

ISSN 0136-4545

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

**Журнал
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ
МЕХАНИКИ**

№ 2 (75)

2021

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА: д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ: **М.Н. Пачева**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

д-р техн. наук, проф. А.В. Анциферов, д-р техн. наук, проф. В.Е. Болнокин, д-р техн. наук, проф. Н.И. Болонов, д-р физ.-мат. наук, проф. А.О. Ватульян, д-р техн. наук, проф. Л.П. Вовк, д-р техн. наук, проф. В.А. Глазунов, д-р техн. наук, с.н.с. А.А. Глухов, д-р физ.-мат. наук, проф. А.С. Гольцев, д-р физ.-мат. наук, проф. Г.В. Горр, д-р техн. наук, проф. В.В. Губанов, д-р техн. наук, с.н.с. В.А. Дрибан, д-р физ.-мат. наук, проф. А.М. Ковалев, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. Б.И. Коносевиц, д-р техн. наук, проф. В.М. Левин, д-р техн. наук, проф. В.Ф. Мущанов, д-р техн. наук, проф. А.А. Петраков, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. С.Н. Судаков, д-р техн. наук, проф. Г.М. Улитин, д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Шалдырван.

EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**

DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**

EXECUTIVE SECRETARY: **M.N. Pacheva**

EDITORIAL BOARD:

Dr. of tech., prof. A.V. Antsiferov, Dr. of tech., prof. V.E. Bolnokin, Dr. of tech., prof. N.I. Bolonov, Dr. of phys. and math., prof. A.O. Vatulyan, Dr. of tech., prof. L.P. Vovk, Dr. of tech., prof. V.A. Glazunov, Dr. of tech., senior researcher A.A. Glukhov, Dr. of phys. and math., prof. A.S. Goltsev, Dr. of phys. and math., prof. G.V. Gorr, Dr. of tech., prof. V.V. Gubanov, Dr. of tech., senior researcher V.A. Driban, Dr. of phys. and math., prof. A.M. Kovalev, Dr. of phys. and math., senior researcher B.I. Konosevich, Dr. of tech., prof. V.M. Levin, Dr. of tech., prof. V.F. Mushchanov, Dr. of tech., prof. A.A. Petrakov, Dr. of phys. and math., senior researcher S.N. Sudakov, Dr. of tech., prof. G.M. Ulitin, Dr. of phys. and math., prof. V.A. Shaldyrvan.

Адрес редакции: 83001 Донецк, ул. Университетская, 24
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
Тел. 302 92 71, E-mail: jtam_donnu@mail.ru

Технический редактор: Пачева М.Н.

Научный журнал «Журнал теоретической и прикладной механики» включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (приказ МОН ДНР № 616 от 14.07.2021 г) по следующим группам научных специальностей и специальностям: 01.02.00 — Механика; 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ; 05.23.17 — Строительная механика; 25.00.20 — Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика.

Журнал включен в перечень РИНЦ (Лицензионный договор № 27-01/2020 от 23.01.2020 г.).

Утверждено к печати ученым советом
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016г.

© Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Донецкий национальный университет», 2021

№ 2 (75) / 2021

Основан в 1970г.

ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СОДЕРЖАНИЕ

Механика деформируемого твердого тела

- Пачева М.Н.* Трансформация нормальных упругих волн сдвига при падении на поверхность контакта трансверсально-изотропных функционально-градиентных полуслоев..... 5
- Глушанков Е.С.* Термоэлектромагнитоупругое состояние бесконечной многосвязной пьезопластики в условиях конвективного теплообмена при действии линейного потока тепла..... 18
- Моисеенко И.А., Моисеенко В.А., Иванов А.О.* Осесимметричные нормальные упругие волны в кусочно-неоднородных и функционально-неоднородных цилиндрических волноводах кольцевого поперечного сечения..... 30
- Чехов В.Н., Загора С.В.* Нормальный прогиб трансверсально-изотропной сферической оболочки с жёстким включением, нагруженным поперечным усилием..... 51

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

- Павлыш В.Н., Сторожев С.В.* Исследование модели упругопластического деформирования полого шара под действием внутреннего давления в рамках вероятностного и нечетко-множественного подходов..... 60

Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика

- Канин В.А., Ходырев Е.Д., Васютина В.В.* Предельные размеры целиков угля, подлежащих учету при построении зон ПГД..... 68
- Лобков Н.И., Маевский В.С., Лобков А.А.* Алгоритм прогнозирования максимального опорного давления в процессе работы лавы..... 74

№ 2 (75) / 2021

Founded in 1970.

JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

CONTENTS

Solid Mechanics

- Pacheva M.N.* Normal elastic shear waves transformation upon incidence on the contact surface of transversely isotropic functionally graded half-layers... 5
- Glushankov E.S.* The thermo-electro-magneto-elastic state of the infinite multiply connected piezoelectric plate in conditions of the convective heat transfer under linear heat flow action..... 18
- Moiseyenko I.A., Moiseyenko V.A., Ivaniv A.O.* Axisymmetric normal elastic waves in piecewise inhomogeneous and functionally inhomogeneous cylindrical waveguides of annular cross section 30
- Chekhov V.N., Zakora S.V.* Normal deflection of a transversely isotropic spherical shell with rigid inclusion loaded with transverse effort..... 51

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes

- Pavlysh V.N., Storozhev S.V.* Investigation of the elastoplastic deformation model of a hollow sphere under action of internal pressure with using of probabilistic and fuzzy-set approaches..... 60

Geomechanics, Rock Damage, Mining Aerogas dynamics and Thermal Physics

- Kanin V.A., Khodyrev Y.D., Vasyutina V.V.* The maximum size of the coal pillars to be taken into account when calculating of increased rock pressure zones..... 68
- Lobkov N.I., Mayevsky V.S., Lobkov A.A.* Algorithm for predicting the maximum abutment pressure during the operation of longwall..... 74

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3:534.1

©2021. М.Н. Пачева

ТРАНСФОРМАЦИЯ НОРМАЛЬНЫХ УПРУГИХ ВОЛН СДВИГА ПРИ ПАДЕНИИ НА ПОВЕРХНОСТЬ КОНТАКТА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПОЛУСЛОЕВ

Представлена численно-аналитическая методика решения задачи о трансформации стационарной нормальной сдвиговой волны в составном плоскопараллельном волноводе при падении на поверхность контакта его компонентов в виде полуслоев из трансверсально-изотропных функционально-градиентных материалов. Используется концепция представления волновых полей в компонентах волновода разложениями по базисным множествам бегущих и краевых стоячих базисных нормальных волн. На основе приема алгебраизации функциональных граничных условий задача сведена к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений по нормальным волнам. Представлены результаты численного анализа эффектов, связанных с варьированием показателями непрерывной экспоненциальной неоднородности материалов контактирующих слоев.

Ключевые слова: составной плоскопараллельный волновод, закрепленные грани, контактирующие анизотропные функционально-градиентные полуслои, экспоненциальная толщинная неоднородность, нормальные волны сдвига, трансформация при падении на контактную поверхность, эффекты влияния показателей неоднородности.

Введение. Исследование закономерностей трансформации нормальных упругих волн, распространяющихся вдоль составного упругого волновода, образуемого контактирующими разнотипными по физико-механическим и геометрическим свойствам деформируемыми плоскопараллельными полуслоями, является одной из важных проблем научного и прикладного содержания в механике деформируемого твердого тела. Анализ моделей данного типа представляет интерес для механики строительных конструкций и сооружений, акустоэлектроники, геоакустики, пластовой сейсморазведки и ультраакустической дефектоскопии, механики машин и механизмов. Обобщение и систематизация результатов целого ряда работ по данной тематике, выполненных с применением численно-аналитических подходов, представлены, в частности, в монографиях и статьях [1–4]. Однако, исследование проблемы анализа эффектов трансформации нормальных упругих волн в составных плоскопараллельных волноводах при их падении на поверхность контакта компонентов в виде неоднородных по толщине полуслоев из формируемых с применением аддитивных технологий функционально-градиентных трансверсально-изотропных материалов [5–8] на

данный момент остается неисследованной задачей волновой динамики деформируемых сред. В данном контексте, цель представляемого в настоящей работе исследования, являющегося развитием исследований, отраженных в работах [9–11], состоит в разработке численно-аналитической методики исследования модели трансформации нормальных упругих волн сдвига в составном закрепленном по граням волноводе при их падении на поверхность контакта одинаковых по толщине трансверсально-изотропных функционально-градиентных полуслоев.

1. Постановка задачи. Рассматривается составной упругий волновод, область которого во вводимой прямоугольной координатной системе $Ox_1x_2x_3$ описывается представлением

$$\begin{aligned} V &= V_1 \cup V_2 = \\ &= \{x_1 \leq 0, -\infty < x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h\} \cup \\ &\cup \{x_1 > 0, -\infty < x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Компонента волновода V_j является трансверсально-изотропным функционально-градиентным телом с осью изотропии, коллинеарной координатному направлению Ox_3 , а ее физико-механические характеристики имеют вид

$$\begin{aligned} c_{11}^{(j)} &= c_{011}^{(j)} \cdot \exp(\lambda_j x_3), & c_{12}^{(j)} &= c_{012}^{(j)} \cdot \exp(\lambda_j x_3), \\ c_{13}^{(j)} &= c_{013}^{(j)} \cdot \exp(\lambda_j x_3), & c_{33}^{(j)} &= c_{033}^{(j)} \cdot \exp(\lambda_j x_3), \\ c_{44}^{(j)} &= c_{044}^{(j)} \cdot \exp(\lambda_j x_3), & \rho_j &= \rho_{0j} \cdot \exp(\lambda_j x_3). \end{aligned} \quad (2)$$

Определяющие соотношения для трансверсально-изотропных материалов представляются соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11} \partial_1 u_1 + c_{12} \partial_2 u_2 + c_{13} \partial_3 u_3, \\ \sigma_{22} &= c_{12} \partial_1 u_1 + c_{11} \partial_2 u_2 + c_{13} \partial_3 u_3, \\ \sigma_{33} &= c_{13} \partial_1 u_1 + c_{13} \partial_2 u_2 + c_{33} \partial_3 u_3, \\ \sigma_{23} &= c_{44} (\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2), \\ \sigma_{13} &= c_{44} (\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1), \\ \sigma_{12} &= (c_{11} - c_{12}) / 2 (\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2). \end{aligned}$$

Плоские граничные поверхности рассматриваемого составного волновода

$$\Gamma_{\pm} = \{-\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty, x_3 = \pm h\}, \quad (3)$$

по предположению, являются жестко закрепленными. Граница раздела разнородных компонентов в составном волноводе

$$\Gamma = \{x_1 = 0, -\infty < x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h\} \quad (4)$$

является плоскостью идеального механического контакта его компонентов.

Исследованию подлежит модель распространения в рассматриваемом составном волноводе вдоль координатного направления Ox_1 нормальной сдвиговой горизонтально поляризованной упругой волны (нормальной упругой волны SH типа) с циклической частотой ω . Для комплексной функции волновых упругих перемещений $u_{2m}^{(*)}(x_1, x_2, t)$ в падающей волне с учетом представленных элементов постановки рассматриваемой задачи вводится исходное представление вида

$$u_{2m}^{(*)}(x_1, x_3, t) = \varphi_{m0}(x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - k_{1m0}x_1)). \quad (5)$$

В выражении (5) $\varphi_{m0}(x_3)$ – комплексная амплитудная функция, t – параметр времени, k_{1m0} – параметр волнового числа рассматриваемой исходной распространяющейся волны. Предполагается, что рассматриваемая нормальная волна в области V_1 падает на плоскость контакта компонентов, в результате чего формируются поля отраженных от Γ и прошедших Γ упругих волн, характеризующиеся, соответственно, комплексными функциями волновых упругих перемещений $u_2^{(1)}(x_1, x_2, t)$ и $u_2^{(2)}(x_1, x_2, t)$. В соответствии с принимаемой концепцией численно-аналитического исследования рассматриваемой проблемы, для искомым полей отраженных и прошедших волн вводятся представления в виде разложений по базисным множествам бегущих и краевых стоячих волн в соответствующих компонентах составного волновода

$$u_2^{(1)}(x_1, x_3, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_{1p}(x_3) \cdot \exp(-i(\omega t + k_p^{(1)}x_1)), \quad (6)$$

$$u_2^{(2)}(x_1, x_3, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_{2p}(x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - k_p^{(2)}x_1)). \quad (7)$$

В целом рассматриваемая краевая задача включает уравнения волновых движений для компонент с исходной формой

$$\partial_1 \sigma_{12}^{(j)} + \partial_3 \sigma_{32}^{(j)} - \rho_j \partial_t^2 u_2^{(j)} = 0; \quad (8)$$

краевые условия на плоских гранях Γ_{\pm}

$$[u_2^{(j)}(x_1, x_3, t)]_{\Gamma_{\pm}} = 0; \quad (9)$$

а также краевые условия на плоскости Γ идеального механического контакта компонентов

$$[u_2^{(1)}(x_1, x_3, t) + u_{2m}^{(*)}(x_1, x_3, t)]_{\Gamma} = [u_2^{(2)}(x_1, x_3, t)]_{\Gamma}; \quad (10)$$

$$[\sigma_{12}^{(1)}(x_1, x_3, t) + \sigma_{12m}^{(*)}(x_1, x_3, t)]_{\Gamma} = [\sigma_{12}^{(2)}(x_1, x_3, t)]_{\Gamma}. \quad (11)$$

2. Применение метода рядов по базисным множествам бегущих и краевых стоячих нормальных волн. Для определения амплитудных функций в представлениях падающих, отраженных и прошедших (преломленных) волн из соотношений (5)–(8) следуют обыкновенные дифференциальные уравнения вида

$$\varphi''_{jp}(x_3) + \lambda_j \varphi'_{jp}(x_3) + \beta_{jp}^2 \varphi_{jp}(x_3) = 0, \quad (12)$$

$$\varphi''_{m0}(x_3) + \lambda_1 \varphi'_{m0}(x_3) + \beta_{m0}^2 \varphi_{m0}(x_3) = 0, \quad (13)$$

с постоянными коэффициентами, которые совместно с краевыми условиям (9) образуют спектральную краевую задачу для определения представлений базисных нормальных волн. Удовлетворяющими краевым условиям (9) базисные частные решения (12), записываются в форме

$$\varphi_{jp}(x_3) = a_{pj}(\exp(\gamma_{1pj}x_3) + \delta_{pj} \exp(\gamma_{2pj}x_3)), \quad (14)$$

где

$$\delta_{pj} = -[\exp(\gamma_{1pj}h)/\exp(\gamma_{2pj}h)],$$

$$\gamma_{qpj} = -(\lambda_j/2) - (-1)^q((\lambda_j^2/4) - \beta_{jp}^2)^{1/2},$$

$$\beta_{jp}^2 = [\rho_j \omega^2 - c_{066}^{(j)} k_{jp}^2]/c_{044}^{(j)},$$

$$k_{jp} = [(\rho_j \omega^2 - c_{044}^{(j)}(\lambda_j^2 + p^2 \pi^2/h^2))/4(c_{066}^{(j)})^{-1}]^{1/2},$$

$$c_{066}^{(j)} = (c_{011}^{(j)} - c_{012}^{(j)})/2,$$

a_{pj} – неопределенные постоянные коэффициенты, которые характеризуют вклад базисных бегущих и краевых стоячих волн в формирующиеся в компонентах V_j волновые поля.

Аналогичный по структуре вид имеет представление $\varphi_{m0}(x_3)$:

$$\varphi_{m0}(x_3) = a_{m0}(\exp(\gamma_{1m0}x_3) + \delta_{m0} \exp(\gamma_{2m0}x_3)), \quad (15)$$

где

$$\delta_{m0} = -[\exp(\gamma_{1m0}h)/\exp(\gamma_{2m0}h)],$$

$$\gamma_{qm0} = -(\lambda_1/2) - (-1)^q((\lambda_1^2/4) - \beta_{1m0}^2)^{1/2},$$

$$\beta_{1m0}^2 = [\rho_1 \omega^2 - c_{066}^{(1)} k_{1m0}^2]/c_{044}^{(1)},$$

$$k_{1m0} = [(\rho_1 \omega^2 - c_{044}^{(1)}(\lambda_1^2 + m^2 \pi^2/h^2))/4(c_{066}^{(1)})^{-1}]^{1/2}.$$

При этом, величина m в представлении (15) является номером моды исходной бегущей нормальной волны в компоненте V_1 рассматриваемого составного волновода – одним из значений из диапазона $m = \overline{0, m_{\max}}$, при котором для заданной частоты рассматриваемого волнового процесса параметр k_{1m0} является действительной величиной; a_0 – задаваемая величина амплитудного коэффициента исходной падающей волны.

Представления (5)–(7), в которых амплитудные функции имеют вид (14), (15), удовлетворяют волновым уравнениям (8) и однородным краевым условиям (9).

3. Алгебраизация функциональных краевых условий идеального механического контакта компонентов волновода. Следующая фаза анализа рассматриваемой модели заключается в удовлетворении функциональных краевых условий (10), (11) на основе использования представлений (5)–(7) и применения одного из альтернативных приемов сведения функциональных уравнений (10), (11) к редуцируемой бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных коэффициентов a_{pj} .

На данном этапе соотношения (10), (11) первоначально приводятся к виду

$$\begin{aligned}
 F_u(x_3, a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots, a_{p1}, \dots, a_{12}, a_{22}, a_{32}, \dots, a_{p2}, \dots) = \\
 = \sum_{p=0}^{\infty} a_{p1} (\exp(\gamma_{1p1} x_3) + \delta_{p1} \exp(\gamma_{2p1} x_3)) - \\
 - \sum_{p=0}^{\infty} a_{p2} (\exp(\gamma_{1p2} x_3) + \delta_{p2} \exp(\gamma_{2p2} x_3)) + \\
 + a_0 (\exp(\gamma_{1m0} x_3) + \delta_{m0} \exp(\gamma_{2m0} x_3)) = 0,
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 F_\sigma(x_3, a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots, a_{p1}, \dots, a_{12}, a_{22}, a_{32}, \dots, a_{p2}, \dots) = \\
 = c_{066}^{(1)} \cdot \exp(\lambda_1 x_3) \sum_{p=0}^{\infty} a_{p1} (-ik_{1p}) (\exp(\gamma_{1p1} x_3) + \delta_{p1} \exp(\gamma_{2p1} x_3)) - \\
 - c_{066}^{(2)} \cdot \exp(\lambda_2 x_3) \sum_{p=0}^{\infty} a_{p2} (ik_{2p}) (\exp(\gamma_{1p2} x_3) + \delta_{p2} \exp(\gamma_{2p2} x_3)) + \\
 + a_0 c_{066}^{(1)} \cdot (ik_{1m0}) \exp(\lambda_1 x_3) (\exp(\gamma_{1m0} x_3) + \delta_{m0} \exp(\gamma_{2m0} x_3)) = 0,
 \end{aligned} \tag{17}$$

и в рамках концепции метода Бубнова-Галеркина формулируются условия ортогональности функций $F_u(x_3, a_{11}, \dots, a_{p1}, \dots, a_{12}, \dots, a_{p2}, \dots)$ и $F_\sigma(x_3, a_{11}, \dots, a_{p1}, \dots, a_{12}, \dots, a_{p2}, \dots)$ к элементам полной ортогональной на отрезке $x_3 \in [-h, h]$ системы тригонометрических функций $\{\sin \varsigma_n x_3, \cos \varsigma_n x_3\}$:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-h}^h F_u(x_3, a_{11}, \dots, a_{p1}, \dots, a_{12}, \dots, a_{p2}, \dots) \cdot \sin \varsigma_n x_3 dx_3 = 0 \\
 & \qquad \qquad \qquad (n = \overline{1, \infty}); \\
 & \int_{-h}^h F_u(x_3, a_{11}, \dots, a_{p1}, \dots, a_{12}, \dots, a_{p2}, \dots) \cdot \cos \varsigma_n x_3 dx_3 = 0 \\
 & \qquad \qquad \qquad (n = \overline{0, \infty}); \\
 & \int_{-h}^h F_\sigma(x_3, a_{11}, \dots, a_{p1}, \dots, a_{12}, \dots, a_{p2}, \dots) \cdot \sin \varsigma_n x_3 dx_3 = 0 \\
 & \qquad \qquad \qquad (n = \overline{1, \infty}); \\
 & \int_{-h}^h F_\sigma(x_3, a_{11}, \dots, a_{p1}, \dots, a_{12}, \dots, a_{p2}, \dots) \cdot \cos \varsigma_n x_3 dx_3 = 0 \\
 & \qquad \qquad \qquad (n = \overline{0, \infty}).
 \end{aligned} \tag{18}$$

В результате, относительно коэффициентов a_{pj} получена система линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned}
 & \sum_{p=0}^{\infty} a_{p1} \Delta_{pns1}^{(u)} + \sum_{p=0}^{\infty} a_{p2} \Delta_{pns2}^{(u)} = \vartheta_{ns}^{(u)} \quad (n = 1, \infty); \\
 & \sum_{p=0}^{\infty} a_{p1} \Delta_{pnc1}^{(u)} + \sum_{p=0}^{\infty} a_{p2} \Delta_{pnc2}^{(u)} = \vartheta_{nc}^{(u)} \quad (n = 0, \infty); \\
 & \sum_{p=0}^{\infty} a_{p1} \Delta_{pns1}^{(\sigma)} + \sum_{p=0}^{\infty} a_{p2} \Delta_{pns2}^{(\sigma)} = \vartheta_{ns}^{(\sigma)} \quad (n = 1, \infty); \\
 & \sum_{p=0}^{\infty} a_{p1} \Delta_{pnc1}^{(\sigma)} + \sum_{p=0}^{\infty} a_{p2} \Delta_{pnc2}^{(\sigma)} = \vartheta_{nc}^{(\omega)} \quad (n = 0, \infty);
 \end{aligned} \tag{19}$$

в которых введены следующие обозначения

$$\Delta_{pns1}^{(u)} = \int_{-h}^h (\exp(\gamma_{1p1} x_3) + \delta_{p1} \exp(\gamma_{2p1} x_3)) \sin \varsigma_n x_3 dx_3,$$

$$\begin{aligned} \Delta_{pns2}^{(u)} &= - \int_{-h}^h (\exp(\gamma_{1p2}x_3) + \delta_{p2} \exp(\gamma_{2p2}x_3)) \sin \varsigma_n x_3 dx_3, \\ \vartheta_{ns}^{(u)} &= -a_0 \int_{-h}^h (\exp(\gamma_{1m0}x_3) + \delta_{m0} \exp(\gamma_{2m0}x_3)) \sin \varsigma_n x_3 dx_3; \\ \Delta_{pnc1}^{(u)} &= \int_{-h}^h (\exp(\gamma_{1p1}x_3) + \delta_{p1} \exp(\gamma_{2p1}x_3)) \cos \varsigma_n x_3 dx_3, \\ \Delta_{pnc2}^{(u)} &= - \int_{-h}^h (\exp(\gamma_{1p2}x_3) + \delta_{p2} \exp(\gamma_{2p2}x_3)) \cos \varsigma_n x_3 dx_3, \\ \vartheta_{nc}^{(u)} &= -a_0 \int_{-h}^h (\exp(\gamma_{1m0}x_3) + \delta_{m0} \exp(\gamma_{2m0}x_3)) \cos \varsigma_n x_3 dx_3; \\ \Delta_{pns1}^{(\sigma)} &= -ik_{1p}c_{066}^{(1)} \int_{-h}^h \exp(\lambda_1 x_3) (\exp(\gamma_{1p1}x_3) + \delta_{p1} \exp(\gamma_{2p1}x_3)) \sin \varsigma_n x_3 dx_3, \\ \Delta_{pns2}^{(\sigma)} &= -ik_{2p}c_{066}^{(2)} \int_{-h}^h \exp(\lambda_2 x_3) (\exp(\gamma_{1p2}x_3) + \delta_{p2} \exp(\gamma_{2p2}x_3)) \sin \varsigma_n x_3 dx_3, \\ \vartheta_{ns}^{(\sigma)} &= -a_0 ik_{1m0}c_{066}^{(1)} \int_{-h}^h \exp(\lambda_1 x_3) (\exp(\gamma_{1m0}x_3) + \delta_{m0} \exp(\gamma_{2m0}x_3)) \sin \varsigma_n x_3 dx_3; \\ \Delta_{pnc1}^{(\sigma)} &= -ik_{1p}c_{066}^{(1)} \int_{-h}^h \exp(\lambda_1 x_3) (\exp(\gamma_{1p1}x_3) + \delta_{p1} \exp(\gamma_{2p1}x_3)) \cos \varsigma_n x_3 dx_3, \\ \Delta_{pnc2}^{(\sigma)} &= -ik_{2p}c_{066}^{(2)} \int_{-h}^h \exp(\lambda_2 x_3) (\exp(\gamma_{1p2}x_3) + \delta_{p2} \exp(\gamma_{2p2}x_3)) \cos \varsigma_n x_3 dx_3, \\ \vartheta_{nc}^{(\sigma)} &= -a_0 ik_{1m0}c_{066}^{(1)} \int_{-h}^h \exp(\lambda_1 x_3) (\exp(\gamma_{1m0}x_3) + \delta_{m0} \exp(\gamma_{2m0}x_3)) \cos \varsigma_n x_3 dx_3. \end{aligned}$$

При численных исследованиях система уравнений (19) подлежит редукции до порядков, обеспечивающих установленную точность удовлетворения граничным условиям (10), (11).

4. Алгоритмическая реализация решения и результаты численных исследований. Разработанная и компьютерно реализованная методика исследования рассматриваемой задачи применена к случаю падения нормальной сдвиговой волны на границу идеального механического контакта полуслоя V_1 из функционально-градиентного материала, для которого постоянные $c_{0pq}^{(1)}$, ρ_{01} имеют значения $c_{011}^{(1)} = 16.6 \cdot c_*$, $c_{012}^{(1)} = 7.66 \cdot c_*$, $c_{013}^{(1)} = 7.75 \cdot c_*$, $c_{033}^{(1)} = 16.2 \cdot c_*$, $c_{044}^{(1)} = 4.29 \cdot c_*$, $\rho_{01} = 5.5 \cdot \rho_*$, $c_* = 10^{10}$ [Па], $\rho_* = 10^3$ [кг/м³], характерные для керамики титаната бария, и полуслоя V_2 из функционально-градиентного материала с постоянными $c_{0pq}^{(2)}$, ρ_{02} , значения которых $c_{011}^{(2)} = 12.1 \cdot c_*$, $c_{012}^{(2)} = 4.81 \cdot c_*$, $c_{013}^{(2)} = 4.42 \cdot c_*$, $c_{033}^{(2)} = 5.13 \cdot c_*$, $c_{044}^{(2)} = 1.85 \cdot c_*$, $\rho_{01} = 8.64 \cdot \rho_*$, свойственны монокристаллическому кадмию [12]. Компоненты V_j имеют варьируемые значения параметров неоднородности λ_j .

В расчетах рассматривался случай падающей нормальной волны из моды $m = 1$ в слое материала компоненты V_1 с частотой $\omega = 2\pi f$, $f = 730$ Гц. На контактной поверхности $\Gamma : \{x_1 = 0, x_3 \in [-h, h]\}$ для различных сочетаний параметров λ_1 и λ_2 исследовались распределения показателей относительных амплитуд отраженной от Γ в V_1 нормальной волны $u^{(refl)}(x_3) = \left| \frac{u_2^{(1)}(0, x_3, t)/u_{2m}^{(*)}(0, x_3, t)}{u_2^{(2)}(0, x_3, t)/u_{2m}^{(*)}(0, x_3, t)} \right|$ и преломленной в V_2 нормальной волны $u^{(refr)}(x_3) = \left| \frac{u_2^{(1)}(0, x_3, t)/u_{2m}^{(*)}(0, x_3, t)}{u_2^{(2)}(0, x_3, t)/u_{2m}^{(*)}(0, x_3, t)} \right|$ по толщинной координате $x_3 \in [-h, h]$.

На рисунках 1–6 представлены анализируемые распределения для случаев задания значения $\lambda_1 = 0.6$ для параметра неоднородности материала V_1 и варьирования значений λ_2 . Кривые «1» на рисунках описывают распределения $u^{(refl)}(x_3)$, а кривые «2» –распределения $u^{(refr)}(x_3)$. Некоторые распределения аналогичного типа для $\lambda_1 = 0.9$ приведены на рисунках 8–10.

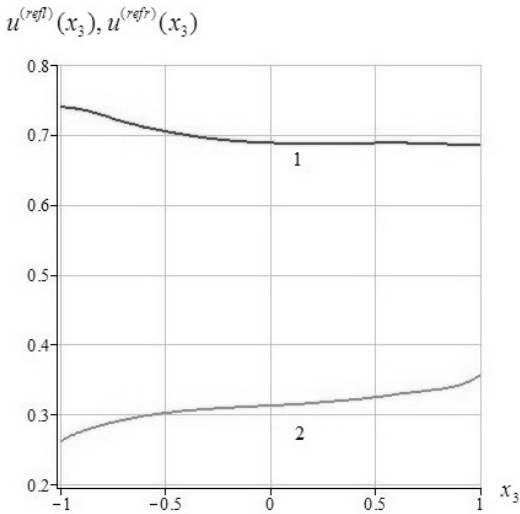


Рис. 1. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = -0.6$.

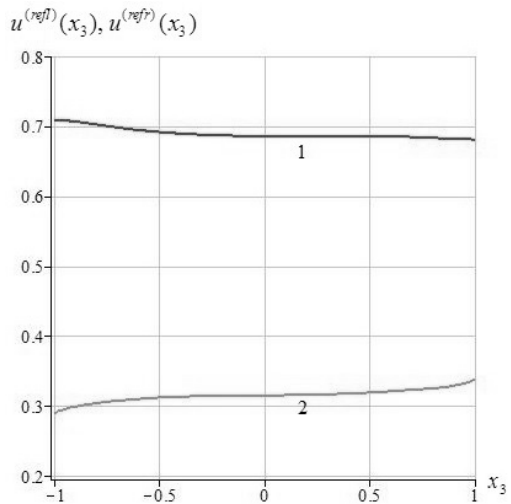


Рис. 2. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = -0.1$.

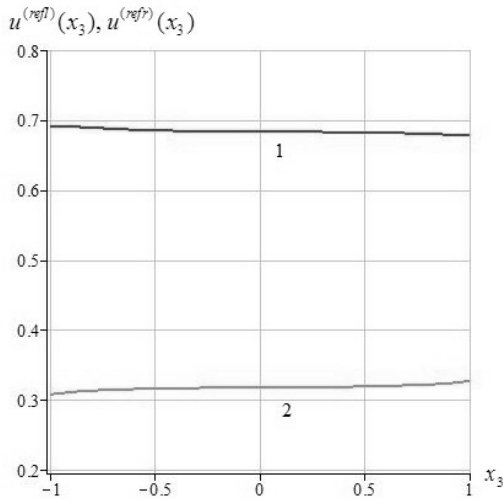


Рис. 3. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = 0.3$.

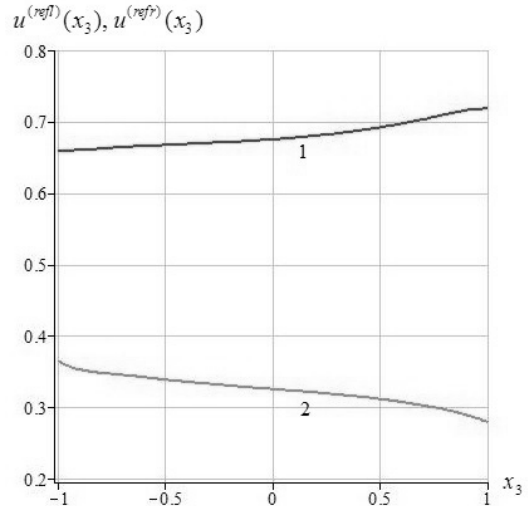


Рис. 4. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = 1.5$.

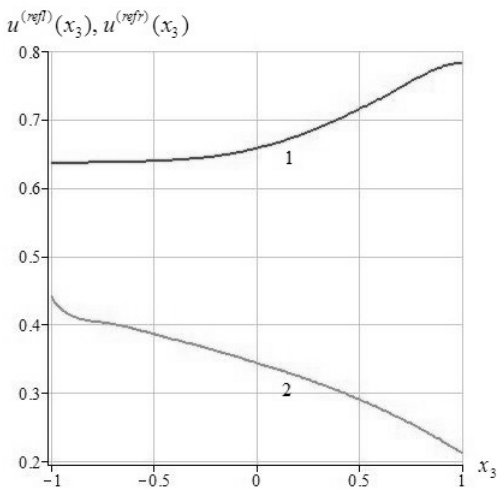


Рис. 5. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = 2.5$.

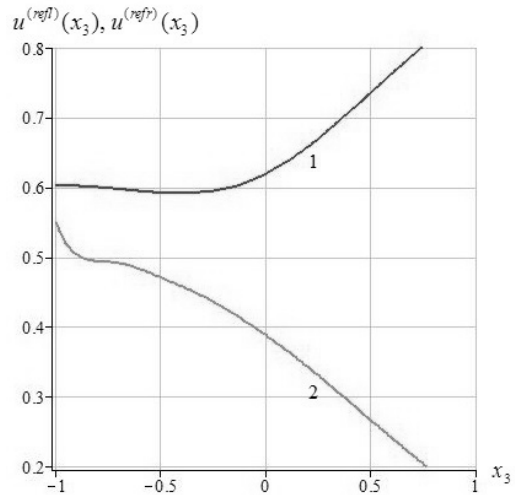


Рис. 6. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = 3.5$.

Анализ результатов, представленных на рисунках 1–3, указывает на количественное доминирование эффектов отражения нормальных волн и относительно невысокую степень неравномерности распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при доминировании абсолютного значения λ_1 над абсолютной величиной λ_2 . Рисунки 4–6 описывают изменение тенденции в распределениях $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ в случае положительных значений λ_2 , превышающих λ_1 , а также сближение показателей $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ у нижней грани слоя. Наконец, на рисунке 7 представлен эффект формирования различных соотношений между величинами $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ у противоположных граней слоя при наращивании

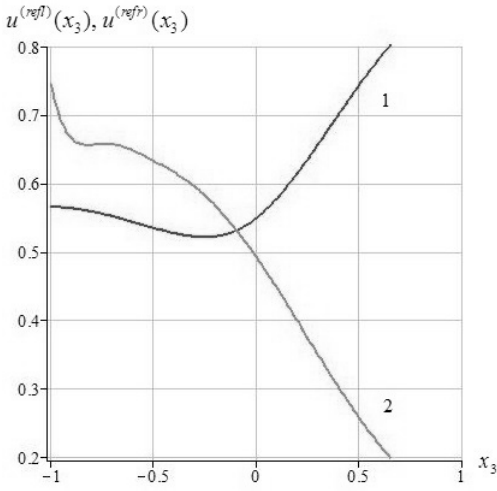


Рис. 7. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = 4.5$.

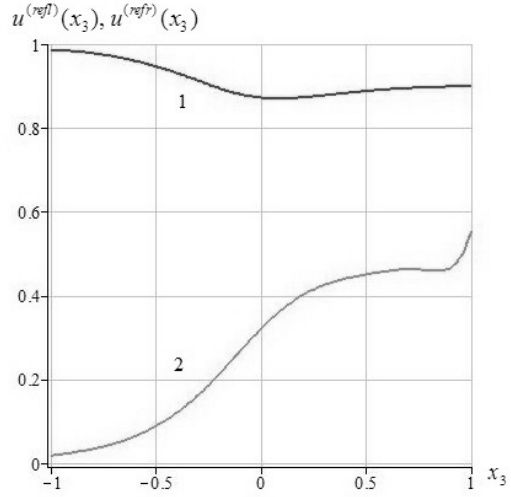


Рис. 8. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = 0.9$, $\lambda_2 = -5.3$.

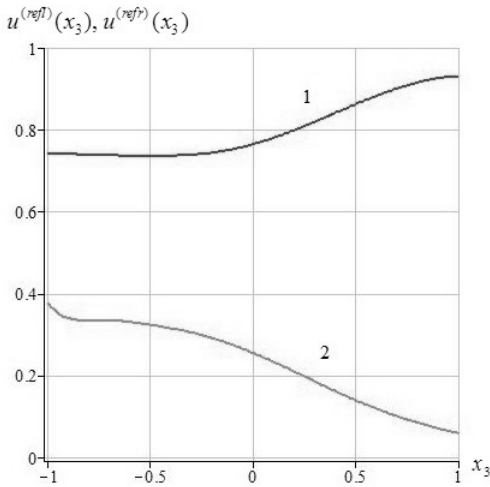


Рис. 9. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = 0.9$, $\lambda_2 = 4.6$.

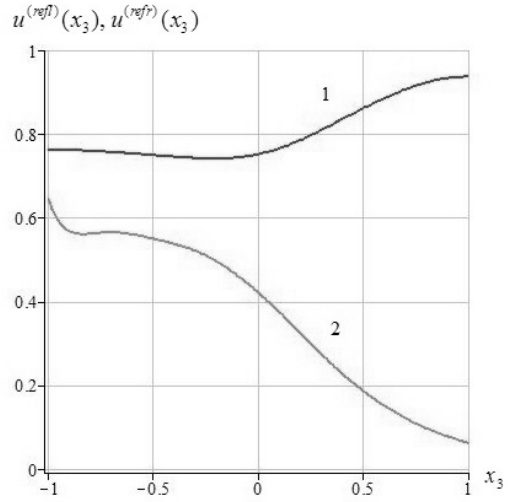


Рис. 10. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = 0.9$, $\lambda_2 = 5.3$.

положительного значения λ_2 . Изменение тенденций в распределениях $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при изменении знака и абсолютной величины λ_2 при постоянном показателе λ_1 иллюстрируют и рисунки 8–10.

Наконец, на рисунках 11–13 представлены результаты расчетов для случая фиксации отрицательного показателя $\lambda_2 = -0.6$ для компоненты волновода V_2 и варьирования величины λ_1 от относительно небольших по модулю положительных значений до $\lambda_1 = -0.8$. Расчеты указывают на сохранение ситуации с доминированием $u^{(refl)}(x_3)$ и на сглаживание зависимостей $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при наращивании в рассматриваемых пределах модуля λ_1 .

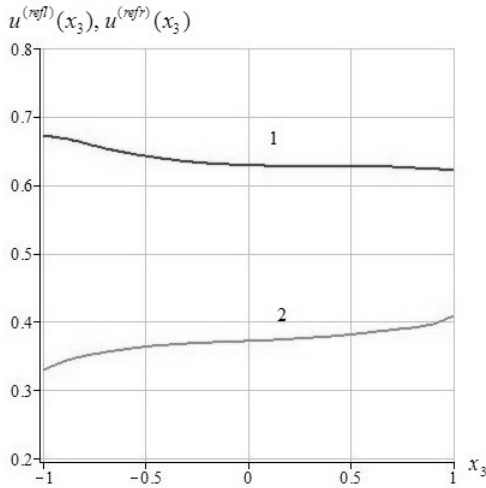


Рис. 11. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = 0.3$, $\lambda_2 = -0.6$.

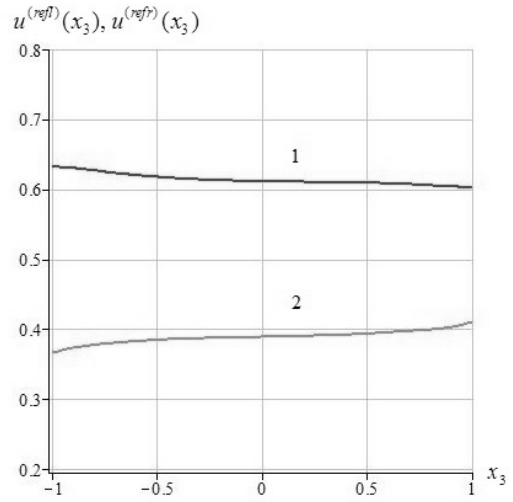


Рис. 12. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = -0.1$, $\lambda_2 = -0.6$.

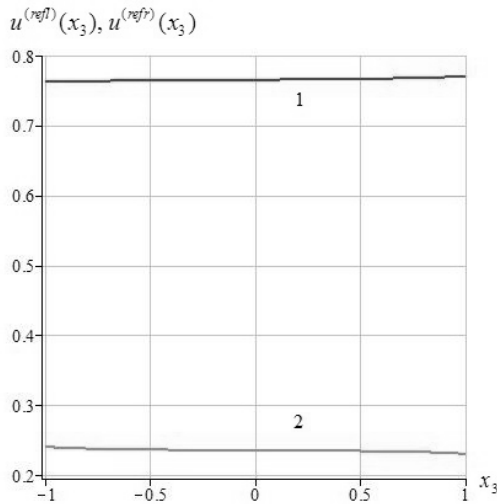


Рис.13. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = -0.8$, $\lambda_2 = -0.6$.

Выводы. Результатом представленных в работе исследований является разработка численно-аналитической методики решения задачи о трансформации стационарной нормальной сдвиговой волны в составном плоскопараллельном волноводе при ее падении на торцевую поверхность контакта компонентов волновода в виде закрепленных по плоским граням полуслоев из трансверсально-изотропных функционально-градиентных материалов с экспоненциальным типом непрерывной неоднородности по толщине. Используется концепция представления волновых полей в компонентах волновода разложениями в ряды по базисным множествам бегущих и краевых стоячих базисных нормальных волн

с неопределенными весовыми коэффициентами. На основе приема алгебраизации функциональных граничных условий идеального механического контакта полуслоев задача сведена к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений по нормальным волнам. Представлены результаты численного анализа отдельных эффектов в распределениях относительной интенсивности отраженной и преломленной составляющих волнового поля при падении на контактную поверхность нормальной волны из низшей моды нормальных сдвиговых волн в соответствующем полуслое, связанных с варьированием показателями непрерывной экспоненциальной неоднородности материалов контактирующих слоев.

1. Гетман И.П. Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух полуполос / И.П. Гетман, О.Н. Лисицкий // Прикл. математика и механика. – 1988. – Т. 52. № 6. – С. 1044–1048
2. Гетман И.П. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов / И.П. Гетман, Ю.А. Устинов. – Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ. – 1993. – 144 с.
3. Городецкая Н.С. Дифракция волн Рэлея-Лемба на вертикальной границе в составном упругом волноводе / Н.С. Городецкая // Акуст. вист.– 2000.– 3, №1.– С.23–35.
4. Гринченко В.Т. Отражение волн Лемба от границы раздела в составном волноводе / В. Т. Гринченко, Н. С. Городецкая // Прикл. механика.– 1985.– Т. 21. №5.– С.121–125.
5. Cavalcante M. Parametric formulation of the finite-volume theory for functionally graded materials–part i: Analysis / M. Cavalcante, S. Marques, M.–J. Pindera // Journal of Applied Mechanics – Transactions of the ASME. – 2007. – V. 74 (5). – P. 935–945.
6. Functionally graded materials: design, processing and applications / Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, V.H. Rabin, A. Kawasaki, R.G. Ford (Eds.). – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 434 p.
7. Gasik M. FGM components: PM meets the challenge / M. Gasik, N. Cherradi, A. Kawasaki // Metal Powder Report. – 1996. – V. 51. – P. 28–32.
8. Weng G.J. Effective bulk moduli of two functionally graded composites / G.J. Weng // Acta Mechanica. – 2003. –V. 166. – P. 57–67.
9. Пачева М.Н. Сдвиговые волны в составном поперечно-анизотропном волноводе из полуслоев с контактирующими полуцилиндрическими боковыми поверхностями / М.Н. Пачева, В.И. Сторожев // Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты–2018: матер. VII Междунар. научн.-практ. интернет-конф. (25 мая 2018 г.). – Донецк: ГО ВПО «ДонНУЭТ», 2018. – С. 46–49.
10. Пачева М.Н. Эффекты прохождения сдвиговых нормальных волн по составному волноводу из контактирующих трансверсально-изотропных функционально-градиентных полуслоев./ М.Н. Пачева, В.И. Сторожев // Донецкие чтения 2019: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы IV Международной научной конференции (Донецк, 31 октября 2019 г.). – Том 1: Физико-математические и технические науки. Часть 1. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2019. – С. 68–71.
11. Пачева М.Н. Энергетические характеристики нормальных волн сдвига в составном волноводе из изотропного и ортотропного полуслоев / М.Н. Пачева // Донецкие чтения 2020. Образование, наука и вызовы современности: материалы V Международной научной конференции (Донецк, 17 – 18 ноября 2020 г.) – Т. 1: Физико-математические и технические науки. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2020. – С. 90–93.
12. Космодамианский А.С. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред / А.С. Космодамианский, В.И. Сторожев. – К.: Наук. думка. – 1985. – 176 с.

M.N. Pacheva

Normal elastic shear waves transformation upon incidence on the contact surface of transversely isotropic functionally graded half-layers .

A numerical-analytical technique for solving the problem of normal shear horizontally polarized elastic wave transformation upon incidence on the contact surface of transversely isotropic functional-gradient half-layers is presented. The wave fields of the reflected and transmitted waves are represented as expansions in the basis sets of traveling and edge standing waves in the corresponding components of the composite waveguide. Based on the algebraization technique of functional boundary conditions, the problem is reduced to a system of linear algebraic equations for the coefficients of expansions in normal waves. The results of a numerical analysis of the effects associated with varying the continuous exponential inhomogeneity indices of the materials of the contacting layers are presented.

Keywords: *composite plane-parallel waveguide, fixed edges, contacting anisotropic functionally graded half-layers, exponential thickness inhomogeneity, normal shear waves, transformation upon falling on the contact surface, effects of the inhomogeneity indices influence. .*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк

Получено 10.06.2021

Donetsk National University, Donetsk

marinapacheva@mail.ru

УДК 539.3

©2021. Е.С. Глушанков

ТЕРМОЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ МНОГОСВЯЗНОЙ ПЬЕЗОПЛАСТИНКИ В УСЛОВИЯХ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ДЕЙСТВИИ ЛИНЕЙНОГО ПОТОКА ТЕПЛА

В данной работе приведено решение задачи о действии линейного потока тепла в бесконечной многосвязной пластинке из пьезоматериала, когда на ее контурах имеет место конвективный теплообмен с внешней средой. Решение было получено с применением конформных отображений, комплексных потенциалов и метода наименьших квадратов. С помощью численных исследований выявлено и изучено влияние геометрических характеристик пластинки, свойств ее материала, а также коэффициента теплообмена на термоэлектромагнитоупругое состояние пластинки.

Ключевые слова: линейный поток тепла, многосвязная пластинка, конвективный теплообмен, температурные напряжения, комплексные потенциалы.

Введение. Широкое применение в современной науке и технике находят конструкции, где в качестве элементов используются тонкие пластинки из пьезоматериалов [1]. Эти пластинки могут иметь концентраторы напряжений типа отверстий или трещин. При эксплуатации пластинки могут подвергаться действию температурных полей, что может приводить к возникновению высоких концентраций напряжений [2, 3]. К настоящему времени решено большое количество задач о влиянии температурных воздействий на напряженно-деформированное и термоэлектромагнитоупругое состояние пластинок [4–7].

В данной работе приведено решение задачи термоэлектромагнитоупругости о действии линейного потока тепла в пластинке из пьезоматериала, когда на контурах пластинки имеет место конвективный теплообмен с внешней средой. Для случая бесконечной пластинки с одним эллиптическим отверстием дано точное аналитическое решение задачи. Для общего случая многосвязности задача решена с использованием метода наименьших квадратов. Проведены численные исследования термоэлектромагнитоупругого состояния (ТЭМУС) пластинки с одним или двумя эллиптическими отверстиями. Показано влияние геометрических характеристик пластинки, свойств ее материала и коэффициента теплообмена на распределение напряжений в пластинке.

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную многосвязную пластинку из пьезоматериала, занимающую область S , ограниченную контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с центрами в точках $O_l(x_{0l}, y_{0l})$, полуосями a_l, b_l , углами поворота φ_l (рис. 1). Контур L_l могут располагаться произвольно относительно друг друга, в том числе, касаться, пересекаться, переходить в прямолинейные разрезы. Через контуры пластинки имеет место конвективный теплообмен с коэффициентом h_l с внешней средой температуры \mathfrak{T} . Контур не

подкреплены либо жестко подкреплены. На бесконечности под углом α к оси Ox действует линейный тепловой поток плотности q , а напряжения и индукции электромагнитного поля равны нулю.

Несвязанную задачу термоэлектромагнитоупругости для пьезопластинки будем решать с использованием комплексных потенциалов. Задача сводится к последовательному определению сперва комплексного потенциала теплопроводности $F_5(z_5)$, а затем комплексных потенциалов термоэлектромагнитоупругости $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) из соответствующих граничных условий. После этого значения основных характеристик ТЭМУС (температура T , плотности теплового потока q_x, q_y , напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, индукции D_x, D_y, B_x, B_y и напряженности E_x, E_y, H_x, H_y электромагнитного поля, перемещения u, v , потенциалы электромагнитного поля φ, ψ) в любой точке пластинки определяются по формулам [6, 7]

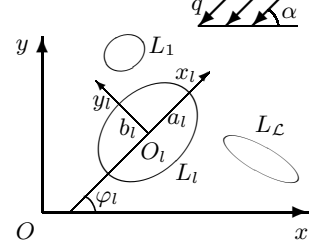


Рис. 1

$$T = T^* + 2 \operatorname{Re} F_5(z_5); \quad (1)$$

$$(q_x, q_y) = (q_x^*, q_y^*) + 2 \operatorname{Re} i \varkappa_T (\mu_5, -1) F_5'(z_5); \quad (2)$$

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi_k'(z_k); \quad (3)$$

$$(D_x, D_y, B_x, B_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\nu_k \mu_k, -\nu_k, \rho_k \mu_k, -\rho_k) \Phi_k'(z_k); \quad (4)$$

$$(E_x, E_y, H_x, H_y) = (E_x^*, E_y^*, H_x^*, H_y^*) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi_k'(z_k); \quad (5)$$

$$(u, v, \varphi, \psi) = (u^*, v^*, \varphi^*, \psi^*) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k). \quad (6)$$

Здесь

$$T^* = q(t_x x + t_y y),$$

$$t_x = \frac{k_{22} \cos \alpha - k_{12} \sin \alpha}{\varkappa_T^2}, \quad t_y = \frac{k_{11} \sin \alpha - k_{12} \cos \alpha}{\varkappa_T^2},$$

$$\varkappa_T = \sqrt{k_{11} k_{22} - k_{12}^2};$$

$$q_x^* = -q \cos \alpha, \quad q_y^* = -q \sin \alpha;$$

μ_5 — корень характеристического уравнения задачи теплопроводности [6, 7]

$$k_{22} \mu^2 + 2k_{12} \mu + k_{11} = 0; \quad (7)$$

μ_k ($k = \overline{1, 4}$) — корни характеристического уравнения задачи термоэлектромагнитоупругости [6, 7]

$$\Delta(\mu) = 0; \quad (8)$$

$$\Delta(\mu) = l_{4s}(\mu)[l_{2\beta}(\mu)l_{2\chi}(\mu) - l_{2\nu}^2(\mu)] - l_{3g}(\mu)[l_{3g}(\mu)l_{2\chi}(\mu) - l_{3p}(\mu)l_{2\nu}(\mu)] - l_{3p}(\mu)[l_{3p}(\mu)l_{2\beta}(\mu) - l_{3g}(\mu)l_{2\nu}(\mu)],$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11}\mu^4 + 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 + 2s_{26}\mu + s_{22},$$

$$l_{3g}(\mu) = g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu + g_{22},$$

$$l_{3p}(\mu) = p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu + p_{22},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22},$$

$$l_{2\nu}(\mu) = -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22};$$

$$\nu_k = \frac{l_{3p}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \nu_5 = \frac{r_\chi}{r_5},$$

$$\rho_k = \frac{l_{3g}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3p}(\mu_k)l_{2\beta}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \rho_5 = \frac{r_\omega}{r_5};$$

$$r_5 = \frac{l_5(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\chi = \frac{l_\chi(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\omega = \frac{l_\omega(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)},$$

$$l_5(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{1t}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{1m}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix}, \quad l_\chi(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\omega(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) \end{vmatrix};$$

$$l_{2\alpha}(\mu_5) = -\alpha_1\mu_5^2 + \alpha_6\mu_5 - \alpha_2,$$

$$l_{1t}(\mu_5) = t_1\mu_5 - t_2,$$

$$l_{1m}(\mu_5) = m_1\mu_5 - m_2;$$

$$p_k = s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} - (g_{11}\mu_k - g_{12})\nu_k - (p_{11}\mu_k - p_{12})\rho_k + \frac{\delta_k^5 \alpha_1}{r_5},$$

$$q_k = s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} - (g_{21}\mu_k - g_{22})\nu_k - (p_{21}\mu_k - p_{22})\rho_k + \frac{\delta_k^5 \alpha_2}{r_5\mu_5},$$

$$r_k^0 = g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})\nu_k - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\rho_k + \frac{\delta_k^5 t_1}{r_5},$$

$$h_k^0 = p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\nu_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k + \frac{\delta_k^5 m_1}{r_5};$$

$$\begin{aligned}
 (E_x^*, E_y^*, H_x^*, H_y^*) &= (t_1, t_2, m_1, m_2)T^*; \\
 u^* &= \frac{\alpha_1 q t_x}{2} x^2 - \frac{(\alpha_2 t_x - \alpha_6 t_y) q}{2} y^2 + \alpha_1 q t_y x y, \\
 v^* &= \frac{\alpha_2 q t_y}{2} y^2 - \frac{(\alpha_1 t_y - \alpha_6 t_x) q}{2} x^2 + \alpha_2 q t_x x y, \\
 \varphi^* &= -\frac{t_1 q t_x}{2} x^2 - \frac{t_2 q t_y}{2} y^2 - t_1 q t_x x y, \\
 \psi^* &= -\frac{m_1 q t_x}{2} x^2 - \frac{m_2 q t_y}{2} y^2 - m_1 q t_x x y, \\
 \Phi_5(z_5) &= r_5 \int F_5(z_5) dz_5;
 \end{aligned}$$

k_{ij} — коэффициенты теплопроводности материала пластинки; s_{ij} — коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей и температуре; g_{ij} и p_{ij} — пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформаций и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях, индукциях и температуре; β_{ij} , ν_{ij} и χ_{ij} — коэффициенты диэлектрической, электромагнитной и магнитной проницаемости, измеренные при постоянных напряжениях и температуре; α_i — коэффициенты теплового расширения, измеренные при постоянной индукции электромагнитного поля; t_i и m_i — пирозлектрические и пиромагнитные модули, измеренные при постоянных напряжениях; δ_j^i — символ Кронекера.

Комплексные потенциалы $F_5(z_5)$, $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) определены в многосвязных областях S_5 , S_k , получаемых из области S аффинными преобразованиями [6, 7]

$$z_5 = x + \mu_5 y, \quad (9)$$

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (10)$$

Эти функции в общем случае многосвязности имеют вид [6, 7]

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l} w_{5l}(z_5) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5); \quad (11)$$

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k). \quad (12)$$

Здесь c_5 — вещественная постоянная, определяемая из условий на контурах пластинки; $D_{5l} = -q_l/4\pi z_T$; q_l — суммарный тепловой поток через контур L_l в область S ; $w_{5l}(z_5) = \ln(z_5 - z_{5l})$; z_{5l} — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (9) произвольным точкам внутри контуров L_l ; c_{5ln} — комплексные

постоянные, определяемые из условий на контурах пластинки; $\varphi_{5ln}(z_5) = \zeta_{5l}^{-n}$; ζ_{5l} — комплексные переменные, определяемые из конформных отображений;

$$N_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl});$$

Γ_k, A_{kl}, B_{kl} — постоянные, определяемые из систем уравнений

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, \nu_k, \mu_k \nu_k, \rho_k, \mu_k \rho_k) \Gamma_k = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \quad (13)$$

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i A_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \quad (14)$$

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i B_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \quad (15)$$

$\Gamma_5 = r_5 c_5$; $A_{5l} = r_5 D_{5l}$; $B_{5l} = r_5 (b_{5l} - D_{5l} z_{5l})$; b_{5l} — вычет функции $F_5(z_5)$ в точке z_{5l} ; $w_{kl} = \ln(z_k - z_{kl})$; z_{kl} — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (10) произвольным точкам внутри контуров L_l ; $\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}$; ζ_{kl} — комплексные переменные, определяемые из конформных отображений.

В локальных системах координат $O_l x_l y_l$ параметрические уравнения эллипсов (рис. 1) имеют вид [6, 7]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе Oxy координат —

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l.$$

Здесь θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) — параметр уравнения эллипса, заданного в параметрической форме.

Комплексные переменные ζ_{5l}, ζ_{kl} определяются из конформных отображений внешностей единичных кругов $|\zeta_{5l}| \geq 1, |\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{5l}, L_{kl} , получаемых из L_l аффинными преобразованиями (9), (10) [6, 7]:

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}. \end{aligned}$$

Функция $F_5(z_5)$ должна удовлетворять граничному условию [6, 7]

$$2 \operatorname{Re} (h_l F_5(\tau_5) + i \mathcal{K}_T \delta_{5,s}(\tau_5) F_5'(\tau_5)) = q_n^* - h_l (T^* - \mathfrak{T}), \quad (17)$$

где

$$q_n^* = q_x^* \cos(nx) + q_y^* \cos(ny);$$

$\delta_{5,s}(\tau_5) = d\tau_5/ds$, s — дуга контура отверстия.

Функции $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) должны удовлетворять граничным условиям задачи термоэлектромагнитоупругости, которые удобнее использовать в дифференциальной форме [6, 7]:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) \delta_{k,s}(\tau_k) \Phi_k'(\tau_k) = \left(\frac{df_{l1}}{ds}, \frac{df_{l2}}{ds}, \frac{df_{l3}}{ds}, \frac{df_{l4}}{ds} \right), \quad (18)$$

где $\delta_{k,s}(\tau_k) = d\tau_k/ds$; для неподкрепленных контуров L_l

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (1, \mu_k, \nu_k, \rho_k),$$

$$(f_{l1}, f_{l2}, f_{l3}, f_{l4}) = (c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}),$$

а для жестко подкрепленных контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (p_k, q_k, \nu_k, \rho_k),$$

$$(f_{l1}, f_{l2}, f_{l3}, f_{l4}) = (-u^*, -v^*, c_{l3}, c_{l4}).$$

2. Решение задачи для бесконечной пластины

с эллиптическим отверстием.

Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат бесконечную пластинку с эллиптическим отверстием, контур которого обозначим через L_1 , его полуоси — a_1, b_1 , угол поворота — φ_1 (рис. 2). Центр эллипса совпадает с центром координат. На бесконечности действует линейный поток тепла плотности q под углом α к оси Ox . Через контур имеет место конвективный теплообмен с внешней средой температуры \mathfrak{T} с коэффициентом теплообмена h_1 . На бесконечности отсутствуют силовые и электромагнитные воздействия. Контур отверстия неподкреплен или жестко подкреплен, электромагнитные воздействия на нем отсутствуют.

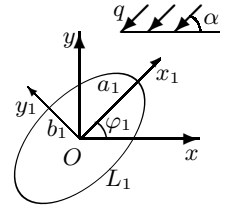


Рис. 2

Задача теплопроводности. Функция (11) в этом случае принимает вид

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{51n}}{\zeta_{51}^n}. \quad (19)$$

Подставляя функцию (19) в граничное условие (17) и применяя метод рядов, получим, что $c_{51n} = 0$ ($n = 2, 3, \dots$), а для c_5 и c_{511} получаются следующие выражения:

$$c_5 = \mathfrak{T}/2,$$

$$c_{511} = \frac{q}{2(h_1 + \varkappa_T)} \left[a_1 (i \sin(\alpha - \varphi_1) - h_1(t_x \cos \varphi_1 + t_y \sin \varphi_1)) + \right. \\ \left. + ib_1 (i \cos(\alpha - \varphi_1) + h_1(t_y \cos \varphi_1 - t_x \sin \varphi_1)) \right].$$

Таким образом, комплексный потенциал теплопроводности (19) имеет вид

$$F_5(z_5) = c_5 + \frac{c_{511}}{\zeta_{51}}. \quad (20)$$

Функция $F_5(z_5)$ становится известной, и тогда можно в любой точке пластинки находить температуру и плотности потока тепла по формулам (1), (2).

Задача термоэлектромагнитоупругости. Для функции $\Phi_5(z_5)$ получим

$$\Phi_5(z_5) = r_5 \int F_5(z_5) dz_5 = \Gamma_5 z_5 + B_{51} \ln \zeta_{51} + \frac{a_{512}}{\zeta_{51}^2},$$

где $\Gamma_5 = r_5 c_5$, $B_{51} = r_5 c_{511} R_{51}$, $a_{512} = r_5 c_{511} R_{51} m_{51} / 2$. На этом основании для комплексных потенциалов термоэлектромагнитоупругости $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) получим

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + B_{k1} \ln \zeta_{k1} + \frac{a_{k12}}{\zeta_{k1}^2}. \quad (21)$$

Постоянные Γ_k , B_{k1} определяются из решений систем (13), (15). Подставляя функции (21) в граничные условия (18) и применяя метод рядов, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных a_{k12} :

$$\sum_{k=1}^4 (d_{k11}, d_{k12}, d_{k13}, d_{k14}) a_{k12} = (E_1, E_2, E_3, E_4),$$

где $E_p = -d_{51p} a_{512} - e_p$ ($p = \overline{1, 4}$); в случае неподкрепленного контура отверстия

$$e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = 0,$$

а в случае жестко подкрепленного контура отверстия

$$e_1 = \frac{q}{8} ((\alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 b_1^2)(t_x \cos \varphi_1 + t_y \sin \varphi_1) - \\ - (\alpha_6 b_1^2 - 2\alpha_1 a_1 b_1 i)(t_y \cos \varphi_1 - t_x \sin \varphi_1)), \\ e_2 = \frac{q}{8} ((\alpha_6 b_1^2 + 2\alpha_2 a_1 b_1 i)(t_x \cos \varphi_1 + t_y \sin \varphi_1) - \\ - (\alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 b_1^2)(t_y \cos \varphi_1 - t_x \sin \varphi_1)), \\ e_3 = \frac{q}{8} (t_1(a_1^2 + 2a_1 b_1 i)(t_x \cos \varphi_1 + t_y \sin \varphi_1) - \\ - t_2 b_1^2(t_y \cos \varphi_1 - t_x \sin \varphi_1)), \\ e_4 = \frac{q}{8} (m_1(a_1^2 + 2a_1 b_1 i)(t_x \cos \varphi_1 + t_y \sin \varphi_1) - \\ - m_2 b_1^2(t_y \cos \varphi_1 - t_x \sin \varphi_1)).$$

После решения этой системы уравнений становятся известными постоянные a_{k12} , а следовательно, и функции $\Phi_k(z_k)$, и тогда можно в любой точке пластинки находить значения основных характеристик ТЭМУС по формулам (3)–(6).

3. Решение задачи для бесконечной многосвязной пластинки. В общем случае многосвязной области (рис. 1) неизвестные постоянные c_5 , D_{5l} , c_{5ln} , a_{kln} , входящие в функции (11) и (12), определяются из граничных условий (17) и (18) с использованием метода наименьших квадратов. Для этого на контурах L_i ($i = \overline{1, \mathcal{L}}$) выберем систему точек $M_{im}(x_{im}, y_{im})$ ($m = \overline{1, M_i}$), в которых следует удовлетворять граничным условиям задач теплопроводности и термоэлектромагнитоупругости.

Задача теплопроводности. При подстановке функции (11) в граничное условие (17), для определения неизвестных постоянных c_5 , D_{5l} , c_{5ln} получается система линейных алгебраических уравнений [8]

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} h_l c_5 + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (h_i w_{5l}(\tau_{5im}) + i \varkappa_T \delta_{5,s}(\tau_{5im}) w'_{5l}(\tau_{5im})) D_{5l} + \\ & + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (h_l \varphi_{5ln}(\tau_{5im}) + i \varkappa_T \delta_{5,s}(\tau_{5im}) \varphi'_{5ln}(\tau_{5im})) c_{5ln} = \\ & = q_n^*(\tau_{im}) - h_l (T^*(\tau_{im}) - \mathfrak{T}) \quad (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, M_i}), \end{aligned} \quad (22)$$

где $\tau_{5im} = x_{im} + \mu_5 y_{im}$, $\tau_{im} = \tau_{im}(x_{im}, y_{im})$. После решения этой системы с использованием метода сингулярных разложений [9] постоянные c_5 , D_{5l} , c_{5ln} , а следовательно, и комплексный потенциал теплопроводности (11) будут известны. По известной функции (11) можно в любой точке пластинки найти температуру и плотности потока тепла с использованием формул (1), (2) [6, 7].

Задача термоэлектромагнитоупругости. При подстановке функций (11) и (12) в граничные условия (18) для определения неизвестных постоянных a_{kln} получается следующая система линейных алгебраических уравнений [8]:

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) \varphi'_{kln}(\tau_{kim}) a_{kln} = \\ & = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) N'_k(\tau_{kim}) - \\ & - 2 \operatorname{Re} d_{5ip} \delta_{5,s}(\tau_{5im}) r_5 F_5(\tau_{5im}) + \frac{df_{ip}}{ds}(\tau_{im}) \\ & (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, M_i}, p = \overline{1, 4}), \end{aligned} \quad (23)$$

где $\tau_{kim} = x_{im} + \mu_k y_{im}$. После решения этой системы с использованием метода сингулярных разложений [9] постоянные a_{kln} , а следовательно, комплексные потенциалы термоэлектромагнитоупругости (12) будут известны. По известным функциям (12) можно в любой точке пластинки найти значения основных характеристик ТЭМУС с использованием формул (3)–(6) [6, 7].

4. Численные исследования. При проведении численных расчетов количество членов в рядах Лорана в функциях (11), (12) и количество точек M_{im} на контурах L_i , для которых составлялись системы линейных алгебраических уравнений (22) и (23), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (относительная погрешность не становилась менее сотых долей процента). Для этого, как показали исследования, в решаемых задачах, в зависимости от геометрических и упругих характеристик пластинок необходимо было в указанных рядах оставлять от 30 до 40 членов, на каждом из контуров брать от 200 до 400 «коллокационных точек».

Были проведены численные исследования для пластинки из таких материалов [6]: 1) композит $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ (материал М1); 2) композит на основе $CdSe$ и $BaTiO_3$ (материал М2); 3) композит на основе $PZT - 4$ и $CoFe_2O_4$ (материал М3). Физические постоянные этих материалов приведены в таблице 1.

Таблица 1. Постоянные материала

Величина	Значение			Величина	Значение		
	М1	М2	М3		М1	М2	М3
s_{11}/s_0	7,165	22,260	10,745	β_{22}/β_0	0,137	10,612	0,090
s_{22}/s_0	6,797	14,984	7,398	ν_{11}/ν_0	-0,190	213,404	-14,931
s_{66}/s_0	19,912	47,481	7,637	ν_{22}/ν_0	-0,185	-5,534	-3,740
s_{12}/s_0	-2,337	-6,437	-2,542	χ_{11}/χ_0	0,336	0,590	0,805
g_{16}/g_0	2,028	109,220	2,054	χ_{22}/χ_0	0,119	0,575	0,704
g_{21}/g_0	-0,496	-4,333	-1,159	α_1/α_0	8,530	-3,031	-1,578
g_{22}/g_0	1,157	8,016	2,458	α_2/α_0	1,990	-0,608	-0,326
p_{16}/p_0	1,850	268,318	98,843	t_2/t_0	133,000	-40,853	2,405
p_{21}/p_0	0,576	17,778	12,102	m_2/m_0	133,000	0,394	0,207
p_{22}/p_0	1,186	31,206	22,268	k_{11}/k_0	2,500	9,000	1,200
β_{11}/β_0	0,156	19,612	0,106	k_{22}/k_0	2,500	9,000	1,500

При этом приняты обозначения: $s_0 = 10^{-6}$ МПа $^{-1}$, $g_0 = 10^{-2}$ МКл $^{-1} \cdot$ м 2 , $p_0 = 10^{-5}$ МТл $^{-1}$, $\beta_0 = 10^3$ МН \cdot м $^2 \cdot$ МКл $^{-2}$, $\nu_0 = 10^{-1}$ МКл $^{-1} \cdot$ м \cdot МА, $\chi_0 = 10^{-1}$ МПа \cdot МТл $^{-1}$, $\alpha_0 = 10^{-6}$ К $^{-1}$, $t_0 = 10^{-3}$ МН \cdot (МКл \cdot К) $^{-1}$, $m_0 = 10^{-3}$ МА \cdot (м \cdot К) $^{-1}$, $k_0 = 1$ Вт \cdot (м \cdot К) $^{-1}$.

В таблице 2 представлены результаты расчетов для пластинки с одним круговым отверстием радиуса a ($a_1 = b_1 = a$) (рис. 3, а), через неподкрепленный контур которого имеет место конвективный теплообмен с коэффициентом h ($h_1 = h$) с внешней средой температуры $\mathfrak{T} = 0$. В пластинке действует линейный поток тепла плотности q под углом $\alpha = \pi/2$ рад.. Приведены значения напряжений σ_s в точках контура отверстия на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от значения ha .

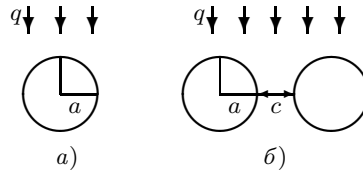


Рис. 3

В таблице 3 для пластинки из материала М1 с двумя круговыми отверстиями радиуса a ($a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a$), расстояние между которыми равно c

(рис. 3, б), когда через их неподкрепленные контуры имеет место конвективный теплообмен с коэффициентом h ($h_1 = h_2 = h$) с внешней средой температуры $\mathfrak{T} = 0$, приведены значения напряжений σ_s в точках контура левого отверстия, в зависимости от значения ha .

Выводы. Из полученных данных следует, что коэффициент теплообмена h оказывает очень существенное влияние на значения напряжений в окрестности контуров отверстий. При $ha < 0,01$ контур отверстия можно считать теплоизолированным, а при $ha > 100$ можно полагать, что на контуре задана температура, равная температуре внешней среды.

При сближении отверстий значения напряжений в зоне между отверстиями

Таблица 2. Значения напряжений σ_s в точках контура отверстия

Тип задачи	θ , рад.	Значения ha								
		0	0,01	0,1	0,5	1	2	10	100	∞
Материал М1										
ТЭМУ	$\pi/12$	0,188	0,187	0,174	0,125	0,081	0,021	-0,113	-0,179	-0,188
	$\pi/6$	0,357	0,354	0,329	0,238	0,153	0,040	-0,214	-0,339	-0,357
	$\pi/4$	0,448	0,445	0,414	0,299	0,192	0,050	-0,269	-0,427	-0,448
	$\pi/3$	0,330	0,328	0,305	0,220	0,142	0,037	-0,198	-0,314	-0,330
	$5\pi/12$	-0,120	-0,119	-0,110	-0,080	-0,051	-0,013	0,072	0,114	0,120
	$\pi/2$	-0,476	-0,472	-0,440	-0,317	-0,204	-0,053	0,286	0,453	0,476
ТУ	$\pi/12$	-0,036	-0,036	-0,034	-0,024	-0,016	-0,004	0,022	0,035	0,036
	$\pi/6$	-0,102	-0,101	-0,094	-0,068	-0,044	-0,011	0,061	0,097	0,102
	$\pi/4$	-0,204	-0,202	-0,188	-0,136	-0,087	-0,023	0,122	0,194	0,204
	$\pi/3$	-0,327	-0,324	-0,302	-0,218	-0,140	-0,036	0,196	0,311	0,327
	$5\pi/12$	-0,433	-0,430	-0,400	-0,289	-0,186	-0,048	0,260	0,412	0,433
	$\pi/2$	-0,476	-0,472	-0,440	-0,317	-0,204	-0,053	0,286	0,453	0,476
Материал М2										
ТЭМУ	$\pi/12$	0,005	0,005	0,005	0,004	0,004	0,003	0,000	-0,004	-0,005
	$\pi/6$	0,009	0,009	0,009	0,008	0,007	0,006	0,000	-0,007	-0,009
	$\pi/4$	0,011	0,011	0,011	0,010	0,009	0,007	-0,001	-0,009	-0,011
	$\pi/3$	0,013	0,013	0,013	0,011	0,010	0,008	-0,001	-0,011	-0,013
	$5\pi/12$	0,014	0,014	0,014	0,013	0,011	0,009	-0,001	-0,012	-0,014
	$\pi/2$	0,015	0,015	0,015	0,013	0,012	0,009	-0,001	-0,012	-0,015
ТУ	$\pi/12$	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,000	-0,001	-0,001
	$\pi/6$	0,004	0,004	0,004	0,004	0,003	0,003	0,000	-0,003	-0,004
	$\pi/4$	0,008	0,008	0,008	0,007	0,006	0,005	0,000	-0,007	-0,008
	$\pi/3$	0,012	0,012	0,011	0,010	0,009	0,007	-0,001	-0,010	-0,012
	$5\pi/12$	0,014	0,014	0,014	0,013	0,011	0,009	-0,001	-0,012	-0,014
	$\pi/2$	0,015	0,015	0,015	0,013	0,012	0,009	-0,001	-0,012	-0,015
Материал М3										
ТЭМУ	$\pi/12$	0,033	0,032	0,029	0,016	0,006	-0,004	-0,022	-0,029	-0,029
	$\pi/6$	0,081	0,080	0,070	0,039	0,015	-0,011	-0,054	-0,070	-0,073
	$\pi/4$	0,123	0,121	0,107	0,060	0,023	-0,016	-0,082	-0,107	-0,110
	$\pi/3$	0,129	0,127	0,112	0,063	0,025	-0,017	-0,087	-0,112	-0,116
	$5\pi/12$	0,113	0,111	0,098	0,055	0,022	-0,015	-0,076	-0,098	-0,101
	$\pi/2$	0,101	0,100	0,088	0,049	0,019	-0,014	-0,068	-0,088	-0,091
ТУ	$\pi/12$	0,015	0,015	0,013	0,008	0,003	-0,002	-0,010	-0,013	-0,014
	$\pi/6$	0,051	0,050	0,044	0,025	0,010	-0,007	-0,034	-0,044	-0,046
	$\pi/4$	0,101	0,099	0,087	0,049	0,019	-0,013	-0,067	-0,087	-0,090
	$\pi/3$	0,116	0,114	0,100	0,056	0,022	-0,015	-0,077	-0,100	-0,103
	$5\pi/12$	0,109	0,107	0,094	0,053	0,021	-0,015	-0,073	-0,095	-0,097
	$\pi/2$	0,105	0,103	0,091	0,051	0,020	-0,014	-0,070	-0,091	-0,094

интенсивно уменьшаются, а вне этой зоны — возрастают. Особенно выражено это проявляется при $ha < 0,01$ или $ha > 100$. При этом, концентрация напряжений в случае $ha < 0,01$ оказывается выше, чем в случае $ha > 100$. А если расстояние между отверстиями $c/a > 10$, то влияние одного отверстия на ТЭМУС около другого отверстия становится незначительным и им можно пренебречь.

Наибольшая концентрация напряжений наблюдается в пластинке из материала М1, обладающего среди приводимых материалов наибольшей жесткостью (наименьшими значениями коэффициентов деформации), а также наибольшими значениями коэффициентов теплового расширения, пирозлектрических и пиро-

Таблица 3. Значения напряжений σ_s в точках контура левого отверстия

Тип задачи	c/a	θ , рад.	Значения ha							
			0	0,01	0,1	1	10	100	∞	
ТЭМУ	0,1	$\pi/12$	0,035	0,034	0,030	0,009	-0,003	-0,001	0,000	
		$\pi/4$	-0,046	-0,045	-0,036	0,000	-0,035	-0,074	-0,080	
		$\pi/2$	-0,937	-0,926	-0,836	-0,324	0,354	0,533	0,557	
		$3\pi/4$	0,808	0,799	0,723	0,284	-0,322	-0,490	-0,512	
		$11\pi/12$	0,295	0,292	0,265	0,106	-0,124	-0,191	-0,200	
	1	$\pi/12$	0,201	0,199	0,183	0,078	-0,087	-0,123	-0,127	
		$\pi/4$	0,171	0,169	0,156	0,069	-0,090	-0,142	-0,149	
		$\pi/2$	-0,713	-0,706	-0,651	-0,284	0,354	0,544	0,569	
		$3\pi/4$	0,619	0,613	0,566	0,248	-0,314	-0,484	-0,507	
		$11\pi/12$	0,234	0,232	0,214	0,094	-0,121	-0,188	-0,197	
	10	$\pi/12$	0,209	0,208	0,193	0,089	-0,124	-0,196	-0,206	
		$\pi/4$	0,428	0,425	0,395	0,183	-0,254	-0,402	-0,422	
		$\pi/2$	-0,506	-0,502	-0,466	-0,216	0,300	0,475	0,499	
		$3\pi/4$	0,467	0,464	0,431	0,199	-0,277	-0,439	-0,461	
		$11\pi/12$	0,185	0,184	0,171	0,079	-0,110	-0,174	-0,183	
	∞	$\pi/12$	0,188	0,187	0,174	0,081	-0,113	-0,179	-0,188	
		$\pi/4$	0,448	0,445	0,414	0,192	-0,269	-0,427	-0,448	
		$\pi/2$	-0,476	-0,472	-0,440	-0,204	0,286	0,453	0,476	
		$3\pi/4$	0,448	0,445	0,414	0,192	-0,269	-0,427	-0,448	
		$11\pi/12$	0,188	0,187	0,174	0,081	-0,113	-0,179	-0,188	
	ТУ	0,1	$\pi/12$	0,012	0,011	0,010	0,003	-0,001	0,000	0,000
			$\pi/4$	-0,047	-0,047	-0,041	-0,013	0,006	0,004	0,004
			$\pi/2$	-0,859	-0,849	-0,767	-0,298	0,327	0,492	0,514
			$3\pi/4$	-0,500	-0,494	-0,446	-0,173	0,189	0,284	0,297
$11\pi/12$			-0,143	-0,142	-0,128	-0,048	0,050	0,074	0,077	
1		$\pi/12$	0,089	0,088	0,081	0,035	-0,041	-0,060	-0,062	
		$\pi/4$	-0,054	-0,053	-0,049	-0,021	0,025	0,037	0,039	
		$\pi/2$	-0,661	-0,655	-0,604	-0,264	0,329	0,505	0,528	
		$3\pi/4$	-0,388	-0,384	-0,354	-0,155	0,193	0,295	0,309	
		$11\pi/12$	-0,108	-0,107	-0,098	-0,043	0,052	0,079	0,082	
10		$\pi/12$	0,002	0,002	0,002	0,001	-0,001	-0,002	-0,002	
		$\pi/4$	-0,141	-0,140	-0,130	-0,060	0,084	0,132	0,139	
		$\pi/2$	-0,494	-0,490	-0,455	-0,211	0,293	0,463	0,487	
		$3\pi/4$	-0,263	-0,261	-0,243	-0,112	0,156	0,247	0,259	
		$11\pi/12$	-0,064	-0,064	-0,059	-0,027	0,038	0,060	0,063	
∞		$\pi/12$	-0,036	-0,036	-0,034	-0,016	0,022	0,035	0,036	
		$\pi/4$	-0,204	-0,204	-0,188	-0,087	0,122	0,194	0,204	
		$\pi/2$	-0,476	-0,472	-0,440	-0,204	0,286	0,453	0,476	
		$3\pi/4$	-0,204	-0,202	-0,188	-0,087	0,122	0,194	0,204	
		$11\pi/12$	-0,036	-0,036	-0,034	-0,016	0,022	0,035	0,036	

магнитных модулей.

Пренебрежение электромагнитными свойствами материала пластины приводит к значительному искажению значений напряжений, поэтому при расчетах следует учитывать эти свойства. Особенно сильное искажение наблюдается для пластины из материала М1, имеющего наибольшие пирозлектрические и пиромангнитные модули.

1. Желудев И.С. Физика кристаллических диэлектриков / И.С. Желудев. – М.: Наука, 1968. – 463 с.
2. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред / Ж. Можен. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
3. Партон В.З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
4. Подстригач Я.С. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно // К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
5. Космодамианский А.С. Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров // К.–Донецк: Вища шк. 1983. – 160 с.
6. Калоеров С.А. Плоская задача термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, О.А. Сорочан // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 4. – С. 81–91.
7. Калоеров С.А., Глушанков Е.С. Действие линейного потока тепла в пьезопластинках с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестник Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 1. – С. 15–26.
8. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в многосвязной пьезопластинке, находящейся в условиях конвективного теплообмена / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Донецкие чтения 2018: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Матер. III междунар. науч. конф., Донецк, 25 октября 2018 г. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2018. – Т. 1. – С. 293–295.
9. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулдер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

E.S. Glushankov

The thermo-electro-magneto-elastic state of the infinite multiply connected piezoelectric plate in conditions of the convective heat transfer under linear heat flow action.

A solution is given for the problem of linear heat flux acting in the infinite multiply connected plate, when a convective heat transfer occurs on its contours. The solution was built with using the conformal mappings, the complex potentials and the least squares. The effect of plates's geometric characteristics, the properties of its material and the heat transfer coefficient on thermo-electro-magneto-elastic state of the plate was brought out and investigated with the numerical studies.

Keywords: *linear heat flux, multiply connected plate, convective heat transfer, thermal stresses, complex potentials.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк

Получено 27.08.2021

Donetsk National University, Donetsk

eugenij.glushankov@gmail.com

УДК 539.3:534.1

©2021. И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко, А.О. Иванив

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ УПРУГИЕ ВОЛНЫ В КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНЫХ И ФУНКЦИОНАЛЬНО- НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ КОЛЬЦЕВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

В рамках описания волновых движений полной системой уравнений линейной динамической теории упругости исследуются две пространственные модели волновода – кусочно-неоднородного, составленного из различающихся по геометрии и механическим свойствам изотропных протяженных полых цилиндров концентрического кольцевого поперечного сечения, а также функционально-неоднородного протяженного изотропного полого цилиндра концентрического кольцевого поперечного сечения с экспоненциально степенным законом радиальной неоднородности физико-механических характеристик. Базисные решения системы дифференциальных уравнений модели в первом случае представляются отдельно для каждого однородного слоя в классической замкнутой форме через функции Бесселя, а во втором – в аналитической матричной форме с представлениями в виде разложений радиальных составляющих решений в равномерно и абсолютно сходящиеся матричные степенные ряды по обобщенной кольцевой координате. На основе результатов численных экспериментов для случая свободных граничных поверхностей волновода реализован сопоставительный анализ полученных в рамках рассмотренных моделей топологических картин дисперсионных спектров бегущих нормальных продольно-сдвиговых волн, а также кинематических характеристик указанных волн из второй и третьей мод спектров при различных значениях параметра количества слоев. Приведены качественные оценки и выводы количественного анализа полученных численных результатов.

Ключевые слова: однослойный функционально-градиентный полый цилиндр, многослойный составной кусочно-неоднородный полый цилиндр, изотропные материалы, осесимметричные нормальные волны, базисные решения волновых уравнений, дисперсионные соотношения.

Введение. При решении задач о распространении нормальных упругих волн вдоль протяженных изотропных, трансверсально-изотропных и цилиндрически ортотропных цилиндров кольцевого поперечного сечения вопрос сводится к построению общего решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений волнового деформирования в цилиндрических координатах, являющихся уравнениями с переменными коэффициентами. В классическом случае однородного изотропного либо трансверсально-изотропного материала волновода эти уравнения разрешимы через цилиндрические функции, что становится невозможным как для однородного цилиндрически ортотропного материала, так и при переходе к рассмотрению нового поколения радиально-неоднородных функционально-градиентных материалов. Одним из подходов, обеспечивающим возможность построения указанных решений, является, с одной стороны, привлечение аппарата рядов по обобщенной кольцевой координате [1], а с другой – задание специального вида экспоненциально-степенного функционального закона радиальной неоднородности физико-механических характеристик материала

волновода [2–4]. Такой подход обеспечил построение общих аналитических решений и исследование эффектов влияния фактора радиальной неоднородности на кинематические характеристики, топологические свойства дисперсионных спектров, фазовые и групповые скорости бегущих нормальных волн для различных моделей цилиндрических волноводов концентрического кольцевого и секторно-кольцевого поперечного сечения из изотропных, трансверсально-изотропных и цилиндрически ортотропных материалов. В данном исследовании с использованием аналитических общих решений разрешающих уравнений соответствующих математических моделей ставится и решается задача проведения сопоставительного численного анализа характеристик волновых процессов при распространении осесимметричных нормальных упругих волн в кусочно-однородных составных протяженных цилиндрах кольцевого поперечного сечения из различных изотропных материалов и в функционально-неоднородных цилиндрах кольцевого поперечного сечения с экспоненциально степенным законом радиальной неоднородности физико-механических свойств изотропного материала.

1. Постановка задачи. Рассматриваются две модели протяженного полого цилиндрического волновода. Модель А (рис. 1) – структурированный многослойный протяженный цилиндр, составленный из однородных отличающихся по физико-механическим свойствам изотропных цилиндров концентрического кольцевого сечения с внутренними радиусами R_{j-1} и внешними радиусами R_j ($R_{j-1} < R_j$) ($j = \overline{1, n}$), между которыми имеется идеальный механический контакт. Модель Б (рис. 2) – функционально неоднородный в радиальных направлениях изотропный цилиндр с поперечным сечением в форме концентрического кругового кольца с внутренним и внешним радиусами R_0 и R_n . На указанных рисунках представлены поперечные сечения волноводов для случая $n = 4$.

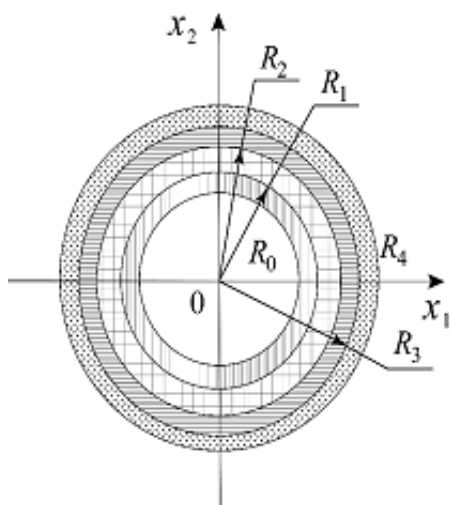


Рис. 1.

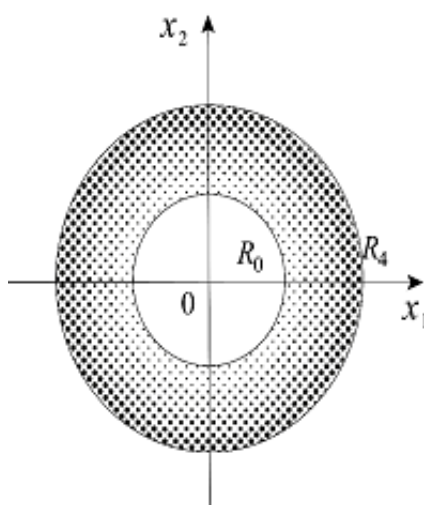


Рис. 2.

Вводится нормирующий параметр R_* , на который накладываются следующие

ограничения

$$R_0 \leq R_* \leq R_n, R_n/2 < R_*. \quad (1)$$

Вводятся также безразмерные параметры

$$r_j = R_j/R_* \quad (j = \overline{0, n}), \quad h = \max \{1 - r_0, r_n - 1\} \quad (0 < h < 1). \quad (2)$$

В нормированной параметром R_* безразмерной цилиндрической системе координат $Or\theta z$ в случае модели А волновод занимает область

$$V^{(0)} = \bigcup_{j=1}^n V^{(j)},$$

$$V^{(j)} = \{r \in [r_{j-1}, r_j]; \theta \in [-\pi, \pi]; z \in (-\infty, \infty)\} \quad (j = \overline{1, n}).$$

Поверхности Γ_j раздела двух смежных областей $V^{(j)}$ и $V^{(j+1)}$ ($j = \overline{1, n-1}$), а также внутренняя Γ_0 и внешняя Γ_n граничные поверхности волновода определяются так:

$$\Gamma_j = \{r = r_j; \theta \in [-\pi, \pi]; z \in (-\infty, \infty)\} \quad (j = \overline{0, n}).$$

Условия идеального механического контакта двух смежных областей $V^{(j)}$ и $V^{(j+1)}$ ($j = \overline{1, n-1}$) составного волновода для случая волн крутильного типа записываются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{(j)} \Big|_{(r, \theta, z) \in \Gamma_j} &= \sigma_{r\theta}^{(j+1)} \Big|_{(r, \theta, z) \in \Gamma_j}, \\ u_{\theta}^{(j)} \Big|_{(r, \theta, z) \in \Gamma_j} &= u_{\theta}^{(j+1)} \Big|_{(r, \theta, z) \in \Gamma_j} \end{aligned} \quad (3)$$

$$(j = \overline{1, n-1}),$$

а в случае продольно-сдвиговых волн имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rs}^{(j)} \Big|_{(r, \theta, z) \in \Gamma_j} &= \sigma_{rs}^{(j+1)} \Big|_{(r, \theta, z) \in \Gamma_j}, \\ u_s^{(j)} \Big|_{(r, \theta, z) \in \Gamma_j} &= u_s^{(j+1)} \Big|_{(r, \theta, z) \in \Gamma_j} \end{aligned} \quad (4)$$

$$(s = r, z), \quad (j = \overline{1, n-1}).$$

В случае модели Б волновод занимает область

$$V^{(0)} = \{r \in [r_0, r_n]; \theta \in [-\pi, \pi]; z \in (-\infty, \infty)\}.$$

При этом с учетом представлений (1), (2) справедливо соотношение

$$0 < 1 - h \leq r_0 < r_n \leq 1 + h < 2. \quad (5)$$

Полагается, что в случае модели А изотропные материалы в областях $V^{(j)}$ ($j = \overline{1, n}$) заданы постоянными для соответствующей области характеристиками: коэффициентом Пуассона $\nu^{(j)}$; отнесенным к нормирующему параметру C_* модулем сдвига $G^{(j)}$; отнесенным к нормирующему параметру ρ_* безразмерным параметром плотности материала $\rho^{(j)}$. Для модели Б функционально-неоднородный в радиальных направлениях изотропный материал волновода задается такими физико-механическими характеристиками:

$$\begin{aligned} \nu &= const, \quad \rho(r) = \tilde{\rho} \exp(f_{\lambda, q}(r)), \\ G(r) &= \tilde{G} \exp(f_{\lambda, q}(r)), \quad f_{\lambda, q}(r) = \lambda ((r-1)/h)^q. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\rho(r)$ и $G(r)$ – нормированные параметрами ρ_* и C_* соответственно плотность и модуль сдвига неоднородного материала; $\tilde{\rho}$ и \tilde{G} нормированные параметрами ρ_* и C_* соответственно плотность и модуль сдвига однородного материала. Параметры λ ($\lambda \in \mathbb{R}$) и q ($q \in \{0\} \cup \mathbb{N}$) в представлениях (6) характеризуют соответственно относительный максимальный уровень и форму локализации радиальной неоднородности материала в теле волновода.

Пространственная линейная математическая модель осесимметричного динамического напряженно-деформированного состояния упругих тел в системе координат $Or\theta z$, применительно к областям $V^{(j)}$ ($j = \overline{1, n}$) для модели А, а также к области $V^{(B)}$ для модели Б, включает:

– систему дифференциальных уравнений движения, которая в случае волн крутильного и продольно-сдвигового типа соответственно трансформируется к виду

$$(\partial_r + 2r^{-1}) \sigma_{r\theta} + \partial_z \sigma_{\theta z} - (\rho \rho_* R_*^2 / C_*) \partial_t^2 u_\theta = 0 \quad (7)$$

и

$$\begin{aligned} \partial_r \sigma_{rr} + \partial_z \sigma_{rz} + r^{-1} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) - (\rho \rho_* R_*^2 / C_*) \partial_t^2 u_r &= 0, \\ \partial_r \sigma_{rz} + \partial_z \sigma_{zz} + r^{-1} \sigma_{rz} - (\rho \rho_* R_*^2 / C_*) \partial_t^2 u_z &= 0; \end{aligned} \quad (8)$$

– соотношения линейного закона Гука, которые в случае волн крутильного и продольно-сдвигового типа соответственно принимают вид

$$\sigma_{\theta z} = G \varepsilon_{\theta z}, \quad \sigma_{r\theta} = G \varepsilon_{r\theta} \quad (9)$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= G (C_1 \varepsilon_{rr} + C_2 (\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz})), \\ \sigma_{\theta\theta} &= G (C_1 \varepsilon_{\theta\theta} + C_2 (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz})), \\ \sigma_{zz} &= G (C_1 \varepsilon_{zz} + C_2 (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta})), \quad \sigma_{rz} = G \varepsilon_{rz}; \end{aligned} \quad (10)$$

– уравнения связи между отличными от нуля компонентами тензора малых деформаций ε_{sp} и отнесенными к нормирующему параметру R_* отличными от

нуля безразмерными компонентами u_s вектора упругих волновых перемещений, которые в случае волн крутильного и продольно-сдвигового типа соответственно принимают вид

$$\varepsilon_{\theta z} = \partial_z u_\theta, \quad \varepsilon_{r\theta} = (\partial_r - r^{-1}) u_\theta \quad (11)$$

и

$$\varepsilon_{rr} = \partial_r u_r, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = r^{-1} u_r, \quad \varepsilon_{zz} = \partial_z u_z, \quad \varepsilon_{rz} = \partial_z u_r + \partial_r u_z. \quad (12)$$

В соотношениях (7)–(12) $C_1 = 2(1 - \nu)/(1 - 2\nu)$, $C_2 = 2\nu/(1 - 2\nu)$; σ_{sp} – отнесенные к нормирующему параметру C_* отличные от нуля безразмерные компоненты тензора напряжений; t – время; $\partial_s = \partial/\partial s$ ($s = r, z, t$).

Представленные математические модели А и Б включают также однородные граничные условия одновременно свободных либо жестко закрепленных внутренней $\Gamma^{(0)}$ и внешней $\Gamma^{(n)}$ граничных поверхностей волновода ($\Gamma = \Gamma^{(0)} \cup \Gamma^{(n)}$), которые в случае волн крутильного и продольно-сдвигового типа соответственно принимают вид

$$\sigma_{r\theta}|_{(r, \theta, z) \in \Gamma} = 0 \quad (13)$$

либо

$$u_\theta|_{(r, \theta, z) \in \Gamma} = 0, \quad (14)$$

и

$$\sigma_{rs}|_{(r, \theta, z) \in \Gamma} = 0 \quad (s = r, z) \quad (15)$$

либо

$$u_s|_{(r, \theta, z) \in \Gamma} = 0 \quad (s = r, z). \quad (16)$$

2. Базисные решения и дисперсионные соотношения для модели

А. Общие решения уравнений модели для отличных от тождественного нуля нормированных компонент вектора перемещений и тензора напряжений в областях волновода $V^{(j)}$ ($j = \overline{1, n}$) при рассмотрении распространяющихся вдоль оси Oz нормальных упругих волн с круговой частотой ω и отнесенным к нормирующему параметру R_* волновым числом k , могут быть представлены через цилиндрические функции Бесселя $J_\tau(\zeta)$ и $Y_\tau(\zeta)$ [5].

В случае крутильных волн для общих решений уравнений (7), (9), (11) в областях волновода $V^{(j)}$ ($j = \overline{1, n}$) вводятся представления

$$u_\theta^{(TW,j)}(r, z, t) = \exp(-i\omega t + ikz) \tilde{u}_\theta^{(TW,j)}(r),$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\theta z}^{(TW,j)}(r, z, t) \\ \sigma_{r\theta}^{(TW,j)}(r, z, t) \end{bmatrix} = \exp(-i\omega t + ikz) \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{\theta z}^{(TW,j)}(r) \\ \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(TW,j)}(r) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\theta^{(TW,j)}(r) &= \left[\tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B,j)}(r) \mathbf{B}^{(TW,j)} \right]_{1,1}, \\ \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{\theta z}^{(TW,j)}(r) \\ \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(TW,j)}(r) \end{bmatrix} &= \tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B,j)}(r) \mathbf{B}^{(TW,j)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B,j)}(r)$ и $\tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B,j)}(r)$ – искомые матричные базисные решения следующего вида

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B,j)}(r) &= \mathbf{P}_U^{(TW,j)} \mathbf{Y}^{(0)} \left(\kappa_2^{(j)} r \right), \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B,j)}(r) &= \mathbf{P}_S^{(TW,j)}(r) \mathbf{Y}^{(0)} \left(\kappa_2^{(j)} r \right);\end{aligned}\tag{19}$$

$\mathbf{B}^{(TW,j)} = \begin{bmatrix} b_1^{(j)} & b_2^{(j)} \end{bmatrix}^T$ – произвольные вектор-столбцы второго порядка. В соотношениях (19)

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_U^{(TW,j)} &= \begin{bmatrix} 0 & \kappa_2^{(j)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_S^{(TW,j)}(r) = G^{(j)} \kappa_2^{(j)} \begin{bmatrix} 0 & k \\ \kappa_2^{(j)} & -2r^{-1} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Y}^{(\tau)}(\zeta) &= \begin{bmatrix} J_\tau(\zeta) & Y_\tau(\zeta) \\ J_{\tau+1}(\zeta) & Y_{\tau+1}(\zeta) \end{bmatrix}, \quad \left(\kappa_2^{(j)} \right)^2 = \frac{\rho^{(j)}}{G^{(j)}} \Omega^2 - k^2,\end{aligned}$$

где $\Omega^2 = \rho_* \omega^2 R_*^2 / C_*$ – нормализованная частота.

В случае продольно-сдвиговых волн при получении общих решений уравнений (8), (10), (12) для отличных от тождественного нуля нормированных компонент вектора перемещений и тензора напряжений в областях волновода $V^{(j)}$ ($j = \overline{1, n}$) вводятся представления

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} u_r^{(LSW,j)}(r, z, t) \\ u_z^{(LSW,j)}(r, z, t) \end{bmatrix} &= \exp(-i\omega t + ikz) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_r^{(LSW,j)}(r) \\ \tilde{u}_z^{(LSW,j)}(r) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \sigma_{rr}^{(LSW,j)}(r, z, t) \\ \sigma_{\theta\theta}^{(LSW,j)}(r, z, t) \\ \sigma_{zz}^{(LSW,j)}(r, z, t) \\ \sigma_{rz}^{(LSW,j)}(r, z, t) \end{bmatrix} &= \exp(-i\omega t + ikz) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{rr}^{(LSW,j)}(r) \\ \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(LSW,j)}(r) \\ \tilde{\sigma}_{zz}^{(LSW,j)}(r) \\ \tilde{\sigma}_{rz}^{(LSW,j)}(r) \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{20}$$

где

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \tilde{u}_r^{(LSW,j)}(r) \\ \tilde{u}_z^{(LSW,j)}(r) \end{bmatrix} &= \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B,j)}(r) \mathbf{B}^{(LSW,j)}, \\ \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{rr}^{(LSW,j)}(r) \\ \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(LSW,j)}(r) \\ \tilde{\sigma}_{zz}^{(LSW,j)}(r) \\ \tilde{\sigma}_{rz}^{(LSW,j)}(r) \end{bmatrix} &= \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B,j)}(r) \mathbf{B}^{(LSW,j)}.\end{aligned}\tag{21}$$

Здесь $\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B,j)}(r)$ и $\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B,j)}(r)$ – искомые матричные базисные решения, полученные после введения потенциалов [6] в следующем виде

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B,j)}(r) &= \mathbf{P}_U^{(LSW,j)} \mathbf{Z}^{(LSW,j)}(r), \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B,j)}(r) &= \mathbf{P}_S^{(LSW,j)}(r) \mathbf{Z}^{(LSW,j)}(r);\end{aligned}\tag{22}$$

$\mathbf{B}^{(LSW,j)} = \begin{bmatrix} b_1^{(j)} & b_2^{(j)} & b_3^{(j)} & b_4^{(j)} \end{bmatrix}^T$ – произвольный вектор-столбец четвертого порядка. В соотношениях (22)

$$\mathbf{P}_U^{(LSW,j)} = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa_1^{(j)} & 0 & k \kappa_2^{(j)} \\ k & 0 & (\kappa_2^{(j)})^2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Z}^{(LSW,j)}(r) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^{(0)} \begin{pmatrix} \kappa_1^{(j)} \\ r \end{pmatrix} & \tilde{\mathbf{O}} \\ \tilde{\mathbf{O}} & \mathbf{Y}^{(0)} \begin{pmatrix} \kappa_2^{(j)} \\ r \end{pmatrix} \end{bmatrix},$$

где $\tilde{\mathbf{O}}$ – нулевая матрица размерности 2×2 ; $\mathbf{P}_S^{(LSW,j)}(r)$ – матрица размерности 4×4 , ненулевые элементы которой равны

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{P}_S^{(LSW,j)}(r) \right]_{11} &= -2 G^{(j)} \left(\nu^{(j)} k^2 + (1 - \nu^{(j)}) (\kappa_1^{(j)})^2 \right) (1 - 2\nu^{(j)})^{-1}, \\ \left[\mathbf{P}_S^{(LSW,j)}(r) \right]_{12} &= 2 G^{(j)} \kappa_1^{(j)} r^{-1}, \quad \left[\mathbf{P}_S^{(LSW,j)}(r) \right]_{13} = 2 G^{(j)} k (\kappa_2^{(j)})^2, \\ \left[\mathbf{P}_S^{(LSW,j)}(r) \right]_{14} &= -2 G^{(j)} k \kappa_2^{(j)} r^{-1}, \\ \left[\mathbf{P}_S^{(LSW,j)}(r) \right]_{21} &= -2 G^{(j)} \nu^{(j)} \left(k^2 + (\kappa_1^{(j)})^2 \right) (1 - 2\nu^{(j)})^{-1}, \\ \left[\mathbf{P}_S^{(LSW,j)}(r) \right]_{22} &= -2 G^{(j)} \kappa_1^{(j)} r^{-1}, \quad \left[\mathbf{P}_S^{(LSW,j)}(r) \right]_{24} = 2 G^{(j)} k \kappa_2^{(j)} r^{-1}, \\ \left[\mathbf{P}_S^{(LSW,j)}(r) \right]_{31} &= -2 G^{(j)} \left((1 - \nu^{(j)}) k^2 + \nu^{(j)} (\kappa_1^{(j)})^2 \right) (1 - 2\nu^{(j)})^{-1}, \\ \left[\mathbf{P}_S^{(LSW,j)}(r) \right]_{33} &= -2 G^{(j)} k (\kappa_2^{(j)})^2, \quad \left[\mathbf{P}_S^{(LSW,j)}(r) \right]_{42} = -2 G^{(j)} k \kappa_1^{(j)}, \\ \left[\mathbf{P}_S^{(LSW,j)}(r) \right]_{44} &= G^{(j)} \kappa_2^{(j)} \left(k^2 - (\kappa_2^{(j)})^2 \right). \end{aligned}$$

В приведенных соотношениях

$$\left(\kappa_1^{(j)} \right)^2 = \frac{\rho^{(j)}}{G^{(j)} C_1^{(j)}} \Omega^2 - k^2, \quad C_1^{(j)} = 2 \left(1 - \nu^{(j)} \right) / \left(1 - 2\nu^{(j)} \right).$$

Дисперсионные соотношения для рассматриваемой модели являются следствиями условий идеального механического контакта смежных областей $V^{(j)}$ и $V^{(j+1)}$ ($j = \overline{1, n-1}$), а также краевых условий на свободных либо жестко закрепленных внешних граничных поверхностях волновода. В случае волн крутильного типа это условия (3), (13) либо (3), (14), а в случае продольно-сдвиговых волн – условия (4), (15) либо (4), (16). С использованием представленных базисных решений для уравнений модели (19) и (22), указанные условия порождают

трансцендентное уравнение, определяющее дисперсионный спектр целевой задачи

$$\det(\mathbf{A}) = 0, \quad (23)$$

а также однородное матричное уравнение

$$\mathbf{A} \mathbf{B} = \hat{\mathbf{O}}. \quad (24)$$

В (24) \mathbf{B} – кортеж искомых векторных коэффициентов, соответственно фигурирующих в представлениях общих решений (17), (18) и (20), (21).

На примере составного четырехслойного волновода ($n = 4$) в уравнениях (23), (24) при рассмотрении волн крутильного типа кортеж векторных коэффициентов B размерности 8 получает вид

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}^{(TW,1)} \quad \mathbf{B}^{(TW,2)} \quad \mathbf{B}^{(TW,3)} \quad \mathbf{B}^{(TW,4)}]^T,$$

нулевой вектор-столбец $\hat{\mathbf{O}}$ имеет размерность 8, а матрица \mathbf{A} размерности 8×8 в случае свободной либо жестко закрепленной граничной поверхности может быть соответственно представлена в виде

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(TW,B,1)}(r_0) & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B,1)}(r_1) & -\tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B,2)}(r_1) & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(TW,B,1)}(r_1) & -\tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(TW,B,2)}(r_1) & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B,2)}(r_2) & -\tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B,3)}(r_2) & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(TW,B,2)}(r_2) & -\tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(TW,B,3)}(r_2) & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B,3)}(r_3) & -\tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B,4)}(r_3) \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(TW,B,3)}(r_3) & -\tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(TW,B,4)}(r_3) \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(TW,B,4)}(r_4) \end{bmatrix} \quad (25)$$

либо

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B,1)}(r_0) & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B,1)}(r_1) & -\tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B,2)}(r_1) & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(TW,B,1)}(r_1) & -\tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(TW,B,2)}(r_1) & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B,2)}(r_2) & -\tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B,3)}(r_2) & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(TW,B,2)}(r_2) & -\tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(TW,B,3)}(r_2) & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B,3)}(r_3) & -\tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B,4)}(r_3) \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(TW,B,3)}(r_3) & -\tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(TW,B,4)}(r_3) \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B,4)}(r_4) \end{bmatrix} \quad (26)$$

При рассмотрении продольно-сдвиговых волн векторный коэффициент \mathbf{B} размерности 16 получает вид

$$\mathbf{B} = \left[\mathbf{B}^{(LSW,1)} \quad \mathbf{B}^{(LSW,2)} \quad \mathbf{B}^{(LSW,3)} \quad \mathbf{B}^{(LSW,4)} \right]^T,$$

нулевой вектор-столбец $\hat{\mathbf{O}}$ имеет размерность 16, а матрица \mathbf{A} размерности 16×16 в соответствии с рассматриваемым типом граничных условий может быть представлена в виде

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(LSW,B,1)}(r_0) & \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{O}} \\ \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B,1)}(r_1) & -\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B,2)}(r_1) & \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{O}} \\ \tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(LSW,B,1)}(r_1) & -\tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(LSW,B,2)}(r_1) & \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{O}} \\ \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B,2)}(r_2) & -\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B,3)}(r_2) & \tilde{\mathbf{O}} \\ \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(LSW,B,2)}(r_2) & -\tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(LSW,B,3)}(r_2) & \tilde{\mathbf{O}} \\ \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B,3)}(r_3) & -\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B,4)}(r_3) \\ \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(LSW,B,3)}(r_3) & -\tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(LSW,B,4)}(r_3) \\ \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(LSW,B,4)}(r_4) \end{bmatrix}, \quad (27)$$

либо

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B,1)}(r_0) & \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{O}} \\ \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B,1)}(r_1) & -\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B,2)}(r_1) & \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{O}} \\ \tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(LSW,B,1)}(r_1) & -\tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(LSW,B,2)}(r_1) & \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{O}} \\ \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B,2)}(r_2) & -\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B,3)}(r_2) & \tilde{\mathbf{O}} \\ \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(LSW,B,2)}(r_2) & -\tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(LSW,B,3)}(r_2) & \tilde{\mathbf{O}} \\ \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B,3)}(r_3) & -\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B,4)}(r_3) \\ \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(LSW,B,3)}(r_3) & -\tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(LSW,B,4)}(r_3) \\ \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B,4)}(r_4) \end{bmatrix}. \quad (28)$$

В соотношениях (25) – (28) $\tilde{\mathbf{O}}$ – нулевая матрица размерности 2×4 ;

$$\tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(TW,B,j)}(r) = \left[\tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B,j)}(r) \right]_{2,(1..2)},$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{cyl}^{(LSW,B,j)}(r) = \left[\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B,j)}(r) \right]_{(1,4),(1..4)}$$

$$(j = \overline{1,4}).$$

3. Базисные решения и дисперсионные соотношения для модели Б.

В работе [2] после введения обобщенной кольцевой координаты [1]

$$x = (r - 1) / h, \quad x \in [x_0, x_n], \quad x_0 = (r_0 - 1) / h, \quad x_n = (r_n - 1) / h$$

общие решения уравнений (7), (9), (11) и уравнений (8), (10), (12) построены в виде матричных степенных рядов переменной x , абсолютно и равномерно сходящихся на отрезке $x \in [x', x'']$ ($[x_0, x_n] \subset [x', x'']$). Здесь x' и x'' – произвольно задаваемые параметры, удовлетворяющие ограничениям

$$-h^{-1} < x' < -1, \quad 1 < x'' < h^{-1}.$$

В случае волн крутильного типа указанные решения построены в следующем виде [2]:

$$\begin{aligned} u_{\theta}^{(TW)}(x, z, t) &= \exp(-\delta \lambda x^q - i\omega t + ikz) \tilde{u}_{\theta}^{(TW)}(x), \\ \begin{bmatrix} \sigma_{\theta z}^{(TW)}(x, z, t) \\ \sigma_{r\theta}^{(TW)}(x, z, t) \end{bmatrix} &= \exp((1-\delta)\lambda x^q - i\omega t + ikz) \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{\theta z}^{(TW)}(x) \\ \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(TW)}(x) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

$$(x \in [x', x'']),$$

где δ – произвольный параметр;

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\theta}^{(TW)}(x) &= \left[\tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(x) \mathbf{B}^{(TW)} \right]_{1,1}, \\ \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{\theta z}^{(TW)}(x) \\ \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(TW)}(x) \end{bmatrix} &= \tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(x) \mathbf{B}^{(TW)} \quad (x \in [x', x'']). \end{aligned} \quad (30)$$

В соотношениях (30) $\mathbf{B}^{(TW)} = [b_1 \ b_2]^T$ – произвольный вектор-столбец второго порядка; $\tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(x)$ и $\tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(x)$ – искомые матричные базисные решения следующего вида

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \begin{bmatrix} X_m^{(TW,1)} & X_m^{(TW,2)} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \mathbf{H}_m^{(TW)}(x) \begin{bmatrix} X_m^{(TW,1)} & X_m^{(TW,2)} \end{bmatrix} \quad (x \in [x', x'']), \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_m^{(TW)}(x) &= \begin{bmatrix} k \\ p_1(x) + p_2(x) \end{bmatrix}, \\ p_1(x) &= h^{-1}(m x^{-1} - \delta q \lambda x^{q-1}), \quad p_2(x) = (hx + 1)^{-1}. \end{aligned}$$

В представлениях (31) используются два набора скалярных коэффициентов $\left\{ X_m^{(TW,s)} \right\}_{m=0}^{\infty}$ ($s = \overline{1, 2}$), задаваемых явными скалярными рекуррентными соотношениями вида

$$\begin{aligned} X_m^{(TW,s)} &= 0 \quad (m < 0), \quad X_0^{(TW,1)} = 1, \quad X_1^{(TW,1)} = 0, \\ X_0^{(TW,2)} &= 0, \quad X_1^{(TW,2)} = 1, \end{aligned}$$

$$X_m^{(TW,s)} = \sum_{j=1}^4 A_{m,j}^{(TW)} X_{m-j}^{(TW,s)} + \sum_{j=0}^3 A_{m,5+j}^{(TW)} X_{m-q-j}^{(TW,s)} + \sum_{j=0}^2 A_{m,9+j}^{(TW)} X_{m-2q-j}^{(TW,s)}$$

$$(m = 2, 3, \dots), \quad (s = \overline{1, 2}),$$

где

$$A_{m,1}^{(TW)} = -h(2m - 3)/m,$$

$$A_{m,2}^{(TW)} = -h^2((m - 3)(m - 1) + \kappa_3^2)/(m(m - 1)),$$

$$A_{m,3}^{(TW)} = -2h^3\kappa_3^2/(m(m - 1)), \quad A_{m,4}^{(TW)} = -h^4\kappa_3^2/(m(m - 1)),$$

$$A_{m,5}^{(TW)} = \lambda q(q - m - \delta(1 + q - 2m))/(m(m - 1)),$$

$$A_{m,6}^{(TW)} = \lambda q h(3 + 2q - 2m - \delta(5 + 2q - 4m))/(m(m - 1)),$$

$$A_{m,7}^{(TW)} = \lambda q h^2(3 + q - m - \delta(4 + q - 2m))/(m(m - 1)),$$

$$A_{m,8}^{(TW)} = 0, \quad A_{m,9}^{(TW)} = -\lambda^2 q^2 \delta(\delta - 1)/(m(m - 1)),$$

$$A_{m,10}^{(TW)} = -2\lambda^2 q^2 h \delta(\delta - 1)/(m(m - 1)),$$

$$A_{m,11}^{(TW)} = -\lambda^2 q^2 h^2 \delta(\delta - 1)/(m(m - 1)) \quad (m = \overline{2, \infty}).$$

Здесь $\kappa_3^2 = \frac{\tilde{\rho}}{G} \Omega^2 - k^2$.

В случае продольно-сдвиговых волн общие решения уравнений (8), (10), (12) построены в виде [2]

$$\begin{bmatrix} u_r^{(LSW)}(x, z, t) \\ u_z^{(LSW)}(x, z, t) \end{bmatrix} = \exp(-\delta \lambda x^q - i\omega t + ikz) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_r^{(LSW)}(x) \\ \tilde{u}_z^{(LSW)}(x) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr}^{(LSW)}(x, z, t) \\ \sigma_{\theta\theta}^{(LSW)}(x, z, t) \\ \sigma_{zz}^{(LSW)}(x, z, t) \\ \sigma_{rz}^{(LSW)}(x, z, t) \end{bmatrix} = \exp((1 - \delta)\lambda x^q - i\omega t + ikz) \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{rr}^{(LSW)}(x) \\ \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(LSW)}(x) \\ \tilde{\sigma}_{zz}^{(LSW)}(x) \\ \tilde{\sigma}_{rz}^{(LSW)}(x) \end{bmatrix}, \quad (32)$$

где

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_r^{(LSW)}(x) \\ \tilde{u}_z^{(LSW)}(x) \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(x) \mathbf{B}^{(LSW)},$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{rr}^{(LSW)}(x) \\ \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(LSW)}(x) \\ \tilde{\sigma}_{zz}^{(LSW)}(x) \\ \tilde{\sigma}_{rz}^{(LSW)}(x) \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(x) \mathbf{B}^{(LSW)}. \quad (33)$$

В соотношениях (33) $\mathbf{B}^{(LSW)} = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4]^T$ – произвольный вектор-столбец четвертого порядка; $\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(x)$ и $\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(x)$ – искомые базисные решения следующего вида

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m [\mathbf{X}_m^{(LSW,1)}, \mathbf{X}_m^{(LSW,2)}], \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \mathbf{H}_m^{(LSW)}(x) \begin{bmatrix} \mathbf{X}_m^{(LSW,1)} & \mathbf{X}_m^{(LSW,2)} \end{bmatrix} \quad (x \in [x', x'']),\end{aligned}\tag{34}$$

где $\mathbf{H}_m^{(LSW)}(x)$ – матрицы размерности 4×2 , элементы которых имеют вид

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{H}_m^{(LSW)}(x)\right]_{1,1} &= p_1(x) C_1 + p_2(x) C_2, \\ \left[\mathbf{H}_m^{(LSW)}(x)\right]_{2,1} &= p_1(x) C_2 + p_2(x) C_1, \\ \left[\mathbf{H}_m^{(LSW)}(x)\right]_{3,1} &= (p_1(x) + p_2(x)) C_2, \quad \left[\mathbf{H}_m^{(LSW)}(x)\right]_{4,1} = k, \\ \left[\mathbf{H}_m^{(LSW)}(x)\right]_{1,2} &= \left[\mathbf{H}_m^{(LSW)}(x)\right]_{2,2} = -k C_2, \\ \left[\mathbf{H}_m^{(LSW)}(x)\right]_{3,2} &= -k C_1, \quad \left[\mathbf{H}_m^{(LSW)}(x)\right]_{4,2} = p_1(x).\end{aligned}$$

В представлениях (34) используются два набора матричных коэффициентов $\{\mathbf{X}_m^{(LSW,s)}\}_{m=0}^{\infty}$ ($s = \overline{1, 2}$) размерности 2×2 коэффициентов, задаваемых явными матричными рекуррентными соотношениями вида

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_m^{(LSW,s)} &= \tilde{\mathbf{O}} \quad (m < 0), \\ \mathbf{X}_0^{(LSW,1)} &= \tilde{\mathbf{I}}, \quad \mathbf{X}_1^{(LSW,1)} = \tilde{\mathbf{O}}, \quad \mathbf{X}_0^{(LSW,2)} = \tilde{\mathbf{O}}, \quad \mathbf{X}_1^{(LSW,2)} = \tilde{\mathbf{I}}, \\ \mathbf{X}_m^{(LSW,s)} &= \sum_{j=1}^4 \mathbf{A}_{m,j}^{(LSW)} \mathbf{X}_{m-j}^{(LSW,s)} + \sum_{j=0}^3 \mathbf{A}_{m,5+j}^{(LSW)} \mathbf{X}_{m-q-j}^{(LSW,s)} + \sum_{j=0}^2 \mathbf{A}_{m,9+j}^{(LSW)} \mathbf{X}_{m-2q-j}^{(LSW,s)} \\ &\quad (m = 2, 3, \dots), \quad (s = \overline{1, 2}).\end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\mathbf{O}}$ и $\tilde{\mathbf{I}}$ – соответственно нулевая и единичная матрицы размерности 2×2 ;

$$\mathbf{A}_{m,j}^{(LSW)} = - \left(\mathbf{Q}_{m,0}^{(LSW)}\right)^{-1} \mathbf{Q}_{m,j}^{(LSW)} \quad (j = \overline{1, \Pi}), \quad (m = \overline{2, \infty}).$$

Ненулевые элементы матриц $\mathbf{Q}_{m,j}^{(LSW)}$ размерности 2×2 имеют вид

$$\left[\mathbf{Q}_{m,0}^{(LSW)}\right]_{1,1} = m(m-1) C_1, \quad \left[\mathbf{Q}_{m,0}^{(LSW)}\right]_{2,2} = m(m-1),$$

$$\begin{aligned}
 \left[\mathbf{Q}_{m,1}^{(LSW)} \right]_{1,1} &= h(m-1)(2m-3)C_1, & \left[\mathbf{Q}_{m,1}^{(LSW)} \right]_{1,2} &= -hk(m-1)C_3, \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,1}^{(LSW)} \right]_{2,1} &= hk(m-1)C_3, & \left[\mathbf{Q}_{m,1}^{(LSW)} \right]_{2,2} &= h(m-1)(2m-3), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,2}^{(LSW)} \right]_{1,1} &= h^2 \left((m-2)^2 - 1 \right) C_1 + \kappa_3^2, & \left[\mathbf{Q}_{m,2}^{(LSW)} \right]_{1,2} &= -2(m-2)h^2kC_3, \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,2}^{(LSW)} \right]_{2,1} &= h^2k(2m-3)C_3, & \left[\mathbf{Q}_{m,2}^{(LSW)} \right]_{2,2} &= h^2 \left((m-2)^2 + \Omega^2 - k^2C_1 \right), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,3}^{(LSW)} \right]_{1,1} &= 2h^3\kappa_3^2, & \left[\mathbf{Q}_{m,3}^{(LSW)} \right]_{1,2} &= -h^3k(m-3)C_3, \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,3}^{(LSW)} \right]_{2,1} &= kh^3(m-2)C_3, & \left[\mathbf{Q}_{m,3}^{(LSW)} \right]_{2,2} &= 2h^3(\Omega^2 - k^2C_1), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,4}^{(LSW)} \right]_{1,1} &= h^4\kappa_3^2, & \left[\mathbf{Q}_{m,4}^{(LSW)} \right]_{2,2} &= h^4(\Omega^2 - k^2C_1), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,5}^{(LSW)} \right]_{1,1} &= -\lambda q(q-m-\delta(1+q-2m))C_1, \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,5}^{(LSW)} \right]_{2,2} &= -\lambda q(q-m-\delta(1+q-2m)), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,6}^{(LSW)} \right]_{1,1} &= -\lambda qh((2(1+q-m)-\delta(5+2q-4m))C_1 - C_2), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,6}^{(LSW)} \right]_{2,2} &= -\lambda qh(2(1+q-m)-\delta(5+2q-4m)), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,6}^{(LSW)} \right]_{1,2} &= -\lambda qkh(C_2 - \delta C_3), & \left[\mathbf{Q}_{m,6}^{(LSW)} \right]_{2,1} &= \lambda qkh(1 - \delta C_3), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,7}^{(LSW)} \right]_{1,1} &= -\lambda qh^2((2+q-m-\delta(4+q-2m))C_2 - C_2), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,7}^{(LSW)} \right]_{2,2} &= -\lambda qh^2(2+q-m-\delta(4+q-2m)), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,7}^{(LSW)} \right]_{1,2} &= -2\lambda qkh^2(C_2 - \delta C_3), & \left[\mathbf{Q}_{m,7}^{(LSW)} \right]_{2,1} &= 2\lambda qkh^2(1 - \delta C_3), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,8}^{(LSW)} \right]_{1,2} &= -\lambda qkh^3(C_2 - \delta C_3), & \left[\mathbf{Q}_{m,8}^{(LSW)} \right]_{2,1} &= \lambda qkh^3(1 - \delta C_3), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,9}^{(LSW)} \right]_{1,1} &= \lambda^2 q^2 \delta (\delta - 1) C_1, & \left[\mathbf{Q}_{m,9}^{(LSW)} \right]_{2,2} &= \lambda^2 q^2 \delta (\delta - 1), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,10}^{(LSW)} \right]_{1,1} &= 2\lambda^2 q^2 h \delta (\delta - 1) C_1, & \left[\mathbf{Q}_{m,10}^{(LSW)} \right]_{2,2} &= 2\lambda^2 q^2 h \delta (\delta - 1), \\
 \left[\mathbf{Q}_{m,11}^{(LSW)} \right]_{1,1} &= \lambda^2 q^2 h^2 \delta (\delta - 1) C_1, & \left[\mathbf{Q}_{m,11}^{(LSW)} \right]_{2,2} &= \lambda^2 q^2 h^2 \delta (\delta - 1) \quad (m = \overline{2, \infty}).
 \end{aligned}$$

Дисперсионные соотношения для рассматриваемой модели формулируются как следствия из граничных условий на свободной либо жестко закрепленной внешней граничной поверхности волновода. Для случая волн крутильного типа

это, соотношение соответственно, условия (13) либо (14), а в случае продольно-сдвиговых волн – условия (15) либо (16). С использованием представленных базисных решений уравнений модели (31) и (34), указанные условия порождают трансцендентное уравнение, определяющее дисперсионный спектр целевой задачи

$$\det(\mathbf{A}) = 0, \quad (35)$$

а также однородное матричное уравнение

$$\mathbf{A} \mathbf{V} = \hat{\mathbf{O}} \quad (36)$$

для определения искомого векторного коэффициента \mathbf{V} в представлении общих решений (29), (30) и (32), (33). В соотношениях (35), (36) матрица \mathbf{A} для случая свободной либо жестко закрепленной граничной поверхности волновода для крутильных волн ($\mathbf{V} = \mathbf{V}^{(TW)}$) имеет размерность 2×2 и записывается в виде

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left[\tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(x_1) \right]_{2,(1..2)} \\ \left[\tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(x_2) \right]_{2,(1..2)} \end{bmatrix} \quad \text{либо} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(x_1) \\ \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(x_2) \end{bmatrix},$$

а для продольно-сдвиговых волн ($\mathbf{V} = \mathbf{V}^{(LSW)}$) имеет размерность 4×4 и записывается в виде

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left[\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(x_1) \right]_{(1,4),(1..4)} \\ \left[\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(x_2) \right]_{(1,4),(1..4)} \end{bmatrix} \quad \text{либо} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(x_1) \\ \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(x_2) \end{bmatrix}$$

4. Численный эксперимент. В процессе численного анализа модели \mathbf{B} при выборе значений для параметров $\tilde{\rho}$ и \tilde{G} в представлениях (6) использованы физико-механические характеристики алюминия [5]. Соответственно, при задании $\nu = 0.35$, $C_* = 2.61 \cdot 10^{10}$ н/м², $\tilde{\rho}_* = 2700$ кг/м³ для $\tilde{\rho}$ и \tilde{G} получены значения

$$\tilde{G} = 1, \quad \tilde{\rho} = 1, \quad C_* = 2.61 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2, \quad \tilde{\rho}_* = 2700 \text{ кг/м}^3. \quad (37)$$

Безразмерные радиусы внутренней и внешней граничных поверхностей волновода соответственно имели значения $r_0 = 0.7$ и $r_n = 1.3$ ($h = 0.3$). Для параметров неоднородности были выбраны значения

$$\lambda = \ln(2), \quad q = 1. \quad (38)$$

Такой выбор определяет уменьшение в два раза модуля сдвига и плотности материала на внутренней поверхности по отношению к их значениям на серединной поверхности и увеличение указанных параметров в два раза на внешней поверхности волновода. При численном эксперименте значение параметра δ бралось фиксированным $\delta = 1/2$ [2].

В рамках модели А многослойный волновод имел те же значения радиусов внутренней r_0 и внешней r_n поверхностей, количество слоев варьировалось в пределах $n \in \{2, 4, 6, 10, 14\}$. Радиусы поверхностей Γ_j ($j = \overline{0, n}$) задавались соотношениями

$$r_j = r_0 + \frac{r_n - r_0}{n} j \quad (j = \overline{0, n}).$$

В каждом слое $V^{(j)}$ ($j = \overline{1, n}$) с локальными радиусами внутренней и внешней поверхностей r_{j-1} и r_j характеристики однородного изотропного материала определялись на основе представлений (37), (38) по формулам

$$G^{(j)} = \exp\left(f_{\lambda, q}\left(\frac{r_{j-1} + r_j}{2}\right)\right) \tilde{G},$$

$$\rho^{(j)} = \exp\left(f_{\lambda, q}\left(\frac{r_{j-1} + r_j}{2}\right)\right) \tilde{\rho},$$

$$\nu^{(j)} = \nu.$$

Расчет фрагментов спектров бегущих нормальных продольно-сдвиговых волн (LSW) проводился в диапазонах изменения нормализованной частоты $\Omega \in [0; 10]$ и нормализованного волнового числа $k \in [0; 10]$. На рисунках 3 и 4 представлены спектры продольно-сдвиговых волн, построенные в рамках соответственно модели А при $n = 2$ и модели Б для случая свободных граничных поверхностей волновода.

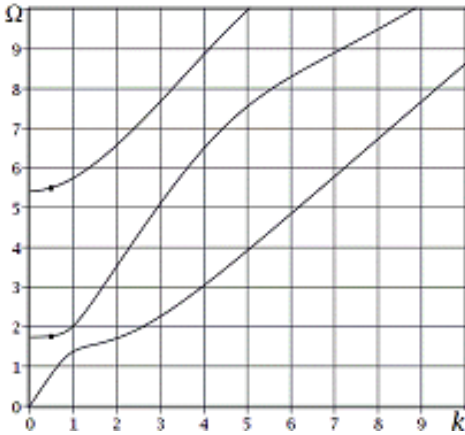


Рис. 3. Спектр LSW для модели А
($n = 2$)

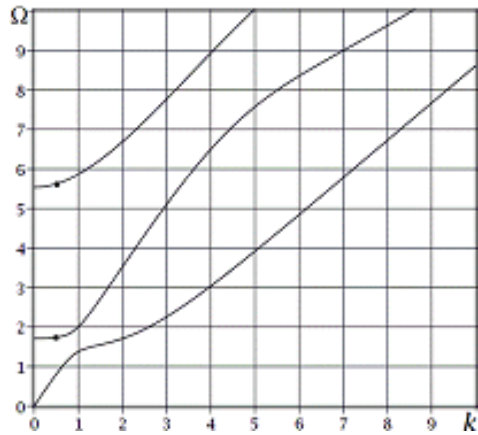


Рис. 4. Спектр LSW для модели Б

Из представленных рисунков следует, что качественные картины топологического строения спектров, рассчитанных в рамках рассматриваемых моделей, не имеют значимых различий. Эта тенденция прослеживается и при увеличении количества слоев составного волновода для модели А. В таблицах 1 и 2 приведены значения нормализованной частоты Ω соответственно для второй и третьей

мод при фиксированном значении нормализованного волнового числа $k = 0.5$, полученные в рамках модели Б, а также модели А при различном числе слоев. Наблюдается устойчивое приближение при увеличении числа слоев значений

Таблица 1

Модель А				Модель Б
n	2	4	6	
Ω	1.7653	1.7435	1.7394	1.7362

Таблица 2

Модель А					Модель Б	
n	2	4	6	10		14
Ω	5.5033	5.5986	5.6139	5.6215	5.6236	5.6257

нормализованной частоты, полученных в рамках модели А, к соответствующим значениям, полученным в рамках модели Б.

Для анализа количественных различий в рамках сопоставляемых моделей рассматривались силовые характеристики волнового процесса. На рисунках 5–12 представлены радиальные распределения для нормированных амплитудных составляющих отличных от нуля компонент тензора напряжений, полученные в рамках модели А (штриховая линия) и модели Б (сплошная линия) для волн из второй моды с нормированными волновыми числами $k = 0.5$. Для волн из третьей моды с такими же волновыми числами, аналогичные графики представлены на рисунках 13–24.

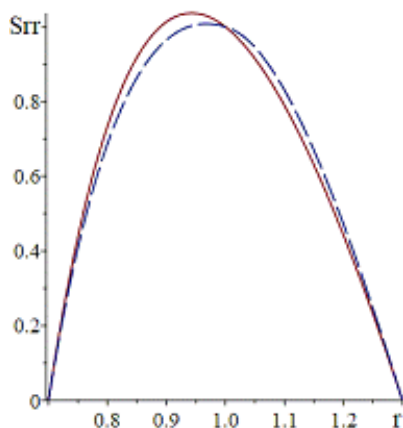


Рис. 5 Мода 2 ($n = 2$, $\Omega = 1.7653$)

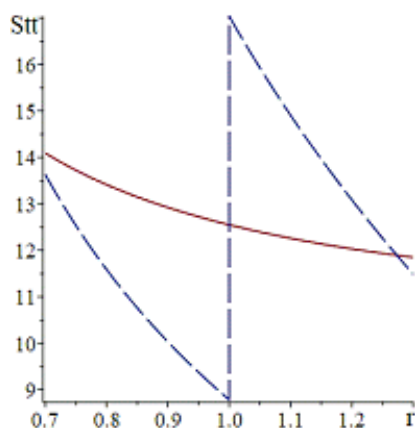


Рис. 6 Мода 2 ($n = 2$, $\Omega = 1.7653$)

В качестве специфических особенностей анализируемых волновых процессов можно отметить следующее. Компоненты тензора напряжений $\tilde{\sigma}_{rr}^{(j)}$ и $\tilde{\sigma}_{rz}^{(j)}$ в своих областях определения для волн второй и третьей моды спектра, подчиняемые в рамках модели А условиям идеального механического контакта на разделяющих

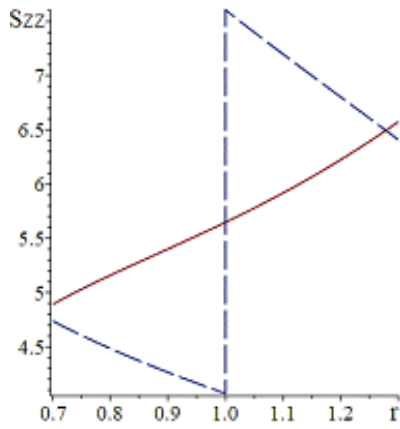


Рис. 7 Мода 2 ($n = 2$, $\Omega = 1.7653$)

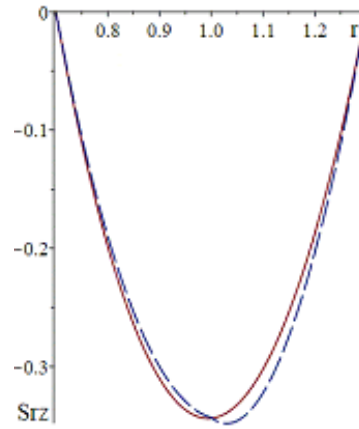


Рис. 8 Мода 2 ($n = 2$, $\Omega = 1.7653$)

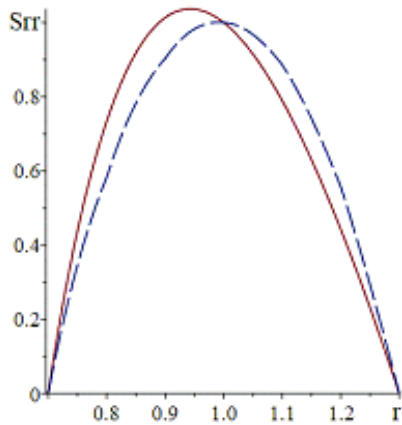


Рис. 9 Мода 2 ($n = 6$, $\Omega = 1.7394$)

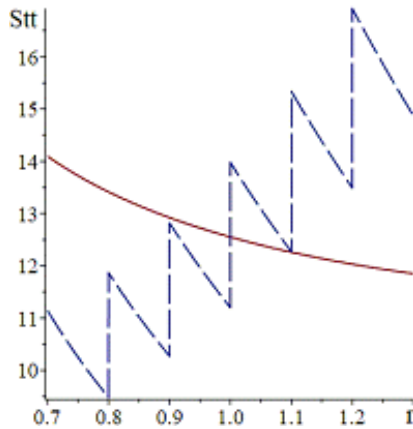


Рис. 10 Мода 2 ($n = 6$, $\Omega = 1.7394$)

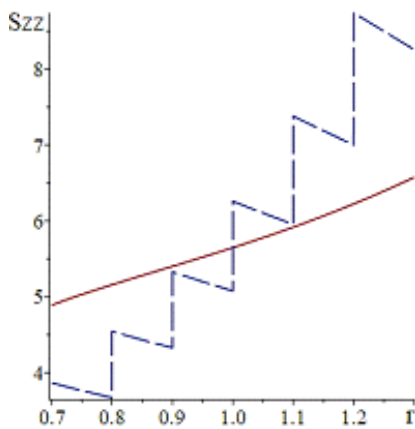


Рис. 11 Мода 2 ($n = 6$, $\Omega = 1.7394$)

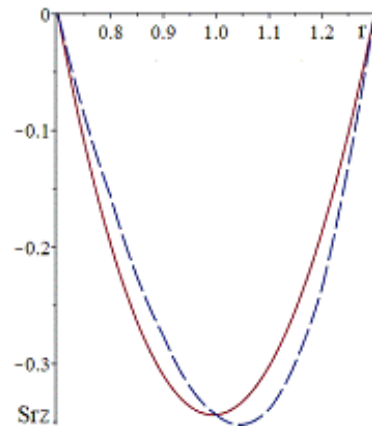


Рис. 12 Мода 2 ($n = 6$, $\Omega = 1.7394$)

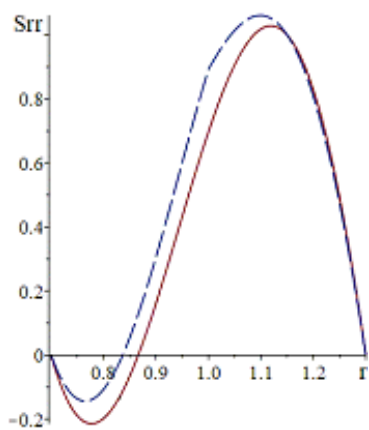


Рис. 13 Мода 3 ($n = 2$, $\Omega = 5.5033$)

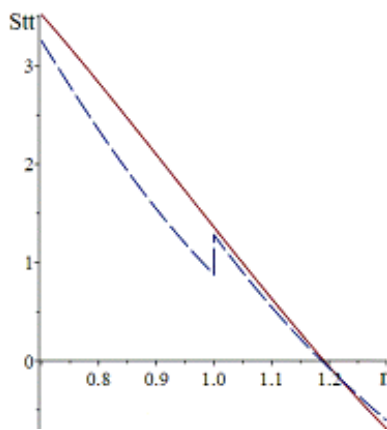


Рис. 14 Мода 3 ($n = 2$, $\Omega = 5.5033$)

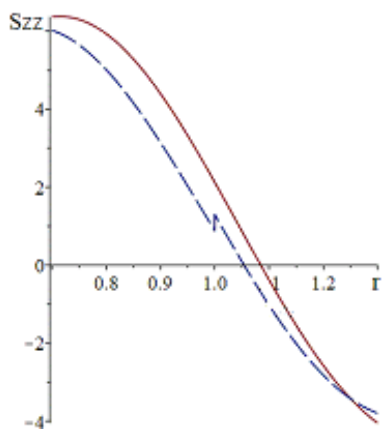


Рис. 15 Мода 3 ($n = 2$, $\Omega = 5.5033$)

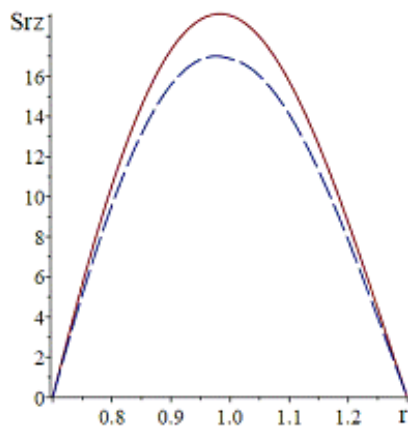


Рис. 16 Мода 3 ($n = 2$, $\Omega = 5.5033$)

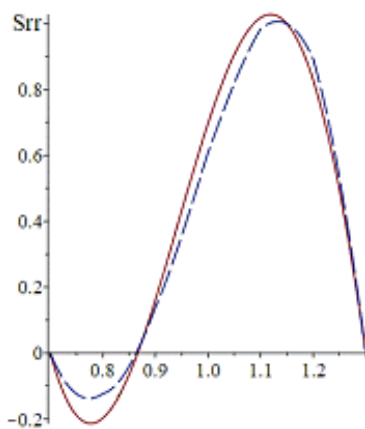


Рис. 17 Мода 3 ($n = 6$, $\Omega = 5.6139$)

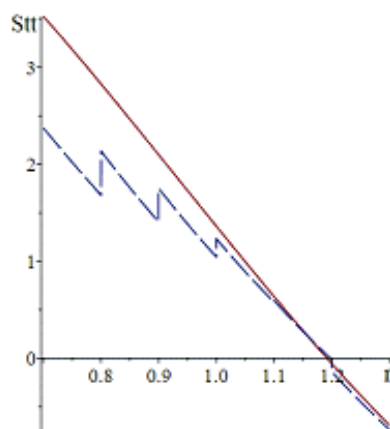


Рис. 18 Мода 3 ($n = 6$, $\Omega = 5.6139$)

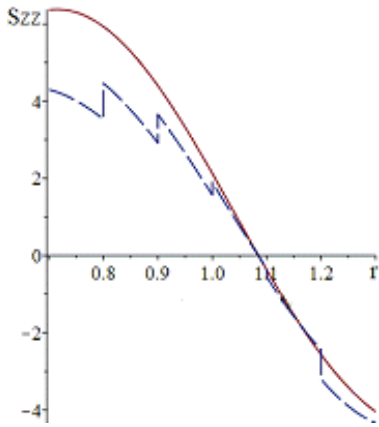


Рис. 19 Мода 3 ($n = 6$, $\Omega = 5.6139$)

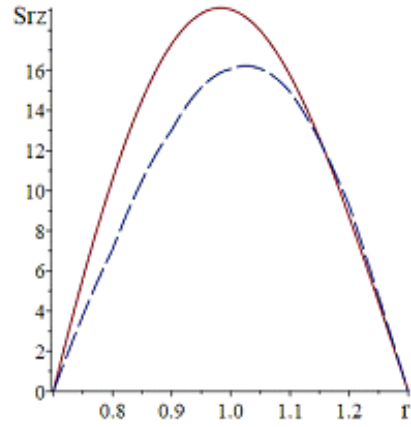


Рис. 20 Мода 3 ($n = 6$, $\Omega = 5.6139$)

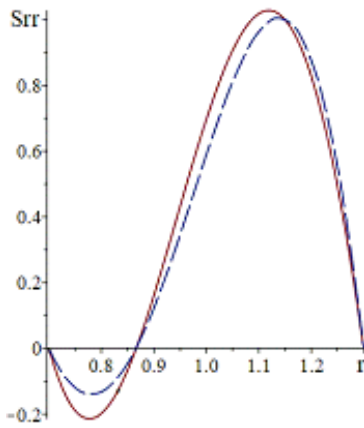


Рис. 21 Мода 3 ($n = 14$, $\Omega = 5.6236$)

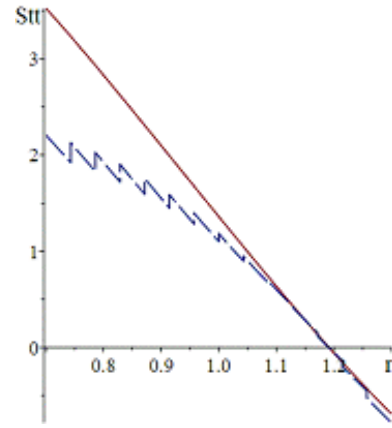


Рис. 22 Мода 3 ($n = 14$, $\Omega = 5.6236$)

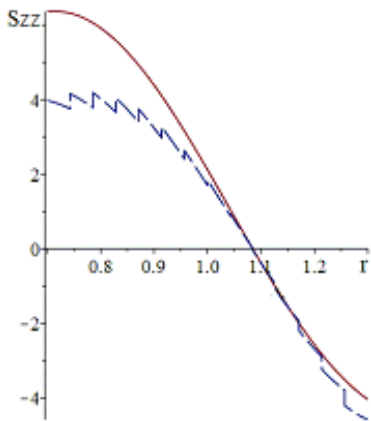


Рис. 23 Мода 3 ($n = 14$, $\Omega = 5.6236$)

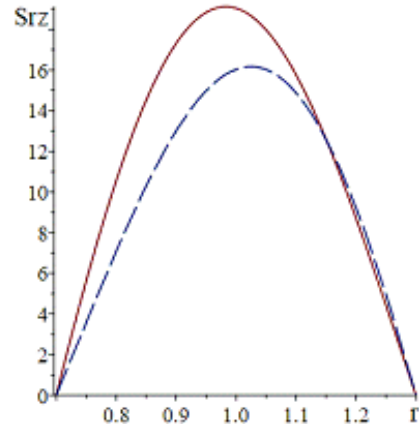


Рис. 24 Мода 3 ($n = 14$, $\Omega = 5.6236$)

однородные слои волновода поверхностях, при всех рассмотренных количествах слоев в достаточной мере соответствуют значениям аналогичных компонент, полученным в рамках модели Б. При этом для компонент тензора напряжений $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(j)}$ и $\tilde{\sigma}_{zz}^{(j)}$ аналогичное свойство можно констатировать лишь в качественном аспекте для волн третьей моды (рис. 12, 13, 16, 17, 20, 21), и существенное увеличение количества слоев волновода для этих напряжений приводит, в первую очередь, к уменьшению амплитудных значений разрывов первого рода для соответствующих функций.

Выводы. В статье представлен сопоставительный анализ результатов численных экспериментов для двух принципиально различных моделей полых радиально неоднородных изотропных цилиндрических волноводов, допускающих исследование на основе построения соответствующих систем аналитических решений волновых уравнений. Указаны характеристики рассмотренных волновых процессов, для которых наблюдается подобие полученных в результате численного эксперимента значений.

1. Шульга Н.А. Распространение осесимметричных упругих волн в ортотропном полем цилиндре / Н.А. Шульга. // Прикладная механика. – 1974. Т. 10, № 9. – С. 14–18.
2. Моисеенко И.А. Волны деформаций в функционально-градиентных цилиндрах кольцевого сечения / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко. // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2019. – № 1(66). – С. 31–53.
3. Моисеенко И.А. Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн в функционально-градиентных трансверсально изотропных полых цилиндрах / И.А. Моисеенко // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 134–146.
4. Моисеенко И.А. Неосесимметричные нормальные упругие волны в функционально-градиентных ортотропных полых цилиндрах / И.А. Моисеенко, С.А. Прийменко, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017. – № 1 (58). – С. 27–41.
5. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – К.: Наук. думка. – 1981. – 284 с.
6. Партон В.З. Методы математической теории упругости / В.З. Партон, П.И. Перлин. – М.: Наука. – 1981. – 688 с.

I.A. Moiseyenko, V.A. Moiseyenko, A.O. Ivaniv

Axisymmetric normal elastic waves in piecewise inhomogeneous and functionally inhomogeneous cylindrical waveguides of annular cross section.

Wave motion is described by the complete system of equations of the linear dynamic theory of elasticity. Two waveguide models are investigated - a piecewise inhomogeneous one composed of isotropic extended hollow concentric annular cross-section of cylinders differing in geometry and material, as well as a functionally inhomogeneous extended hollow concentric annular cross-section cylinder with an exponentially power law of radial inhomogeneity of the physical and mechanical characteristics of an isotropic material. The basic solutions of the system of differential equations of the model in the first case are presented separately for each homogeneous layer in the classical closed form through the Bessel functions, and in the second - in analytical matrix form in the form of expansions of the radial components of the solutions in uniformly and absolutely converging matrix power series in the generalized annular coordinate. Based on the results of a numerical

И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко, А.О. Иванов

experiment for the case of free boundary surfaces of a waveguide, a comparative analysis of the spectra obtained in the framework of the considered models of the spectra of traveling normal longitudinal shear waves, as well as the kinematic characteristics of these waves for two points of the second and third modes at different values of the parameter of the number of layers, is presented. The quantitative and qualitative estimates of the obtained numerical results are presented.

Keywords: *single-layer functionally graded hollow cylinder, multilayer composite piecewise inhomogeneous hollow cylinder, isotropic materials, axisymmetric normal waves, wave equations basic solutions, dispersion relations..*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры”, Макеевка

Получено 01.09.2021

*Donetsk National University, Donetsk
Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture,
Makeevka*

miamia733@mail.ru

УДК 539.3

©2021. В.Н. Чехов, С.В. Загора

НОРМАЛЬНЫЙ ПРОГИБ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЖЁСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ, НАГРУЖЕННЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ УСИЛИЕМ

В рамках теории типа С.П. Тимошенко с применением многозначных аналитических решений получено уточнённое аналитико-числовое решение для трансверсально-изотропной пологой сферической оболочки с круговым жёстким включением, нагруженным поперечным усилием. В результате численных исследований установлено, что при увеличении параметра поперечного сдвига и уменьшении радиуса жёсткого включения величина нормального прогиба возрастает в несколько раз. Также обнаружено, что влияние поперечного сдвига особенно важно для относительно небольших диаметров жёстких включений.

Ключевые слова: аналитическое решение, теория типа С.П. Тимошенко, полая сферическая оболочка, трансверсально-изотропный материал, жёсткое включение, нормальный прогиб.

Введение. Тонкостенные оболочки широко применяются в качестве элементов несущих конструкций в промышленности и в строительстве. Поэтому исследования напряженного состояния оболочек с концентраторами напряжений в виде отверстий [1–5], включений [2, 5, 6, 8], сосредоточенных [7] и локальных воздействий [2, 3 (гл. 24)] остаются востребованными.

В классе задач о нагружении оболочек усилием и моментом через жесткое круговое включение аналитические решения и численные результаты получены лишь для изотропных (в рамках классической теории Кирхгофа-Лява) сферической [3 (гл. 24), 8] и цилиндрической [2] оболочек.

В тоже время, в связи с широким применением в технике композитных материалов, стали актуальными задачи для трансверсально-изотропных оболочек. Такие материалы, как правило, обладают низкой сдвиговой жёсткостью, поэтому для них наиболее приемлемой является сдвиговая модель, сформулированная С.П. Тимошенко. На базе этой теории в [1] был предложен метод решения задач для трансверсально-изотропных оболочек с отверстиями и включениями. Затем, на базе этой же сдвиговой модели, Пелех Б.Л. [4] предложил несколько упрощённый вариант уравнений «технической теории трансверсально-изотропных оболочек». Этими методами был решён ряд задач для трансверсально-изотропных оболочек с отверстиями, включениями и подкрепляющими кольцами [2, 4, 5]. Значительная часть результатов по изучению концентрации напряжений около отверстий и жёстких включений в оболочках, изготовленных из металлических и композитных материалов, получена также с использованием вариационных конечно-разностных методов (например, в [9]) и наиболее полно изложена в обзорной статье [10]. Но все эти задачи и их решения предполагали нагружение оболочки равномерным внутренним давлением, растяжением или кручением.

В данной статье в рамках теории С.П. Тимошенко предлагается аналитическое решение задачи и реализуются численные исследования нормального прогиба при нагружении поперечным усилием, приложенным через круговое абсолютно жёсткое включение в полой трансверсально-изотропной сферической оболочке. Ранее подобные исследования были проведены лишь для сосредоточенных воздействий [7].

1. Постановка задачи. Рассмотрим пологую трансверсально-изотропную сферическую оболочку с круговым недеформируемым включением (рис. 1). Предполагаем, что жёсткая шайба нагружена поперечным усилием F_z .

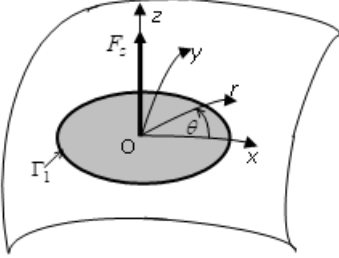


Рис. 1.

Для решения задачи применялась система однородных разрешающих дифференциальных уравнений, основанных на учитывающей деформации поперечного сдвига [2] уточнённой теории типа С.П. Тимошенко:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 U - \nabla^2 w &= 0; \\ \nabla^2 \nabla^2 w + \nabla^2 U - 2\delta \nabla^2 \nabla^2 U &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь U, w, χ – искомые функции усилий, прогиба и поперечного сдвига; ν – коэффициент Пуассона, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ – оператор Лапласа в полярной системе координат (ρ, θ) , где $\rho = \frac{r}{\sqrt{cR}}$ – безразмерный радиус – вектор, $r \cdot e^{i\theta} = x + iy$; $\delta = \frac{Ehc}{2KR}$ – относительный безразмерный параметр податливости поперечным сдвигам, где $K = \mu G_1 h$, $c = h / \sqrt{12(1 - \nu^2)}$, E – модуль Юнга, G_1 – модуль трансверсального сдвига, $\mu = 5/6$ – коэффициент сдвига, R – радиус срединной поверхности оболочки, h – толщина оболочки, i – мнимая единица.

2. Построение аналитических решений. Решения системы дифференциальных уравнений (1) определим с помощью цилиндрической, полигармонической и аналитической частей:

$$U = U_c + i \frac{R}{2} U_a, \quad (2)$$

$$w = w_c. \quad (3)$$

В (2) аналитическая часть U_a , согласно [2], имеет вид:

$$\begin{aligned} U_a(r, \theta) = (\alpha_1 + \bar{\alpha}_2) [(1 + 2 \ln r) r \cos \theta - 2r \sin \theta] + \\ + (\beta_1 + \bar{\beta}_2) (1 + \ln r) + (\gamma_1 + \bar{\gamma}_2) \frac{1}{r} \cos \theta. \end{aligned} \quad (4)$$

При этом, согласно [2], необходимо выполнить условия однозначности комплексных смещений:

$$\alpha_1 = -\alpha_2, \quad \beta_1 = -\beta_2, \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 4icR(1 + \nu)\bar{\alpha}_1, \quad (5)$$

а главный вектор и главный момент внешних усилий, приложенных к жёсткой шайбе, имеют представления [2]:

$$F_X = 2\pi EhcR \operatorname{Im}(\alpha_1 - \alpha_2), \quad (6)$$

$$F_Y = 2\pi EhcR \operatorname{Re}(\alpha_1 - \alpha_2), \quad (7)$$

$$F_Z = \pi Ehc \operatorname{Im}(\beta_1 - \beta_2), \quad (8)$$

$$B_Z = -\pi EhcR \operatorname{Re}(\beta_1 - \beta_2), \quad (9)$$

$$B_X = \pi Ehc \operatorname{Re}[(\gamma_1 - \gamma_2) + 2icR(1 - \nu)(\alpha_1 + \alpha_2)], \quad (10)$$

$$B_Y = \pi Ehc \operatorname{Im}[(\gamma_1 - \gamma_2) - 2icR(1 - \nu)(\alpha_1 + \alpha_2)]. \quad (11)$$

Комплексные неизвестные постоянные α_j , β_j , γ_j ($j = \overline{1, 2}$) определяются из системы уравнений (5)-(11) при заданных значениях соответствующих компонент.

3. Аналитическое решение при заданном поперечном усилии. Задано $F_Z = -F_Z^0$, а остальные компоненты – равными нулю. Из системы уравнений (5)-(11) получим

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = -\frac{iF_Z^0}{2\pi Ehc}, \quad \beta_2 = \frac{iF_Z^0}{2\pi Ehc}, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0.$$

Аналитическая часть (4) упростится и примет вид:

$$U_a(r) = 2\beta_1(1 + \ln r) = -\frac{iF_Z^0(1 + \ln r)}{\pi Ehc}. \quad (12)$$

Из (12) очевидно следует, что для этого случая нагружения цилиндрические части в (2) и (3) также будут содержать только 0-ю гармонику, а полигармоническая часть в (3) для w отсутствует $w_p = 0$. Цилиндрические части решения, убывающие по абсолютной величине при удалении от контура Γ_1 , имеют три различные аналитические формы в зависимости от диапазона изменения параметра податливости поперечным сдвигам δ [2]. Решение уравнений (1) запишем в полярных координатах ρ , θ на срединной поверхности оболочки в виде:

– в интервале $0 \leq \delta < 1$:

$$U_c = aK_1(\sigma\rho) \cos \theta, \quad w_c = \sigma^2 aK_1(\sigma\rho) \cos \theta; \quad (13)$$

– для $\delta = 1$:

$$\begin{aligned} U_c &= AK_0(\rho) + B\rho K_1(\rho), \\ w_c &= (A - 2B)K_0(\rho) + B\rho K_1(\rho); \end{aligned} \quad (14)$$

– при $\delta > 1$:

$$\begin{aligned} U_c &= AK_0(\omega\rho) + BK_0(\rho/\omega), \\ w_c &= \omega^2 AK_0(\omega\rho) + \omega^{-2} BK_0(\rho/\omega). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $K_m(z)$ — цилиндрические функции Макдональда; $\omega = \sqrt{\delta + \sqrt{\delta^2 - 1}}$, $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{1 + \delta} + i\sqrt{1 - \delta})$, $a = A + iB$, где A , B — вещественные постоянные.

На границе Γ_1 абсолютно жёсткого включения ставились деформационные краевые условия

$$\varepsilon_{\tau\tau} |_{\Gamma_1} = 0, \quad \kappa_{\tau\tau} |_{\Gamma_1} = 0, \quad (16)$$

или $\varepsilon_{\tau\tau} |_{\Gamma_1} = 0$, $\kappa_{n\tau} |_{\Gamma_1} = 0$, что эквивалентно (16), так как для деформационных краевых величин, записанных в виде (17), между коэффициентами при неизвестных постоянных A , B для 0-й гармоники существуют зависимости $\rho \cdot \kappa_{\tau\tau}^0 \equiv -\kappa_{n\tau}^0 \sqrt{\frac{R}{c}}$, $\kappa_{\tau\nu}^0 \equiv 0$.

4. Выражения для деформационных краевых величин, усилий и моментов. Выражения для деформационных краевых величин, вошедших в (16), имеют вид:

$$\begin{aligned} Eh \varepsilon_{\tau\tau} &= T_\theta - \nu T_\rho, \quad \frac{Eh^2}{2} \kappa_{\tau\tau} = \frac{6}{h} (G_\theta - \nu G_\rho) - \frac{\delta\sqrt{3-3\nu^2}}{\rho} \sqrt{\frac{R}{c}} Q_\rho, \\ \frac{Eh^2}{2} \kappa_{\tau\nu} &= \frac{6(1+\nu)}{h} H_{r\theta} - \delta\sqrt{3-3\nu^2} \sqrt{\frac{R}{c}} \frac{dQ_\theta}{d\rho}, \\ Eh \kappa_{n\tau} &= \frac{dT}{dr} - (1+\nu) \frac{1}{r} \frac{dS_{\rho\theta}}{d\theta} - \delta\sqrt{\frac{R}{c}} Q_\rho. \end{aligned} \quad (17)$$

Выражения для усилий и моментов, вошедших в (17), имеют вид:

$$\begin{aligned} T_\theta &= \frac{Eh}{R} Re \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}, \quad T_r = \frac{Eh}{R} Re \nabla^2 U - T_\theta, \quad T = T_r + T_\theta, \\ H_{r\theta} &= \frac{Eh}{R} (1-\nu) c Re \left[\delta \left(\nabla^2 \chi - 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \rho^2} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) \right], \\ G_r &= \frac{Eh}{R} c Re \left[\frac{2}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} - \nu \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \right) \right], \\ S_{r\theta} &= -\frac{Eh}{R} Re \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right), \quad G_\theta = -\frac{Eh}{R} (1+\nu) c Re \nabla^2 g - G_r, \\ Q_r &= \frac{Eh}{R} \sqrt{\frac{c}{R}} Re \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \rho} \nabla^2 g \right), \quad Q_\theta = -\frac{Eh}{R} \sqrt{\frac{c}{R}} Re \left(\frac{\partial \chi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 g \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где $g = w + 2\delta \nabla^2 w - 4\delta^2 \nabla^2 U$.

Подставляя усилия и моменты (18) с учётом (17) в краевые условия (16) и приравнивая члены при одинаковых гармониках, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных вещественных постоянных A , B . Поскольку комплексные неизвестные постоянные α_j , β_j , γ_j ($j = \overline{1, 2}$) предварительно найдены, то аналитическими частями (12) также определяются правые части системы.

После решения полученной системы по (13)–(15) находим нормальный прогиб w .

5. Описание результатов численных исследований. Были проведены расчёты для трансверсально - изотропной сферической оболочки с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$ при различных значениях радиуса жёсткой шайбы ρ_0 и параметра сдвига δ . В таблицах и на графиках приведены значения вычисленного безразмерного нормального прогиба на срединной поверхности оболочки

$$W = Re(w)/d.$$

Здесь

$$d = \frac{F_Z^0}{\pi c \cdot sca}, \quad (19)$$

где sca - масштабный множитель.

На графиках и в таблице и приведены значения вычисленного безразмерного нормального прогиба W в увеличенном масштабе 10:1, т.е. при значении масштабного множителя в (19) $sca = 10$.

На рисунке 2 приведены графики безразмерного нормального прогиба W на контуре Γ_1 кругового жёсткого включения в зависимости от параметра сдвига δ при различных значениях радиуса жёсткой шайбы ρ_0 .

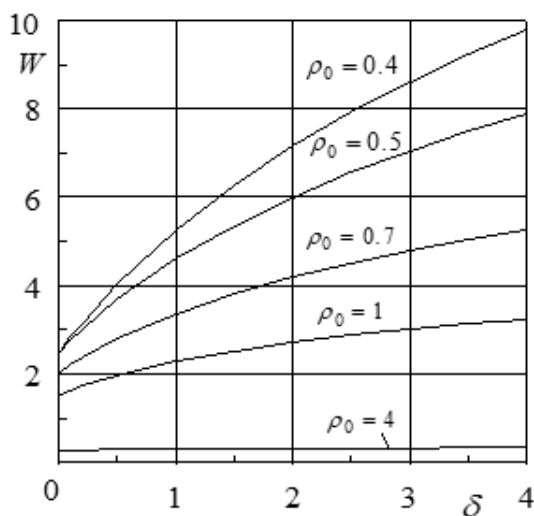


Рис. 2.

На рисунках 3, 4 показаны изменение нормального прогиба W при удалении от жёсткой шайбы радиуса ρ_0 при различных значениях параметра сдвига δ , в том числе для $\rho_0 = 3$ (рис. 3) и для $\rho_0 = 0.4$ (рис. 4).

Из рисунков 2, 3, 4 видно, что при увеличении параметра δ и уменьшении радиуса жёсткой шайбы ρ_0 значения нормального прогиба W значительно возрастают. Это подтверждается также и таблицей 1, где представлены результаты вычисленных значений нормального прогиба W в зависимости от δ и ρ_0 . Например,

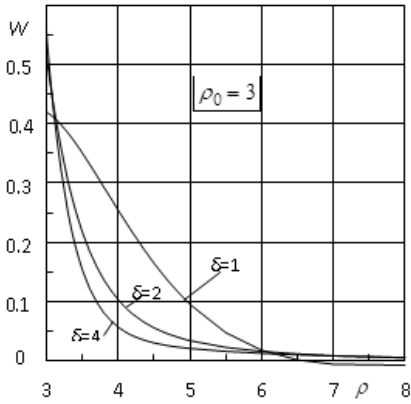


Рис. 3.

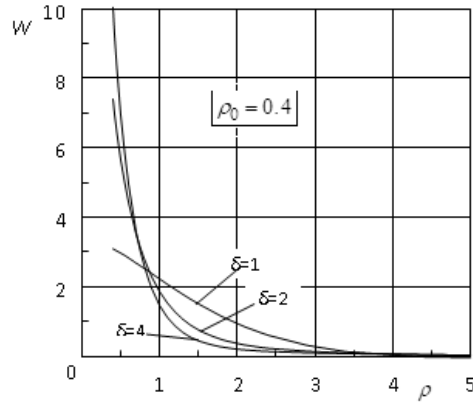


Рис. 4.

из таблицы 1 видно, что при $\delta=0$ (т.е. для изотропной оболочки) и уменьшении ρ_0 от 3 до 0.02, значения нормального прогиба W увеличились 9.5 раза, а при $\delta=2$ и тех же изменениях ρ_0 значения нормального прогиба W увеличились в 67 раз.

Таблица 1. Значения прогиба W в зависимости от δ и ρ_0 .

$\rho_0 \backslash \delta$	0.02	0.1	0.3	0.6	1	2	3	5
0	3.91	3.70	3.05	2.24	1.53	0.72	0.41	0.18
0,5	12.32	8.17	5.11	3.18	1.96	0.83	0.45	0.19
1	20.14	12.09	6.78	3.90	2.27	0.90	0.48	0.20
2	34.61	18.91	9.45	4.96	2.71	1.00	0.52	0.21
3	48.04	24.84	11.56	5.73	3.01	1.06	0.54	0.22
4	60.74	30.16	13.32	6.35	3.24	1.11	0.56	0.22
5	72.87	35.02	14.84	6.85	3.42	1.15	0.57	0.22

Следует также отметить следующее. Из таблицы 1 видно, что при $\rho_0=5$ и увеличении δ от 0 до 5, значения нормального прогиба W увеличились в 1,23 раза. А при $\rho_0=0,02$ и тех же изменениях параметра δ , значения прогиба W увеличиваются уже в 18,6 раз. Таким образом, влияние деформации поперечного сдвига является особенно существенным при малых площадках жёстких шайб.

6. Исследования точности и достоверности полученных результатов. При численной реализации все вычисления проводились в среде пакета Maple. Точность вычислений регулировалась с заданием значения системной переменной *Digits*, которая здесь принималась равной *Digits* = 15. Были проведены нижеследующие численные исследования точности и достоверности полученных результатов при различных значениях относительного радиуса жёсткой шайбы ρ_0 и параметра сдвига δ .

1) Для проверки результатов был проведён расчёт значений нормального прогиба W также несколько иным способом, представленным в работе [11], где основное напряжённое состояние оболочки описывается частным решением для сплошной оболочки, нагруженной нормальной сосредоточенной силой, полученным с помощью двумерного интегрального преобразования Фурье в работе [7]. При этом уже не используются многозначные аналитические решения (4)–(12), а нормальный прогиб w записывается в виде

$$w = w_c + w^0,$$

где

$$w^0 = \frac{P}{2\pi c} \sum_{q=1}^2 b_q K_0(\rho\sqrt{d_q}), \quad (20)$$

$$d_q = \delta - (-1)^q i\sqrt{1 - \delta^2}, \quad b_q = (-1)^q \frac{1 - 2\delta d_q}{d_1 - d_2}, \quad (q = \overline{1, 2}).$$

Остальные соотношения и путь решения такие же, как и в [11].

Проведённая таким способом проверка показала полное (сто процентное) совпадение частных результатов раннее осуществленного анализа с приведёнными здесь численными результатами. То есть, оба способа решения приводят к одинаковым результатам.

2) Для сравнения с результатами других авторов были проведены вычисления прогиба w при весьма малом относительном радиусом жёсткого включения $\rho_0 = 0,02$. При сравнении с результатами работы [7] для сплошной сферической оболочки при действии нормальной сосредоточенной силы получено совпадение результатов при $\delta = 0$. При увеличении параметра δ результаты численно отличаются, но качественно график распределения w аналогичен [7].

3) Для проверки формул (13)–(15) были проведены расчёты $W(\rho_0, \delta)$ при $\delta = 1$, а также при значениях $\delta = 1 - 10^{-12}$, и $\delta = 1 + 10^{-12}$, близких к 1. Получено совпадение результатов, полученных по разным формулам (13)–(15) для $\delta < 1$, $\delta = 1$ и $\delta > 1$.

Так, для значений $\rho_0 = 0,02, 0,1, 0,3, 0,6, 1, 2, 3,5$ (исходных данных - табл. 1), отличие полученных для $\delta = 1 \pm 10^{-12}$ значений $W(\rho_0)$ не превышало 10^{-7} % от значений $W(\rho_0, \delta)$ при $\delta = 1$. При этом для $\rho_0 = 0,02$ относительное расхождение составляло $\lambda\% = 0,14 \cdot 10^{-7}$ % и величина перемещения, согласно таблице 1, составляет $W(\rho_0, \delta) = 20,14$. При $\rho_0 = 5$ расхождение составляло $\lambda\% = 0,64 \cdot 10^{-11}$ %, а значение перемещения $W(\rho_0, \delta) = 0,22$ (чем и объясняется меньшее расхождение).

4) Проверялась точность выполнения исходных дифференциальных уравнений (1). Так, были проведёны расчёты для значений

$$\rho_0 = 0,1, 0,3, 0,6, 1, 2, 3, 5; \quad \delta = 0, 0,5, 1, 2, 3, 4, 5. \quad (21)$$

Абсолютная погрешность составляла от $0.5 \cdot 10^{-15}$ до $0.1 \cdot 10^{-7}$ и зависела от значений ρ_0, δ , т.е. (как видно из табл.1) и от $W(\rho_0, \delta)$; относительная погрешность $W(\rho_0, \delta)$ при этом составляла от $0.2 \cdot 10^{-14}$ до $0.3 \cdot 10^{-9}$.

5) Контролировалась точность удовлетворения заданных граничных условий в точках контура. Для значений ρ_0, δ из (21) абсолютная погрешность выполнения граничных условий не превышала $0.103 \cdot 10^{-6}$. При этом значение перемещения $W(\rho_0, \delta) = 35$ – максимальное при $\rho_0=0.1, \delta=5$. Погрешность относительно значений $W(\rho_0, \delta)$; составляла $0.3 \cdot 10^{-8}$.

В случаях, представленных в таблице 1, максимальное значение абсолютной погрешности выполнения граничных условий составляло $0.9 \cdot 10^{-4}$. Погрешность относительно максимальных значений $W(\rho_0, \delta) = 72.9$ (при $\rho_0=0.02, \delta=5$) не превышала $0.124 \cdot 10^{-5}$.

Выводы. Таким образом, численные исследования для трансверсально-изотропной сферической оболочки с круговым жёстким включением, нагруженным поперечным усилием, показали, что при увеличении параметра поперечного сдвига материала оболочки δ и уменьшении радиуса жёсткого включения ρ_0 величина нормального прогиба W значительно возрастает и может увеличиться в несколько раз.

1. Гузь А.Н. Сферические днища, ослабленные отверстиями / А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, К.И. Шнеренко – Киев: Наук. думка, 1970. – 323 с.
2. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, Вал. Н. Чехов [и др.] . – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т. / Под общ. ред. А.Н. Гузя. – Т. 1.)
3. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник: В 3 т. / под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 1. – 831 с.
4. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жёсткостью / Б.Л. Пелех – К.: Наук. думка, 1973. – 248 с.
5. Пелех Б.Л. Распределение напряжений возле отверстий в податливых на сдвиг анизотропных оболочках / Б.Л. Пелех, А.А. Сяський. – К.: Наук. думка, 1975. – 198 с.
6. Chekhov V.N. Stress concentration in a transversely isotropic spherical shell with two circular rigid inclusions / V.N. Chekhov, S.V. Zakora // Int. Appl. Mech. – 2011. – Vol. 47, No. 4 – P. 441–448.
7. Khizhnyak V.K. Stress-deformed state of transversally isotropic shells under concentrated loads / V.K. Khizhnyak, V.P. Shevchenko // Soviet Appl. Mech. – 1972. – Vol. 8, No. 11 – P. 1188–1193.
8. Shevchenko V.P. Stresses in a Spherical Shell Loaded Through Rigid Inclusions / V.P. Shevchenko, S.V. Zakora // Int. Appl. Mech. – 2015. – Vol. 51, No. 2 – P. 159–166.
9. Maksimyuk V.A. Nonlinear deformation of thin isotropic and orthotropic shells of revolution with reinforced holes and rigid inclusions / V.A. Maksimyuk, E.A. Storozhuk, I.S. Chernyshenko // Int. Appl. Mech.–2013, - Vol. 49, No 6. – P. 685–692.
10. Maksimyuk V.A. Variational-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) / V.A. Maksimyuk, E.A. Storozhuk, I.S. Chernyshenko // Int. Appl. Mech.–2012, - Vol. 48, No 6. – P. 613–687.
11. Чехов В.Н. Концентрация напряжений в трансверсально-изотропной сферической оболочке с жестким круговым включением, нагруженным нормальной силой / В.Н. Чехов, С.В. Загора // «Журнал теоретической и прикладной механики», ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет».– 2017. – № 2(59). – С. 27–39.

V.N. Chekhov, S.V Zakora

Normal deflection of a transversely isotropic spherical shell with rigid inclusion loaded with transverse effort..

Within the framework of the theory of the S.P. Timoshenko, using multivalued analytical solutions, a refined analytical-numerical solution was obtained for a transversely isotropic shallow spherical shell with a circular rigid inclusion loaded with a transverse effort. As a result of numerical studies, that with an increase in the transverse shear and a decrease in the radius of the rigid inclusion, the deflection value increases several times. It was also found that the effect of transverse shear is especially important for small diameters of rigid inclusions.

Keywords: *analytical-numerical solution, theory of S.P. Timoshenko, shallow spherical shell, transversal isotropic material, rigid inclusion, normal deflection..*

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь
ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк

Получено 08.09.2021

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol
Donetsk National University, Donetsk

chekhov40@mail.ru
zakora41@yandex.ua

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 519:539.3:534.1

©2021. В.Н. Павлыш, С.В. Сторожев

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОЛОГО ШАРА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ В РАМКАХ ВЕРОЯТНОСТНОГО И НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННОГО ПОДХОДОВ

Представлены результаты исследования модели упругопластического деформирования полого изотропного шара под действием равномерно распределенного внутреннего давления с неопределенной, имеющей разбросы значения интенсивностью, на основе стохастического и нечетко-множественного подходов. Приведена аналитическая форма представления неопределенного эндогенного параметра радиуса границы между областями упругого и пластического деформирования, получаемая в случае применения обоих указанных подходов и сопоставлены результаты численной реализации соответствующих алгоритмов решений.

Ключевые слова: *полый изотропный шар, концентрическая геометрия, равномерное внутреннее давление, модель упругопластического деформирования, радиус пластической зоны, учет неопределенности параметра давления, стохастическая методика анализа, конечно-множественная методика анализа.*

Введение и цели исследования. Задача упруго-пластического деформирования полого шара под действием внутреннего давления рассматривалась в работах [1–5] в контексте описания аналитического подхода к построению ее решения, анализа обнаруживаемых при исследовании физико-механических эффектов, интерпретации получаемых результатов в прикладных аспектах, связанных с расчетами сосудов высокого давления, взрывных камер и т.д. Решения, представленные в [1–5], получены в рамках постановки соответствующей задачи в детерминистической постановке без учета фактора неопределенности ее параметров, в частности параметра интенсивности равномерного внутреннего давления. В работе [6] модель упругопластического деформирования полого шара под действием внутреннего давления исследована при учете случайного показателя интенсивности равномерного внутреннего давления с задаваемой плотностью распределения вероятностей в рамках стохастического подхода.

Целью исследования, представляемого в настоящей работе, является анализ модели упругопластического деформирования полого шара под действием внутреннего давления неопределённой интенсивности на основе применения нечетко-множественного подхода [7–9], и сопоставительный анализ методиче-

ских особенностей и результатов применения в исследованиях данной модели вероятностного [6, 10] и нечетко-множественного подходов.

1. Описание решения задачи в детерминистической постановке. В представленной в работе [6] интерпретации, результаты анализа модели упругопластического деформирования полого шара с внутренним радиусом a и внешним радиусом b , к поверхности внутренней полости которого приложено удовлетворяющее условию $q_0 < q < q_s$ равномерно распределенное давление интенсивности q , в области упругого деформирования описываются соотношениями для характеристик напряженного состояния

$$\sigma_r = q_1(1 - b^3/r^3), \sigma_\theta = q_1(1 + b^3/(2r^3)), \quad (1)$$

а в пластической области – соотношениями

$$\sigma_r = 2\sigma_s \ln(r/a) - q, \sigma_\theta = 2\sigma_s \ln(r/a) - q + \sigma_s. \quad (2)$$

В вышеприведенных выражениях σ_r и σ_θ – соответственно радиальные и тангенциальные напряжения в шаре;

$$q_0 = (2/3)\sigma_s(1 - a^3/b^3), q_s = 2\sigma_s \ln(b/a), q_1 = (q - 2\sigma_s \ln(\rho/a))(\rho^3/(b^3 - \rho^3)); \quad (3)$$

σ_s – предел текучести материала шара; $\rho \in [a, b]$ – радиус границы между областями упругого и пластического деформирования, определяемый из уравнения вида

$$F(\rho, a, b, \sigma_s, q) = q - 2\sigma_s (\ln(\rho/a) + (1/3)(1 - \rho^3/b^3)) = 0. \quad (4)$$

2. Алгоритм нечетко-множественного анализа модели учета неопределенности величины внутреннего давления. Из параметров рассматриваемой задачи, характеризующихся неопределённостью, соответственно [6], рассматривается только параметр равномерно распределенного давления q , приложенного к границе внутренней полости шара. В этом случае при постановке задачи описания неопределенных значений радиуса границы между областями упругого и пластического деформирования в рамках применения нечетко-множественного подхода [7–9] исходным соотношением является следующая из (4) неявная функциональная зависимость

$$\rho = G(a, b, \sigma_s, q), \quad (5)$$

к которой, в предположении об описании неопределенной характеристики q выпуклым нечетким множеством \tilde{q} с разложением по множеству альфа-срезов вида

$$\tilde{q} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [q_\alpha, \bar{q}_\alpha], \quad (6)$$

применяется модифицированная форма эвристического принципа обобщения [7–9], и искомое представление для неопределенной нечетко-множественной величины $\tilde{\rho}$ записывается в виде

$$\tilde{\rho} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [G_\alpha(a, b, \sigma_s, q), \bar{G}_\alpha(a, b, \sigma_s, q)] = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha]. \quad (7)$$

Для получения представлений $\underline{G}_\alpha(a, b, \sigma_s, q)$, $\overline{G}_\alpha(a, b, \sigma_s, q)$ с использованием формулы (4) находится выражение для частной производной

$$\partial\rho/\partial q = (2\sigma_s \rho^{-1}(1 - \rho^3/b^3))^{-1}, \quad (8)$$

на основе которого и соответственно физическим соображениям о характере зависимости ρ от q , формулируется оценка

$$\partial\rho/\partial q \geq 0. \quad (9)$$

С учетом (9) записываются представления

$$\underline{\rho}_\alpha = G(a, b, \sigma_s, \underline{q}_\alpha), \overline{\rho}_\alpha = G(a, b, \sigma_s, \overline{q}_\alpha). \quad (10)$$

В частном случае описания \tilde{q} симметричным нечетким гауссовым числом [7]

$$\underline{q}_\alpha = m_* - \sigma_*(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \overline{q}_\alpha = m_* + \sigma_*(\ln \alpha^{-2})^{1/2},$$

и величины $\underline{\rho}_\alpha$, $\overline{\rho}_\alpha$ соответственно определяются из уравнения (4) при

$$q = \underline{q}_\alpha, q = \overline{q}_\alpha. \quad (11)$$

Результатом реализации описанного расчетного алгоритма является получение функции принадлежности для нечетко-множественной характеристики $\tilde{\rho}$, позволяющей делать заключения о степени уверенности в том, что радиус зоны пластического деформирования принимает определенные значения из области носителя нечеткого множества $\tilde{\rho}$ при заданном нечетком описании \tilde{q} интенсивности нормального внутреннего давления.

3. Алгоритм вероятностного анализа модели учета неопределенности величины внутреннего давления. В рамках применения к анализу рассматриваемой модели вероятностно-стохастического подхода, описываемого в работе [6], полагается, что нормальное давление q является случайной величиной с плотностью распределения вероятностей $\varphi(q)$. В этом случае, согласно [6], функция распределения $\Phi(\rho)$ для случайного параметра ρ радиуса границы между областями упругого и пластического деформирования с использованием представления (4) может быть записана в виде

$$\Phi(\rho) = \begin{cases} 0, & \rho < a; \\ \int_{-\infty}^{\underline{q}(\rho)} \varphi(q) dq, & a \leq \rho \leq b; \\ 1, & \rho > b. \end{cases} \quad (12)$$

В случае задания закона нормального распределения давления q

$$\varphi(q) = (q_\sigma(2\pi)^{1/2})^{-1} \exp(-(q - q_0)^2/(2q_\sigma^2)), \quad (13)$$

в котором q_0 – среднее значение (математическое ожидание) и q_σ – среднеквадратическое отклонение (дисперсия), для $\Phi(\rho)$, соответственно, можно записать представление

$$\Phi(\rho) = \begin{cases} 0, & \rho < a; \\ \Psi((q(\rho) - q_0)/q_\sigma) + 1/2, & a \leq \rho \leq b; \\ 1, & \rho > b. \end{cases} \quad (14)$$

в котором фигурирует функция Гаусса

$$\Psi(z) = (2\pi)^{1/2} \int_0^z \exp(-t^2/2) dt. \quad (15)$$

В рамках вероятностного подхода в [6] получены описания для вероятностей событий, которые заключается в прохождении границы раздела упругой и пластической зон деформирования в области

$$a \leq r_1 < \rho < r_2 \leq b \quad (16)$$

либо в области

$$a < \rho < r_2 \leq b. \quad (17)$$

При рассматриваемом варианте распределения q

$$\begin{aligned} P \{a \leq r_1 < \rho < r_2 \leq b\} &= \\ &= \int_{q(r_1)}^{q(r_2)} \varphi(q) dq = \Psi((q(r_2) - q_0)/q_\sigma) - \Psi((q(r_1) - q_0)/q_\sigma), \end{aligned} \quad (18)$$

$$P \{a < \rho < r_2 \leq b\} = \int_{-\infty}^{q(r_2)} \varphi(q) dq = \Psi((q(r_2) - q_0)/q_\sigma) + 1/2. \quad (19)$$

Также, в [6] представлено статистическое обоснование выбора параметра

$$\beta = b/a, \quad (20)$$

обеспечивающего не возникновение предельного состояния в рамках требования о выполнении условия

$$q < q_s = 2\sigma_s \ln \beta \quad (21)$$

с заданной вероятностью P_0 , соответственно которому

$$P_0 = P\{q < q_s\} = \int_{-\infty}^{q_s} \varphi(q) dq. \quad (22)$$

Как показано в [6], при нормальном распределении q вида (13) в этом случае можно найти

$$\beta = \exp((q_0 + k(P_0)q_\sigma)/(2\sigma_s)), \quad (23)$$

а зависимость $k(P_0)$ устанавливается из соотношения

$$\Psi(k(P_0)) = P_0 - 1/2. \quad (24)$$

4. Численная реализация алгоритмов нечетко-множественного и вероятностного анализа модели, сопоставительный анализ результатов. Расчеты с применением соотношений, полученных в рамках двух рассматриваемых методик, осуществлены для конструкции виде полого шара с приведенными физико-механическим и геометрическим параметрами

$$a = 1.0 \cdot l_*, b = 3.0 \cdot l_*, \sigma_s = 10.0 \cdot p_*,$$

а также параметрами неконтрастного задания интенсивности внутреннего давления

$$m_* = q_0 = 12.0 \cdot p_*, \sigma_* = q_\sigma = 0.02 \cdot p_*,$$

где l_*, p_* – нормирующие параметры соответствующей физической размерности.

Результаты расчетов с применением нечетко-множественной методики на основе соотношения (7) представлены на рисунке 1 в виде графика функции принадлежности для нечетко-множественной характеристики радиуса зоны пластических деформаций $\tilde{\rho}$.

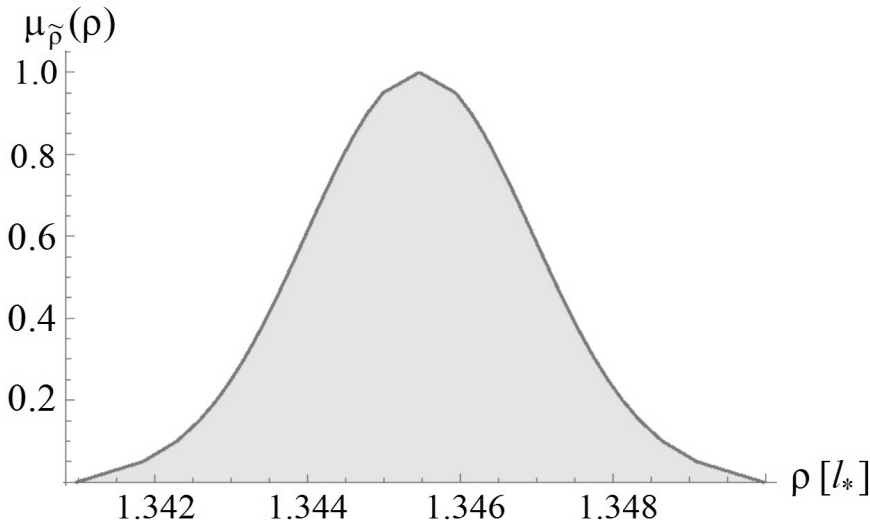


Рис. 1. Вид функции принадлежности $\mu_{\tilde{\rho}}(\rho)$.

Модальным значением для характеристики $\tilde{\rho}$ является величина $\rho = 1.34546$, интервалом на носителе, границы которого характеризуются показателем принадлежности 0.01, является интервал $[1.341, 1.350]$.

Результаты расчетов по вероятностно-стохастической методике отражены на рисунке 2 в виде картины значений приведенного показателя вероятности $\bar{P} \{r = \rho\}$ для нормально распределенной случайной характеристики ρ радиуса

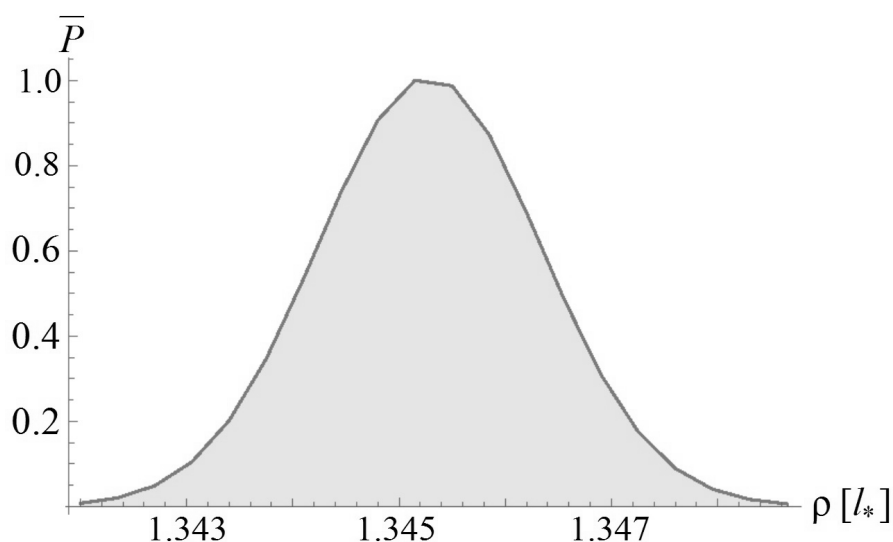


Рис. 2. Распределение приведенного показателя $\bar{P} \{r = \rho\}$

пластической зоны. Среднее (математическое ожидание) для данной случайной величины имеет расчетное значение $\rho_0 = 1.34515$, а областью определения $\bar{P} \{r = \rho\}$ является интервал $[1.342, 1.348]$.

Сопоставляя и характеризуя представленные расчетные результаты можно сделать вывод о самой высокой степени их идентичности в случае анализа рассматриваемой модели с применением нечетко-множественной и вероятностно-стохастической методик. Оценки модального значения $\tilde{\rho}$ и среднего для случайной величины радиуса пластической зоны при сходных описаниях неконтрастного экзогенного параметра интенсивности внутреннего давления различаются на величину порядка 0.02%; интервал носителя для нечетко-множественной оценки $\tilde{\rho}$ на крайне незначительную величину несущественно шире расчетного интервала области определения $\bar{P} \{r = \rho\}$. Таким образом, в рассмотренной ситуации возможного применения к модели учета неопределенности экзогенных параметров в модели упругопластического деформирования нагруженного внутренним давлением полого шара применение обоих рассматриваемых подходов приводит к практически идентичным результатам.

Выводы. Полученные с применением двух подходов (нечетко-множественного и вероятностно-стохастического) результаты анализа меры влияния факторов неопределенности в модели определения радиуса границы между областями упругого и пластического деформирования полого шара при действии равномерно распределенного внутреннего давления с характеризуемой разбросами интенсивностью, дают основание для заключения о предельно высокой мере соответствия в значениях оцениваемого эндогенного параметра. Таким образом, можно сделать вывод о том, что в ситуации возможного применения указанных подходов к учету неконтрастности экзогенных параметров модели дефор-

мирования, при сходных способах задания неопределенных исходных характеристик, оба подхода приводят к эквивалентным верифицированным результатам с незначительным относительным расширением прогнозируемой области разброса значений результирующих параметров в случае применения методов теории нечетких множеств.

1. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1976. – 984 с.
2. *Вольмир А.С.* Устойчивость тороидальных композитных оболочек / А.С. Вольмир, К.З. Хайрнатов // *Механика композитных материалов.* – № 3. – 1982. – С. 454–459.
3. *Wenmin R.* A survey of works on the theory of toroidal shells and curved tubes / R. Wenmin // *Acta Mechanica Sinica.* – Vol. 15. – No. 3. – 1999. – P. 225–234. doi: 10.1007/BF02486150
4. *Biachut J.* On buckling of toroidal shells under external pressure / J. Biachut, O. Jaiswal // *Computers & Structures.* – Vol. 77. – No. 3. – 2000. – P. 233–251. doi: 10.1016/S0045-7949(99)00226-6
5. *Croll J.G.A.* Stability in Shells / J.G.A. Croll // *Nonlinear Dynamics.* – Vol. 43. – 2006. – P. 17–28.
6. *Sun B.* Closed-Form Solution of Axisymmetric Slender Elastic Toroidal Shells / B. Sun // *Journal of Engineering Mechanics.* – Vol. 136. – No. 10. – 2010. – P. 1281–1288. doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000175
7. *Asratyan M.G.* Mixed boundary-value problems of thermoelasticity for anisotropic-in-plan inhomogeneous toroidal shells / M.G. Asratyan, R.S. Gevorgyan // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* – Vol. 74. – No. 3. – 2010. – P. 306–312. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2010.07.006
8. *Болотин В.В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. – М.: Стройиздат, 1982. – 352 с.
9. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел / В.А. Ломакин. – М.: ЛЕНАНД, 2014. – 144 с.
10. *Дилигенский Н.В.* Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Н.В. Дилигенский, Л.Г. Дымова, П.В. Севастьянов. – М.: Издательство Машиностроение - 1, 2004. – 397 с.
11. *Ротштейн А.П.* Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов / А.П. Ротштейн, С.Д. Штовба, А.Н. Козачко. – Винница: УНІВЕРСУМ, 2007. – 215 с.
12. *Нгуен Куок Ши* Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.
13. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
14. *Bede B.* Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic / B. Bede. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. – 276 p.
15. *Vyskub V.G.* Model of fuzzy estimation of mechanical stress concentration for aerospace and industrial flat structures with polygonal holes of uncertain curvature at rounded corner points / V.G. Vyskub, E.I. Mutina, V.I. Storozhev, S.V. Storozhev // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 537 (2019), 022013, URL: <http://doi:10.1088/1757-899X/537/2/022013>.
16. *Мутин Д.И.* Учет разброса значений экзогенных параметров в модели устойчивости тонкой цилиндрической оболочки при равномерном осевом сжатии / Д.И. Мутин, С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // *Донецкие чтения 2020: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы V Международной научной конференции (Донецк, 17-18 ноября 2020 г.).* – Том 1: Физико-математические и технические науки. Часть 1. –

Донецк: Изд-во ДонНУ, 2020. – С. 77–79.

17. *Выскуб В.Г.* Оценки влияния разброса параметров в прикладных моделях устойчивости цилиндрических оболочек / В.Г. Выскуб, Д.И. Мугин, С.В. Сторожев, Зыюнг Минь Хай // *Механика твердого тела.* – 2020. – Вып. 50. – С. 133–144.
18. *Grzegorzewski P.* Trapezoidal approximations of fuzzy numbers / P. Grzegorzewski, E. Mrrowka // *Fuzzy Sets Syst.* – 2005. – Vol. 153. – P. 115–135.
19. *Ban A.I.* Trapezoidal approximation and Aggregation / A.I. Ban, L.C. Coroianu, P. Grzegorzewski // *Fuzzy Sets Syst.* – 2011. – Vol. 177. – P. 45–59.

V.N. Pavlysh, S.V. Storozhev

Investigation of the elastoplastic deformation model of a hollow sphere under action of internal pressure witch using of probabilistic and fuzzy-set approaches.

The paper presents the results of a study of a model of elastoplastic deformation of a hollow isotropic sphere under the action of a uniformly distributed internal pressure with an indefinite intensity with scatter values, based on the stochastic and fuzzy-multiple approaches. An analytical form of representation of the indefinite endogenous parameter of the radius of the boundary between the regions of elastic and plastic deformation, obtained in the case of applying both of these approaches, is given and the results of the numerical implementation of the corresponding algorithms for solving.

Keywords: *hollow isotropic sphere, concentric geometry, uniform internal pressure, model of elastoplastic deformation, radius of the plastic zone, accounting for the pressure parameter uncertainty, stochastic analysis method, finite-set analysis method.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный технический университет”,
Донецк
ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры”, Макеевка

Получено 02.06.2021

*Donetsk National Technical University, Donetsk
Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture,
Makeevka*

s.storozhev@donnasa.ru

ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

УДК 622.284.74

©2021. В.А. Канин, Е.Д. Ходырев, В.В. Васютина

ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАЗМЕРЫ ЦЕЛИКОВ УГЛЯ, ПОДЛЕЖАЩИХ УЧЕТУ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ЗОН ПГД

В статье изложены результаты аналитических и горно-экспериментальных исследований по определению предельных размеров целиков угля (L_n) и оценке их несущей способности, а также обобщен опыт отработки крутых пластов в зонах под и над межэтажными ленточными целиками. Установлено, что при размерах целиков $L \leq 0,7L_n$ они пластически деформируются и не являются источниками формирования зон повышенного горного давления.

Ключевые слова: угольные целики, горные породы, деформирование и разрушение пород, охрана горной выработки

Введение и общая характеристика подходов к решению рассматриваемой проблемы. При разработке крутых угольных пластов в условиях Центрального района Донбасса (ЦРД) для охраны откаточных и вентиляционных штреков часто оставляют ленточные угольные целики высотой 6–8 м, которые прорезаются углеспускными печами шириной 2,0 м через интервалы 4–5 м. Как правило, эти целики превышают размер $0,1l$ (где l – ширина зоны опорного давления) и поэтому в соответствии с требованиями [1] они рассматриваются как источники формирования в горном массиве зон повышенного горного давления (ПГД).

После отработки выше и ниже расположенных этажей построенные от этих целиков зоны ПГД (при многочисленности разрабатываемых в ЦРД сближенных пластов) иногда полностью перекрывают подготовленные к отработке этажи на смежных пластах. В этих условиях горные работы ведутся с постоянным применением текущего прогноза выбросо- и удароопасности, что значительно снижает их эффективность.

В то же время известно [2], что устойчивость целиков, а, следовательно, и проявление их влияния, определяются целым рядом факторов, таких как глубина горных работ, размеры целиков, ширина примыкающего к ним выработанного пространства, прочностные и упругие свойства угля и другие. Существует понятие о предельном размере целика, когда он по всей своей площади находится в предельно-напряженном состоянии. Этот размер (L_n) определяется по формуле:

$$L_n = \varepsilon \cdot x_0, \quad (1)$$

где x_0 – общий пролет выработки, разделенный целиком, включая и ширину целика, м, при $x_0 > 270$ м принимается $x_0 = 270$ м; ε – множитель, значения которого определяются по графику на рисунке 1 как функция показателей D и τ

$$D = \frac{k_* \cdot x_0}{\sigma_y \cdot m}, \quad (2)$$

$$\tau = -(1 - \varepsilon) \frac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1}, \quad (3)$$

где k_* – комплексный показатель прочностных свойств угля, МПа. Для углей ЦРД по данным [3] $k_* = 1,75 \cdot \sigma_c$; m – мощность угольного пласта, м; S_2 – размер большей прилегающей к целику выработки, м; S_1 – размер меньшей прилегающей к целику выработки, м; σ_y – напряжения, действующие по нормали к напластованию на уровне разрабатываемого пласта, МПа, определяются выражением:

$$\sigma_y = -\gamma \cdot H(\lambda \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha), \quad (4)$$

где γ – плотность горных пород, т/м³, в среднем для горного массива в условиях Донецкого бассейна $\gamma = 2,5$ т/м³; λ – коэффициент бокового распора, равный 0,65; α – угол падения пласта, градус; H – глубина разработки пласта, м.

1. Анализ результатов исследований. Расчет τ осуществляется последовательным приближением. На первом шаге вычислений принимается $\varepsilon = 0$. При этом значении ε по выражению (3) рассчитывается величина $\tau_{(\varepsilon=0)}$ и по графикам (рис.1) находится ориентировочная величина ε .

На втором и последующих шагах вычислений данная процедура повторяется до тех пор, пока два последующих значения ε не будут отличаться на величину более 0,005.

В ЦРД каждая шахта имеет практически постоянную высоту этажей, равную 100–20 м по вертикали, и тогда, приняв $S_1 = S_2$ можно считать $\tau = 0$, при этом $x_0 = 250$ –270 м. Прочность угля по результатам исследований [3] составляет 3–6 МПа. В расчетах можно принять в среднем $\sigma_c = 5$ МПа и тогда $k^* = 1,75 \cdot \sigma_c = 8,7$ МПа. Средний угол падения пластов в ЦРД составляет примерно $\alpha \approx 57 \pm 3^\circ$.

На основании этих данных были рассчитаны предельные значения ширины межэтажных целиков угля (L_n) в зависимости от глубины их залегания (H) и мощности угольного пласта (m). Результаты этих расчетов представлены в таблице 1. В случаях изменения хотя бы одного из показателей α, S_1, S_2, x_0 от приведенных выше значений величину L_n необходимо рассчитывать по формуле (1).

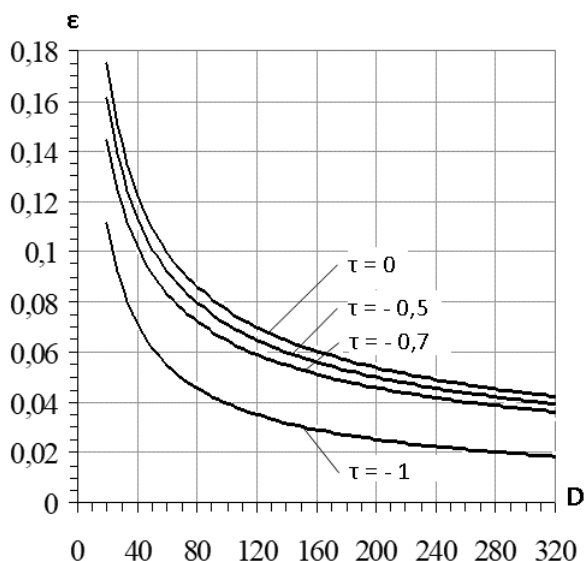


Рис. 1. Определение значений ϵ в зависимости от D и τ , вычисленных по формулам (2) и (3)

Таблица 1. Предельные значения ширины межэтажных целиков угля

Глубина залегания целика, м	Предельный размер* ширины целика угля, (L_n) при мощности угольного пласта, м									
	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,3	1,5	1,7	2,0
630	11	12	13	14	15	16	17	18	19	21
750	12	13	14	15	16	17	18	19	20	22
860	13	14	15	16	17	18	20	21	22	24
970	14	15	16	17	18	20	21	22	23	25
1080	15	16	17	18	19	21	22	23	25	27
1190	16	17	18	19	20	22	23	24	26	29

Для оценки напряженно – деформированного состояния межэтажных целиков угля РАНИМИ на ряде шахт ЦРД были проведены специальные горно-экспериментальные исследования.

В качестве примера на рисунке 2 представлены результаты наблюдений, выполненные на пласте m_6^2 шахты им. Н.А. Изотова. При отработке этого пласта мощностью 0,7 м на восточном крыле горизонта 630 м межэтажный ленточный целик высотой 8 м был оконтурен выработанным пространством вышележащего этажа гор. 630 м и вентиляционным штреком отрабатываемой лавы гор. 870 м. Деформации целика измерялись с помощью глубинных и контурных реперов, заложенных соответственно в угольном пласте и боковых породах. Наблюдения велись до подхода лавы гор. 870 м к реперным станциям с расстояния 70 м и заканчивались после ее отхода от этих станций на такое же расстояние 70 м.

Как видно из рисунке 2, относительные деформации сжатия пласта по нормали к напластованию составили $\epsilon_H = 200\text{--}260$ мм/м, а деформации растяже-

ния по напластованию – $\varepsilon_n > 6$ мм/м. По результатам этих наблюдений можно сделать вывод, что рассматриваемый целик угля высотой 8 м после отработки смежных этажей теряет свою несущую способность и деформируется в пластическом режиме.

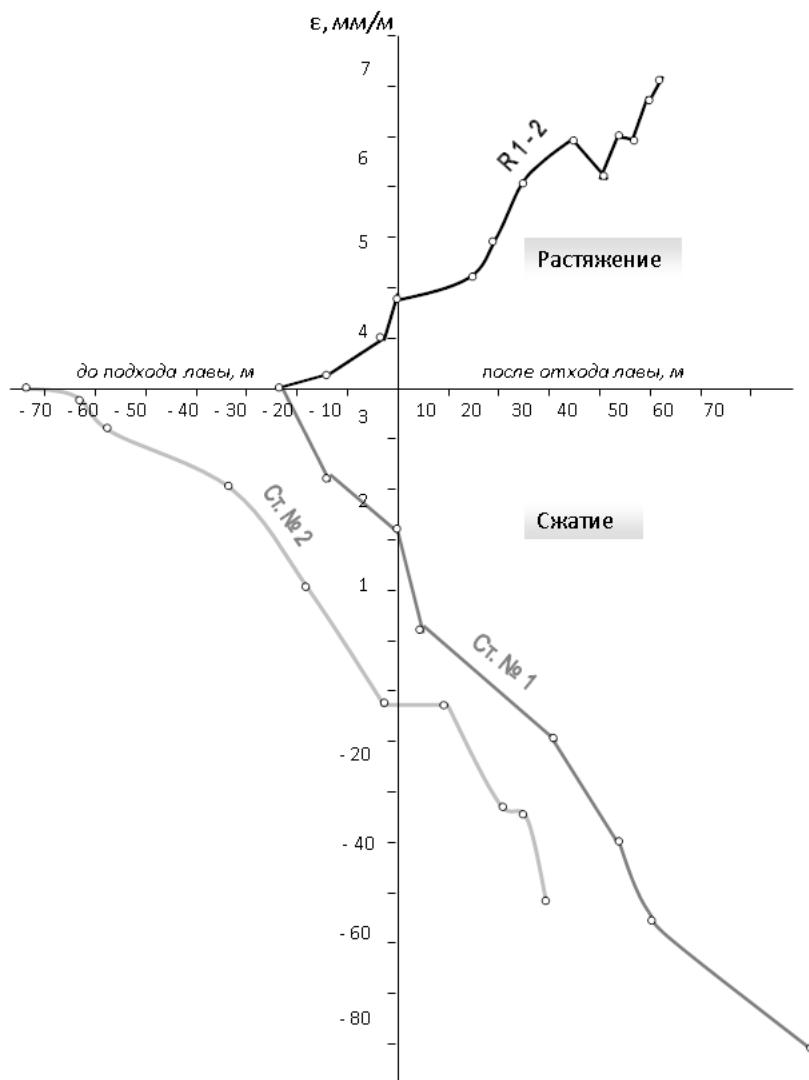


Рис. 2. Результаты наблюдений за деформациями угольного целика пласта m_6^2 гор. 630 м на шахте им. Н.А. Изотова: R 1-2 - глубинные реперы; Ст. 1, 2 - станции с контурными реперами

Расчетный размер предельной ширины этого целика, согласно приведенной выше таблицы, составляет 12 м, ширина зоны опорного давления (1) для условий пласта m_6^2 по данным [1] равняется 40 м. В этом случае контрольные соотношения для оценки размеров целиков угля, подлежащих учету при построении зон ПГД, составят $L/L_n = 0,67$ и $L/l = 0,2$.

На шахте им. Н.А. Изотова была выполнена также горно-экспериментальная оценка влияния межэтажного ленточного целика, оставленного на пласте k_7 , на состояние нижерасположенного пласта k_5^2 .

Целик высотой 18 м был оставлен на гор. 870 м, мощность пласта $k_7 - 0,9$ м, величина междупластья равна 55 м. Оценка этого влияния осуществлялась в очистном забое пласта k_5^2 с использованием нормативной методики [1] по выходу буровой мелочи (p) и изменению начальной скорости газовыделения (q_n) при бурении контрольных шпуров диаметром 42–45 мм.

В результате выполненных исследований было установлено, что и в надработанной зоне пласта k_5^2 , и непосредственно в зоне, расположенной под целиком угля, оставленного на пласте k_7 , показатели p и q_n соответствовали значениям, характеризующим защищенную (разгруженную) зону, то есть зона ПГД на пласте k_5^2 от межэтажного целика на пласте k_7 фактически отсутствовала.

Согласно выполненным расчетам (табл. 1) предельный размер целика угля в условиях отработки пласта k_7 на шахте им. Н.А. Изотова составляет $L_n = 16$ м, $l = 50$ м. Отсюда, $L/L_n = 1,12$ и $L/l = 0,36$.

В рассмотренных выше горнотехнических условиях лава пласта k_5^2 на шахте им. Н.А. Изотова работала на протяжении более 300 м без проявления каких либо признаков газодинамических и динамических явлений.

На шахтах ЦРД имеется достаточно большой опыт безопасной разработки выбросо- и удароопасных пластов под и над межэтажными угольными целиками, оставленными на смежных пластах.

Так, на шахте им. Ф.Э. Дзержинского в течение последних трех лет, начиная с 1995 г., пласт l_3 на горизонте 1026 м разрабатывался под ленточным межэтажным целиком шириной $L = 6$ м, оставленным на горизонте 916 м при отработке пласта l_5 мощностью 0,6 м (величина междупластья 68 м). На этом же горизонте пласт $l_7^в$ отработывался под целиком шириной 10 м, оставленным на горизонте 916 м при отработке пласта m_3 мощностью 1,8 м (величина междупластья 106 м).

Интересующие нас параметры и их соотношения в рассмотренных условиях шахты им. Ф.Э. Дзержинского составляют:

- для пласта l_5 : $l = 40$ м, $L_n = 13$ м, $L/L_n = 0,46$, $L/l = 0,15$;
- для пласта m_3 : $l = 65$ м, $L_n = 22$ м, $L/L_n = 0,45$, $L/l = 0,15$.

Разработка этих пластов осуществляется с текущим прогнозом выбросоопасности, но опасные значения его показателей, характеризующие повышенную напряженность и газодинамическую активность пласта на участках, расположенных под указанными целиками угля, не зарегистрированы.

Выполненными ранее исследованиями ВНИМИ [2] было установлено, что при ширине угольного целика $L \leq 0,7L_n$ происходит его раздавливание с потерей несущей способности, и он перестает играть роль штампа, передающего дополнительную нагрузку на окружающий горный массив. К этому следует добавить, что на пластах крутого падения несущая способность целика может дополнительно снижаться за счет наблюдаемых подвижек боковых пород по на-

пластованию со стороны всячего бока пласта [4], которые происходят по наиболее ослабленным контактам.

Выводы. Исходя из вышеизложенных результатов исследований и учитывая опыт ведения горных работ над и под целиками смежных пластов на шахтах ЦРД, можно заключить, что межэтажные ленточные целики угля размером $L \leq 0,7L_n$ теряют свою несущую способность и, пластически деформируясь, не создают существенных концентраций напряжений. Следовательно, такие целики, а также идентичные им по размерам и условиям разработки, не являются источниками формирования повышенных напряжений и их можно не учитывать при построении зон ПГД.

1. Инструкция по безопасному ведению горных работ на шахтах, разрабатывающих пласты, склонные к горным ударам. – Л.: ВНИМИ, 1988. – 87 с.
2. Расчет и экспериментальная оценка напряжений в целиках и краевых частях пласта угля (методические указания). – Л.: ВНИМИ, 1979. – 130 с.
3. Ходырев Д.И. Обоснование и разработка комплекса мер борьбы с горными ударами на весьма тонких крутых пластах (применительно к условиям Центрального района Донбасса): автореф. дис. канд. техн. наук: 05.15.02. – ВНИМИ, 1981. – 25 с.
4. Правила охраны сооружений и природных объектов от вредного влияния подземных горных разработок на угольных месторождениях. – М.: Недра, – 1981. – 288 с.

V.A. Kanin, Y.D. Khodyrev, V.V. Vasyutina

The maximum size of the coal pillars to be taken into account when calculating of increased rock pressure zones.

The article presents the results of analytical and mining-experimental studies to determine the maximum size of coal pillars (L_p) and assess their bearing capacity, as well as summarizes the experience of working steep layers in the areas below and above the interfloor strip pillars. It is established that at the sizes of pillars $L \leq 0,7L_p$ they are plastically deformed and are not sources of formation of zones of the increased rock pressure.

Keywords: coal pillars, rocks, deformation and destruction of rocks, protection of mining.

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ), Донецк

Получено 30.06.2021

Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying (RANIMI), Donetsk
ranimi@ranimi.org

УДК 622.831.24

©2021. Н.И. Лобков, В.С. Маевский, А.А. Лобков

АЛГОРИТМ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ОПОРНОГО ДАВЛЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ РАБОТЫ ЛАВЫ

Приведены результаты исследования формирования опорного давления. Установлено, что изменения величины опорного давления зависят от строения породного массива кровли. Установлено, что опорное давление формируется изгибом породных слоев, которые составляют область полных сдвижений пород над выработанным пространством лавы.

Ключевые слова: очистной забой, лава, выработанное пространство, опорное давление, слои кровли, непосредственная кровля, основная кровля, обрушение, предел прочности.

Введение и постановка задачи. Анализ результатов исследований проявлений горного давления в очистных забоях [1–4] позволяет сделать вывод, что опорное давление на краевую часть пласта формируется изгибом породных слоев над выработанным пространством.

Исследования сдвижения вмещающего массива горных пород над выработанным пространством [1, 4, 5], позволили установить следующее. Над выработанным пространством породные слои прогибаются и обрушаются последовательно в направлении от пласта к поверхности. Область сдвижения породных слоев **ABCDE** по высоте ограничена, ее высота составляет в среднем 2/3 ширины выработанного пространства (рис. 1). Область сдвижения включает в себя зону беспорядочного обрушения кровли (1), зону упорядоченного обрушения кровли и прогиба слоев с потерей несущей способности (2), зону прогиба слоев без потери несущей способности (3).

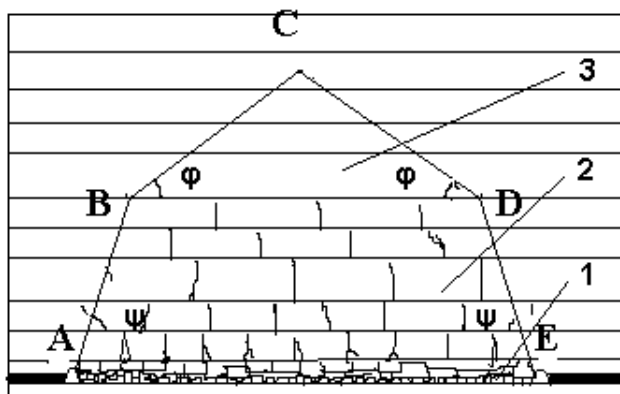


Рис. 1. Область сдвижения пород над выработанным пространством действующей лавы: **ABCDE** – область сдвижения породного массива в выемочном поле действующей лавы; 1; 2; 3 – соответственно зоны беспорядочного обрушения, упорядоченного обрушения и прогиба слоев без потери несущей способности.

Зоны (1) и (2) ограничены линиями, проведенными под углом обрушения пород ψ к плоскости залегания пласта, а зона (3) ограничена линиями, проведенными под углом изгиба пород φ . Имея область сдвижения кровли логично предположить, что опорное давление формируется изгибом слоев, входящих в эту область. Приведенная на рисунке область сдвижения характеризует напряженно-деформированное состояние породного массива над выемочным полем отработанной лавы. Формирование области сдвижения начинается с момента отхода лавы от разрезной печи. Максимальный изгиб породных слоев в пределах упругости происходит до их первичной посадки.

По мере отхода лавы от разрезной печи растет длина выработанного пространства l (рис. 2). Увеличение площади выработанного пространства (при постоянной длине лавы) ведет к увеличению числа породных слоев, изгибающихся над ним, под действием силы тяжести, что видно на рисунке 2, по увеличению областей сдвижения пород над выработанным пространством.

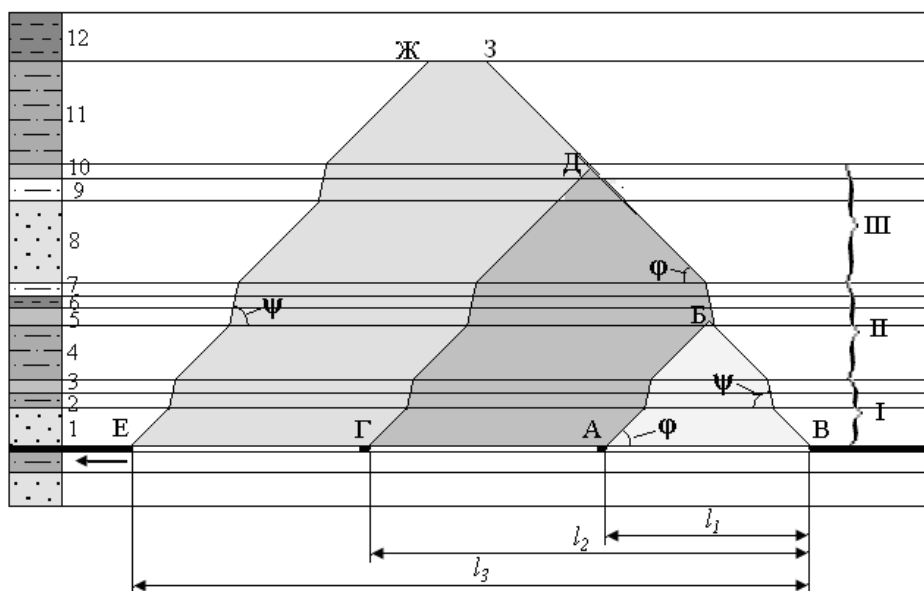


Рис. 2. Формирование области сдвижения пород при отходе лавы от разрезной печи. АБВ, ГДВ, ЕЖЗВ – области сдвижения породных слоев при отходе лавы от разрезной печи на расстояние l_1, l_2, l_3 – соответственно; 1–12 – порядковые номера породных слоев кровли; $\varphi = 45 - 50^\circ$ – угол изгиба породных слоев; $\psi = 78 - 80^\circ$ – угол обрушения породных слоев кровли; \leftarrow направление подвигания лавы; I, II, III – группы породных слоев.

При отходе лавы от разрезной печи на расстояние l_1 в сдвижение приходят слои №1–№4. Причем слои №1 и №4 изгибаются в пределах упругости, а слои №2 и №3 обрушаются на слой №1. С отходом лавы на расстояние l_2 в сдвижение приходят слои №1–№10. В этом случае слои №2 и №3 обрушаются на слой №1, а слои №5, №6 и №7 на слой №4. Слои №1 и №4 изгибаются и служат породами – мостами, т.е. несут на себе вес обрушившихся породных слоев. Перед первичной

посадкой слоя №1 (при отходе лавы на величину l_3 предельного пролета слоя 1) в сдвигение приходят породные слои №1–№11. Слои №1, №4, №8 и №11 изгибаясь, висят над выработанным пространством. Добавляется обрушение слоев №9 и №10 на слой №8.

Таким образом, для породного массива, представленного на рисунке 2, формировать опорное давление на краевые части пласта перед первичной посадкой слоя №1 будут три группы слоев I, II, III. При дальнейшем подвигании лавы и превышении предельного пролета слоя №1 произойдет его разрушение и первичная посадка первой группы слоев. С дальнейшим увеличением длины выработанного пространства и превышением предельного пролета второй и третьей групп слоев произойдет последовательное их обрушение. С обрушением групп слоев значение максимального давления уменьшается.

Напряжения, возникающие в зоне действия временного опорного давления от изгиба слоев как плит, жестко заземленных с четырех сторон, вызывают разрушение породы.

Применение в качестве выемочного оборудования механизированных комплексов предопределяет повсеместное использование способа управления кровлей полным обрушением. При этом способе отмечаются максимальные величины изгиба породных слоев над выработанным пространством и формируются повышенные напряжения в зоне опорного давления [6, 7]. Под действием повышенных или максимальных напряжений кровля разрушается крупными блоками или мелкими фракциями в зависимости от прочности породы, характера и величины действующих напряжений. Большой объем наблюдений позволил сделать выводы, что обрушения кровли в очистных забоях в виде крупных блоков (более 1 м) происходят при разрушении пород от действия растягивающих напряжений. Мелкими фракциями обрушается кровля, разрушение которой происходит под действием касательных напряжений. Указанные обрушения кровли ведут к длительным остановкам очистных забоев, потерям добычи угля. Кроме того дополнительные затраты на ликвидацию последствий аварийных обрушений пород увеличивают себестоимость угля. Вышеуказанные причины потерь в угольной промышленности требуют разработки универсального метода прогноза поведения кровли при проектировании и ведении очистных работ.

1. Методы исследования разрушения и обрушения пород в призабойном пространстве. Попытки создания расчетных методов разрушения и обрушения пород в призабойном пространстве лав пологих пластов предпринимали научные школы Донбасса, Ленинграда, Москвы, Алма-Аты и других регионов СНГ. Однако созданные методы, основанные на представлении породного массива сплошным и однородным, удовлетворительно использовались на исследуемых участках угольных пластов. Распространение их на другие бассейны или даже на другие участки одного бассейна давало значительные погрешности в расчетах и требовало дополнительных исследований.

Главной причиной, тормозящей решение данной проблемы, является на наш взгляд недостаточно четкое представление различий в механизме сдвигения

породного массива и формирования опорного давления в процессе работы лавы и над выработанным пространством после отработки выемочного поля лавой.

Последовательный изгиб породных слоев над выработанным пространством в процессе отработки угольного пласта, приводящий к развитию области сдвижения в породном массиве, предопределяет необходимость исследования характера взаимодействия породных слоев до первичной посадки основной кровли. Наиболее доступным методом исследований является физическое моделирование на моделях из эквивалентных материалов. Согласно методике моделирования [8], для обеспечения максимального подобия моделируемого массива натурным условиям, применялись модели из эквивалентных материалов масштабом 1 : 300, позволяющие моделировать последовательную выемку трех лав.

Результаты моделирования на эквивалентных материалах позволили установить, что угол наклона линии изгиба слоя к плоскости пласта $\varphi = 45 - 50^\circ$, а линии обрушения $\psi = 76 - 80^\circ$.

На рисунке 3 представлена одна из схем образования области сдвижения пород перед первичной посадкой основной кровли, наблюдаемых при моделировании. Вмещающий массив, состоящий из породных слоев, представлен балками лежащими одна над другой. По мере выемки угольного пласта происходит изгиб слоя №1 над выработанным пространством, при этом слой №2 и №3 изгибаются вместе с ним и служат пригрузкой первому.

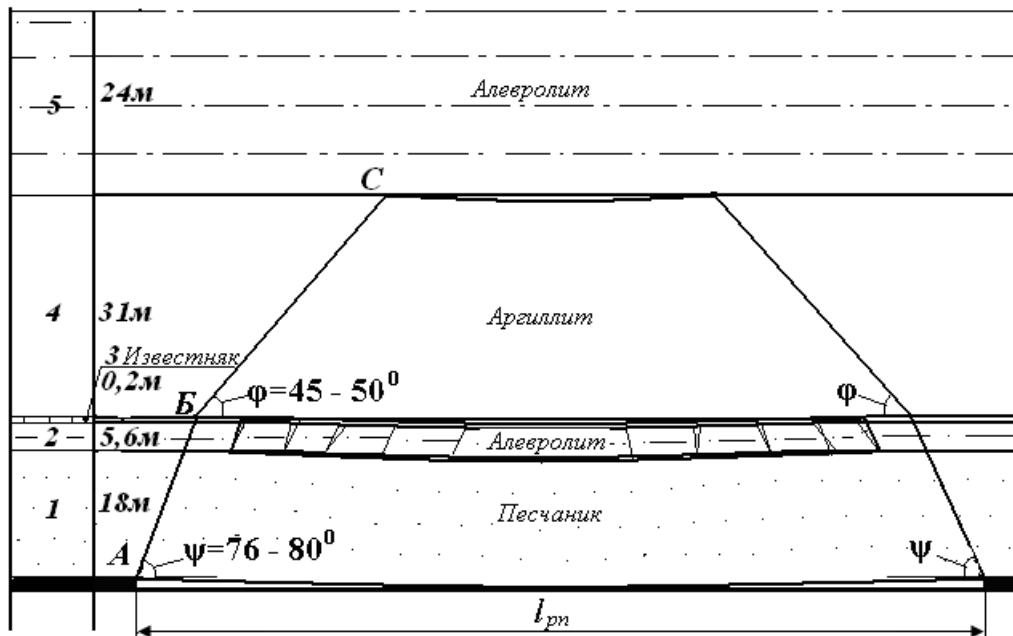


Рис. 3. Схема образования области сдвижения пород перед первичной посадкой основной кровли.

Максимальная величина изгиба (рис. 1) слоя №1 (до обрушения) наблюдается в середине выработанного пространства и ее значение (рис. 4, а) говорит

об упругом деформировании слоя.

При дальнейшей выемке пласта, над выработанным пространством с течением времени наблюдался процесс нарушения сплошности массива, последующее обрушение слоя №1 и вышележащих слоев (рис. 4, б). Каждая область сдвига (рис. 3), может быть построена с помощью линий изгиба и обрушения слоев.

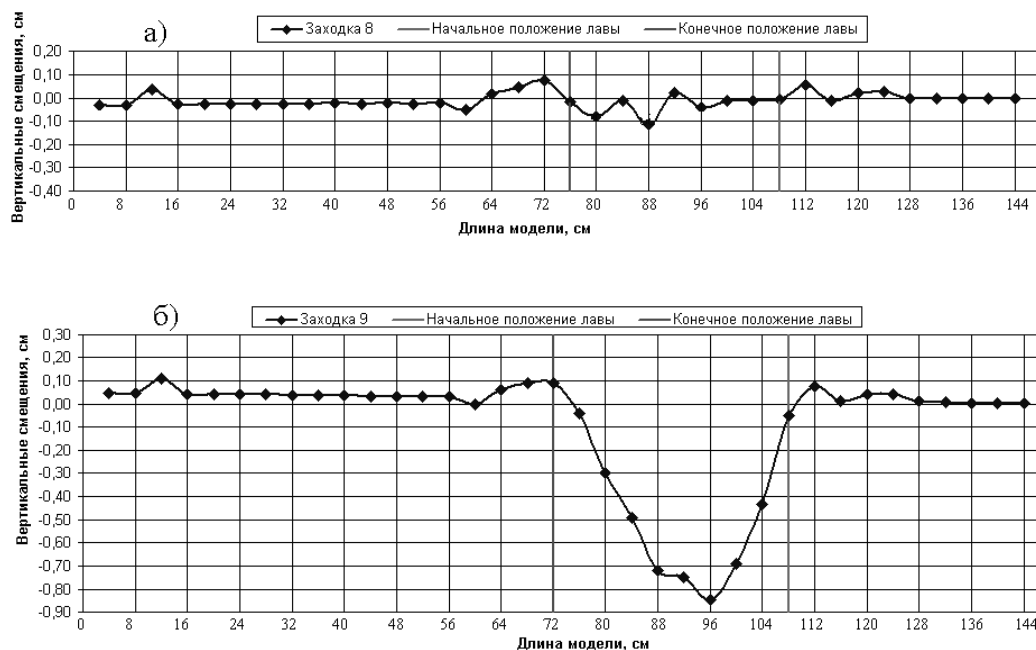


Рис. 4. Вертикальные смещения слоя №1 а) перед; и б) после первичной посадки.

Аналогично образуются области сдвига породных слоев над выработанным пространством в породных массивах различного строения.

В свою очередь, параметры области сдвига пород над выработанным пространством позволяют по данным геологоразведки установить число слоев, пришедших в сдвигение, что дает возможность определять величину опорного давления.

При определении максимальной величины изгиба следует учитывать, что породные слои в кровле длинных одиночных очистных забоев (лав) могут быть представлены балками, жестко зацементированными с двух сторон [9].

Разрушение и обрушение породного слоя (первичная посадка) происходит при потере им несущей способности над выработанным пространством вследствие действия разрушающих напряжений.

Аналитические исследования изгиба балки с помощью компьютерного моделирования [10] позволили получить картину распределения напряжений в изгибающемся породном слое (рис. 5).

Из рисунка видно, что величина максимальных растягивающих напряже-

ний, образованных при изгибе породного слоя, превышает величину максимальных сжимающих. А если учесть, что предел прочности породы на растяжение, в среднем, на порядок меньше предела прочности породы на сжатие, то разрушающими следует считать горизонтальные растягивающие напряжения. Это подтверждают и результаты физического моделирования на моделях из эквивалентных материалов.

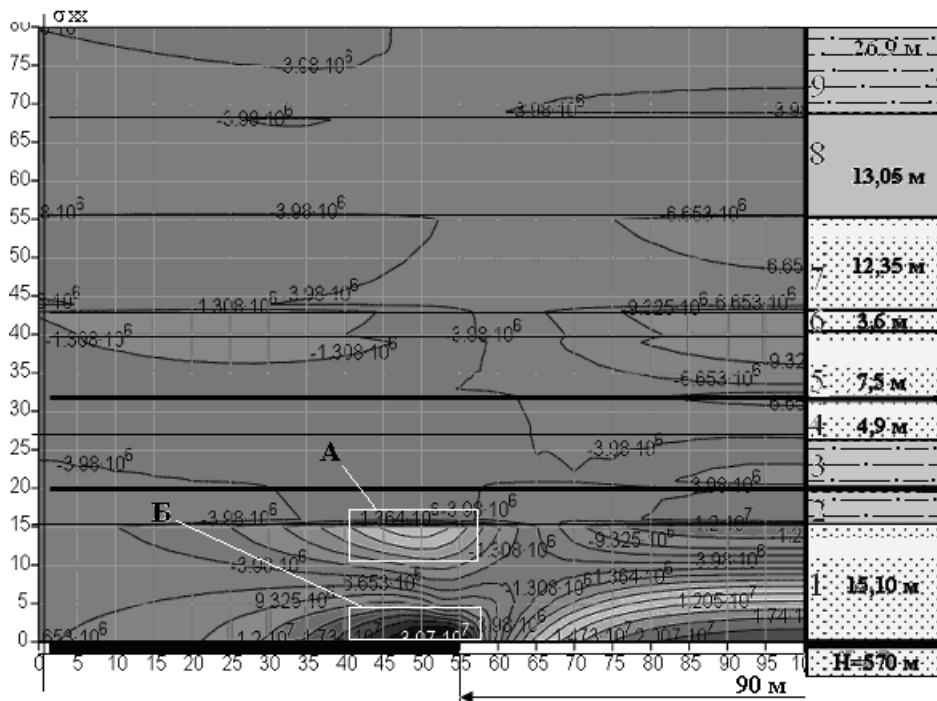


Рис. 5. Распределение горизонтальных напряжений в изгибающемся слоистом, породном массиве; А и Б – зоны максимальных растягивающих и сжимающих напряжений

На рисунке 6 приведена схема распределения горизонтальных растягивающих и сжимающих напряжений. На верхней кромке породного слоя сконцентрированы растягивающие напряжения.

При отходе лавы на величину предельного пролета кровли (L_n) в точке 1 начнет зарождаться трещина. При пересечении трещиной слоя по всей мощности (достижении точки 2) произойдет обрушение слоя. Распространение разрушающей трещины происходит практически мгновенно по сравнению со временем подвигания лавы на ширину захвата комбайна.

Условие для образования трещины записывается в следующем виде

$$\frac{2\pi\sigma^2 l_T}{E} \Delta l_T = 4\Gamma \Delta l_T, \quad (1)$$

где σ – действующее напряжение, МПа; Δl_T – критическая длина трещины, м; E – модуль упругости, МПа; Γ – поверхностная энергия тела, Дж/м².

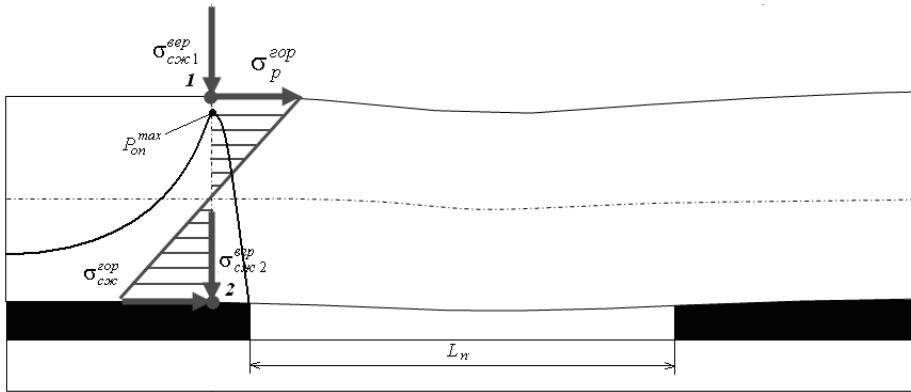


Рис. 6. Схема распределения напряжений в заделке слоя при его изгибе.

Разрушение породного слоя при изгибе начнется с роста существующей трещины под действием возникших напряжений, критическая длина которой определится из выражения:

$$l_{\tau} = \frac{2EG_c}{\pi\sigma_p^2}, \text{ м} \quad (2)$$

где G_c – эффективная поверхностная энергия, Дж/м²; σ_p – предел прочности породы на растяжение, МПа.

Максимальная величина горизонтальных напряжений в породном слое может быть определена, как изогнутой балки, при ее жестком защемлении с двух сторон на опорах [6]

$$\sigma_p = \frac{ql_{np}^2}{2h^2}, \text{ МПа} \quad (3)$$

при изгибе консольной балки с жестким защемлением

$$\sigma_p = \frac{3ql_{np}^2}{h^2}, \text{ МПа} \quad (4)$$

где q – распределенная нагрузка на породный слой, МН/м²; l_{np} – предельный пролет слоя перед обрушением, м; h – мощность несущего породного слоя, м.

Величина распределенной нагрузки, образованная весом одного слоя

$$q_i = \gamma h, \text{ МН/м}^2 \quad (5)$$

где γ – объемный вес породы, МН/м³.

Величина распределенной нагрузки, образованной весом группы слоев

$$q = \sum_{i=1}^n \gamma_i h_i, \text{ МН/м}^2 \quad (6)$$

где $\sum q$ – суммарная нагрузка группы слоев, Мн/м²; n – количество слоев в группе.

Подставляя значения действующих напряжений (3, 4, 6) в (2) получаем выражения для определения предельного пролета группы слоев кровли над выработанным пространством. При первичном обрушении группы слоев

$$l_{np}^2 = \frac{2h_c^2}{\sum_{i=1}^n \gamma_i h_i} \sqrt{\frac{2EG_c}{\pi l_{np}}}, \text{ м}^2 \quad (7)$$

где $\sum_{i=1}^n \gamma_i h_i$ – распределенная нагрузка группы слоев, Мн/м². При вторичном обрушении группы слоев

$$l_{np}^2 = \frac{h_c^2}{3 \sum_{i=1}^n \gamma_i h_i} \sqrt{\frac{2EG_c}{\pi l_{np}}}, \text{ м}^2 \quad (8)$$

Значения предельных пролетов обрушающихся групп слоев необходимо для определения максимального опорного давления.

Опорное давление, формируемое группой слоев

$$P_{on} = \frac{\sum P_i^{max}}{S} + \gamma H \quad (9)$$

где P_i^{max} – максимальное давление слоя на опору, кН; H – глубина разработки, м; S – единичная площадка, м².

Величину максимального опорного давления можно определить как давление жестко защемленной балки на опору

$$P_i = \frac{1}{2} \gamma \cdot h \cdot l_{np}, \text{ МН} \quad (10)$$

где P_i – давление, передаваемое слоем на опору, МН; γ – объемный вес породы, МН/м³; h – мощность слоя, м; S – пролет слоя, м.

Выводы.

1. Установленные особенности формирования опорного давления позволяют определять количество породных слоев и разрушающие напряжения в каждом слое, входящем в область сдвижения пород.

2. Применяя энергетический критерий для описания предельного состояния пород перед разрушением можно определить шаг обрушения каждого породного слоя и величину максимального опорного давления в пределах выемочного поля лавы.

1. Канлыбаева Ж.М. Закономерности сдвижения горных пород в массиве / Ж.М. Канлыбаева. – Алма-Ата: Наука, 1968. – 108 с.
2. Давидянц В.Т. Измерения проявлений горного давления на шахтах Донецкого бассейна / В.Т. Давидянц, Г.Л. Козелев. – М.: Углетехиздат, 1952. – 116 с.
3. Борисов А.А. Управление горным давлением / А.А. Борисов, В.И. Матанцев, Б.П. Овчаренко. – М.: Недра, 1983. – 168 с.

4. Лобков Н.И. К вопросу о механизме формирования горного давления в лавах пологих пластов / Н.И. Лобков // Физико-технические проблемы горного производства. – Донецк: ООО «Апекс», 2003. – №6. – С. 81–87
5. Хохлов И.В. Комплексное исследование массива горных пород / И.В. Хохлов. – М.: Наука, 1986. – 163 с.
6. Управление кровлей в сложных горно-геологических условиях / В.Ф. Андрушко, Ю.Г. Саратикянц, Н.И. Лобков и др.; под ред. К.Ф. Сапицкого, – Киев.: Техника, 1985. – 128 с.
7. Борисов А.А. Основы геомеханики горных массивов / А.А. Борисов. – Л.: ЛГИ, 1989, – 294 с.
8. Насонов И.Д. Моделирование горных процессов / И.Д. Насонов. – М.: «Недра», 1978. – 256 с.
9. Бубнов И.Г. Труды по теории пластин / И.Г. Бубнов. – М., Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1953. – 423 с.
10. Определение разрушающих напряжений от прогиба слоев над выработанным пространством / Н.И. Лобков, А.И. Сергиенко, Л.В. Сергиенко и др. – Физико-технические проблемы горного производства – Донецк: ИФГП НАНУ, 2007. – Вып. №10. – С. 119–127.

N.I. Lobkov, V.S. Mayevsky, A.A. Lobkov

Algorithm for predicting the maximum abutment pressure during the operation of longwall.

The results of a study of the movement of the mountain massif are presented. It is established that the reference pressure is formed by the bending of the rock layers that enter the area of intense displacement above the developed space. Forward and lava formation discharge zone is formed.

Keywords: *cleaning face, lava, developed space, support pressure, roof layers, direct roof, main roof, collapse, ultimate strength.*

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ), Донецк

Оперативный государственный военизированный горноспасательный отряд министерства чрезвычайных ситуаций, Донецк

Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying (RANIMI), Donetsk

Operational State Paramilitary Mining Rescue Unit of the Ministry of Emergency Situations, Donetsk

ranimi@ranimi.org

Получено 02.07.2021