

ISSN 0136-4545

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

**Журнал
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ
МЕХАНИКИ**

№ 1 (78)

2022

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА: д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ: **М.Н. Пачева**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

д-р техн. наук, проф. А.В. Анциферов, д-р техн. наук, проф. В.Е. Болнокин, д-р техн. наук, проф. Н.И. Болонов, д-р физ.-мат. наук, проф. А.О. Ватульян, д-р техн. наук, проф. Л.П. Вовк, д-р техн. наук, проф. В.А. Глазунов, д-р техн. наук, с.н.с. А.А. Глухов, д-р физ.-мат. наук, проф. А.С. Гольцев, д-р физ.-мат. наук, проф. Г.В. Горр, д-р техн. наук, проф. В.В. Губанов, д-р техн. наук, с.н.с. В.А. Дрибан, д-р физ.-мат. наук, проф. А.М. Ковалев, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. Б.И. Коносевиц, д-р физ.-мат. наук, проф. И.А. Моисеенко, д-р техн. наук, проф. В.Ф. Мущанов, д-р техн. наук, проф. В.Н. Павлыш, д-р техн. наук, проф. А.А. Петраков, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. С.Н. Судаков, д-р техн. наук, проф. Г.М. Улитин, д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Шалдырван.

EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**

DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**

EXECUTIVE SECRETARY: **M.N. Pacheva**

EDITORIAL BOARD:

Dr. of tech., prof. A.V. Antsiferov, Dr. of tech., prof. V.E. Bolnokin, Dr. of tech., prof. N.I. Bolonov, Dr. of phys. and math., prof. A.O. Vatulyan, Dr. of tech., prof. L.P. Vovk, Dr. of tech., prof. V.A. Glazunov, Dr. of tech., senior researcher A.A. Glukhov, Dr. of phys. and math., prof. A.S. Goltsev, Dr. of phys. and math., prof. G.V. Gorr, Dr. of tech., prof. V.V. Gubanov, Dr. of tech., senior researcher V.A. Driban, Dr. of phys. and math., prof. A.M. Kovalev, Dr. of phys. and math., senior researcher B.I. Konosevich, Dr. of phys. and math., prof. I.A. Moiseyenko, Dr. of tech., prof. V.F. Mushchanov, Dr. of tech., prof. V.N. Pavlysh, Dr. of tech., prof. A.A. Petrakov, Dr. of phys. and math., senior researcher S.N. Sudakov, Dr. of tech., prof. G.M. Ulitin, Dr. of phys. and math., prof. V.A. Shaldyrvan.

Адрес редакции: 83001 Донецк, ул. Университетская, 24
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
Тел. 302 92 71, E-mail: jtam_donnu@mail.ru

Технический редактор: Пачева М.Н.

Научный журнал «Журнал теоретической и прикладной механики» включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (приказ МОН ДНР № 616 от 14.07.2021 г) по следующим группам научных специальностей и специальностям: 01.02.00 — Механика; 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ; 05.23.17 — Строительная механика; 25.00.20 — Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика.

Журнал включен в перечень РИНЦ (Лицензионный договор № 27-01/2020 от 23.01.2020 г.).

Утверждено к печати ученым советом
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016г.

© Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Донецкий национальный университет», 2022

№ 1 (78) / 2022

Основан в 1970г.

ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Механика твердого тела

- Данилюк Д.А., Ткаченко Д.Н.* Новое решение уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил..... 5

Механика деформируемого твердого тела

- Бондаренко Н.С., Гольцев А.С.* Исследование влияния длины теплопроницаемого разреза при термоупругом изгибе изотропных пластин..... 16
- Глушанков Е.С.* Приближенное решение задачи об изгибе опертой по краю эллиптической ортотропной плиты 25
- Глушанков Е.С.* Определение термоэлектромагнитоупругого состояния бесконечной многосвязной пластинки из пьезоматериала в случае конвективного теплообмена на ее контурах 32

Строительная механика

- Зубенко А.В.* Особенности нормирования ветровой нагрузки на стенку и покрытие вертикального цилиндрического резервуара..... 44
- Муцанов В.Ф., Демидов А.И.* О предельном состоянии цилиндрической оболочки с несимметричным неподкрепленным вырезом..... 52

Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика

- Лобков Н.И., Маевский В.С., Лобков А.А.* Формирование зоны разгрузки пласта впереди лавы..... 69

№ 1 (78) / 2022

Founded in 1970.

JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

CONTENTS

Rigid Body Dynamics

- Danilyuk D.A., Tkachenko D.N.* The new solution of the equations of motion of a gyrostat with a variable gyrostatic moment under the action of potential and gyroscopic forces..... 5

Solid Mechanics

- Bondarenko N.S., Goltsev A.S.* Investigation of the influence of the length of a heat-permeable cut during thermoelastic bending of isotropic plates..... 16
- Glushankov E.S.* The approximate solution of the bending problem of simply supported elliptic orthotropic plate..... 25
- Glushankov E.S.* Determining the thermo-electro-magneto-elastic state of infinite multiply connected piezoelectric plate in case of convective heat transfer acting on its contours..... 32

Structural Mechanics

- Zubenko A.V.* Peculiarities of standardization of wind load on the wall and roof of a vertical cylindrical tank with a sagging roof..... 44
- Mushchanov V.P., Demidov A.I.* On the limiting state of a cylindrical shell with an asymmetric unreinforced notch..... 52

Geomechanics, Rock Damage, Mining Aerodynamics and Thermal Physics

- Lobkov N.I., Mayevsky V.S., Lobkov A.A.* Formation of a reservoir unloading zone in front of the longwall..... 69

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 531.38; 531.39
doi:10.24412/0136-4545-2022-1-5-15
EDN:EPVRMO



©2022. Д.А. Данилюк, Д.Н. Ткаченко

НОВОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Рассмотрена задача об условиях существования линейных инвариантных соотношений уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил. Полагается, что гиростатический момент направлен по главной оси эллипсоида инерции гиростата, относительно которой компонента единичного вектора вертикали является линейной комбинацией элементарных тригонометрических функций времени. Построено новое решение исходных уравнений движения гиростата, которое характеризуется прецессией гиростата относительно вертикали.

Ключевые слова: гиростат, переменный гиростатический момент, годограф угловой скорости.

Введение. В последнее время в динамике твердого тела интенсивно изучается задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом в полях сложной структуры. Например, в монографии Г.В. Горра, А.В. Мазнева, Г.А. Котова [1] приведена не только обширная библиография, посвященная постановке проблемы по данной теме, но и изучены прецессионные движения относительно вертикали гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Следует отметить, что в данной монографии показано, что наиболее общая постановка задачи о движении гиростата предложена Й. Виттенбургом [2], В.В. Румянцевым [3] и П.В. Харламовым [4]. Основное внимание при изучении движения гиростата с переменным гиростатическим моментом уделяется исследованию решений уравнений класса Кирхгофа–Пуассона при наличии у них трех инвариантных соотношений, введенных Г.В. Горром [5].

При этом решение в исходных уравнениях удается получить только в случае линейных инвариантных соотношениях: Г.В. Горр, Т.В. Белоконь [6], Д.Н. Ткаченко [7], Д.А. Данилюк [8]. В каждой из данных работ приняты различные предположения относительно свойства расположения момента количества движения в главной системе координат гиростата.

Данная статья посвящена дальнейшему изучению решений уравнений класса Кирхгофа–Пуассона, которые характеризуются линейными инвариантными соотношениями по основным переменным задачи. Отличие постановки задачи, принятой в данной статье, состоит в том, что здесь предполагается другое свойство гиросtatического момента: полагается, что гиросtatический момент принадлежит главной оси эллипсоида инерции, относительно которой компонента гиросtatического момента является линейной комбинацией двух тригонометрических функций времени. Данное свойство позволило установить новое решение уравнений класса Кирхгофа–Пуассона, условия существования которого имеют существенные отличия от условий, полученных в других постановках, указанных в вышеприведенных статьях.

1. Постановка задачи. Рассмотрим гиросtat, как систему связанных твердых тел S_0, S_1 . Полагаем, что тело-носитель S_0 , имеющее неподвижную точку O , намагничено и несет положительные и отрицательные электрические заряды. Обозначим через $Oxyz$ главную систему координат S_0 с единичными векторами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$. Пусть ротор S_1 направлен по оси Ox и не намагничен, и не содержит зарядов. Гиросtat вращается в магнитном поле и на него действуют ньютоновские, кулоновские силы и силы Лоренца; токи Фуко в процессе движения гиростата не возникают. Введем следующие обозначения: $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей, на которой расположены центры ньютоновского и кулоновского притяжения; $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции гиростата; $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$ – матрица, характеризующая гироскопические силы; $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$ – матрица, характеризующая потенциальные силы, которые являются квадратичными по ν_i ($i = \overline{1, 3}$) функциями; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор обобщенного центра масс гиростата; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1(t), 0, 0)$ – гиросtatический момент; $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела S_0 . Тогда уравнения движения гиростата запишем в виде

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_1 + \dot{\lambda}_1(t) &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \omega_2 B_3 \nu_3 - \omega_3 B_2 \nu_2 + s_2 \nu_3 - \\ &\quad - s_3 \nu_2 + (C_3 - C_2)\nu_2 \nu_3, \\ A_2 \dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 - \lambda_1(t)\omega_3 + \omega_3 B_1 \nu_1 - \omega_1 B_3 \nu_3 + s_3 \nu_1 - \\ &\quad - s_1 \nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_3 \nu_1, \\ A_3 \dot{\omega}_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \lambda_1(t)\omega_2 + \omega_1 B_2 \nu_2 - \omega_2 B_1 \nu_1 + s_1 \nu_2 - \\ &\quad - s_2 \nu_1 + (C_2 - C_1)\nu_1 \nu_2, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3 \nu_2 - \omega_2 \nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = \omega_1 \nu_3 - \omega_3 \nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \omega_2 \nu_1 - \omega_1 \nu_2, \quad (2)$$

$$\dot{\lambda}_1(t) = L_1(t), \quad (3)$$

где

$$\lambda_1(t) = D_1(\omega_1 + \dot{\kappa}(t)), \quad (4)$$

D_1 – момент инерции ротора S_1 относительно оси вращения Ox , $\dot{\kappa}(t)$ – угловая скорость S_1 . В формулах (1)–(4) точкой над переменными $\omega_i(t)$, $\lambda_1(t)$, $\kappa(t)$ обозначена производная по времени t .

Уравнения (1), (2) имеют два первых интеграла

$$\begin{aligned} \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad (A_1\omega_1 + \lambda_1(t)) \cdot \nu_1 + \\ + A_2\omega_2\nu_2 + A_3\omega_3\nu_3 - \frac{1}{2}(B_1\nu_1^2 + B_2\nu_2^2 + B_3\nu_3^2) = k, \end{aligned} \quad (5)$$

где k – произвольная постоянная. Как показано П.В. Харламовым [4], уравнения (3), (4) можно рассматривать после нахождения (или задания) функции $\lambda_1(t)$ на основании двух подходов: в первом подходе задается $L_1(t)$, а $\dot{\kappa}(t)$ определяется из (4), во втором - задается $\dot{\kappa}(t)$, а $L_1(t)$ находится из уравнения (3).

Рассмотрим инвариантные соотношения (ИС)

$$\omega_1 = \nu_1\varepsilon_0 + \beta_1g_0, \quad \omega_2 = \nu_2\varepsilon_0 + \beta_2g_0, \quad \omega_3 = \varepsilon_0 + \beta_3g_0, \quad (6)$$

которые в векторном виде запишем так

$$\boldsymbol{\omega} = \varepsilon_0\boldsymbol{\nu} + g_0\boldsymbol{\beta}. \quad (7)$$

В формулах (6), (7) ε_0 , g_0 , β_i ($\overline{1,3}$) - постоянные параметры ($\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$). Запишем уравнения Пуассона (2) на ИС (6)

$$\dot{\nu}_1 = g_0(\beta_3\nu_2 - \beta_2\nu_3), \quad \dot{\nu}_2 = g_0(\beta_1\nu_3 - \beta_3\nu_1), \quad \dot{\nu}_3 = g_0(\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2). \quad (8)$$

Из уравнений (8) следуют первое равенство системы (5) и интеграл

$$\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 + \beta_3\nu_3 = c_0, \quad (9)$$

где c_0 - постоянная. В векторном виде из (9) получим

$$\boldsymbol{\beta}_1 \cdot \boldsymbol{\nu} = c_0, \quad (10)$$

то есть движение гиростата является прецессией относительно вектора $\boldsymbol{\nu}$ [10,11].

Соотношения $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$ и (9) позволяют установить общее решение уравнений (8)

$$\begin{aligned} \nu_1(\psi) &= h_0 + h_1 \cos \psi + h_2 \sin \psi, \\ \nu_2(\psi) &= r_0 + r_1 \cos \psi + r_2 \sin \psi, \\ \nu_3(\psi) &= a_0 + a_2 \sin \psi, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{c_0\beta_1}{\beta_0^2}, \quad h_1 = \frac{\gamma_0\beta_2}{\kappa_0^2}, \quad h_2 = -\frac{\gamma_0\beta_1\beta_3}{\kappa_0^2\beta_0}, \\ r_0 &= \frac{c_0\beta_2}{\beta_0^2}, \quad r_1 = -\frac{\gamma_0\beta_1}{\kappa_0^2}, \quad r_2 = -\frac{\gamma_0\beta_2\beta_3}{\kappa_0^2\beta_0}, \\ a_0 &= \frac{c_0\beta_3}{\beta_0^2}, \quad a_2 = \frac{\gamma_0}{\beta_0}, \\ \gamma_0 &= \frac{\kappa_0\mu_0}{\beta_0}, \quad \mu_0 = \sqrt{\beta_0^2 - c_0^2}, \quad \beta_0^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2, \quad \kappa_0^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2, \end{aligned} \quad (12)$$

а переменная ψ линейно зависит от t : $\psi(t) = \beta_0 g_0 t$.

Целью данной статьи является интегрирование системы (1)-(4) на ИС (6), (11)

2. Преобразование уравнений на ИС (6). Введем обозначения

$$G_{23} = \varepsilon_0^2(A_2 - A_3) + \varepsilon_0(B_3 - B_2) + C_3 - C_2, \quad (13)$$

$$G_2 = \beta_3\varepsilon_0g_0(A_2 - A_3) - \beta_3g_0B_2 - s_3, \quad (14)$$

$$G_3 = \beta_2\varepsilon_0g_0(A_2 - A_3) + \beta_2g_0B_3 + s_2, \quad (15)$$

$$G_0 = \beta_2\beta_3g_0^2(A_2 - A_3), \quad (16)$$

$$H_{13} = \varepsilon_0^2(A_3 - A_1) + \varepsilon_0(B_1 - B_3) + C_1 - C_3, \quad (17)$$

$$H_2 = \beta_3\varepsilon_0g_0(A_3 - A_1) + \beta_3g_0B_1 + s_3, \quad (18)$$

$$H_3 = \beta_1\varepsilon_0g_0(A_3 - A_1) - \beta_1g_0B_3 - s_1, \quad (19)$$

$$H_0 = \beta_1\beta_3g_0^2(A_3 - A_1), \quad (20)$$

$$R_{12} = \varepsilon_0^2(A_2 - A_1) + \varepsilon_0(B_1 - B_2) + C_1 - C_2, \quad (21)$$

$$R_1 = \beta_2\varepsilon_0g_0(A_2 - A_1) + \beta_2g_0B_1 + s_2, \quad (22)$$

$$R_2 = \beta_1\varepsilon_0g_0(A_2 - A_1) - \beta_1g_0B_2 - s_1, \quad (23)$$

$$R_0 = \beta_1\beta_2g_0^2(A_2 - A_1). \quad (24)$$

Подставим значения (6) в уравнения (1) и учтем уравнения (8) и равенства (13)-(24)

$$\dot{\lambda}_1(t) = (G_2 - \varepsilon_0g_0\beta_3A_1)\nu_2 + (G_3 + \varepsilon_0g_0\beta_2A_1)\nu_3 + G_0, \quad (25)$$

$$\lambda_1(\varepsilon_0\nu_3 + \beta_3g_0) = A_2\varepsilon_0g_0(\beta_3\nu_1 - \beta_1\nu_3) + H_{13}\nu_1\nu_3 + H_1\nu_1 + H_3\nu_3 + H_0, \quad (26)$$

$$\lambda_1(\varepsilon_0\nu_2 + \beta_2g_0) = A_3\varepsilon_0g_0(\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2) + R_{12}\nu_1\nu_2 + R_1\nu_1 + R_2\nu_2 + R_0. \quad (27)$$

Преобразуем уравнение (25) с помощью значений $\nu_2(\psi)$, $\nu_3(\psi)$ из системы (11)

$$\dot{\lambda}_1(t) = (r_0Q_2 + a_0Q_3 + G_0) + Q_2r_1 \cos(\beta_0g_0t) + (Q_2r_2 + Q_3a_2) \sin(\beta_0g_0t), \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} Q_2 &= \beta_3g_0[\varepsilon_0(A_2 - A_1 - A_3) - B_2] - s_3, \\ Q_3 &= \beta_2g_0[\varepsilon_0(A_1 + A_2 - A_3) + B_3] + s_2. \end{aligned} \quad (29)$$

На данном этапе исследования условий существования ИС (6), (11) уравнений (1) равенства (26), (27) целесообразно рассматривать, как их линейную комбинацию

$$\begin{aligned} &\varepsilon_0g_0[A_2(\varepsilon_0\nu_2 + \beta_2g_0)(\beta_3\nu_1 - \beta_1\nu_3) - A_3(\varepsilon_0\nu_3 + \beta_3g_0)(\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2)] \\ &\quad + (\varepsilon_0\nu_2 + \beta_2g_0)[H_{13}\nu_1\nu_3 + H_3\nu_3 + H_0] - \\ &\quad - (\varepsilon_0\nu_3 + \beta_3g_0)[R_{12}\nu_1\nu_2 + R_1\nu_1 + R_2\nu_2 + R_0] = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

3. Условия существования решения (6), (11) уравнений (1), (2). Если подставить $\nu_i(\psi)$ (1,3) из системы (11) в (30), то полученное уравнение должно

быть тождеством по переменной ψ . Рассмотрим равенства нулю коэффициентов при $\sin(3\psi)$ и $\cos(3\psi)$

$$(H_{13} - R_{12})(h_1 r_1 - h_2 r_2) = 0, \quad (H_{13} - R_{12})(h_1 r_2 + h_2 r_1) = 0. \quad (31)$$

В силу того, что $h_i \neq 0, r_i \neq 0 (\overline{1, 3})$ из системы следует условие $H_{13} = R_{12}$, которое на основании обозначений (17), (21) запишем в виде

$$\varepsilon_0^2(A_3 - A_2) + \varepsilon_0(B_2 - B_3) + C_2 - C_3 = 0, \quad (32)$$

то есть из (13) получим $G_{23} = 0$. Из уравнения (28) найдем зависимость $\lambda(t)$:

$$\lambda_1(\psi) = L_0 t + L_1 \sin \psi + L_2 \cos \psi + \lambda_0, \quad (33)$$

где λ_0 - постоянная, а L_0, L_1, L_2 - имеют значения

$$L_0 = r_0 Q_2 + a_0 Q_3 + G_0, \quad L_1 = \frac{Q_2 r_1}{\beta_0 g_0}, \quad L_2 = -\frac{Q_2 r_2 + a_2 Q_3}{\beta_0 g_0}. \quad (34)$$

Так как в силу (11) из (26), (27) следует, что функция $\lambda_1(t)$ ограничена, то из (33) имеем равенство $L_0 = 0$, которое на основании (16), (29) запишем в виде

$$c_0 \{ \beta_2 \beta_3 g_0 [2\varepsilon_0(A_2 - A_3) + B_3 - B_2] + s_2 \beta_3 - s_3 \beta_2 \} + \beta_2 \beta_3 \beta_0^2 g_0^2 (A_2 - A_3) = 0. \quad (35)$$

Соотношение (35) является вторым условием на параметры задачи для решения (6), (11). При его выполнении функция (33) упрощается:

$$\lambda_1(\psi) = L_1 \sin \psi + L_2 \cos \psi + \lambda_0. \quad (36)$$

Подставим значения (11), (36) в уравнения (26), (27) и учтем равенство $R_{12} = H_{13}$

$$\begin{aligned} & (L_1 \sin \psi + L_2 \cos \psi + \lambda_0) [(a_0 \varepsilon_0 + \beta_3 g_0) + a_2 \varepsilon_0 \sin \psi] - \\ & - (h_0 + h_1 \cos \psi + h_2 \sin \psi) [(a_0 H_{13} + \varepsilon_0 g_0 A_2 + H_1) + a_2 H_{13} \sin \psi] - \\ & - (a_0 + a_2 \sin \psi) (H_3 - \varepsilon_0 g_0 \beta_1 A_2) - H_0 = 0, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & (L_1 \sin \psi + L_2 \cos \psi + \lambda_0) [(r_0 \varepsilon_0 + \beta_2 g_0) + \varepsilon_0 (r_1 \cos \psi + r_2 \sin \psi)] - \\ & - (h_0 + h_1 \cos \psi + h_2 \sin \psi) [(r_0 H_{13} + \varepsilon_0 g_0 A_3 + R_1) + H_{13} (r_1 \cos \psi + r_2 \sin \psi)] - \\ & - (R_2 - \varepsilon_0 g_0 \beta_1 A_3) (r_0 + r_1 \cos \psi + r_2 \sin \psi) - R_0 = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Уравнения (37), (38) должны быть тождествами по переменной ψ . Рассмотрим условия, которые следуют из равенств нулю коэффициентов при $\sin 2\psi$ и $\cos 2\psi$. Они могут быть преобразованы только к двум равенствам

$$h_1 H_{13} - \varepsilon_0 L_2 = 0, \quad h_2 H_{13} - \varepsilon_0 L_1 = 0. \quad (39)$$

Для изучения условий (39) выпишем значения H_{13} из (17), L_1 и L_2 из (34), основываясь на обозначениях (29)

$$H_{13} = \varepsilon_0^2(A_3 - A_1) + \varepsilon_0(B_1 - B_3) + C_1 - C_3, \quad (40)$$

$$L_1 = -\frac{\gamma_0\beta_1}{\beta_0g_0\kappa_0^2}\{\beta_3g_0[\varepsilon_0(A_2 - A_1 - A_3) - B_2] - s_3\}, \quad (41)$$

$$L_2 = -\frac{\gamma_0}{\beta_0^2g_0\kappa_0^2}\{\beta_2g_0[\varepsilon_0(A_1\beta_0^2 + A_2(\kappa_0^2 - \beta_3^2) + A_3(\beta_3^2 - \kappa_0^2)) + B_2\beta_3^2 + B_3\kappa_0^2] + \kappa_0^2s_2 + \beta_2\beta_3s_3\}. \quad (42)$$

В качестве системы уравнений, которая эквивалентна системе (39), рассмотрим второе уравнение из (39) и уравнение $h_2L_2 - h_1L_1 = 0$. С помощью значений (40)-(42) получим

$$g_0\beta_3[\varepsilon_0^2(A_1 - 2A_3) + \varepsilon_0(B_3 - B_1 - B_2) + C_3 - C_1] - \varepsilon_0s_3 = 0, \quad (43)$$

$$g_0\beta_2\beta_3[2\varepsilon_0(A_2 - A_3) + B_3 - B_2] + s_2\beta_3 - s_3\beta_2 = 0. \quad (44)$$

Равенства (43), (44) являются третьим и четвертым условиями существования решения (6), (11) уравнений (1), (2). Для нахождения остальных условий введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1 &= H_1 + \varepsilon_0g_0\beta_3A_2 = \beta_3g_0[\varepsilon_0(A_2 - A_1 + A_3) + B_1] + s_3, \\ \tilde{H}_3 &= H_3 - \varepsilon_0g_0\beta_1A_2 = \beta_1g_0[\varepsilon_0(A_3 - A_1 - A_2) - B_3] - s_1, \\ \tilde{R}_1 &= R_1 + \varepsilon_0g_0\beta_2A_3 = \beta_2g_0[\varepsilon_0(A_2 - A_1 + A_3) + B_1] + s_2, \\ \tilde{R}_2 &= R_2 - \varepsilon_0g_0\beta_1A_3 = \beta_1g_0[\varepsilon_0(A_2 - A_1 - A_3) - B_2] - s_1. \end{aligned} \quad (45)$$

Потребуем, чтобы уравнения (37), (38) были тождественными по переменной ψ . Тогда, используя равенства (45) установим следующую систему уравнений

$$g_0\beta_3L_2 - h_1\tilde{H}_1 = 0, \quad (46)$$

$$-g_0\beta_3L_1 + a_2(-\lambda_0\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0h_0}{h_2}L_1 + \tilde{H}_3) + h_2\tilde{H}_1 = 0, \quad (47)$$

$$-g_0\beta_3\lambda_0 + a_0(-\lambda_0\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0h_0}{h_2}L_1 + \tilde{H}_3) + h_0\tilde{H}_1 + H_0 = 0, \quad (48)$$

$$-g_0\beta_2L_1 + r_2(-\lambda_0\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0h_0}{h_2}L_1 + \tilde{R}_2) + h_2\tilde{R}_1 = 0, \quad (49)$$

$$-g_0\beta_2L_2 + r_1(-\lambda_0\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0h_0}{h_2}L_1 + \tilde{R}_2) + h_1\tilde{R}_1 = 0, \quad (50)$$

$$-g_0\beta_2\lambda_0 + r_0(-\lambda_0\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0h_0}{h_2}L_1 + \tilde{R}_2) + h_0\tilde{R}_1 + R_0 = 0. \quad (51)$$

Таким образом, общими условиями существования решения (6), (11) уравнений (1), (2) являются равенства (32), (35), (43), (44) и система алгебраических уравнений (46), (51).

4. Один частный случай разрешимости системы (46)-(51). Для наглядности окончательных условий существования исследуем случай

$$\tilde{R}_2 = \tilde{H}_3, \quad \lambda_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}(\tilde{R}_2 + \frac{\varepsilon_0 h_0}{h_2} L_1). \quad (52)$$

Распишем первое равенство из системы (52). В силу (45) имеем

$$B_2 - B_3 + 2(A_3 - A_2) = 0. \quad (53)$$

На основании условия (53) равенство (44) упрощается:

$$s_2 \beta_3 - s_3 \beta_2 = 0. \quad (54)$$

Запишем уравнения (47), (49) при учете второго условия из (52)

$$g_0 \beta_3 L_1 - h_2 \tilde{H}_1 = 0, \quad g_0 \beta_2 L_1 - h_2 \tilde{R}_1 = 0. \quad (55)$$

Линейная комбинация $\beta_2 \tilde{H}_1 - \beta_3 \tilde{R}_1 = 0$ уравнений (55) приводит к условию (54). Поэтому достаточно в системе (55) рассмотреть первое уравнение

$$g_0 \beta_3 (2\varepsilon_0 A_3 + B_1 + B_2) + 2s_3 = 0. \quad (56)$$

Изучим уравнения (48), (51)

$$g_0 \beta_3 \lambda_0 - h_0 \tilde{H}_1 - H_0 = 0, \quad g_0 \beta_2 \lambda_0 - h_0 \tilde{R}_1 - R_0 = 0. \quad (57)$$

Исключим в уравнениях (57) параметр λ_0 и учтем ранее полученное условие $\beta_2 \tilde{H}_1 - \beta_3 \tilde{R}_1 = 0$. Тогда установим равенство $\beta_2 H_0 - \beta_3 R_0 = 0$, которое на основании обозначений (20), (24) преобразуем к виду

$$A_3 = A_2. \quad (58)$$

В силу (58), из уравнений (32), (53) найдем условия

$$B_3 = B_2, \quad C_3 = C_2. \quad (59)$$

Из первого уравнения (57) следует

$$\lambda_0 = \frac{1}{g_0 \beta_3} (h_0 \tilde{H}_1 + H_0). \quad (60)$$

Рассмотрим уравнения (46), (50)

$$g_0 \beta_3 L_2 - h_1 \tilde{H}_1 = 0, \quad g_0 \beta_2 L_2 - h_1 \tilde{R}_1 = 0. \quad (61)$$

Если в уравнениях (61) исключим параметр L_2 , то получим равенство $\beta_2 \tilde{H}_1 - \beta_3 \tilde{R}_1 = 0$ или условие (54). Запишем значения (41), (42) уравнений (35), (43), (56) при наличии установленных ранее условий (см. (54), (58), (59))

$$L_1 = \frac{\gamma_0 \beta_1}{\kappa_0^2 \beta_0 g_0} [\beta_3 g_0 (\varepsilon_0 A_1 + B_2) + s_3], \quad (62)$$

Д.А. Данилюк, Д.Н. Ткаченко

$$L_2 = -\frac{\gamma_0}{\kappa_0^2}[\beta_2 g_0(\varepsilon_0 A_1 + B_2) + s_2], \quad (63)$$

$$c_0(\beta_0 - \kappa_0 \mu_0)[\beta_3 g_0(\varepsilon_0 A_1 + B_2) + s_3] = 0, \quad (64)$$

$$\beta_3 g_0[\varepsilon_0^2(A_1 - 2A_2) - \varepsilon_0 B_1 + C_2 - C_1] - \varepsilon_0 s_3 = 0, \quad (65)$$

$$\beta_3 g_0(2\varepsilon_0 A_2 + B_1 + B_2) + 2s_3 = 0. \quad (66)$$

Можно показать, что первое уравнение системы (61) эквивалентно уравнению (66). Таким образом, осталось рассмотреть второе равенство из (52) и равенство (60). Для этой цели воспользуемся обозначениями (20), (45). Тогда получим значение для λ_0

$$\lambda_0 = \frac{\beta_1}{g_0 \beta_0^2 \beta_3} \{c_0[\beta_3 g_0(\varepsilon_0(2A_2 - A_1) + B_1) + s_3] + \beta_0^2 \beta_3 g_0^2(A_2 - A_1)\}, \quad (67)$$

а также дополнительное условие на параметры

$$\beta_1 g_0(\varepsilon_0 A_2 + B_2) + s_1 = 0. \quad (68)$$

Таким образом, для частного варианта решения системы (46)-(51), который характеризуется условиями (58), (59), получены значения параметров L_1 , L_2 , λ_0 (см. формулы (62), (63), (67)), а также условия на параметры задачи (54), (64)-(66), (68).

5. Анализ условий (54), (64)-(66), (68). Рассмотрим равенство (64). Если выполняется условие $\beta_0 = \kappa_0 \mu_0$, то есть имеет место равенство

$$\beta_0^2[1 - (\beta_1^2 + \beta_2^2)] = -\kappa_0^2 c_0^2, \quad (69)$$

то целесообразно уравнение (9) рассматривать при дополнительном предположении $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$, которое не влияет на общность результатов, так как вектор β в (10) можно полагать единичным. Тогда равенство (69) выполняться не может.

Пусть в (64) $c_0 \neq 0$. Из данного равенства следует

$$s_3 = -\beta_3 g_0(\varepsilon_0 A_1 + B_1). \quad (70)$$

Внесем значение s_3 из (70) в уравнение (66)

$$2\varepsilon_0(A_2 - A_1) + B_2 - B_1 = 0. \quad (71)$$

В силу (62), (70) получим $L_1 = 0$, то есть функция (36) примет вид

$$\lambda_1(\psi) = L_2 \cos \psi + \lambda_0, \quad (72)$$

где, с учетом равенств (67), (70), параметр λ_0 имеет значение

$$\lambda_0 = \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \{c_0[2\varepsilon_0(A_2 - A_1) + B_1 - B_2] + g_0 \beta_0^2(A_2 - A_1)\}. \quad (73)$$

Таким образом в случае $c_0 \neq 0$ установлены условия (63), (65), (68), (70), (71), (73) существования функции (72). При этом, равенство (71) можно принять для определения параметра ε_0 , а равенство (68) - для определения параметра g_0 . Подстановка найденных значений в уравнение (70) дает возможность получить условие на параметры уравнений (1). Уравнение (65) служит для нахождения параметров C_1, C_2 .

Рассмотрим случай $c_0 = 0$. Из уравнения (10) следует $\beta \perp \nu$, то есть в процессе движения гиростата вектор β ортогонален вектору вертикали. Тогда значение L_2 из (62) отлично от нуля. Функция $\lambda_1(\psi)$ из (36) примет вид

$$\lambda_1(\psi) = L_1 \sin \psi + L_2 \cos \psi + \lambda_0, \quad (74)$$

где в силу $c_0 = 0$ и формулы (67)

$$\lambda_0 = \beta_1 g_0 (A_2 - A_1), \quad (75)$$

Условиями существования решения (6), (11), (74) являются равенства (65), (66), (68), (75), которые можно рассматривать при помощи различных подходов.

Заключительным этапом в интегрировании уравнений (1)-(4) служит рассмотрение уравнений (3), (4). Например, из (3) в силу (74) и $\psi(t) = \beta_0 g_0 t$ получим

$$L_1(t) = \beta_0 g_0 [L_1 \cos(\beta_0 g_0 t) - L_2 \sin(\beta_0 g_0 t)].$$

Уравнение (4) позволяет определить угловую скорость вращения гироскопа S_1

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_1(t) = & \frac{1}{D_1} [(L_1 - \varepsilon_0 h_2 D_1) \sin(\beta_0 g_0 t) + \\ & + (L_2 - \varepsilon_0 h_1 D_1) \cos(\beta_0 g_0 t) - D_1(\beta_1 g_0 + h_0 \varepsilon_0)]. \end{aligned}$$

Заключение. В статье изучены условия существования трех линейных ИС уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Из уравнений Пуассона получено дополнительное линейное ИС на компоненты единичного вектора оси симметрии силовых полей, которое характеризует прецессию гиростата относительно данного вектора. Показано, что в случае, когда постоянная в условии прецессионности отлична от нуля, то гиростатический момент зависит только от одной тригонометрической функции. Если данная постоянная равна нулю, то гиростатический момент является линейной комбинацией синуса и косинуса переменной $\psi(t) = \beta_0 g_0 t$, где β_0, g_0 - параметры. Найденное решение существует при дополнительных предположениях: $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_2)$, $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_2)$, $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_2)$. В качестве перспективных исследований по данной проблеме может рассматриваться задача, для которой введены гироскопы S_2 и S_3 с постоянным гиростатическим моментом.

1. Горр Г.В. Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом / Г.В. Горр, А.В. Мазнев, Г.А. Котов. – Донецк: ГУ "ИПММ". – 2018. – 258 с.

2. *Виттенбург Й.* Движение системы твердых тел / Й. Виттенбург. – М.: Мир. – 1980. – 288 с.
3. *Румянцев В.В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами / В.В. Румянцев // Вестник Моск. ун-та. Серия: Математика, механика. – 1970. – № 2. – С. 83–96.
4. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел / П.В. Харламов // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
5. *Горр Г.В.* О трех инвариантных соотношениях уравнений движения тела в потенциальном поле сил / Г.В. Горр // Прикл. математика и механика. – 2019. – **83**, № 2. – С. 202–214.
6. *Горр Г.В.* О решениях уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом / Г.В. Горр, Т.В. Белоконь // Прикл. математика и механика. – 2021. – **85**, № 2. – С. 139–151.
7. *Ткаченко Д.Н.* Новое решение уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил / Д.Н. Ткаченко // Механика твердого тела. – 2021. – Вып. 51. – С. 34–43.
8. *Данилюк Д.А.* Об одном решении уравнений Кирхгофа–Пуассона в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом / Д.А. Данилюк // Механика твердого тела. – 2021. – Вып. 51. – С. 44–56.
9. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. I: The equations of motion and their transformation / H.M. Yehia // Journal de Mecanique Theorique et Appliquee – 1986. – **5**, № 5. – P. 747–754.
10. *Горр Г.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горр, А.В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ. – 2010. – 364 с.
11. *Горр Г.В.* Движение гиростата / Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – Киев: Наук. думка. – 2013. – 408 с.
12. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений / П.В. Харламов // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
13. *Зиглин С.Л.* Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике / С.Л. Зиглин // Функциональный анализ. – 1982. – **16**, вып. 3. – С. 30–41; там же. – 1983. – **17**, вып. 1. – С. 8–23.
14. *Козлов В.В.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа / В.В. Козлов, Д.А. Онищенко // Докл. АН СССР. – 1982. – **266**, № 6. – С. 1298–1300.
15. *Борисов А.В.* Необходимые и достаточные условия интегрируемости уравнений Кирхгофа / А.В. Борисов // Reg. end Chaot. Dyn. – 1996. – Vol. 1, № 2. – P. 61–73.
16. *Горр Г.В.* Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела (теория, результаты, комментарии) / Г.В. Горр. – М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2017. – 424 с.
17. *Ольшанский В.Ю.* Об одном новом линейном инварианте соотношения уравнений Пуанкаре–Жуковского / В.Ю. Ольшанский // Прикл. математика и механика. – 2012. – **76**, вып. 6. – С. 883–894.
18. *Ольшанский В.Ю.* Линейные инвариантные соотношения уравнений Пуанкаре–Жуковского / В.Ю. Ольшанский // Прикл. математика и механика. – 2014. – **78**, вып. 1. – С. 29–45.
19. *Мухарлямов Р.Г.* Дифференциально-алгебраические уравнения программных движений лагранжевых динамических систем / Р.Г. Мухарлямов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 4. – С. 50–61.
20. *Горр Г.В.* Об одном аналоге столкновения Пуансо решения Эйлера в задаче о движении твердого тела в потенциальном поле сил / Г.В. Горр // Прикл. математика и механика. – 2020. – **84**, № 1. – С. 20–32.

D.A. Danilyuk, D.N. Tkachenko

The new solution of the equations of motion of a gyrostat with a variable gyrostatic moment under the action of potential and gyroscopic forces.

The problem of the conditions for the existence of linear invariant relations of the equations of motion of a gyrostat with a variable gyrostatic moment under the action of potential and gyroscopic forces is considered. It is assumed that the gyrostatic moment is directed along the main axis of the gyrostat inertia ellipsoid, relative to which the component of the unit vertical vector is a linear combination of elementary trigonometric functions of time. A new solution of the initial equations of motion of the gyrostat is constructed, which is characterized by the precession of the gyrostat relative to the vertical.

Keywords: *potential forces, interpretation of motion, Euler angles, angular velocity hodograph.*

ГУ “Институт прикладной математики и механики”, Донецк

Получено 30.04.2022

Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk

dntkachenko@mail.ru

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2022-1-16-24

EDN:GZHUCL



©2022. Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДЛИНЫ ТЕПЛОПРОНИЦАЕМОГО РАЗРЕЗА ПРИ ТЕРМОУПРУГОМ ИЗГИБЕ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Решена задача термоупругости для изотропной пластины с теплопроницаемым разрезом на базе $\{1,0\}$ -аппроксимации в случае симметричного теплообмена с внешней средой. На линии разреза предполагается действие градиента температурного момента основного температурного поля. Исследовано влияние длины и параметра теплопроницаемости разреза на величину коэффициентов интенсивности напряжений для поперечного и продольного сдвига.

Ключевые слова: критерий Био, симметричный теплообмен, градиент температурного момента, изотропная пластина, теплопроницаемый разрез, коэффициенты интенсивности напряжений.

Введение. В инженерной практике широко применяются элементы конструкций в виде пластин различной конфигурации. Значительное внимание при проектировании таких элементов уделяется оценке их конструкционной прочности. Работоспособность тонкостенных элементов конструкций во многих случаях зависит от наличия в них концентраторов напряжений типа трещин. Подобные дефекты при критическом нагружении могут привести к нарушению работоспособности конструкции и её последующему разрушению. Помимо этого, оценка прочности конструкций усложняется в случае необходимости учёта тепловых воздействий.

В настоящее время имеется значительный теоретический и практический интерес к изучению напряжённо-деформированного состояния (НДС) в окрестности дефектов в виде трещин. Анализ распределения напряжений и деформаций около трещин представляет собой одну из важнейших проблем механики разрушения твёрдых тел. В качестве важнейших характеристик, определяющих возможность эксплуатации повреждённой конструкции, выступают коэффициенты интенсивности напряжений (КИН). Проблемы оценки прочности тел с трещинами особенно актуальны в строительстве, машиностроении, авиастроении и других отраслях промышленности. Об актуальности определения КИН свидетельствует ряд современных публикаций, перечисленных ниже.

Работа М.Ж. Бакирова, В.Ф. Михайлова, О. Хабидолды [1] посвящена определению КИН в прямоугольных пластинах с трещинами. Для центральной и краевой трещины КИН определён прямым методом, а для наклонной трещины – через J -интеграл. В статье [2] предлагается методика улучшения сходимости решения при вычислении КИН в вершинах трещин. Приводятся примеры моделирования и решения практических задач об определении КИН в пластинах с разнообразными трещинами, результаты которых сравниваются с аналитическими данными. Публикация Н.А. Сургутанова [3] посвящена изучению изменения КИН в изотропных пластинах при различных размерах поперечного сечения с концентраторами и без них, и изменения максимального значения КИН от размера наименьшего сечения пластины с концентратором напряжений.

В статье В.М. Тихомирова [4] разработаны алгоритмы определения КИН на основе результатов анализа асимптотических решений задач о деформировании однородного тела с разрезом и пластины с трещиной, расположенной на границе раздела двух сред. Предложенные алгоритмы применены для расчёта КИН с использованием результатов численного решения задач о нагружении различных плоских и пространственных однородных тел с трещинами, а также пластины с трещиной, расположенной на границе раздела двух упругих сред. В публикации Д.Е. Тулина [5] выполнено исследование упругого и упругопластического НДС пластины с полуэллиптической трещиной при варьировании её геометрических параметров. Рассмотрен процесс перехода полуэллиптической трещины в сквозную.

Целью настоящей статьи является определение КИН в изотропной пластине с теплопроницаемой трещиной и выявление влияния длины трещины на величину КИН при действии градиента температурного момента. Задача решена на базе обобщённой теории в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации. В рамках данной теории компоненты НДС представляются в виде рядов Фурье по полиномам Лежандра $P_k = P_k(x_3)$ от поперечной координаты x_3 [6]. Подобный подход по сравнению с классической теорией пластин обладает тем преимуществом, что даёт возможность учитывать явления, обусловленные поперечными сдвигами и обжатием.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропную пластину толщины $2h$ с теплопроницаемым разрезом L . На лицевых поверхностях пластины осуществляется конвективный теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой нулевой температуры. Предполагается, что теплообмен имеет симметричный характер, т. е. параметры теплообмена (критерии Био Bi^+ и Bi^-) на верхней и нижней лицевых поверхностях пластины равны: $Bi^+ = Bi^- = Bi$.

Отнесём пластину к прямоугольной декартовой системе безразмерных координат x_1, x_2 , определённых с точностью до полутолщины пластины h . В качестве разрешающей системы дифференциальных уравнений используем уравнения обобщённой теории в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации [6]:

- приближение порядка $N = 1$ трёхмерного уравнения теплопроводности [7], записанное для случая симметричного теплообмена с внешней средой:

$$\Delta T_0 - \frac{3Bi}{Bi+3}T_0 = 0; \quad \Delta T_1 - \frac{15(Bi+1)}{Bi+6}T_1 = 0; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad (1)$$

где T_0 – средняя температура; T_1 – температурный момент; Δ – двумерный оператор Лапласа;

- уравнения Дюамеля–Неймана в перемещениях

$$\begin{aligned} N_1 &= B_0 \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial v}{\partial x_2} - \alpha(1+\nu)T_0 \right\}; \\ N_2 &= B_0 \left\{ \frac{\partial v}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u}{\partial x_1} - \alpha(1+\nu)T_0 \right\}; \\ S &= \frac{1-\nu}{2}B_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right); \quad M_1 = D_0 \left\{ \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} - \alpha(1+\nu)T_1 \right\}; \quad (2) \\ M_2 &= D_0 \left\{ \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} - \alpha(1+\nu)T_1 \right\}; \quad H = \frac{1-\nu}{2}D_0 \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right); \\ Q_{i0} &= \Lambda_0 \left(\gamma_i + \frac{\partial w_0}{\partial x_i} \right) \quad (i = 1, 2), \end{aligned}$$

где α, ν – температурный коэффициент линейного расширения и коэффициент Пуассона соответственно;

$$B_0 = 3D_0 = \frac{2}{1-\nu^2}; \quad \Lambda_0 = \frac{5}{6(1+\nu)};$$

u, v, w_0 – обобщённые перемещения точек срединной поверхности; γ_1, γ_2 – обобщённые углы поворота нормали; N_1, N_2, S – обобщённые мембранные усилия; M_1, M_2, H – обобщённые изгибающие и крутящий моменты; Q_{10}, Q_{20} – обобщённые перерезывающие силы;

- уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} &= 0; \quad \frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} = 0; \\ \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} - Q_{10} &= 0; \quad \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_{20} = 0; \quad (3) \\ \frac{\partial Q_{10}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{20}}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned}$$

Мембранные усилия и перерезывающие силы в соотношениях (2), (3) определены с точностью до значения Eh (E – модуль Юнга), а моменты – с точностью до Eh^2 .

Компоненты термоупругого состояния в пластине с разрезом представим в виде суммы компонент термоупругого состояния в сплошной пластине (основного термоупругого состояния), которое будем считать известным, и компонент возмущённого термоупругого состояния, обусловленных наличием теплопроницаемого разреза. Для определения последних используем систему уравнений термоупругости (1)–(3) совместно с такими граничными условиями на линии разреза L нормалью $\vec{n} = (n_1, n_2)$:

- граничные условия для задачи теплопроводности (1), соответствующие теплопроницаемому разрезу [8]:

$$\left. \frac{\partial T_k}{\partial n} \right|_L - \beta_n [T_k] = - \left. \frac{\partial T_k^o}{\partial n} \right|_L \quad (k = 0, 1), \quad (4)$$

где квадратные скобки обозначают скачок функции при переходе через линию разреза L ; T_k^o – компонента температуры в сплошной пластине; $\beta_n = \lambda^*/\delta^*$; $\lambda^* = \lambda_c/\lambda$ – относительная теплопроводность промежуточного слоя; λ_c – теплопроводность материала промежуточного слоя, расположенного между берегами трещины; λ – теплопроводность материала пластины; $\delta^* = \delta/l$ – относительное раскрытие разреза; l – половина длины разреза; δ – раскрытие трещины;

- граничные условия для задачи термоупругости (2), (3), соответствующие случаю свободных берегов разреза и отсутствия контакта между ними [9], и записанные в предположении, что компоненты основного термоупругого состояния на линии разреза равны нулю:

$$N_n|_L = 0; \quad S_{nt}|_L = 0; \quad M_n|_L = 0; \quad H_{nt}|_L = 0; \quad Q_n|_L = 0, \quad (5)$$

где N_n , S_{nt} , M_n , H_{nt} , Q_n – обобщённые усилия и моменты на элементе длины разреза с нормалью \vec{n} и касательной \vec{t} .

Предполагаем, что линия внешней границы пластины находится на значительном удалении от линии разреза L , а компоненты возмущённого термоупругого состояния на внешнем граничном контуре равны нулю.

2. Методика решения задачи. Решение задачи (1), (4) представляет собой частный случай решения задачи теплопроводности для изотропной пластины с теплопроницаемым разрезом в случае произвольного теплообмена с внешней средой ($N = 1$; $Bi^+ = Bi^- = Bi$), приведённого в статье [7].

Решение задачи термоупругости (2), (3), (5) осуществляется с использованием двумерного интегрального преобразования Фурье, учитывающего разрывный характер искомых функций на линии разреза L , и методики обращения, основанной на применении специальной G-функции [9].

В качестве примера рассмотрим теплопроницаемый разрез вида

$$L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq l, x_2 = 0\}. \quad (6)$$

Для разреза вида (6) интегральные представления компонент возмущённого термоупругого состояния имеют вид:

$$P_j^q(x_1, x_2) = -\frac{l}{2\pi} \sum_{k=1}^{\kappa} \int_{-1}^1 K_{jk}^q(x_1 - ls, x_2) \psi_k^q(s) ds, \quad (7)$$

где $P_1^0 = N_1$; $P_2^0 = N_2$; $P_3^0 = S$; $\kappa = 4$ для $P_1^0 - P_3^0$; $P_1^1 = M_1$; $P_2^1 = M_2$; $P_3^1 = H$; $\kappa = 7$ для $P_1^1 - P_3^1$; $P_4^1 = Q_{10}$; $P_5^1 = Q_{20}$; $\kappa = 5$ для P_4^1, P_5^1 ; $\psi_k^q = \psi_k^q(s)$ – искомые функции, зависящие от координаты точки на линии разреза s :

$$\begin{aligned} \psi_1^0 &= \frac{d[u]}{ds}; & \psi_2^0 &= \frac{d[v]}{ds}; \\ \psi_1^1 &= \frac{d[\gamma_1]}{ds}; & \psi_2^1 &= \frac{d[\gamma_2]}{ds}; & \psi_3^1 &= \frac{d[w_0]}{ds}; \\ \psi_4^1 &= [\gamma_1]; & \psi_5^1 &= [\gamma_2]; & \psi_3^0 &= \psi_6^1 = [T_0]; & \psi_4^0 &= \psi_7^1 = [T_1]. \end{aligned}$$

Ядра в формулах (7) содержат линейные комбинации специальных G-функций. Примером ядра является

$$K_{13}^0(x_1 - ls, x_2) = -\frac{\alpha}{r} \sin \varphi (2 \sin^2 \varphi - 3) + \frac{3\alpha r}{4} \sin \varphi g_{10}^0(r) - \frac{\alpha r}{4} \sin 3\varphi g_{21}^0(r),$$

где $r = \sqrt{(x_1 - ls)^2 + x_2^2}$; $\cos \varphi = (x_1 - ls)/r$; $\sin \varphi = x_2/r$;

$$g_{jk}^0(r) = C_0 G_{j,k} \left(\sqrt{\frac{3Bi}{Bi+3}} r \right) + C_1 G_{j,k} \left(\sqrt{\frac{15(Bi+1)}{Bi+6}} r \right);$$

коэффициенты C_0, C_1 зависят от критерия Био; $G_{n,\nu}(z)$ – специальная G-функция, определяемая с помощью интегрального представления через функцию Бесселя первого рода $J_\nu(z)$ порядка ν [10]:

$$G_{n,\nu}(rz) = (-1)^n \left(\frac{r}{2}\right)^{\nu-n} \int_0^\infty \frac{\rho^{\nu-n+1} J_{\nu+n}(r\rho)}{\rho^2 + z^2} d\rho \left(r > 0; \operatorname{Re} z > 0; -1 < \operatorname{Re} \nu < n + \frac{3}{2} \right).$$

Подставляя интегральные представлений компонент возмущённого термоупругого состояния (7) в граничные условия (5), получим две системы сингулярных интегральных уравнений (СИУ), описывающие при $|\zeta| \leq 1$

- безмоментное термоупругое состояние:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^0(s)}{s - \zeta} ds = F_j^0(\zeta) \quad (j = 1, 2); \quad (8)$$

- состояние термоупругого изгиба:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^1(s)}{s-\zeta} ds + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^3 \int_{-1}^1 E_{jk}^1(\zeta-s) \psi_k^1(s) ds = F_j^1(\zeta) \quad (j = \overline{1,3}). \quad (9)$$

Разностные ядра системы СИУ (9) зависят от специальной G-функции, например,

$$E_{33}^1(\zeta-s) = -1,25l^2(\zeta-s)G_{1,0}\left(\sqrt{2,5}l|\zeta-s|\right).$$

Правые части систем СИУ (8), (9) содержат интегралы от скачков компонент температуры с разностными ядрами, представляющими собой линейные комбинации специальных G-функций.

Компоненты возмущённого термоупругого состояния в любой точке пластины находятся с использованием интегральных представлений (7), в которых функции $\psi_3^0, \psi_4^0, \psi_6^1, \psi_7^1$ определяются при решении задачи теплопроводности (1), (4), а остальные функции ψ_k^q представляют собой результат решения систем СИУ (8), (9). Сравнивая коэффициенты при особенности $r^{-1/2}$ в ненулевых компонентах тензора напряжений с известными асимптотическими представлениями напряжений [11] и учитывая свойства полиномов Лежандра, найдём максимальные по модулю значения КИН для поперечного (K_{II}^{\max}) и продольного (K_{III}^{\max}) сдвига:

$$K_{II}^{\max} = 0,25\sqrt{\pi lh}E \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ \sum_{q=0}^1 |\psi_1^q(s)| \sqrt{1-s^2} \right\}; \quad (10)$$

$$K_{III}^{\max} = 0,375\sqrt{\pi lh}E\Lambda_0 \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ |\psi_3^1(s)| \sqrt{1-s^2} \right\}.$$

3. Анализ результатов численных исследований. Численные исследования посвящены оценке влияния длины (l) и теплофизических свойств теплопроводящего разреза ($\beta_n = l\lambda_n/\lambda$, $\lambda_n = l\lambda_c/\delta$) на КИН температурных напряжений для поперечного и продольного сдвига (10). Рассматривался случай симметричного теплообмена с окружающей средой ($Bi^+ = Bi^- = Bi$) при его средней интенсивности ($Bi = 0,1$).

Для анализа поведения температурных КИН предполагалась линейная зависимость основного температурного поля в пластине и, как следствие, отсутствие внутренних силовых факторов основного термоупругого состояния [12]. Таким образом, оценивалась составляющая КИН, обусловленная возмущённым температурным полем, вызванным наличием разреза. На линии разреза ($|x_1| \leq l$) предполагалось действие градиента температурного момента:

$$\left. \frac{\partial T_0^o}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial T_1^o}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = q_1 = \text{const} \neq 0.$$

Результаты численных исследований представлены на рисунке 1 и рисунке 2 в виде графиков зависимостей максимальных относительных значений КИН от полудлины разреза (l) при различных значениях параметра теплопроницаемости разреза β_n . Расчёты проведены при значении коэффициента Пуассона $\nu = 0,3$. На рисунке 1 представлены графики максимальных относительных

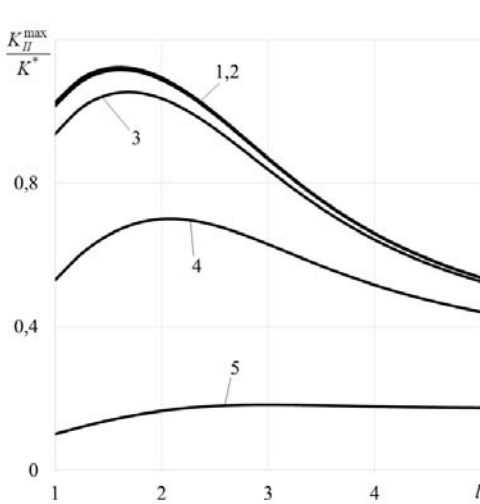


Рис. 1.

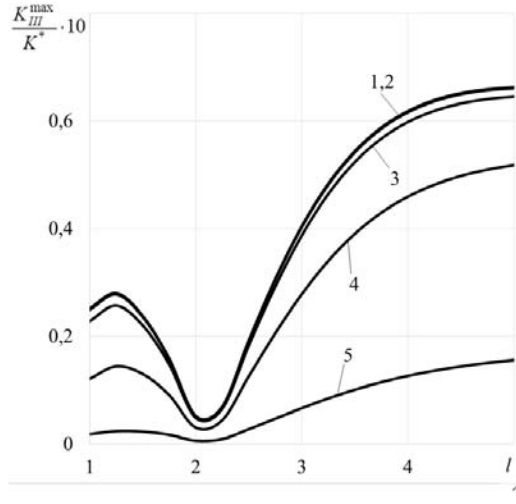


Рис. 2.

значений КИН для поперечного сдвига K_{II}^{\max} , а на рисунке 2 – для продольного сдвига K_{III}^{\max} . Значения КИН даны с точностью до величины $K^* = \alpha q_1 E \sqrt{lh} / 4$, которая соответствует значению КИН в пластине без теплообмена при действии однородного потока тепла интенсивности q_1 перпендикулярно линии разреза [11]. Кривые 1–5 на рисунке 1 и рисунке 2 отвечают таким значениям параметра теплопроницаемости разреза β_n : 0 (теплоизолированный разрез); 0,01; 0,1; 1; 10 соответственно.

Из графиков на рисунках 1, 2 следует, что с увеличением длины разреза максимальные относительные значения КИН одновременно возрастают только в диапазоне малых длин разреза ($l \approx 1$). С увеличением параметра l максимальные относительные значения КИН поперечного сдвига достигают своего максимума в диапазоне длин $1,5 < l < 2,5$ и при дальнейшем увеличении длины разреза уменьшаются. В то же время максимальные относительные значения КИН продольного сдвига уменьшаются, достигая своего минимума при $l = 2$, и при дальнейшем увеличении длины разреза только увеличиваются. Такой характер зависимости этих КИН подобен их поведению и при наличии только градиента средней температуры (q_0) на линии разреза [13], хотя значения этих КИН в данном случае на порядок больше.

Следует заметить, что максимальные относительные значения КИН поперечного сдвига в рассматриваемом случае постоянно уменьшаются, начиная со средних длин разреза ($l > 2,5$). В случае температурной нагрузки в виде гра-

диента средней температуры (q_0) на линии разреза эти КИН только возрастают [13].

Из анализа графиков на рисунках 1, 2 следует, что увеличение параметра теплопроницаемости разреза β_n приводит только к уменьшению температурных КИН. Характер такого поведения объясняется общими представлениями механики разрушения. Параметр теплопроницаемости разреза, исходя из своего определения, прямо пропорционален коэффициенту теплопроводности материала промежуточного слоя и обратно пропорционален раскрытию разреза ($\beta_n = l\lambda_c/(\lambda\delta)$). Поэтому увеличение первой составляющей и стремление к нулю второй составляющей приводят к уменьшению возмущения температурного поля и, следовательно, к уменьшению температурных КИН. Если раскрытие трещины, моделью которой является разрез, в пределе будет равно нулю, т. е. трещина исчезнет, то и температурных КИН не будет.

Выводы. Поскольку значения КИН для продольного сдвига на порядок меньше, чем значения КИН для поперечного сдвига, то последние являются определяющими при обосновании надёжности работы тонкостенных элементов конструкций при температурных нагрузках, приводящих к изгибу, в случае симметричного теплообмена. Учёт теплофизических свойств трещин в поперечном направлении не приводит к увеличению температурных КИН для поперечного и продольного сдвига.

1. Бакиров М.Ж. Коэффициент интенсивности напряжений в прямоугольных пластинах с трещинами / М.Ж. Бакиров, В.Ф. Михайлов, О.Хабидолда // Труды университета. – 2019. – № 3 (76). – С. 94–99.
2. Воронков Р.В. Исследование погрешности вычисления коэффициентов интенсивности напряжений с применением J-интеграла / Р.В. Воронков, М.А. Глебова, В.И. Гришин, С.В. Цой, А.Г. Яшутин // Ученые записки ЦАГИ. – 2019. – Т. 50, № 4. – С. 67–79.
3. Сургутанов Н.А. Исследование влияния глубины трещин на коэффициент интенсивности напряжений в надрезанных и гладких пластинах / Н.А. Сургутанов // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2017. – Т. 16, № 1. – С. 176–185.
4. Тихомиров В.М. Численный метод определения коэффициента интенсивности напряжений для тел из однородного и неоднородного материалов с трещиной / В.М. Тихомиров // Прикладная механика и техническая физика. – 2020. – Т. 61, № 1 (359). – С. 152–160.
5. Тулин Д.Е. Исследование напряженно-деформированного состояния пластины с полуэллиптической и сквозной трещинами / Д.Е. Тулин // Деформация и разрушение материалов. – 2021. – № 4. – С. 15–18.
6. Пелех Б.Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б.Л. Пелех, В.А. Лазько. – Киев: Наукова думка, 1982. – 296 с.
7. Бондаренко Н.С. Исследование температурного поля в изотропной пластине с теплопроницаемым разрезом на базе обобщённой теории / Н.С. Бондаренко // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. – 2014. – № 2. – С. 41–48.
8. Кит Г.С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г.С. Кит, М.Г. Кривцун. – Киев: Наукова думка, 1984. – 280 с.
9. Шевченко В.П. Задачи термоупругости тонких оболочек с разрезами: учебное пособие / В.П. Шевченко, А.С. Гольцев. – Киев: УМК ВО, 1988. – 84 с.
10. Хижняк В.К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учебное пособие / В.К. Хижняк

няк, В.П. Шевченко. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.

11. *Панасюк В.В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин. – Киев: Наукова думка, 1976. – 444 с.
12. *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости / А.Д. Коваленко. – Киев: Наукова думка, 1970. – 308 с.
13. *Бондаренко Н.С.* Влияние теплопроницаемости разреза на коэффициенты интенсивности напряжений в пластине при одностороннем теплообмене / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2020. – № 4 (73). – С. 16–23.

N.S. Bondarenko, A.S. Goltsev

Investigation of the influence of the length of a heat-permeable cut during thermoelastic bending of isotropic plates.

The problem of thermoelasticity for an isotropic plate with a heat-permeable cut is solved on the basis of the {1,0}-approximation in the case of symmetric heat exchange with the environment. The action of the gradient of the temperature moment of the main temperature field on the cut line is assumed. The influence of the length and heat-permeability parameter of the cut on the value of stress intensity factors for transverse and longitudinal shear is investigated.

Keywords: *Biot criterion, symmetric heat exchange, temperature moment gradient, isotropic plate, heat-permeable cut, stress intensity factors.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк

Получено 20.04.22

Donetsk National University, Donetsk

n.bondarenko@donnu.ru

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2022-1-25-31

EDN:IMEMCM



©2022. Е.С. Глушанков

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ОПЕРТОЙ ПО КРАЮ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛИТЫ

Предложен приближенный метод решения задачи об изгибе свободно опертой по краю тонкой эллиптической ортотропной плиты, нагруженной равномерно распределенным давлением по верхнему основанию. Было получено приближенное решение задачи в полиномиальном виде. С использованием полученного решения проведены численные исследования влияния свойств материала плиты на ее напряженное состояние.

Ключевые слова: теория изгиба тонких плит, ортотропный материал, эллиптическая плита, свободно опертый край, полиномиальные решения, функция прогиба, изгибающие и крутящие моменты.

Введение. В инженерной практике в качестве элементов конструкций широко применяются тонкие плиты. В процессе эксплуатации эти плиты подвергаются механическим воздействиям, которые могут приводить к их изгибу, что следует учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Для решения задач теории изгиба тонких плит при небольших значениях прогиба была разработана прикладная теория изгиба, в основе которой лежат гипотезы Кирхгофа-Лява [1, 2]. К настоящему времени разработаны различные методы и решены многие задачи теории изгиба плит из изотропных и анизотропных материалов [3-8].

В работе [9] был предложен способ решения задачи об изгибе свободно опертой тонкой эллиптической плиты. При построении решения удовлетворялось только одно граничное условие (накладываемое на значения прогиба плиты). Решение строилось с использованием вариационного метода Лагранжа-Ритца.

В данной работе предложено еще одно решение задачи об изгибе свободно опертой тонкой эллиптической плиты. При этом одно граничное условие удовлетворяется точно, а второе – приближенно. Проведены численные исследования, с помощью которых показана достаточная степень удовлетворения граничным условиям. Установлены закономерности влияния свойств материала плиты на значения моментов и прогиба в свободно опертой плите.

1. Постановка задачи теории изгиба тонких ортотропных плит. Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат $Oxyz$ тонкую плиту толщины $2h$ (рис. 1), изготовленную из ортотропного материала. Срединная плоскость плиты лежит в плоскости Oxy и занимает двумерную область S . Пусть для каждой точки плиты имеется плоскость упругой симметрии, параллельная срединной плоскости. По верхнему основанию распределены нормальные усилия $q(x, y)$. Край плиты свободно оперт.

Определение напряженно-деформированного состояния плиты сводится к интегрированию дифференциального уравнения [3] относительно неизвестной функции прогиба плиты $w(x, y)$:

$$\tilde{S}_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \left(\tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{66} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \tilde{S}_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y), \quad (1)$$

где

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{2h^3}{3} S_{ij};$$

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1}; \quad S_{66} = a_{66}^{-1};$$

a_{ij} — коэффициенты деформации материала плиты.

Уравнение (1) следует интегрировать при соответствующих граничных условиях. После этого прогиб плиты становится известным и по нему в любой точке плиты можно находить значения изгибающих моментов M_x , M_y , крутящего момента H_{xy} , выражения для которых с учетом ортотропности материала принимают следующий вид [3]:

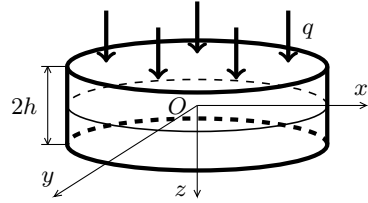


Рис. 1

$$M_x = - \left(\tilde{S}_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tilde{S}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), M_y = - \left(\tilde{S}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tilde{S}_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), H_{xy} = -2\tilde{S}_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2)$$

Тогда становится возможным определение моментов и перерезывающих сил на произвольной площадке с нормалью n и касательной s [3]:

$$M_n = M_x \cos^2(nx) + M_y \cos^2(ny) - 2H_{xy} \cos(nx) \cos(ny),$$

$$M_s = M_x \cos^2(ny) + M_y \cos^2(nx) + 2H_{xy} \cos(nx) \cos(ny),$$

$$H_{ns} = (M_y - M_x) \cos(nx) \cos(ny) + H_{xy} (\cos^2(nx) - \cos^2(ny)). \quad (3)$$

Граничные условия задачи имеют вид [2, 3]

$$w = 0, \quad M_n = 0. \quad (4)$$

2. Постановка и решение задачи об изгибе эллиптической плиты. Рассмотрим тонкую эллиптическую ортотропную плиту с полуосями a и b (рис. 2). По верхнему основанию равномерно распределены нормальные усилия $q = const$. Край плиты свободно оперт.

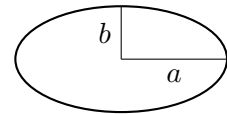


Рис. 2

В работе [9] было предложено искать решение задачи в виде

$$w(x, y) = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) (Ax^2 + By^2 + C), \quad (5)$$

где A, B, C – неизвестные постоянные. При этом функция прогиба w тождественно удовлетворяет первому граничному условию (4), а постоянные A, B, C определяются из удовлетворения второму граничному условию (4).

Для моментов M_x, M_y, H_{xy} из (2) получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 M_x &= -\frac{2A\tilde{S}_{12}a^2 + 12A\tilde{S}_{11}b^2 + 2B\tilde{S}_{12}b^2}{a^2b^2}x^2 - \\
 &\quad -\frac{2A\tilde{S}_{11}a^2 + 12B\tilde{S}_{12}a^2 + 2B\tilde{S}_{11}b^2}{a^2b^2}y^2 + \\
 &\quad + \frac{(2A\tilde{S}_{11} + 2B\tilde{S}_{12})a^2b^2 - 2C\tilde{S}_{12}a^2 - 2C\tilde{S}_{11}b^2}{a^2b^2}, \\
 M_y &= -\frac{2A\tilde{S}_{22}a^2 + 12A\tilde{S}_{12}b^2 + 2B\tilde{S}_{22}b^2}{a^2b^2}x^2 - \\
 &\quad -\frac{2A\tilde{S}_{12}a^2 + 12B\tilde{S}_{22}a^2 + 2B\tilde{S}_{12}b^2}{a^2b^2}y^2 + \\
 &\quad + \frac{(2A\tilde{S}_{12} + 2B\tilde{S}_{22})a^2b^2 - 2C\tilde{S}_{22}a^2 - 2C\tilde{S}_{12}b^2}{a^2b^2}, \\
 H_{xy} &= -\frac{8\tilde{S}_{66}(Aa^2 + Bb^2)}{a^2b^2}xy.
 \end{aligned}$$

Для $\cos(nx), \cos(ny)$ в случае эллиптического контура имеем

$$\cos(nx) = \frac{b^2x}{\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2}}, \quad \cos(ny) = \frac{a^2y}{\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2}}.$$

Подставим эти выражения сперва в (3), затем во второе граничное условие (4). Тогда после элементарных преобразований получим:

$$\begin{aligned}
 &\frac{-2A\tilde{S}_{12}a^2b^2 - 12A\tilde{S}_{11}b^4 - 2B\tilde{S}_{12}b^4}{a^2}x^4 + \left(\frac{-2A\tilde{S}_{11}a^2b^2 - 12B\tilde{S}_{12}a^2b^2 - 2B\tilde{S}_{11}b^4}{a^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{-2A\tilde{S}_{22}a^4 - 12A\tilde{S}_{12}a^2b^2 - 2B\tilde{S}_{22}a^2b^2}{b^2} - 8\tilde{S}_{66}(Aa^2 + Bb^2) \right) x^2y^2 + \\
 &\quad + \frac{-2A\tilde{S}_{12}a^4 - 12B\tilde{S}_{22}a^4 - 2B\tilde{S}_{12}a^2b^2}{b^2}y^4 + \\
 &\quad + \frac{(2A\tilde{S}_{11} + 2B\tilde{S}_{12})a^2b^4 - 2C\tilde{S}_{12}a^2b^2 - 2C\tilde{S}_{11}b^4}{a^2}x^2 + \\
 &\quad + \frac{(2A\tilde{S}_{12} + 2B\tilde{S}_{22})a^4b^2 - 2C\tilde{S}_{22}a^4 - 2C\tilde{S}_{12}a^2b^2}{b^2}y^2 = 0. \tag{6}
 \end{aligned}$$

Данное уравнение справедливо при значениях x и y , удовлетворяющих уравнению контура плиты

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{7}$$

Тогда левая часть уравнения (6) (полином со слагаемыми порядков x^4 , x^2y^2 , y^4 , x^2 и y^2) должна делиться нацело на левую часть уравнения контура (7) (полином со слагаемыми порядков x^2 , y^2 и x^0 , y^0). Следовательно, частное от деления вышеуказанных полиномов может иметь только слагаемые порядков x^2 и y^2 . Тогда справедливым должно быть следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
 & \frac{-2A\tilde{S}_{12}a^2b^2 - 12A\tilde{S}_{11}b^4 - 2B\tilde{S}_{12}b^4}{a^2}x^4 + \left(\frac{-2A\tilde{S}_{11}a^2b^2 - 12B\tilde{S}_{12}a^2b^2 - 2B\tilde{S}_{11}b^4}{a^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{-2A\tilde{S}_{22}a^4 - 12A\tilde{S}_{12}a^2b^2 - 2B\tilde{S}_{22}a^2b^2}{b^2} - 8\tilde{S}_{66}(Aa^2 + Bb^2) \right) x^2y^2 + \\
 & + \frac{-2A\tilde{S}_{12}a^4 - 12B\tilde{S}_{22}a^4 - 2B\tilde{S}_{12}a^2b^2}{b^2}y^4 + \\
 & + \frac{(2A\tilde{S}_{11} + 2B\tilde{S}_{12})a^2b^4 - 2C\tilde{S}_{12}a^2b^2 - 2C\tilde{S}_{11}b^4}{a^2}x^2 + \\
 & + \frac{(2A\tilde{S}_{12} + 2B\tilde{S}_{22})a^4b^2 - 2C\tilde{S}_{22}a^4 - 2C\tilde{S}_{12}a^2b^2}{b^2}y^2 = \\
 & = (Qx^2 + Ry^2) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = 0, \tag{8}
 \end{aligned}$$

где Q , R – неизвестные постоянные. Однако в общем случае соотношение (8) не выполняется точно. При этом, оно может выполняться с достаточно высокой точностью, поэтому можно находить приближенное решение задачи в виде (5).

Тогда из подстановки функции (5) в систему дифференциальных уравнений (1) и из представления (8) получим систему 6 линейных алгебраических уравнений относительно 5 неизвестных A , B , C , Q , R :

$$\begin{aligned}
 & 8 \left(3\tilde{S}_{11}b^2 + \left(\tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{66} \right) a^2 \right) \cdot A + 8 \left(\left(\tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{66} \right) b^2 + 3\tilde{S}_{22}a^2 \right) \cdot B = q, \\
 & 2 \left(6\tilde{S}_{11}b^2 + \tilde{S}_{12}a^2 \right) \cdot A + 2\tilde{S}_{12}b^2 \cdot B + a^2 \cdot Q = 0, \\
 & 2\tilde{S}_{12}a^2 \cdot A + 2 \left(2\tilde{S}_{12}b^2 + 6\tilde{S}_{22}a^2 \right) \cdot B + b^2 \cdot R = 0, \\
 & 2 \left(\tilde{S}_{11}a^2b^4 + \left(6\tilde{S}_{12} + 8\tilde{S}_{66} \right) a^4b^2 + \tilde{S}_{22}a^6 \right) \cdot A + \\
 & \quad + 2 \left(\tilde{S}_{11}b^6 + \left(6\tilde{S}_{12} + 8\tilde{S}_{66} \right) a^2b^4 + \tilde{S}_{22}a^4b^2 \right) \cdot B + \\
 & \quad + a^4b^2Q + a^2b^4R = 0, \\
 & 2\tilde{S}_{11}a^2b^2 \cdot A + 2\tilde{S}_{12}a^2b^2 \cdot B - 2 \left(\tilde{S}_{11}b^2 + \tilde{S}_{12}a^2 \right) \cdot C + a^4 \cdot Q = 0, \\
 & 2\tilde{S}_{12}a^2b^2 \cdot A + 2\tilde{S}_{22}a^2b^2 \cdot B - 2 \left(\tilde{S}_{12}b^2 + \tilde{S}_{22}a^2 \right) \cdot C + b^4 \cdot R = 0. \tag{9}
 \end{aligned}$$

Полученная система является переопределенной, поэтому ее следует решать в постановке задачи наименьших квадратов. Для этого используем метод сингулярных разложений матрицы [10]. В результате станут известными постоянные

A, B, C , а следовательно, и функция w . После этого станет возможным определение значений моментов в любой точке плиты по формулам (2).

3. Численные исследования. Были проведены численные исследования для эллиптической пластинки из материалов: 1) стеклотекстолит КАСТ-В изотропный [11] (материал М1); 2) стеклопластик косоугольной намотки с наполнителем из алюмоборосиликатного стекла и связующим агентом из малеиновой эпоксидной смолы [12] (материал М2). Физико-механические постоянные этих материалов приведены в таблице 1.

Таблица 1. Постоянные материалов

Материал	$a_{11},$ 10^{-4} МПа	$a_{22},$ 10^{-4} МПа	$a_{12},$ 10^{-4} МПа	$a_{66},$ 10^{-4} МПа
М1	72,100	72,100	-8,600	161,500
М2	10,000	2,800	-0,770	27,000

В таблице 2 для опертой круговой плиты ($b = a$) приведены расчетные значения моментов M_n, M_s, H_{ns} в некоторых точках контура плиты с центральным углом θ , отсчитываемым от положительного направления оси Ox .

Таблица 2. Значения моментов в точках контура круговой плиты

$\theta,$ рад.	Материал М1			Материал М2		
	$M_n, 10^{-2}$	$M_s, 10^{-2}$	$H_{ns}, 10^{-2}$	$M_n, 10^{-2}$	$M_s, 10^{-2}$	$H_{ns}, 10^{-2}$
0	0,000	11,009	0,000	-0,619	13,403	0,000
$\pi/12$	0,000	11,009	0,000	0,094	12,093	2,409
$\pi/6$	0,000	11,009	0,000	1,542	9,014	3,306
$\pi/4$	0,000	11,009	0,000	2,337	5,992	2,451
$\pi/3$	0,000	11,009	0,000	1,766	4,336	0,940
$5\pi/12$	0,000	11,009	0,000	0,482	3,989	0,043
$\pi/2$	0,000	11,009	0,000	-0,171	4,045	0,000

В таблице 3 приведены значения $M_n \cdot 10^2$ в некоторых точках круговой плиты, получаемые при использовании подхода, предложенного в работе [9], и подхода, предложенного в данной работе.

Из данных таблицы 2 видно, что для изотропного материала М1 данный подход позволяет достичь точного удовлетворения граничным условиям. Для ортотропного материала М2 полученные расчетные значения момента M_n оказываются достаточно малыми по сравнению с расчетными значениями момента M_s , но не пренебрежимо малыми.

В то же время, из данных таблицы 3 следует, что предложенный в данной работе подход позволяет получить несравнимо лучшие результаты по сравнению с подходом, предложенным в работе [9].

Из представленных в работе результатов и других полученных данных следует, что на значения изгибающих моментов существенно влияет анизотропия

Таблица 3. Значения моментов в точках контура круговой плиты

θ , рад.	Материал М1		Материал М2	
	Статья [9]	Данная статья	Статья [9]	Данная статья
0	-3626,346	0,000	-74259,120	-0,619
$\pi/12$	-1238,044	0,000	-12109,503	0,094
$\pi/6$	5286,919	0,000	227576,621	1,542
$\pi/4$	14200,183	0,000	720355,974	2,337
$\pi/3$	23113,448	0,000	1404078,939	1,766
$5\pi/12$	29638,411	0,000	2025652,288	0,482
$\pi/2$	32026,713	0,000	2278745,518	-0,171

упругих свойств материала плиты. Так, значения изгибающих моментов по направлениям с меньшими значениями коэффициентов деформации (с большей жесткостью) превосходят значения изгибающих моментов по направлениям с большими значениями коэффициентов деформации (с меньшей жесткостью).

Выводы. В работе представлено приближенное решение задачи об изгибе свободно опертой эллиптической плиты. Был проведен сравнительный анализ предложенного метода с одним известным из литературы подходом; в результате анализа была установлена высокая эффективность предложенного в данной работе метода. Представлены некоторые результаты численные исследований влияния свойств материала плиты на значения изгибающих моментов в плите.

1. *Love A.E.H.* On the small free vibrations and deformations of elastic shells / A.E.H. Love // Philosophical trans. of the Royal Society. – 1888. – Vol. serie A, No. 17. – P. 491–549.
2. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
3. *Тимошенко С.П.* Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
4. *Mansfield E.H.* The bending and stretching of plates / E.H. Mansfield. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 228 p.
5. *Космодамианский А.С.* Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями / А.С. Космодамианский. – Киев–Донецк: Вища шк., 1976. – 200 с.
6. *Калоеров С.А.* Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит / С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 2012. – Вып. 4 (50). – С. 113–132.
7. *Калоеров С.А.* Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных изотропных плит / С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 2013. – Вып. 7 (53). – С. 83–100.
8. *Калоеров С.А.* Решения задач изгиба тонких плит для канонических областей / С.А. Калоеров, А.И. Занько, А.А. Кошкин // Теорет. и прикладная механика. – 2014. – Вып. 9 (55). – С. 99–138.
9. *Sidorin Ya.S.* Bending of simply supported orthotropic elliptical plates. 1. Bending in accordance with the «straight normals» hypothesis / Ya.S. Sidorin // Polymer Mechanics. – 1977. – No. 13. – P. 875–877.
10. *Форсайт Дж.* Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
11. *Космодамианский А.С.* Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров. – Киев–Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.

12. *Хорошун Л.П.* Термоупругие постоянные стеклопластика косоугольной намотки / Л.П. Хорошун, А.Х. Меликбемян, П.Г. Шишкин // Прикладная механика. – 1979. – Т. 15, вып. 1. – С. 13–18.

E.S. Glushankov

The approximate solution of the bending problem of simply supported elliptic orthotropic plate.

An approximate method is proposed for solving the bending problem of simply supported elliptic thin orthotropic plate loaded with uniformly distributed pressure along the upper base. The approximate solution is obtained in polynomials. The numerical studies of the influence of plate's material properties on the plate's stress state are carried out with using of this solution.

Keywords: *bending theory of thin plates, orthotropic material, elliptic plate, simply supported bound, polynomial solutions, deflection function, bending and twisting moments.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк

Получено 22.11.21

Donetsk National University, Donetsk

eugenij.glushankov@gmail.com

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2022-1-32-43

EDN:IUZJLK



©2022. Е.С. Глушанков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМОЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ МНОГОСВЯЗНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ ПЬЕЗОМАТЕРИАЛА В СЛУЧАЕ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА НА ЕЕ КОНТУРАХ

Предложен способ определения термоэлектромагнитоупругого состояния бесконечной многосвязной пьезопластины с отверстиями, когда на контурах отверстий имеет место конвективный теплообмен с внешней средой. Решение задачи получено с использованием комплексных потенциалов теплопроводности и термоэлектромагнитоупругости. Задача сведена к решению двух переопределенных систем линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений функций в ряды Лорана. Численными исследованиями установлено влияние характеристик теплообмена, геометрических характеристик пластины, электромагнитных свойств ее материала на значения основных характеристик термоэлектромагнитоупругого состояния.

Ключевые слова: пьезопластина, многосвязная пластина, конвективный теплообмен, комплексные потенциалы, температурные напряжения.

Введение. В различных областях науки и техники широкое применение в качестве элементов конструкций получили пластины с отверстиями, изготовленные из пьезоматериалов [1]. Под действием тепловых, механических и электромагнитных полей в этих элементах могут возникать значительные концентрации напряжений. Это следует учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Поэтому являются актуальными вопросы разработки методов определения термоэлектромагнитоупругого состояния упругих тел из пьезоматериалов. К настоящему времени разработано множество методов, решено большое количество задач о действии различных физических полей в многосвязных пластинках из пьезоматериалов [2–5], в том числе, рассмотрены случаи действия температурных полей, возникающих от разности температур на контурах пластины [6], от воздействия на пластинку линейного потока тепла [7]. Для тел из материалов, не обладающих пьезосвойствами, решено множество задач термоупругости для случая, когда на границе тел имеет место конвективный теплообмен с внешней средой [8–13]. Решена задача о действии линейного потока в бесконечной многосвязной пьезопластинке, находящейся в условиях конвективного теплообмена [14].

В данной статье метод определения термоэлектромагнитоупругого состояния (ТЭМУС), возникающего от разности температур, распространен на случай, когда на контурах пластины имеет место конвективный теплообмен с внешней средой. Для решения задачи используются функции комплексной переменной.

Определение неизвестных коэффициентов разложений голоморфных функций в ряды Лорана сведено к решению переопределенных систем линейных алгебраических уравнений. Проведены численные исследования с установлением закономерностей влияния условий (характеристик) конвективного теплообмена, свойств материала пластинки, геометрических особенностей пластинки на значения напряжений в ней.

1. Постановка задачи. Рассмотрим находящуюся в условиях плоской задачи бесконечную пластинку из пьезоматериала, занимающую многосвязную область S , ограниченную контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с центрами в точках $O_l(x_{0l}, y_{0l})$, полуосями a_l и b_l , углами поворота φ_l (рис. 1). Контур L_l располагается произвольно относительно друг друга. На каждом из контуров L_l имеет место конвективный теплообмен с коэффициентом теплообмена h_l с внешней средой температуры \mathfrak{T}_l . Эти контуры свободны от внешних усилий или жестко подкреплены; потоки электромагнитной индукции по направлению нормали равны нулю. На бесконечности напряжения, компоненты векторов индукции электромагнитного поля равны нулю.

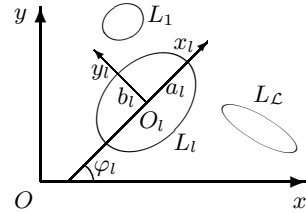


Рис. 1

Определение ТЭМУС сводится к последовательному решению двух задач: сперва – задачи теплопроводности, затем – собственно задачи термоэлектромагнитоупругости.

Решение задачи теплопроводности сводится к определению комплексного потенциала теплопроводности $F_5(z_5)$. Эта функция определена в комплексной области S_5 , получаемой из области S аффинным преобразованием [6, 7, 14]

$$z_5 = x + \mu_5 y, \quad (1)$$

где μ_5 – корень характеристического уравнения задачи теплопроводности [6, 7, 14]

$$k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} = 0, \quad (2)$$

k_{ij} – коэффициенты теплопроводности материала пластинки.

На контурах L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) функция $F_5(z_5)$ должна удовлетворять граничному условию теплопроводности [6, 7, 14]

$$2 \operatorname{Re} (h_l F_5(\tau_5) + i \varkappa_T \delta_{5,s}(\tau_5) F_5'(\tau_5)) = h_l \mathfrak{T}_l \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}), \quad (3)$$

где $\varkappa_T = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}$; $\delta_{5,s}(\tau_5) = d\tau_5/ds$, s – дуга контура L_l .

После определения функции $F_5(z_5)$ из граничного условия становится возможным вычисление значений температуры T и плотностей потока тепла q_x, q_y в любой точке пластинки по формулам [6, 7, 14]

$$T = 2 \operatorname{Re} F_5(z_5); \quad (4)$$

$$(q_x, q_y) = 2 \operatorname{Re} i \varkappa_T (\mu_5, -1) F_5'(z_5). \quad (5)$$

Решение задачи термоэлектромагнитоупругости сводится к определению комплексных потенциалов термоэлектромагнитоупругости $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$). Эти функции определены в комплексных областях S_k , получаемых из области S аффинными преобразованиями [6, 7, 14]

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (6)$$

μ_k ($k = \overline{1, 4}$) — корни характеристического уравнения задачи термоэлектромагнитоупругости [6, 7, 14]

$$\Delta(\mu) = 0; \quad (7)$$

$$\Delta(\mu) = l_{4s}(\mu) [l_{2\beta}(\mu)l_{2\chi}(\mu) - l_{2\nu}^2(\mu)] - l_{3g}(\mu) [l_{3g}(\mu)l_{2\chi}(\mu) - l_{3p}(\mu)l_{2\nu}(\mu)] - \\ - l_{3p}(\mu) [l_{3p}(\mu)l_{2\beta}(\mu) - l_{3g}(\mu)l_{2\nu}(\mu)],$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11}\mu^4 + 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 + 2s_{26}\mu + s_{22},$$

$$l_{3g}(\mu) = g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu + g_{22},$$

$$l_{3p}(\mu) = p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu + p_{22},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22},$$

$$l_{2\nu}(\mu) = -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22};$$

s_{ij} — коэффициенты деформации материала; g_{ij} и p_{ij} — пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты; β_{ij} , ν_{ij} и χ_{ij} — коэффициенты диэлектрической, электромагнитной и магнитной проницаемости.

На контурах L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) функции $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) должны удовлетворять граничным условиям задачи термоэлектромагнитоупругости, которые удобнее использовать в дифференциальной форме [6, 7, 14]:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) \delta_{k,s}(\tau_k) \Phi'_k(\tau_k) = \left(\frac{df_{11}}{ds}, \frac{df_{12}}{ds}, \frac{df_{13}}{ds}, \frac{df_{14}}{ds} \right), \quad (8)$$

где $\delta_{k,s}(\tau_k) = d\tau_k/ds$; для неподкрепленных контуров L_l

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (1, \mu_k, \nu_k, \rho_k),$$

$$(f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}) = (c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}),$$

а для жестко подкрепленных контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (p_k, q_k, \nu_k, \rho_k),$$

$$(f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}) = (u_l, v_l, c_{13}, c_{14}).$$

Здесь

$$\nu_k = \frac{l_{3p}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \nu_5 = \frac{r\chi}{r_5},$$

Определение термоэлектромагнитоупругого состояния бесконечной пластинки

$$\rho_k = \frac{l_{3g}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3p}(\mu_k)l_{2\beta}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \rho_5 = \frac{r_\omega}{r_5};$$

$$r_5 = \frac{l_5(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\chi = \frac{l_\chi(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\omega = \frac{l_\omega(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)},$$

$$l_5(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{1t}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{1m}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\chi(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\omega(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) \end{vmatrix};$$

$$l_{2\alpha}(\mu_5) = -\alpha_1\mu_5^2 + \alpha_6\mu_5 - \alpha_2, \quad l_{1t}(\mu_5) = t_1\mu_5 - t_2, \quad l_{1m}(\mu_5) = m_1\mu_5 - m_2;$$

α_i — коэффициенты теплового расширения, измеренные при постоянной индукции электромагнитного поля; t_i и m_i — пирозлектрические и пирромагнитные модули, измеренные при постоянных напряжениях;

$$\Phi_5(z_5) = r_5 \int F_5(z_5) dz_5;$$

u_l, v_l — заданные на контуре значения перемещений.

После определения функции $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) из граничных условий становится возможным вычисление значений основных характеристик ТЭМУС (температуры T ; плотностей потока тепла q_x, q_y ; напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$; индукций D_x, D_y, B_x, B_y и напряженностей E_x, E_y, H_x, H_y электромагнитного поля; перемещений u, v ; потенциалов электромагнитного поля φ, ψ) в любой точке пластинки по формулам [6, 7, 14]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k); \quad (9)$$

$$(D_x, D_y, B_x, B_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\nu_k \mu_k, -\nu_k, \rho_k \mu_k, -\rho_k) \Phi'_k(z_k); \quad (10)$$

$$(E_x, E_y, H_x, H_y) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi'_k(z_k); \quad (11)$$

$$(u, v, \varphi, \psi) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k). \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 p_k &= s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} - (g_{11}\mu_k - g_{12})\nu_k - (p_{11}\mu_k - p_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}\alpha_1}{r_5}, \\
 q_k &= s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} - (g_{21}\mu_k - g_{22})\nu_k - (p_{21}\mu_k - p_{22})\rho_k + \frac{\delta_{k5}\alpha_2}{r_5\mu_5}, \\
 r_k^0 &= g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})\nu_k - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}t_1}{r_5}, \\
 h_k^0 &= p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\nu_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}m_1}{r_5};
 \end{aligned}$$

δ_{ij} — символ Кронекера.

2. Построение функций комплексных потенциалов и удовлетворение граничным условиям. В общем случае многосвязной области комплексные потенциалы $F_5(z_5)$ и $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) имеют вид [6, 7, 14]

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l} w_{5l}(z_5) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5); \quad (13)$$

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k). \quad (14)$$

Здесь c_5 — вещественная постоянная, определяемая из граничных условий; $D_{5l} = -q_l/4\pi\kappa_T$ — постоянные, определяемые из граничных условий; q_l — суммарный тепловой поток через контур L_l в область S ; $w_{5l}(z_5) = \ln(z_5 - z_{5l})$; z_{5l} — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (1) произвольным точкам внутри контуров L_l ; c_{5ln} — комплексные постоянные, определяемые из граничных условий; $\varphi_{5ln}(z_5) = \zeta_{5l}^{-n}$; ζ_{5l} — комплексные переменные, определяемые из соответствующих конформных отображений;

$$N_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl});$$

Γ_k, A_{kl}, B_{kl} — постоянные, определяемые из решений систем уравнений

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, \nu_k, \mu_k \nu_k, \rho_k, \mu_k \rho_k) \Gamma_k = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i A_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i B_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);$$

$\Gamma_5 = r_5 c_5$; $A_{5l} = r_5 D_{5l}$; $B_{5l} = r_5 (c_{51l} R_{5l} - D_{5l} z_{5l})$; $w_{kl}(z_k) = \ln(z_k - z_{kl})$; z_{kl} — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (6) произвольным точкам внутри контуров L_l ; a_{kln} — комплексные постоянные, определяемые из граничных условий; $\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}$; ζ_{kl} — комплексные переменные, определяемые из соответствующих конформных отображений.

В локальных системах координат $O_l x_l y_l$ параметрические уравнения эллипсов (рис. 1) принимают вид [6, 7, 14]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе координат Oxy —

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l.$$

Здесь θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) — угловая переменная уравнения эллипса в параметрической форме.

Комплексные переменные ζ_{5l} , ζ_{kl} определяются из конформных отображений внешностей единичных кругов $|\zeta_{5l}| \geq 1$, $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{5l} , L_{kl} , получаемых из L_l аффинными преобразованиями (1), (6) [6, 7, 14]:

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}. \end{aligned}$$

Неизвестные постоянные c_5 , D_{5l} , c_{5ln} , a_{kln} , входящие в функции (13) и (14), будем определять из граничных условий (3) и (8) с использованием метода наименьших квадратов. Для этого на контурах L_j ($j = \overline{1, \mathcal{L}}$) выберем систему точек $M_{jm}(x_{jm}, y_{jm})$ ($m = \overline{1, M_j}$), в которых следует удовлетворять граничным условиям задач теплопроводности и термоэлектромагнитоупругости.

Задача теплопроводности. При подстановке функции (13) в граничное условие (3), для определения неизвестных постоянных c_5 , D_{5l} , c_{5ln} получается система линейных алгебраических уравнений [14]

$$\begin{aligned} &2 \operatorname{Re} h_j c_5 + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (h_j w_{5l}(\tau_{5jm}) + i \varkappa_T \delta_{5,s}(\tau_{5jm}) w'_{5l}(\tau_{5jm})) D_{5l} + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (h_j \varphi_{5ln}(\tau_{5jm}) + i \varkappa_T \delta_{5,s}(\tau_{5jm}) \varphi'_{5ln}(\tau_{5jm})) c_{5ln} = h_j \mathfrak{T}_j \\ &(j = \overline{1, \mathcal{L}}, \quad m = \overline{1, M_j}), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\tau_{5jm} = x_{jm} + \mu_5 y_{jm}$, $\tau_{jm} = \tau_{jm}(x_{jm}, y_{jm})$. После решения этой системы уравнений с использованием метода сингулярных разложений [15, 16] постоянные c_5 , D_{5l} , c_{5ln} , а следовательно, и комплексный потенциал теплопроводности (13), будут известны. По известной функции (13) можно в любой точке пластинки найти температуру и плотности потока тепла по формулам (4), (5) [6, 7, 14].

Задача термоэлектромагнитоупругости. При подстановке функций (13) и (14) в граничные условия (8) для определения неизвестных постоянных a_{kln} получается следующая система линейных алгебраических уравнений [14]:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} d_{kjp} \delta_{k,s}(\tau_{kjm}) \varphi'_{kln}(\tau_{kjm}) a_{kln} = \\ = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{kjp} \delta_{k,s}(\tau_{kjm}) N'_k(\tau_{kjm}) - \\ - 2 \operatorname{Re} d_{5jp} \delta_{5,s}(\tau_{5jm}) r_5 F_5(\tau_{5jm}) + \frac{df_{jp}}{ds}(\tau_{jm}) \\ (j = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, M_j}, p = \overline{1, 4}), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\tau_{kjm} = x_{jm} + \mu_k y_{jm}$. После решения этой системы с использованием метода сингулярных разложений [15, 16] постоянные a_{kln} , а следовательно, комплексные потенциалы термоэлектромагнитоупругости (14) будут известны. По известным функциям (14) можно в любой точке пластинки найти значения основных характеристик ТЭМУС по формулам (9)–(12) [6, 7, 14].

3. Результаты численных исследований, выводы. Численные исследования были проведены для пластинки с двумя эллиптическими (круговыми) отверстиями. При проведении расчетов количество членов в рядах в представлениях (13), (14) и «коллокационных точек» на контурах L_j , для которых составлялись линейные алгебраические уравнения (16) и (17), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с высокой степенью точности. Как показали численные исследования, для этого необходимо было в указанных рядах оставлять от 30 до 70 членов, на каждом из контуров брать от 300 до 600 «коллокационных точек». Численные исследования были проведены для пластинки из композита на основе $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$. Физико-механические постоянные этого материала [17]:

$$\begin{aligned} s_{11} = 7,165 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad s_{22} = 6,797 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad s_{66} = 19,912 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \\ s_{12} = -2,337 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad g_{16} = 2,028 \cdot 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м}^2, \\ g_{21} = -0,496 \cdot 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м}^2, \quad g_{22} = 1,157 \cdot 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м}^2, \\ p_{16} = 1,850 \cdot 10^{-5} \text{ МТл}^{-1}, \quad p_{21} = 0,576 \cdot 10^{-5} \text{ МТл}^{-1}, \quad p_{22} = 1,186 \cdot 10^{-5} \text{ МТл}^{-1}, \\ \beta_{11} = 0,156 \cdot 10^3 \text{ МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}, \quad \beta_{22} = 0,137 \cdot 10^3 \text{ МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}, \\ \nu_{11} = -0,190 \cdot 10^{-1} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м} \cdot \text{МА}, \quad \nu_{22} = -0,185 \cdot 10^{-1} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м} \cdot \text{МА}, \end{aligned}$$

Определение термоэлектромагнитоупругого состояния бесконечной пластинки

$$\begin{aligned}\chi_{11} &= 0,336 \cdot 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{МТл}^{-1}, \quad \chi_{22} = 0,119 \cdot 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{МТл}^{-1}, \\ \alpha_1 &= 8,530 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad \alpha_2 = 1,990 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \\ t_2 &= 133,000 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot (\text{МКл} \cdot \text{К})^{-1}, \quad m_2 = 133,000 \cdot 10^{-3} \text{ МА} \cdot (\text{М} \cdot \text{К})^{-1}, \\ k_{11} &= 2,500 \cdot 1 \text{ Вт} \cdot (\text{М} \cdot \text{К})^{-1}, \quad k_{22} = 2,500 \cdot 1 \text{ Вт} \cdot (\text{М} \cdot \text{К})^{-1}.\end{aligned}$$

В таблице 1 для пластинки с двумя неподкрепленными круговыми отверстиями радиуса a ($a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a$) (рис. 2), на контурах которых поддерживается конвективный теплообмен с коэффициентом теплообмена h ($h_1 = h_2 = h$) с внешней средой, с точностью до разности температур внешних сред в правом и левом отверстиях $\mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1$ как множителя, в зависимости от отношения c/a расстояния c между контурами отверстий к радиусу отверстий, приведены значения нормальных напряжений σ_s на площадках, перпендикулярных к контуру, в некоторых характерных точках контура левого отверстия с центральным углом θ , отсчитываемым от положительного направления оси Ox . Исследования проводились

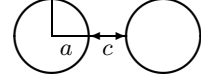


Рис. 2

Таблица 1. Значения напряжений σ_s в точках контура левого отверстия

Тип задачи	ha	θ , рад.	Значения c/a								
			0	0,01	0,1	0,5	1	2	10	100	∞
ТЭМУ	0,01	0	—	-0,000	-0,002	-0,004	-0,005	-0,006	-0,010	-0,018	-0,042
		$\pi/2$	0,003	0,003	0,003	0,004	0,004	0,004	0,006	0,010	0,026
		π	-0,007	-0,007	-0,007	-0,007	-0,008	-0,008	-0,008	-0,011	-0,018
	0,1	0	—	-0,004	-0,016	-0,035	-0,047	-0,059	-0,094	-0,155	-0,298
		$\pi/2$	0,030	0,030	0,031	0,034	0,036	0,040	0,052	0,088	0,184
		π	-0,064	-0,064	-0,064	-0,068	-0,072	-0,078	-0,103	-0,156	-0,298
	1	0	—	-0,032	-0,136	-0,279	-0,359	-0,420	-0,524	-0,647	-0,776
		$\pi/2$	0,221	0,221	0,226	0,240	0,251	0,263	0,288	0,367	0,479
		π	-0,432	-0,432	-0,437	-0,454	-0,470	-0,493	-0,557	-0,650	-0,776
	10	0	—	-0,251	-0,709	-1,112	-1,181	-1,136	-0,984	-0,947	-0,925
		$\pi/2$	0,639	0,639	0,642	0,645	0,635	0,608	0,523	0,536	0,571
		π	-1,009	-1,010	-1,015	-1,029	-1,035	-1,033	-0,987	-0,948	-0,925
	∞	0	—	-2,329	-2,150	-1,848	-1,664	-1,435	-1,096	-0,999	-0,945
		$\pi/2$	0,838	0,818	0,816	0,795	0,764	0,709	0,575	0,565	0,583
		π	-1,169	-1,175	-1,178	-1,184	-1,180	-1,163	-1,075	-0,999	-0,945
ТУ	0,01	0	—	0,000	0,000	0,001	0,001	0,002	0,003	0,004	0,008
		$\pi/2$	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,002	0,004	0,009	0,024
		π	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,003	0,004	0,008
	0,1	0	—	0,000	0,004	0,009	0,012	0,016	0,025	0,034	0,055
		$\pi/2$	0,002	0,002	0,011	0,013	0,014	0,017	0,035	0,075	0,173
		π	0,009	0,009	0,014	0,015	0,016	0,018	0,024	0,034	0,055
	1	0	—	0,000	0,033	0,069	0,091	0,113	0,136	0,140	0,143
		$\pi/2$	0,003	0,002	0,078	0,086	0,096	0,114	0,194	0,311	0,471
		π	0,059	0,058	0,094	0,100	0,106	0,114	0,132	0,140	0,143
	10	0	—	0,000	0,156	0,258	0,287	0,294	0,253	0,205	0,171
		$\pi/2$	-0,176	-0,178	0,200	0,215	0,231	0,258	0,353	0,454	0,537
		π	0,052	0,050	0,228	0,237	0,242	0,246	0,236	0,204	0,171
	∞	0	—	-0,004	0,416	0,410	0,393	0,365	0,281	0,216	0,174
		$\pi/2$	-27,258	-2,584	0,248	0,260	0,275	0,301	0,389	0,479	0,548
		π	2,100	-1,079	0,271	0,278	0,281	0,280	0,257	0,215	0,174

для случаев задачи термоэлектромагнитоупругости (ТЭМУ), когда учитываются все свойства материала пластинки, и задачи термоупругости (ТУ), когда не учитываются электрические и магнитные свойства материала.

На рисунке 3 изображены графики распределения напряжений σ_s вблизи контура левого отверстия для случаев значения $c/a = 0,01; 2; \infty$ при значениях $ha = 0, 1; 10$ в зависимости от центрального угла для задач ТУ и ТЭМУ.

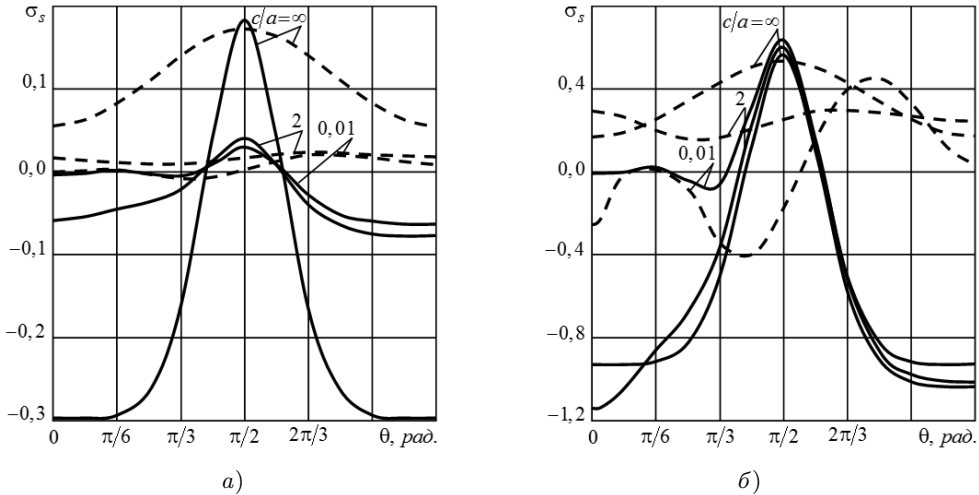


Рис. 3. Графики распределения напряжений σ_s в пластинке вблизи контура левого отверстия для некоторых значений c/a для задач ТУ (штриховые линии) и ТЭМУ (сплошные линии) при значениях: а) $ha = 0, 1$; б) $ha = 10$

На рисунке 4 для точки контура левого отверстия с центральным углом $\theta = 0$ рад. изображены графики распределения напряжений σ_s (в указанной точке равных σ_y) в зависимости от значения $\lg ha$ при значениях $c/a = 0,01; 2; \infty$.

В таблице 2 для пластинки с двумя неподкрепленными круговыми отверстиями радиуса a (рис. 2), на контурах которых поддерживается конвективный теплообмен с внешней средой, с точностью до разности температур внешних сред в правом и левом отверстиях $\mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1$ как множителя, для случая, когда отношение $c/a = 2$, в зависимости от значений коэффициентов теплообмена на контуре левого отверстия h_1 и на контуре правого отверстия h_2 , приведены значения нормальных напряжений σ_s в некоторых характерных точках контуров левого и правого отверстий, для случая задачи ТЭМУ.

Из данных, приведенных в таблицах и на рисунках, и других полученных результатов следует, что значения $h_1 a$, суть являющиеся критериями Био, оказывают значительное влияние на значения напряжений около отверстий. При значениях $h_1 a > 1000$ можно полагать, что на контуре L_l задано значение температуры $T = \mathfrak{T}_l$, а при значениях $h_1 a < 0,01$ контур L_l можно считать теплоизолированным. При этом, если для всех контуров, кроме одного, имеет место $h_1 a \rightarrow 0$, то во всей пластинке устанавливается одинаковая температура, равная температуре внешней среды в полости этого отверстия; если при этом на кон-

Таблица 2. Значения напряжений σ_s в точках контура левого и правого отверстия при $c/a = 2$

$h_1 a$	θ , рад.	Левое отверстие					Правое отверстие				
		Значения h_2									
		0,01	0,1	1	10	∞	0,01	0,1	1	10	∞
0,01	0	-0,006	-0,011	-0,012	-0,011	-0,011	0,008	0,015	0,015	0,014	-0,011
	$\pi/4$	-0,004	-0,007	-0,007	-0,007	-0,006	0,007	0,012	0,013	0,012	-0,006
	$\pi/2$	0,004	0,008	0,008	0,008	0,008	-0,004	-0,008	-0,008	-0,008	0,008
	$3\pi/4$	-0,007	-0,012	-0,013	-0,013	-0,013	0,004	0,007	0,008	0,009	-0,013
	π	-0,008	-0,015	-0,016	-0,016	-0,016	0,006	0,011	0,013	0,015	-0,016
0,1	0	-0,011	-0,059	-0,101	-0,103	-0,102	0,015	0,078	0,129	0,124	0,120
	$\pi/4$	-0,007	-0,037	-0,061	-0,061	-0,060	0,012	0,065	0,109	0,108	0,106
	$\pi/2$	0,008	0,040	0,068	0,072	0,072	-0,008	-0,040	-0,069	-0,073	-0,072
	$3\pi/4$	-0,012	-0,065	-0,112	-0,119	-0,119	0,007	0,037	0,068	0,084	0,088
	π	-0,015	-0,078	-0,134	-0,142	-0,143	0,011	0,059	0,111	0,136	0,144
1	0	-0,013	-0,111	-0,420	-0,568	-0,586	0,016	0,134	0,493	0,621	0,623
	$\pi/4$	-0,008	-0,068	-0,256	-0,336	-0,344	0,013	0,112	0,419	0,542	0,548
	$\pi/2$	0,008	0,069	0,263	0,364	0,378	-0,008	-0,068	-0,263	-0,364	-0,377
	$3\pi/4$	-0,013	-0,109	-0,419	-0,579	-0,603	0,007	0,061	0,256	0,413	0,454
	π	-0,015	-0,129	-0,493	-0,683	-0,712	0,012	0,101	0,420	0,681	0,753
10	0	-0,015	-0,136	-0,681	-1,136	-1,227	0,016	0,142	0,683	1,033	1,071
	$\pi/4$	-0,009	-0,084	-0,413	-0,671	-0,719	0,013	0,119	0,579	0,899	0,940
	$\pi/2$	0,008	0,073	0,364	0,608	0,656	-0,008	-0,072	-0,364	-0,608	-0,652
	$3\pi/4$	-0,012	-0,108	-0,542	-0,899	-0,970	0,007	0,061	0,336	0,671	0,771
	π	-0,014	-0,124	-0,621	-1,033	-1,114	0,011	0,103	0,568	1,136	1,314
∞	0	-0,016	-0,144	-0,753	-1,314	-1,435	0,016	0,143	0,712	1,114	1,163
	$\pi/4$	-0,010	-0,088	-0,454	-0,771	-0,835	0,013	0,119	0,603	0,970	1,021
	$\pi/2$	0,008	0,072	0,377	0,652	0,709	-0,008	-0,072	-0,378	-0,656	-0,709
	$3\pi/4$	-0,012	-0,106	-0,548	-0,940	-1,021	0,006	0,060	0,344	0,719	0,835
	π	-0,013	-0,120	-0,623	-1,071	-1,163	0,011	0,102	0,586	1,227	1,435

турах отсутствуют подкрепления, то температурные напряжения в пластинке не возникают. Наибольшая же концентрация напряжений возникает, если все значения $h_1 a$ достаточно велики; концентрация остается значительной, если эти значения превышают 1; если одно из этих значений меньше 1, то значения напряжений в пластинке резко убывают. Также большое влияние на концентрацию напряжений оказывает расстояние между отверстиями (отношение c/a). При $c/a > 10$ влияние одного отверстия на напряженное состояние около другого становится незначительным, и им можно пренебречь. При сближении отверстий (уменьшении значения c/a) взаимовлияние контуров становится значительным, особенно в зоне между отверстиями. При этом, на характер изменений значений напряжений влияют и значения $h_1 a$. Так, при значениях $h_1 a > 50$ сближение отверстий приводит к росту концентрации напряжений, особенно в зоне между отверстиями. При значениях $5 \leq h_1 a \leq 50$ наибольшая концентрация напряжений имеет место при $0,5 \leq c/a \leq 2$, а при дальнейшем сближении отверстий значения напряжений убывают. При значениях $h_1 a < 5$ напряжения около отверстий убывают при сближении отверстий. Пренебрежение электромагнитными свойствами пластинки приводит к искажению результатов, поэтому при проведении расчетов следует учитывать все свойства материала пластинки.

1. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в пре-

- образователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
2. Желудев И.С. Физика кристаллических диэлектриков / И.С. Желудев. – М.: Наука, 1968. – 463 с.
 3. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред / Ж. Можен. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
 4. Гринченко В.Т. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 5).
 5. Партон В.З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
 6. Калоеров С.А. Плоская задача термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, О.А. Сорочан // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 4. – С. 81–91.
 7. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в пьезопластинках с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестник Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 1. – С. 15–26.
 8. Подстригач Я.С. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно // К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
 9. Гарматий Г.Ю. Термопружний стан безмежного термочутливого тіла з циліндричною порожниною за умови конвективного теплообміну / Г.Ю. Гарматий, В.С. Попович // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2009. – Вип. 52, № 3. – С. 192–200.
 10. Parihar K.S. Transient heat conduction and analysis of thermal stresses in thin circular plate / K.S. Parihar, S.S. Patil // J. Therm. Stress. – 2011. – Vol. 34, № 4. – P. 335–351.
 11. Gaikwad K.R. Analysis of transient thermoelastic temperature distribution of a thin circular plate and its thermal deflection under uniform heat generation / K.R. Gaikwad, Y.U. Naner // J. Therm. Stress. – 2021. – Vol. 44, № 1. – P. 75–85.
 12. Nguyen T.D. Frequency dependence of the magnitude of thermal stresses in a flat plate subjected to rapid thermal cycling by convective heating and cooling / T.D. Nguyen, J.R. Thomas Jr., D.P.H. Hasselman // J. Therm. Stress. – 1987. – Vol. 10, № 3. – P. 163–175.
 13. Roozbahani M.M. Temperature and stress distribution in hollow annular disk of uniform thickness with quadratic temperature-dependent thermal conductivity / M.M. Roozbahani, H. Razzaghi, M. Baghani, M. Baniassadi, M. Layeghi // J. Therm. Stress. – 2017. – Vol. 40, № 7. – P. 828–845.
 14. Глушанков Е.С. Термоэлектромагнитоупругое состояние бесконечной многосвязной пьезопластинки в условиях конвективного теплообмена при действии линейного потока тепла / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2020. – Вып. 2 (75). – С. 18–29.
 15. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
 16. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
 17. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.

E.S. Glushankov

Determining the thermo-electro-magneto-elastic state of infinite multiply connected piezoelectric plate in case of convective heat transfer acting on its contours.

A method is proposed for determination of the thermo-electro-magneto-elastic state of an infinite multiply connected piezoelectric plate with holes, when there is a convective heat transfer acting on the contours of the holes. The solution of the problem is got with using the thermoconductivity

Определение термоэлектромагнитоупругого состояния бесконечной пластинки

and thermo-electro-magneto-elasticity problems' complex potentials. The problem is reduced to solving two overdetermined systems of linear algebraic equations for the Laurent series expansions' unknown coefficients. The influence of heat transfer characteristics, geometric characteristics of the plate and electromagnetic properties of its material on the main characteristics of thermo-electro-magneto-elastic state are investigated with the numerical studies.

Keywords: *piezoelectric plate, multiply connected plate, convective heat transfer, complex potentials, thermal stresses.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», Донецк

Получено 31.01.22

Donetsk National University, Donetsk

eugenij.glushankov@gmail.com

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

УДК 624.042.8 : 624.044.2
doi:10.24412/0136-4545-2022-1-44-51
EDN:LOTMDL



©2022. А.В. Зубенко

ОСОБЕННОСТИ НОРМИРОВАНИЯ ВЕТРОВОЙ НАГРУЗКИ НА СТЕНКУ И ПОКРЫТИЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗЕРВУАРА

В публикации рассматриваются особенности нормирования ветрового давления и воздействия ветровой нагрузки на примере сооружений, имеющих круговую цилиндрическую поверхность, а именно вертикальных цилиндрических резервуаров больших объемов. Описывается уточненная методика нормирования ветровой на элементы конструкций ВЦР для известных конструктивных решений, а именно со сферической кровлей, и для новых конструктивных типов, таких как провисающие покрытия вертикального цилиндрического резервуара в одиночном расположении и в группе. Представлены графики распределения аэродинамических коэффициентов для вертикальных цилиндрических резервуаров по высоте и для кровли.

Ключевые слова: резервуар, сферическая кровля, цилиндрическая оболочка, ветровая нагрузка, аэродинамические коэффициенты.

1. Актуальность проводимых исследований. Аналитические решения гидродинамических задач найдены лишь для наиболее несложных случаев, таких, как, например, расчет пограничного слоя. Работы по исследованию пограничного слоя принадлежат Hermann Schlichting, Frank M. White, Гарбарук А.В. и др. [1-3].

При проектировании зданий и сооружений чаще всего используются аэродинамические формулы, изложенные в нормативных документах [4-6].

В ЦНИИСК им. Кучеренко на основе работ А. Давенпорта и А. Вайза в 70-х годах XX века были разработаны существующие методики по расчету ветровых нагрузок на здания и сооружения с использованием аэродинамических формул, которые реализованы в СНиП II-6-74 [7]. В 1985 г. при выпуске СНиП 2.01.07-85 [8] были упрощены выражения, которые описывают динамическую реакцию сооружения при воздействии ветра. Однако расчет ветровой нагрузки с помощью формул нормативных документов требует детализации, т.к. рассматриваются только частные случаи. В нормативных документах отсутствуют формулы для расчета вертикальных цилиндрических резервуаров с учетом рельефа местности и группирования сооружений в застройке.

Основные теоретические сведения об архитектурно-строительной аэродинамике, методиках определения ветровой нагрузки на здания и сооружения представлены в работах: J.D. Holmes, О.И. Поддаевой, Э. Симиу, Р. Сканлан, Э.И. Ретгер, Б.Г. Коренева, И.М. Рабиновича [9-13].

В “Руководстве по расчету зданий и сооружений на действие ветра” ЦНИИСК, разработанном М. Ф. Барштейном [14], приводятся рекомендации по определению аэродинамических коэффициентов для элементов круглого сечения технологического оборудования колонного типа, расположенных в ряд.

Большой вклад в изучение воздействия ветра на здания и сооружения внес Г.А. Савицкий. В его работе [15] изложены основные вопросы расчета сооружений различного назначения на ветровую нагрузку. Даются общие сведения о структуре ветра и регламентированные данные о ветровой нагрузке.

В работе С.Ф. Пичугина рассматриваются вопросы нормирования ветровых воздействий на здания и сооружения, проводится сравнение нормативных документов различных стран мира [16].

Математическая модель гидродинамических процессов описана в работах В.Ф. Недопёкина [17-19].

G. Solarí [20] иллюстрирует аналитическую модель для определения динамического отклика конструкций на воздействие ветра. Обсуждаются параметры модели с особым учетом оценки демпфирования и периода колебаний. Примеры поясняют оценку и роль демпфирования и периодов колебаний для расчета отклика конструкций при ветровых нагрузках.

В работах G. Solarí для консольных вертикальных конструкций [3] обсуждаются перспективы аналитических методов для оценки ветрового отклика конструкций, с учетом особенностей консольных вертикальных конструкций, [5] для вертикальных консольных конструкций определяется безразмерная величина, называемая 3-D эффектом ветровой нагрузки, которая создает такой эффект на любом уровне через широкий набор экспериментальных, численных и аналитических процедур.

Анализ особенностей нормирования ветровой нагрузки в действующих нормативных документах по определению ветрового воздействия на здания и сооружения для России, Украины и стран объединенной Европы описан в [6].

Сравнение основных общих параметров методик по характерным критериям приведено в таблице 1.

2. Уточненная методика определения ветровой нагрузки на стенку и покрытие вертикального цилиндрического резервуара. Воздействие нормативного ветра приводит к формированию на конструкциях сооружения результирующего распределения избыточного давления w . Осредненная по времени составляющая w_m этого распределения (средняя ветровая нагрузка) является важнейшей характеристикой, используемой для определения сил и моментов ветрового воздействия на проектируемое сооружение и элементы конструкций при проведении прочностных расчетов на ветровое воздействие.

Нормативное значение ветрового давления w для метеоусловий места стро-

Таблица 1. Общие параметры методик по нормам

Нормативный документ/ характерный критерий	СП 20.13330.2016 Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85* (Россия)	ДСТУ-Н Б EN 1991-1-4:2010. ЄВРОКОД 1	ДБН В.1.2-2 2006 Нагрузки и воздействия (Украина)
Количество ветровых районов	7	5	5
Рельеф	не учитывается	оговаривается	оговаривается
Количество типов местности	3	5	4
Профиль ветрового давления для высоты (z_e)	$k_{10} \left(\frac{z_e}{10}\right)^{2\alpha}$	$k_r^2 \cdot \ln^2 \left(\frac{z}{z_0}\right)$	таблично
Пульсационная составляющая для высоты (z_e)	$[1 + (z_e)]$	$\left[\ln \left(\frac{z}{z_0}\right) + 7 \cdot I_v(z)\right]$	учитывается коэффициентом динамичности C_d , определяется по графику
Закон изменения ветрового давления	степенной	логарифмический	логарифмический
Интенсивность турбулентности	косвенно фигурирует и представлена коэффициентом пульсаций $(z_e) =_{10} \cdot (z/10)^{-\alpha}$	$I_v(z) = \frac{1}{\ln(z/z_0)}$	не представлена
Интегральный продольный масштаб турбулентности	не зависит от высоты и принимается равным $L_v = 1200$	$L(z) = L_t \left(\frac{z}{z_t}\right)^\alpha$	не представлен

ительства принимают в зависимости от разновидности ветрового района (Ia, I, II, ... VII) на карте [4-6] по классификатору, приведенному в нормативном документе. Типы А, В или С шероховатости земной поверхности определяют для местности, расположенной с наветренной стороны строительной площадки.

Для сооружений, таких как вертикальный цилиндрический резервуар, ветровую нагрузку определяют, используя график зависимости аэродинамического коэффициента от положения угла образующей поверхности цилиндра к направлению ветрового потока [4-6].

Исходя из анализа научных работ, для определения значения нормативных аэродинамических коэффициентов для стенки ВЦР была выбрана функция $C_{p0}(a, \beta)$, зависящая от угловой координаты β и коэффициентов a , полученных путем аппроксимации функции:

$$C_{p0}(a, \beta) = \sum_{m=0}^n \left(a_m \cdot \cos \left(\frac{\beta \cdot m \cdot \pi}{180} \right) \right) \quad (1)$$

где β – угловая координата образующей поверхности стенки резервуара; a_m – свободные члены зависимости $C_{p0}(a, \beta)$.

На рисунке 1 показано сравнение нормативных значений аэродинамических коэффициентов, полученных по функциональной зависимости (1) и проинтерполированных при различных числах Рейнольдса для нормативной кривой [4, 5].

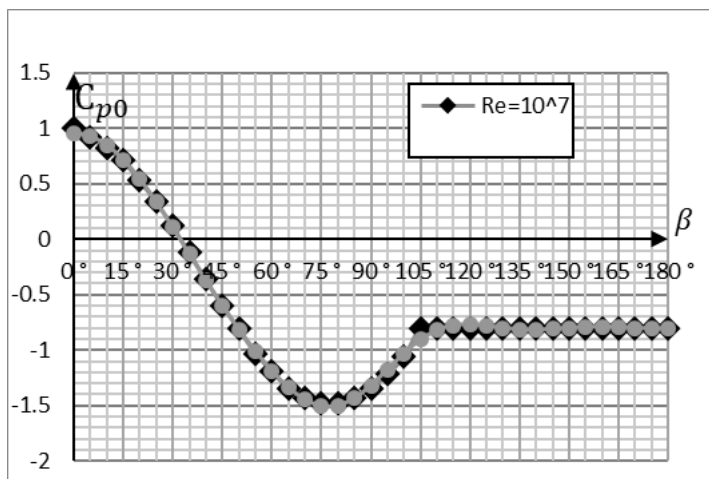


Рис. 1. Сравнение нормативных значений аэродинамического коэффициента, полученных по формуле (1) и проинтерполированных по графику [4, 5].

Коэффициент детерминации составляет $R^2 = 0.99$ для значений, полученных по формуле (1) и проинтерполированных по графику СП 20.13330.2016 [5], что показывает хорошую взаимосвязь для выбранной функции.

На рисунке 2 изображена блок-схема формирования ветровой нагрузки для стенки отдельно стоящего резервуара по уточненной методике.

В таблице 2 приведены значения коэффициентов a_m , которые определены для различных чисел Рейнольдса для нормативной кривой [1, 5].

Таблица 2.

Коэффициенты	Re =10 ⁷	Re =2 · 10 ⁶	Re =5 · 10 ⁵
a_0	-0.649	-0.749	-0.814
a_1	0.486	0.423	0.323
a_2	0.673	0.922	1.229
a_3	0.44	0.439	0.31
a_4	0.041	-0.1	-0.163
a_5	-0.075	-0.034	0.074
a_6	0.021	0.064	0
a_7	0.038	-0.021	-0.018
a_8	-0.016	0	0.044
a_9	0	0.03	-
a_{10}	0.021	-	-
a_{11}	1.184e-3	-	-
n	8	9	11

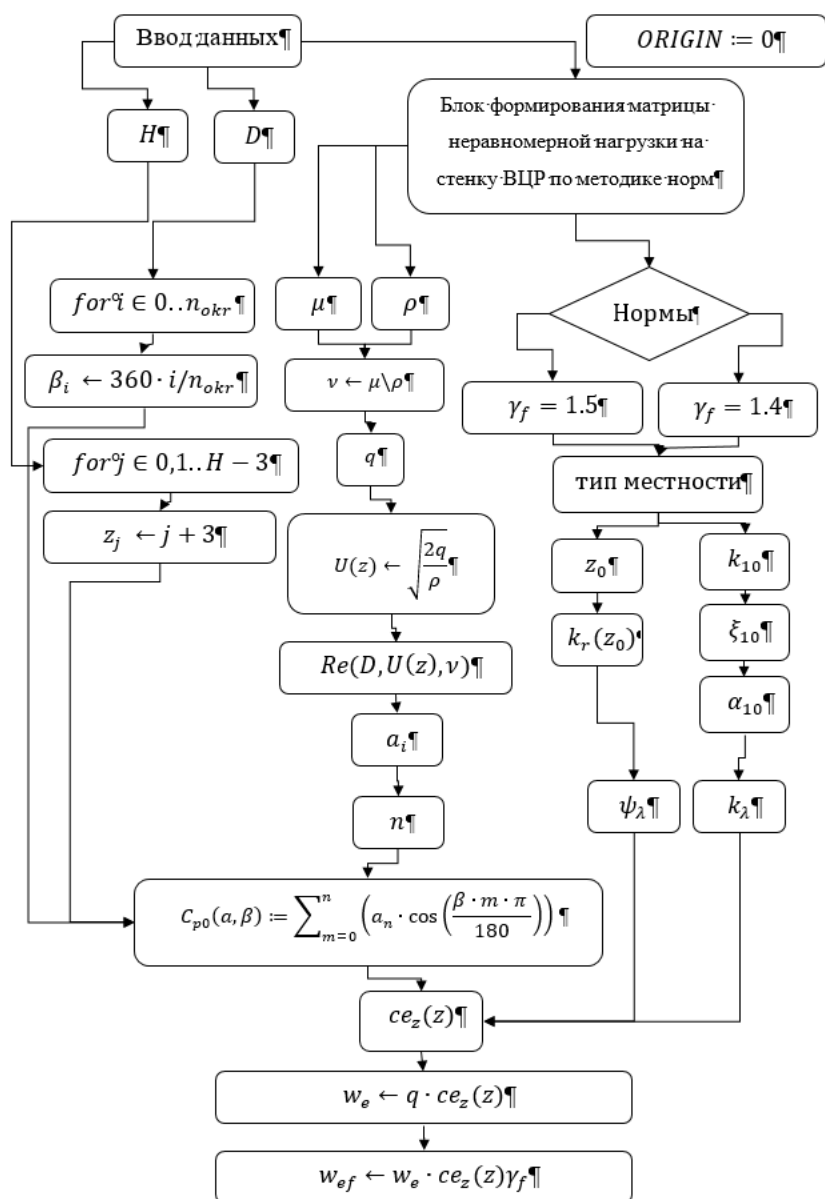


Рис. 2. Блок-схема определения ветровой нагрузки на стенку ВЦР; $n_{окр}$ – количество точек по окружности в которых определяются значения ветровой нагрузки; β – угловая координата образующей поверхности резервуара; μ – динамическая вязкость воздуха; ν – кинематическая вязкость воздуха.

Аппроксимация целевой функции выполнялась в программном пакете для решения математических задач MathCAD 12 (Лицензия №TL51303) методом наименьших квадратов.

Значения аэродинамических коэффициентов для конструкций ВЦР только

со сферическим покрытием рекомендуется определять по сечению вдоль ветрового потока для точек А, В и С при различных значениях соотношения высоты H к диаметру D и от соотношения стрелы подъема кровли f к диаметру резервуара D по графикам [1, 5]. Величины аэродинамических коэффициентов не зависят от числа Рейнольдса.

Исходя из анализа научных работ для определения значения нормативных аэродинамических коэффициентов для сферической кровли ВЦР предлагается использовать функцию $C_{p0}(a, \beta, x)$, зависящую от угловой координаты β , координат для радиального элемента x , и коэффициентов a , полученных путем аппроксимации функции (1) и геометрических параметров резервуара:

$$C_{p0} \left(a_k, X, \beta, \frac{H}{D}, \frac{f}{D} \right) = \sum_{k=0}^{k_1} a_k \cos \left(\frac{\pi \cdot \beta \cdot k}{180} \right) \cdot \left(\sum_{k=k_2}^{k_{21}} a_k \cdot \sin \left(\frac{\pi \cdot X \cdot (k - k_2)}{180} \right) \right) + \left(a_{k_3} \cdot \frac{H}{D} + a_{k_4} \cdot \frac{f}{D} \right), \quad (2)$$

где a_k – свободные члены, определенные по результатам численного эксперимента; β – угловая координата; X – относительная координата, определяемая как X/D ; $x_{i,j} = \cos \left(\frac{2\pi \cdot j}{cols(z)-1} \right)$; $cols(z) - 1$ – количество столбцов, зависящее от шага угловой координаты; H/D – критерий соотношения высоты к диаметру ВЦР; f/D – критерий соотношения стрелы подъема к диаметру ВЦР; $k_1 = 5$; $k_2 = k_1 + 1$; $k_{21} = k_2 + 4$; $k_3 = k_{21} + 1$; $k_4 = k_3 + 1$ – аппроксимационные коэффициенты.

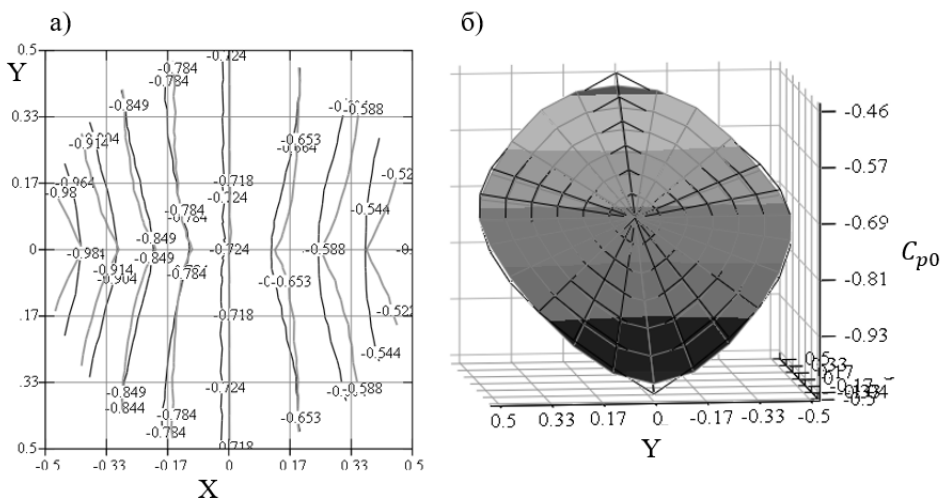


Рис. 3. Сравнение нормативных значений аэродинамического коэффициента для ВЦР с соотношением $\frac{H}{D} = \frac{18}{40}$; $\frac{f}{D} = \frac{1}{9.2}$, полученные по формуле (2) и проинтерполированные по графику [4, 5].

В таблице 3 показаны исходные аэродинамические коэффициенты C_{p0} для сферической кровли ВЦР с соотношением $\frac{H}{D} = \frac{18}{40}$, $\frac{f}{D} = \frac{1}{9.2}$, проинтерполированные по графикам норм [1, 5].

Таблица 3.

X	β°						
	0	60	120	180	240	300	360
0	-1.045	-0.828	-0.632	-0.457	-0.632	-0.828	-1.045
0.0833D	-0.991	-0.81	-0.646	-0.501	-0.646	-0.81	-0.991
D/6	-0.936	-0.791	-0.661	-0.544	-0.661	-0.791	-0.936
D/4	-0.882	-0.773	-0.675	-0.588	-0.675	-0.773	-0.882
D/3	-0.828	-0.755	-0.69	-0.632	-0.69	-0.755	-0.828
2D/5	-0.773	-0.737	-0.704	-0.675	-0.704	-0.737	-0.773
D/2	-0.719	-0.719	-0.719	-0.719	-0.719	-0.719	-0.719

Выводы. Точность определения параметров аэродинамических коэффициентов C_{p0} для сферической кровли ВЦР по уточненной методике расчета и с помощью рекомендаций [1, 5] составляет 99%.

Использование разработанной методики предлагается для определения значений аэродинамических коэффициентов C_{p0} для :

- отдельностоящего ВЦР с провисающим типом покрытия кровли;
- ВЦР с провисающим типом покрытия кровли, состоящего в группе;
- ВЦР со сферическим типом покрытия кровли, состоящего в группе.

1. *White F.M.* Viscous fluid flow / F.M. White. – Third Edition. – New York : McGraw-Hill, 2006. – 629 p.
2. *Гарбарук А.В.* Простая алгебраическая модель турбулентности для расчета турбулентного пограничного слоя с положительным градиентом давления / А.В. Гарбарук, Ю.В. Лапин, М.Х. Стрелец // Теплофизика высоких температур. – 1999. – № 37(1). – С. 87–91.
3. *Schlichting H.* Математическое моделирование процессов функционирования специализированных аппаратов конвективного типа / В.Н. Павлыш, Е.В. Перинская // Проблемы искусственного интеллекта. – 2015. – № 0(1). – С. 89–98.
4. ДСТУ-Н Б EN 1991-1-4:2010. Єврокод 1. Дії на конструкції. Частина 1-4. Загальні дії. Вітрові навантаження (EN 1991-1-4:2005, IDT). – Уведено вперше; чинні 01.07.2013. – К. : Мінрегіон України, 2013. – 165 с. – (Національний стандарт України).
5. СП 20.13330.2016. Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85*. – Введ. 20-05-2016. – М. : Госстандарт, 2016. – 80 с. – (Свод правил).
6. ДБН В.1.2-2:2006. Державні будівельні норми. Система забезпечення надійності та безпеки будівельних об'єктів. Навантаження і впливи. Норми проектування. – Замість СНиП 2.01.07-85; надано чинності 2007-01-01. – К.: Мінбуд України, 2006. – 61 с.
7. СНиП II-6-74. Нагрузки и воздействия. – Взамен СНиП II-A.11-62; СН 318-65; СН 355-66; введ. 01.09.1974. – М.: Стройиздат, 1976. – 58 с.
8. СНиП 2.01.07-85*. Нагрузки и воздействия. – Взамен главы СНиП II-6-74; введ. 01-01-1987. – М.: ФГУП ЦПП, 2005. – 44 с. – (Строительные нормы и правила).
9. *Holmes J.D.* Wind loading of structures / J.D. Holmes. – Boca Raton, FL: CRC Press, 2015. – 412 p.
10. *Поддаева О.И.* Архитектурно-строительная аэродинамика: учебное пособие / О.И. Поддаева, А.С. Кубенин, П.С. Чурин. – М. : НИУ МГСУ, 2015. – 86 с.
11. *Симму Э.* Воздействия ветра на здания и сооружения: пер. с англ. / Э. Симму, Р. Сканлан. – М. : Стройиздат, 1984. – 360 с.

12. *Реттер Э.И.* Архитектурно-строительная аэродинамика: монография / Э.И. Реттер. – М.: Стройиздат, 1984. – 294 с.
13. Справочник по динамике сооружений / Под ред. профессора Б.Г. Коренева, И.М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1972. – 511 с.
14. Руководство по расчету зданий и сооружений на действие ветра / ЦНИИ строит. конструкций им. В.А. Кучеренко. – М.: Стройиздат, 1978. – 216 с.
15. *Савицкий Г.А.* Ветровая нагрузка на сооружения / Г.А. Савицкий. – М.: Стройиздат, 1972. – 111 с.
16. *Пичугин С.* Ветровая нагрузка на строительные конструкции: монография / С. Пичугин. – Полтава: АСМИ, 2005. – 342 с.
17. *Недопекин Ф.* Математическое моделирование гидродинамики и теплопереноса при затвердевании слитков и отливок / Ф. Недопекин, В. Мелихов, В. Белоусов // Процессы литья. – 1990. – № 2. – С. 15–20.
18. *Недопекин Ф.В.* Моделирование гидродинамических и тепломассообменных процессов в металлургических технологиях / Ф.В. Недопекин, В.В. Белоусов // Вестник Удмуртского университета. – 2008. – Вып. 1. – С. 189–199.
19. Основы механики сплошных сред / Ф.В. Недопекин, А.А. Коваленко, В.И. Соколов [и др.]. – Луганск : Изд-во ВНУ им. Даля, 2010. – 277 с.
20. *Solari G.* Evaluation and role of damping and periods for the calculation of structural response under wind loads / G. Solari // Journal of wind engineering and industrial aerodynamics. – 1996. – **59**(2-3). – P. 191–210.
21. *Solari G.* The role of analytical methods for evaluating the wind-induced response of structures / G. Solari // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2002. – **90**(12-15). – P. 1453–1477.
22. *Repetto M.P.* Equivalent static wind actions on vertical structures / M.P. Repetto, G. Solari // Journal of wind engineering and industrial aerodynamics. – 2004. – **92**(5). – P. 335–357.
23. Ветровая нагрузка на вертикальный цилиндрический резервуар [Электронный ресурс] / Р.Н. Степанов, Д.И. Роменский, В.Ф. Муцанов [и др.] // Интернет-журнал «Науковедение». – 2017. – Т. 9, № 6. – Режим доступа : <https://naukovedenie.ru/PDF/99TVN617.pdf>.

A.V. Zubenko

Peculiarities of standardization of wind load on the wall and roof of a vertical cylindrical tank with a sagging roof.

The publication discusses the features of wind pressure regulation and the impact of wind load on the example of structures with a circular cylindrical surface, namely vertical cylindrical tanks of large volumes. An improved method of normalizing the wind to structural elements of tanks with known design solutions, namely with a spherical roof, and for new design types such as sagging roofs of a vertical cylindrical tank, in a single arrangement is described. Graphs of the distribution of aerodynamic coefficients for vertical cylindrical tanks in height and for the roof are presented in the article.

Keywords: *tank, spherical roof, cylindrical shell, wind load, aerodynamic coefficients.*

ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства

и архитектуры», Макеевка

Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture,
Makeevka

a.v.zubenko@donnasa.ru

Получено 21.02.2022

УДК 624.042.8 : 624.044.2
doi:10.24412/0136-4545-2022-1-52-68
EDN:OTTVHA



©2022. В.Ф. Мущанов, А.И. Демидов

О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С НЕСИММЕТРИЧНЫМ НЕПОДКРЕПЛЕННЫМ ВЫРЕЗОМ

Работа посвящена определению предельного состояния на основе применения ранее разработанной методики по определению упругопластического напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочек произвольной формы на основе теории малых упруго-пластических деформаций при линеаризации решения задач методом упругих решений. В каждом последовательном приближении при решении упругой задачи применяется вариационное уравнение Лагранжа в перемещениях точек срединной поверхности оболочки в конечных разностях. При записи вариационного уравнения Лагранжа связь между напряжениями и деформациями принята в форме закона Гука, но с дополнительными членами, учитывающими пластические деформации. Геометрические уравнения приняты в линейной постановке в форме соотношений Коши. Материал характеризуется соответствующей диаграммой растяжения цилиндрического образца, модулем нормальной упругости и коэффициентом Пуассона. Кинематические граничные условия удовлетворяются точно, а статические – на свободных от закрепления краях оболочки приближенно.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, вариационно-разностный метод, метод упругих решений, интенсивность касательных напряжений, функция пластичности, предельное упругое состояние и предельное состояние оболочки.

Введение и цели исследования. В представляемой статье рассматривается задача об определении предельной разрушающей нагрузки на основе применения теории малых упругопластических деформаций и метода упругих решений для незамкнутой цилиндрической оболочки постоянной толщины, жестко зацементированной в окружном направлении и шарнирно закрепленной в меридиональном направлении с большим незакрепленным отверстием его краёв при действии на неё равномерно распределенной нормальной к срединной поверхности нагрузки. В качестве предельного здесь считается такое состояние, когда в наиболее нагруженном элементе оболочки значение интенсивности касательных напряжений в процессе решения задачи пластичности при возрастании нагрузки пропорционально одному и тому же параметру выйдет за пределы диаграммы растяжения материала оболочки. Такую нагрузку для оболочки принято считать предельной. Эта задача по определению предельной нагрузки исследована методом попыток путем анализа ряда задач пластичности методом упругих решений А.А. Ильюшина для элементов оболочки, находящихся в упругопластическом состоянии. Сначала было установлено значение нагрузки, при которой в наиболее нагруженном элементе оболочки возникает предельное упругое состояние, а затем решается задача по определению предельной нагрузки путем

её увеличения до момента выхода значений интенсивности касательных напряжений за пределы диаграммы растяжения. Таким образом, работа посвящена актуальному вопросу строительной механики оболочек при действии нагрузки при упруго-пластическом деформировании при активном процессе нагружения.

1. Постановка задачи. В [2] разработана методика численного расчета тонких упруго-пластических оболочек произвольной формы постоянной и переменной толщины при активных процессах нагружения на основе метода упругих решений. В каждом последовательном приближении решение задачи упругости для тонких оболочек выполняется разностным методом на основе вариационного уравнения Ж. Лагранжа. При записи этого уравнения в перемещениях точек u , v , w , точек срединной поверхности физические уравнения приняты в форме обобщенного закона Гука, но с дополнительными членами, зависящими от пластических деформаций:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^z &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{11}^z + \mu\varepsilon_{22}^z + \varepsilon_{11}^{pz}), \\ \sigma_{22}^z &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{22}^z + \mu\varepsilon_{11}^z + \varepsilon_{22}^{pz}), \\ \sigma_{12}^z &= \frac{E}{2(1+\mu)} (\gamma^z - \gamma^{pz}), \\ \varepsilon_{33}^z &= \frac{\mu}{1-\mu} (\varepsilon_{11}^{pz} + \varepsilon_{22}^{pz}) + \frac{1-2\mu}{1-\mu} \varepsilon_{33}^{pz},\end{aligned}\tag{1}$$

где E модуль упругости, μ - коэффициент Пуассона материала оболочки. Кроме того, материал оболочки характеризуется диаграммой растяжения цилиндрического образца в виде функции $\sigma = f(\varepsilon)$, которая перестраивается к виду $S = f(\Gamma)$ по формулам:

$$\Gamma = (1 + \mu) \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \quad S = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}.$$

Дополнительные члены, зависящие от пластических деформаций в уравнениях (1), представлены в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^{pz} &= \omega (\mu e_{33}^z - (1 - \mu) e_{11}^z), \\ \varepsilon_{22}^{pz} &= \omega (\mu e_{33}^z - (1 - \mu) e_{22}^z), \\ \gamma^{pz} &= \omega \gamma^z, \\ \varepsilon_{33}^{pz} &= \omega e_{33}^z.\end{aligned}\tag{2}$$

Значения пластических деформаций уточняются от приближения к приближению в виде дополнительных слагаемых к внешней нагрузке. Эти дополнительные слагаемые вычисляем по формуле Симпсона путем численного интегрирования, выбирая по толщине оболочки определенное количество точек, обеспечивающих требуемую точность решения задачи пластичности. При этом сохраняется матрица системы разностных уравнений. Это дает возможность решать систему уравнений с использованием обращения матрицы.

Основные относительные продольные деформации ε_{11}^z , ε_{22}^z по направлению координатных линий α_1 и α_2 , и деформации сдвига γ^z приняты в виде геометрически линейных соотношений относительно перемещений u , v , w согласно В.В. Новожилову [4].

Компоненты девиатора деформаций $e_{ii}^z = \varepsilon_{ii}^z - \varepsilon_0^z$, ($i = 1, 2, 3$), а средняя деформация:

$$\varepsilon_0^z = \frac{1}{3} (\varepsilon_{11}^z + \varepsilon_{22}^z + \varepsilon_{33}^z).$$

Относительная деформация по направлению нормали к срединной поверхности

$$\varepsilon_{33}^z = -\frac{[3\mu + \omega(1 - 2\mu)](\varepsilon_{11}^z + \varepsilon_{22}^z)}{3(1 - \mu) - 2\omega(1 - 2\mu)}. \quad (3)$$

Индекс z в формулах (1, 2, 3) определяет положение произвольной точки по толщине оболочки.

Функция пластичности в формулах (2) А.А. Ильюшина [1] имеет выражение:

$$\omega = 1 - \frac{G_s}{G}. \quad (4)$$

Секущий модуль G_s и модуль сдвига G находим по диаграмме растяжения цилиндрического образца из соотношений:

$$2G_s = S\Gamma^{-1}, \quad 2G = E(1 + \mu)^{-1}. \quad (5)$$

Интенсивность касательных напряжений S и деформаций сдвига Γ при плоском напряженном состоянии находим по формулам [3, 5, 7, 8]:

$$S^z = \sqrt{\frac{1}{3} [(\sigma_{11}^z)^2 + (\sigma_{22}^z)^2 - \sigma_{11}^z \cdot \sigma_{22}^z + 3(\sigma_{12}^z)^2]}, \quad (6)$$

$$\Gamma^z = \sqrt{\frac{1}{6} [(\varepsilon_{11}^z - \varepsilon_{22}^z)^2 + (\varepsilon_{11}^z - \varepsilon_{22}^z)^2 + (\varepsilon_{11}^z - \varepsilon_{22}^z)^2 + \frac{3}{2}(\gamma^z)^2]}.$$

Это даёт возможность по найденным перемещениям u , v , w , точек срединной поверхности определить деформации ε_{11}^z , ε_{22}^z и γ^z , а по формуле (6) найти интенсивность деформаций сдвига. По интенсивности деформаций сдвига, используя диаграмму $S=f(\Gamma)$, найдем секущий модуль G_s (5), функцию пластичности (4) и уточняем дополнительные члены (2) в каждом приближении. Процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока функция пластичности в двух последовательных приближениях не будет отличаться на сколь угодно малую величину δ , т. е.:

$$\frac{\omega_n - \omega_{n-1}}{\omega_n} \leq \delta$$

Воспользуемся этой методикой для решения задачи об определении предельного упругого состояния и предельной нагрузки, соответствующей крайнему

значению интенсивности деформаций сдвига и интенсивности касательных напряжений по диаграмме растяжения материала оболочки. Эти значения нагрузок обозначим соответственно через $q_{упр.}$ и $q_{пр.}$.

2. Пример решения задачи. Рассмотрим незамкнутую цилиндрическую оболочку, жестко защемленную в окружном направлении и шарнирно закрепленную в меридиональном направлении. Оболочка ослаблена большим прямоугольным отверстием, края которого свободны от закрепления, так, что перемещения точек срединной поверхности не ограничены.

При расчете приняты такие исходные данные: толщина оболочки $h = 0,05$ м, $R = 1,5$ м, длина оболочки $l = 6,4$ м, угол $\alpha = \pi$. Материал оболочки характеризуется коэффициентом Пуассона $\mu = 0,3$, модулем упругости $E = 1,95 \cdot 10^5$ МПа. Диаграмма растяжения цилиндрического образца из такой стали, представлена таблицей 1 и рисунком 1. Расчетная схема данной оболочки приведена

Таблица 1.
Диаграмма растяжения

№№ точек	Диаграмма растяжения	
	Γ	S, МПа
I	1	0
	2	0,00075
	3	0,0015
II	4	0,003
III	5	0,0045
IV	6	0,006
V	7	0,00751
VI	8	0,00901
VII	9	0,07506

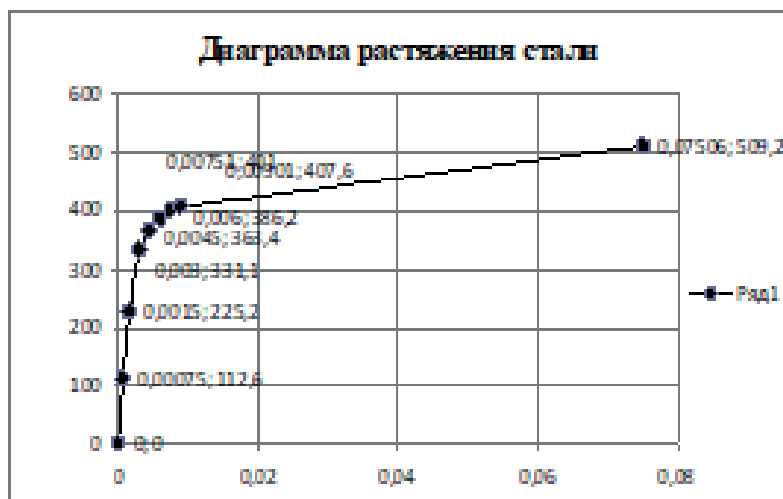


Рис. 1. Диаграмма растяжения стали

на рисунке 2, на котором показана сеточная область размером 26×20 узлов с тем расчетом, что задача упругости будет решаться вариационно-разностным методом в каждом последовательном приближении. В таблице 1 и на рисунке 1 дана диаграмма растяжения с выделенными зонами. Строки I являются областью упругих деформаций, строки II – VII - области пластических деформаций.

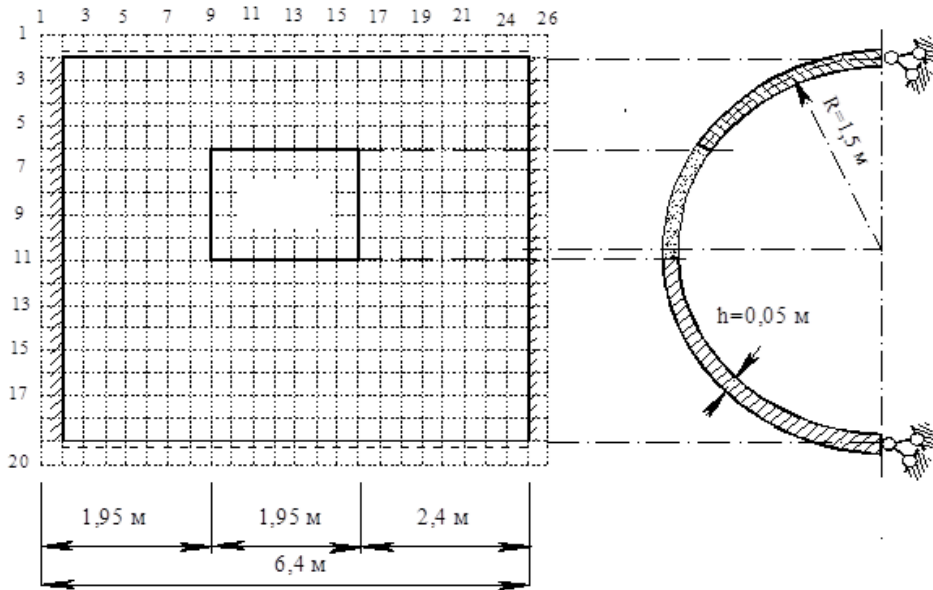


Рис. 2. Расчетная схема цилиндрической оболочки с большим несимметрично расположенным незакрепленным прямоугольным отверстием.

Таблица 2.
Зависимость $S \cdot (-h/2)$ МПа от нагрузки

Узел 13 11		
Нагрузка q , МПа	Упругое решение	Пластическое решение
0	0	0
0,73471	225,2	225,2
1,4694	450,2	372,24
2,3541	721,6	416,84
2,9388	900,8	427,26
3,6735	1126	441,41
6	1839	490,00
6,5	1992,4	501,3
6,6	2023	503,4
6,7	2053	505,7
6,75	2069	506,97
6,752	2069,64	506,99

Сначала определялась нагрузка, соответствующая предельному упругому

состоянию с заданной точностью в 1% решения задачи пластичности для наиболее нагруженного узла сеточной области 11-13. Её значение оказалось $q_{уп} = 0,73471$ МПа. В таблице 3 приведено поле интенсивности касательных напряжений $S(-h/2)$ при предельном упругом состоянии оболочки. Для наглядности это представлено соответствующей пространственной эпюрой на рисунке 4.

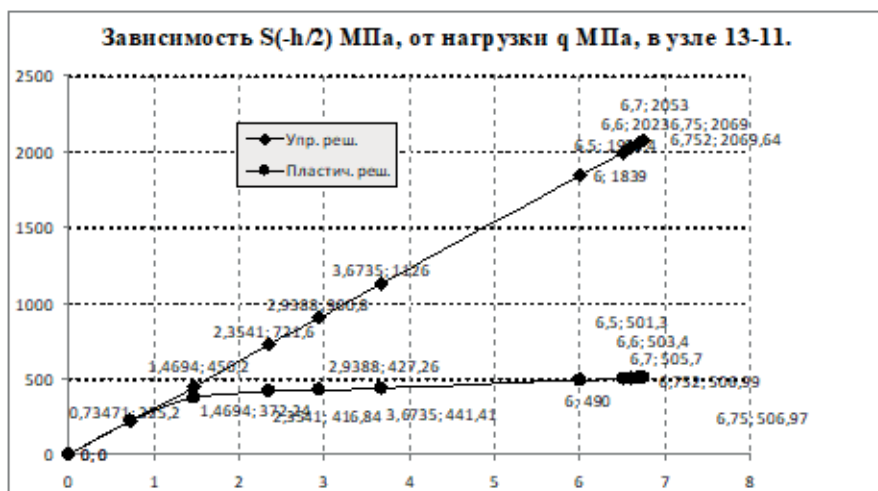


Рис. 3. К определению значения предельной нагрузки $q_{пр}$ при упругом и пластическом решении задач.

Таблица 3. $S(-h/2)$ при предельном упругом решении задачи.

Узлы по α_2	$S(-h/2)$ при предельном упругом решении задачи в узлах по α_1					
	2	3	4	5	6	7
2	0	3,9265	2,2646	1,6697	1,0321	0,8962
3	7,8921	7,4973	8,219	7,9929	7,3493	6,5415
4	10,4316	8,0991	9,4059	8,806	7,9785	6,9751
5	11,3707	8,2429	10,1169	9,7159	9,0378	8,1568
6	12,1403	8,2357	10,5848	10,7678	10,8508	11,8744
7	12,8428	8,6359	11,1439	11,7738	12,3386	13,9485
8	13,2975	9,4184	11,8029	12,5746	13,1867	14,3907
9	13,3514	10,2653	12,5645	13,4426	14,2252	15,5954
10	12,906	10,9068	13,2237	14,1714	15,2365	17,4001
11	11,9788	11,3558	13,5737	14,2031	14,8864	16,5776
12	10,8346	11,8699	13,8604	13,8923	13,6311	12,999
13	9,9683	12,3088	14,0931	13,7061	13,0663	12,1464
14	9,6248	12,2243	13,851	13,175	12,3513	11,4554
15	9,7617	11,5083	13,0907	12,3382	11,5675	10,9092
16	10,11	10,3551	11,9719	11,3901	10,8918	10,5923
17	10,0374	8,9703	10,5445	10,3983	10,3251	10,3958
18	7,9052	7,548	8,8209	9,4716	9,8979	10,2725
19	0	3,7419	2,0752	2,297	2,4598	2,555

Продолжение таблицы 3.

Узлы по α_2	$S(-h/2)$ при предельном упругом решении задачи в узлах по α_1					
	8	9	10	11	12	13
2	1,8277	3,1004	4,8127	6,059	6,7067	6,7244
3	5,9337	6,008	5,2329	5,058	5,0378	5,0069
4	6,036	6,6089	5,1323	4,591	4,2946	4,2396
5	7,2096	8,7393	3,8637	5,8145	6,3028	6,3204
6	17,4192	34,9672	94,8447	153,1526	172,4596	172,305
7	18,9356	33,018				
8	17,7568	30,4376				
9	19,1074	32,4401				
10	22,8877	41,4407				
11	23,1991	45,9458	132,7043	199,3498	223,9488	225,2021
12	12,0305	14,5938	8,0311	8,7015	9,0729	9,0857
13	11,134	12,1629	10,297	9,102	8,368	8,1836
14	10,6815	10,9336	10,3538	10,2486	10,2643	10,1706
15	10,4667	10,5837	10,6055	10,9322	11,1879	11,1489
16	10,4944	10,6943	10,9421	11,3065	11,5507	11,5332
17	10,5825	10,8964	11,228	11,5596	11,762	11,755
18	10,662	11,0776	11,4632	11,7872	11,9747	11,9777
19	2,6639	2,7892	2,9031	2,9921	3,0326	3,0107

Продолжение таблицы 3.

Узлы по α_2	$S(-h/2)$ при предельном упругом решении задачи в узлах по α_1					
	14	15	16	17	18	19
2	6,1142	4,9081	3,2358	1,9958	1,1236	1,2298
3	4,9628	5,062	5,8032	5,71	6,3256	7,2017
4	4,4314	4,8432	6,2945	5,7033	6,647	7,662
5	5,8674	3,6218	8,3321	6,7662	7,7429	8,6295
6	152,6065	93,3708	34,8581	17,107	11,4804	10,4793
7			33,2787	19,0824	13,9497	12,2924
8			32,7352	18,2346	14,7734	13,4806
9			34,7342	19,4312	15,851	14,4047
10			44,407	22,5094	17,0073	14,8668
11	203,1473	137,4164	43,1393	21,9037	15,6116	14,0512
12	8,7021	7,2727	13,3128	11,1373	12,1097	12,6769
13	8,5953	9,4946	11,2868	10,3372	11,2409	12,0171
14	9,966	9,8735	10,33	10,0071	10,6337	11,347
15	10,8065	10,3679	10,2275	10,0015	10,302	10,7738
16	11,248	10,8265	10,5073	10,2345	10,2447	10,4106
17	11,5367	11,1848	10,8311	10,5022	10,3052	10,206
18	11,7974	11,4845	11,1189	10,7407	10,4115	10,1302
19	2,93	2,811	2,6819	2,5586	2,4675	2,4172

Продолжение таблицы 3.

Узлы по α_2	$S(-h/2)$ при предельном упругом решении задачи в узлах по α_1					
	20	21	22	23	24	25
2	1,8686	2,4201	2,7386	2,815	3,7296	0
3	7,9989	8,6135	8,9756	8,8849	7,8098	7,832
4	8,4223	9,0138	9,5233	9,7959	8,2494	10,4868
5	9,1924	9,6507	10,1186	10,3158	8,3194	11,5318
6	10,3541	10,472	10,7074	10,6076	8,2986	12,3068
7	11,6616	11,4266	11,3767	10,9742	8,5491	12,9979
8	12,7298	12,2773	12,0139	11,4188	9,0052	13,4191
9	13,4723	12,8462	12,4479	11,7768	9,383	13,3758
10	13,7287	13,0353	12,626	12,0049	9,606	12,8168
11	13,3326	12,9033	12,6804	12,2552	9,8831	11,8791
12	12,7722	12,7581	12,8071	12,6568	10,3823	10,8506
13	12,4028	12,6404	12,9157	13,0405	10,9165	10,0521
14	11,8559	12,2623	12,7242	13,0932	11,1289	9,677
15	11,2074	11,6281	12,1595	12,6699	10,829	9,7338
16	10,6229	10,8892	11,3115	11,7854	10,0462	10,0178
17	10,1593	10,1669	10,2879	10,4533	8,8819	9,9279
18	9,8763	9,6257	9,313	8,7588	7,5403	7,8271
19	2,4019	2,3965	2,3096	2,1309	3,7045	0

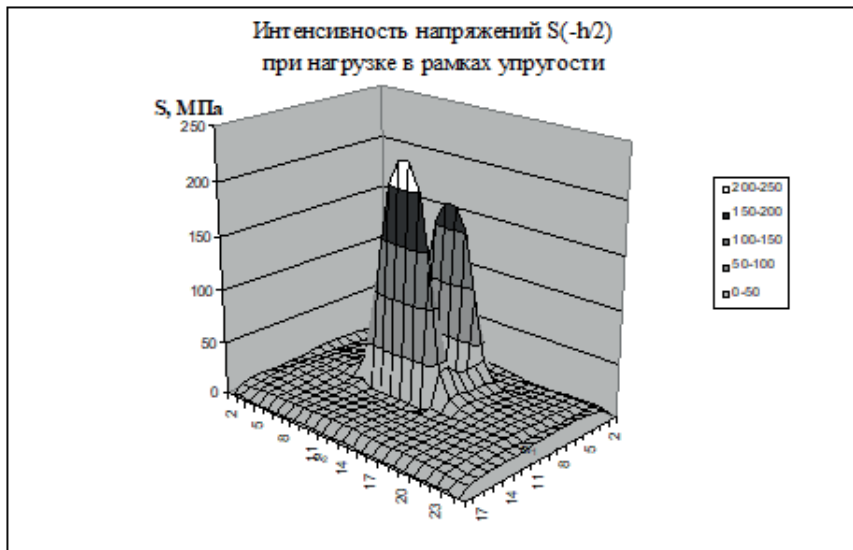


Рис. 4. Эпюра интенсивности напряжений $S(-h/2)$ по ряду узлов в упругом состоянии материала оболочки.

Здесь видно, что значения наибольших напряжений сконцентрированы в зоне прямоугольного выреза.

В таблице 4 даны значения интенсивности касательных напряжений $S(-h/2)$

по ряду узлов $\alpha_2 = 6$ и 11 в предельном упругом состоянии, а в таблице 5 приведены значения интенсивности касательных напряжений $S(-h/2)$ по столбцам узлов $\alpha_1 = 9, 13, 16$ в предельном упругом состоянии. Графически эти результаты отображены на рисунках 5 и 6, соответственно.

Таблица 4. Значения $S(-h/2)$ по ряду узлов $\alpha_2 = 6$ и 11 в предельном упругом состоянии.

Узлы по α_2	Узлы по α_1						
	2	3	4	5	6	7	8
6	12,1403	8,2357	10,5848	10,7678	10,8508	11,8744	17,4192
11	11,9788	11,3558	13,5737	14,2031	14,8864	16,5776	23,1991

Продолжение таблицы 4.

Узлы по α_2	Узлы по α_1						
	9	10	11	12	13	14	15
6	34,9672	94,8447	153,1526	172,4596	172,305	152,6065	93,3708
11	45,9458	132,7043	199,3498	223,9488	225,2021	203,1473	137,4164

Продолжение таблицы 4.

Узлы по α_2	Узлы по α_1					
	16	17	18	19	20	21
6	34,8581	17,107	11,4804	10,4793	10,3541	10,472
11	43,1393	21,9037	15,6116	14,0512	13,3326	12,9033

Продолжение таблицы 4.

Узлы по α_2	Узлы по α_1			
	22	23	24	25
6	10,7074	10,6076	8,2986	12,3068
11	12,6804	12,2552	9,8831	11,8791

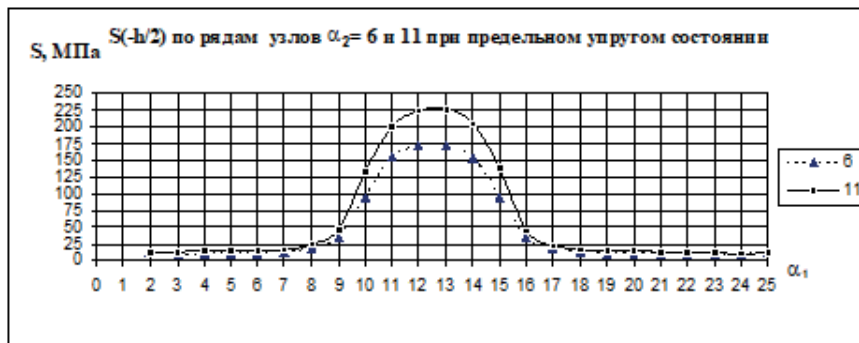


Рис. 5. Значения $S(-h/2)$ по ряду узлов $\alpha_2 = 6$ и 11 в предельном упругом состоянии материала оболочки.

Таблица 5. Значения $S(-h/2)$ по столбцам узлов $\alpha_1 = 9, 13, 16$ в предельном упругом состоянии

Узлы по α_2	Узлы по α_1		
	9	13	16
2	3,1004	6,7244	3,2358
3	6,008	5,0069	5,8032
4	6,6089	4,2396	6,2945
5	8,7393	6,3204	8,3321
6	34,9672	172,305	34,8581
7	33,018		33,2787
8	30,4376		32,7352
9	32,4401		34,7342
10	41,4407		44,407
11	45,9458	225,2021	43,1393
12	14,5938	9,0857	13,3128
13	12,1629	8,1836	11,2868
14	10,9336	10,1706	10,33
15	10,5837	11,1489	10,2275
16	10,6943	11,5332	10,5073
17	10,8964	11,755	10,8311
18	11,0776	11,9777	11,1189
19	2,7892	3,0107	2,6819



Рис. 6. Значения $S(-h/2)$ по столбцам узлов $\alpha_1 = 9, 13, 16$ в предельном упругом состоянии материала оболочки.

Путем увеличения нагрузки q , нормальной к срединной поверхности, методом упругих решений были найдены значения интенсивности касательных напряжений. Линеаризация задачи упругости осуществлена вариационно-разностным методом. Результаты решения позволили найти предельное состояние материала оболочки в узле 13 - 11. В качестве предельного принято состояние, при котором значение интенсивности касательных напряжений S выходит при решении задачи пластичности за пределы диаграммы растяжения. Методом половинного деления, проведя несколько попыток при приближении к концу диаграммы растяжения (рис.1), удалось установить предельную нагрузку $q_{np} = 6,7521$ МПа. Результаты этого решения проиллюстрированы таблицей 2 и ри-

сунком 3. В таблице 6 даны значения интенсивности касательных напряжений $S(-h/2)$ в предельном пластическом состоянии в узлах сетки при нагрузке $q_{np} = 6,7521$ МПа с соответствующей объёмной эпюрой напряжений на рисунке 7.

Таблица 6.
 $S(-h/2)$ при предельном неупругом решении задачи в узлах при $q_{np} = 6,7521$ МПа

Узлы по α_2	Узлы по α_1						
	2	3	4	5	6	7	8
2	0	35,9953	21,6443	18,1998	14,8592	12,0201	12,7586
3	74,3116	68,6259	76,5231	76,7171	74,4786	73,3474	78,4386
4	97,2666	73,5253	85,7587	80,5734	72,7758	64,3209	68,5635
5	102,4197	77,1442	94,0304	89,5588	80,6655	65,2917	88,4187
6	104,6525	77,8688	99,832	100,8903	99,9425	104,5324	202,1488
7	108,3342	78,2206	103,3815	109,7769	116,4242	138,2475	225,2662
8	111,3069	81,4599	107,1155	116,0281	124,4164	141,1068	198,8439
9	111,0235	87,1237	112,1846	121,9645	131,8194	150,7955	214,9609
10	107,1946	93,6897	117,6642	126,536	137,2609	167,037	246,9673
11	102,4506	99,7731	121,4927	126,2432	129,2082	136,6308	240,1384
12	100,083	101,9353	120,3579	119,0139	112,0972	95,383	118,939
13	99,1004	99,3176	115,5467	110,3701	101,4726	91,6384	96,4845
14	98,3396	95,1406	111,8734	107,0545	101,2628	97,8017	102,5895
15	97,9323	91,0234	108,9873	105,4814	101,9017	100,4384	102,3194
16	97,6465	86,3522	104,2589	101,7708	99,216	97,9307	97,6597
17	93,6868	79,627	95,5771	95,3096	94,5758	94,2119	93,9515
18	72,2867	70,5824	82,8801	88,2055	90,6073	91,7982	92,553
19	0	33,685	22,5578	24,8239	25,6057	25,12	24,035

Продолжение таблицы 6.

Узлы по α_2	Узлы по α_1				
	9	10	11	12	13
2	16,9759	25,0488	37,3723	42,2078	42,4027
3	86,877	71,3615	55,5653	50,6941	50,7387
4	107,5986	184,2572	273,0357	313,0811	312,9361
5	270,1426	408,3467	423,1199	430,5155	430,4818
6	382,4223	410,4756	464,9883	477,95	477,888
7	352,3725				
8	271,4832				
9	297,692				
10	374,6768				
11	404,7506	417,5275	490,0357	506,4027	506,9553
12	334,3686	416,181	435,5919	445,0659	445,355
13	142,4718	255,171	340,4668	358,9475	359,7212
14	116,5863	109,0857	106,4069	108,9149	108,6738
15	107,2713	97,907	84,7781	76,8172	75,9511
16	98,1748	92,8022	86,4142	82,8214	82,4059
17	93,8634	91,8926	90,0211	89,211	89,0843
18	93,2407	93,2565	93,3342	93,5898	93,6086
19	22,5188	20,5507	18,8142	17,8084	17,6405

Продолжение таблицы 6.

Узлы по α_2	Узлы по α_1						
	14	15	16	17	18	19	20
2	37,9478	26,0501	18,0463	13,6323	12,7836	15,8538	19,8882
3	55,6822	71,2846	86,1726	77,6782	72,5137	73,9719	77,3821
4	272,5888	183,5523	107,5263	68,0536	62,946	70,8851	77,8773
5	423,0102	408,1959	269,4862	87,9533	62,7216	77,4915	85,0474
6	464,7568	410,2518	381,3778	200,5802	101,7366	97,0533	97,0987
7			353,4402	226,5111	138,3901	116,4239	109,2242
8			277,0863	204,059	144,3608	127,3312	118,2795
9			306,0766	219,415	153,2935	134,1001	123,6167
10			375,3671	245,1918	164,4214	135,3738	124,4122
11	491,698	418,4857	405,6237	234,427	128,4813	123,2171	119,9667
12	436,3848	417,1466	338,0056	116,1069	88,2949	104,9833	110,7472
13	342,5158	262,3407	143,4597	93,3517	87,3813	95,609	102,3278
14	105,4312	106,7103	114,2327	99,9016	94,4253	96,3564	99,6845
15	82,5117	95,0822	105,0178	99,9301	97,5688	97,8366	99,0314
16	85,2808	91,2885	96,8317	96,2044	96,2228	96,7076	97,2251
17	89,6654	91,4047	93,4742	93,6484	94,0577	94,3742	94,2945
18	93,3916	93,4084	93,632	93,2942	93,0974	92,7591	91,9209
19	18,332	19,8295	21,6965	23,2577	24,5783	25,6094	26,2426

Продолжение таблицы 6.

Узлы по α_2	Узлы по α_1				
	21	22	23	24	25
2	23,2921	25,196	25,3922	34,2129	0
3	80,7087	82,7264	81,1979	71,1247	72,5238
4	96,0485	83,0554	87,4267	89,7896	75,4857
5	89,5154	93,6523	95,5688	77,0855	103,3543
6	97,7286	99,4431	98,6487	76,8625	107,6799
7	105,9016	104,7118	101,0113	77,4613	111,8676
8	114,4892	112,557	109,2453	103,6509	79,654
9	116,6352	112,3744	106,2396	82,3673	113,7468
10	117,8677	114,104	108,7591	85,2767	109,5415
11	116,6839	114,9145	111,473	88,8659	103,7434
12	112,5352	113,9872	113,3162	92,2216	98,7742
13	106,9927	111,1886	113,2299	93,722	95,7728
14	103,5074	108,2083	111,5986	92,9352	94,7937
15	101,289	105,2007	108,6645	90,261	95,3977
16	98,3392	100,9937	103,6703	85,9321	96,3177
17	94,1742	94,7342	95,0629	79,3203	93,1645
18	90,4367	87,8924	82,6284	70,4592	72,1236
19	26,3209	25,2613	22,7939	33,5144	0

$S(-h/2)$ в предельном состоянии оболочки $q_{np} = 6,7521$

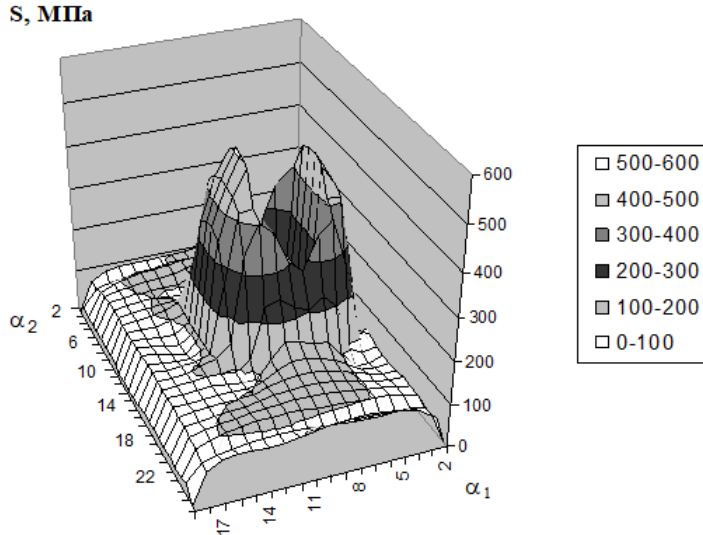


Рис. 7. Эпюра интенсивности напряжений $S(-h/2)$ в предельном состоянии при нагрузке $q_{np} = 6.7521$ МПа.

В таблице 7 даны значения интенсивности касательных напряжений $S(-h/2)$ по ряду узлов $\alpha_2 = 6$ и 11 в предельном пластическом состоянии, а в таблице 7 приведены значения интенсивности касательных напряжений $S(-h/2)$ по столбцам узлов $\alpha_1 = 9, 13, 16$ в этом состоянии. Данные результаты отображены на рисунках 8 и 9, соответственно. На рисунке 10 представлены зоны упругости и пластичности в предельном состоянии привязанные к строкам I – VII таблицы 1.

Таблица 7.
Значения $S(-h/2)$ по ряду узлов $\alpha_2 = 6$ и 11 в предельном упругом состоянии.

Узлы по α_2	$S(-h/2)$ при предельном неупругом решении задачи в узлах по α_1 при $q_{np}=6,7521$						
	2	3	4	5	6	7	8
6	104,6525	77,8688	99,832	100,8903	99,9425	104,5324	202,1488
11	102,4506	99,7731	121,4927	126,2432	129,2082	136,6308	240,1384

Продолжение таблицы 7.

Узлы по α_2	$S(-h/2)$ при предельном неупругом решении задачи в узлах по α_1 при $q_{np}=6,7521$				
	9	10	11	12	13
6	382,4223	410,4756	464,9883	477,95	477,888
404,7506	417,5275	490,0357	506,4027	506,9553	

Продолжение таблицы 7.

Узлы по α_2	$S(-h/2)$ при предельном неупругом решении задачи в узлах по α_1 при $q_{np}=6,7521$					
	14	15	16	17	18	19
6	464,7568	410,2518	381,3778	200,5802	101,7366	97,0533
11	491,698	418,4857	405,6237	234,427	128,4813	123,2171

Продолжение таблицы 7.

Узлы по α_2	$S(-h/2)$ при предельном неупругом решении задачи в узлах по α_1 при $q_{np}=6,7521$					
	20	21	22	23	24	25
6	97,0987	97,7286	99,4431	98,6487	76,8625	107,6799
11	119,9667	116,6839	114,9145	111,473	88,8659	103,7434

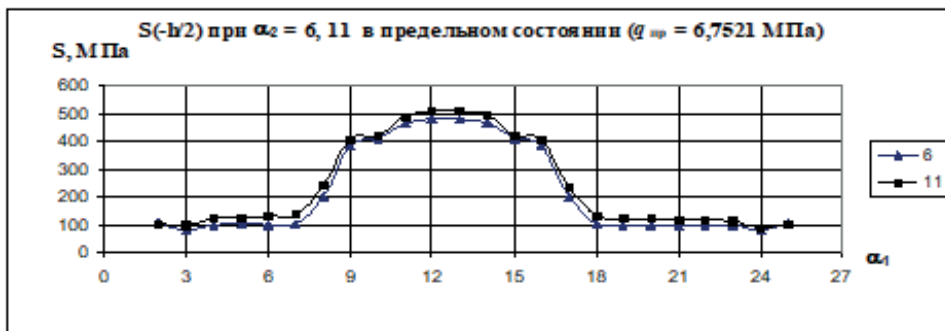


Рис. 8. Интенсивность напряжений $S(-h/2)$ в предельном состоянии материала оболочки ($q_{np} = 6.7521$ МПа) в узлах при $\alpha_2 = 6, 11$.

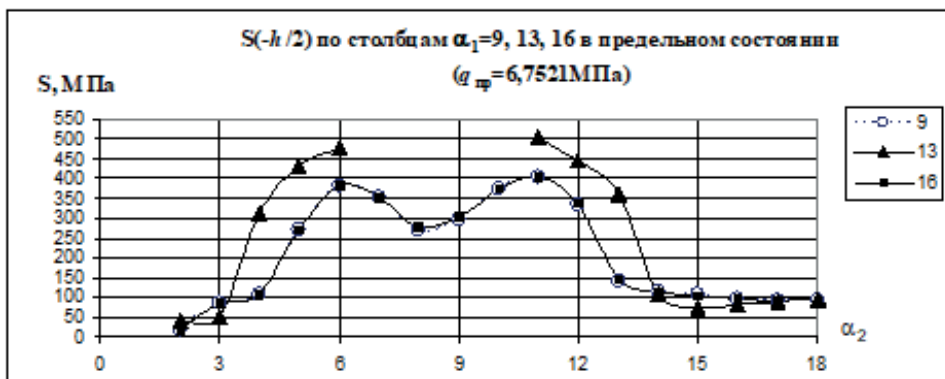


Рис. 9. Интенсивность напряжений $S(-h/2)$ в предельном состоянии материала оболочки ($q_{np} = 6.7521$ МПа) в узлах при $\alpha_2 = 9, 13, 16$.

Следует обратить внимание на то, что подобную задачу методами теории упругости ставить и решить нельзя. По мере роста нагрузки q в зонах пластических деформаций растет уточнение значений интенсивности касательных напряжений S при пластическом и упругом решении в 1,21 раза при нагрузке

$q = 1,4694$ МПа до 4,1 раза при нагрузке $q_{np} = 6,7521$ МПа в предельном состоянии при рассмотрении результатов расчета по таблице 2. Это видно на графике (рис. 3). Соответственно, количество итераций при решении задачи пластичности возросло с 6 до 35.

Таблица 8. $S(-h/2)$ при предельном неупругом решении

Узлы по α_2	$S(-h/2)$ при предельном неупругом решении задачи в узлах по α_1 при $q = 6,7521$ МПа α_1		
	9	13	16
2	16,9759	42,4027	18,0463
3	86,877	50,7387	86,1726
4	107,5986	312,9361	107,5263
5	270,1426	430,4818	269,4862
6	382,4223	477,888	381,3778
7	352,3725		353,4402
8	271,4832		277,0863
9	297,692		306,0766
10	374,6768		375,3671
11	404,7506	506,9553	405,6237
12	334,3686	445,355	338,0056
13	142,4718	359,7212	143,4597
14	116,5863	108,6738	114,2327
15	107,2713	75,9511	105,0178
16	98,1748	82,4059	96,8317
17	93,8634	89,0843	93,4742
18	93,2407	93,6086	93,632
19	22,5188	17,6405	21,6965

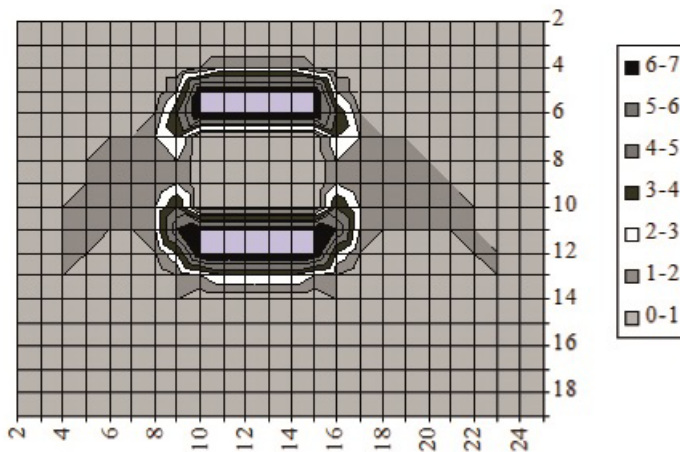


Рис. 10. Расположение зон упругости и пластичности.

Выводы. В результате приведенного решения задач получены следующие результаты:

1. Определено значение нагрузки $q_{упр}$, соответствующей предельному упругому состоянию материала в наиболее нагруженном элементе оболочки; значение её составило 1,4694 МПа.
2. Определено значение нагрузки $q_{пр}$, соответствующей предельному упругопластическому состоянию материала в наиболее нагруженном элементе оболочки при простом нагружении; значение её определено величиной 6,7521 МПа.
3. Приведены поля интенсивности касательных напряжений S при предельном упругом и предельном упругопластическом состоянии, характеризующем напряженное состояние материала оболочки на её внутренней световой поверхности.
4. Представлены графики изменения интенсивности напряжений при упругом и упругопластическом предельном состоянии по наиболее напряженному направлению вдоль координатных линий α_1 и α_2 при $z = h/2$.
5. Показано графическое расположение зон упругости и пластичности по всей нижней световой поверхности данной оболочки.

Предложенная методика может быть применена для другого ряда подобных задач.

1. *Ильюшин А.А.* Сопротивление материалов / А.А. Ильюшин, В.С. Ленский. – М.: Физматгиз, 1959. – 372 с.
2. Избранные методы строительной механики в расчетах пространственных конструкций: учеб. пособие по дисциплине: «Строит. мех. (спец. курс)» / В.Ф. Муцанов, В.В. Кулябко, В.М. Левин, В.В. Балюба, О.И. Демидов и др.; под общ. ред. В.Ф. Муцанова; ДонНАСА. – Макеевка, 2006. – 292 с.
3. *Муцанов В.Ф.* Линейные и нелинейные задачи теории упругости в расчетах тонкостенных конструкций // В.Ф. Муцанов, А.И. Демидов. – Макеевка: РИС ОМС ДонГАСА, 2000. – 182 с.
4. *Муцанов В.Ф.* Упруго-пластическое состояние круговой тороидальной оболочки с прямоугольным отверстием / В.Ф. Муцанов, А.И. Демидов // Современное промышленное и гражданское строительство. – Том 3, №2, 2007. – С. 67–77.
5. *Демидов А.И.* Упруго-пластическое напряженно-деформированное состояние тонкой незамкнутой тороидальной оболочки А.И. Демидов // Современное промышленное и гражданское строительство. – 2006. – Т. 2, № 4. – С. 163–176.
6. *Муцанов В.Ф.* Упруго-пластическое напряженное состояние круговых конических оболочек переменной и постоянной толщины с отверстием / В.Ф. Муцанов, А.И. Демидов // Металлические конструкции. – 2008. – Т. 14, № 3, – С. 125–142.
7. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек / В.В. Новожилов. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 432 с.
8. *Шевченко Ю.Н.* Методы расчета оболочек. Теория упруго-пластических оболочек при неизотермических процессах нагружения / Ю.Н. Шевченко, И.В. Прохоренко. – К.: Наук. думка, 1981. – 296 с.

9. Шевченко Ю.Н. Термопластичность при переменных нагрузениях / Ю.Н. Шевченко. – К.: Наук. думка, 1970. – 288 с.
10. Sen S.K. Criteria for finite element discrimination of shells of revolution S.K. Sen, P.L. Gould Int. J. for Numerical Methods in Engineering. – 1973. – 6, no. 2. – P. 265–274.
11. Stang G. Linear algebra and its applications G. Stang. – New York, Sanfrancisco, London, 1976. – 456 p.
12. Коларов Д. Механика на пластичните среди / Д. Коларов, Н. Бончева. – София: Издательство на Българската Академия на науките, 1975. – 510 с.

V.P. Mushchanov, A.I. Demidov

On the limiting state of a cylindrical shell with an asymmetric unreinforced notch.

The work is devoted to the definition of a marginal state on the basis of the application of the previously developed technique to determine the elastoplastic stress-deformed state (VAT) of an arbitrary form shells based on the theory of small elastic-plastic deformations in the linearization of solving problems by the method of elastic solutions. In each sequential approximation, when solving an elastic problem, the variational Lagrange equation is used in the movements of the points of the median surface of the shell in the final differences. When recording the variational Lagrange equation, the bond between stresses and deformations is adopted in the form of a bitch law, but with additional members that take into account plastic deformations. Geometric equations are taken in a linear formulation in the form of Cauchy's ratios. The material is characterized by an appropriate diagram of stretching a cylindrical sample, a normal elastic module and a Poisson coefficient. The kinematic boundary conditions are satisfied accurately, and static - the shell free from fixing the edges is approximately.

Keywords: *Cylindrical shell, variation-difference method, method of elastic solutions, shear stress intensity, plasticity function, elastic limit state and limit state of the shell.*

ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры”, Макеевка
Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture,
Makeevka
a. i . demidov@donnasa. ru

Получено 22.03.2022

ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

УДК 622.831.27

doi:10.24412/0136-4545-2022-1-69-74

EDN:WKWHBO



©2022. Н.И. Лобков, В.С. Маевский, А.А. Лобков

ФОРМИРОВАНИЕ ЗОНЫ РАЗГРУЗКИ ПЛАСТА ВПЕРЕДИ ЛАВЫ

Приведены результаты исследований формирования зоны разгрузки угольного пласта впереди лавы в процессе изгиба пород основной кровли над выработанным пространством.

Ключевые слова: лава, выработанное пространство, опорное давление, слои кровли, непосредственная кровля, основная кровля, разгрузка угольного пласта.

Введение и цели исследования. Наличие в основной кровле пласта достаточно мощного и устойчивого породного слоя, способствует её зависанию над выработанным пространством и формированию максимального опорного давления величиной более $3\gamma H$. В качестве основной кровли может рассматриваться несущий слой, ближайшей к пласту, группы слоев [1].

Породный массив, сложенный слоями осадочных пород и вмещающий угольные пласты, до начала ведения горных работ, находится в напряжённом состоянии под действием силы тяжести (γH). При ведении очистных работ образуется выработанное пространство, над которым изгибаются породные слои кровли и формируют дополнительное вертикальное (опорное) давление на угольный пласт. Под действием опорного давления, впереди лавы, происходит перераспределение вертикальных напряжений на верхней кромке пласта.

В контексте описанных явлений целью работы является изучение условий формирования зоны разгрузки пласта впереди лавы.

1. Диагностика сдвижения горных пород кровли. Результаты диагностики сдвижения горных пород кровли над выработанным пространством показывают следующее.

В таблице 1 приведены показания датчиков трения впереди очистного забоя при отработке пласта (1) в модели. По результатам показаний датчиков давления при отработке породного массива первой группы строения пород построены графики изменения давления на пласт впереди лавы (опорного давления).

Таблица 1.

Показания датчиков трения между породными слоями

№№ датчика	Базовое усилие, кг	Показание датчиков давления					
		При отходе лавы на 120 м до обрушения кровли			При отходе лавы на 200 м до обрушения кровли		
		Показание датчика	Разность	%	Показание датчика	Разность	%
1	3,4	3,5	0,1	4	0	0	0
2	3,2	3,5	0,3	10	0	0	0
3	3,3	3,1	-0,2	-6	0	0	0
4	3,5	3,6	0,1	2	0	0	0
5	3,5	3,5	0	0	0	0	0
6	3,6	3,6	0	0	4,2	0,6	17
7	3,5	3,5	0	0	4,3	0,8	23
8	4,1	4,1	0	0	3,8	-0,3	-8
9	4,0	4,0	0	0	3,9	-0,1	-2
10	3,2	3,2	0	0	3,3	0,1	3
11	3,1	3,1	0	0	3,1	0	0
12	2,9	2,9	0	0	2,9	0	0
13	2,8	2,8	0	0	2,8	0	0
14	3,0	3,0	0	0	3,0	0	0
15	3,6	3,6	0	0	3,6	0	0
16	3,5	3,5	0	0	3,5	0	0
17	3,4	3,4	0	0	3,4	0	0

По результатам показаний датчиков давления при отработке породного массива первой группы строения пород построены графики изменения давления на пласт впереди лавы (опорного давления).

На рисунке 1 приведены графики зависимости давления на пласт от продвижения лавы. При отходе лавы от разрезной печи на 120м на первом датчике зафиксирован прирост давления на 4%, на втором – на 10% (это максимальное опорное давление).

На третьем датчике зафиксировано уменьшение давления на 6%. Уменьшение давления может произойти только за счет поднятия кровли впереди лавы. Поднятие кровли разгружает пласт за максимумом опорного давления. На четвертом датчике наблюдается увеличение давления на пласт по сравнению с давлением нетронутого массива на 2%. В остальных датчиках впереди лавы давление не изменяется. При отходе лавы на 120м слой тридцатиметрового, несущего песчаника, залегающего непосредственно над пластом, не обрушился. Дальнейшее продвижение лавы способствовало увеличению максимального опорного давления. Отход лавы на 200м от разрезной печи привел к обрушению песчаника. Перед его обрушением величина максимального опорного давления увеличилась по сравнению с давлением в нетронутом массиве на 23%. Нисходящая ветвь опорного давления опустилась ниже нулевой линии на 8% (восьмой датчик). Датчик №9 показал уменьшение опорного давления по сравнению с давлением нетро-

Формирование зоны разгрузки пласта впереди лавы

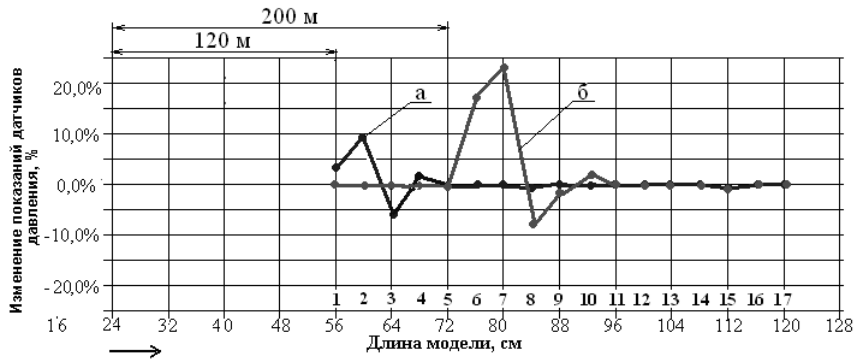


Рис. 1. Показания датчиков давления в модели первой группы строения пород (→ направление движения лавы; 1–17 – номера датчиков давления; а - при отходе лавы от разрезной печи на 120 м; б – при отходе лавы от разрезной печи на 200м)

нутого массива на 2%. На датчике №10 наблюдалось увеличение давления на 3%. На всех последующих датчиках давление не изменялось. После обрушения песчаника величина максимального опорного давления снизилась практически до уровня давления не тронутого массива.

2. Компьютерное моделирование сдвижения породного массива. По результатам компьютерного моделирования сдвижения породного массива построена кривая, характеризующая изменения опорного давления впереди лавы перед вторичной посадкой кровли (рис. 2). На рисунке приведена кривая опорного давления впереди лавы, включающая в себя восходящую и нисходящие ветви. Удаление зоны разгрузки пласта от груди забоя лавы определяется точкой пересечения линии γH с кривой нисходящей ветви опорного давления (*a*). Расстояние от груди забоя лавы до точки пересечения (рис. 2) составляет 17,5м.

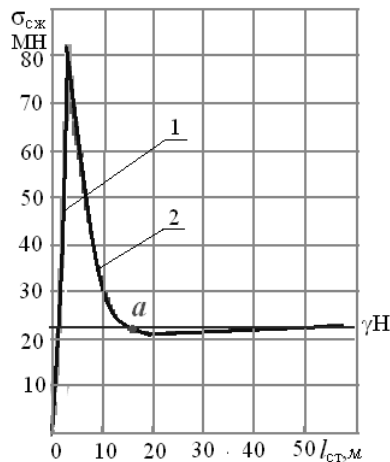


Рис. 2. Пересечение линии γH с кривой опорного давления: 1 – восходящая ветвь опорного давления; 2 – нисходящая ветвь опорного давления.

Восходящая ветвь опорного давления (1) показывает изменение опорного давления от 0 до $k\gamma H$. Нисходящая ветвь (2) показывает изменение опорного давления от $k\gamma H$ до линии γH и ниже.

На рисунке 3 приведен характер изменения вертикальных сжимающих напряжений в зоне разгрузки пласта при разных величинах максимального опорного давления. Из рисунка 3 видно, что максимальное опорное давление впереди лавы (кривая №1), не превышает величины $3\gamma H$. Кривая №1, на расстоянии 100м от груди забоя, плавно приближается к линии γH , не пересекая ее. В этом случае зона разгрузки пласта не образуется. Кривая №2, на расстоянии 42м от груди забоя, ложится на линию γH , не пересекая ее.

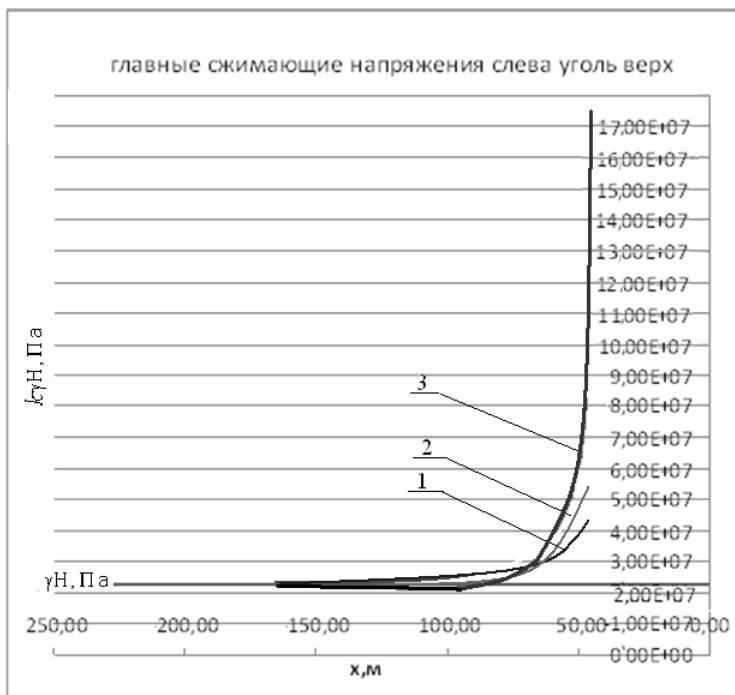


Рис. 3. Изменения характера распределения нисходящей ветви опорного давления, определяющей образование зоны разгрузки пласта впереди забоя лавы: 1- кривая при максимальном опорном давлении $\gamma H < P^{max} < 3\gamma H$; 2 - кривая при максимальном опорном давлении $P^{max} = 3\gamma H$; 3 - кривая при максимальном опорном давлении $P^{max} > 3\gamma H$.

В этом случае, при дальнейшем увеличении максимального опорного давления возможно формирование зоны разгрузки пласта. Кривая №3 пересекает линию γH и происходит формирование зоны разгрузки пласта впереди лавы. Расстояние от забоя лавы до зоны разгрузки пласта впереди очистного забоя позволяет определять и учитывать месторасположение зоны в процессе проектирования очистных работ.

Выводы. Методика определения расстояния от груди забоя лавы до зоны разгрузки пласта с использованием физико-механических характеристик породного массива включает в себя следующее.

1. *Определение предельного пролета основной кровли.* Из выражения 1 и 2 определим предельные пролеты группы слоев основной кровли в период первичной и вторичной посадки [2]

$$\ell_{\text{пр}}^2 = \frac{2h_c^2}{\sum_{i=1}^n \gamma_c h_{cc}} \sqrt{\frac{2EG_c}{\pi \ell_{\text{кр}}}}, \quad (1)$$

$$\ell_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{2h_c^2}{\sum_{i=1}^n \gamma_c h_{cc}} \sqrt{\frac{2EG_c}{\pi \ell_{\text{кр}}}}}, \quad (2)$$

где $\ell_{\text{пр}}$ – предельный пролет породного слоя перед первичной посадкой, м; h_c – мощность рассчитываемого слоя, м; γ_c – объёмный вес породы, Н/м³; $\ell_{\text{кр}}$ – критическая длина трещины в слое, м; $\sum_{i=1}^n \gamma_c h_{cc}$ – распределенная нагрузка группы слоев, МН/м²; G_c – эффективная поверхностная энергия, МПа; h_{cc} – мощность слоя пригрузки, м.

2. *Определение величины максимального опорного давления.* Величина максимального опорного давления определяется из выражения [3]

$$P^{\text{max}} = \gamma H + \gamma \cdot h \cdot l_{\text{пр}} \cdot a, \text{ Па}, \quad (3)$$

где $l_{\text{пр}}$ – величина пролета рассчитываемого породного слоя, м; h – мощность рассчитываемого породного слоя, м; γ – объёмный вес породы рассчитываемого породного слоя, Н/м³; a – единичная ширина балки-полоски, м; γH – напряжение нетронутого породного массива, МН.

3. *Проверка возможности формирования зоны разгрузки пласта впереди лавы.* Проверка производится путем сравнения величины максимального опорного давления с кривыми, определяющими возможность формирования зоны разгрузки пласта впереди лавы (рис. 3).

4. *Определение расстояния от груди очистного забоя лавы до зоны разгрузки пласта.* Расстояние от груди забоя лавы до зоны разгрузки пласта впереди лавы, производится графоаналитическим методом путем пересечения линии γH с кривой опорного давления (рис. 2). Точка пересечения линии γH с нисходящей ветвью опорного давления определяет расстояние от груди забоя лавы до зоны разгрузки пласта.

1. Носач А.К. Процессы подземных горных работ в очистных забоях / В.К. Носач, Н.И. Лобков – Донецк: РВА ДонНТУ, 2001. – 180 с.
2. Лобков Н.И. Порядок расчета максимального опорного давления впереди лавы / Н.И. Лобков, А.А. Лобков // Труды РАНМИ. – 2019. – № 8(23). – С. 273–285.
3. Лобков Н.И. Особенности формирования горного давления при ведении очистных работ / Н.И. Лобков // Наукові праці УКРНДМІ НАН України. – 2014. – Вып. 15. – С. 308–315.

Н.И. Лобков, В.С. Маевский, А.А. Лобков

N.I. Lobkov, V.S. Mayevsky, A.A. Lobkov

Formation of a reservoir unloading zone in front of the longwall.

The results of studies of the formation of the coal seam discharge zone ahead of the long-wall in the process of bending the rocks of the main roof over the worked-out space are presented.

Keywords: *long-wall, developed space, support pressure, roof layers, direct roof, main roof, coal seam unloading.*

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ), Донецк

Оперативный государственный военизированный горноспасательный отряд Министерства чрезвычайных ситуаций, Донецк

Получено 28.01.2022

Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying (RANIMI), Donetsk

Operational State Paramilitary Mining Rescue Unit of the Ministry of Emergency Situations, Donetsk

ranimi@ranimi.org