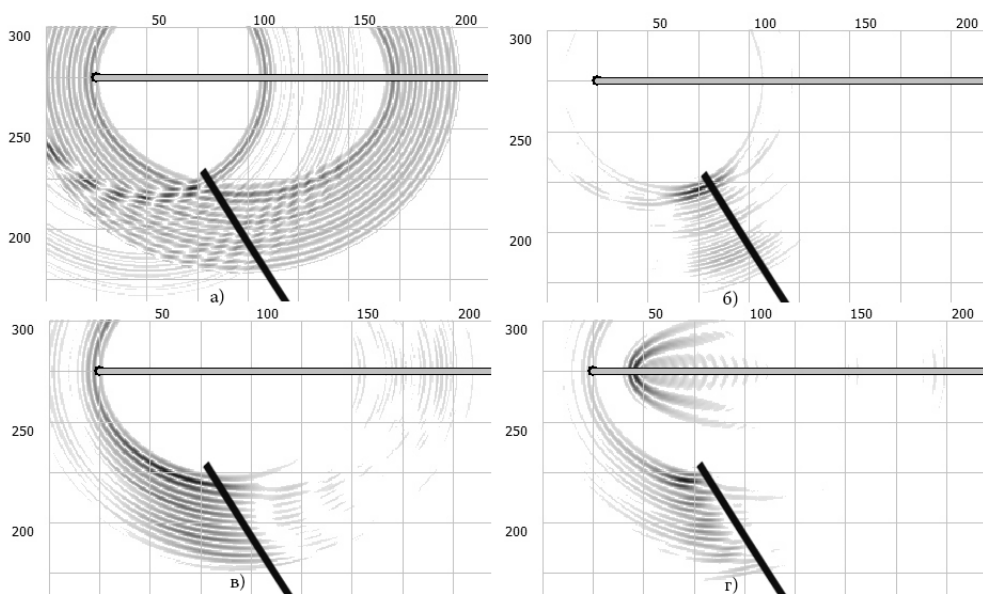


Рис. 9. Сейсмические изображения нарушения построенные на рассеянных волнах по трем ближайшим к ПВ сейсмоприемникам.

Выводы. Таким образом, если системой наблюдений на профиле могут быть зарегистрированы отраженные от нарушения волны, то с помощью предлагаемого алгоритма представляется возможным определить как дистанцию до нарушения, так и его ориентацию в массиве горных пород. Метод дифрагированных волн позволяет получить изображение нарушения в виде характерных полос синфазности.

Если дизъюнктив расположен таким образом, что на профиле наблюдений могут быть зарегистрированы только рассеянные на нарушении волны, предла-

гаемый алгоритм позволяет определить расстояние до аномалии и дать оценку её ориентации. Метод дифрагированных волн генерирует изображение нарушения как область, в которой полосы синфазности резко прерываются либо прерываются изломом.

1. *Анциферов А.В.* Теория и практика шахтной сейсморазведки / А.В. Анциферов. – Донецк: ООО “Алан”, 2002. – 312 с.
2. *Глухов А.А.* Об использовании миграции до суммирования при построении сейсмических изображений угленосных массивов методами пластовой сейсморазведки / А.А. Глухов // Наукові праці УкрНДМІ НАН України. – 2012. – № 14. – С. 209–216.
3. *Глухов А.А.* О перспективных методах прогноза геологических аномалий методами шахтной пластовой сейсморазведки / А.А. Глухов, Д.С. Бородин // Наукові праці УкрНДМІ НАН України. – 2012. – № 11. – С. 210–218.
4. *Глухов А.А.* О программном комплексе обработки результатов шахтных сейсмических экспериментов / А.А. Глухов, А.В. Анциферов // V Международная научная конференция «Донецкие чтения 2020: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности»: сб. науч. трудов. – Донецк: ДонНУ, 2020. – Т.1 (Ч.2). – С. 199–202.
5. *Глухов А.А.* О программном комплексе моделирования распространения сейсмических колебаний в угленосной толще / А.А. Глухов // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Сер. Обчислювальна техніка та автоматизація. – 2005. – Вип. 88. – С. 106–113.
6. *Глухов А.А.* Алгоритм прогноза геологических нарушений угольных пластов на основе использования метода эллипсов / А.А. Глухов, В.В. Туманов // Труды РАНИМИ: сб. научн. трудов. – 2018. – № 5(20). – С. 213–220.

A.A. Glukhov

Algorithm of diffracted wave method to predict coal seam faults.

In this paper, we present mathematical foundations of diffracted wave method and give a brief review of how geological faults of coal seams can be exhibited in seismic images of the ground.

Keywords: *mine seismic survey, fault prediction, diffracted wave method.*

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ), Донецк
Glukhov1964@yandex.ru

Получено 16.03.2021

УДК 622.284.74

©2021. В.А. Канин, В.В. Васютина

ОЦЕНКА РАССЛОЕНИЯ ПОРОД В КРОВЛЕ ПЛАСТА

Описаны теоретические основы и приводятся примеры практического использования метода контроля плотности кровли на основе резонансного акустического метода.

Ключевые слова: деформирование и разрушение пород, охрана горной выработки, вмещающие породы, напряженное состояние

Введение и общая характеристика подходов к решению рассматриваемой проблемы. Практически во всех расчетных схемах взаимодействия крепежных конструкций с вмещающими породами одним из основных параметров, определяющих нагрузку на охранную крепь, является суммарная мощность отслоившихся породных слоев в кровле пласта (параметр h). Но при расширении конкретных практических задач числовые значения этого параметра, чаще всего, являются неопределенными, так как количественные и качественные характеристики деформирования и разрушения пород в кровле в процессе ведения горных работ могут изменяться в самых широких пределах. Они зависят от мощности и угла падения разрабатываемого пласта, литологического состава, мощности и физико-механических свойств пород, их трещиноватости и обводненности, а также от величины захвата направления выемки угля, ширины поддерживаемого выработанного пространства, жесткости крепи и многих других факторов.

Совокупность всех этих обстоятельств практически исключает возможность использования известных расчетных методов для определения параметров расслоения пород в кровле пласта – положения поверхностей, ослабленных механических контактов и степени их ослабленности. Поэтому объективную информацию о поведении пород над призабойным и выработанным пространством можно получить только экспериментальным путем. При этом совершенно очевидным является то, что решение такой задачи следует осуществлять безшпуровыми геофизическими методами контроля состояния горного массива, исключающими любое вмешательство в технологический процесс выемки угля.

По мере развития прикладной геофизики, совершенствования аппаратурной базы и методического обеспечения, для решения широкого круга горных задач предложено много методов, которые прямо или косвенно могут быть использованы для оценки расслоения породного массива в горных выработках. Из всех этих методов, в качестве конкретных примеров, наиболее близких к решению поставленной задачи, следует отметить несколько апробированных методик из различных геофизических направлений. В частности:

1. Метод контроля параметров электромагнитного излучения, сопровождающего процессы деформирования и разрушения пород в горном массиве [1]. В

основе этого метода лежат два априорных положения о том, что генерация электромагнитного излучения происходит при зарождении и росте трещин в деформируемой области массива, а изменение частоты следования импульсов зависит от физико-механических свойств пород.

2. Электрометрические методы контроля состояния кровли пласта в призабойном пространстве, один из вариантов которых изложен в работе [2]. Практически во всех этих методах расслоение массива и изменение размеров породной консоли в призабойном пространстве лавы устанавливаются по динамике изменения напряжений, которые в свою очередь оцениваются по величине кажущегося электрического сопротивления пород. А в электрометрическом методе прогноза состояния кровли на рудных месторождениях [3] используют экспериментальную шкалу соответствия величин электросопротивления пород и степени нарушенности.

3. Радиометрический контроль напряженно-деформированного состояния горного массива [4] основан на том, что расслоение кровли пласта или изменение литологического состава пород приводят к изменению плотности массива, которая определяется гамма-гамма методом путем измерений интенсивности рассеянного в среде гамма – поля.

4. Метод исследований амплитудно-частотных параметров поля упругих колебаний, возникающих в массиве горных пород при любом ударном воздействии [5, 6], основан на использовании резонансных свойств горного массива (резонансных частот и добротности), которые обусловлены наличием в изучаемом массиве породных слоев, ограниченных поверхностями с ослабленными механическими контактами.

Первые два метода являются косвенными. Один из них оценивает энергию разрушения пород, величина которой не всегда является адекватной величине смещения породного массива, а второй – связывает деформации пород с величиной кажущегося электрического сопротивления через оценку динамики изменения напряжений в кровле пласта. Эти недостатки определяют низкую точность установления координат поверхностей ослабленных механических контактов в исследуемой области массива и не позволяют делать однозначные выводы о степени расслоения вмещающих пород. Возможно поэтому данные методы не получили широкое применение в промышленности.

Третий метод позволяет, в принципе, выявить положение полостей расслоений пород в кровле пласта прямыми измерениями, но его практическая реализация осуществляется путем каротажа шпуров, пробуренных через изучаемые породные слои, с помощью специальных зондовых устройств. Необходимость бурения шпуров в рабочей зоне выработки является большим недостатком и существенно ограничивает область применения этого метода.

Четвертый из перечисленных выше методов был разработан сравнительно недавно. Основные нормативные положения этого метода применительно к решению подземных горных задач и необходимая для этого аппаратура в искробезопасном исполнении появилась в конце восьмидесятых годов. На основе ис-

пользования специфических свойств слоистого массива, метод геоакустических спектральных измерений позволяет адекватно выявлять и определять пространственное положение поверхностей ослабленных механических контактов путем прямых измерений, что выгодно отличает его от косвенных методов. Теоретические основы данного метода, методика производства измерений и обобщение практического опыта изложены в целом ряде публикаций [6-8], включая и отраслевой нормативный документ [9]. На основании этих публикаций основные положения метода геоакустических спектральных измерений в обобщающем виде можно представить следующим образом.

1. Основные положения метода геоакустических спектральных измерений. При точечном ударе по поверхности слоистых пород поле упругих колебаний в массиве включает в себя несколько составляющих: - зондирующий импульс при ударном воздействии на массив; - собственные колебательные процессы, возникающие в слоях – резонаторах при ударном воздействии; - поле, изучаемое в окружающий массив ударно возбуждаемыми – резонаторами.

При ударном точечном воздействии энергия упругих колебаний равномерно заполняет пространство горного массива, а плотность энергии этой составляющей поля убывает с удалением от точки удара пропорционально площади поверхности сферы, с центром в точке удара. Поэтому даже при большей мощности зондирующего импульса амплитуда прямого сигнала является незначительной и пренебрежимо малой по сравнению с амплитудами сигналов от двух других составляющих поля. При прохождении зондирующего импульса через горный массив возбуждаются породные слои (слои – резонаторы). В каждом слое – резонаторе под действием продольных волн возникают и распространяются вдоль слоя собственные колебания, идущие на поперечных волнах с частотой f_0 . Для слоев-резонаторов строго выполняется соотношение между толщиной h , частотой f_0 и скоростью поперечных (сдвиговых) волн $V_{сдв.}$, которое имеет вид:

$$f_0 = V_{сдв.}/h. \quad (1)$$

При этом скорость поперечных колебаний можно рассматривать как постоянный коэффициент, равный 2500 м/с с отклонениями не более 10 м/с для всех типов осадочных пород - от аргиллитов до песчаников. Собственный колебательный процесс слоя-резонатора на поперечных волнах имеет реактивный характер, и его амплитуда может значительно превышать амплитуду возбуждающего сигнала. Это превышение оценивается добротностью Q ударно возбуждаемого слоя-резонатора, значение которой при анализе спектрального изображения сигнала определяется выражением:

$$Q = \frac{A(f_0)}{A(0)}, \quad (2)$$

где $A(f_0)$ – плотность спектра на соответствующей частоте; $A(0)$ - плотность спектра на нулевой частоте.

Колебательный процесс, возникающий в слое – резонаторе, сопровождается направленным излучением в окружающее пространство. При этом основное направление излучения совпадает с направлением перпендикуляра, восстановленного из точки удара. Наличие такого излучения проявляется в том, что сейсмоприемники, установленные на обнаженной поверхности в непосредственной близости от точки удара, могут зафиксировать поле, излучаемое слоем-резонатором, расположенным на достаточно большом удалении. А амплитуда этих сигналов может превышать амплитуду зондирующих импульсов.

Если породный слой мощностью h является одиночным, плоскопараллельным и ненарушенным, то в таком идеальном случае реакция слоя на ударное воздействие будет иметь вид, показанный на рисунке 1 а. При многослойном строении горного массива, состоящего из большого числа слоев – резонаторов, границами для спектрально-акустических измерений являются поверхности ослабленных механических контактов, по которым происходят проскальзывания соседних слоев.

Чаще всего такими поверхностями являются сомкнутые трещины и контакты между литологическими разностями пород. Реакция многослойного массива на ударное воздействие в общем случае имеет вид, показанный на рисунке 1 б. Каждый экстремум на этом графике представляет структуру с поверхностью ослабленного механического контакта. Расстояние от обнажения массива до поверхности ослабленного механического контакта определяется с достаточно высокой точностью по формуле, вытекающей из рассмотренного выше выражения (1).

$$h = 2500/f_0 \quad (3)$$

где h – глубина акустического зондирования массива, м; f_0 – частота на соответствующем участке спектра сигнала, Гц.

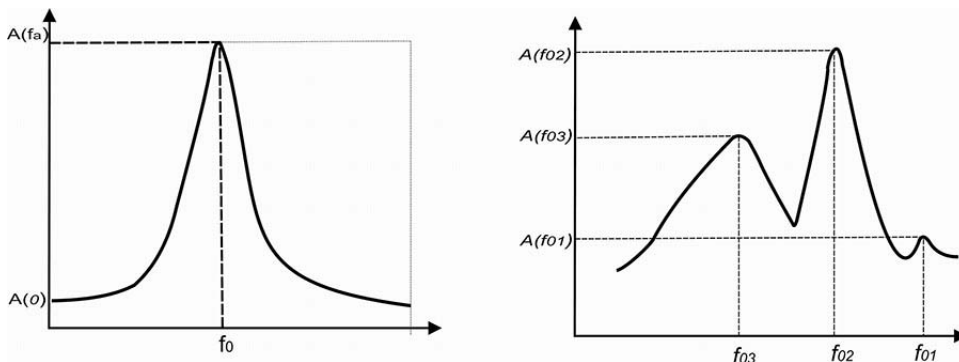


Рис. 1. Основные формы спектральных изображений акустических сигналов, принятых сейсмоприемником при ударном возбуждении одиночного слоя-резонатора (а) и нескольких плоскопараллельных слоев – резонаторов (б)

Степень ослабленности механического контакта между соседними слоями, определяется значениями добротности собственных колебаний слоя - резона-

тора, залегающего ниже анализируемого контакта. При увеличении прочности контакта между слоями добротность и амплитуда сигналов уменьшаются, а при снижении прочности увеличиваются. Добротность составного слоя-резонатора определяется граничными условиями его внешних поверхностей и в незначительной степени зависит от поверхностей контактов внутри слоя.

Добротность слоев-резонаторов не остается постоянной, а трансформируется в течение срока эксплуатации выработки в соответствии с изменением величины сцепления на поверхности ослабленных механических контактов под действием изменяющегося горного давления или гидрогеологических условий.

Для производства геоакустических спектральных измерений в угольных шахтах в конце восьмидесятых годов была разработана достаточно простая и вместе с тем надежная геофизическая аппаратура «Резонанс МК» [10], состоящая из пьезокерамического сейсмоприемника (геофона), измерительного блока и устройства возбуждения акустических колебаний (молотка).

Аппаратура «Резонанс МК» осуществляет последовательный спектральный анализ, поэтому количество ударов по поверхности массива должно соответствовать количеству точек на частотной оси. Кроме того, на одной частоте должно быть произведено, как минимум, два измерения – с целью проверки результата на повторяемость. Таким образом, при использовании аппаратуры «Резонанс МК» для выполнения одного цикла геоакустических спектральных измерений требуется большое количество ударов, наносимых по ограниченному участку кровли пласта, что накладывает определенные требования к прочности вмещающих пород и технике нанесения ударов. Это обстоятельство является наиболее существенным недостатком аппаратуры «Резонанс МК». В целом же за десять лет эксплуатации в различных горно-геологических условиях эта аппаратура зарекомендовала себя положительно.

В результате последовательного спектрального анализа принимаемого сигнала строится спектрограмма (f), для чего по оси координат откладывается величина амплитуды сигнала, считываемая с табло прибора, а по двойной оси абсцисс – частота (f) от 0,1 до 10 кГц и расстояние по нормали к кровле пласта (мощность породных слоев). Связь между собственной частотой f_{0i} и его геологической мощностью h_i определяется по формуле (1). Разбивка шкалы частот производится в логарифмическом масштабе, поэтому при постоянном отношении соседних частот расстояние между ними является постоянным.

Интерпретация спектрограмм сводится к выявлению положительных экстремумов и их амплитуды, определению частот f_{0i} , на которых эти экстремумы имеют место, и определению значений h_{0i} , соответствующих этим частотам. В зависимости от степени ослабленности механического контакта между соседними породными слоями изменяется добротность колебаний и, соответственно, высота подъема резонансной кривой на частоте f_{0i} . В пределе, когда происходит полное отслоение нижнего слоя кровли (вплоть до отрыва от вышележащих пород, но при условии сохранения монолитности и однородности этого слоя), значение $A(f_0)$ может приближаться к максимально возможной величине, которая

по характеристикам аппаратуры «Резонанс МК» составляет 256 делений.

В качестве примера, иллюстрирующего возможность количественной оценки расслоения пород кровли с помощью аппаратуры «Резонанс МК», рассмотрим результаты геоакустических спектральных измерений на сопряжении 3-й западной лавы с 4-м западным бремсбергом пласта II на шахте им. XXIX съезда КПСС («Сутоган») ГХК «Луганскуголь».

Пласт II на участке 3-й западной лавы имел простое строение, мощность 0,9-1,0 м и угол падения 4–6°. Непосредственная кровля пласта была представлена слоями аргиллита темно-серого, тонкослоистого, склонного к обрушению, и алевролита тонкослоистого. Выше залегал известняк L1 скрыто кристаллический, крепкий, мощностью 0,6-0,7 м. В непосредственной почве пласта залегал аргиллит комковатой структуры, «кучерявчик» мощностью 0,3-0,4 м, а ниже – песчаник тонкослоистый, склонный к пучению, мощностью 1,6 м и алевролит неясно слоистый, мощностью до 4,0 м. На участке 3-й западной лавы пласт отрабатывался по столбовой системе разработки. Очистные работы велись по восстановлению мехкомплексом КД-80. Поддержание 4-го западного бремсберга, осуществлялось блочными железобетонными тумбами (БЖБТ), которые устанавливались в виде сплошной полосы шириной 1,0 м. Для обеспечения податливости такой конструкции между железобетонными плитами укладывались деревянные брусья. Спектрограммы, полученные по результатам акустического зондирования кровли пласта в трех точках лавы, представлены на рисунке 2.

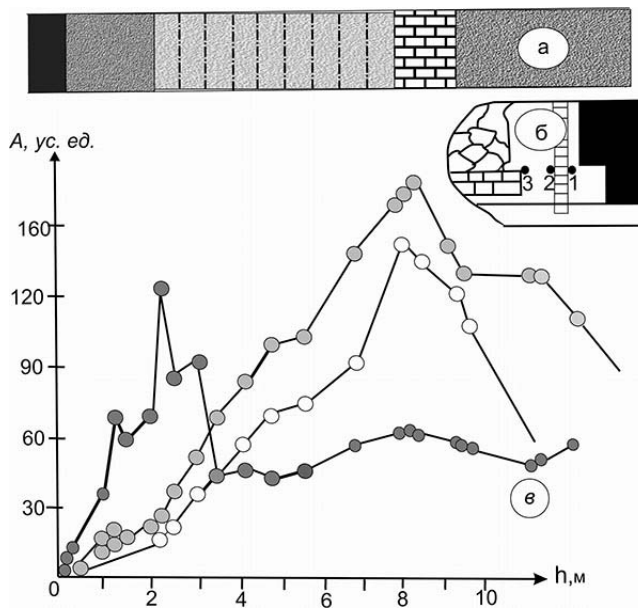


Рис. 2. Основные формы спектральных изображений акустических сигналов, принятых сейсмоприемником при ударном возбуждении одиночного слоя-резонатора (а) и нескольких плоскостепенных слоев – резонаторов (б)

Анализ этих спектрограмм позволяет исследовать динамику расслоения по-

род кровли над призабойным пространством. Вблизи забоя (точка 1), где деформирование вмещающих пород происходит, в основном, за счет упругого восстановления подработанного массива, сплошность пород непосредственной кровли практически не нарушена. Это подтверждается тем, что вся толщина непосредственной кровли мощностью 6-8 м (рис. 2, а), резонирует как монослой, а высокая амплитуда сигнала (кривая 1, рис. 2, б) свидетельствует об отсутствии в пределах этого монослоя существенной нарушенности пород. С удалением от забоя на 3-4 м (точка 2) породы получают возможность смещаться в выработанное пространство. Поддержание кровли на этом участке осуществляется за счет призабойной крепи, сопротивление которой является недостаточным, чтобы избежать расслоения породной толщи.

Как видно из спектрограммы (кривая 2 на рис. 2, б), амплитуда акустического сигнала на частоте 1,14 кГц, которая соответствует отслоившемуся породному слою мощностью 2,2 м, возросла более чем на порядок. Одновременно с этим в два раза уменьшилась максимальная амплитуда сигнала, характеризующая ослабленный механический контакт на границе смены литологического состава пород при переходе от алевролита к известняку. Произошедшая трансформация спектрограммы свидетельствует о том, что в кровле угольного пласта выделился слой породы мощностью 2,2 м, деформирующийся независимо от вышележащего массива.

Еще одно изменение в поведении пород кровли отмечается около охранной полосы из БЖБТ (кривая 3 на рис. 2, б). Спектрограмма акустических сигналов на этом участке лавы трансформировались практически к первоначальному виду, но с несколько меньшей добротностью во всем диапазоне частот. Сравнение спектрограмм, полученных в точках 1 и 3, показывает, что они достаточно близки между собой ($h_{01}=7,5$ м и $h_{03}=7$ м). А это означает, что после возведения полосы из БЖБТ с несущей способностью до 30 МПа толща пород мощностью 7,5 м получила жесткую опору в выработанном пространстве, в результате чего, контакт между смещающимися слоем кровли и вышележащими породами восстановился с увеличением межслоевого сцепления. Две спектрограммы полученные на шахте «Комиссаровская» (ГХК «Луганскуголь») при акустическом зондировании пород кровли на сопряжении 1-й западной лавы с 1-м западным бремсбергом пласта 15 мощностью 0,72-0,85 м и углом падения $7 - 8^\circ$ показаны на рисунке 3.

Выемочное поле на этом участке характеризовалось достаточно сложными тектоническими условиями и неустойчивыми вмещающими породами. Непосредственно над угольным пластом залегал сланец песчаный, мелкозернистый, с зеркалами скольжения, прочностью на одноосное сжатие 29-35 МПа, мощностью 2,0 м, а выше – сланец глинистый, прочностью 34-40 МПа, мощностью 5,0 м. Основная кровля была представлена мелкозернистым песчаником, прочностью 70,0 МПа и мощностью 7,3 м. В почве залегали сланцы песчаные и глинистые средней крепости.

Охрана сопряжения 1-й западной лавы пласта l_5 с 1-м западным бремсбергом

осуществлялась сплошной полосой из БЖБТ шириной 1,0 м, которая располагалась на расстоянии 0,8 м от «бровки» бремсберга. Оставление полосы от забоя лавы не превышало 5-6 м. Первая спектрограмма (кривая 1, рис. 3) отражает состояние пород в кровле пласта на расстоянии 1,0 м от забоя лавы.

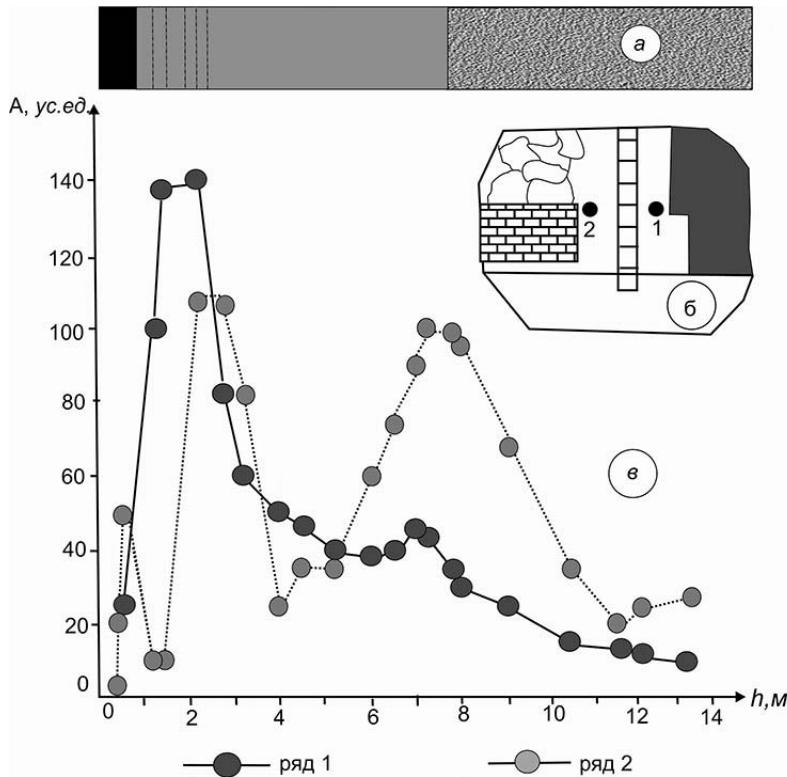


Рис. 3. Основные формы спектральных изображений акустических сигналов, принятых сейсмоприемником при ударном возбуждении одиночного слоя-резонатора (а) и нескольких плоскопараллельных слоев – резонаторов (б)

Исходя из этой спектрограммы, основным ослабленным механическим контактом, определяющим устойчивость непосредственной кровли, является полость расслоения на границе между песчаным и глинистым сланцем на расстоянии 2,0 м, от пласта. Второй, незначительный по величине экстремум этой спектрограммы на частоте 0,36 кГц соответствует границе раздела между глинистым сланцем и песчаником.

Кривая 2 на рисунке 3 является частотным спектром акустического поля в точке приема, находящейся на расстоянии 4,5 м от торца охранной крепи из БЖБТ. При зондировании этого участка горного массива на фоне снижения добротности нижнего слоя кровли наблюдается значительное (более чем в два раза) увеличение амплитуды, акустического сигнала на резонансной частоте 0,36 кГц, характеризующей границу раздела между глинистым сланцем и песчаником. Оба экстремума на спектрограмме практически сравнялись по аб-

солотной величине на уровне 100 ус. ед., что указывает на появление в кровле второй полости расслоения пород.

Таким образом, решая задачу определения расчетной нагрузки на охранную крепь через суммарную мощность отслоившихся породных слоев в кровле пласта ($h_{сл}$), на основании последнего практического примера можно сделать следующие выводы. На расстоянии 1,0 м от забоя лавы нагрузка на призабойную крепь определяется массой слоя песчаного сланца мощностью 2,0 м, на расстоянии 4-5 м от забоя лавы нагрузку на охранную крепь необходимо рассчитывать исходя из общей мощности непосредственной кровли, равной 7,0 м.

В процессе испытаний на шахтах Донбасса новых видов охранной крепи были получены десятки спектрограмм акустического зондирования горного массива, которые аналогичным образом определяют характер и числовые параметры расслоения породной толщи в кровле пласта. Эти спектрограммы демонстрируют широкие возможности геоакустических спектральных измерений для оценки расслоения кровли пласта, представленной одним породным слоем или многослойным массивом пород.

В настоящее время в РАНИМИ наряду с использованием современных достижений электронной аналоговой и цифровой техники разработана более совершенная модификация аппаратуры спектральной сейсморазведки – «Резонанс – 2к». В этой аппаратуре для обработки информации используется параллельный спектральный анализ, что в 30 - 40 раз сокращает объемы шахтных измерений и соответственно количество ударов наносимых по ограниченному участку кровли пласта.

Выводы. Применение современной прецизионной электронной элементной базы с использованием методики высококачественной обработки аналогового сигнала позволяет аппаратуре выполнять оцифровку сигналов от сейсмодатчиков с минимальными искажениями и без потери полезной информации. Малый вес и габариты позволяют эксплуатировать аппаратуру в любых по сложности условиях даже одним человеком. Входящий в аппаратуру вычислительный комплекс дает возможность обрабатывать информацию непосредственно в процессе выполнения измерений или после накопления некоторого объема данных. При этом измерительный модуль может накапливать данные по 256 точкам.

Программное обеспечение позволяет в процессе обработки информации производить распечатки спектров и всех спектральных характеристик для каждой точки приема сигналов. Окончательные результаты геоакустических спектральных измерений представляются в графическом виде путем построения на соответствующих разрезах поверхностей ослабленных механических контактов по всему профилю зондирования горного массива.

1. *Ткаченко Н.Ф.* Использование параметров электромагнитного излучения для контроля процессов разрушения углеродного массива / Н.Ф. Ткаченко, Г.А. Ткаченко // Горная геофизика. Материалы V Всесоюзного семинара. II часть. – Тбилиси: ИГТМ АН ГССР, 1989. – С. 45–48.
2. *Булат А.Ф.* Оценка состояния пород кровли электрометрическим методом / А.Ф. Булат,

- В.В. Колганов, С.Б. Вакарчук, Н.А. Филипова // Горная геофизика. Материалы V Всесоюзного семинара. II часть. – Тбилиси: ИГТМ АН ГССР, 1989. – С. 117–119.
3. Новик Г.Я. Прогнозирование состояния кровли подземных горных выработок по замерам электросопротивления / Г.Я. Новик, Ю.Г. Нестерова // Горная геофизика. Материалы V Всесоюзного семинара. II часть. – Тбилиси: ИГТМ АН ГССР, 1989. – С. 142–144.
 4. Гликман А.Г. Упругие волны в слоистых средах / А.Г. Гликман // Исследование методов прикладной геофизики в калийной промышленности. – Л.: ВНИИГ, 1986. – С. 137–148.
 5. Ванштейн Л.А. Применение БПФ для определения резонансных свойств массива горных пород / Л.А. Ванштейн, Г.И. Колчин, Н.А. Маслова // Горная геофизика. Материалы V Всесоюзного семинара. I часть. – Тбилиси: ИГТМ АН ГССР, 1989. – С. 109–110.
 6. Симанский И.А. Методы определения строения кровли угольного пласта для оценки её устойчивости / И.А. Симанский, А.А. Стародубцев // Физические процессы горного производства – Л.: ЛГИ, 1989. – С. 94–100.
 7. Гликман А.Г. О формировании упругих колебаний в слоистых средах / А.Г. Гликман // Геология, геофизика и разработка нефтяных месторождений. – 1999. – № 6. – С. 25–29.
 8. Гликман А.Г. О физических принципах спектральной сейсморазведки / А.Г. Гликман // Геология, геофизика и разработка нефтяных месторождений. – 1998. – № 12. – С. 19–24.
 9. Возжеников Г.С. Методика оценки состояния вмещающих пород аппаратурой «Резонанс» / Г.С. Возжеников, Ю.В. Бельшев. – Донецк: НПК «Искра», 1991. – 52 с.
 10. Матвеев А.В. Шахтная аппаратура спектральной сейсморазведки «Резонанс». Руководство по эксплуатации / А.В. Матвеев. – Донецк: Украинский филиал ВНИМИ, 1990. – 40 с.

V.A. Kanin, V.V. Vasyutina

Evaluation of rock cleavage in the seam roof.

New technique has been developed to monitor integrity of a roof in a longwall face using acoustic resonance. Cases of successful practical implementation of this technique were discussed.

Keywords: *deformation and destruction of rocks, protection of mine workings, enclosing rocks, stress state.*

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ),
Донецк
ranimi@ranimi.org

Получено 18.03.2021