

ISSN 0136-4545

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

---

---

**Журнал  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ  
МЕХАНИКИ**

---

---

**№ 2 (79)**

**2022**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:** д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**

**ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:** д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**

**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:** **М.Н. Пачева**

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

*д-р техн. наук, проф. А.В. Анциферов, д-р техн. наук, проф. В.Е. Болнокин, д-р техн. наук, проф. Н.И. Болонов, д-р физ.-мат. наук, проф. А.О. Ватульян, д-р техн. наук, проф. Л.П. Вовк, д-р техн. наук, проф. В.А. Глазунов, д-р техн. наук, с.н.с. А.А. Глухов, д-р физ.-мат. наук, проф. А.С. Гольцев, д-р физ.-мат. наук, проф. Г.В. Горр, д-р техн. наук, проф. В.В. Губанов, д-р техн. наук, с.н.с. В.А. Дрибан, д-р физ.-мат. наук, проф. А.М. Ковалев, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. Б.И. Коносевиц, д-р физ.-мат. наук, проф. И.А. Моисеенко, д-р техн. наук, проф. В.Ф. Мущанов, д-р техн. наук, проф. В.Н. Павлыш, д-р техн. наук, проф. А.А. Петраков, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. С.Н. Судаков, д-р техн. наук, проф. Г.М. Улитин, д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Шалдырван.*

**EDITOR-IN-CHIEF:** Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**

**DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF:** Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**

**EXECUTIVE SECRETARY:** **M.N. Pacheva**

**EDITORIAL BOARD:**

*Dr. of tech., prof. A.V. Antsiferov, Dr. of tech., prof. V.E. Bolnokin, Dr. of tech., prof. N.I. Bolonov, Dr. of phys. and math., prof. A.O. Vatulyan, Dr. of tech., prof. L.P. Vovk, Dr. of tech., prof. V.A. Glazunov, Dr. of tech., senior researcher A.A. Glukhov, Dr. of phys. and math., prof. A.S. Goltsev, Dr. of phys. and math., prof. G.V. Gorr, Dr. of tech., prof. V.V. Gubanov, Dr. of tech., senior researcher V.A. Driban, Dr. of phys. and math., prof. A.M. Kovalev, Dr. of phys. and math., senior researcher B.I. Konosevich, Dr. of phys. and math., prof. I.A. Moiseyenko, Dr. of tech., prof. V.F. Mushchanov, Dr. of tech., prof. V.N. Pavlysh, Dr. of tech., prof. A.A. Petrakov, Dr. of phys. and math., senior researcher S.N. Sudakov, Dr. of tech., prof. G.M. Ulitin, Dr. of phys. and math., prof. V.A. Shaldyrvan.*

Адрес редакции: 83001 Донецк, ул. Университетская, 24  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
Тел. 302 92 71, E-mail: jtam\_donnu@mail.ru

Технический редактор: Пачева М.Н.

Научный журнал «Журнал теоретической и прикладной механики» включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (приказ МОН ДНР № 616 от 14.07.2021 г) по следующим группам научных специальностей и специальностям: 01.02.00 — Механика; 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ; 05.23.17 — Строительная механика; 25.00.20 — Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика.

Журнал включен в перечень РИНЦ (Лицензионный договор № 27-01/2020 от 23.01.2020 г.).

Утверждено к печати ученым советом  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016 г.

© Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Донецкий национальный университет», 2022

№ 2 (79) / 2022

*Основан в 1970г.*

# ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

### Механика деформируемого твердого тела

- Моисеенко И.А., Мельничук Н.Ю.* Исследование упругих волн крутильного типа с использованием трехфакторной модели функциональной неоднородности трансверсально изотропных сплошных цилиндрических волноводов..... 5
- Глушанков Е.С.* Определение термоэлектромагнитоупругого состояния конечной многосвязной пластинки из пьезоматериала в случае конвективного теплообмена на ее контурах ..... 16
- Пачева М.Н.* Алгоритм исследования волн сдвига в волноводе из состыкованных под углом ортотропных полуслоев с учетом сингулярности полей напряжений в крайних точках области контакта составляющих ..... 30

### Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика

- Голубев Ф.М., Бардакова Е.А.* Методика прогноза оседаний земной поверхности при затоплении очистных выработок ликвидируемых угольных шахт ..... 39
- Глухов А.А., Воробьев С.А., Решетняк Т.А., Винниченко Е.М.* Программное обеспечение для расчета деформаций земной поверхности в результате подработки ..... 46
- Глухова Ж.Л.* Численное решение системы уравнений водородоупругости ..... 53
- Пивень Ю.А., Васютина В.В., Канин В.А.* Совершенствование бесцеликовых способов охраны подготовительных горных выработок..... 60
- Глухов А.А.* Об использовании процедуры многоканальной фильтрации при обработке результатов сейсморазведки ..... 66



№ 2 (79) / 2022

*Founded in 1970.*

# JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

## CONTENTS

### Solid Mechanics

- Moiseyenko I.A., Melnichuk N.I.* Investigation of torsional elastic waves using a three-factor model of functional inhomogeneity of transversely isotropic solid cylindrical waveguides..... 5
- Glushankov E.S.* Determining the thermo-electro-magneto-elastic state of finite multiply connected piezoelectric plate in case of convective heat transfer acting on its contours..... 16
- Pacheva M.N.* Algorithm for investigation of shear waves in a waveguide from angle-jointed orthotropic half-layers, taking into account the singularity of stress fields at the boundary points of the contact region of the components..... 30

### Geomechanics, Rock Damage, Mining Aerogas dynamics and Thermal Physics

- Golubev P.M., Bardakova H.A.* Method for predicting ground subsidence in case of flooding with water production workings in abandoned coal mines..... 39
- Glukhov A.A., Vorobyov S.A., Reshetnyak T.A., Vinnichenko E.M.* Software for calculation of deformations of the earth surface as a result of undermining..... 46
- Glukhova Zh.L.* Numerical solution of the system of equations of hydrogen elasticity..... 53
- Piven Y.A., Vasyutina V.V., Kanin V.A.* Improvement of non-pillar methods of protection of preparatory mine workings..... 60
- Glukhov A.A.* On the use of the procedure of multichannel filtration in processing the results of seismic exploration..... 66



## МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2022-2-5-15

EDN:ATARHS



©2022. И.А. Моисеенко, Н.Ю. Мельничук

**ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГИХ ВОЛН КРУТИЛЬНОГО ТИПА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРЕХФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ СПЛОШНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ**

Определена трехфакторная модель радиальной функциональной неоднородности физико-механических параметров трансверсально изотропного материала сплошного цилиндрического волновода для случая распространяющихся осесимметричных нормальных упругих волн крутильного типа. Общие решения системы дифференциальных уравнений классической математической модели для указанного волнового процесса построены в виде равномерно сходящихся степенных рядов с определяемыми из явных рекуррентных соотношений коэффициентами. Представлен сопоставительный анализ результатов численного эксперимента, поставленного для случаев однородного и функционально неоднородного трансверсально изотропных свободных волноводов. Изучены эффекты влияния функциональной радиальной неоднородности материала волновода на топологию дисперсионных спектров, распределение фазовых и групповых скоростей бегущих крутильных волн, кинематические характеристики волнового процесса. Приведены количественные и качественные оценки полученных численных результатов.

**Ключевые слова:** функционально-градиентные материалы, трансверсально изотропный, цилиндрический волновод, крутильные волны, базисные решения, дисперсионные соотношения.

**Введение.** При решении задач о распространении нормальных упругих волн в изотропных, трансверсально-изотропных и цилиндрически ортотропных функционально радиально-неоднородных протяженных цилиндрах кругового поперечного сечения для получения общих аналитических решений системы дифференциальных уравнений классической трехмерной математической модели волнового деформирования апробирован подход, связанный с наложением определенных ограничений на вид функциональных законов радиальной неоднородности физико-механических характеристик материала волновода. В этом направлении оказался плодотворным подход, основанный на задании с точностью до константного множителя единого для всех физико-механических характеристик экспоненциально-степенного закона радиальной неоднородности. Таким

способом построены в аналитическом виде общие решения математической модели и исследованы эффекты влияния фактора радиальной неоднородности материала на топологию дисперсионных спектров, распределение фазовых и групповых скоростей, кинематические характеристики распространяющихся осесимметричных и неосесимметричных нормальных упругих волн в изотропных [1], трансверсально-изотропных [2, 3] и цилиндрически ортотропных [4] протяженных цилиндрах кругового поперечного сечения.

В данном исследовании представлена трехфакторная модель радиальной неоднородности трансверсально-изотропного материала сплошного цилиндрического волновода для случая распространяющихся волн крутильного типа, свободная от наложения каких бы то ни было ограничений на регулярные в области волновода функциональные законы радиальной неоднородности задействованных в математической модели указанного волнового процесса физико-механических характеристик материала цилиндра, на основе которой построены общие аналитические решения системы дифференциальных уравнений целевой математической модели и исследованы свойства бегущих крутильных волн.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается имеющий в поперечном сечении форму круга радиуса  $R_*$  протяженный цилиндрический волновод, занимающий в нормированной параметром  $R_*$  безразмерной цилиндрической системе координат  $O r \theta z$  область  $V$  (рис. 1)

$$V = \{r \in [0, 1], \quad \theta \in [-\pi; \pi], \quad z \in (-\infty; \infty)\}.$$

Полагается, что радиально-неоднородный материал волновода является трансверсально-изотропным

$$\rho = \rho_* \tilde{\rho}(r), \quad c_{mn} = C_* \tilde{c}_{mn}(r) \\ (mn = 11, 12, 13, 33, 44; \quad r \in [0, 1]). \quad (1)$$

Здесь  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(r) > 0$  и  $\tilde{c}_{mn} = \tilde{c}_{mn}(r) > 0$  ( $r \in [0, 1]$ ) – соответственно нормированные параметрами  $\rho_* = const$  и  $C_* = const$  произвольные, в пределах допустимости варьирования значений физико-механических характеристик, функциональные законы изменения вдоль радиальной координаты плотности и модулей упругости неоднородного материала.

В задаче исследования нормальных упругих осесимметричных крутильных волн, распространяющихся вдоль оси  $Oz$  с круговой частотой  $\omega$  и нормированным параметром  $R_*$  продольным волновым числом  $k$  ( $k \in \mathbb{C}$ ), компоненты вектора перемещений получают вид

$$u_\theta = \tilde{u}_\theta(r) \exp(-i\omega t + ikz), \quad u_r = u_z \equiv 0. \quad (2)$$

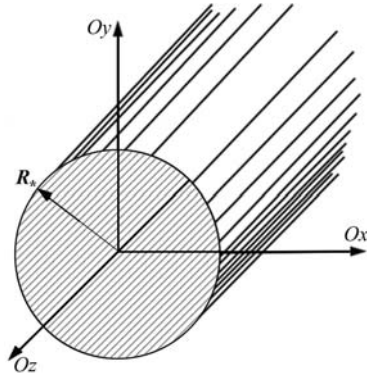


Рис. 1.



Соответственно, уравнения пространственной линейной математической модели динамического напряженно-деформированного состояния упругих тел в системе координат  $Or\theta z$  с учетом соотношений (2) записываются в терминах тождественно не равных нулю вещественных амплитудных составляющих безразмерных компонент вектора перемещений  $\tilde{u} = \tilde{u}_\theta(r)$ , тензоров деформаций  $\tilde{\varepsilon}_{\theta z} = \tilde{\varepsilon}_{\theta z}(r)$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{r\theta} = \tilde{\varepsilon}_{r\theta}(r)$ ,  $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rz} \equiv 0$ ,

$$\varepsilon_{\theta z}(r, z, t) = i\tilde{\varepsilon}_{\theta z}(r)\exp(-i\omega t + ikz), \quad \varepsilon_{r\theta}(r, z, t) = \tilde{\varepsilon}_{r\theta}(r)\exp(-i\omega t + ikz), \quad (3)$$

и напряжений  $\tilde{\sigma}_{\theta z} = \tilde{\sigma}_{\theta z}(r)$ ,  $\tilde{\sigma}_{r\theta} = \tilde{\sigma}_{r\theta}(r)$ ,  $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = \sigma_{rz} \equiv 0$ ,

$$\sigma_{\theta z}(r, z, t) = i\tilde{\sigma}_{\theta z}(r)\exp(-i\omega t + ikz), \quad \sigma_{r\theta}(r, z, t) = \tilde{\sigma}_{r\theta}(r)\exp(-i\omega t + ikz), \quad (4)$$

в таком виде:

$$\tilde{\varepsilon}_{\theta z} = k\tilde{u}_\theta, \quad \tilde{\varepsilon}_{r\theta} = (d_r - r^{-1})\tilde{u}_\theta, \quad (5)$$

$$\tilde{\sigma}_{\theta z} = \tilde{c}_{44}\tilde{\varepsilon}_{\theta z}, \quad \tilde{\sigma}_{r\theta} = \tilde{c}_{66}\tilde{\varepsilon}_{r\theta}, \quad (6)$$

$$(d_r + 2r^{-1})\tilde{\sigma}_{r\theta} - k\tilde{\sigma}_{\theta z} + \tilde{\rho}\Omega^2\tilde{u}_\theta = 0. \quad (7)$$

Здесь  $\tilde{c}_{66} = \tilde{c}_{66}(r) = (\tilde{c}_{11}(r) - \tilde{c}_{12}(r))/2$ ,  $d_r = d/dr$ . В обыкновенном дифференциальном уравнении (7) используется безразмерная приведенная частота  $\Omega^2 = \rho_* R_*^2 \omega^2 / C_*$ .

Представленная математическая модель (1)–(7) включает также однородные краевые условия свободной

$$\tilde{\sigma}_{r\theta}(1) = 0, \quad (8)$$

либо жестко закрепленной

$$\tilde{u}_\theta(1) = 0 \quad (9)$$

граничной поверхности.

**2. Базисные решения и дисперсионные соотношения.** С целью построения базисных решений уравнений модели (5) – (7) уравнение (7) с учетом представлений (5), (6) переписывается в виде

$$r^2\tilde{u}_\theta'' + r(1 + r\tilde{c}'_{66}/\tilde{c}_{66})\tilde{u}_\theta' - (1 + r\tilde{c}'_{66}/\tilde{c}_{66} - \Omega^2 r^2\tilde{\rho}/\tilde{c}_{66} + k^2 r^2\tilde{c}_{44}/\tilde{c}_{66})\tilde{u}_\theta = 0. \quad (10)$$

Вводятся представления

$$\varphi = \varphi(r) = \ln(\tilde{c}_{66}), \quad \psi_1 = \psi_1(r) = \tilde{c}_{44}/\tilde{c}_{66}, \quad \psi_2 = \psi_2(r) = \tilde{\rho}/\tilde{c}_{66}, \quad (11)$$

в соответствии с которыми, с учетом представлений (5), соотношения (6) и уравнение (10) получают соответственно вид

$$\tilde{\sigma}_{\theta z} = k\psi_1\exp(\varphi)\tilde{u}_\theta, \quad \tilde{\sigma}_{r\theta} = \exp(\varphi)(\tilde{u}_\theta' - r^{-1}\tilde{u}_\theta); \quad (12)$$

$$r^2\tilde{u}_\theta'' + r(1 + r\varphi')\tilde{u}_\theta' - (1 + r\varphi' - \Omega^2 r^2\psi_2 + k^2 r^2\psi_1)\tilde{u}_\theta = 0. \quad (13)$$

Таким образом, для волнового процесса рассматриваемого типа представления (11) определяют следующую трехпараметрическую модель радиальной неоднородности трансверсально изотропного материала

$$\tilde{c}_{66} = \exp(\varphi), \quad \tilde{c}_{44} = \psi_1 \exp(\varphi), \quad \tilde{\rho} = \psi_2 \exp(\varphi), \quad (14)$$

где  $\varphi(r)$ ,  $\psi_1(r) > 0$ ,  $\psi_2(r) > 0$  – произвольные, в пределах допустимости варьирования значений физико-механических характеристик  $\tilde{c}_{66}(r)$ ,  $\tilde{c}_{44}(r)$  и  $\tilde{\rho}(r)$ , функции.

Далее полагается, что функции  $\varphi(r)$ ,  $\psi_1(r)$  и  $\psi_2(r)$  удовлетворяют достаточному условию их разложимости в ряд Маклорена на интервале  $r \in (-\zeta, \zeta)$  ( $\varsigma > 1$ )

$$\varphi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n, \quad \psi_1(r) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n, \quad \psi_2(r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n. \quad (15)$$

С учетом представлений (15) искомое, регулярное в окрестности точки  $r = 0$ , частное решение уравнения (13) строится в виде

$$\tilde{u}_{\theta}^{(ч)}(r) = \chi(r) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m r^{m+\eta} \quad (d_0 = 1, \eta \geq 0), \quad (16)$$

с подлежащими определению параметром  $\eta$  и коэффициентами  $d_m$  ( $m \geq 1$ ). В результате подстановки представлений (15), (16) в уравнение (13), с учетом формально дополняющих разложения (15), (16) определений

$$a_s = b_s = c_s = d_s = 0 \quad (s < 0), \quad (17)$$

получается однородное функциональное уравнение

$$\sum_{p=0}^{\infty} [((p+\eta)^2 - 1)d_p + \sum_{m=0}^{p-1} ((p-m)(m+\eta-1)a_{p-m} + \Omega^2 c_{p-m-2} - k^2 b_{p-m-2})d_m] r^p = 0 \quad (r \geq 0). \quad (18)$$

Из уравнения (18) в результате приравнивания нулю коэффициентов при различных степенях  $p$  независимой переменной  $r$  в случае степени  $p = 0$  с учетом  $d_0 = 1$  однозначно определяется значение параметра  $\eta = 1$ , а для степеней  $p \geq 1$  получаются рекуррентные соотношения

$$d_p = \frac{1}{p(p+2)} \sum_{m=0}^{p-1} (m(m-p)a_{p-m} + k^2 b_{p-m-2} - \Omega^2 c_{p-m-2})d_m \quad (p = 1, 2, \dots). \quad (19)$$

Окончательно общее решение уравнений (5), (12), (13) записывается через определяемое соотношениями (16), (17), (19) базисное частное решение уравнения (13)  $\chi = \chi(r)$  в виде

$$\tilde{u}_r = c_* \chi, \quad \tilde{\varepsilon}_{\theta z} = c_* k \chi, \quad \tilde{\varepsilon}_{r\theta} = c_* \vartheta, \quad \tilde{\sigma}_{\theta z} = c_* k \psi_1 \exp(\varphi) \chi, \quad \tilde{\sigma}_{r\theta} = c_* \exp(\varphi) \vartheta, \quad (20)$$

где  $c_*$  – произвольная константа;

$$\vartheta = \vartheta(r) = \chi' - r^{-1}\chi = \sum_{m=1}^{\infty} md_m r^m. \quad (21)$$

Следует отметить, что рекуррентные соотношения (19) обеспечивают равномерную сходимость разложений (16), (21) при любых  $r \geq 0$ .

В случае однородного материала волновода

$$\varphi = a_0, \quad \psi_1 = b_0, \quad \psi_2 = c_0, \quad (22)$$

частное решение уравнения (13) в области  $r \geq 0$  имеет классический вид

$$\tilde{u}_\theta^{(4)}(r) = \gamma^{-1} J_1(\gamma r). \quad (23)$$

Здесь

$$\gamma^2 = c_0 \Omega^2 - b_0 k^2; \quad (24)$$

$J_n(\xi)$  – функция Бесселя. Сомножитель  $\gamma^{-1}$  в представлении (23) введен с целью исключения избыточно привнесенной функцией  $J_1(\gamma r)$  в спектр жестко заземленного волновода бездисперсной моды  $\gamma = 0$ . При этом бездисперсная мода  $\gamma = 0$  остается в спектре свободного однородного волновода. Очевидно, что представление (16), с учетом соотношений (17), (19) в случае однородного материала волновода (22), идентично представлению (23) с учетом соотношения (24).

Граничные условия (8) и (9) определяют дисперсионные уравнения относительно безразмерного продольного волнового числа  $k$  и приведенной частоты  $\Omega$ , которые для свободной граничной поверхности волновода принимают вид

$$\Phi^{(S)}(k, \Omega) = \vartheta(1) = 0, \quad (25)$$

а для жестко закрепленной – вид

$$\Phi^{(U)}(k, \Omega) = \chi(1) = 0. \quad (26)$$

В случае однородного материала (22) с учетом соотношений (23), (24) указанные дисперсионные уравнения соответственно для свободной граничной поверхности волновода могут быть записаны также в виде

$$\Phi^{(S)}(\gamma) = J_0(\gamma) - 2\gamma^{-1} J_1(\gamma) = 0, \quad (27)$$

а для жестко закрепленной – в виде

$$\Phi^{(U)}(\gamma) = \gamma^{-1} J_1(\gamma) = 0. \quad (28)$$

Следует отметить, что в рассматриваемой трехфакторной модели неоднородности (14), уравнения (25) и (26), в случае неоднородного материала волновода,

определяют в области изменения параметров  $k$  и  $\Omega$  соответствующие многозначные неявно заданные функции. Каждая однозначная ветвь такой многозначной функции — суть отдельная мода соответствующего дисперсионного спектра волнового процесса. В то время, как для однородного материала волновода (22), уравнения (27) и (28) определяют соответствующие дискретные множества значений параметра  $\gamma \geq 0$

$$\gamma \in \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad (29)$$

задающие с учетом представления (24) соответствующие множества явно определенных однозначных, принимающих вещественные или мнимые значения функций

$$\{k_n(\Omega)\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \sqrt{(c_0\Omega^2 - \gamma_n^2)/b_0} \right\}_{n=1}^{\infty} \quad (\Omega \geq 0). \quad (30)$$

Окончательно, дисперсионный спектр волнового процесса в этом случае формируется как совокупность мод, определяемая множеством функций (30) для соответствующего набора значений параметров  $\gamma_n$  (29). Здесь необходимо отметить, что в случае одинакового, с точностью до сомножителя, функционального закона радиальной неоднородности упруго-механических характеристик  $\tilde{c}_{44}$  и  $\tilde{\rho}$  ( $\psi_1/\psi_2 = const$ ), дисперсионный спектр формируется так же, как и для однородного материала волновода.

**3. Численный эксперимент.** Анализ дисперсионных спектров и кинематических характеристик волнового процесса рассматриваемого типа проводился для свободного однородного волновода из цинка ( $Zn$ )

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{11}^{(Zn)} &= 16,35C_*; & \tilde{c}_{12}^{(Zn)} &= 2,64C_*; & \tilde{c}_{13}^{(Zn)} &= 5,17C_*; & \tilde{c}_{33}^{(Zn)} &= 5,31C_*; \\ \tilde{c}_{44}^{(Zn)} &= 3,78C_*; & \tilde{\rho}^{(Zn)} &= 7.134\rho_*, & C_* &= 10^{10}H/M^2, & \rho_* &= 10^3кг/M^3, \end{aligned} \quad (31)$$

а также для свободного неоднородного волновода, функциональные законы неоднородности для используемых в уравнениях математической модели (5)–(7) упруго-механических характеристик материала которого, были заданы так:

$$\tilde{c}_{66}(r) = \frac{\tilde{c}_{11}^{(Zn)} - \tilde{c}_{12}^{(Zn)}}{2}(1 - 0.15r), \quad \tilde{c}_{44}(r) = \tilde{c}_{44}^{(Zn)}(1 + 0.3r^3), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(Zn)}. \quad (32)$$

На рисунке 2 визуализированы представленные выше функциональные законы неоднородности. Пунктирными линиями представлены соответствующие характеристики в случае однородного материала волновода.

Представления для функциональных составляющих (15) используемой трехфакторной модели неоднородности для заданных функциональных законов (32) были получены методом наименьших квадратов из соотношений (11) в виде полиномов пятого порядка (точность представленных здесь коэффициентов ниже использованной при вычислительном эксперименте)

$$\begin{aligned} \varphi &\simeq 1.9249783 - 0.1500001r - 0.0112488r^2 - 0.0011299r^3 - 0.0001175r^4 - 0.0000226r^5, \\ \psi_1 &\simeq 0.5514219 + 0.0827462r + 0.0120307r^2 + 0.1688472r^3 + 0.0222266r^4 + 0.0060786r^5, \\ \psi_1 &\simeq 1.0407002 + 0.1561057r + 0.0234079r^2 + 0.0035451r^3 + 0.0004667r^4 + 0.0001276r^5. \end{aligned}$$

Исследование упругих волн крутильного типа

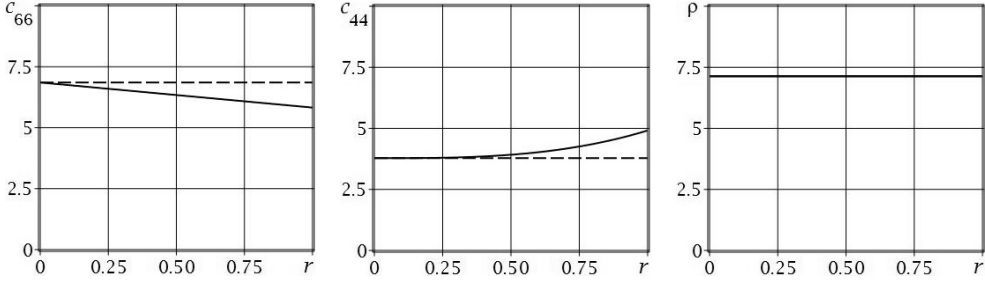


Рис. 2.

Данные соотношения обеспечили максимальную абсолютную погрешность в представлениях (14), не превышающую  $10^{-6}$ .

В области изменения параметров  $k \in [0, 75]$  и  $\Omega \in [0, 55]$  были построены спектры бегущих крутильных нормальных волн. Фрагменты спектров для однородного и неоднородного волноводов представлены соответственно на рисунке 3 и рисунке 4. Как уже отмечалось выше, спектр однородного волновода (рис. 3)

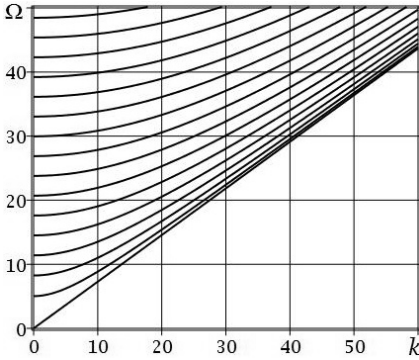


Рис. 3.

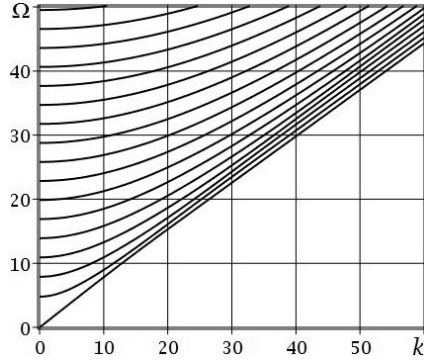


Рис. 4.

содержит в качестве первой бездисперсную моду. Сопоставление представленных фрагментов спектра позволяют отметить только качественное различие топологической картины в высокочастотной коротковолновой части сопоставляемых спектров.

Для анализа количественных различий полученных спектров использовалась функция сравнения парных по номеру мод в соответствующих спектрах  $\Delta\Omega(k) = (\Omega^{(\text{неодн})}(k) - \Omega^{(\text{одн})}(k))$ . На рисунке 5 представлены результаты сравнения первых восьми мод сопоставляемых спектров. Номера сравниваемых мод указаны в нижней части рисунков. В качестве выводов можно отметить смещение в область больших частот первой моды спектра неоднородного волновода по сравнению с бездисперсной первой модой спектра однородного волновода, а также ее фактическую трансформацию в бездисперсную при  $k \geq 20$ . Старшие моды спектра неоднородного волновода имеют тенденцию смещения в область

больших частот по сравнению с соответствующими модами спектра однородного волновода начиная только с некоторого значения нормированного продольного волнового числа  $k$ : вторая мода при  $k \geq 7.5$ ; третья мода при  $k \geq 12$  и т.д.

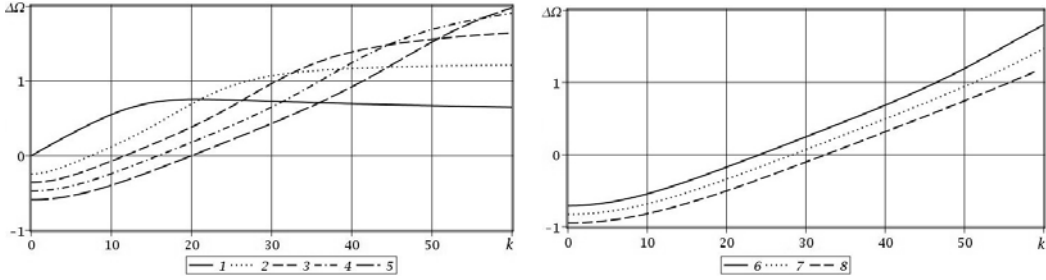


Рис. 5.

Представленные ниже графики приведенных фазовых скоростей мод спектров соответственно однородного (рис. 6) и неоднородного (рис. 7) волноводов значимых визуальных различий не имеют.

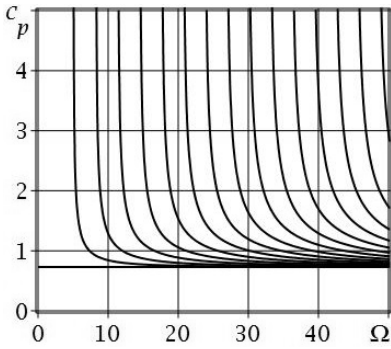


Рис. 6.

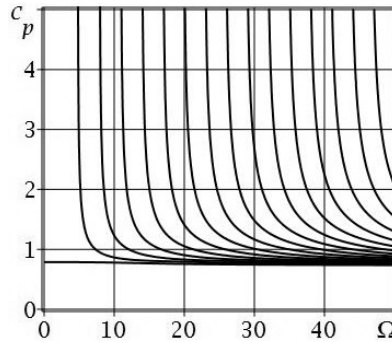


Рис. 7.

Графики приведенных групповых скоростей мод спектров однородного и неоднородного волноводов представлены соответственно на рисунке 8 и рисунке 9. Можно отметить ожидаемое различие графиков приведенных групповых скоростей первой моды спектра неоднородного волновода (рис. 9) от соответствующего графика для бездисперсной моды спектра однородного волновода (рис. 8). Отмечается также более активное сближение значений групповых скоростей мод спектра неоднородного волновода в высокочастотной области по сравнению с однородным волноводом.

Был проведен анализ полученных кинематических характеристик исследуемого волнового процесса в однородном и неоднородном волноводах. На рисунках 10–17 представлены графики для нормированных амплитудных составляющих отличных от нуля компонент вектора перемещений и тензора напряжений для однородного и неоднородного волноводов при  $k = 7.5$  и  $k = 20$  в

Исследование упругих волн крутильного типа

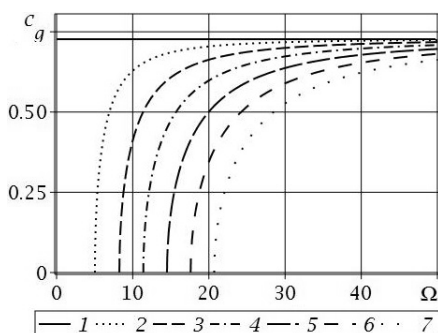


Рис. 8.

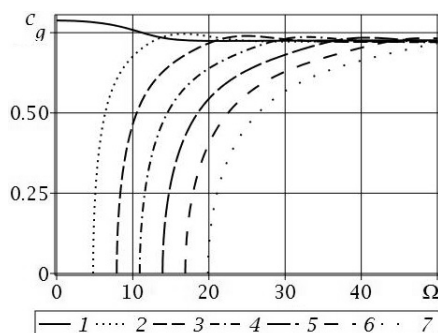


Рис. 9.

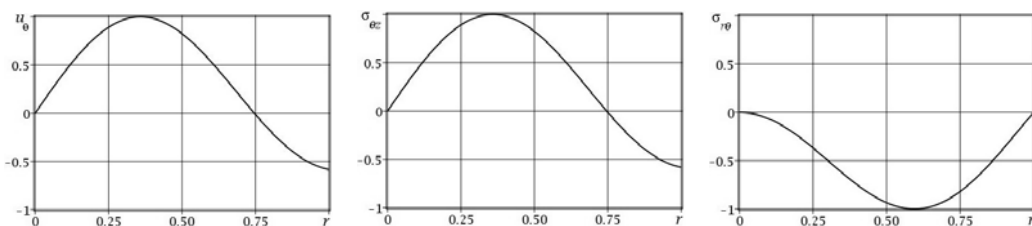


Рис. 10. Однородный волновод, вторая мода при  $k = 7.5$

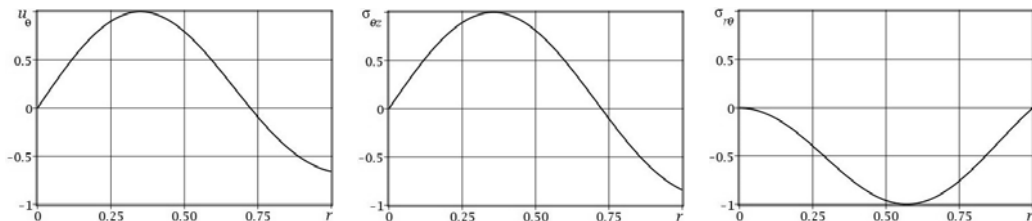


Рис. 11. Неоднородный волновод, вторая мода при  $k = 7.5$

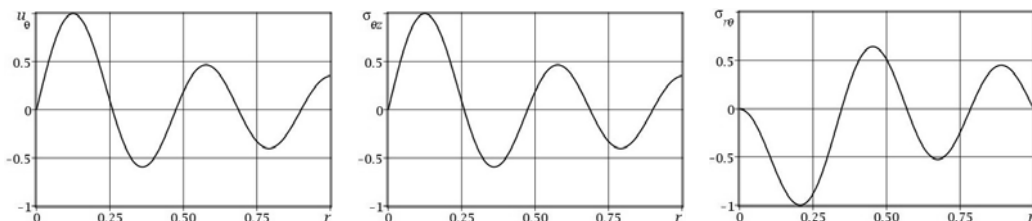


Рис. 12. Однородный волновод, пятая мода при  $k = 7.5$

точках вторых и пятых мод соответствующих спектров (всего четыре точки). Такой выбор был обусловлен тем, что при  $k = 7.5$  вторые моды сопоставляемых спектров имеют приблизительно одинаковое значение приведенной частоты  $\Omega$ , а при  $k = 20$  приблизительно одинаковое значение приведенной частоты  $\Omega$  имеют пятые моды сопоставляемых спектров (рис. 5).

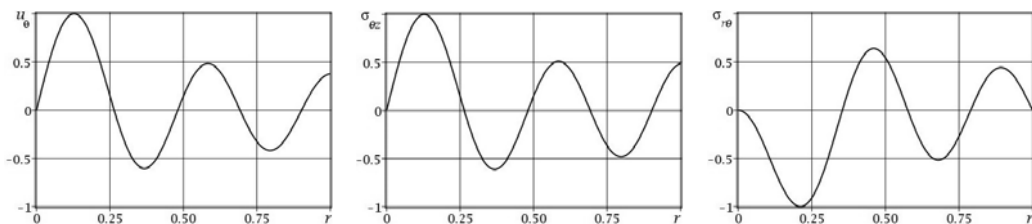


Рис. 13. Неоднородный волновод, пятая мода при  $k = 7.5$

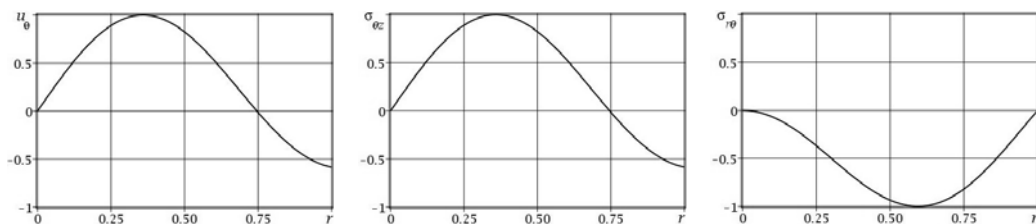


Рис. 14. Однородный волновод, вторая мода при  $k = 20$

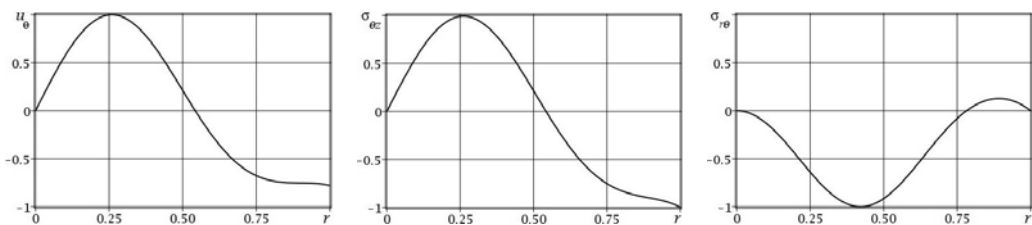


Рис. 15. Неоднородный волновод, вторая мода при  $k = 20$

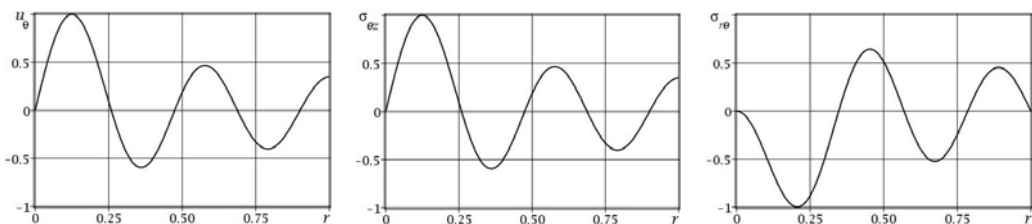


Рис. 16. Однородный волновод, пятая мода при  $k = 20$

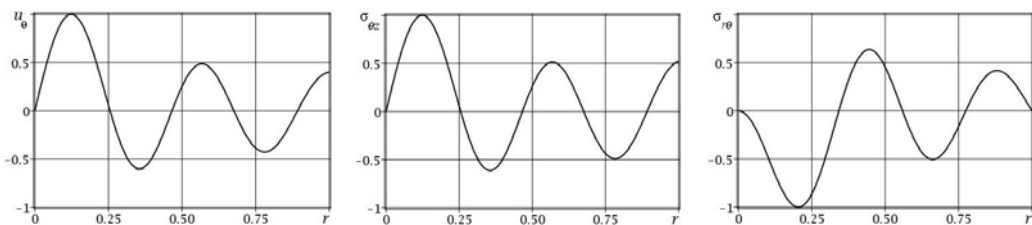


Рис. 17. Неоднородный волновод, пятая мода при  $k = 20$



Анализ представленных результатов показал, что значимые различия в поведении кинематических характеристик волнового процесса в однородном и неоднородном волноводах качественно и количественно проявились только для более коротких волн при  $k = 20$ . Указанные эффекты носили более выраженный характер для точки на второй моде по сравнению с точкой на пятой моде.

**Выводы.** Полученные результаты перспективны для использования в прикладных исследованиях, связанных с расчетами характеристик волноводных компонентов акустоэлектронных устройств, анализа моделей ультразвуковой диагностики.

1. Моисеенко И.А. Нормальные волны в функционально-градиентных сплошных цилиндрах / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2018. – № 1-2 (62-63). – С. 16–34.
2. Моисеенко И.А. Спектры нормальных упругих волн кручения в экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах / И.А. Моисеенко // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – Вып. 9 (55). – С. 139–145.
3. Моисеенко И.А. Распространение нормальных волн вдоль трансверсально-изотропных функционально-градиентных цилиндров / И.А. Моисеенко // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2018. – № 1. – С. 37–54.
4. Моисеенко И.А. Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн в ортотропных цилиндрах с функционально-градиентной радиальной неоднородностью / И.А. Моисеенко, В.И. Сторожев // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 112–124.

**I.A. Moiseyenko, N.I. Melnichuk**

**Investigation of torsional elastic waves using a three-factor model of functional inhomogeneity of transversely isotropic solid cylindrical waveguides.**

A three-factor model of the radial functional inhomogeneity of the physical and mechanical parameters of a transversally isotropic material of a solid cylindrical waveguide is determined for the case of propagating axisymmetric normal elastic waves of the torsional type. The general solutions of the system of differential equations of the classical mathematical model for the specified wave process are constructed in the form of uniformly convergent power series with coefficients determined from explicit recurrent relations. A comparative analysis of the results of a numerical experiment is presented for the cases of homogeneous and functionally inhomogeneous transversally isotropic free waveguides. The effects of the functional radial inhomogeneity of the waveguide material on the topology of dispersion spectra, the distribution of phase and group velocities of traveling torsional waves, and the kinematic characteristics of the wave process are studied. Quantitative and qualitative estimates of the obtained numerical results are given.

**Keywords:** FGMs, transversally isotropic, cylindrical waveguide, torsional waves, basic solutions, dispersion relations.

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк

Получено 28.01.2022

Donetsk National University, Donetsk

*mia@donnu.ru*

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2022-2-16-29

EDN:BPVMVU



©2022. Е.С. Глушанков

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМОЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ КОНЕЧНОЙ МНОГОСВЯЗНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ ПЬЕЗОМАТЕРИАЛА В СЛУЧАЕ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА НА ЕЕ КОНТУРАХ

Предложен способ определения термоэлектромагнитоупругого состояния конечной многосвязной пьезопластины с отверстиями, находящейся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой. Решение задачи построено с помощью комплексных потенциалов задач теплопроводности и термоэлектромагнитоупругости. С помощью метода наименьших квадратов задача сведена к решению двух переопределенных систем линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера. Численными исследованиями установлено влияние на значения основных характеристик термоэлектромагнитоупругого состояния учета электрических и магнитных свойств материала, а также геометрических характеристик отверстий.

**Ключевые слова:** пьезопластина, многосвязная пластина, конвективный теплообмен, температурные напряжения, комплексные потенциалы.

**Введение.** Во многих научно-технических отраслях находят применение конструкции с элементами, изготовленными из пьезоматериалов, которые в процессе эксплуатации подвергаются воздействию тепловых, механических и электромагнитных полей [1]. Вследствие указанных физических воздействий в этих элементах могут возникать значительные уровни концентрации напряжений, что необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций.

К настоящему времени разработано большое количество методов определения термоэлектромагнитоупругого состояния тел из пьезоматериалов, решено множество классов задач данного типа для тел с различной геометрией [2–5]. Среди прочих, решена задача о действии разности температур в конечных пластинках, содержащих отверстия и трещины [6]. В то же время, для изотропных и анизотропных тел из материалов, не обладающих пьезосвойствами, решено большое количество задач теплопроводности и термоупругости для случая, когда на границе тел имеет место конвективный теплообмен с внешней средой [7–12]. Решена и задача о действии линейного потока в бесконечной многосвязной пьезопластинке, находящейся в условиях конвективного теплообмена [13].

В данной статье способ определения термоэлектромагнитоупругого состояния (ТЭМУС) конечной многосвязной пластины, находящейся под действием разности температур, распространен на случай, когда на контурах пластины

имеет место конвективный теплообмен с внешней средой. Методом комплексных потенциалов исходная задача сведена к задаче определения неизвестных коэффициентов разложений голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера. Проведены различные численные исследования ТЭМУС конечной пластинки, установлены закономерности влияния характеристик конвективного теплообмена, свойств материала и геометрических особенностей на распределение напряжений в пластинке.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу обобщенного плоского напряженного состояния для конечной пластинки из пьезоматериала, занимающей многосвязную область  $S$ . Пластика ограничена внешним контуром  $L_0$  и контурами эллиптических отверстий с центрами  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ )  $O_l(x_{0l}, y_{0l})$ , полуосями  $a_l, b_l$  и углами поворота  $\varphi_l$  (рис. 1). Контур  $L_l$  могут располагаться произвольно относительно друг друга, касаться, пересекаться, переходить в прямолинейные разрезы. На каждом из контуров  $L_l$  имеет место конвективный теплообмен с внешней средой температуры  $\mathfrak{T}_l$  и коэффициентом теплообмена  $h_l$ . Контур пластики свободны от внешних усилий или жестко подкреплены, потоки электромагнитной индукции по направлению нормали равны нулю.

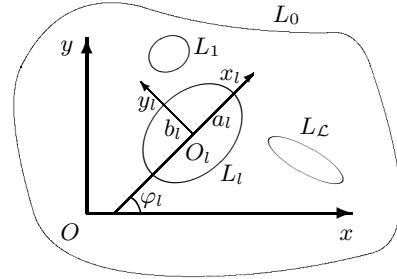


Рис. 1

Определение ТЭМУС пластики сводится к последовательному двухэтапному решению задачи теплопроводности, а затем – собственно задачи термоэлектромагнитоупругости. Для решения этих задач будем использовать теорию комплексных потенциалов. В этом случае задачи сводятся к определению комплексного потенциала теплопроводности  $F_5(z_5)$  и комплексных потенциалов термоэлектромагнитоупругости  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) из граничных условий соответствующих задач. После определения этих функций становится возможным вычислять значения основных характеристик ТЭМУС (температуры  $T$ ; плотностей теплового потока  $q_x, q_y$ ; напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ; индукций электрического и магнитного полей  $D_x, D_y, B_x, B_y$ ; напряженностей электрического и магнитного полей  $E_x, E_y, H_x, H_y$ ; перемещений  $u, v$ ; потенциалов электромагнитного поля  $\varphi, \psi$ ) в любой точке пластики [6, 13, 14] с использованием представлений

$$T = 2 \operatorname{Re} F_5(z_5); \quad (1)$$

$$(q_x, q_y) = 2 \operatorname{Re} i \mathcal{K}_T (\mu_5, -1) F_5'(z_5); \quad (2)$$

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi_k'(z_k); \quad (3)$$

$$(D_x, D_y, B_x, B_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\nu_k \mu_k, -\nu_k, \rho_k \mu_k, -\rho_k) \Phi_k'(z_k); \quad (4)$$

$$(E_x, E_y, H_x, H_y) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi'_k(z_k); \quad (5)$$

$$(u, v, \varphi, \psi) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k). \quad (6)$$

Здесь  $z_5, z_k$  — комплексные переменные, вводимые посредством аффинных преобразований плоскости  $\mathbb{R}^2$  в комплексную плоскость  $\mathbb{C}$

$$z_5 = x + \mu_5 y, \quad (7)$$

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (8)$$

В формулах (7)–(8)  $\mu_5$  — корень характеристического уравнения задачи теплопроводности [6, 13, 14]

$$k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} = 0, \quad (9)$$

который определяется выражением

$$\mu_5 = -\frac{k_{12}}{k_{22}} + i \frac{\varkappa_T}{k_{22}},$$

где

$$\varkappa_T = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2};$$

$\mu_k$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) — корни характеристического уравнения задачи термоэлектромагнитноупругости [6, 13, 14]

$$\Delta(\mu) = 0; \quad (10)$$

$$\Delta(\mu) = l_{4s}(\mu) [l_{2\beta}(\mu)l_{2\chi}(\mu) - l_{2\nu}^2(\mu)] - l_{3g}(\mu) [l_{3g}(\mu)l_{2\chi}(\mu) - l_{3p}(\mu)l_{2\nu}(\mu)] -$$

$$- l_{3p}(\mu) [l_{3p}(\mu)l_{2\beta}(\mu) - l_{3g}(\mu)l_{2\nu}(\mu)],$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11}\mu^4 + 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 + 2s_{26}\mu + s_{22},$$

$$l_{3g}(\mu) = g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu + g_{22},$$

$$l_{3p}(\mu) = p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu + p_{22},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22}, \quad l_{2\nu}(\mu) = -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22};$$

$$\nu_k = \frac{l_{3p}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \nu_5 = \frac{r_\chi}{r_5},$$

$$\rho_k = \frac{l_{3g}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3p}(\mu_k)l_{2\beta}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \rho_5 = \frac{r_\omega}{r_5};$$

$$r_5 = \frac{l_5(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\chi = \frac{l_\chi(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\omega = \frac{l_\omega(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)},$$

$$l_5(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{1t}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{1m}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\chi(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\omega(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) \end{vmatrix};$$

$$l_{2\alpha}(\mu_5) = -\alpha_1\mu_5^2 + \alpha_6\mu_5 - \alpha_2, \quad l_{1t}(\mu_5) = t_1\mu_5 - t_2, \quad l_{1m}(\mu_5) = m_1\mu_5 - m_2;$$

$$p_k = s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} - (g_{11}\mu_k - g_{12})\nu_k - (p_{11}\mu_k - p_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}\alpha_1}{r_5},$$

$$q_k = s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} - (g_{21}\mu_k - g_{22})\nu_k - (p_{21}\mu_k - p_{22})\rho_k + \frac{\delta_{k5}\alpha_2}{r_5\mu_5},$$

$$r_k^0 = g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})\nu_k - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}t_1}{r_5},$$

$$h_k^0 = p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\nu_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}m_1}{r_5};$$

$$\Phi_5(z_5) = r_5 \int F_5(z_5) dz_5;$$

$k_{ij}$  — коэффициенты теплопроводности материала пластинки;  $s_{ij}$  — коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей и температуре;  $g_{ij}$  и  $p_{ij}$  — пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформаций и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях, индукциях и температуре;  $\beta_{ij}$ ,  $\nu_{ij}$  и  $\chi_{ij}$  — коэффициенты диэлектрической, электромагнитной и магнитной проницаемости, измеренные при постоянных напряжениях и температуре;  $\alpha_i$  — коэффициенты теплового расширения, измеренные при постоянной индукции электромагнитного поля;  $t_i$  и  $m_i$  — пирозлектрические и пирромагнитные модули, измеренные при постоянных напряжениях;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

**2. Определение комплексных потенциалов.** Комплексные потенциалы задачи в общем случае многосвязности имеют вид [6, 13, 14]

$$F_5(z_5) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l} w_{5l}(z_5) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\text{sgn} l}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5); \quad (11)$$

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=\text{sgn} l}^{\infty} \varphi_{kln}(z_k). \quad (12)$$

В выражениях (11)–(12)  $D_{5l}$  — вещественные постоянные, определяемые из граничных условий и имеющие вид  $D_{5l} = -q_l/4\pi\kappa_T$ , где  $q_l$  — суммарный тепловой поток через контур  $L_l$  в область  $S$ ;  $w_{5l}(z_5) = \ln(z_5 - z_{5l})$ ;  $z_{5l}$  — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (7) произвольным точкам внутри контуров  $L_l$ ;  $c_{5ln}$  — коэффициенты, определяемые из граничных условий;  $\varphi_{50n}(z_5) = \zeta_{50}^n + m_{50}^n/\zeta_{50}^n$ ,  $\varphi_{5ln}(z_5) = \zeta_{5l}^{-n}$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ );  $\zeta_{5l}$  — комплексные переменные, определяемые из соответствующих конформных отображений;

$$N_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl}z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl});$$

$A_{kl}, B_{kl}$  — постоянные, определяемые из систем уравнений

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) iA_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) iB_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);$$

$A_{5l} = r_5 D_{5l}$ ;  $B_{5l} = r_5(c_{51l}R_{5l} - D_{5l}z_{5l})$ ;  $w_{kl}(z_k) = \ln(z_k - z_{kl})$ ;  $z_{kl}$  — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (8) произвольным точкам внутри контуров  $L_l$ ;  $\varphi_{k0n}(z_k) = \zeta_{k0}^n + m_{k0}^n/\zeta_{k0}^n$ ,  $\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ );  $\zeta_{kl}$  — комплексные параметры соответствующих конформных отображений.

В локальных системах координат  $O_l x_l y_l$  параметрические уравнения эллипсов (рис. 1) имеют вид [6, 13, 14]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе  $Oxy$  координат —

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l.$$

Здесь  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) — угловой параметр уравнения эллипса в параметрической форме.

Комплексные переменные  $\zeta_{5l}, \zeta_{kl}$  являются параметрами конформных отображений внешностей единичных кругов  $|\zeta_{5l}| \geq 1, |\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{5l}, L_{kl}$ , получаемых из  $L_l$  аффинными преобразованиями (7), (8) [6, 13, 14]:

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left( \zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (13)$$

где

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}.$$

На контурах  $L_l$  функция  $F_5(z_5)$  должна удовлетворять граничному условию [6, 13, 14]

$$2 \operatorname{Re} (h_l F_5(\tau_5) + i\chi_T \delta_{5,s}(\tau_5) F_5'(\tau_5)) = h_l \mathfrak{I}_l, \quad (14)$$

где  $\delta_{5,s}(\tau_5) = d\tau_5/ds$ ,  $s$  — дуга контура отверстия, а на контурах  $L_l$  функции  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1,4}$ ) должны удовлетворять граничным условиям задачи термоэлектромагнитоупругости, которые в дифференциальной форме принимают вид [6, 13, 14]:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) \delta_{k,s}(\tau_k) \Phi_k'(\tau_k) = \left( \frac{df_{l1}}{ds}, \frac{df_{l2}}{ds}, \frac{df_{l3}}{ds}, \frac{df_{l4}}{ds} \right), \quad (15)$$

где  $\delta_{k,s}(\tau_k) = d\tau_k/ds$ . Для неподкрепленных контуров  $L_l$

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (1, \mu_k, \nu_k, \rho_k), \quad (f_{l1}, f_{l2}, f_{l3}, f_{l4}) = (c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}),$$

а для жестко подкрепленных контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (p_k, q_k, \nu_k, \rho_k), \quad (f_{l1}, f_{l2}, f_{l3}, f_{l4}) = (u_l, v_l, c_{l3}, c_{l4}),$$

$u_l, v_l$  — заданные на контуре значения перемещений.

**3. Определение неизвестных постоянных.** Неизвестные постоянные  $D_{5l}$ ,  $c_{5ln}$ ,  $a_{kln}$  определяются соответственно из граничных условий (14) и (15). Эти условия удовлетворяются с применением метода наименьших квадратов [5, 11]. Для этого на контурах  $L_j$  ( $j = \overline{0, \mathcal{L}}$ ) выбираются системы точек  $M_{jm}(x_{jm}, y_{jm})$  ( $m = \overline{0, M_j}$ ).

В задаче теплопроводности, подставляя функцию (11) в граничное условие (14), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных  $D_{5l}$ ,  $c_{5ln}$  [13]:

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} h_j c_5 + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (h_j w_{5l}(\tau_{5jm}) + i\chi_T \delta_{5,s}(\tau_{5jm}) w_{5l}'(\tau_{5jm})) D_{5l} + \\ & + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (h_j \varphi_{5ln}(\tau_{5jm}) + i\chi_T \delta_{5,s}(\tau_{5jm}) \varphi_{5ln}'(\tau_{5jm})) c_{5ln} = h_j \mathfrak{I}_j \quad (16) \\ & (j = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, M_j}), \end{aligned}$$

где  $\tau_{5jm} = x_{jm} + \mu_5 y_{jm}$ ,  $\tau_{jm} = \tau_{jm}(x_{jm}, y_{jm})$ . Постоянные  $D_{5l}$ ,  $c_{5ln}$  определяются в результате решения этой системы с использованием метода сингулярных разложений [15, 16]. Соответственно по известной функции (11) можно в любой точке пластинки найти температуру и плотности потока тепла с использованием формул (1), (2) [6, 13, 14].

В задаче термоэлектромагнитоупругости, подставляя функции (12) в граничные условия (15), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$  [13]:

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) \varphi'_{kln}(\tau_{kim}) a_{kln} &= \\
 &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) N'_k(\tau_{kim}) - \\
 &- 2 \operatorname{Re} d_{5ip} \delta_{5,s}(\tau_{5im}) r_5 F_5(\tau_{5im}) + \frac{df_{ip}}{ds}(\tau_{im}) \\
 (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, M_i}, p = \overline{1, 4}), &
 \end{aligned} \tag{17}$$

где  $\tau_{kjm} = x_{jm} + \mu_k y_{jm}$ . Постоянные  $a_{kln}$  и соответствующие комплексные потенциалы термоэлектромагнитоупругости (12) определяются решениями системы (17) с использованием метода сингулярных разложений [15, 16]. По известным функциям (12) с применением формул (3)–(6) можно в любой точке пластинки найти значения основных характеристик ТЭМУС [6, 13, 14].

**4. Результаты численных исследований.** При реализации расчетов с применением разработанной методики количество членов в рядах Лорана в функциях (11), (12) и количество точек  $M_{jm}$  на контурах  $L_j$ , для которых составлялись системы линейных алгебраических уравнений (16) и (17), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (относительная погрешность не становилась менее сотых долей процента). Для этого, как показали численные исследования, необходимо было в указанных рядах оставлять от 30 до 80 членов, на каждом из контуров выбирать от 300 до 700 точек  $M_{jm}(x_{jm}, y_{jm})$ .

Были проведены численные исследования для конечной пластинки из композита на основе  $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ . Физико-механические постоянные этого материала [17]:

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= 7,165 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad s_{22} = 6,797 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad s_{66} = 19,912 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \\
 s_{12} &= -2,337 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad g_{16} = 2,028 \cdot 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м}^2, \\
 g_{21} &= -0,496 \cdot 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м}^2, \quad g_{22} = 1,157 \cdot 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м}^2, \\
 p_{16} &= 1,850 \cdot 10^{-5} \text{ МТл}^{-1}, \quad p_{21} = 0,576 \cdot 10^{-5} \text{ МТл}^{-1}, \quad p_{22} = 1,186 \cdot 10^{-5} \text{ МТл}^{-1}, \\
 \beta_{11} &= 0,156 \cdot 10^3 \text{ МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}, \quad \beta_{22} = 0,137 \cdot 10^3 \text{ МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}, \\
 \nu_{11} &= -0,190 \cdot 10^{-1} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м} \cdot \text{МА}, \quad \nu_{22} = -0,185 \cdot 10^{-1} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м} \cdot \text{МА}, \\
 \chi_{11} &= 0,336 \cdot 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{МТл}^{-1}, \quad \chi_{22} = 0,119 \cdot 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{МТл}^{-1}, \\
 \alpha_1 &= 8,530 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad \alpha_2 = 1,990 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \\
 t_2 &= 133 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot (\text{МКл} \cdot \text{К})^{-1}, \quad m_2 = 133 \cdot 10^{-3} \text{ МА} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1},
 \end{aligned}$$



$$k_{11} = k_{22} = 2,5 \text{ Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}.$$

В таблице 1 для кругового концентрического кольца с внешним радиусом  $r_0$  ( $a_0 = b_0 = r_0$ ) и внутренним радиусом  $r_1$  ( $a_1 = b_1 = r_1$ ) (рис. 2), на контурах которого поддерживается конвективный теплообмен с внешней средой с коэффициентом теплообмена  $h$  ( $h_1 = h_2 = h$ ), с точностью до разности температур внешних сред  $\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_0$  как множителя, в зависимости от отношения  $r_0/r_1$ , приведены значения нормальных напряжений  $\sigma_s$  в некоторых характерных точках внешнего контура  $L_0$  с центральным углом  $\theta$ , отсчитываемым от положительного направления оси  $Ox$ , на площадках, перпендикулярных к контуру. Представлены расчеты для случаев задачи термоэлектромагнитоупругости (ТЭМУ), когда учитываются все свойства материала пластинки, и задачи термоупругости (ТУ), когда не учитываются электромагнитные свойства материала.

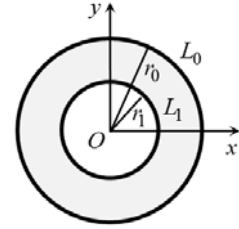


Рис. 2

В таблице 2 для этих же случаев приведены значения нормальных напряжений  $\sigma_s$  в некоторых характерных точках внутреннего контура  $L_1$ .

На рисунке 3 изображены графики распределения напряжений  $\sigma_s$  по внешнему контуру  $L_0$  концентрического кольца для отношений  $r_0/r_1 = 2; 10; 100$  при

Таблица 1. Значения напряжений  $\sigma_s$  в точках внутреннего контура  $L_0$

$\frac{r_0}{r_1}$	$\theta$ , рад.	Значение $hr_1$											
		0,01	0,1	1	10	100	$\infty$	0,01	0,1	1	10	100	$\infty$
Задача ТЭМУ						Задача ТУ							
1,01	0	0,000	0,000	-0,001	-0,010	-0,088	-0,525	0,000	0,000	0,001	0,007	0,061	0,366
	$\pi/4$	0,000	0,000	-0,001	-0,010	-0,087	-0,522	0,000	0,000	0,001	0,007	0,061	0,365
	$\pi/2$	0,000	0,000	-0,001	-0,011	-0,090	-0,537	0,000	0,000	0,001	0,007	0,061	0,364
1,1	0	0,000	-0,001	-0,010	-0,085	-0,341	-0,511	0,000	0,001	0,007	0,060	0,242	0,362
	$\pi/4$	0,000	-0,001	-0,010	-0,081	-0,324	-0,486	0,000	0,001	0,007	0,060	0,238	0,357
	$\pi/2$	0,000	-0,001	-0,012	-0,102	-0,407	-0,611	0,000	0,001	0,007	0,058	0,233	0,349
2	0	-0,001	-0,007	-0,059	-0,244	-0,357	-0,376	0,001	0,006	0,050	0,207	0,303	0,320
	$\pi/6$	0,000	-0,005	-0,041	-0,172	-0,251	-0,264	0,001	0,006	0,048	0,199	0,290	0,306
	$\pi/4$	0,000	-0,005	-0,039	-0,162	-0,237	-0,250	0,001	0,005	0,045	0,188	0,274	0,289
	$\pi/3$	-0,001	-0,007	-0,058	-0,239	-0,350	-0,369	0,000	0,005	0,042	0,175	0,256	0,269
	$\pi/2$	-0,001	-0,010	-0,088	-0,367	-0,537	-0,566	0,000	0,004	0,039	0,160	0,235	0,247
10	0	0,000	-0,001	-0,004	-0,008	-0,009	-0,009	0,002	0,015	0,089	0,175	0,193	0,196
	$\pi/6$	-0,001	-0,009	-0,056	-0,109	-0,121	-0,122	0,001	0,013	0,079	0,155	0,172	0,174
	$\pi/4$	-0,002	-0,015	-0,088	-0,173	-0,192	-0,194	0,001	0,012	0,070	0,136	0,151	0,153
	$\pi/3$	-0,002	-0,018	-0,109	-0,213	-0,235	-0,238	0,001	0,010	0,060	0,118	0,130	0,132
	$\pi/2$	-0,002	-0,021	-0,121	-0,238	-0,263	-0,266	0,001	0,009	0,051	0,099	0,110	0,111
100	0	0,000	0,003	0,012	0,017	0,018	0,018	0,002	0,016	0,068	0,099	0,104	0,105
	$\pi/6$	-0,001	-0,010	-0,044	-0,064	-0,067	-0,068	0,002	0,014	0,059	0,087	0,091	0,092
	$\pi/4$	-0,002	-0,017	-0,069	-0,102	-0,107	-0,107	0,001	0,012	0,052	0,076	0,079	0,080
	$\pi/3$	-0,002	-0,020	-0,083	-0,121	-0,127	-0,128	0,001	0,011	0,044	0,065	0,068	0,068
	$\pi/2$	-0,002	-0,021	-0,090	-0,132	-0,138	-0,139	0,001	0,009	0,036	0,054	0,056	0,056

Таблица 2. Значения напряжений  $\sigma_s$  в точках внутреннего контура  $L_1$

$\frac{r_0}{r_1}$	$\theta$ , рад.	Значение $hr_1$											
		0,01	0,1	1	10	100	$\infty$	0,01	0,1	1	10	100	$\infty$
1,01	0	0,000	0,000	0,001	0,010	0,088	0,528	0,000	0,000	-0,001	-0,007	-0,061	-0,367
	$\pi/4$	0,000	0,000	0,001	0,010	0,089	0,531	0,000	0,000	-0,001	-0,007	-0,062	-0,368
	$\pi/2$	0,000	0,000	0,001	0,010	0,086	0,516	0,000	0,000	-0,001	-0,007	-0,062	-0,369
1,1	0	0,000	0,001	0,011	0,090	0,362	0,542	0,000	-0,001	-0,007	-0,062	-0,249	-0,373
	$\pi/4$	0,000	0,001	0,011	0,095	0,380	0,570	0,000	-0,001	-0,007	-0,063	-0,253	-0,379
	$\pi/2$	0,000	0,001	0,008	0,069	0,277	0,416	0,000	-0,001	-0,008	-0,065	-0,259	-0,388
2	0	0,001	0,010	0,088	0,367	0,537	0,566	-0,001	-0,007	-0,061	-0,256	-0,374	-0,394
	$\pi/6$	0,001	0,013	0,113	0,470	0,687	0,724	-0,001	-0,008	-0,065	-0,270	-0,394	-0,415
	$\pi/4$	0,002	0,016	0,136	0,564	0,825	0,869	-0,001	-0,008	-0,069	-0,287	-0,420	-0,443
	$\pi/3$	0,002	0,015	0,129	0,536	0,784	0,826	-0,001	-0,009	-0,074	-0,310	-0,453	-0,477
	$\pi/2$	0,000	-0,002	-0,016	-0,064	-0,094	-0,099	-0,001	-0,009	-0,081	-0,338	-0,495	-0,521
10	0	0,009	0,079	0,468	0,918	1,015	1,027	-0,003	-0,029	-0,169	-0,332	-0,367	-0,371
	$\pi/6$	0,010	0,091	0,538	1,054	1,166	1,180	-0,004	-0,036	-0,214	-0,419	-0,464	-0,469
	$\pi/4$	0,010	0,092	0,545	1,068	1,181	1,195	-0,005	-0,044	-0,260	-0,510	-0,565	-0,571
	$\pi/3$	0,007	0,068	0,399	0,782	0,866	0,876	-0,006	-0,053	-0,311	-0,610	-0,675	-0,683
	$\pi/2$	-0,005	-0,046	-0,271	-0,531	-0,588	-0,595	-0,007	-0,063	-0,370	-0,725	-0,803	-0,812
100	0	0,025	0,216	0,904	1,326	1,391	1,399	-0,006	-0,052	-0,217	-0,318	-0,334	-0,336
	$\pi/6$	0,026	0,226	0,944	1,386	1,454	1,462	-0,009	-0,075	-0,316	-0,464	-0,486	-0,489
	$\pi/4$	0,025	0,212	0,889	1,305	1,369	1,377	-0,012	-0,099	-0,415	-0,609	-0,639	-0,642
	$\pi/3$	0,016	0,141	0,589	0,864	0,906	0,911	-0,014	-0,124	-0,520	-0,764	-0,801	-0,806
	$\pi/2$	-0,016	-0,135	-0,563	-0,827	-0,867	-0,872	-0,018	-0,153	-0,640	-0,939	-0,985	-0,990

значениях  $hr_1 = 0, 1; 10$  в зависимости от центрального угла  $\theta$  для задач ТУ и ТЭМУ. На рисунке 4 для этих же случаев изображены графики распределения напряжений  $\sigma_s$  по внутреннему контуру  $L_1$ .

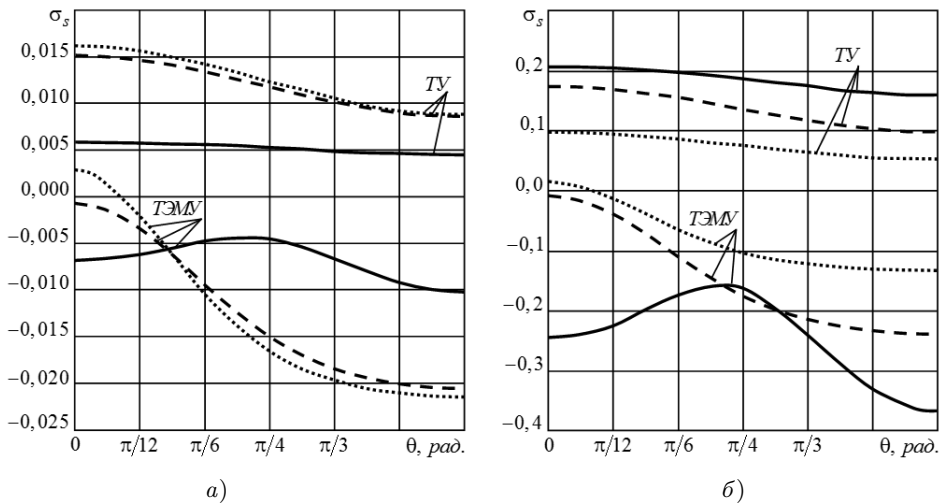


Рис. 3. График распределения напряжений  $\sigma_s$  по внешнему контуру кольцевой пластинки при значениях  $hr_1 = 0, 1$  (рис. а) и  $hr_1 = 10$  (рис. б) для значений  $r_0/r_1$ , равных 2 (сплошные линии), 10 (штриховые линии), 100 (пунктирные линии), для задач ТУ и ТЭМУ

Определение термоэлектромагнитоупругого состояния конечной пластинки

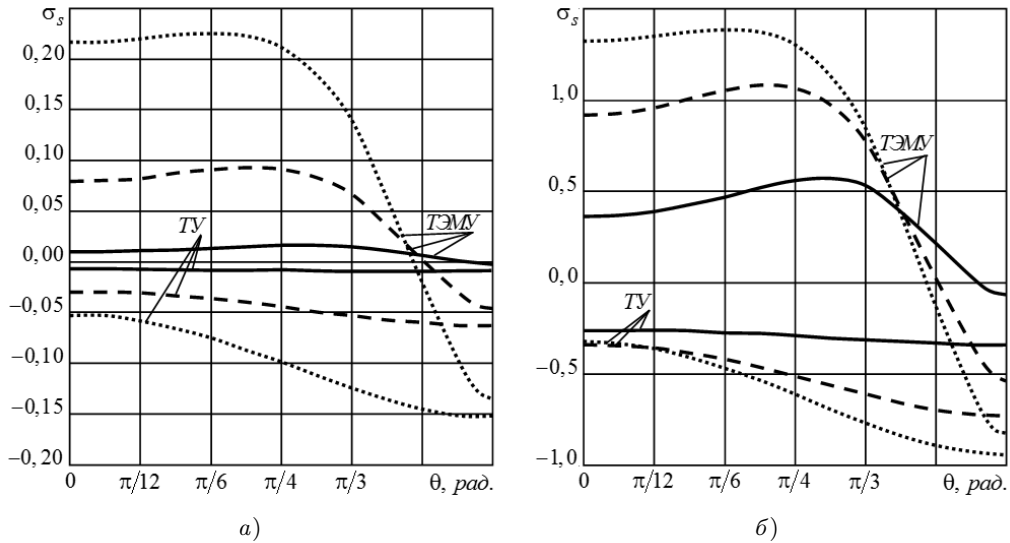


Рис. 4. График распределения напряжений  $\sigma_s$  по внутреннему контуру кольцевой пластинки при значениях  $hr_1 = 0, 1$  (рис. а) и  $hr_1 = 0, 1$  (рис. б) для значений  $r_0/r_1$ , равных 2 (сплошные линии), 10 (штриховые линии), 100 (пунктирные линии), для задач ТУ и ТЭМУ

В таблице 3 для концентрического кругового кольца с внешним радиусом  $r_0$  и внутренним радиусом  $r_1 = r_0/2$ , для случая, когда через контуры кольца действует конвективный теплообмен с внешней средой с коэффициентами теплообмена  $h_0$  и  $h_1$  соответственно, приведены значения напряжений  $\sigma_s$  в некоторых точках внешнего контура  $L_0$  и внутреннего контура  $L_1$  с центральными углами  $\theta$  в зависимости от значений  $h_0r_1$  и  $h_1r_1$  для случая задачи ТЭМУ.

Таблица 3. Значения напряжений  $\sigma_s$  в точках контуров концентрического кольца

$h_1r_1$	$\theta$ , рад.	Внешний контур					Внутренний контур				
		Значение $h_0r_1$									
		0,01	0,1	1	10	$\infty$	0,01	0,1	1	10	$\infty$
0,01	0	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002
	$\pi/4$	-0,000	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
	$\pi/2$	-0,001	-0,001	-0,002	-0,002	-0,002	-0,000	-0,000	-0,000	-0,000	-0,000
0,1	0	-0,002	-0,007	-0,010	-0,010	-0,010	0,003	0,010	0,015	0,015	0,015
	$\pi/4$	-0,001	-0,005	-0,006	-0,007	-0,007	0,004	0,016	0,022	0,023	0,023
	$\pi/2$	-0,003	-0,010	-0,015	-0,015	-0,015	-0,000	-0,002	-0,003	-0,003	-0,003
1	0	-0,002	-0,017	-0,059	-0,079	-0,082	0,003	0,025	0,088	0,118	0,123
	$\pi/4$	-0,001	-0,011	-0,039	-0,052	-0,054	0,005	0,038	0,136	0,182	0,189
	$\pi/2$	-0,003	-0,025	-0,088	-0,118	-0,123	-0,001	-0,004	-0,016	-0,021	-0,022
10	0	-0,002	-0,019	-0,119	-0,244	-0,276	0,003	0,029	0,179	0,367	0,416
	$\pi/4$	-0,001	-0,013	-0,079	-0,162	-0,184	0,005	0,045	0,275	0,564	0,639
	$\pi/2$	-0,003	-0,029	-0,179	-0,367	-0,416	-0,001	-0,005	-0,031	-0,064	-0,073
$\infty$	0	-0,002	-0,020	-0,134	-0,319	-0,376	0,003	0,030	0,202	0,480	0,566
	$\pi/4$	-0,001	-0,013	-0,089	-0,212	-0,250	0,005	0,046	0,310	0,736	0,869
	$\pi/2$	-0,003	-0,030	-0,202	-0,479	-0,566	-0,001	-0,005	-0,035	-0,084	-0,099

В таблице 4 для неконцентрического кругового кольца с внешним радиу-

сом  $r_0$  ( $a_0 = b_0 = r_0$ ) и смещенным по оси  $Ox$  отверстием радиуса  $r_1$  ( $a_1 = b_1 = r_1$ ) (рис. 5), когда через контуры действует конвективный теплообмен с коэффициентом теплообмена  $h$  ( $h_1 = h_2 = h$ ) с внешней средой, с точностью до разности температур внешних сред  $\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_0$  как множителя, приведены значения нормальных напряжений  $\sigma_s$  в некоторых характерных точках внешнего контура  $L_0$  и внутреннего контура  $L_1$  с центральными углами  $\theta$  в зависимости от значения  $hr_1$  при некоторых значениях отношения  $x_{01}/r_1$  величины смеще-

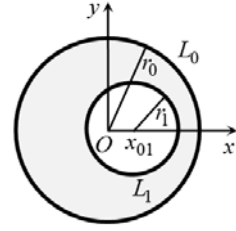


Рис. 5

Таблица 4. Значения напряжений  $\sigma_s$  в точках контуров неконцентрического кольца

$\frac{x_{01}}{r_1}$	$\theta$ , рад.	Внешний контур					Внутренний контур				
		Значение $hr_1$									
		0,01	0,1	1	10	$\infty$	0,01	0,1	1	10	$\infty$
0	0	-0,001	-0,007	-0,059	-0,244	-0,376	0,001	0,010	0,088	0,367	0,566
	$\pi/12$	-0,001	-0,006	-0,054	-0,224	-0,345	0,001	0,011	0,094	0,393	0,605
	$\pi/6$	0,000	-0,005	-0,041	-0,172	-0,264	0,001	0,013	0,113	0,470	0,724
	$\pi/4$	0,000	-0,005	-0,039	-0,162	-0,250	0,002	0,016	0,136	0,564	0,869
	$\pi/2$	-0,001	-0,010	-0,088	-0,367	-0,566	0,000	-0,002	-0,016	-0,064	-0,099
	$3\pi/4$	0,000	-0,005	-0,039	-0,162	-0,250	0,002	0,016	0,136	0,564	0,869
	$\pi$	-0,001	-0,007	-0,059	-0,244	-0,376	0,001	0,010	0,088	0,367	0,566
0,5	0	-0,001	-0,010	-0,064	-0,324	-0,687	0,001	0,009	0,048	0,291	0,724
	$\pi/12$	-0,001	-0,009	-0,063	-0,317	-0,646	0,001	0,010	0,053	0,303	0,725
	$\pi/6$	-0,001	-0,006	-0,051	-0,261	-0,500	0,001	0,010	0,067	0,345	0,744
	$\pi/4$	-0,001	-0,005	-0,056	-0,267	-0,472	0,001	0,013	0,094	0,434	0,818
	$\pi/2$	-0,001	-0,006	-0,065	-0,284	-0,425	-0,001	-0,006	-0,023	-0,066	-0,130
	$3\pi/4$	0,000	0,001	-0,010	-0,052	-0,060	0,001	0,015	0,146	0,592	0,853
	$\pi$	0,000	-0,002	-0,028	-0,113	-0,155	0,000	0,005	0,077	0,333	0,448
0,75	0	-0,001	-0,011	-0,042	-0,253	-0,903	0,001	0,010	-0,007	0,057	0,717
	$\pi/12$	-0,001	-0,008	-0,060	-0,329	-0,847	0,001	0,009	0,009	0,121	0,732
	$\pi/6$	0,000	-0,002	-0,059	-0,325	-0,630	0,001	0,008	0,043	0,246	0,750
	$\pi/4$	0,000	-0,004	-0,068	-0,332	-0,578	0,001	0,008	0,076	0,363	0,771
	$\pi/2$	0,000	0,000	-0,035	-0,189	-0,289	-0,002	-0,012	-0,031	-0,061	-0,158
	$3\pi/4$	0,000	0,004	0,008	0,004	0,013	0,001	0,013	0,139	0,563	0,823
	$\pi$	0,000	0,000	-0,010	-0,044	-0,062	0,000	0,000	0,055	0,289	0,404
0,9	0	-0,002	-0,013	0,009	0,018	-0,946	0,002	0,014	-0,097	-0,447	0,333
	$\pi/12$	0,000	-0,002	-0,088	-0,482	-1,148	0,001	0,009	-0,024	-0,092	0,616
	$\pi/6$	0,001	0,003	-0,073	-0,412	-0,748	0,000	0,004	0,060	0,313	0,864
	$\pi/4$	0,000	-0,002	-0,069	-0,343	-0,618	0,000	0,002	0,086	0,429	0,837
	$\pi/2$	0,001	0,004	-0,009	-0,108	-0,191	-0,002	-0,015	-0,036	-0,082	-0,193
	$3\pi/4$	0,001	0,005	0,018	0,046	0,059	0,001	0,013	0,128	0,505	0,773
	$\pi$	0,000	0,000	-0,001	0,003	-0,005	-0,001	-0,004	0,034	0,228	0,354
0,95	0	-0,002	-0,014	0,063	0,317	-0,732	0,004	0,018	-0,189	-0,962	-0,350
	$\pi/12$	0,001	0,004	-0,132	-0,716	-1,497	0,001	0,007	-0,007	-0,024	0,695
	$\pi/6$	0,001	0,005	-0,071	-0,402	-0,754	-0,001	-0,001	0,097	0,503	1,112
	$\pi/4$	0,000	-0,002	-0,062	-0,304	-0,585	-0,001	-0,001	0,095	0,480	0,910
	$\pi/2$	0,000	0,001	-0,013	-0,087	-0,161	-0,002	-0,014	-0,041	-0,123	-0,245
	$3\pi/4$	0,001	0,005	0,022	0,066	0,083	0,001	0,013	0,119	0,461	0,726
	$\pi$	0,000	0,000	0,003	0,024	0,021	-0,001	-0,005	0,022	0,187	0,312

ния (абсциссы центра) отверстия  $x_{01}$  к радиусу отверстия  $r_1$ , для случая задачи ТЭМУ.

На рисунке 6 изображены графики распределения напряжений  $\sigma_s$  по внешнему контуру  $L_0$  неконцентрического кольца для отношений  $x_{01}/r_1 = 0; 0,5; 0,75; 0,9; 0,95$  при значениях  $hr_1 = 0,1; 10$  в зависимости от центрального угла  $\theta$  для задачи ТЭМУ. На рисунке 7 для этих же случаев изображены графики распределения напряжений  $\sigma_s$  по внутреннему контуру  $L_1$ .

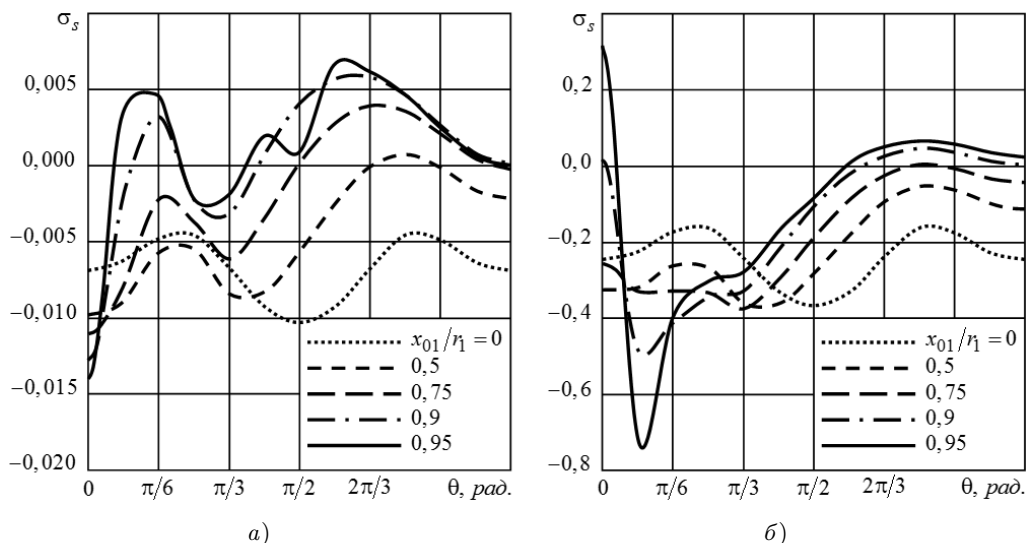


Рис. 6. График распределения напряжений  $\sigma_s$  по внешнему контуру неконцентрического кольца при  $hr_1 = 0,1$  (рис. а) и  $hr_1 = 10$  (рис. б) для некоторых значений  $x_{01}/r_1$ .

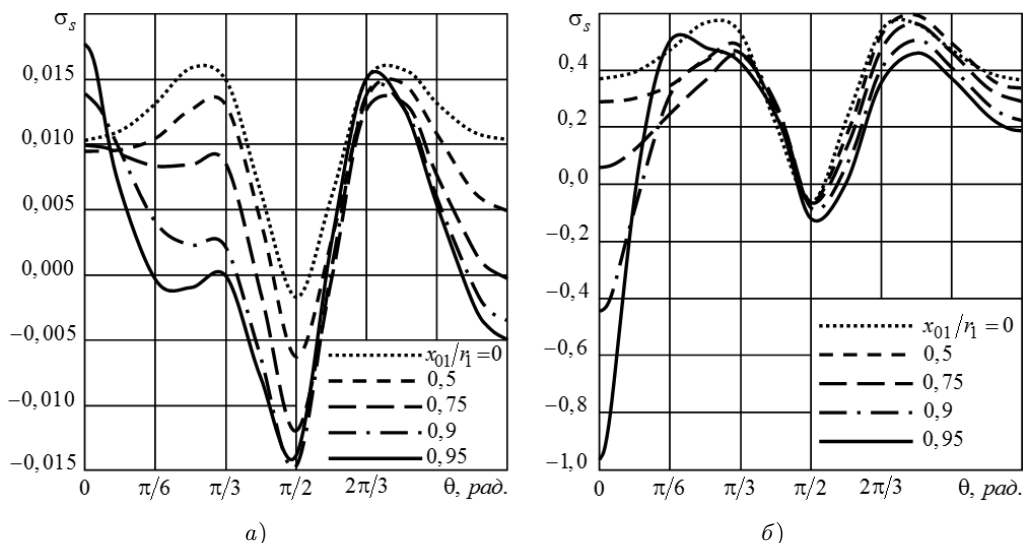


Рис. 7. График распределения напряжений  $\sigma_s$  по внутреннему контуру неконцентрического кольца при  $hr_1 = 0,1$  (рис. а) и  $hr_1 = 10$  (рис. б) для некоторых значений  $x_{01}/r_1$ .

**Выводы.** Из приведенных таблиц и рисунков и других полученных результатов следует, что значения  $h_l r_l$ , которые являются критериями Био, оказывают значительное влияние на уровни напряжений в пластинке. Если  $h_l r_l > 1000$ , то можно полагать, что на контуре  $L_l$  задано значение температуры  $T = \mathfrak{T}_l$ ; если  $h_l r_l < 0,01$ , то можно полагать, что контур  $L_l$  теплоизолирован. Наибольшая концентрация напряжений наблюдается при достаточно больших значениях критериев Био. Если значение критерия Био для одного из контуров пластинки достаточно мало, то значения напряжений во всей пластинке убывают. Особенно сильным влиянием на значения напряжений в пластинке обладает критерий Био для внешнего контура пластинки. На напряженное состояние пластинки также существенно влияет взаиморасположение внешнего и внутреннего контуров. Так, в случае неконцентрических колец при сближении отверстия с внешним контуром пластинки концентрация напряжений в ней возрастает, а особенно сильный рост имеет место в области перемычки. Вблизи внутреннего контура также значительно возрастают значения напряжений в окрестности точки  $\theta = \pi/2$ . Это, по-видимому, связано с тем, что материал пластинки поляризован по направлению оси  $Oy$ . Как показали результаты исследований, при проведении расчетов следует учитывать все свойства материала пластинки, в т. ч. электромагнитные свойства; при пренебрежении электромагнитными свойствами материала пластинки происходит существенное искажение результатов.

1. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
2. Желудев И.С. Физика кристаллических диэлектриков / И.С. Желудев. – М.: Наука, 1968. – 463 с.
3. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред / Ж. Можен. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
4. Гринченко В.Т. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 5).
5. Партон В.З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
6. Калоеров С.А. Плоская задача термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, О.А. Сорочан // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 4. – С. 81–91.
7. Подстригач Я.С. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно // К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
8. Гарматій Г.Ю. Термопружний стан безмежного термочутливого тіла з циліндричною порожниною за умови конвективного теплообміну / Г.Ю. Гарматій, В.С. Попович // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2009. – Вип. 52, № 3. – С. 192–200.
9. Parihar K.S. Transient heat conduction and analysis of thermal stresses in thin circular plate / K.S. Parihar, S.S. Patil // J. Therm. Stress. – 2011. – Vol. 34, № 4. – P. 335–351.
10. Gaikwad K.R. Analysis of transient thermoelastic temperature distribution of a thin circular plate and its thermal deflection under uniform heat generation / K.R. Gaikwad, Y.U. Naner // J. Therm. Stress. – 2021. – Vol. 44, № 1. – P. 75–85.
11. Nguyen T.D. Frequency dependence of the magnitude of thermal stresses in a flat plate subjected to rapid thermal cycling by convective heating and cooling / T.D. Nguyen, J.R. Thomas Jr., D.P.H. Hasselman // J. Therm. Stress. – 1987. – Vol. 10, № 3. – P. 163–175.
12. Roozbahani M.M. Temperature and stress distribution in hollow annular disk of uniform thick-

- ness with quadratic temperature-dependent thermal conductivity / M.M. Roozbahani, H. Razzaghi, M. Baghani, M. Baniassadi, M. Layeghi // J. Therm. Stress. – 2017. – Vol. 40, № 7. – P. 828–845.
13. Глушанков Е.С. Термоэлектромагнитоупругое состояние бесконечной многосвязной пьезопластинки в условиях конвективного теплообмена при действии линейного потока тепла / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2020. – Вып. 2 (75). – С. 18–29.
  14. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в пьезопластинках с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестник Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 1. – С. 15–26.
  15. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
  16. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
  17. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.

**E.S. Glushankov**

**Determining the thermo-electro-magneto-elastic state of finite multiply connected piezoelectric plate in case of convective heat transfer acting on its contours.**

A method is proposed for determination of the thermo-electro-magneto-elastic state of a finite multiply connected piezoelectric plate with holes under the conditions of convective heat transfer acting on the contours of the holes. The solution of the problem is built with using the thermoconductivity and thermo-electro-magneto-elasticity problems' complex potentials. Using the least squares, the problem is reduced to solving two overdetermined systems of linear algebraic equations for the Laurent series and Faber polynomials series expansions' unknown coefficients. The influence of heat transfer characteristics, electromagnetic properties of the material and the geometric characteristics of the plate on the main characteristics of thermo-electro-magneto-elastic state are obtained with the numerical studies.

**Keywords:** *piezoelectric plate, multiply connected plate, convective heat transfer, thermal stresses, complex potentials.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк

Получено 31.01.2022

Donetsk National University, Donetsk

*eugenij.glushankov@gmail.com*

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2022-2-30-38

EDN:BTQLJB



©2022. М.Н. Пачева

## АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ ВОЛН СДВИГА В ВОЛНОВОДЕ ИЗ СОСТЫКОВАННЫХ ПОД УГЛОМ ОРТОТРОПНЫХ ПОЛУСЛОЕВ С УЧЕТОМ СИНГУЛЯРНОСТИ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ В КРАЙНИХ ТОЧКАХ ОБЛАСТИ КОНТАКТА СОСТАВЛЯЮЩИХ

Представлена разработка теоретического алгоритма численно-аналитического решения задачи о распространении сдвиговых упругих волн в волноводе из состыкованных под углом прямолинейно ортотропных полуслоев на базе метода рядов по базисным множествам нормальных волн в стыкуемых компонентах с учетом возможного возникновения особенностей степенного типа в угловых точках, отвечающих границам области их идеального механического контакта.

*Ключевые слова:* упругие сдвиговые волны, анализ эффектов распространения, анизотропный составной волновод, стыкуемые под углом полуслои, особенности в полях напряжений, специальные однородные решения, метод рядов по базисным нормальным волнам.

**Введение и цели исследования.** В исследованиях по актуальной проблеме применения численно-аналитических методов для анализа закономерностей распространения акустических и упругих волн по составным волноводам кусочно-однородной структуры [1–2], описываемых краевыми задачами для уравнений динамического деформирования с однородными и контактными граничными условиями на различных участках границ рассматриваемых тел, важным аспектом является учет возможного появления особенностей в представлениях полей механических напряжений для краевых точек поверхностей сопряжения разнородных компонентов. Различные аспекты проблемы возникновения таких особенностей для ряда вариантов задач механики деформирования неоднородных составных тел и элементов конструкций рассмотрены в работах [3–7]. Роль полученных в этих работах результатов заключается, помимо прочего, в последующем использовании данных о наличии и типе вышеуказанных особенностей для эффективного корректного решения задачи удовлетворения краевым условиям на контактных поверхностях составных тел [1–8].

В контексте представленных соображений, целью настоящей работы является описание теоретического алгоритма решения задачи о распространении сдвиговых нормальных упругих волн в волноводе из состыкованных под углом прямолинейно ортотропных полуслоев с учетом возможного возникновения особенностей степенного типа в угловых точках его продольного сечения, отвечающих границам отрезка контакта сопрягаемых элементов.



**1. Описание условий появления и показателей особенностей в полях касательных напряжений.** Как указано выше, элементом исследования свойств стационарных волн деформаций в кусочно-однородных волноводах является учет возможностей появления особенностей полей напряжений в угловых точках их сопрягаемых составных элементов, и данные об особенностях поведения волновых полей в окрестности таких точек представляют интерес в дальнейшем процессе анализа соответствующих краевых задач [1–8].

Исследуемый волновод рассматривается как составное ортотропное упругое тело из полуслоя  $V_1$  толщины  $2h_1$  с ортогональным к граням плоским торцом  $\Gamma_1$  и полуслоя  $V_2$  толщины  $2h_2$ , где  $h_2 = h_1 \cdot \sin \alpha$ , с плоской торцевой границей  $\Gamma_2$ . Полуслоем  $V_2$  наклонен на угол  $\alpha$  по отношению к  $V_1$ . Торцевые поверхности  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  при стыковочном наложении образуют плоскость  $\Gamma$  идеального механического контакта полуслоев  $V_1$  и  $V_2$ .

В процессе применения для решения рассматриваемой задачи численно-аналитического метода рядов по базисным множествам бегущих и краевых стоячих нормальных волн для каждой компонент волновода, в телах  $V_1$  и  $V_2$  вводятся локальные координатные системы  $Ox_1^{(j)}x_2^{(j)}x_3^{(j)}$  ( $j = \overline{1, 2}$ ), имеющие общий полюс  $O$ , расположенный в центре  $\Gamma$ . Соответственно, ось  $Ox_1^{(2)}$  наклонена на угол  $\alpha$  по отношению к  $Ox_1^{(1)}$ . Во введенных координатных системах составные части волновода занимают области

$$\begin{aligned} V_1 &= \{-\infty < x_1^{(1)} \leq 0, x_3^{(1)} \in [-h_1, h_1], x_2^{(1)} \in (-\infty, \infty)\} \\ V_2 &= \{x_3^{(2)}/\sin \alpha \leq x_1^{(2)} < \infty, x_3^{(2)} \in [-h_2, h_2], x_2^{(2)} \in (-\infty, \infty)\}, \end{aligned} \quad (1)$$

причем на контактной поверхности  $\Gamma$  выполняется условие  $x_3^{(1)} = x_3^{(2)}/\sin \alpha$ . Плоские граничные поверхности  $x_3^{(1)} = \pm h_1$ ,  $x_3^{(2)} = \pm h_2$  составных частей рассматриваемого волновода считаются свободными от напряжений.

Материалы рассматриваемых слоев, по предположению, являются ортотропными. Упруго-эквивалентные направления для материалов полуслоев  $V_j$  коллинеарны осям локальных координатных систем  $Ox_1^{(j)}x_2^{(j)}x_3^{(j)}$  и характеризуются упругими постоянными  $c_{44}^{(j)}$ ,  $c_{55}^{(j)}$ . При этом, в координатной системе  $Ox_1^{(1)}x_3^{(1)}$  свойства материала  $V_2$  характеризуются совокупностью постоянных

$$\begin{aligned} c_{44}^{(2\alpha)} &= c_{44}^{(2)} \cos^2 \alpha + c_{55}^{(2)} \sin^2 \alpha, & c_{55}^{(2\alpha)} &= c_{55}^{(2)} \cos^2 \alpha + c_{44}^{(2)} \sin^2 \alpha, \\ c_{45}^{(2\alpha)} &= (c_{44}^{(2)} - c_{55}^{(2)}) \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

В рассматриваемом случае распространения волн сдвигового типа заключение о возможности появления особенностей для характеристик поля напряжений в крайних точках  $\Gamma$ , данные об их характере и порядке, могут быть получены на основе методик асимптотического анализа задач статического антиплоского деформирования составных клиновидных тел, изложенных в публикациях [8–9].

Для применения в данной работе рассматриваются следующие варианты постановки и анализа задачи об определении характера асимптотического поведения характеристик поля сдвиговых перемещений и касательных напряжений в окрестности угловой точки составного анизотропного упругого клина при антиплоской деформации [9]. Базовой является задача об антиплоской деформации составного клина из двух разнотипных однородных анизотропных клиновидных элементов, внутренние поверхности которых находятся в идеальном механическом контакте друг с другом, а на внешних граничных поверхностях могут быть заданы краевые условия отсутствия напряжений, отсутствия перемещений, либо комбинированные условия одной свободной и закрепленной второй поверхности.

Анализ вопроса о существовании особенности полей напряжений в вершине клина применительно к описанным случаям представлен в работе [9] и сведен к определению показателя  $\zeta$  особенности степенного типа из соответствующего трансцендентного уравнения. В ней исследуется антиплоская задача для составного кусочно-однородного прямолинейно-анизотропного клина с сечением, представленным в координатной плоскости  $Ox_1x_2$  двумя контактирующими секторными областями

$$S_1 = \{0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq \theta_1\} \quad (3)$$

с границами

$$\Gamma_0 = \{0 \leq r < \infty, \theta = 0\}, \quad \Gamma_1 = \{0 \leq r < \infty, \theta = \theta_1\} \quad (4)$$

и

$$S_2 = \{0 \leq r < \infty, -\theta_2 \leq \theta \leq 0\} \quad (5)$$

с границами

$$\Gamma_0 = \{0 \leq r < \infty, \theta = 0\}, \quad \Gamma_2 = \{0 \leq r < \infty, \theta = -\theta_2\}. \quad (6)$$

Рассматривается случай идеального механического контакта составляющих по границе  $\Gamma_0$ , задания на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  условий отсутствия напряжений либо задания на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  условий отсутствия упругих перемещений, а также случай отсутствия на  $\Gamma_1$  напряжений, а на  $\Gamma_2$  – перемещений.

Устанавливаемые в [9] асимптотические представления для напряжений  $\sigma_{13}^{(j)}$ ,  $\sigma_{23}^{(j)}$  ( $j = 1, 2$ ) в окрестности вершины составного клина в областях с сечениями  $S_j$  его компонентов из материалов с упругими постоянными  $c_{44}^{(j)}$ ,  $c_{55}^{(j)}$ ,  $c_{45}^{(j)}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(j)} &= A_j \mu_j (x_1 + \mu_j x_2)^{\zeta-1} + B_j \bar{\mu}_j (x_1 + \bar{\mu}_j x_2)^{\zeta-1}, \\ \sigma_{23}^{(j)} &= -A_j (x_1 + \mu_j x_2)^{\zeta-1} - B_j (x_1 + \bar{\mu}_j x_2)^{\zeta-1}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\mu_j = (c_{45}^{(j)} / c_{55}^{(j)}) + i(c_{44}^{(j)} / c_{55}^{(j)} - c_{45}^{(j)} c_{45}^{(j)} / c_{55}^{(j)})^{1/2}, \quad (8)$$

где  $A_j$ ,  $B_j$  – произвольные постоянные коэффициенты.

В перечисленных случаях задания граничных условий на внешних поверхностях составного клина показатели особенности  $\zeta$  соответственно подлежат определению из уравнений

$$(\chi + 1) \sin \zeta(\varphi_1 + \varphi_2) + (\chi - 1) \sin \zeta(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \quad (9)$$

$$(\chi + 1) \sin \zeta(\varphi_1 + \varphi_2) - (\chi - 1) \sin \zeta(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \quad (10)$$

$$(\chi + 1) \cos \zeta(\varphi_1 + \varphi_2) + (\chi - 1) \cos \zeta(\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \quad (11)$$

В приведенных уравнениях в общем случае

$$\begin{aligned} \chi &= ((c_{44}^{(2)} c_{55}^{(2)} - (c_{45}^{(2)})^2) / (c_{44}^{(1)} c_{55}^{(1)} - (c_{45}^{(1)})^2))^{1/2}; \\ \varphi_1 &= \arg(\cos \theta_1 + \mu_1 \sin \theta_1), \quad \varphi_2 = \arg(\cos \theta_2 - \bar{\mu}_2 \sin \theta_2). \end{aligned} \quad (12)$$

При этом асимптотическое поведение функций сдвиговых упругих перемещений и касательных напряжений в окрестности вершины составного клина для областей  $S_j$  описывается представлениями

$$u_3^{(j)}(x_1, x_2) = A_j m_j (x_2 + \mu_j x_1)^\zeta + B_j \bar{m}_j (x_2 + \bar{\mu}_j x_1)^\zeta, \quad (13)$$

где

$$m_j = c_{55}^{(j)} \mu_j - c_{45}^{(j)}, \quad \bar{m}_j = c_{55}^{(j)} \bar{\mu}_j - c_{45}^{(j)}. \quad (14)$$

В случае существования действительных корней  $0 < \zeta < 1$  уравнений (9) – (11) анализируемые поля динамических напряжений  $\sigma_{13}^{(j)}$ ,  $\sigma_{23}^{(j)}$  будут иметь особенность в вершине составного клина.

Применение этого результата для анализа возможного появления и учета особенностей полей напряжений в угловых точках сопрягаемых составных элементов описанного выше кусочно-однородного волновода, образованного состыкованными под углом анизотропными полуслоями, реализуется следующим образом.

Для рассматриваемого составного тела крайние угловые точки  $x_3^{(1)} = h_1$  и  $x_3^{(1)} = -h_1$  контактного отрезка  $\Gamma$  границы могут быть в асимптотическом смысле интерпретированы как вершины двух описанных выше тел в виде составного клина со свободными границами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  из анизотропных материалов с упругими постоянными  $c_{44}^{(1)}$ ,  $c_{55}^{(1)}$  и  $c_{44}^{(2\alpha)}$ ,  $c_{55}^{(2\alpha)}$ ,  $c_{45}^{(2\alpha)}$ , имеющих в случае клина с вершиной в точке  $x_1^{(1)} = 0$ ,  $x_3^{(1)} = h_1$  угловые параметры  $\theta_1 = \pi/2 + \alpha$ ,  $\theta_2 = \pi/2$ , и в случае клина с вершиной в точке  $x_1^{(1)} = 0$ ,  $x_3^{(1)} = -h_1$  угловые параметры  $\theta_1 = \pi/2 - \alpha$ ,  $\theta_2 = \pi/2$ . Параметр  $\zeta$  асимптотического поведения полей напряжений в угловой точке клина в данном случае соответственно подлежат определению из уравнения

$$(\chi + 1) \sin \zeta(\varphi_1 + \varphi_2) + (\chi - 1) \sin \zeta(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \quad (15)$$

в котором

$$\begin{aligned} \chi &= ((c_{44}^{(2)} \cos^2 \alpha + c_{55}^{(2)} \sin^2 \alpha)(c_{55}^{(2)} \cos^2 \alpha + c_{44}^{(2)} \sin^2 \alpha) - \\ &\quad - ((c_{44}^{(2)} - c_{55}^{(2)}) \sin \alpha \cos \alpha)^2) / (c_{44}^{(1)} c_{55}^{(1)})^{1/2}, \\ \mu_1 &= i(c_{44}^{(1)} / c_{55}^{(1)})^{1/2}, \mu_2 = i(c_{44}^{(2)} / c_{55}^{(2)})^{1/2}, \end{aligned} \quad (16)$$

а также  $\varphi_1 = \arg(-\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha)$ ,  $\varphi_2 = \arg(-\bar{\mu}_2)$  для клина с вершиной в точке  $x_1^{(1)} = 0$ ,  $x_3^{(1)} = h_1$  и  $\varphi_1 = \arg(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha)$ ,  $\varphi_2 = \arg(-\bar{\mu}_2)$  для клина с вершиной в точке  $x_1^{(1)} = 0$ ,  $x_3^{(1)} = -h_1$ .

**2. Алгоритм применения метода динамических однородных решений при наличии особенностей в полях контактных напряжений.** В случае выявления степенной особенности поля напряжений с показателем  $\zeta_1 - 1 < 0$  в окрестности точки  $x_1^{(1)} = 0$ ,  $x_3^{(1)} = h_1$ , решение краевой задачи о прохождении по волноводу нормальной сдвиговой волны с заданной симметрией по толщине, с заданной частотой и длиной, на основе применения метода рядов по базисному множеству бегущих и краевых стоячих нормальных волн [10] реализуется следующим образом.

В предположении о том, что исходная, приходящая к поверхности  $\Gamma$  из глубины  $V_1$  сдвиговая гармоническая волна является симметричной нормальной волной круговой частоты  $\omega$ , принадлежит моде с номером  $p$  из соответствующего дисперсионного спектра и характеризуется амплитудой  $u_0$ , первичное представление для волнового поля в  $V_1$  выбирается в виде суммы падающей и отраженной от  $\Gamma$  составляющих

$$\begin{aligned} u_2^{(1)} &= u_0 \cos(\alpha_p^{(1)} x_3^{(1)}) e^{-i(\omega t - k_{1p}^{(s)} x_1^{(1)})} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n1}^{(1)} \cos(\alpha_n^{(1)} x_3^{(1)}) e^{-i(\omega t + k_{1n}^{(s)} x_1^{(1)})} + A_{n2}^{(1)} \sin(\beta_n^{(1)} x_3^{(1)}) e^{-i(\omega t + k_{1n}^{(a)} x_1^{(1)})}), \end{aligned} \quad (17)$$

а для прошедшей в  $V_2$  волны в виде

$$u_2^{(3)} = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n1}^{(3)} \cos(\alpha_n^{(3)} x_3^{(3)}) e^{-i(\omega t - k_{3n}^{(s)} x_1^{(3)})} + A_{n2}^{(3)} \sin(\beta_n^{(3)} x_3^{(3)}) e^{-i(\omega t - k_{3n}^{(a)} x_1^{(2)})}), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_n^{(j)} &= \frac{(2n+1)\pi}{2h^{(j)}}, \quad k_{jn}^{(s)} = \left( \rho^{(j)} \omega^2 - c_{44}^{(j)} \left( \frac{(2n+1)\pi}{2h^{(j)}} \right)^2 / c_{66}^{(j)} \right)^{1/2}, \\ \beta_n^{(j)} &= \frac{n\pi}{2}, \quad k_{jn}^{(a)} = \left( \rho^{(j)} \omega^2 - c_{44}^{(j)} \left( \frac{n\pi}{h^{(j)}} \right)^2 / c_{66}^{(j)} \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (19)$$

$A_{n1}^{(1)}$ ,  $A_{n2}^{(1)}$ ,  $A_{n1}^{(3)}$ ,  $A_{n2}^{(3)}$  – неизвестные коэффициенты,  $k_{jn}^{(s)}$ ,  $k_{jn}^{(a)}$  – волновые числа для симметричных (s) и антисимметричных (a) нормальных волн моды  $n$  в слое.

Далее, при наличии особенности полей напряжений в точке  $x_1^{(1)} = 0$ ,  $x_3^{(1)} = h_1$ , для полуслоя  $V_1$  записывается разложение функции  $\tau_1(x_3^{(1)}) = (h_1 - x_3^{(1)})^{\zeta_1}$  по образуемому граничными представлениями на  $\Gamma$  для комплексных амплитудных функций базисных нормальных сдвиговых волн в  $V_1$

$$\begin{aligned} & \{u_{2p}^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})\} = \\ & = \{\cos(q_{sp1}x_3^{(1)}) \exp(ik_{sp1}x_1^{(1)})\} \cup \{\sin(q_{cp1}x_3^{(1)}) \exp(ik_{cp1}x_1^{(1)})\} \end{aligned} \quad (20)$$

множеству базисных функций

$$\{\cos q_{sp1}x_3^{(1)}, \sin q_{cp1}x_3^{(1)}\}_{p=0}^{\infty}, \quad q_{cp1} = (2p+1)\pi/(2h_1), \quad q_{sp1} = (p+1)\pi/h_1. \quad (21)$$

Данное разложение имеет вид

$$\tau_1(x_3^{(1)}) = (h_1 - x_3^{(1)})^{\zeta_1} = \sum_{p=0}^{\infty} (\xi_{cp1} \cos q_{sp1}x_3^{(1)} + \xi_{sp1} \sin q_{cp1}x_3^{(1)}), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \xi_{cp1} &= (2h_1)^{-1} \left( \int_{-h_1}^{h_1} (h_1 - x_3^{(1)})^{\zeta_1} \cos q_{sp1}x_3^{(1)} dx_3^{(1)} \right), \\ \xi_{sp1} &= (2h_1)^{-1} \left( \int_{-h_1}^{h_1} (h_1 - x_3^{(1)})^{\zeta_1} \sin q_{cp1}x_3^{(1)} dx_3^{(1)} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

и на его основе формируется представление для учитывающего наличие особенности специального частного однородного решения вида

$$\begin{aligned} & u_{2\zeta_1}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) = \\ & = \sum_{p=0}^{\infty} (\xi_{cp1} \cos q_{sp1}x_3^{(1)} \exp(ik_{sp1}x_1^{(1)}) + \xi_{sp1} \sin q_{cp1}x_3^{(1)} \exp(ik_{cp1}x_1^{(1)})). \end{aligned} \quad (24)$$

Соответственно, для полуслоя  $V_2$ , в котором угловой точке  $x_1^{(1)} = 0$ ,  $x_3^{(1)} = h_1$ , отвечает точка  $x_1^{(2)} = h_2 \operatorname{tg} \alpha = h_1 \sin \alpha$ ,  $x_3^{(2)} = h_2$ , в этом случае формируется представление для специального частного однородного решения вида

$$\begin{aligned} \hat{u}_{2\zeta_1}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) &= \sum_{p=0}^{\infty} (\hat{\xi}_{cp1} \cos q_{sp2}x_3^{(2)} \exp(ik_{sp2}(x_1^{(2)} - h_1 \sin \alpha)) + \\ & + \hat{\xi}_{sp1} \sin q_{cp2}x_3^{(2)} \exp(ik_{cp2}(x_1^{(2)} - h_1 \sin \alpha))), \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$q_{cp2} = (2p+1)\pi/(2h_2), \quad q_{sp2} = (p+1)\pi/h_2, \quad (26)$$

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_{cp1} &= (2h_2)^{-1} \left( \int_{-h_2}^{h_2} (h_2 - x_3^{(2)})^{\zeta_1} \cos q_{sp2} x_3^{(2)} dx_3^{(2)} \right), \\ \hat{\xi}_{sp1} &= (2h_2)^{-1} \left( \int_{-h_2}^{h_2} (h_2 - x_3^{(2)})^{\zeta_1} \sin q_{cp2} x_3^{(2)} dx_3^{(2)} \right).\end{aligned}\tag{27}$$

Аналогично, если степенная особенность поля напряжений с параметром  $\zeta_2 - 1 < 0$  выявляется в окрестности точки  $x_1^{(1)} = 0$ ,  $x_3^{(1)} = -h_1$  для полуслоя  $V_1$ , то формируется представление для специального частного однородного решения вида

$$\begin{aligned}u_{2\zeta_2}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) &= \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} (\xi_{cp2} \cos q_{sp1} x_3^{(1)} \exp(ik_{sp1} x_1^{(1)}) + \xi_{sp2} \sin q_{cp1} x_3^{(1)} \exp(ik_{cp1} x_1^{(1)})),\end{aligned}\tag{28}$$

в котором

$$\begin{aligned}\xi_{cp2} &= (2h_1)^{-1} \left( \int_{-h_1}^{h_1} (x_3^{(1)} + h_1)^{\zeta_1} \cos q_{sp1} x_3^{(1)} dx_3^{(1)} \right), \\ \xi_{sp2} &= (2h_1)^{-1} \left( \int_{-h_1}^{h_1} (x_3^{(1)} + h_1)^{\zeta_1} \sin q_{cp1} x_3^{(1)} dx_3^{(1)} \right).\end{aligned}\tag{29}$$

В этом случае для полуслоя  $V_2$  в котором угловой точке  $x_1^{(1)} = 0$ ,  $x_3^{(1)} = -h_1$ , отвечает точка  $x_1^{(2)} = -h_1 \sin \alpha$ ,  $x_3^{(2)} = -h_2$ , формируется представление для специального частного однородного решения вида

$$\begin{aligned}\hat{u}_{2\zeta_2}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) &= \sum_{p=0}^{\infty} (\hat{\xi}_{cp2} \cos q_{sp2} x_3^{(2)} \exp(ik_{sp2}(x_1^{(2)} + h_1 \sin \alpha)) + \\ &+ \hat{\xi}_{sp2} \sin q_{cp2} x_3^{(2)} \exp(ik_{cp2}(x_1^{(2)} + h_1 \sin \alpha))),\end{aligned}\tag{30}$$

где

$$q_{cp2} = (2p + 1)\pi/(2h_2), q_{sp2} = (p + 1)\pi/h_2,\tag{31}$$

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_{cp2} &= (2h_2)^{-1} \left( \int_{-h_2}^{h_2} (x_3^{(2)} + h_2)^{\zeta_2} \cos q_{sp2} x_3^{(2)} dx_3^{(2)} \right), \\ \hat{\xi}_{sp2} &= (2h_2)^{-1} \left( \int_{-h_2}^{h_2} (x_3^{(2)} + h_2)^{\zeta_2} \sin q_{cp2} x_3^{(2)} dx_3^{(2)} \right).\end{aligned}\tag{32}$$

В ситуациях наличия устанавливаемых особенностей, отвечающие им специальные частные однородные решения  $u_{2\zeta_1}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})$ ,  $u_{2\zeta_2}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})$ ,  $\hat{u}_{2\zeta_1}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)})$ ,  $\hat{u}_{2\zeta_2}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)})$  с множителями в виде подлежащих определению коэффициентов  $D_{2\zeta_1}$ ,  $D_{2\zeta_2}$ ,  $F_{2\zeta_1}$ ,  $F_{2\zeta_2}$ , добавляются к соответствующим представлениям (17) и (18).

Дальнейший этап реализации алгоритма исследования волн сдвига в волноводе из состыкованных под углом ортотропных полуслоев состоит в нахождении значений коэффициентов редуцируемых разложений (17), (18) из алгебраизируемых на базе метода ортогональных рядов функциональных граничных условий на контактной поверхности  $\Gamma$

$$\left(u_2^{(1)}\right)_{\Gamma_{12}} = \left(u_2^{(2)}\right)_{\Gamma_{12}}, \quad \left(\sigma_{12}^{(1)}\right)_{\Gamma_{12}} = \left(\sigma_{n2}^{(2)}\right)_{\Gamma_{12}}, \quad (33)$$

записываемых с учетом соотношений связи координат

$$\left(x_1^{(2)}\right)_{\Gamma} = x_3^{(1)} \sin \alpha, \quad \left(x_3^{(2)}\right)_{\Gamma} = x_3^{(1)} \cos \alpha. \quad (34)$$

В соотношениях (34) представление

$$\left(\sigma_{n2}^{(2)}\right)_{\Gamma_{12}} = \sigma_{12}^{(2)} \cos \left(\bar{n}_{\Gamma_{12}} \wedge O_2 x_1^{(2)}\right) + \sigma_{32}^{(2)} \cos \left(\bar{n}_{\Gamma_{12}} \wedge O_2 x_3^{(2)}\right)$$

описывает касательные динамические напряжения на контактной площадке  $\Gamma$  с нормалью  $\bar{n}_{\Gamma_{12}}$ .

В процессе алгебраизации осуществляется домножение соотношений граничных условий (33) на элементы функциональной системы

$$\left\{ \cos q_{sp1} x_3^{(1)}, \sin q_{cp1} x_3^{(1)} \right\}_{p=0}^{\infty}, \quad q_{cp1} = (2p+1)\pi/(2h_1), \quad q_{sp1} = (p+1)\pi/h_1, \quad (35)$$

и интегрирование по  $x_3^{(1)}$  в пределах от  $-h_1$  до  $h_1$ . При этом выполняется согласование пределов редукции в разложениях (17), (18) и количество выбираемых элементов функциональной системы (35) для получения относительно искомых коэффициентов систем линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей.

**Выводы.** Результатом представляемых в работе исследований является разработка теоретического алгоритма анализа эффектов распространения сдвиговых нормальных упругих волн в составном анизотропном волноводе из состыкованных под углом прямолинейно ортотропных полуслоев при учете возможного возникновения особенностей степенного типа в крайних точках отрезка контакта сопрягаемых элементов. В случае существования таких особенностей, в базисное множество частных решений волновых уравнений для компонент волновода, отвечающих бегущим и краевым стоячим нормальным волнам, добавляется специальное отражающее наличие особенности однородное решение, что может качественно повышать точность удовлетворения функциональных контактных краевых условий на границе сопряжения полуслоев при использовании для их алгебраизации метода ортогональных рядов.

1. Гетман И.П. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов / И.П. Гетман, Ю.А. Устинов. – Ростов–на–Дону: Изд-во РГУ. – 1993. – 144 с.
2. Вовк Л.П. Динамические задачи для тел сложной структуры. / Л.П. Вовк – Ростов-на-Дону: Ростовский гос. строит. ун-т, 2003. – 169 с.

3. *Вовк Л.П.* Исследование локальной особенности волновых характеристик около угловой точки линий раздела составного тела / Л.П. Вовк // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2004. – №2. – С. 38–42.
4. *Вовк Л.П.* Особенности локальной концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред / Л.П. Вовк – Донецк: Норд-Пресс, 2004. – 267с.
5. *Вовк Л.П.* О концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред / Л.П. Вовк, Б.В. Соболев // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69. – Вып. 2. – С. 269–278.
6. *Вовк Л.П.* Особенности динамических напряжений в окрестности точки стыка трех упругих сред / Л.П. Вовк, Б.В. Соболев // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69. – Вып. 2. – С. 279–289.
7. *Вовк Л.П.* Оценка интенсивности локальной концентрации напряжений в окрестности грани сопряжения двух термоупругих сред / Л.П. Вовк, Е.С. Кисель // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017. – №3–4 (60–61). – С. 69–80.
8. *Аванян В.Т.* Характер напряженного состояния в малой окрестности вершины клина, изготовленного из различных анизотропных материалов / В.Т. Аванян, Н.В. Аванян, А.А. Баблоян // Известия Национальной академии наук Армении. – 2000. – Т. 53, № 3. – С. 5–11.
9. *Саргсян А.М.* О влиянии граничных условий на малонапряженность антиплоской задачи кусочно-однородного прямолинейно-анизотропного клина / А.М. Саргсян // Известия Национальной академии наук Армении. – 2002. – Т. 55, № 1. – С. 17–22.
10. *Пачева М.Н.* Модифицированная методика алгебраизации краевых условий в задаче о распространении упругой волны сдвига по волноводу из состыкованных под углом полуслоев / М.Н. Пачева, В.И. Сторожев, А.С. Телевной // Журнал теорет. и прикладной механики. – 2017. – № 2(59). – С. 65–74.

**M.N. Pacheva**

**Algorithm for investigation of shear waves in a waveguide from angle-jointed orthotropic half-layers, taking into account the singularity of stress fields at the boundary points of the contact region of the components.**

The development of a theoretical algorithm for the numerical-analytical solution of the problem of the propagation of shear elastic waves in a waveguide from orthotropic contacted at an angle half-layers based on the method of series on basis sets of normal waves in joined components is presented. The algorithm takes into account the possibility of a power-type singularity at the corner points corresponding to the boundaries of the region of their ideal mechanical contact.

**Keywords:** *elastic shear waves, analysis of propagation effects, anisotropic two-components waveguide, joined at an angle half-layers, singularities in stress fields, special homogeneous solutions, method of series on basic normal waves.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк

Получено 21.04.2022

Donetsk National University, Donetsk

*marinapacheva@mail.ru*



**ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД,  
РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ  
ТЕПЛОФИЗИКА**

---

УДК 622.831, 622.23.02  
doi:10.24412/0136-4545-2022-2-39-45  
EDN:ELFNEE



©2022. Ф.М. Голубев, Е.А. Бардакова

**МЕТОДИКА ПРОГНОЗА ОСЕДАНИЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ  
ПРИ ЗАТОПЛЕНИИ ОЧИСТНЫХ ВЫРАБОТОК  
ЛИКВИДИРУЕМЫХ УГОЛЬНЫХ ШАХТ**

В статье представлены результаты исследований состояния зданий на горных отводах шахт, особенности расчета трубопроводов на устойчивость, зависимости оседаний земной поверхности от глубины затопляемых горных выработок. Предложен новый подход к определению исходных параметров влияния затопления горных выработок на оседания земной поверхности. Обоснована важность визуального и инструментального мониторинга.

**Ключевые слова:** *сдвигения земной поверхности, затопление горных выработок, ликвидация шахт, здания, трубопроводы.*

**Введение.** В основных угледобывающих районах Донбасса в последние годы происходит массовое закрытие угольных шахт и восстановление природного гидрогеологического баланса. При "мокрой консервации" неизбежно происходит увлажнение трещиноватых горных пород над очистными выработками и последующая потеря ими значительной доли своих прочностных свойств. Это, в свою очередь, приводит к повторной активизации процесса сдвижения земной поверхности и может вызвать деформации, расположенных на этой территории зданий, сооружений, коммуникаций и природных объектов. Величина такой активизации связана с объёмами выработанного пространства. В зависимости от геологических и горнотехнических условий существующие и ликвидированные шахты ДНР отрабатывают от 1 до 28 пластов. С 2016 года по настоящий момент прогнозы активизации деформаций земной поверхности, вызванной затоплением горных выработок, с определением предельно допустимой глубины затопления и оценка безопасной эксплуатации зданий и сооружений выполнены для более 60 шахт (рис. 1).

Величины оседаний, зафиксированные при инструментальных наблюдениях над затопленными выработками, невелики, однако следует учитывать тот факт, что, даже в результате первичной подработки земной поверхности, горизонтальные деформации для целого ряда коммуникаций и зданий приближа-



Рис. 1. Расположение планируемых к ликвидации и ликвидированных угледобывающих предприятий ДНР

ются к предельным, и их увеличение на 10-15% может привести к нарушению эксплуатационной пригодности объектов поверхности. Результаты обследования нескольких тысяч зданий, расположенных в различных районах ДНР, показывают, что существенная часть жилого фонда республики серьезно пострадала при подработке очистными выработками угольных шахт (табл. 1).

Таблица 1.  
Деформационный ресурс зданий в различных районах ДНР

кр	Торез, Снежное, %	Горловка, %	Енакиево, %
0	7	2	3
0,1-0,3	13	12	17
0,45-0,75	78	76	78
1	2	10	1

По результатам обследования более 2000 зданий можно сделать вывод о том, что от 14% до 21% зданий и сооружений в городах Республики находятся в аварийном и предаварийном состоянии. При этом следует отметить, что согласно анализу составов горных массивов в различных районах Донбасса, более 65% горных пород, слагающих толщу основных угледобывающих районов ДНР, представлены песчаными и глинистыми сланцами (рис. 2). Исследованиями Е.И. Питаленко, В.В. Васютиной, Н.А. Кутеповой и ряда других авторов установлено, что при влагонасыщении прочностные свойства глинистых и песчаных сланцев снижаются в 1,5-2 раза. Это несомненно приведет к активизации геомеханических процессов, и окажет разрушительное воздействие на здания и сооружения, находящиеся в аварийном и предаварийном состоянии.

Не менее остро стоит вопрос с сохранностью коммуникаций. Нормативные допустимые показатели для ряда подземных коммуникаций не превышают

$2 \cdot 10^{-3}$  мм/м. При этом, стоит отметить, что во время подработки массивов под трубопроводами различного назначения, в городах более 30 лет оказывалось последовательное воздействие на небольшие участки коммуникаций, а нормативные показатели рассчитаны без учета влияния коррозии, технических дефектов и нарушений условий прочности и надежности эксплуатации.

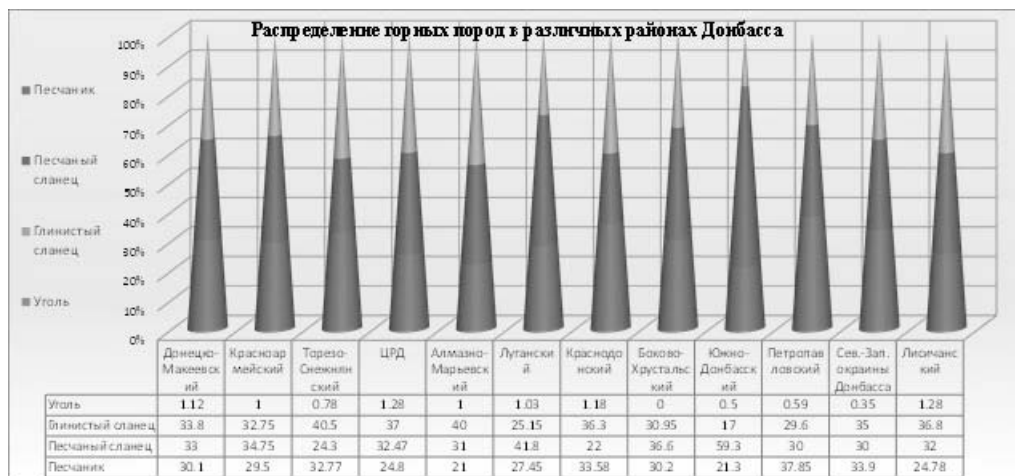


Рис. 2. Процентный состав основных типов горных пород в различных районах Донбасса

**1. Учет влияния и прогнозирование возможных оседаний.** Наиболее перспективным способом определения устойчивости трубопровода является расчет его напряженного состояния и определение предельных параметров разрушения с учетом технических характеристик трубопроводных коммуникаций. Применение данного способа реализуется по следующему алгоритму:

$$\sigma_{\text{пр}} \leq mR_y, \quad (1)$$

где  $\sigma_{\text{пр}}$  – максимальное продольное растягивающее напряжение в газопроводе от воздействия внутреннего давления, температурного перепада и влияния подработки, МПа;  $R_y$  – расчетное сопротивление материала труб и соединительных деталей по пределу текучести;  $m$  – коэффициент условий работы, учитывающий влияние подработки.

Продольное растягивающее напряжение в газопроводе от внутреннего давления определяется по формуле:

$$\sigma_p = \frac{\mu \times p_n \times D_{\text{вн}}}{2\delta}, \quad (2)$$

где  $\mu$  – коэффициент поперечной деформации Пуассона в упругой стадии работы металла;  $p_n$  – максимальное проектное давление газа;  $D_{\text{вн}}$  – внутренний диаметр газопровода;  $\delta$  – толщина стенок труб.

Продольное напряжение в газопроводе от температурного перепада определяется по формуле:

$$\sigma_t = E_0 \alpha \Delta t, \quad (3)$$

где  $E_0$  – модуль упругости стали для труб;  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения;  $\Delta t$  – температурный перепад газопровода, принимаемый равным разности между средней температурой наружного воздуха в теплое время года ( $28^\circ\text{C}$  согласно ДБН В.1.2-2:2006,  $18^\circ\text{C}$  согласно данным эксплуатирующей организации) и температурой газа  $10^\circ\text{C}$ .

Если газопровод пересекает мульду сдвижения, то максимальные напряжения в газопроводе на растянутых участках определяются по формуле:

$$\sigma_\xi = 1,57 \frac{E\lambda_0}{l_T}, \quad (4)$$

где  $E$  – модуль упругости стали;  $\lambda_0$  – максимальные перемещения газопровода на растянутых участках, м;  $l_T$  – участок безусловных деформаций с учетом изгиба трубы за зоной влияния горных работ, м.

Как для зданий, так и для трубопроводов в условиях массового закрытия шахт становится актуальной разработка мер защиты. Для зданий к таким мерам можно отнести усиление фундаментов, стяжку стен металлическими поясами, установку дополнительных опор, заделку повреждений полимерцементным раствором и др [3].

Для трубопроводов же к таким мерам можно отнести вскрытие, вваривание компенсационных катушек, замену проблемных участков на полиэтиленовые трубы нового образца.

Стоит также отметить важность проведения инструментальных и визуальных наблюдений за деформациями земной поверхности и объектами поверхности, для анализа негативного влияния на них ликвидируемых шахт в процессе затопления горных выработок. Ввиду того, что сроки и интенсивность влияния изучены крайне слабо, снижение деформационного ресурса ряда обследованных зданий может произойти задолго до поднятия шахтных вод на проектную отметку. В таких случаях для отдельных зданий необходимо назначение дополнительных оперативных мер защиты во избежание аварийных ситуаций и сохранения жилого фонда республики.

Необходимость постоянного мониторинга при массовой активизации процесса сдвижений связана с проблематичностью прогноза мест и величины проявления максимальных сдвижений. Согласно нормативному документу [1] для расчета прогнозных оседаний используется классическая формула, приведенная в отраслевом стандарте «Правила подработки. . . » [2], при этом фактическая мощность пласта заменяется на остаточную мощность, которая вычисляется по формуле:

$$m_0 = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5 \cdot m_B, \quad (5)$$

где  $K_1$  – коэффициент, зависящий от степени метаморфизма углей (угли марки А –  $K_1 = 1,0$ ; угли марок ТС, Т, ОС, КС, КЖ, К, Ж –  $K_1 = 0,8$ ; угли марок ГЖС, ГЖ, Г, ДГ, Д –  $K_1 = 0,6$ );  $K_2$  – коэффициент, зависящий от последующих подработок горной выработки нижележащими пластами ( $K_2 = 1,0$ , если выработка не была подработана;  $K_2 = 0,8$ , если выработка подработана

одним пластом;  $K_2 = 0,5$ , если выработка была подработана 2-мя и более пластами);  $K_3$  – коэффициент, зависящий от наличия пустот и зон разуплотнений (принимается по результатам дополнительных исследований);  $K_4$  – коэффициент зависящий от обводнения горных пород ( $K_4 = 0,5$ , если горные выработки затоплены, и  $K_4 = 1,0$ , если горные выработки не затоплены);  $K_5$  – коэффициент, зависящий от глубины горных работ ( $K_5 = 1,0$ , если  $H < 100$  м,  $K_5 = 0,5$  при  $H$  в пределах 101-200 м,  $K_5 = 0,3$  при  $H$  в пределах 201-300 м,  $K_5 = 0,1$  при  $H$  в пределах 300-500 м, если  $H > 500$  м,  $K_5 = 0$ );  $m_B$  – вынутая мощность пласта, м.

Результаты анализа существующей методики позволяют выделить ее следующие недостатки:

- отсутствие четких критериев использования коэффициента пустотности  $K_3$ ;
- отсутствие возможности учета влияния глубоких горных выработок (при глубинах более 500 метров  $K_5 = 0$ ) при расчете вызванных затоплением угольных шахт оседаний земной поверхности, что опровергается исследованиями Е.И. Питаленко [4];
- отсутствие возможности учитывать воздействие литологического состава затопливаемого горного массива на характер деформаций;
- несоответствие параметров определения продолжительности процесса сдвига и параметров расчета величины оседаний земной поверхности (продолжительность процесса сдвига позволяет прогнозировать сроки активизации при затоплении выработок с глубиной до 1000 метров, а метод расчета максимальных оседаний позволяет учитывать лишь выработки с глубиной менее 500 метров).

Данные недостатки подтверждаются существующими визуальными наблюдениями за зданиями и сооружениями городов Центрального и Торезо-Снежнянского районов Донбасса с 2012 года по 2021 годы. Стоит отметить, что здания с наименьшим деформационным ресурсом расположены на территориях, подрабатываемых очистными выработками с глубинами более 500 метров, и даже незначительные сдвиги в этих районах могут вызвать аварийную ситуацию.

Отсутствие достаточного количества инструментальных наблюдений делает актуальным исследование вопроса влияния глубины отработки горных выработок на характер оседаний земной поверхности на конечно-элементных моделях.

Для определения принципиальной схемы модели использовались исследования Борисова А.А., Казаковского Д.А., Кузнецова Г.Н. и ряда других ученых. При проведении моделирования для получения адекватных результатов учитывалось наличие зон беспорядочного разрушения, упорядоченного обрушения, изгибов, в каждой зоне задавались соответственные свойства массива.

В зоне интенсивного разрушения массив моделировался материалом со свойствами разрушенной породы. В зоне упорядоченного обрушения моделировался

крупноблочный массив. В зоне изгибов моделировалась сплошная среда со свойствами пород согласно стратиграфическому разрезу.

Поскольку конечной задачей являлось моделирование поведения массива в результате затопления выработанного пространства, область упорядоченного обрушения задаётся тремя зонами, свойства массива в каждой зоне изменяются в зависимости от уровня затопления. Величина этих зон определялась на базе исследования [5].

Граничные условия модели задавались следующим образом: на нижней плоскости моделируемой области отсутствуют вертикальные перемещения; на боковых гранях отсутствуют перемещения в перпендикулярных направлениях; верхняя грань моделируемой области свободна.

По результатам моделирования были получены зависимости параметров оседаний земной поверхности от глубины затопления при различных размерах зон водопродящих трещин над лавой, которые приведены в таблице 2:

Таблица 2. Зависимости величины оседаний земной поверхности от глубины отработки ликвидированной выработки  $H$ , м

Величина зоны водопродящих трещин	Зависимость
50	$\eta = -35.6 \cdot \lg(H) + 132.4$
100	$\eta = -67.6 \cdot \lg(H) + 253.4$
150	$\eta = -98.3 \cdot \lg(H) + 367.5$
200	$\eta = -118 \cdot \lg(H) + 441$

Анализ всех основных функций позволяет утверждать, что влияние затопления глубоких горных выработок (с глубиной более 500 метров) при отработке свит угольных пластов может представлять опасность для зданий и сооружений, находящихся на поверхности над горными отводами и ранее подработанными очистными выработками. Более того, анализ приведенных функций позволяет сделать вывод о том, что даже затопление горных выработок с глубинами более 1000 метров в некоторых случаях способно провоцировать сдвиги земной поверхности.

**Выводы.** Результаты исследований подчеркивают не только факт увеличения величины оседаний земной поверхности по сравнению с проектными, но и вероятность увеличения зоны влияния затапливаемого предприятия. Увеличение зоны сдвига земной поверхности следует учитывать при закладке наблюдательных станций. Это позволит повысить качество мониторинга за сдвигами земной поверхности и исключить вероятность размещения опорных реперов в зоне влияния горных работ, что способно привести к существенному искажению результатов. Изменение расчетных зон влияния затопления горных выработок на объекты поверхности позволит заблаговременно разрабатывать меры защиты зданий и производить мероприятия по защите магистральных подземных трубопроводов, что даст возможность минимизировать вероятность аварийных ситуаций, связанных со сдвижением земной поверхности от затопле-

ния горных выработок. Инструментальные наблюдения следует организовать не только при помощи грунтовых, но и при помощи стенных реперов, устанавливаемых в зданиях, расположенных в зонах влияния глубоких горных выработок. Это позволит оперативно определить параметры влияния затопливаемых горных выработок на земную поверхность и сформировать новые представления о работе системы грунт-здание.

1. Ликвидация угольных шахт. Защита земной поверхности от затопления горных выработок. Рекомендации: КД 12.12.004 – 98: Утв. Министерством угольной промышленности Украины 20.12.98. – Донецк, 1998. – 46 с.
2. ГСТУ 101.00159226.001–2003. Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом. – Введ. 01–01–2004. – К., 2004. – 128 с.
3. *Шнеер В.Р.* Защита объектов поверхности от влияния ликвидируемых шахт / В.Р. Шнеер, Т.И. Рахманова, Е. Т. Сушко, Е.В. Блинникова // 13th International Congress of the International Society for Mine Surveying, Budapest, Hungary, 24–28 September 2007. – Budapest, 2007. – 039.
4. *Питаленко Е.И.* Опыт геомеханических мониторингов на территории ликвидируемых шахт Донбасса / Е.И. Питаленко, А.В. Шиптенко, М.Д. Рожко // Горный информационно-аналитический бюллетень. – Москва, 2007. – №2. – С. 155–160.
5. *Мохов А.В.* Морфология зон водопроводящих трещин сдвижения на участках подземных разработок каменноугольных залежей / А.В. Мохов // Горный информационно-аналитический бюллетень. – Москва, 2008. – №1. – С. 273–280.

**P.M. Golubev, H.A. Bardakova**

**Method for predicting ground subsidence in case of flooding with water production workings in abandoned coal mines.**

This article presents the results of studies of the condition of buildings on the mining branches of mines, the specifics of the calculation of pipelines for stability, the dependence of subsidence of the Earth's surface on the depth of flooded mine workings. A new approach to determining the initial parameters of the influence of flooding of mine workings on the subsidence of the Earth's surface is proposed. The importance of visual and instrumental monitoring is substantiated.

**Keywords:** *ground movement, flooding mine workings with water, mine abandonment, buildings, pipelines.*

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ), Донецк

Получено 27.12.2021

Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying (RANIMI), Donetsk

*ranimi@ranimi.org*

УДК 622.1:528:518.5  
doi:10.24412/0136-4545-2022-2-46-52  
EDN:EUEOZU



©2022. А.А. Глухов, С.А. Воробьев, Т.А. Решетняк, Е.М. Винниченко

## ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТА ДЕФОРМАЦИЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В РЕЗУЛЬТАТЕ ПОДРАБОТКИ

В данной статье описано программное обеспечение для расчета сдвижений и деформаций земной поверхности, вызванных подземными горными работами. Её использование позволяет разработать меры по защите зданий и сооружений, различных природных и техногенных объектов.

**Ключевые слова:** *подработка земной поверхности, сдвижения, деформации, программное обеспечение.*

**Введение.** Добыча угля в настоящее время на многих горнодобывающих предприятиях ведется под территориями городов, железнодорожными путями, магистральными трубопроводами, водными и другими разнообразными природными и техногенными объектами. Охрана этих объектов от вредоносного влияния подземных горных работ и техногенных последствий является важной социальной народнохозяйственной задачей. Выемка угольных пластов приводит к нарушению состояния равновесия пород и их сдвигению, что проявляется в появлении на земной поверхности мульды сдвига [1]. Отдельные точки мульды сдвига смещаются не одинаково, вследствие чего возникают вертикальные (наклоны, кривизна) и горизонтальные (растяжения, сжатия) деформации, а также трещины, уступы, провалы на поверхности и в сооружениях, которые попали в зону влияния горных работ.

В этом плане, актуально решение проблемы разработки современных средств прогноза деформаций земной поверхности в зонах подработки. Несмотря на широкое применение, существующие разработки имеют целый ряд ограничений в плане границ применимости, удобства использования, отображения результатов расчетов.

В РАНИМИ для решения данной проблемы разработано специализированное программное обеспечение. Оно базируется на использовании современных алгоритмов расчета и актуальных нормативных документах [2, 3] и позволяет:

- вычислить прогнозные сдвижения и деформации земной поверхности;
- рассчитать допустимые показатели деформации земной поверхности под застроенными территориями;
- рассчитывать полное оседание земной поверхности для определения участков подтопления при закрытии шахты;



- графически отобразить результаты расчетов на электронных планах.

**1. Характеристика функционала программного комплекса.** Алгоритм прогноза сдвижений и деформаций земной поверхности для комплекса выполнен согласно [2, 3]. В качестве исходных данных для каждого выемочного участка указываются: мощность наносов, мощность мезозойских отложений, управление кровлей, мощность вынимаемого пласта, размеры целиков по четырем направлениям, угол и азимут падения пласта, марка угля и другие параметры.

Программное обеспечение предполагает несколько вариантов ввода исходных данных. В качестве первого способа используется разработанная ранее в отделе компьютерных технологий РАНМИИ геоинформационная система (ГИС) ГеоМарк [4], опирающаяся на трехмерную модель шахты. Для работы выбирается необходимый участок выработанного пространства (рис. 1), над которым следует рассчитать параметры сдвижения и деформации земной поверхности. В этом случае геометрические параметры объекта автоматически считываются из базы данных системы.

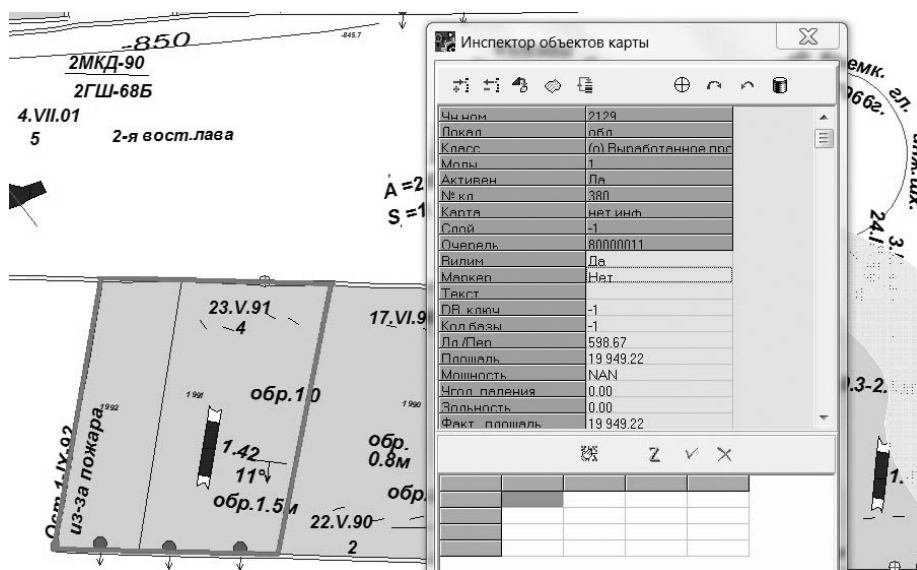


Рис. 1. Выбор участка выработанного пространства при помощи геоинформационной системы «ГеоМарк».

Ограничение данного способа в том, что для одновременного расчета используются только лавы, описанные в модели шахты. Сам процесс подготовки модели требует существенных затрат времени. На электронные планы горных выработок или на растровых изображениях наносятся все проектируемые к очистной выемке выработки, от которых будет производиться расчет. Определяются лавы, попадающие в зону подработки на вышележащем пласте. Для лав определяются параметры отработки: глубина разработки, размеры остав-

ленных (оставляемых) целиков, определяется вынимаемая и эффективная мощность для каждой проектируемой выработки.

Второй способ – в качестве основы используются растровые изображения планов горных работ. В этом случае пользователь должен осуществить координатную привязку и трансформацию растров по заданным контрольным точкам. Для этого служит специализированный программный модуль (рис. 2). В рамках привязки и последующей коррекции выполняются операции по повороту, а также операции сжатия и растяжения растров в целом, и их отдельных участков.

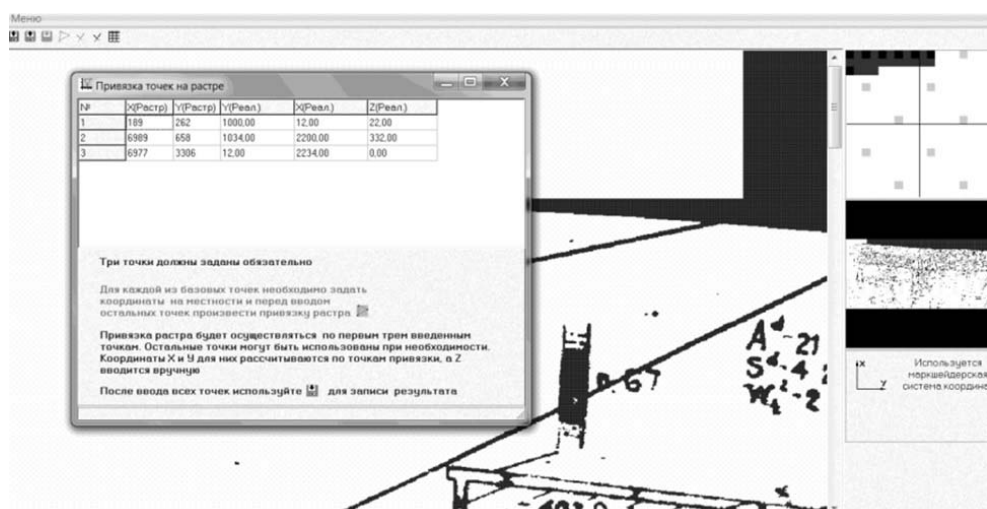


Рис. 2. Координатная привязка растра с помощью специализированного программного модуля.

Затем на получаемом изображении необходимо «оконтурить» необходимый для расчета набор лав и ввести необходимую исходную информацию по каждой (рис. 3). Данный способ позволяет использовать одновременно до 10 растровых изображений, составляющих основу расчетной модели.

Третий способ – импорт исходной информации из электронных таблиц заданной структуры в формате Excel. Удобен для большого (около 100) количества лав.

В качестве примера рассмотрим построение изолиний оседаний земной поверхности от выемки угля. В зависимости от метаморфизма угольных пластов вычисляются: граничные углы в коренных породах, наносах и мезозойских отложениях, углы полных сдвижений и угол максимальных оседаний. В ходе расчетов вычисляется относительная величина максимальных оседаний  $\eta_m$ :

$$\eta_m = q_0 t \cos \alpha N_1 N_2, \quad (1)$$

где  $q_0$  – относительная величина максимального оседания, определяемая в соответствии с параграфом А.2.5.1 [2] (безразмерная величина);  $t$  – вынимаемая мощность пласта или эффективная мощность пласта при работе с закладкой

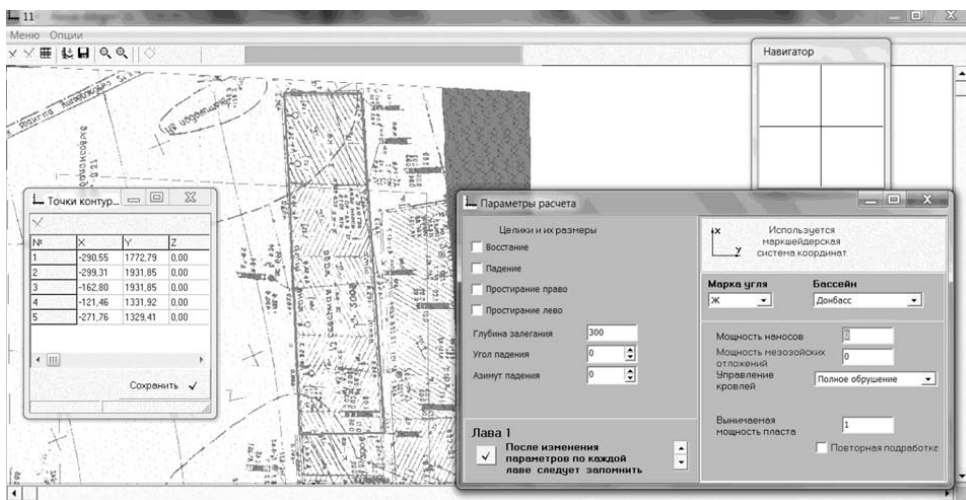


Рис. 3. Рабочее окно ввода информации для оконтуренной лавы.

выработанного пространства, м;  $\alpha$  – угол падения пласта в пределах очистной выработки, градусы;  $N_1, N_2$  – условные коэффициенты, характеризующие степень подработанности земной поверхности, соответственно вкрест простирания и по простиранию, безразмерные величины.

При работе с закладкой выработанного пространства в расчетах следует использовать эффективную мощность пласта  $m_{\text{Э}}$ , которую определяют по формуле:

$$m_{\text{Э}} = K_{\text{ЭЗ}} \cdot m_B, \quad (2)$$

где  $K_{\text{ЭЗ}}$  – коэффициент эффективности закладки, который определяют по данным инструментальных наблюдений в рассматриваемых или аналогичных горно-геологических условиях, а также по специальным исследованиям;  $m_B$  – вынимаемая мощность пласта, м.

В ходе процесса вычислений автоматически определяются длины полумульд по граничным углам и углу максимальных оседаний при неполной подработке, либо по углам полных сдвижений при полной подработке. Вычисляются условные коэффициенты, характеризующие степень подработанности земной поверхности и другие параметры. После определения всех расчетных величин производится расчет сдвижений и деформаций на земной поверхности по регулярной сетке.

Вычисление оседаний в любой точке мульды сдвижения выполняется по формулам в соответствии с таблицей А.3 [2]. Расположение координатных осей: ось  $X$  совпадает с направлением простирания пластов, а ось  $Y$  направлена в сторону восстания. Соотношения для расчета оседаний  $\eta$  в заданных точках поверхности имеют вид:

$$\eta = \eta_m \cdot S(z_x) \cdot S(z_y), \quad (3)$$

где  $S(z_x)$  и  $S(z_y)$  – значения функций по осям, которые принимаются по таблице А.4 [2].

Результаты расчета отображаются в виде изолиний, таблиц значений параметров на регулярной сетке точек, схем. В случае использования ГИС «Гео-Марк», изолинии добавляются в качестве объектов модели шахты (рис.4).

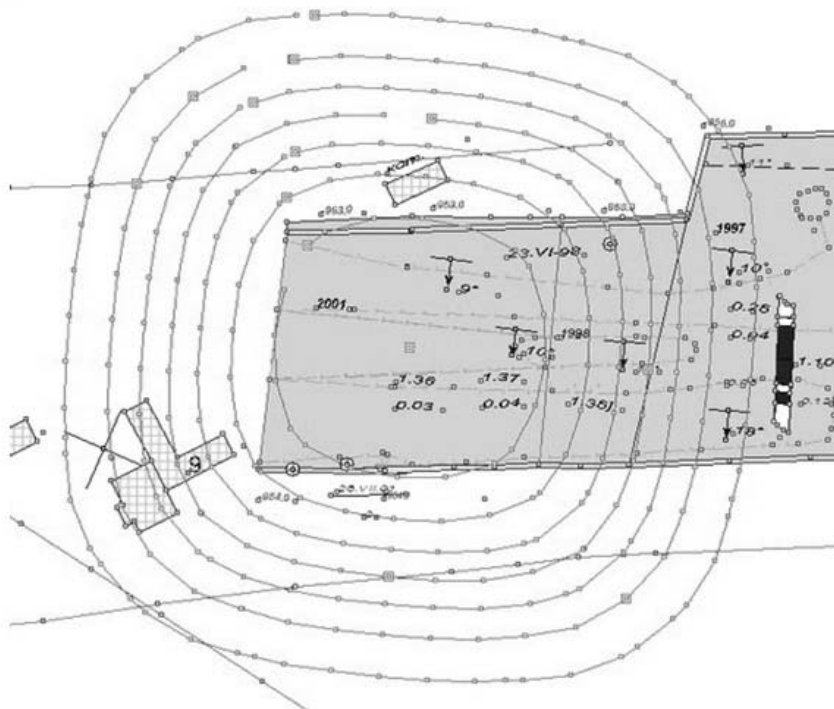


Рис. 4. Отображение результатов расчета оседаний земной поверхности на плане горных работ с помощью геоинформационной системы [4].

Величины сдвижений и деформаций вычисляются в направлении по падению и простиранию пласта, либо по заданному направлению и направлению перпендикулярному ему, что необходимо при анализе деформаций зданий и сооружений (по осям объекта).

Вычисляются величины сдвижений и деформации процесса активизации лав на вышележащем пласте. Полученные величины от старых выработок суммируют со сдвижениями и деформациями от проектируемых (действующих) выработок. Для разработки мер охраны подрабатываемых объектов, переходят от ожидаемых (или вероятных) величин к расчетным величинам сдвижений и деформаций, которые получают путем умножения максимальных ожидаемых на коэффициенты перегрузки.

При необходимости пользователь может проконтролировать пошагово результаты расчета по любой из лав. Для этого предназначена специализированная процедура (рис. 5). Ее использование целесообразно в случаях лав сложной

формы, когда способ ее приведения к прямоугольнику не очевиден. Также полезна данная процедура в случае тестирования усовершенствованных алгоритмов расчета.

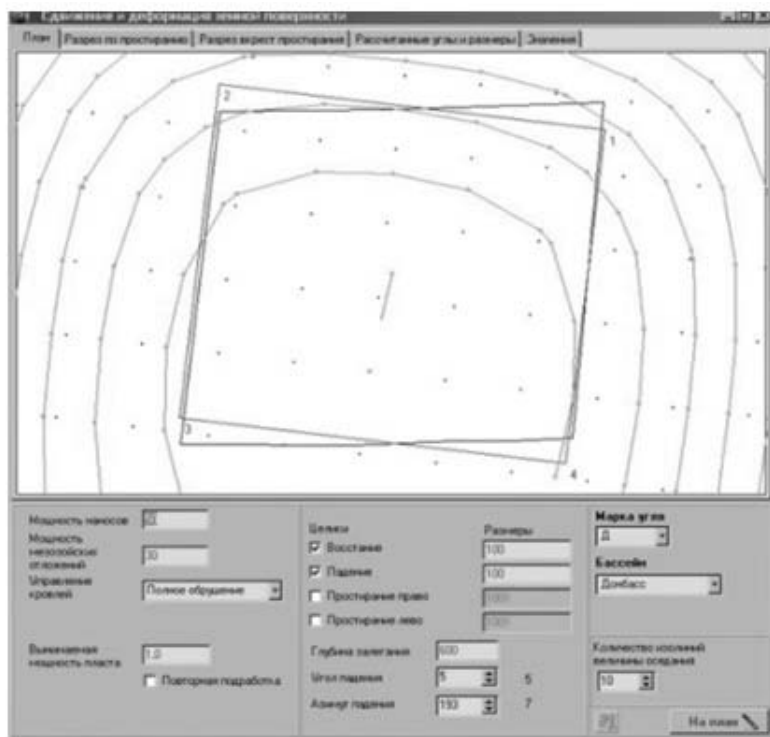


Рис. 5. Рабочее окно для проверки результатов расчета для выбранной лавы.

Допускается одновременный расчет для набора из 100 и более лав. При этом результат для данной точки поверхности формируется как сумма результатов по отдельным расчетам. Для реализации такой схемы после ввода данных по всему набору лав производится формирование единой регулярной сетки расчетных точек.

Получаемая в результате расчетов графическая информация может быть распечатана в заданном масштабе.

**Выводы.** Разработанное программное средство может быть использовано в условиях Донбасса, где выемка угля под застроенными территориями привела к существенным проблемам. Анализ состояния земной поверхности, расчет ее сдвижений и деформаций под воздействием горных работ позволит разработать меры по защите зданий и сооружений, различных природных и техногенных объектов.

1. Гавриленко Ю.Н Расчет сдвижений и деформаций земной поверхности на больших площадях / Ю.Н. Гавриленко // Наукові праці УкрНДМІ НАН України. – 2013. – № 13 (частина I). – С. 271–287.

А.А. Глухов, С.А. Воробьев, Т.А. Решетняк, Е.М. Винниченко

2. ДСТУ 101.00159226.001-2003. Правила підробки будівель, споруд і природних об'єктів при добуванні вугілля підземним способом. – Затв. Мінпаливенерго України 28.11.2003. – Київ, 2004. – 128 с.
3. Правила охраны сооружений и природных объектов от вредного влияния подземных горных разработок на угольных. – Утв. МУП СССР 29.12.79. – М.: Недра, 1981. – 285 с.
4. А.с. № 19232. Компьютерная программа „Геоинформационная система для решения задач геофизики, геологии и маркшейдерии в горнодобывающей области” / Глухов А.А., Воробьев С.А., Набокова В.В. (Украина). Дата регистрации 17.01.2007.

**A.A. Glukhov, S.A. Vorobyov, T.A. Reshetnyak, E.M. Vinnichenko**

**Software for calculation of deformations of the earth surface as a result of undermining.**

This article describes software for calculating displacements and deformations of the earth's surface caused by underground mining. Its use allows developing methods to protect buildings and structures, various natural and man-made objects.

**Keywords:** *undermining the earth's surface, displacements, deformations, software.*

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ), Донецк

*Получено 16.05.2022*

Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying (RANIMI), Donetsk

*Glukhov1964@yandex.ru*

УДК (669.788+660.234):539.371/372

doi:10.24412/0136-4545-2022-2-53-59

EDN:EYIJAF



©2022. Ж.Л. Глухова

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВОДОРОДОУПРУГОСТИ

В настоящей статье описан метод численного решения системы уравнений водородоупругости. Рассмотрены вопросы компьютерной реализации предлагаемого алгоритма. Приведен пример его использования для расчета распределения концентрации водорода по толщине пластины при ее одностороннем насыщении водородом.

**Ключевые слова:** водородоупругость, водород в металлах, уравнение диффузии.

**Введение.** Процессы диффузии в металлах атомов водорода и возникновение при этом упругих напряжений вызывают разнообразные механические эффекты, которые являются различными сторонами одного явления – водородоупругости [1]. Распределение водорода, вызываемое градиентом его концентрации, а также деформацией среды, описывается системой связанных дифференциальных уравнений в частных производных, называемых уравнениями водородоупругости [2]. Этой же системой описывается и обратный эффект – деформация металла, вызванная процессом распределения водорода. Её решение в аналитическом виде вызывает трудности. Для решения задач такого рода используются численные методы [3].

В настоящей статье описан метод численного решения системы уравнений водородоупругости. Рассмотрены вопросы компьютерной реализации предлагаемого алгоритма.

**1. Описание алгоритма решения.** Для ряда задач, в которых можно ограничиться рассмотрением изменения концентрации водорода и упругих напряжений вдоль одного направления (выберем условно направление вдоль оси  $x$ ), можно пользоваться одномерным вариантом уравнений водородоупругости:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{(3\lambda + 2\mu)}{D} w B_c c \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0, \quad (1)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{3\lambda + 2\mu}{D} w \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

где  $u_x$  – проекция вектора перемещения на ось;  $x$ ,  $\lambda$  и  $\mu$  – модули упругости Ламе;  $w$  – коэффициент линейного расширения материала под воздействием водорода;  $D$  – коэффициент диффузии водорода;  $B_c$  – величина называемая водородоемкостью [1]. Примером такой задачи, к примеру, является процесс

одностороннего насыщения палладиевой пластины [2, 4], процесс растворения локальной неоднородности [5] и т.п.

Систему (1)-(2) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + G \frac{\partial c}{\partial t} + H c \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

$$S \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + Q \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

где  $G = -\frac{1}{D}$ ,  $Q = G(3\lambda + 2\mu)w$ ,  $Y = QB_c$ ,  $S = \lambda + 2\mu$ .

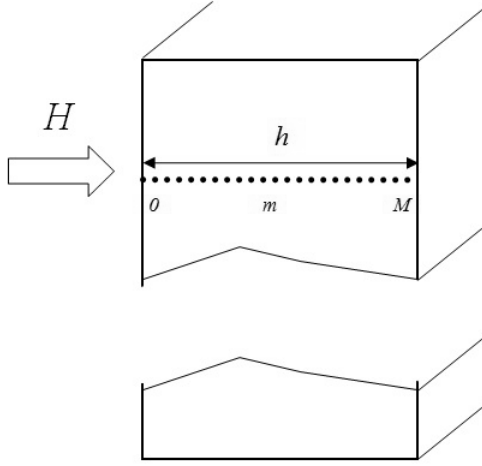


Рис. 1. К задаче об одностороннем насыщении водородом палладиевой пластины

Для реализации конечно-разностного подхода при решении задачи об одностороннем насыщении водорода палладиевой пластины можно использовать равномерную цепочку из расчетных узлов расположенных по её сечению (рис. 1). По известному алгоритму замены производных конечными разностями [3] получается набор алгебраических уравнений, в которых в качестве неизвестных величин выступают смещения и концентрации в последующий момент времени.

Разделим сечение пластины толщиной  $h$  на  $M$  участков, толщиной  $\Delta h = h/M$ . Тогда соотношения (3) и (4) можно записать в виде:

$$\left(\frac{1}{\Delta h}\right)^2 (c_{m+1}^2 - 2c_m^p + c_{m-1}^p) + \left(\frac{G}{\Delta t}\right) (c_m^{p+1} - c_m^p) + \left(\frac{H}{2\Delta h \Delta t}\right) c_m^p (u_{m+1}^{p+1} - u_{m-1}^{p+1} + u_{m-1}^p) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{S}{(\Delta h)^2} (u_{m+1}^{p+1} - 2u_m^{p+1} + u_{m-1}^{p+1}) + \left(\frac{Q}{2\Delta h}\right) (c_{m+1}^{p+1} - c_{m-1}^{p+1}) = 0, \quad (6)$$



где  $\Delta t$  – шаг по времени. Для обозначения момента времени в (5) и (6) использован индекс  $p$ , а для обозначения узла по сечению пластины –  $m$  ( $m = \overline{0, M}$ ). В данных соотношениях искомыми являются величины с индексами  $p + 1$ . Для каждого узла с номерами от 1 до  $M - 1$  записывается пара уравнений типа (5) и (6). Данные соотношения применимы для  $m = \overline{1, M - 1}$ ,  $p > 0$ . Для  $m = 0$  и  $m = M$  следует записать граничные условия, а для  $p = 0$  – начальные.

Для той границы пластины, откуда поступает водород, в широком ряде задач можно положить, что она насыщается водородом до максимально возможного значения концентрации  $c_0$ . Эта концентрация за счет поступления водорода извне поддерживается постоянной для любого момента времени  $p$ :

$$c_0^{p+1} = c_0^p = c_0. \quad (7)$$

Для других задач считается, что концентрация водорода на входной поверхности пластины ( $x = 0$ ) изменяется быстро, но не мгновенно, и справедливо выражение

$$c(0, t) = c_0 (1 - e^{-\alpha t}), \quad (8)$$

вследствие чего для данной схемы можно записать как

$$c_1^{p+1} = c_0 (1 - e^{-\alpha(p+1)\Delta t}). \quad (9)$$

Вторая граница  $x = h$  непроницаема для водорода. Это условие можно записать в виде соотношения

$$\left. \frac{dc}{dx} \right|_{x=h} = 0. \quad (10)$$

В конечно-разностной форме соотношение (10) можно записать в виде

$$c_M^{p+1} - c_{M-1}^{p+1} = 0. \quad (11)$$

Возникающие при диффузии водорода внутренние напряжения по сечению пластины взаимно уравновешиваются при изгибе пластины. Соответственно, должен быть равен нулю суммарный изгибающий момент. Эти два требования можно записать как:

$$\int_0^h \sigma_{zz}(x) dx = 0, \quad (12)$$

$$\int_0^h \sigma_{zz}(x) x dx = 0. \quad (13)$$

Легко убедиться, что соотношения (12) и (13) путем выражения напряжения  $\sigma_{zz}$  через смещения с использованием обобщенного закона Гука, можно преобразовать к виду:

$$\frac{1}{v} \int_0^h \left( -\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) dx - \frac{w}{1 - 2v} \int_0^h (c(x) - c_h) dx = 0, \quad (14)$$

$$\frac{1}{v} \int_0^h \left( -\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) x dx - \frac{w}{1-2v} \int_0^h (c(x) - c_h) x dx = 0. \quad (15)$$

В конечно-разностном виде соотношения (14)-(15) можно записать как:

$$\frac{1}{v} \left( u_1^{p+1} - u_M^{p+1} \right) - \frac{w \Delta h}{1-2v} \sum_{m=1}^M c_m^{p+1} + \frac{wh}{1-2v} c_M^{p+1} = 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta h}{v} \sum_{m=1}^{M-1} \left( u_{m+1}^{p+1} - u_m^{p+1} \right) m - \frac{w (\Delta h)^2}{1-2v} \sum_{m=1}^M c_m^{p+1} m + \\ + \frac{wh^2}{2(1-2v)} c_M^{p+1} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

В начальный момент времени в пластине водорода нет. Соответственно нет и вызываемых водородом деформаций. Из этого следуют начальные условия:

$$c(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad \text{для } 0 \leq x \leq 0. \quad (18)$$

В конечно-разностном виде эти условия можно записать как:

$$c_m^0 = 0, \quad u_m^0 = 0, \quad \text{где } m = \overline{1, M}. \quad (19)$$

Решение системы алгебраических уравнений (5)-(6), с учетом (7), (9), (11), (16), (17), (19) дает возможность рассчитать зависимость распределения концентрации водорода в металлической пластине от времени при ее одностороннем насыщении водородом. Программное обеспечение для численного моделирования процесса одностороннего насыщения палладиевой пластины водородом с учетом возникающего поля напряжений было реализовано в среде Delphi.

Перед выполнением расчетов необходимо задать коэффициент диффузии  $D$ , температуру  $T$ , значение коэффициента линейного расширения металла при растворении водорода  $w$ , значение модуля Юнга  $E$  и коэффициента Пуассона  $\gamma$ , толщину образца  $h$ , количество разбиений образца по его толщине  $M$ , шаг итерации по времени  $\Delta t$ , количество итераций во времени за один цикл расчета, начальную концентрацию водорода  $c_0$ , водородоемкость  $B_c$ . Далее вычисляются модули упругости Ламе и значения  $G$ ,  $Q$ ,  $H$  и  $S$ , которые входят в соотношения (3)–(6); задаются, согласно (19), начальные значения концентраций водорода и смещений по сечению пластины.

Далее выполняются итерации основного цикла расчетов. Каждая итерация состоит из двух частей. На первом этапе вычисляются коэффициенты и свободные члены системы уравнений. На втором данная система решается методом Гаусса с выделением главного элемента. Рассчитываются значения концентраций водорода  $c_m^{p+1}$  и смещений  $u_m^{p+1}$  по сечению пластины. Далее на основе обобщенного закона Гука вычисляются деформации и напряжения.

Периодически (через заданное число итераций) решения отображаются в виде графиков распределения рассчитываемых характеристик (рис. 2).

Для того, чтобы удостовериться в работоспособности программного обеспечения, был проведен ряд контрольных расчетов, в том числе для предельных случаев, близких к чистой диффузии. Результаты расчетов показали, что выбранный метод решения уравнений водородоупругости и его программная реализация удовлетворяют требованиям поставленных задач.

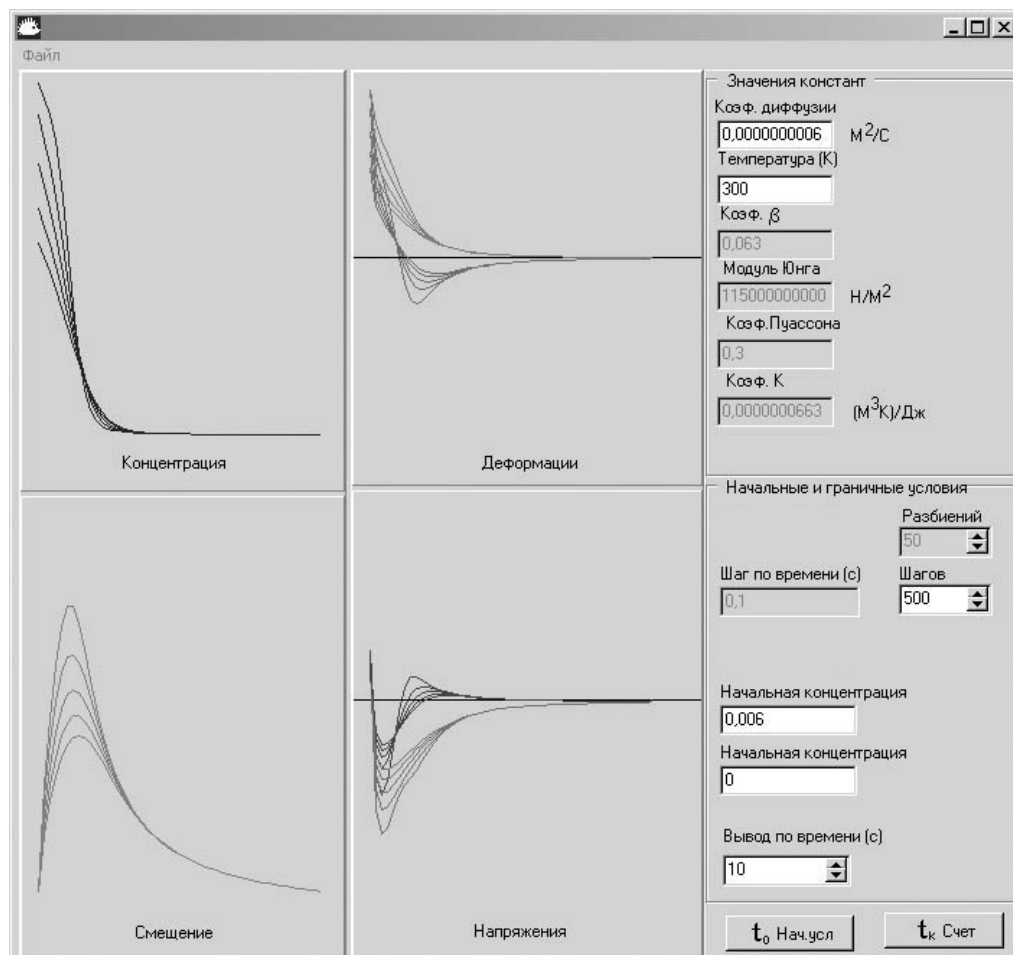


Рис. 2. Основное окно отображения хода вычислений

Программное обеспечение было использовано для расчета распределения концентрации водорода по толщине пластины при ее одностороннем насыщении водородом. Основной результат расчетов состоял в том, что было обосновано наблюдаемое на практике [1] явление, заключающееся в том, что водородные концентрационные напряжения и деформации замедляют диффузионный транспорт водорода. На рисунке 3 для примера представлены рассчитанные распределения концентрации водорода по толщине пластины при температуре

100°C и давлении  $P_{H_2} = 6 \times 10^3$  Па (толщина пластины  $h = 0,28$  мм).

Видно, что даже через полчаса не происходит полного выравнивания концентраций водорода по толщине пластины. Процесс протекает настолько медленно, что результат можно рассматривать как некое стационарное состояние.

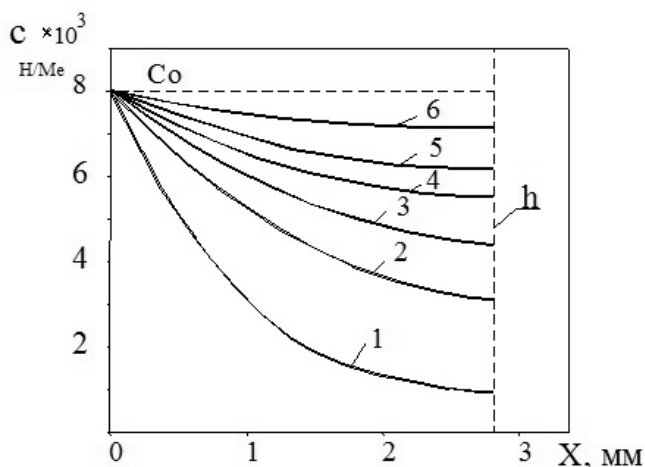


Рис. 3. Распределение концентрации водорода по толщине пластины при 100°C и  $P_{H_2} = 6 \times 10^3$  Па: 1 –  $\tau_1 = 1$  мин; 2 –  $\tau_2 = 5$  мин; 3 –  $\tau_3 = 10$  мин; 4 –  $\tau_4 = 15$  мин; 6 –  $\tau_6 = 30$  мин

**Выводы.** Анализ результатов служит подтверждением того, что одной из причин наблюдаемых экспериментально остаточных формоизменений в насыщаемой водородом пластине является «остаточный» градиент концентрации водорода, вызванный воздействием водородоупругих напряжений.

Разработанное программное обеспечение имеет модульный характер, что позволяет путем замены блоков, отвечающих за вид основных уравнений, начальные и граничные условия, использовать его для решения ряда подобных задач.

1. Goltsov V.A. Hydrogen elasticity effect and its importance in diffusion of concentration inhomogeneities in metals / V.A. Goltsov, Zh.L. Glukhova, A.L. Redko // Int. Journal Hydrogen Energy. – 1997. – Vol 22. – P. 179–183.
2. Гольцов В.А. Водородоупругое формоизменение палладиевой пластины. Теоретическое описание / В.А. Гольцов, Ж.Л. Глухова // Физика металлов и металловедение. – 2001. – Т. 91, № 3. – С. 21–25.
3. Молчанов И.И. Численные методы решения некоторых задач теории упругости / И.И. Молчанов // К.: Наук. думка, 1979. – 235 с.
4. Glukhova Zh.L. Regularities of palladium shape change upon its one-side hydrogen saturation and subsequent degassing / Zh.L. Glukhova, V.A. Goltsov, Zh.L. Glukhova, R.V. Kotelva // International Scientific Journal for Alternative Energy and Ecology, Issue 1 (Sarov – 2000). – July 2000. – Vol 1. – P. 110–111.
5. Гольцов В.А. О роли водородоупругих напряжений в диффузионном рассасывании концентрационных неоднородностей в системах металл-водород / В.А. Гольцов, А.Л. Редько,

Ж.Л. Глухова // Благородные и редкие металлы: Сб. информ. матер. I Междунар. конф. «БРМ-94». – Донецк (Украина). – 1994. – Ч. III. – С. 85–86.

**Zh.L. Glukhova**

**Numerical solution of the system of equations of hydrogen elasticity.**

This article describes the method of numerically solving of the system of hydroelasticity equations. The peculiarities of computer implementation of the proposed algorithm are considered. An example of its use for calculating the distribution of hydrogen concentration over the thickness of a plate with its one-sided saturation with hydrogen is given.

**Keywords:** *hydrogen elasticity, hydrogen in metals, diffusion equation.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет»,  
Донецк

Получено 16.05.2022

Donetsk National Technical University, Donetsk

*zhglukhova@yandex.ru*

УДК 622.281.5:624.046  
doi:10.24412/0136-4545-2022-2-60-65  
EDN:FAZPYA



©2022. Ю.А. Пивень, В.В. Васютина, В.А. Канин

## СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ БЕСЦЕЛИКОВЫХ СПОСОБОВ ОХРАНЫ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК

Рассмотрены применяемые на шахтах способы и средства охраны подготовительных горных выработок как с применением традиционных конструкций из сборного железобетона и литых полос из быстротвердеющих материалов, так и способы, основанные на активном управлении состоянием горного массива. Лабораторно установлено, что применение в сборных конструкциях податливых прокладок увеличивает их несущую способность и обеспечивает необходимую податливость.

**Ключевые слова:** угольные целики, горные породы, деформирование и разрушение пород, охрана горной выработки.

**Введение.** Одним из важнейших функциональных звеньев угольного предприятия являются подготовительные выработки, от нормальной эксплуатации которых в первую очередь зависит работа очистных забоев. Для этого необходимо осуществить комплекс мер, куда входят вопросы выбора места заложения выработок, технологии их проведения и охраны, а также способы и параметры крепления. Вполне вероятно, что для достижения конечной цели достаточно осуществление одной из перечисленных мер (проведение выработок с большой площадью сечения), что способно также обеспечить их безремонтное поддержание на весь период эксплуатации даже при значительных величинах деформации. Того же результата можно достичь в ряде случаев и за счет увеличения плотности крепи выработки. Решение задачи лежит в области оптимизации этих параметров, основным критерием становится экономическая эффективность принимаемых технических решений, т.е. максимум производительности горного предприятия при минимуме затрат на добычу угля.

**1. Анализ и совершенствование рекомендаций по технологиям охраны выработок.** В результате анализа существующих технических решений по охране пластовых подготовительных выработок [1] можно выделить следующие перспективные направления:

- сооружение конструкций из дерева (органная крепь, костры, бутокостры и т.п.);
- возведение бутовых полос;
- сооружение сплошных полос или отдельных опор из сборных конструкций, изготавливаемых из БЖБТ и их модификаций;

- отливка полос из бетона, фосфогипса или на основе других связующих;
- способы активного управления напряженно-деформированным состоянием горного массива, примыкающего к выработке (создание взрывоцеливых полостей или зон, выбуривание разгрузочных скважин, разгрузка пласта путем нагнетания в него водных растворов ПАВ и т.п.).

Достаточно продолжительными шахтными экспериментами определены рациональные области применения для каждого из перечисленных способов и обоснованы их параметры для конкретных горно-геологических условий, что регламентировано отраслевым нормативным документом [2].

Среди наиболее перспективных способов активного управления горным давлением в подготовительных выработках следует выделить способ предварительной разгрузки горного массива на контуре выработки, основанный на гидрообработке угля через скважины, пробуренные в боках выработки, водными растворами ПАВ, что позволяет обеспечить достаточно успешное поддержание откаточных штреков на больших глубинах.

На пластах пологого и крутого падения интенсивный переход в 70-80-е годы на бесцеликовые способы охраны повторно используемых подготовительных выработок привел к широкому применению полос из сборного железобетона (БЖБТ) или отливаемых из бетона или других связующих с наполнителями.

При склонных к пучению породах жесткие опоры являются достаточно интенсивными концентраторами горного давления, и кроме выполнения своей основной функции – режущей крепи приводят к ухудшению состояния выработки.

Традиционно для охраны подготовительных выработок применяются бутовые полосы, органная крепь, кустовая крепь, костры из круглого леса или шпального бруса, бутокостры, конструкции из сборного железобетона (БЖБТ). К более современным способам следует отнести сплошные полосы из бетона с наполнителями из шлака, рядовой породы.

К сожалению, в последнее время из-за экономических причин применение многих из этих способов резко сократилось.

Как показал опыт применения для охраны выработок сборных конструкций из БЖБТ, из-за жесткости крепи при относительно небольших величинах сближения боковых пород происходит разрушение этих конструкций с потерей несущей способности. Как показали наши лабораторные исследования резервом в использовании БЖБТ является применение прокладок между отдельными блоками из более дешевого материала с мягкими механическими характеристиками, которые позволяют обеспечить работу конструкции в необходимом режиме податливости с сохранением несущей способности. Более того, при этом исчезают контактные напряжения между блоками, которые возникают из-за неровностей на их поверхности и приводят к преждевременному разрушению.

Выполненные лабораторные испытания механических характеристик сборных опор из БЖБТ с различными прокладками позволили установить следующее (рис. 1).



Рис. 1. Механические характеристики сборных опор различных конструкций:

1 – опора из БЖБТ с прокладками из ДСП; 2 – то же с прокладками из шпального бруса, уложенными в различных направлениях; 3 – то же с прокладками из шпального бруса, уложенными в одном направлении; 4 – костер из шпального бруса; 5 – костер из круглого леса; 6 – опора из БЖБТ с прокладками из распила; 7 – БЖБТ с прокладками из шпального бруса.

Наиболее жесткую механическую характеристику имеют опоры с прокладками из ДСП. Использование в качестве прокладок шпального бруса снижает несущую способность конструкции, но обеспечивает большую податливость. При этом установлено, что укладка шпал в разном направлении в каждом последующем слое повышает несущую способность более чем в 2 раза, податливость также возрастает на 40-50%. Были использованы также прокладки из распила, уложенного в разном направлении в каждом слое.

Такая конструкция по своим характеристикам приближается к опоре с прокладками из ДСП. Для сравнения на графике представлены характеристики сплошных костров из шпального бруса и круглого леса, которые явно уступают по своим характеристикам БЖБТ.

Следовательно, наиболее рациональным является применение для охраны выработок конструкций из БЖБТ с прокладками из распилов или шпальных брусьев. При незначительных дополнительных затратах несущая способность конструкции, таким образом, увеличивается в 1,5-2,0 раза.

Для определения ширины опорной полосы из конструкций с применением БЖБТ существует следующая формула [1]:

$$B = \frac{P}{P_K}, \quad (1)$$

где  $P$  – расчетная нагрузка на применяемую крепь, кН/м;  $P_K$  – прочность материала крепи, кН/м<sup>2</sup>.



Следует отметить, что такой подход к определению ширины полосы справедлив только тогда, когда нагрузка на крепь не зависит от несущей способности последней. В действительности же имеет место сложное взаимодействие крепи с боковыми породами, при этом – чем выше сопротивление крепи, тем больше давление на нее со стороны горного массива.

Деформации, предшествующие сдвигению боковых пород под действием соответственно веса, происходят без нарушения сплошности массива и начинаются до подхода забоя выработки к рассматриваемой точке. На кромке пласта эти деформации, как правило, уже реализованы, в результате чего расстояние между кровлей и почвой, измеренное у поверхности забоя, составляет 85% мощности пласта в массиве. Как показывают аналитические оценки [3], в зависимости от глубины ведения горных работ и строения горного массива величина деформаций упругого восстановления составляет 30% вынимаемой мощности пласта. Уменьшение или полное исключение этих деформаций возможно путем установки призабойной крепи, обеспечивающей начальный распор, равный или больший несущей способности вынимаемой части пласта, что выполнимо лишь теоретически. В результате выполненных исследований [3] предложена следующая формула для определения ширины полосы:

$$b_0 = \frac{\gamma h}{[\sigma]} \left( L_{\text{кр}}^{\text{max}} - \frac{l}{2} \right), \quad (2)$$

где  $\gamma$  – объемный вес пород, т/м<sup>3</sup>;  $h$  – глубина ведения горных работ, м;  $L_{\text{кр}}^{\text{max}}$  – максимальная длина критической консоли, м;  $l$  – расстояние от центра опоры до кромки пласта, м;  $[\sigma]$  – предел прочности материала крепи на одноосное сжатие, МПа.

Экспериментальные исследования новых крепей для скатов щитовых агрегатов проводились на пласте  $m_3$  «Толстый» ш. «Северная» (рис. 2) и пластах  $m_5$ ,  $l_3$ ,  $l_4^{\text{II}}$  и  $K_5'$  ш. В.И. Ленина и ш. «Кочегарка» ПО «Артемуголь».

Для этих горногеологических условий были рассчитаны паспорта крепления скатов, результаты приведены в табл. 1.

При расчетах задавалась необходимая податливость искусственных опор из условий [3] компенсаций упругого восстановления массива. По нашим данным, она не должна превышать уровень 20%. При такой податливости опоры из железобетонных тумб БЖБТ 6 с прокладками из затяжки развивает реакцию 3000 кН, что установлено нашими стендовыми испытаниями (рис. 1). Предельная реакция опоры составит 3300 кН при податливости 25-30%.

Таким образом, для реализации податливости 20% за время отработки полосы с заполнением выработанного пространства закладкой, в соответствии с рассчитанными выше нагрузками необходимое количество опор на 1 пог. м. скала для рассматриваемых пластов  $m_3$ ,  $m_5$ ,  $l_3$ ,  $l_4^{\text{II}}$  и  $k_5^1$  должно, соответственно, быть равно [2] значениям, приведенным в таблице 1.

За время работы скала щитового забоя по пласту  $K_5'$  гор 970 ш. «Кочегарка», который эксплуатировался вначале как вентиляционный, а в последствии

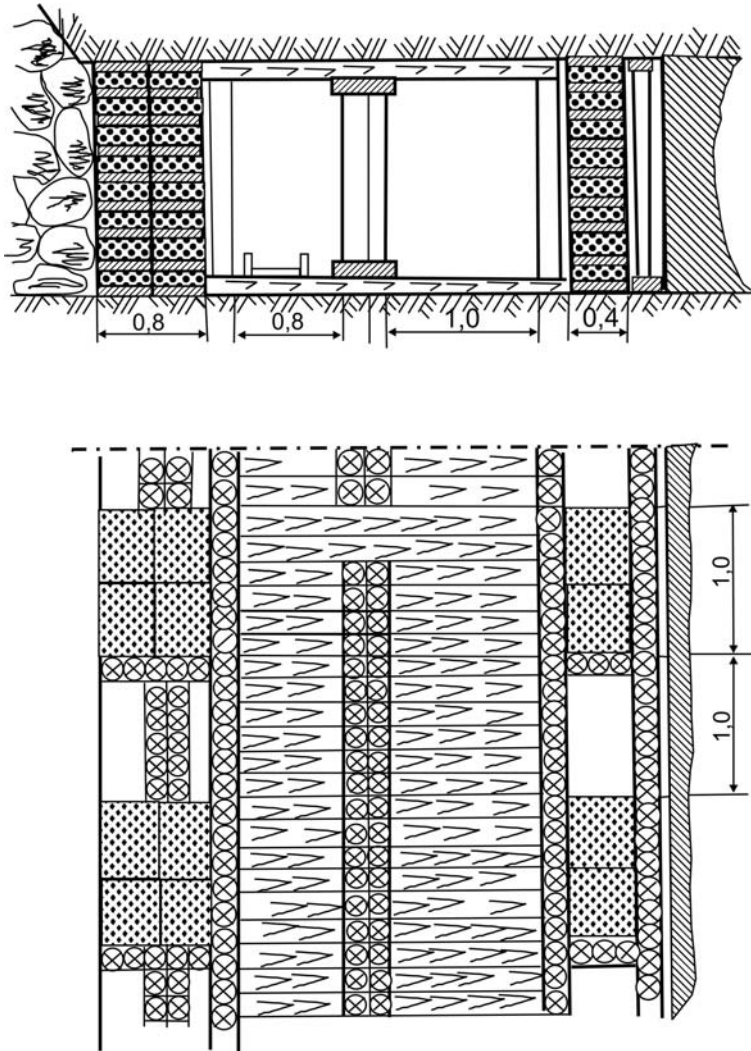


Рис. 2. Паспорт крепления вентиляционной печи для условий пласта  $m_3$  «Толстый» на ш. «Северная»

Таблица 1. Расчет количества опор в скате.

Показатели	Пласты				
	$m_3$	$m_5$	$l_3$	$l_4^H$	$K'_5$
Нагрузка на 1 п.м. ската	4270	10870	15525	17280	22700
Количество опор	2	4	5	6	8

и как углеспускной, значительных деформаций крепи не было отмечено и в перекреплении его не было необходимости.

**Выводы.** Рассчитанные по предложенной формуле опоры для охраны подготовительных выработок для ряда шахт крутого падения позволили увеличить срок безремонтной эксплуатации выработки и повысить от рассматриваемого

способа экономический эффект.

1. *Борзых А.Ф.* Расчет ожидаемых нагрузок на опоры из железобетонных блоков для охраны подготовительных выработок / А.Ф. Борзых, А.А. Данилов, А.В. Тоцкий // Уголь. – 1990. – № 9. – С. 11–14.
2. Компьютерный вариант составления паспортов управления кровлей и крепления лав пластов с углами падения свыше 350 (руководство). – Донецк, 1998. – 104 с.
3. *Алышев Н.А.* Способы и средства охраны подготовительных горных выработок / Н.А. Шаповал, Ю.А. Пивень, Е.И. Питаленко и др. – Донецк: ДонФТИ, 1997. – 80 с.

**Y.A. Piven, V.V. Vasyutina, V.A. Kanin**

**Improvement of non-pillar methods of protection of preparatory mine workings.**

The methods and means of protection of preparatory mine workings used at mines are considered, both with the use of traditional structures made of precast reinforced concrete and cast strips of fast-hardening materials, and methods based on active management of the state of the mountain massif. It has been established in the laboratory that the use of malleable gaskets in prefabricated structures increases their bearing capacity and provides the necessary malleability.

**Keywords:** *coal pillars, rocks, deformation and destruction of rocks, protection of mining.*

*Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ), Донецк*

*Получено 25.05.2022*

*Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying (RANIMI), Donetsk*

*ranimi@ranimi.org*

УДК 550.834:622.12  
doi:10.24412/0136-4545-2022-2-66-72  
EDN:FDMGNA



©2022. А.А. Глухов

## ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРОЦЕДУРЫ МНОГОКАНАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ СЕЙСМОРАЗВЕДКИ

В данной статье приведен алгоритм расчета двумерного  $fk$  спектра при обработке результатов сейсмической разведки, описаны особенности компьютерной реализации, рассмотрены принципы использования данной процедуры для выделения полезной части сигнала и ослабления волн-помех.

**Ключевые слова:** сейсмическая сейсморазведка, обработка результатов наблюдений, многоканальная фильтрация.

**Введение.** Сейсмический метод широко применяется при прогнозе строения земной толщи в рамках работ по поиску и эксплуатации полезных ископаемых [1]. Полученные в полевых условиях сейсмические данные проходят обработку и интерпретацию. Одним из важнейших этапов является процесс выделения полезной части сигнала путем фильтрации.

В случае, если в заданном диапазоне частот энергия информативной части сигнала значительно больше энергии иных колебаний и помех, применяются согласованные фильтры. Диапазоны частот полосы пропускания таких фильтров согласуются с полезной частью сигнала. Среди таких фильтров при обработке сигналов чаще всего используются фильтры низких частот (ФНЧ), полосовой и режекторный фильтры. Однако согласованные фильтры не работают в случаях, когда диапазоны частот информативной и неинформативной части сигнала перекрываются либо совпадают, а энергия волн-помех существенна. В этом случае могут часто быть использованы многоканальные двумерные  $fk$  спектры сейсмограмм, в которых анализ и фильтрация выполняются в  $fk$  плоскости, где  $f$  – циклическая частота,  $k$  – волновое число [2,3].

В данной статье приведен алгоритм расчета двумерного  $fk$  спектра, описаны принципы компьютерной реализации в программном обеспечении [4], рассмотрены особенности использования данной процедуры для выделения полезной части сигнала и ослабления волн-помех.

**1. Описание и реализация разрабатываемого алгоритма.** Каждую отдельно взятую сейсмическую трассу следует рассматривать как одномерный фрагмент поля колебаний  $u(t)$ . Пусть ось  $x$  выбрана вдоль профиля наблюдений. Тогда наборы сейсмических трасс собранных по регулярной схеме в соответствии с направлением профиля представляют собой двумерное волновое поле

Об использовании многоканальной фильтрации при обработке результатов сейсморазведки

$u(x, t)$ . Это могут быть сейсмотрассы общего пункта возбуждения (ОПВ) либо общего пункта приема (ОПП), для которых сейсмоприемники либо пункты возбуждения располагаются на профиле с заданным шагом, Также это могут быть суммотрассы сейсмических разрезов, рассчитанных по методу общей глубинной точки (ОГТ).

Для расчета  $fk$  спектра и последующей фильтрации применяются прямое и обратное двумерные преобразования Фурье, которые можно записать в виде

$$\begin{aligned} U(k_x, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i(ft-k_x x)} dt dx, \\ u(x, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(k_x, f) e^{i(ft-k_x x)} dk_x df. \end{aligned} \quad (1)$$

Аналогом частоты  $f$  для пространственной координаты служит волновое число  $k_x = 1/\lambda_x$ , где  $\lambda_x$  - проекция длины волны  $\lambda$  на ось  $x$ .

Двумерное преобразование Фурье (1) реализует разложение волнового поля  $u(x, t)$  на его компоненты

$$e^{i(ft-k_x x)} = e^{if(t-\frac{x}{V^*})}. \quad (2)$$

Эти компоненты представляют собой плоские монохроматические волны с частотой  $f$ , распространяющиеся вдоль оси  $x$  с кажущейся скоростью

$$V^* = \frac{V}{\sin \alpha}, \quad (3)$$

где  $V$  – скорость распространения сейсмических колебаний,  $\alpha$  – угол фронта волны с профилем наблюдения вдоль направления  $x$ . На основе этого можно производить отбор волн по принципу направления и скорости движения [2,3].

При программной реализации алгоритма фильтрации используются дискретные двумерные прямое и обратное преобразования Фурье, которые определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} U_{mn} &= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{L-1} u_{jk} e^{-i2\pi(\frac{jm}{N}-\frac{kn}{L})}, \\ u_{jk} &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{L-1} U_{mn} e^{i2\pi(\frac{jm}{N}-\frac{kn}{L})}. \end{aligned} \quad (4)$$

В представлении (4)  $u_{jk}$  – значение отсчета  $k$  сейсмотрассы  $j$ . Каждая из  $L$  сейсмотрасс состоит из  $N$  отсчетов. Под отсчетом понимается мгновенное значение амплитуды сигнала.  $U_{mn}$  – двумерный результат преобразования.

К набору сейсмотрасс применяется прямое двумерное преобразование Фурье. Далее полученный результат умножается на частотную характеристику фильтра и выполняется обратное двумерное преобразование Фурье. При умножении

преобразованного входного сигнала на частотную характеристику фильтра происходит обнуление части сигнала, не попавшего в область пропускания.

Перед процедурой фильтрации с целью устранения неоднородности уровня записи сейсмотрасс необходима предварительная нормировка. Причинами такой неоднородности являются различия в условиях контакта сейсмоприемников с породой или углем, вариация силы удара (мощности взрыва) и другие причины. Нормировка выполняется на основе использования соотношения

$$\begin{aligned} A(t) &= A_0(t) K, \\ K &= C/\max(A_0(t)), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $A(t)$  и  $A_0(t)$  – нормированные и исходные значения сейсмических отсчетов, соответственно;  $C$  – единый для всего набора сейсмотрасс коэффициент нормировки;  $\max(A_0(t))$  – максимум амплитуды исходной сейсмотрассы.

В случаях слабой информативной части сигнала, например, вследствие потери энергии при пространственном расхождении фронта волны, может применяться процедура регулировки уровня записи (АРУ). Используемое при этом соотношение является общим случаем (5)

$$\begin{aligned} A(t) &= A_0(t) K(t), \\ K(t) &= C(\max(A_0(t)) - \delta)^{-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\max(A_0(t))$  – максимум амплитуды сигнала на временном отрезке исходной сейсмотрассы от  $t-T/2$  до  $t+T/2$ ;  $T$  – ширина полосы усреднения;  $\delta$  – пороговый уровень регулировки амплитуд.

На рисунке 1 представлен пример применения АРУ на наборе модельных сейсмотрасс. Если на исходных сейсмотрассах слабо прослеживается поперечная прямая волна, то на обработанных она четко видна на полном наборе сейсмоприемников. На сейсмотрассах, соответствующих ближайшим к пункту возбуждения (ПВ) сейсмоприемникам (СП), проявились отраженные волны. В то же время проявились высокочастотные колебания, обусловленные погрешностью используемого численного метода.

Алгоритм программной реализации процедуры  $f$ - $k$ -фильтрации представляет собой набор последовательных операций. На первом этапе производится выбор сейсмотрасс, над которыми производятся дальнейшие операции. Выборка производится из числа сейсмотрасс общего пункта приема либо общего пункта возбуждения. В качестве исходных данных также может быть выбран сейсмический разрез, рассчитанный по методу общей глубинной точки. Выбранные сейсмотрассы записываются в динамический массив, который далее будет обрабатываться. При этом следует учитывать тот факт, что двумерный спектр принимает имеющее смысл значение только на упорядоченном по расстоянию ПВ-СП массиве сейсмотрасс. В случае сейсмического разреза ОГТ это требование выполняется автоматически. В случае выбора элементов массива из сейсмограмм ОПП либо ОПВ, корректность операции должна при выборке обеспечиваться пользователем. Количество выбранных сейсмотрасс  $L$  должно быть

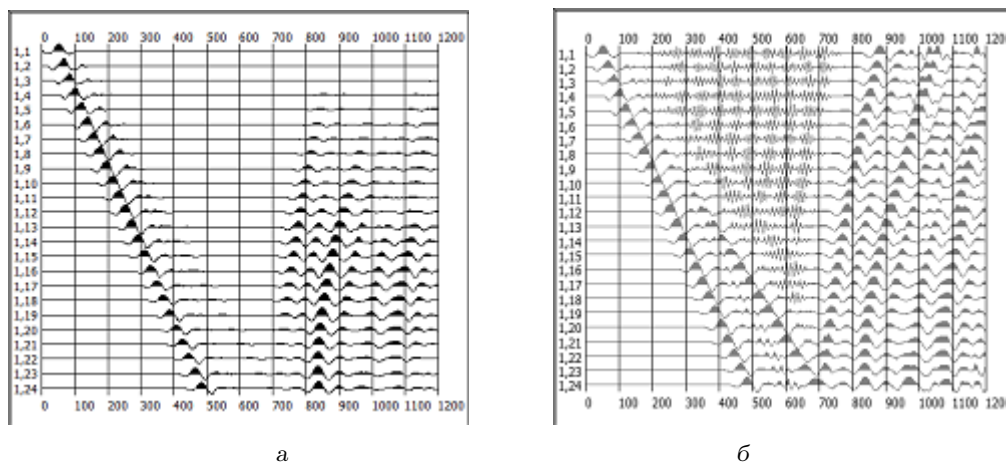


Рис. 1. Исходные сеймотрассы (а) и сеймотрассы после процедуры автоматической регулировки уровня записи (б).

равным степени числа 2. Поэтому (в случае необходимости) дополнительно формируется недостающее число сеймотрасс в динамическом массиве, все отсчеты которых нулевые.

Далее для каждой сеймотрассы выполняется одинарное преобразование Фурье и формируются массивы спектров (представляют собой массивы комплексных чисел).

После этого следует операция формирования входных массивов для выполнения второго преобразования Фурье. Пусть количество отсчетов в исходных сеймотрассах равно  $N$ . Следовательно необходимо сформировать  $N$  массивов из  $L$  комплексных чисел. Отсчет номер  $m$  в комплексной последовательности номер  $n$  будет сформирован из элемента номер  $n$  спектра сеймотрассы номер  $m$ . Используемые на первом этапе динамические массивы удаляются для экономии памяти.

Далее над сформированными массивами выполняется преобразование Фурье, в итоге которого получаются элементы двумерного спектра. На рисунке 2 приведены спектры изображенных на рисунке 1а наборов сеймотрасс, нормированных сеймотрасс, а также сеймотрасс, обработанных процедурой АРУ.

Спектр исходных сеймотрасс неинформативен. На спектре нормированных сеймотрасс проявились образы прямых продольных волн. Прямые поперечные волны едва прослеживаются. Спектр сеймотрасс после применения АРУ содержит полный набор пакетов прямых волн.

В разработанном программном модуле выводится первый и второй квадранты двумерного спектра Фурье. По вертикальной оси откладываются частоты в Гц. Волновые числа изменяются вдоль горизонтальной оси.

К рассчитанному двумерному спектру может быть применена процедура фильтрации. Для этого для начала нужно задать контур, внутри которого предполагается образ тех волн, от которых необходимо избавиться. Это делается в

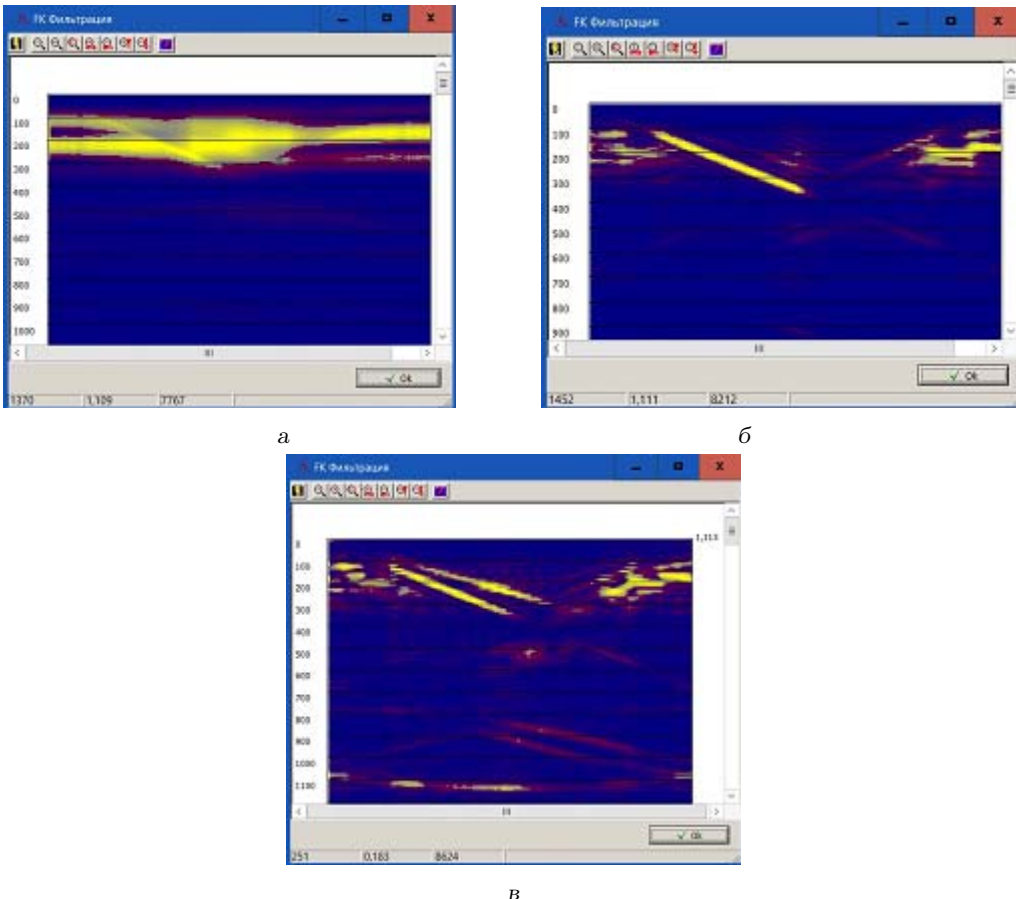


Рис. 2.  $f-k$  спектры представленных на рисунке 1 исходных (а), нормированных (б) и обработанных процедурой АРУ (в) сейсмограмм.

рабочем окне программного обеспечения с помощью соответствующей процедуры. Оконтуривание производится кнопками мыши на соответствующей точке изображения двумерного спектра. На рисунке 3а представлен результат выбора контура для последующего подавления прямых волн сжатия.

По завершению формирования контура создается двумерный массив фильтра, представляющий собой набор коэффициентов, на которые нужно умножить элементы спектра. В простейшем случае коэффициенты вне контура принимаются равными 1, коэффициенты внутри контура равны 0. При необходимости могут быть применены процедуры сглаживания.

Далее выполняется процедура фильтрации. Элементы двумерного спектра умножаются на соответствующие фильтру коэффициенты. Далее в последовательности, обратной тому, как формировался двумерный спектр, идет выполнение процедуры обратного преобразования Фурье на  $N$  массивах данного спектра. Затем формируются по  $L$  динамических массивов комплексных чисел в которые будут записаны итоговые спектры. Отсчеты номер  $n$  в динамических



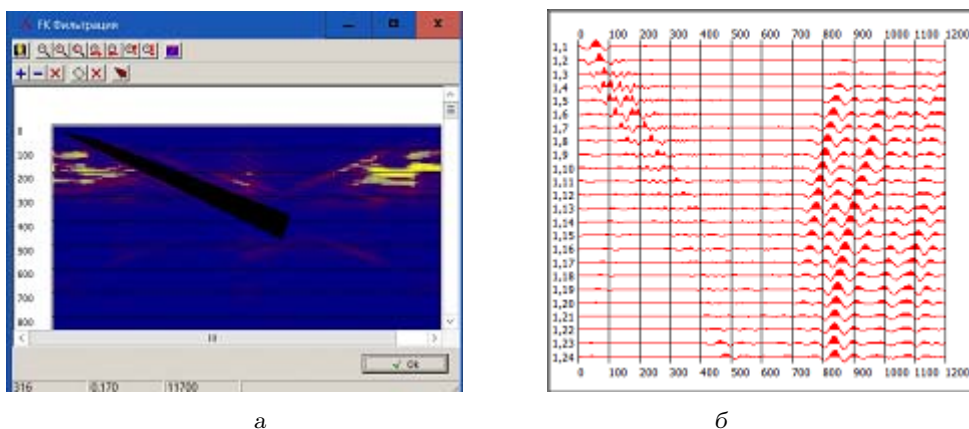


Рис. 3. Выбор контура (а) и результат (б) подавления прямых волн сжатия.

массивах номер  $t$  будут сформированы из элементов номер  $t$  спектра  $n$ . Затем применяя обратное преобразование Фурье к итоговым спектрам получаем отфильтрованные сейсмотрассы.

На рисунке 3б представлен результат применения фильтра изображенного на рисунке 3а. Видно, что фильтрация с тем большей эффективностью подавила прямую волну сжатия, чем большему расстоянию ПВ-СП соответствует сейсмотрасса. Подавление высокоамплитудной продольной волны привело к повышению относительного вклада волн других типов (прямой волны сдвига и отраженных волн). Такой фильтр ввиду формы фильтруемой области обычно называют «веерным».

В программном обеспечении предусмотрена возможность задать несколько контуров для фильтрации. Предусмотрена также возможность задать диапазоны фильтруемых частот, соответствующих простым типам фильтров. Среди них фильтр высокой, низкой частот, полосовой и режекторные фильтры. В этом случае результат «двумерной» фильтрации не отличается от результата применения стандартной «одномерной» процедуры.

**Выводы.** Разработанный программный модуль прошел первичную апробацию на модельном сейсмическом материале, на результатах реальных сейсмических экспериментов.

Исследования проведены в рамках НИР «Разработка теории и методических основ сейсмического прогноза структуры угленородного массива из полевых выработок», выполняемой по заказу Министерства образования и науки ДНР. Результаты данной статьи могут быть использованы при совершенствовании методик сейсмоакустического прогноза горно-геологических условий залегания угольных пластов.

1. Анциферов А.В. Теория и практика шахтной сейсморазведки / А.В. Анциферов. – Донецк: ООО «Алан», 2002. – 312 с.
2. Yilmaz O. Seismic Data Analysis / O. Yilmaz. – Tulsa: Society of Exploration Geophysicists,

2001. – 2027 р.

3. Wang D. Phase-shift- and phase-filtering-based surface-wave suppression method / D. Wang, Y. Ling // Applied Geophysics. – 2016. – Vol. 13(4). – P. 614–620.
4. Глухов А.А. О программном комплексе моделирования распространения сейсмических колебаний в угленосной толще / А.А. Глухов // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Сер. Обчислювальна техніка та автоматизація. – 2005. – Вип. 88. – С. 106–113.

#### **A.A. Glukhov**

#### **On the use of the procedure of multichannel filtration in processing the results of seismic exploration.**

This article presents an algorithm for calculating a two-dimensional fk-spectrum, describes the features of a computer implementation, discusses the features of using this procedure to receive the useful part of the signal and attenuate interference waves.

**Keywords:** *seismic exploration, processing of observation results, multi-channel filtering.*

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ), Донецк

Получено 30.06.2022

Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying (RANIMI), Donetsk

*Glukhov1964@yandex.ru*