

ISSN 0136-4545

ФГБОУ ВО «ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

**Журнал
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ
МЕХАНИКИ**

№ 2 (83)

2023

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**
ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА: д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**
ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ: **М.Н. Пачева**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

д-р техн. наук, проф. А.В. Анциферов, д-р техн. наук, проф. В.Е. Болнокин, д-р техн. наук, проф. Н.И. Болонов, д-р физ.-мат. наук, проф. А.О. Ватульян, д-р техн. наук, проф. Л.П. Вовк, д-р техн. наук, проф. В.А. Глазунов, д-р техн. наук, с.н.с. А.А. Глухов, д-р физ.-мат. наук, проф. А.С. Гольцев, д-р физ.-мат. наук, проф. Г.В. Горр, д-р техн. наук, проф. В.В. Губанов, д-р техн. наук, с.н.с. В.А. Дрибан, д-р физ.-мат. наук, проф. А.М. Ковалев, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. Б.И. Коносевиц, д-р физ.-мат. наук, проф. И.А. Моисеенко, д-р техн. наук, проф. В.Ф. Мущанов, д-р техн. наук, проф. В.Н. Павлыш, д-р техн. наук, проф. А.А. Петраков, д-р техн. наук, доц. С.В. Сторожев, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. С.Н. Судаков, д-р техн. наук, проф. Г.М. Улитин, д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Шалдырван, д-р техн. наук, проф. В.П. Шамота

EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**

DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**

EXECUTIVE SECRETARY: **M.N. Pacheva**

EDITORIAL BOARD:

Dr. of tech., prof. A.V. Antsiferov, Dr. of tech., prof. V.E. Bolnokin, Dr. of tech., prof. N.I. Bolonov, Dr. of phys. and math., prof. A.O. Vatulyan, Dr. of tech., prof. L.P. Vovk, Dr. of tech., prof. V.A. Glazunov, Dr. of tech., senior researcher A.A. Glukhov, Dr. of phys. and math., prof. A.S. Goltsev, Dr. of phys. and math., prof. G.V. Gorr, Dr. of tech., prof. V.V. Gubanov, Dr. of tech., senior researcher V.A. Driban, Dr. of phys. and math., prof. A.M. Kovalev, Dr. of phys. and math., senior researcher B.I. Konosevich, Dr. of phys. and math., prof. I.A. Moiseyenko, Dr. of tech., prof. V.F. Mushchanov, Dr. of tech., prof. V.N. Pavlysh, Dr. of tech., prof. A.A. Petrakov, Dr. of tech., doc. S.V. Storozhev, Dr. of phys. and math., senior researcher S.N. Sudakov, Dr. of tech., prof. G.M. Ulitin, Dr. of phys. and math., prof. V.A. Shaldyrvan, Dr. of tech., prof. V.P. Shamota.

Адрес редакции: 83001 Донецк, ул. Университетская, 24
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
Тел. 302 92 71, E-mail: jtam_donnu@mail.ru

Технический редактор: Пачева М.Н.

Научный журнал «Журнал теоретической и прикладной механики» включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (приказ МОН ДНР № 616 от 14.07.2021 г) по следующим научным специальностям: 1.1.7 — Теоретическая механика, динамика машин (физико-математические науки); 1.1.8 — Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки); 1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки); 2.1.9 — Строительная механика (технические науки); 2.8.6 — Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика (технические науки).

Журнал включен в перечень РИНЦ (Лицензионный договор № 27-01/2020 от 23.01.2020 г.).

Утверждено к печати ученым советом
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016 г.

© Федеральное государственное бюджетное
учреждение высшего образования
«Донецкий государственный университет», 2023

№ 2 (83) / 2023

Основан в 1970г.

ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Механика деформируемого твердого тела

Моисеенко И.А., Дзундза А.И., Мельничук Н.Ю., Шалдырван В.А. Исследование свойств изгибных волн в сплошных цилиндрах на основе трехфакторной модели радиальной неоднородности изотропного материала..... 5

Глухов А.А., Сторожев В.И. Анализ модели распространения поверхностных релеевских волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве с приграничной локализованной зоной неоднородности 26

Глушанков Е.С. Термонапряженное состояние бесконечной анизотропной пластинки в условиях неравномерного конвективного теплообмена с внешней средой под действием линейного потока тепла..... 39

Карасев Д.С., Сторожев С.В., Шалдырван В.А. Интегрирование уравнений распространения локализованных сдвиговых электроупругих волн в функционально-градиентной пьезокерамике с двойной экспоненциальной неоднородностью..... 48

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Номбре С.Б., Полянский Д.Д., Сторожев С.В., Чан Ба Ле Хоанг Учет параметрической неопределенности в модели температурных воздействий на внутреннюю поверхность упругого полого шара 56

Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика

Лобков Н.И., Маевский В.С., Лобков А.А. Особенности развития области сдвижения породного массива в результате выемки угля..... 67

Скаженик В.Б., Чернышенко И.В., Грищенков Н.Н., Голубев Ф.М. Прогноз сдвижений и деформаций земной поверхности на основе компьютерного моделирования.....

74

№ 2 (83) / 2023

Founded in 1970.

JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

CONTENTS

Solid Mechanics

- Moiseyenko I.A., Dzundza A.I., Melnichuk N.I., Shaldyrvan V.A.* Study of the properties of flexural waves in solid cylinders based on a three-factor model of radial inhomogeneity of an isotropic material..... 5
- Glukhov A.A., Storozhev V.I.* Analysis of the model of surface rayleigh waves propagation in a functional-gradient orthotropic half-space with a border localized zone of inhomogeneity..... 26
- Glushankov E.S.* The thermoelastic state of the infinite multiply connected anisotropic plate in conditions of non-uniform convective heat transfer under linear heat flux action 39
- Karasev D.S., Storozhev S.V., Shaldyrvan V.A.* Integration of propagation equations of localized shear electroelastic waves in functional gradient piezoceramics with double exponential in homogeneity..... 48

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes

- Nombre S.B., Polyansky D.D., Storozhev S.V., Tran Ba Le Hoang* Taking into account parametric uncertainty in the model of temperature effects on the inner surface of an elastic hollow ball..... 56

Geomechanics, Rock Damage, Mining Aerodynamics and Thermal Physics

- Lobkov N.I., Mayevsky V.S., Lobkov A.A.* Features of the development of the field of rock massif displacement as a result of coal mining..... 67
- Skazhenik V.B., Chernyshenko I.V., Grishchenkov N.N., Golubev Ph.M.* Prediction of displacements and deformations of the earth's surface based on computer modeling..... 74

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2023-2-5-25

EDN:CWKADU



©2023. И.А. Моисеенко¹, А.И. Дзундза², Н.Ю. Мельничук³,
В.А. Шалдырван⁴

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В СПЛОШНЫХ ЦИЛИНДРАХ НА ОСНОВЕ ТРЕХФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ РАДИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Рассмотрены два альтернативных варианта трехфакторной модели радиальной функциональной неоднородности физико-механических характеристик изотропного материала сплошного цилиндрического волновода для случая распространяющихся неосесимметричных волн. Представлены два подхода к определению функциональных составляющих указанных моделей,

¹ Моисеенко Игорь Алексеевич – доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: miamia733@mail.ru.

Moiseyenko Igor Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

² Дзундза Алла Ивановна – доктор пед. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: alladzundza@mail.ru.

Dzundza Alla Ivanovna – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

³ Мельничук Наталья Юрьевна – ассистент каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: nata-250396@yandex.ru.

Melnichuk Natalia Iurievna – Assistant, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

⁴ Шалдырван Валерий Анатольевич – доктор физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: shaldyrvan.v.a@mail.ru.

Shaldyrvan Valery Anatolievich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

определены достаточные условия несильной радиальной неоднородности, обеспечивающие существование целевого базисного решения уравнений трехмерной линейной модели волнового деформирования. Построено базисное решение, элементы которого выражены через аналитические функции. Дан сопоставительный анализ результатов численного эксперимента, проведенного для случаев однородного и функционально-неоднородных изотропных свободных волноводов, приведены количественные и качественные оценки полученных численных результатов.

Ключевые слова: функционально-градиентные материалы, изотропия, цилиндрический волновод, неосесимметричные волны, модель радиальной неоднородности, базисное решение.

Введение. Функционально-градиентные материалы в настоящее время активно исследуются как в плане поиска новых технологических подходов к достижению целевых свойств при их создании путем, например, применения методов 3-D печати, так и в плане разработки новых теоретических подходов к анализу математических моделей, описывающих механические процессы в объектах из таких материалов, например, исследование характеристик волновых процессов в волноводах из подобных материалов. Проведение теоретических исследований в этой области предполагает, как правило, построение новых аналитических решений для соответствующих математических моделей. В этом направлении продуктивным оказался подход, основанный на введении специальных моделей функциональной неоднородности физико-механических характеристик таких материалов [1–7]. В данном исследовании на основе предложенной модели радиальной неоднородности изотропного материала сплошного цилиндрического волновода построено новое базисное аналитическое решение трехмерной линейной математической модели процесса распространения неосесимметричных гармонических волн в волноводах указанного типа, исследованы свойства бегущих волн.

1. Математическая модель. Рассматривается изотропный радиально-неоднородный цилиндрический волновод с переменными параметрами Ламе и параметром плотности материала

$$\lambda(r) = C_* \tilde{\lambda}(r), \quad \mu(r) = C_* \tilde{\mu}(r), \quad \rho(r) = \rho_* \tilde{\rho}(r), \quad (1)$$

занимающий в безразмерной цилиндрической системе координат $Or\theta z$ с нормирующим линейным параметром R_* [м] область

$$V = \{r \in [0, 1], \theta \in [-\pi, \pi], z \in (-\infty, \infty)\}. \quad (2)$$

Полагается, что произвольные, в пределах допустимости варьирования значений физико-механических характеристик, функциональные законы изменения упругих модулей Ламе и плотности, соответственно нормированные параметрами $C_* = const$ [н/м²] и $\rho_* = const$ [кг/м³]

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(r) > 0, \quad \tilde{\mu} = \tilde{\mu}(r) > 0, \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}(r) > 0 \quad (r \in [0, 1]), \quad (3)$$

относятся к классу $C^2[0, \delta]$. Границы допустимых значений параметра δ ($\delta > 1$) определяются ниже.

В рамках пространственной линейной математической модели волновой динамики для случая нормальных упругих неосесимметричных волн с круговой частотой ω , с отнесенным к нормирующему параметру R_* продольным волновым числом k ($k \in \mathbb{C}$) и с окружным волновым числом τ ($\tau \in \mathbb{N}$) распространяющихся вдоль оси Oz в протяженном цилиндре с геометрией (2), рассматриваемая задача после применения в матричном виде метода разделения переменных

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(r, \theta, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_U \mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r), \\ \mathbf{\Sigma}(r, \theta, z, t) &= \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_\Sigma \mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(\tau)}(r), \end{aligned} \quad (4)$$

сводится к построению образующего базис набора частных решений системы из трех однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Данную задачу в матричной форме можно представить так:

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(r) \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) = \mathbf{O} \quad (r \in [0, \delta]). \quad (5)$$

В соотношениях (4),(5)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) &= [\tilde{u}_r^{(\tau)}(r), \tilde{u}_\theta^{(\tau)}(r), \tilde{u}_z^{(\tau)}(r)]^T, \\ \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(\tau)}(r) &= [\tilde{\sigma}_{rr}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{zz}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{\theta z}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{rz}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(\tau)}(r)]^T, \end{aligned} \quad (6)$$

– вектор-столбцы с нормированными соответственно величинами R_* и C_* вещественными радиальными составляющими компонент вектора упругих перемещений

$$\mathbf{U}(r, \theta, z, t) = [u_r(r, \theta, z, t), u_\theta(r, \theta, z, t), u_z(r, \theta, z, t)]^T, \quad (7)$$

и тензора напряжений

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma}(r, \theta, z, t) &= [\sigma_{rr}(r, \theta, z, t), \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, z, t), \sigma_{zz}(r, \theta, z, t), \\ &\sigma_{\theta z}(r, \theta, z, t), \sigma_{rz}(r, \theta, z, t), \sigma_{r\theta}(r, \theta, z, t)]^T; \end{aligned} \quad (8)$$

\mathbf{P}_U и \mathbf{P}_Σ – диагональные матрицы комплексной нормировки с отличными от нуля элементами

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}_U]_{1,1} &= [\mathbf{P}_U]_{2,2} = 1, \quad [\mathbf{P}_U]_{3,3} = i, \\ [\mathbf{P}_\Sigma]_{j,j} &= 1 \quad (j = 1, 2, 3, 6), \quad [\mathbf{P}_\Sigma]_{j,j} = i \quad (j = 4, 5); \end{aligned} \quad (9)$$

$\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta)$ и $\mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta)$ – вещественные диагональные матрицы функциональной зависимости целевого решения от угловой координаты с отличными от нуля элементами

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta)]_{1,1} &= [\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta)]_{3,3} = \cos(\tau\theta), \quad [\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta)]_{2,2} = \sin(\tau\theta), \\ [\mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta)]_{j,j} &= \cos(\tau\theta) \quad (j = 1, 2, 3, 5), \quad [\mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta)]_{j,j} = \sin(\tau\theta) \quad (j = 4, 6); \end{aligned} \quad (10)$$

$\tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(r)$ – матричный дифференциальный оператор с элементами

$$\begin{aligned} \left[\tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(r) \right]_{j,j} &= r^2 d_r^2 + \tilde{f}_{jj}^{(1)} r d_r + \tilde{f}_{jj}^{(2)} \quad (j = \overline{1,3}), \\ \left[\tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(r) \right]_{n,m} &= \tilde{f}_{nm}^{(1)} r d_r + \tilde{f}_{nm}^{(2)} \quad (n, m = 1, 2; 2, 1; 1, 3; 3, 1; 2, 3; 3, 2), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{11}^{(1)} &= \tilde{f}_{11}^{(1)}(r) = 1 + (\tilde{\kappa}_3 + 2\tilde{\kappa}_4) r, \\ \tilde{f}_{11}^{(2)} &= \tilde{f}_{11}^{(2)}(r) = -1 - \tau^2 \kappa_1 + \tilde{\kappa}_3 r + (\Omega^2 \kappa_2 - k^2 \kappa_1) r^2, \\ \tilde{f}_{12}^{(1)} &= \tilde{f}_{12}^{(1)}(r) = \tau (1 - \tilde{\kappa}_1), \quad \tilde{f}_{12}^{(2)} = \tilde{f}_{12}^{(2)}(r) = -\tau (1 + \tilde{\kappa}_1 - \tilde{\kappa}_3 r), \\ \tilde{f}_{13}^{(1)} &= \tilde{f}_{13}^{(1)}(r) = -k (1 - \tilde{\kappa}_1) r, \quad \tilde{f}_{13}^{(2)} = \tilde{f}_{13}^{(2)}(r) = -k \tilde{\kappa}_3 r^2, \\ \tilde{f}_{21}^{(1)} &= \tilde{f}_{21}^{(1)}(r) = -\tau (1 + \tilde{\kappa}_5), \quad \tilde{f}_{21}^{(2)} = \tilde{f}_{21}^{(2)}(r) = -\tau (3 + \tilde{\kappa}_5 + \tilde{\kappa}_7 r), \\ \tilde{f}_{22}^{(1)} &= \tilde{f}_{22}^{(1)}(r) = 1 + \tilde{\kappa}_7 r, \\ \tilde{f}_{22}^{(2)} &= \tilde{f}_{22}^{(2)}(r) = -1 - \tau^2 (2 + \tilde{\kappa}_5) - \tilde{\kappa}_7 r + (\Omega^2 \tilde{\kappa}_6 - k^2) r^2, \\ \tilde{f}_{23}^{(1)} &= 0, \quad \tilde{f}_{23}^{(2)} = \tilde{f}_{23}^{(2)}(r) = k\tau (1 + \tilde{\kappa}_5) r, \\ \tilde{f}_{31}^{(1)} &= \tilde{f}_{31}^{(1)}(r) = k (1 + \tilde{\kappa}_5) r, \quad \tilde{f}_{31}^{(2)} = \tilde{f}_{31}^{(2)}(r) = k (1 + \tilde{\kappa}_5 + \tilde{\kappa}_7 r) r, \\ \tilde{f}_{32}^{(1)} &= 0, \quad \tilde{f}_{32}^{(2)} = \tilde{f}_{32}^{(2)}(r) = k\tau (1 + \tilde{\kappa}_5) r, \\ \tilde{f}_{33}^{(1)} &= \tilde{f}_{33}^{(1)}(r) = 1 + \tilde{\kappa}_7 r, \quad \tilde{f}_{33}^{(2)} = \tilde{f}_{33}^{(2)}(r) = -\tau^2 + (\Omega^2 \tilde{\kappa}_6 - k^2 (2 + \tilde{\kappa}_5)) r^2, \\ \tilde{\kappa}_1 &= \tilde{\kappa}_1(r) = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}, \quad \tilde{\kappa}_2 = \tilde{\kappa}_2(r) = \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}, \quad \tilde{\kappa}_3 = \tilde{\kappa}_3(r) = \frac{\tilde{\lambda}'}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}, \\ \tilde{\kappa}_4 &= \tilde{\kappa}_4(r) = \frac{\tilde{\mu}'}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}, \quad \tilde{\kappa}_5 = \tilde{\kappa}_5(r) = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}, \\ \tilde{\kappa}_6 &= \tilde{\kappa}_6(r) = \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}}, \quad \tilde{\kappa}_7 = \tilde{\kappa}_7(r) = \frac{\tilde{\mu}'}{\tilde{\mu}}; \end{aligned} \quad (12)$$

\mathbf{O} – нулевой вектор-столбец размерности 3; $\Omega^2 = \rho_* R_*^2 \omega^2 / C_*$ – квадрат безразмерной приведенной частоты; $d_r = d/dr$. Векторные функции $\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(\tau)}(r)$ и $\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r)$ связаны соотношением

$$\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(\tau)}(r) = \tilde{\mathbf{G}}(r) \tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r) \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r), \quad (13)$$

где $\tilde{\mathbf{G}}(r)$ – матрица-функция размерности 6×6 с отличными от нуля элементами

$$\begin{aligned} \left[\tilde{\mathbf{G}}(r) \right]_{n,m} &= \tilde{\lambda} \quad (n, m = 1, 2; 2, 1; 1, 3; 3, 1; 2, 3; 3, 2), \\ \left[\tilde{\mathbf{G}}(r) \right]_{j,j} &= \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} \quad (j = \overline{1,3}), \quad \left[\tilde{\mathbf{G}}(r) \right]_{j,j} = \tilde{\mu} \quad (j = \overline{4,6}); \end{aligned} \quad (14)$$

$\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r)$ – матричный дифференциальный оператор размерности 6×3 , отличные от нуля элементы которого имеют вид

$$\begin{aligned} \left[\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r) \right]_{1,1} &= d_r, & \left[\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r) \right]_{2,1} &= r^{-1}, & \left[\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r) \right]_{2,2} &= \tau r^{-1}, \\ \left[\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r) \right]_{3,3} &= -k, & \left[\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r) \right]_{4,2} &= k, & \left[\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r) \right]_{4,3} &= -\tau r^{-1}, \\ \left[\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r) \right]_{5,1} &= k, & \left[\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r) \right]_{5,3} &= d_r, & \left[\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r) \right]_{6,1} &= -\tau r^{-1}, \\ \left[\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r) \right]_{6,2} &= d_r - r^{-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Представленная математическая модель (1)–(15) дополняется классическими однородными граничными условиями свободной

$$\left[\tilde{\Sigma}^{(\tau)}(1) \right]_{(1,5,6)} = \mathbf{O}, \quad (16)$$

либо жестко закрепленной

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(1) = \mathbf{O} \quad (17)$$

граничной поверхности волновода.

2. Модель радиальной неоднородности. В декартовой системе координат Ox_1x_2 на плоскости комплексной переменной $\xi = x_1 + ix_2$ формально полагается, что неотрицательная часть полуоси Ox_1 совпадает с осью Or . С учетом вида представлений для $\tilde{\kappa}_j$ ($j = \overline{1,7}$) в соотношениях (12) функциональные законы (3) далее рассматриваются в рамках двух альтернативных вариантов модели радиальной неоднородности материала волновода в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(r) &= (1 - 2\psi_1(r)) e^{\varphi(r)}, & \tilde{\mu}(r) &= \psi_1(r) e^{\varphi(r)}, \\ \tilde{\rho}(r) &= \psi_2(r) e^{\varphi(r)} \quad (r \in [0, 1]); \end{aligned} \quad (18-A)$$

$$\tilde{\lambda}(r) = \psi_1(r) e^{\varphi(r)}, \quad \tilde{\mu}(r) = e^{\varphi(r)}, \quad \tilde{\rho}(r) = \psi_2(r) e^{\varphi(r)} \quad (r \in [0, 1]). \quad (18-B)$$

Здесь $\varphi(\xi)$, $\psi_1(\xi)$ и $\psi_2(\xi)$ – произвольные, аналитические в области $|\xi| < \delta$ функции. На основании соотношений (18-A) либо (18-B) рассматриваются альтернативные варианты аналитического продолжения на плоскость комплексной переменной ξ дифференциального оператора $\tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(r)$ в оператор $\hat{\mathbf{D}}^{(\tau)}(\xi)$ с элементами

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mathbf{D}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{j,j} &= \xi^2 d_\xi^2 + \hat{f}_{jj}^{(1)} \xi d_\xi + \hat{f}_{jj}^{(2)} \quad (j = \overline{1,3}), \\ \left[\hat{\mathbf{D}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{n,m} &= \hat{f}_{nm}^{(1)} \xi d_\xi + \hat{f}_{nm}^{(2)} \quad (n, m = 1, 2; 2, 1; 1, 3; 3, 1; 2, 3; 3, 2), \end{aligned} \quad (19)$$

где $d_\xi = d/d\xi$. Соответственно выбранной модели неоднородности (18-A) либо

(18-Б) определяются входящие в соотношения (19) функции:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_{11}^{(1)} &= \hat{f}_{11}^{(1)}(\xi) = 1 + \varphi' \xi, \\
 \hat{f}_{11}^{(2)} &= \hat{f}_{11}^{(2)}(\xi) = -1 - \tau^2 \psi_1 + (\varphi' - 2\psi'_1 - 2\phi) \xi + (\Omega^2 \psi_2 - k^2 \psi_1) \xi^2, \\
 \hat{f}_{12}^{(1)} &= \hat{f}_{12}^{(1)}(\xi) = \tau(1 - \psi_1), \\
 \hat{f}_{12}^{(2)} &= \hat{f}_{12}^{(2)}(\xi) = \tau(-1 - \psi_1 + (\varphi' - 2\psi'_1 - 2\phi) \xi), \\
 \hat{f}_{13}^{(1)} &= \hat{f}_{13}^{(1)}(\xi) = k(\psi_1 - 1) \xi, \quad \hat{f}_{13}^{(2)} = \hat{f}_{13}^{(2)}(\xi) = k(2\phi - \varphi' + 2\psi') \xi^2, \\
 \hat{f}_{21}^{(1)} &= \hat{f}_{21}^{(1)}(\xi) = \tau(1 - \chi_3), \\
 \hat{f}_{21}^{(2)} &= \hat{f}_{21}^{(2)}(\xi) = -\tau(1 + \chi_3 + (\varphi' + \chi_2) \xi), \\
 \hat{f}_{22}^{(1)} &= \hat{f}_{22}^{(1)}(\xi) = 1 + (\varphi' + \chi_2) \xi, \\
 \hat{f}_{22}^{(2)} &= \hat{f}_{22}^{(2)}(\xi) = -1 - \tau^2 \chi_3 - (\varphi' + \chi_2) \xi + (\Omega^2 \chi_1 - k^2) \xi^2, \\
 \hat{f}_{23}^{(1)} &= 0, \quad \hat{f}_{23}^{(2)} = \hat{f}_{23}^{(2)}(\xi) = k\tau(\chi_3 - 1) \xi, \\
 \hat{f}_{31}^{(1)} &= \hat{f}_{31}^{(1)}(\xi) = k(\chi_3 - 1) \xi, \\
 \hat{f}_{31}^{(2)} &= \hat{f}_{31}^{(2)}(\xi) = k(\chi_3 - 1 + (\varphi' + \chi_2) \xi) \xi, \\
 \hat{f}_{32}^{(1)} &= 0, \quad \hat{f}_{32}^{(2)} = \hat{f}_{32}^{(2)}(\xi) = k\tau(\chi_3 - 1) \xi, \\
 \hat{f}_{33}^{(1)} &= \hat{f}_{33}^{(1)}(\xi) = 1 + (\varphi' + \chi_2) \xi, \\
 \hat{f}_{33}^{(2)} &= \hat{f}_{33}^{(2)}(\xi) = -\tau^2 + (\Omega^2 \chi_1 - k^2 \chi_3) \xi^2;
 \end{aligned} \tag{20-A}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_{11}^{(1)} &= \hat{f}_{11}^{(1)}(\xi) = 1 + (\varphi' + \chi_2) \xi, \\
 \hat{f}_{11}^{(2)} &= \hat{f}_{11}^{(2)}(\xi) = -1 - \tau^2 \chi_3 + (\varphi' + \chi_2 - 2\phi) \xi + (\Omega^2 \chi_1 - k^2 \chi_3) \xi^2, \\
 \hat{f}_{12}^{(1)} &= \hat{f}_{12}^{(1)}(\xi) = \tau(1 - \chi_3), \\
 \hat{f}_{12}^{(2)} &= \hat{f}_{12}^{(2)}(\xi) = \tau(-1 - \chi_3 + (\varphi' + \chi_2 - 2\phi) \xi), \\
 \hat{f}_{13}^{(1)} &= \hat{f}_{13}^{(1)}(\xi) = k(\chi_3 - 1) \xi, \quad \hat{f}_{13}^{(2)} = \hat{f}_{13}^{(2)}(\xi) = -k(\varphi' + \chi_2 - 2\phi) \xi^2, \\
 \hat{f}_{21}^{(1)} &= \hat{f}_{21}^{(1)}(\xi) = -\tau(\psi_1 + 1), \quad \hat{f}_{21}^{(2)} = \hat{f}_{21}^{(2)}(\xi) = -\tau(3 + \psi_1 + \xi\varphi'), \\
 \hat{f}_{22}^{(1)} &= \hat{f}_{22}^{(1)}(\xi) = 1 + \xi\varphi', \\
 \hat{f}_{22}^{(2)} &= \hat{f}_{22}^{(2)}(\xi) = -1 - \tau^2(2 + \psi_1) - \xi\varphi' + (\Omega^2 \psi_2 - k^2) \xi^2, \\
 \hat{f}_{23}^{(1)} &= 0, \quad \hat{f}_{23}^{(2)} = \hat{f}_{23}^{(2)}(\xi) = k\tau(\psi_1 + 1) \xi, \\
 \hat{f}_{31}^{(1)} &= \hat{f}_{31}^{(1)}(\xi) = k(\psi_1 + 1) \xi, \quad \hat{f}_{31}^{(2)} = \hat{f}_{31}^{(2)}(\xi) = k(1 + \psi_1 + \xi\varphi') \xi, \\
 \hat{f}_{32}^{(1)} &= 0, \quad \hat{f}_{32}^{(2)} = \hat{f}_{32}^{(2)}(\xi) = k\tau(\psi_1 + 1) \xi, \quad \hat{f}_{33}^{(1)} = \hat{f}_{33}^{(1)}(\xi) = 1 + \xi\varphi', \\
 \hat{f}_{33}^{(2)} &= \hat{f}_{33}^{(2)}(\xi) = -\tau^2 + (\Omega^2 \psi_2 - k^2(\psi_1 + 2)) \xi^2.
 \end{aligned} \tag{20-Б}$$

В соотношениях (20-А) и (20-Б) использованы вспомогательные, определяемые в соответствии с выбранным вариантом модели (18-А) либо (18-Б) функции:

$$\chi_1 = \chi_1(\xi) = \frac{\psi_2(\xi)}{\psi_1(\xi)}, \quad \chi_2 = \chi_2(\xi) = \frac{\psi'_1(\xi)}{\psi_1(\xi)}, \quad (21-А)$$

$$\chi_3 = \chi_3(\xi) = \frac{1}{\psi_1(\xi)}, \quad \phi = \phi(\xi) = \psi_1(\xi) \varphi'(\xi);$$

$$\chi_1 = \chi_1(\xi) = \frac{\psi_2(\xi)}{\psi_1(\xi) + 2}, \quad \chi_2 = \chi_2(\xi) = \frac{\psi'_1(\xi)}{\psi_1(\xi) + 2}, \quad (21-Б)$$

$$[2mm]\chi_3 = \chi_3(\xi) = \frac{1}{\psi_1(\xi) + 2}, \quad \phi = \phi(\xi) = \chi_3(\xi) \varphi'(\xi).$$

Ставится целевая задача построить для уравнения

$$\hat{\mathbf{D}}^{(\tau)}(\xi) \hat{\mathbf{U}}^{(\tau)}(\xi) = \mathbf{O} \quad (|\xi| < \delta) \quad (22)$$

набор из трех линейно независимых частных решений вида

$$\hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi) = \left[\hat{u}_r^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi), \hat{u}_\theta^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi), \hat{u}_z^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi) \right]^T \quad (23)$$

$$(q = \overline{1, 3}),$$

с аналитическими в области $|\xi| < \delta$ элементами $\hat{u}_s^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi)$ ($s = r, \theta, z$; $q = \overline{1, 3}$). Известно, что система дифференциальных уравнений (22) имеет аналитические в области $|\xi| < \delta$ решения, если входящие в соотношения (20-А) либо (20-Б) функции $\hat{f}_{nm}^{(j)}(\xi)$ ($j = \overline{1, 2}$; $n, m = \overline{1, 3}$), соответственно выбранной модели неоднородности (18-А) либо (18-Б), будут аналитическими в области $|\xi| < \delta$ [8–9].

Рассматриваются аналитический и численный подходы к определению аналитических в области $|\xi| < \delta$ функций $\varphi(\xi)$ и $\psi_s(\xi)$ ($s = \overline{1, 2}$) по заданным функциональным законам (3).

Аналитический подход может быть реализован при выполнении трех условий. Во-первых, функции $\tilde{\lambda}(r)$, $\tilde{\mu}(r)$ и $\tilde{\rho}(r)$ должны допускать аналитические продолжения $\hat{\lambda}(\xi)$, $\hat{\mu}(\xi)$ и $\hat{\rho}(\xi)$, $|\xi| < \delta$ на комплексную плоскость переменной ξ . Во-вторых, определяемые из полученных соответственно выбранному варианту модели неоднородности (18-А) либо (18-Б) представлений

$$\varphi(\xi) = \ln \left(\hat{\lambda}(\xi) + 2\hat{\mu}(\xi) \right), \quad (24-А)$$

$$\psi_1(\xi) = \frac{\hat{\mu}(\xi)}{\hat{\lambda}(\xi) + 2\hat{\mu}(\xi)}, \quad \psi_2(\xi) = \frac{\hat{\rho}(\xi)}{\hat{\lambda}(\xi) + 2\hat{\mu}(\xi)},$$

либо

$$\varphi(\xi) = \ln(\hat{\mu}(\xi)), \quad \psi_1(\xi) = \hat{\lambda}(\xi)/\hat{\mu}(\xi), \quad \psi_2(\xi) = \hat{\rho}(\xi)/\hat{\mu}(\xi), \quad (24-Б)$$

функции $\varphi(\xi)$ и $\psi_s(\xi)$ ($s = \overline{1, 2}$) должны быть аналитическими в области $|\xi| < \delta$. В-третьих, определяемые из соответствующих соотношений (21-А) либо (21-Б) функции $\chi_j(\xi)$ ($j = \overline{1, 3}$) также должны быть аналитическими в области $|\xi| < \delta$. Второе и третье условия будут выполнены, если потребовать выполнение единого для обоих вариантов модели неоднородности достаточного аналитического условия несильной радиальной неоднородности материала волновода в виде

$$1 < \delta \leq \min \left(\left| \xi_*^{(1)} \right|, \left| \xi_*^{(2)} \right| \right), \quad (25)$$

где $\xi_*^{(1)}$ и $\xi_*^{(2)}$ – соответственно наименьшие по модулю нули функций $\hat{\lambda}(\xi) + 2\hat{\mu}(\xi)$ и $\hat{\mu}(\xi)$.

Численный подход реализуется любым расчетным методом, обеспечивающим аппроксимацию полиномами на отрезке $r \in [0, 1]$ искомых функций $\varphi(\xi)$ и $\psi_s(\xi)$ ($s = \overline{1, 2}$) на основании полученных из соответствующих выбранному варианту модели (18-А) либо (18-Б) приближенных соотношений:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &\approx \ln \left(\tilde{\lambda}(r) + 2\tilde{\mu}(r) \right), & \psi_1(r) &\approx \frac{\tilde{\mu}(r)}{\tilde{\lambda}(r) + 2\tilde{\mu}(r)}, \\ \psi_2(r) &\approx \frac{\tilde{\rho}(r)}{\tilde{\lambda}(r) + 2\tilde{\mu}(r)} & (r \in [0, 1]); \end{aligned} \quad (26-А)$$

$$\begin{aligned} \varphi(r) &\approx \ln(\tilde{\mu}(r)), \\ \psi_1(r) &\approx \tilde{\lambda}(r)/\tilde{\mu}(r), & \psi_2(r) &\approx \tilde{\rho}(r)/\tilde{\mu}(r) \quad (r \in [0, 1]). \end{aligned} \quad (26-Б)$$

Здесь

$$\varphi(\xi) = \sum_{n=0}^N a_n^{(0)} \xi^n, \quad \psi_s(\xi) = \sum_{n=0}^N a_n^{(s)} \xi^n \quad (s = \overline{1, 2}). \quad (27)$$

Учитывая полиномиальный вид представлений (27), требование аналитичности в области $|\xi| < \delta$ определяемых соотношениями (21-А) либо (21-Б) функций $\chi_j(\xi)$ ($j = \overline{1, 3}$) обеспечивается достаточным численным условием несильной радиальной неоднородности материала волновода, имеющим вид

$$1 < \delta \leq |s_*|, \quad (28)$$

где s_* – наименьший по модулю нуль определяемой из соотношений (26-А), (27) функции $\psi_1(\xi)$ для варианта модели неоднородности (18-А), либо определяемой из соотношений (26-Б), (27) функции $\psi_1(\xi) + 2$ для варианта модели неоднородности (18-Б). Необходимо отметить, что достаточное условие (28), во-первых, зависит от порядка аппроксимирующих полиномов (27); во-вторых, накладывает различающиеся для рассматриваемых альтернативных вариантов модели

неоднородности (18-А) и (18-Б) ограничения на заданные функциональные законы (3); в-третьих, полиномиальные представления (27) являются более оптимальными с точки зрения временных затрат при проведении численных экспериментов, чем определяемые при аналитическом подходе соотношениями (24-А) либо (24-Б) разложения. Поэтому численный подход может считаться более гибким с точки зрения реализации поставленной целевой задачи, а значит – предпочтительным. Этот вывод не противоречит тому факту, что найденные на основании соответствующих представлений (18-А) либо (18-Б) из соотношений (26-А), (27) либо (26-Б), (27) функции $\varphi(\xi)$ и $\psi_s(\xi)$ ($s = \overline{1, 2}$) фактически определяют отличающиеся от заданных соотношениями (3) функциональные законы $\tilde{\lambda}^{(*)}(r)$, $\tilde{\mu}^{(*)}(r)$ и $\tilde{\rho}^{(*)}(r)$, для которых, собственно, и будет реализовываться целевая задача. Данное утверждение обосновывается тем фактом, что физико-механические характеристики реальных материалов определяются экспериментально с весьма ограниченной точностью ε . Следовательно степень N полиномов (27), обеспечивающая соответствующую точность аппроксимации может выбираться небольшой.

$$\begin{aligned} \max_{r \in [0,1]} \left| \tilde{\lambda}(r) - \tilde{\lambda}^{(*)}(r) \right| < \varepsilon, \quad \max_{r \in [0,1]} \left| \tilde{\mu}(r) - \tilde{\mu}^{(*)}(r) \right| < \varepsilon, \\ \max_{r \in [0,1]} \left| \tilde{\rho}(r) - \tilde{\rho}^{(*)}(r) \right| < \varepsilon, \end{aligned} \quad (29)$$

3. Базисное решение. Заданные в области $|\xi| < \delta$ аналитические функции $\varphi(\xi)$, $\psi_s(\xi)$ ($s = \overline{1, 2}$), $\chi_s(\xi)$ ($s = \overline{1, 3}$), $\phi(\xi)$ и подлежащие определению элементы $\hat{u}_s^{(\tau, \text{particular})}(\xi)$ ($s = r, \theta, z$) искомых частных решений (23) представляются абсолютно и равномерно сходящимися в любом круге $|\xi| \leq s$ ($0 < s < \delta$) разложениями вида

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(0)} \xi^n, \quad \psi_s(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(s)} \xi^n \quad (s = \overline{1, 2}), \\ \chi_s(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(s)} \xi^n \quad (s = \overline{1, 3}), \quad \phi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \xi^n, \\ \hat{u}_s^{(\tau, \text{particular})}(\xi) &= \xi^{\eta + \kappa_s} \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(s)} \xi^n \quad (s = r, \theta, z). \end{aligned} \quad (30)$$

В представлениях (30) $\kappa_r = \kappa_\theta = 0$, $\kappa_z = 1$; $\left\{ a_n^{(s)} \right\}_{n=0}^{\infty}$ ($s = \overline{0, 2}$) – определяемые из соотношений (24-А) либо (24-Б) при аналитическом подходе, или из соотношений (26-А), (27) либо (26-Б), (27) при численном подходе ($a_n^{(s)} = 0$ $s = \overline{0, 2}$; $n = \overline{N+1, \infty}$) наборы коэффициентов; $\left\{ b_n^{(s)} \right\}_{n=0}^{\infty}$ ($s = \overline{1, 3}$) и $\left\{ g_n \right\}_{n=0}^{\infty}$ – определяемые из соотношений (21-А) либо (21-Б) наборы коэффициентов вида

$$\begin{aligned}
 b_n^{(1)} &= \left(a_n^{(2)} - \sum_{m=0}^{n-1} b_m^{(1)} a_{n-m}^{(1)} \right) / a_0^{(1)}, \\
 b_n^{(2)} &= \left((n+1) a_{n+1}^{(1)} - \sum_{m=0}^{n-1} b_m^{(2)} a_{n-m}^{(1)} \right) / a_0^{(1)}, \\
 b_n^{(3)} &= \left(\delta_{0,n} - \sum_{m=0}^{n-1} b_m^{(3)} a_{n-m}^{(1)} \right) / a_0^{(1)},
 \end{aligned} \tag{31-А}$$

$$g_n = \sum_{m=0}^n (n-m+1) a_{n-m+1}^{(0)} a_m^{(1)} \quad (n = \overline{0, \infty});$$

$$\begin{aligned}
 b_n^{(1)} &= \left(a_n^{(2)} - \sum_{m=0}^{n-1} b_m^{(1)} a_{n-m}^{(1)} \right) / (a_0^{(1)} + 2), \\
 b_n^{(2)} &= \left((n+1) a_{n+1}^{(1)} - \sum_{m=0}^{n-1} b_m^{(2)} a_{n-m}^{(1)} \right) / (a_0^{(1)} + 2), \\
 b_n^{(3)} &= \left(\delta_{0,n} - \sum_{m=0}^{n-1} b_m^{(3)} a_{n-m}^{(1)} \right) / (a_0^{(1)} + 2),
 \end{aligned} \tag{31-Б}$$

$$g_n = \sum_{m=0}^n (n-m+1) a_{n-m+1}^{(0)} b_m^{(3)} \quad (n = \overline{0, \infty});$$

$\eta \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $\{d_n^{(s)}\}_{n=0}^{\infty}$ ($s = r, \theta, z$; $|d_0^{(r)}| + |d_0^{(\theta)}| + |d_0^{(z)}| \neq 0$) – соответственно подлежащие определению параметр и наборы коэффициентов. Здесь

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & m = n; \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \tag{32}$$

После подстановки разложений (30) в полученные соответственно выбранному варианту модели неоднородности (18-А) либо (18-Б) соотношения (20-А) либо (20-Б) из уравнения (22) определяется однородная система линейных уравнений третьего порядка, решениями которой являются три линейно независимые вектора $\mathbf{B}_0^{(q)} = [d_0^{(r,q)}, d_0^{(\theta,q)}, d_0^{(z,q)}]^T$ ($q = \overline{1, 3}$) с элементами

$$d_0^{(r,1)} = 1, \quad d_0^{(\theta,1)} = -1, \quad d_0^{(z,1)} = 0 \quad (\eta^{(1)} = \tau - 1), \tag{33}$$

$$d_0^{(r,2)} = 0, \quad d_0^{(\theta,2)} = 0, \quad d_0^{(z,2)} = 1 \quad (\eta^{(2)} = \tau - 1), \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
 d_0^{(r,3)} &= (\tau + 2) a_0^{(1)} - \tau, \quad d_0^{(\theta,3)} = \tau (1 - a_0^{(1)}) + 2, \\
 d_0^{(z,3)} &= k (a_0^{(1)} - 1) \quad (\eta^{(3)} = \tau + 1),
 \end{aligned} \tag{35}$$

а также зависящая от задаваемых соотношениями (33)–(35) значений параметров $\eta^{(q)}$ ($q = \overline{1, 3}$) последовательность систем неоднородных линейных уравнений третьего порядка вида

$$\mathbf{Q}_n^{(q)} \mathbf{B}_n^{(q)} = \mathbf{F}_n^{(q)} \quad (q = \overline{1, 3}; \quad n = \overline{1, \infty}). \quad (36)$$

Входящие в уравнение (36) матрицы $\mathbf{Q}_n^{(q)}$ размерности 3×3 и вектор-столбцы $\mathbf{F}_n^{(q)}$ длиной 3, соответственно выбранному варианту модели неоднородности (18-А) либо (18-Б), имеют отличные от нуля элементы

$$\begin{aligned} [\mathbf{Q}_n^{(q)}]_{1,1} &= (\eta^{(q)} + n)^2 - \tau^2 a_0^{(1)} - 1, \\ [\mathbf{Q}_n^{(q)}]_{1,2} &= -\tau \left((\eta^{(q)} + n + 1) (a_0^{(1)} - 1) + 2 \right), \\ [\mathbf{Q}_n^{(q)}]_{2,1} &= -\tau \left((\eta^{(q)} + n + 1) (b_0^{(3)} - 1) + 2 \right), \\ [\mathbf{Q}_n^{(q)}]_{2,2} &= (\eta^{(q)} + n)^2 - \tau^2 b_0^{(3)} - 1, \quad [\mathbf{Q}_n^{(q)}]_{3,3} = (\eta^{(q)} + n + 1)^2 - \tau^2, \\ [\mathbf{Q}_n^{(q)}]_{3,1} &= k (\eta^{(q)} + n + 1) (b_0^{(3)} - 1), \quad [\mathbf{Q}_n^{(q)}]_{3,2} = k\tau (b_0^{(3)} - 1), \\ [\mathbf{F}_n^{(q)}]_1 &= k (n + \eta^{(q)} - 1) d_{n-2}^{(z,q)} + \sum_{j=0}^{n-1} \left(((j-n) (j + \eta^{(q)} + 1) a_{n-j}^{(0)} - \right. \\ &\quad \left. - (2(j-n) - \tau^2) a_{n-j}^{(1)} - \Omega^2 a_{n-2-j}^{(2)} + k^2 a_{n-2-j}^{(1)} + 2g_{n-1-j} \right) d_j^{(r,q)} + \\ &\quad \left. + \tau \left((j-n) a_{n-j}^{(0)} + (2n + \eta^{(q)} + 1 - j) a_{n-j}^{(1)} + 2g_{n-1-j} \right) d_j^{(\theta,q)} - \right. \\ &\quad \left. - k \left((j+2-n) a_{n-2-j}^{(0)} + (2n + \eta^{(q)} - 3 - j) a_{n-2-j}^{(1)} + 2g_{n-3-j} \right) d_j^{(z,q)} \right), \quad (37-A) \\ [\mathbf{F}_n^{(q)}]_2 &= k \left(k d_{n-2}^{(\theta,q)} + \tau d_{n-2}^{(z,q)} \right) + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\tau \left((n-j) a_{n-j}^{(0)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + b_{n-1-j}^{(2)} + (j + \eta^{(q)} + 1) b_{n-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} + \right. \\ &\quad \left. + \left((j-n) (j + \eta^{(q)} - 1) a_{n-j}^{(0)} - \Omega^2 b_{n-2-j}^{(1)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (j + \eta^{(q)} - 1) b_{n-1-j}^{(2)} + \tau^2 b_{n-j}^{(3)} \right) d_j^{(\theta,q)} - k\tau b_{n-2-j}^{(3)} d_j^{(z,q)} \right), \\ [\mathbf{F}_n^{(q)}]_3 &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(k \left((j-n) a_{n-j}^{(0)} - b_{n-1-j}^{(2)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (j + \eta^{(q)} + 1) b_{n-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} - k\tau b_{n-j}^{(3)} d_j^{(\theta,q)} + \right. \\ &\quad \left. + \left((j + \eta^{(q)} + 1) \left((j-n) a_{n-j}^{(0)} - b_{n-1-j}^{(2)} - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \Omega^2 b_{n-2-j}^{(1)} + k^2 b_{n-2-j}^{(3)} \right) d_j^{(z,q)} \right); \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{1,1} &= \left(\eta^{(q)} + n \right)^2 - \tau^2 b_0^{(3)} - 1, & \left[\mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{3,3} &= \left(\eta^{(q)} + n + 1 \right)^2 - \tau^2, \\
\left[\mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{1,2} &= -\tau \left(\left(\eta^{(q)} + n + 1 \right) \left(b_0^{(3)} - 1 \right) + 2 \right), \\
\left[\mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{2,1} &= -\tau \left(\left(\eta^{(q)} + n + 1 \right) \left(a_0^{(1)} + 1 \right) + 2 \right), \\
\left[\mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{2,2} &= \left(\eta^{(q)} + n \right)^2 - \tau^2 \left(a_0^{(1)} + 2 \right) - 1, \\
\left[\mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{3,1} &= k \left(\eta^{(q)} + n + 1 \right) \left(a_0^{(1)} + 1 \right), & \left[\mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{3,2} &= k\tau \left(a_0^{(1)} + 1 \right), \\
\left[\mathbf{F}_n^{(q)} \right]_1 &= k \left(n + \eta^{(q)} - 1 \right) d_{n-2}^{(z,q)} + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\left((j-n) \left(j + \eta^{(q)} + 1 \right) a_{n-j}^{(0)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2g_{n-1-j} - \Omega^2 b_{n-2-j}^{(1)} - \left(j + \eta^{(q)} + 1 \right) b_{n-1-j}^{(2)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + k^2 b_{n-2-j}^{(3)} + \tau^2 b_{n-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} + \tau \left((j-n) a_{n-j}^{(0)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2g_{n-1-j} - b_{n-1-j}^{(2)} + \left(j + \eta^{(q)} + 1 \right) b_{n-j}^{(3)} \right) d_j^{(\theta,q)} - \right. \\
&\quad \left. - k \left((j+2-n) a_{n-2-j}^{(0)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2g_{n-3-j} - b_{n-3-j}^{(2)} + \left(j + \eta^{(q)} + 1 \right) b_{n-2-j}^{(3)} \right) d_j^{(z,q)} \right), \\
\left[\mathbf{F}_n^{(q)} \right]_2 &= k \left(k d_{n-2}^{(\theta,q)} - \tau d_{n-2}^{(z,q)} \right) + \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\tau \left((n-j) a_{n-j}^{(0)} + \left(j + \eta^{(q)} + 1 \right) a_{n-j}^{(1)} \right) d_j^{(r,q)} + \right. \\
&\quad \left. + \left((j-n) \left(j + \eta^{(q)} - 1 \right) a_{n-j}^{(0)} - \Omega^2 a_{n-2-j}^{(2)} + \tau^2 a_{n-j}^{(1)} \right) d_j^{(\theta,q)} - \right. \\
&\quad \left. - k\tau a_{n-2-j}^{(1)} d_j^{(z,q)} \right), \\
\left[\mathbf{F}_n^{(q)} \right]_3 &= 2k^2 d_{n-2}^{(z,q)} + \sum_{j=0}^{n-1} \left(k \left((j-n) a_{n-j}^{(0)} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(j + \eta^{(q)} + 1 \right) a_{n-j}^{(1)} \right) d_j^{(r,q)} - k\tau a_{n-j}^{(1)} d_j^{(\theta,q)} + \right. \\
&\quad \left. + \left((j-n) \left(j + \eta^{(q)} + 1 \right) a_{n-j}^{(0)} - \Omega^2 a_{n-2-j}^{(2)} + k^2 a_{n-2-j}^{(1)} \right) d_j^{(z,q)} \right).
\end{aligned} \tag{37-Б}$$

Уравнения (36) определяют матричные рекуррентные соотношения для нахождения векторов $\mathbf{B}_n^{(q)} = \left[d_n^{(r,q)}, d_n^{(\theta,q)}, d_n^{(z,q)} \right]^T$ ($q = \overline{1, 3}$; $n = \overline{1, \infty}$) с коэффициентами в разложениях аналитических в области $|\xi| < \delta$ элементов

$$\hat{u}_s^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi) = \xi^{\eta^{(q)} + \kappa_s} \sum_{p=0}^{\infty} d_p^{(s,q)} \xi^p \quad (s = r, \theta, z; \quad q = \overline{1, 3}) \tag{38}$$

искомых трех частных решений (23) уравнения (22). Следует отметить, что для соотношений (37-А) и (37-Б) получается единое представление

$$\begin{aligned} \det \left(\mathbf{Q}_n^{(q)} \right) &= n^2 (n - 2) (n + 2\tau)^2 (n + 2\tau - 2) \quad (q = \overline{1, 2}), \\ \det \left(\mathbf{Q}_n^{(q)} \right) &= n(n + 2)^2 (n + 2\tau) (n + 2\tau + 2)^2 \quad (q = 3). \end{aligned} \quad (39)$$

С учетом того, что $\det \left(\mathbf{Q}_2^{(q)} \right) = 0$ ($q = \overline{1, 2}$), соответственно соотношениям (37-А) и (37-Б) определяются условия существования двух линейно независимых решений уравнения (36) при $n = 2$ для $q = \overline{1, 2}$ в таком виде:

$$\tau = 1 \quad \text{либо} \quad \tau \geq 2 \quad \text{и} \quad a_0^{(1)} a_1^{(0)} + a_1^{(1)} = 0; \quad (40-А)$$

$$\tau = 1 \quad \text{либо} \quad \tau \geq 2 \quad \text{и} \quad a_1^{(0)} = 0. \quad (40-Б)$$

Таким образом, при $\tau \geq 2$ для построения базисного набора частных решений уравнения (22) необходимо привлекать исключительно численный подход к определению аналитических в области $|\xi| < \delta$ функций $\varphi(\xi)$ и $\psi_s(\xi)$ ($s = \overline{1, 2}$), и соответственно выбранному варианту модели неоднородности (18-А) либо (18-Б) полагать в полиномиальных представлениях (27)

$$a_1^{(0)} = a_1^{(1)} = 0; \quad (41-А)$$

$$a_1^{(0)} = 0. \quad (41-Б)$$

Окончательно базисное решение уравнения (22) в матричном виде задается так:

$$\hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{basic})}(\xi) = \left[\hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{particular}, 1)}(\xi), \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{particular}, 2)}(\xi), \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{particular}, 3)}(\xi) \right]. \quad (42)$$

Тогда общее решение уравнения (5) допустимо определить через базисное решение (42) в виде

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{general})}(r) = \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{basic})}(r) \mathbf{A}, \quad (43)$$

где \mathbf{A} – произвольный вектор-столбец размерности 3. С учетом представления (13), соответственно выбранному варианту модели неоднородности (18-А) либо (18-Б), определяется векторная функция $\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(\tau, \text{general})}(r)$

$$\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(\tau, \text{general})}(r) = \left(\hat{\mathbf{G}}(\xi) \hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{basic})}(\xi) \right) \Big|_{\xi=r} \mathbf{A}, \quad (44)$$

где $\hat{\mathbf{G}}(\xi)$ – матрица функция размерности 6×6 с отличными от нуля элементами

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{n,m} &= (1 - 2 \psi_1(\xi)) e^{\varphi(\xi)} \quad (n, m = 1, 2; 2, 1; 1, 3; 3, 1; 2, 3; 3, 2), \\ \left[\hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{j,j} &= e^{\varphi(\xi)} \quad (j = \overline{1, 3}), \quad \left[\hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{j,j} = \psi_1(\xi) e^{\varphi(\xi)} \quad (j = \overline{4, 6}); \end{aligned} \quad (45-А)$$

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{n,m} &= \psi_1(\xi) e^{\varphi(\xi)} \quad (n, m = 1, 2; 2, 1; 1, 3; 3, 1; 2, 3; 3, 2), \\ \left[\hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{j,j} &= (2 + \psi_1(\xi)) e^{\varphi(\xi)} \quad (j = \overline{1, 3}), \quad \left[\hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{j,j} = e^{\varphi(\xi)} \quad (j = \overline{4, 6}); \end{aligned} \quad (45-B)$$

$\hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi)$ – аналитическое продолжение дифференциального оператора $\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r)$ на плоскость комплексной переменной ξ . Отличные от нуля элементы $\hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi)$ равны

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{1,1} &= d_\xi, \quad \left[\hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{2,1} = \xi^{-1}, \quad \left[\hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{2,2} = \tau \xi^{-1}, \\ \left[\hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{3,3} &= -k, \quad \left[\hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{4,2} = k, \quad \left[\hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{4,3} = -\tau \xi^{-1}, \\ \left[\hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{5,1} &= k, \quad \left[\hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{5,3} = d_\xi, \quad \left[\hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{6,1} = -\tau \xi^{-1}, \\ \left[\hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{6,2} &= d_\xi - \xi^{-1}. \end{aligned} \quad (46)$$

4. Дисперсионные соотношения. Граничные условия (16) и (17), с учетом представлений (23), (38), (42)–(44), определяют соответствующего вида дисперсионные уравнения относительно безразмерного продольного волнового числа k и приведенной частоты Ω

$$\Phi_\Sigma^{(\tau)}(k, \Omega) = \det \left(\left(\hat{\mathbf{S}}^{(\tau)}(\xi) \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, basic)}(\xi) \right) \Big|_{\xi=1} \right) = 0; \quad (47)$$

$$\Phi_U^{(\tau)}(k, \Omega) = \det \left(\hat{\mathbf{U}}^{(\tau, basic)}(1) \right) = 0, \quad (48)$$

а также соответствующего вида однородные уравнения для нахождения с точностью до скалярного множителя вектора \mathbf{A}

$$\left(\hat{\mathbf{S}}^{(\tau)}(\xi) \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, basic)}(\xi) \right) \Big|_{\xi=1} \mathbf{A} = \mathbf{O}; \quad (49)$$

$$\hat{\mathbf{U}}^{(\tau, basic)}(1) \mathbf{A} = \mathbf{O}. \quad (50)$$

В соотношениях (47) и (49) используется матричный дифференциальный оператор

$$\hat{\mathbf{S}}^{(\tau)}(\xi) = \left[\hat{\mathbf{G}}(\xi) \hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{(1,5,6),(1,2,3)}. \quad (51)$$

5. Численный эксперимент. Анализ дисперсионных спектров, фазовых и групповых скоростей бегущих изгибных волн проводился при значении окружного волнового числа $\tau = 1$ для свободного однородного протяженного цилиндра из алюминия (Al)

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^{(Al)}, \quad \tilde{\mu} = \tilde{\mu}^{(Al)}, \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(Al)}, \quad (52)$$

а также для свободных неоднородных цилиндров, функциональные законы радиальной неоднородности физико-механических характеристик материала которых были альтернативно заданы так:

$$\tilde{\lambda}(r) = \tilde{\lambda}^{(Al)} (1 + 0,3 r^3), \quad \tilde{\mu} = \tilde{\mu}^{(Al)}, \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(Al)}; \quad (53-A)$$

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^{(Al)}, \quad \tilde{\mu}(r) = \tilde{\mu}^{(Al)} (1 + 0,3 r^3), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(Al)}; \quad (53-B)$$

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^{(Al)}, \quad \tilde{\mu} = \tilde{\mu}^{(Al)}, \quad \tilde{\rho}(r) = \tilde{\rho}^{(Al)} (1 + 0,3 r^3). \quad (53-B)$$

Здесь

$$\tilde{\lambda}^{(Al)} = 5,91; \quad \tilde{\mu}^{(Al)} = 2,61; \quad \tilde{\rho}^{(Al)} = 2,7; \quad C_* = 10^{10} \text{Н/М}^2; \quad \rho_* = 10^3 \text{кг/М}^3. \quad (54)$$

Выбор определяемых соотношениями (53-A)–(53-B) законов неоднородности был обусловлен задачей исследования влияния фактора неоднородности по каждой физико-механической характеристике изотропного материала отдельно на топологическую картину спектра, а также на графики фазовых и групповых скоростей бегущих изгибных волн. Далее волновод, задаваемый физико-механическими характеристиками (52), будет называться однородным волноводом, а характеристиками (53-A)–(53-B) – соответственно неоднородным волноводом А, Б или В.

Для неоднородных волноводов А, Б, В на основании условия (25) определены границы допустимых значений параметра δ , соответственно имеющие вид

$$1 < \delta \leq 1,844; \quad 1 < \delta \leq 1,493; \quad 1 < \delta < \infty, \quad (55)$$

а для условия (28) при $N = 4$ в случае вариантов модели неоднородности (18-A) либо (18-B) соответственно

$$1 < \delta \leq 1,455; \quad 1 < \delta \leq 1,409; \quad 1 < \delta < \infty; \quad (56-A)$$

$$1 < \delta \leq 1,844; \quad 1 < \delta \leq 1,372; \quad 1 < \delta < \infty. \quad (56-B)$$

Максимальная погрешность аппроксимации в соотношениях (29) при этом не превышала $\varepsilon = 10^{-3}$. Для проведения вычислительного эксперимента был выбран вариант модели неоднородности (18-A) и численный подход (26-A), (27) при $N = 4$ для определения функций $\varphi(\xi)$ и $\psi_s(\xi)$ ($s = \overline{1,2}$).

В области изменения параметров $k \in [0, 35]$ и $\Omega \in [0, 30]$ для свободного однородного волновода с характеристиками (52) и свободных неоднородных волноводов с характеристиками (53-A)–(53-B) были построены фрагменты спектров бегущих изгибных ($\tau = 1$) волн. Указанные спектры представлены соответственно на рисунках 1–4. Анализ этих рисунков показывает существенную зависимость

топологии спектра от факторов неоднородности исключительно по модулю Ламе $\tilde{\mu}(r)$ либо по параметру плотности $\tilde{\rho}(r)$ (рис. 3, 4), в то время, как такой же функциональный закон неоднородности исключительно по модулю Ламе $\tilde{\lambda}(r)$ визуалью не сказывается на топологической картине соответствующего спектра (рис. 2) по сравнению со спектром однородного волновода (рис. 1).

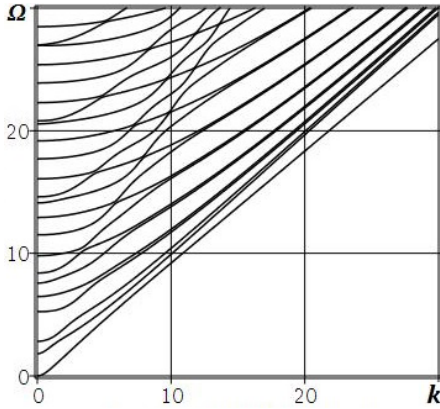


Рис. 1. Спектр однородного волновода

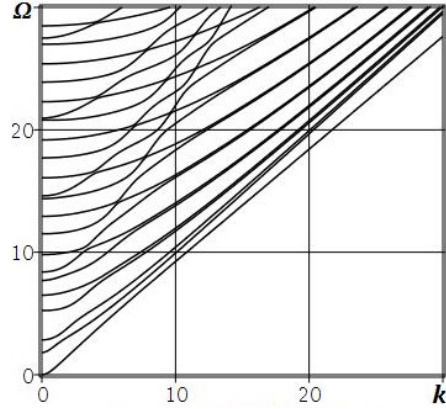


Рис. 2. Спектр неоднородного волновода А

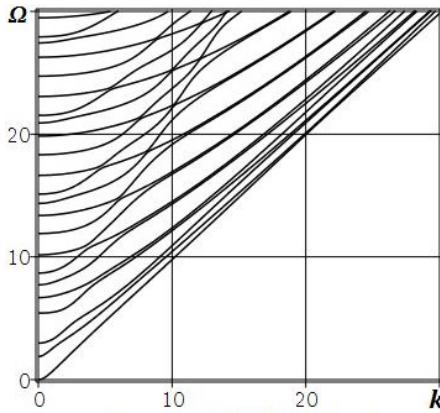


Рис. 3. Спектр неоднородного волновода Б

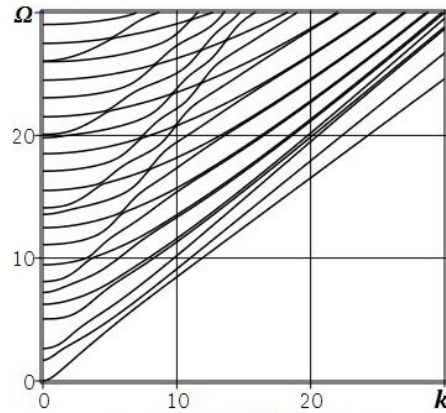


Рис. 4. Спектр неоднородного волновода В

Следует также указать на характерную локализацию асимптотического поведения в коротковолновой высокочастотной области первой моды по отношению к старшим модам спектра для однородного волновода (рис. 1) и для волновода с неоднородностью исключительно по упругому модулю $\tilde{\lambda}(r)$ (рис. 2). При неоднородности исключительно по упругому модулю $\tilde{\mu}(r)$ (рис. 3) указанная тенденция не проявляется. В спектре волновода с неоднородностью исключительно по параметру плотности $\tilde{\rho}(r)$ (рис. 4) наблюдается ярко выраженная локализация асимптотического поведения в коротковолновой высокочастотной области как для первой моды, так и для второй.

Количественные различия построенных спектров исследованы с помощью функции сравнения в сопоставляемых спектрах парных по номеру мод

$$\Delta\Omega(k) = \left(\Omega^{(\text{неоднородный})}(k) - \Omega^{(\text{однородный})}(k) \right). \quad (57)$$

На рисунках 5–10 представлены результаты сопоставительного анализа поведения низших десяти мод фрагментов спектров однородного и неоднородного волновода А – В. Номера мод сопоставляемых спектров и тип соответствующей линии указаны в нижней части рисунков.

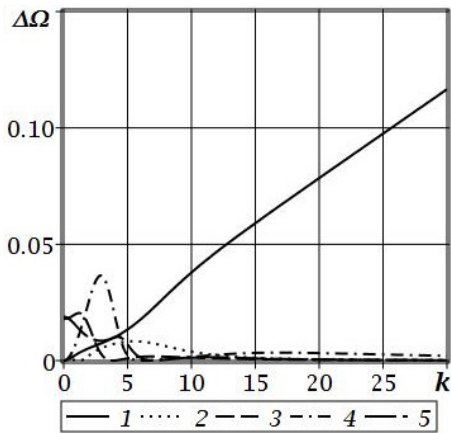


Рис. 5. Сопоставление мод 1–5 спектров однородного и неоднородного волновода А

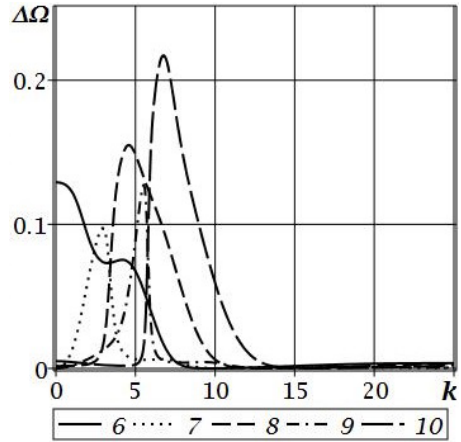


Рис. 6. Сопоставление мод 6–10 спектров однородного и неоднородного волновода А

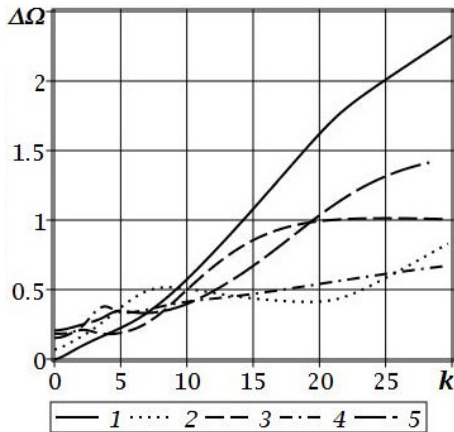


Рис. 7. Сопоставление мод 1–5 спектров однородного и неоднородного волновода Б

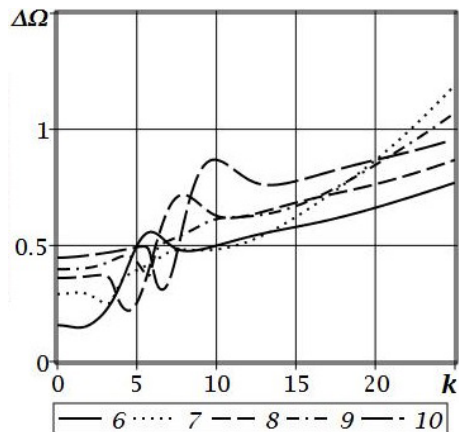


Рис. 8. Сопоставление мод 6–10 спектров однородного и неоднородного волновода Б

При анализе представленных рисунков отмечают следующие закономерности. Количественные значения функции $\Delta\Omega(k)$ при сопоставлении спектров од-

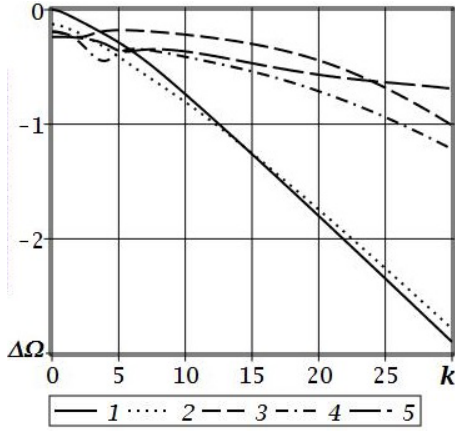


Рис. 9. Сопоставление мод 1–5 спектров однородного и неоднородного волновода В

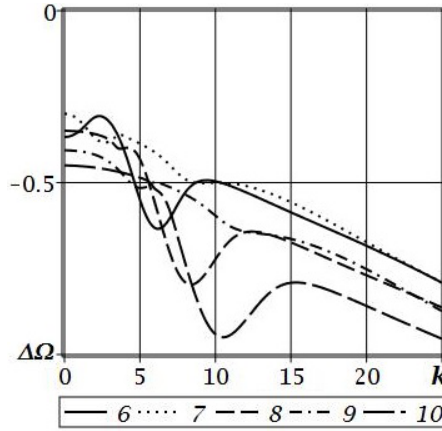


Рис. 10. Сопоставление мод 6–10 спектров однородного и неоднородного волновода В

нородного и неоднородного исключительно по модулю $\tilde{\lambda}(r)$ волноводов (рис. 5, 6) по абсолютной величине оказались на порядок меньшими, чем значения указанной функции при сопоставлении спектров однородного и неоднородных исключительно по модулю $\tilde{\mu}(r)$ (рис. 7, 8) и параметру плотности $\tilde{\rho}(r)$ (рис. 9, 10) волноводов. При этом все десять низших мод спектров неоднородных исключительно по модулям $\tilde{\lambda}(r)$ либо $\tilde{\mu}(r)$ волноводов смещены по отношению к соответствующим модам однородного волновода в область более высоких частот (рис. 5–8), в то время как для неоднородного исключительно по параметру плотности $\tilde{\rho}(r)$ волновода тенденция противоположная – все десять низших мод его спектра смещены по отношению к соответствующим модам однородного волновода в область более низких частот (рис. 9, 10). Для всех неоднородных волноводов А – В характерными являются локальные всплески функции $\Delta\Omega(k)$ в окрестности значений волнового параметра k , соответствующих зонам сближения смежных мод соответствующих спектров. Более контрастно указанные эффекты проявляются для старших мод (рис. 6, 8, 10).

Для представленных на рисунках 1–4 фрагментов спектров построены графики фазовых скоростей (рис. 11–14), и для низших пяти мод – графики групповых скоростей (рис. 15–18). На графиках c_p и c_g – соответственно пронормированные величиной $c_* = \sqrt{C_*/\rho_*}$ приведенные фазовая и групповая скорости.

Представленные графики фазовых и групповых скоростей иллюстрируют вышеотмеченную локализацию асимптотического поведения в коротковолновой высокочастотной области первой моды по отношению к старшим модам спектра для однородного волновода (рис. 11, 15) и для волновода с неоднородностью исключительно по упругому модулю $\tilde{\lambda}(r)$ (рис. 12, 16), а также локализацию асимптотического поведения в коротковолновой высокочастотной области первой и второй мод при наличии неоднородности исключительно по параметру плотности $\tilde{\rho}(r)$ (рис. 14, 18).

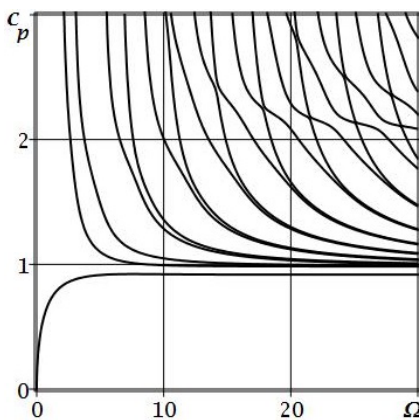


Рис. 11. Фазовые скорости волн в однородном волноводе

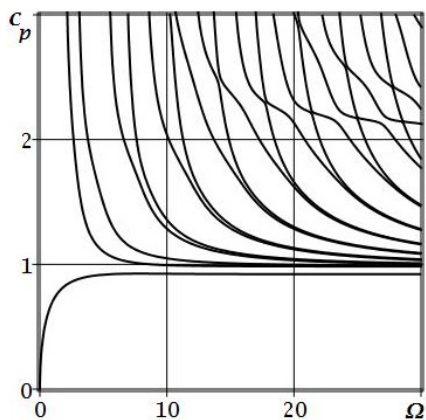


Рис. 12. Фазовые скорости волн в неоднородном волноводе А

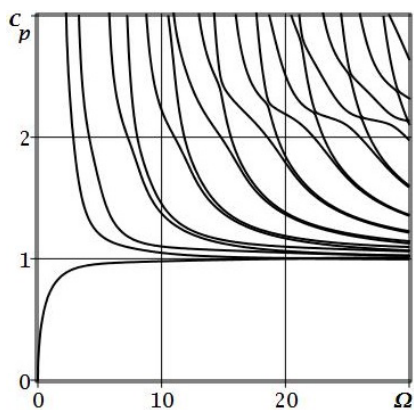


Рис. 13. Фазовые скорости волн в неоднородном волноводе Б

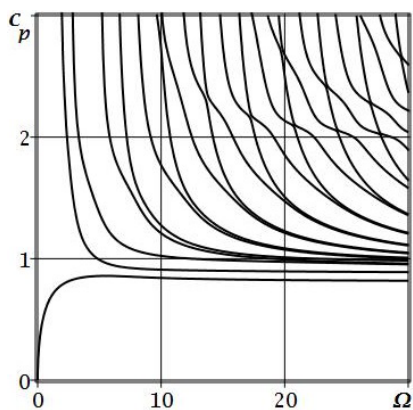


Рис. 14. Фазовые скорости волн в неоднородном волноводе В

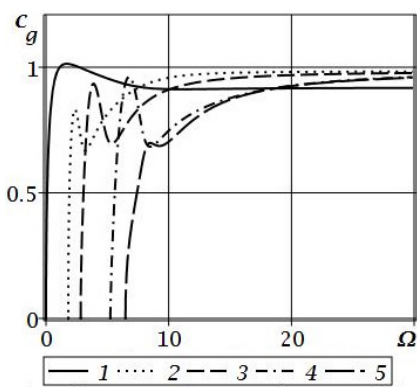


Рис. 15. Групповые скорости волн в однородном волноводе

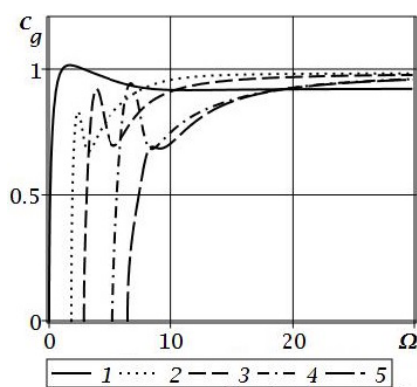


Рис. 16. Групповые скорости волн в неоднородном волноводе А

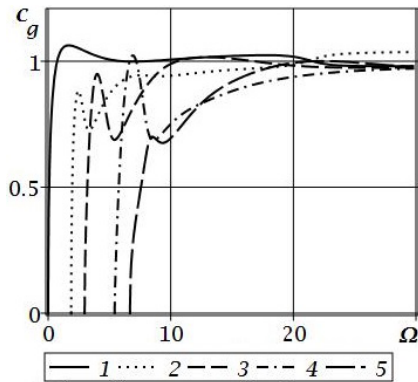


Рис. 17. Групповые скорости волн в неоднородном волноводе Б

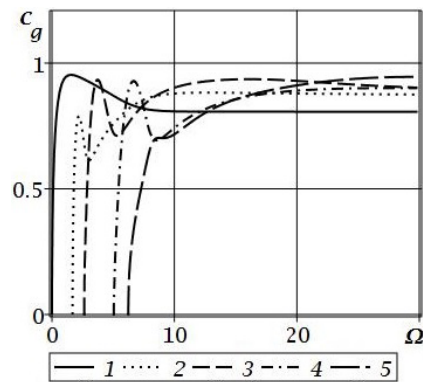


Рис. 18. Групповые скорости волн в неоднородном волноводе В

Выводы. Представленные результаты актуальны в прикладных исследованиях, связанных с расчетами характеристик волноводных компонентов акустоэлектронных устройств, с анализом моделей ультразвуковой диагностики, а также с верификацией результатов исследований волноводных свойств радиально-неоднородных цилиндрических волноводов, полученных прямыми численными методами.

Исследования проводились по теме государственного задания в ФГБОУ ВО «ДонГУ» (код FRRE-2023-0001).

1. Моисеенко И.А. Нормальные волны в функционально-градиентных сплошных цилиндрах / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2018. – № 1-2 (62-63). – С. 16-34.
2. Моисеенко И.А. Спектры нормальных упругих волн кручения в экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – Вып. 9 (55). – С. 139-145.
3. Моисеенко И.А. Распространение нормальных волн вдоль трансверсально изотропных функционально градиентных цилиндров // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2018. – № 1. – С. 37-54.
4. Моисеенко И.А. Спектры несимметричных нормальных упругих волн в ортотропных цилиндрах с функционально-градиентной радиальной неоднородностью / И.А. Моисеенко, В.И. Сторожев. // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 112-124.
5. Моисеенко И.А. Исследование упругих волн крутильного типа с использованием трехфакторной модели функциональной неоднородности трансверсально изотропных сплошных цилиндрических волноводов / И.А. Моисеенко, Н.Ю. Мельничук // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 2 (79). – С. 5-15. – doi:10.24412/0136-4545-2022-2-5-15. – EDN:ATARHS.
6. Моисеенко И.А. Осесимметричные продольно-сдвиговые упругие волны в протяженных сплошных цилиндрах из шестифакторно функционально неоднородного трансверсально-изотропного материала / И.А. Моисеенко, Н.Ю. Мельничук // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 3 (80). – С. 33-59. – doi:10.24412/0136-4545-2022-3-33-59. – EDN:NPEDMW.
7. Моисеенко И.А. Модели функциональной неоднородности изотропного цилиндрического волновода для случая осесимметричных нормальных волн / И.А. Моисеенко, В.А. Мо-

- исеенко, Н.Ю. Мельничук // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 1 (82). – С. 40–61. – doi:10.24412/0136-4545-2023-1-40-61. – EDN:EWIYSR.
8. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харьков: НТИУ. – 1939. – 719 с.
9. *Petrowsky I.G.* Sur l'analyticite des solutions des systems d'equations differentielles / I.G. Petrowsky // Матем. сб. – 1939. – № 5 (47). – Р. 3–70.

I.A. Moiseyenko, A.I. Dzundza, N.I. Melnichuk, V.A. Shaldyrvan

Study of the properties of flexural waves in solid cylinders based on a three-factor model of radial inhomogeneity of an isotropic material.

Two alternative versions of a three-factor model of radial functional inhomogeneity of the physical and mechanical characteristics of an isotropic material of a solid cylindrical waveguide are determined for the case of propagating non-axisymmetric waves. Two approaches to determining the functional components of these models are presented, and sufficient conditions for weak radial inhomogeneity are determined to ensure the existence of a target basic solution to the equations of a three-dimensional linear model of wave deformation. A basic solution has been constructed, the elements of which are expressed through analytical functions. A comparative analysis of the results of a numerical experiment carried out for the cases of homogeneous and functionally inhomogeneous isotropic free waveguides is given, and quantitative and qualitative estimates of the obtained numerical results are given.

Keywords: *FGMs, isotropy, cylindrical waveguide, non-axisymmetric waves, model of radial inhomogeneity, basic solution, dispersion relations.*

Получено 18.04.2023

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2023-2-26-38

EDN:ETYFCH

©2023. А.А. Глухов¹, В.И. Сторожев²

АНАЛИЗ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ РЕЛЕЕВСКИХ ВОЛН В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОМ ОРТОТРОПНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ПРИГРАНИЧНОЙ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ ЗОНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

Представлена численно-аналитическая методика и результаты анализа модели распространения поверхностных волн Рэлея вдоль упруго-эквивалентного направления в плоскости границы функционально-градиентного ортотропного полупространства с приконтурной локализованной зоной неоднородности физико-механических свойств. В качестве варианта описания изменений физико-механических характеристик полубесконечного ортотропного функционально-градиентного тела при отходе от границы вглубь полупространства вдоль одного из его упруго-эквивалентных направлений рассматривается зависимость в виде двойной экспоненциальной функции. Исследование включает разработку алгоритма интегрирования системы динамических уравнений, описывающих распространение волн исследуемого типа; получение дисперсионного уравнения для поверхностных волн релеевского типа в рассматриваемой волноводной структуре; исследование зависимостей фазовых скоростей анализируемых волн, форм распределений амплитудных функций волновых смещений и плотности среднего за период потока мощности от варьируемых параметров закона неоднородности вдоль координаты по глубине полупространства.

Ключевые слова: *поверхностные волны Рэлея, функционально-градиентное ортотропное полупространство, непрерывная поперечная неоднородность, двойной экспоненциальный закон изменения, дисперсионное уравнение, зависимости фазовых скоростей, трансформации форм волновых смещений, трансформации распределений потоков мощности.*

Введение. Волны Рэлея относятся к числу самых распространенных и наиболее изученных типов поверхностных упругих волн [1–8]. Однако, несмотря на

¹Глухов Антон Александрович – аспирант каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: antonglukhov2012@yandex.com.

Glukhov Anton Alexandrovich – Postgraduate, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

²Сторожев Валерий Иванович – доктор техн. наук, проф., зав. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: stvistvi@mail.ru.

Storozhev Valeriy Ivanovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

длительный период разветвленных исследований по различным аспектам проблемы описания свойств локализованных волн данного типа, круг вопросов по данной тематике сохраняет высокую степень актуальности как в теоретическом плане, так и в связи с современными приложениями в ряде научно-технических отраслей [2–4, 7–8], в частности в области сейсмоакустики и неразрушающего ультразвукового контроля. К их числу принадлежат задачи о спектрах и свойствах поверхностных волн релеевского типа в полубесконечных анизотропных телах с разнотипной непрерывной неоднородностью физико-механических свойств, в частности с приповерхностными локализованными зонами возмущений в значениях модулей упругости и параметра плотности среды [9–10]. Так, при исследовании закономерностей распространения сейсмоакустических упругих волн в массивах горных пород показано, что важным элементом достижения адекватности соответствующих математических моделей является учет локализованной непрерывной неоднородности физико-механических свойств горных пород при отходе от граничной поверхности вглубь, а также асимптотическое стремление физико-механических постоянных геоматериала к стабилизированным постоянным значениям в глубине массива при неограниченном увеличении расстояния от граничной поверхности. Данные свойства среды можно с достаточной степенью точности описать, введя для каждой из физико-механических характеристик среды двойной экспоненциальный закон изменения вдоль координаты вглубь массива. Этот подход применительно к моделям распространения сдвиговых поверхностных волн Лява и трехпарциальных локализованных волн у поверхности анизотропного полупространства представлен в работах [11–12].

С учетом представленных соображений, целью данной работы является разработка и апробация численно-аналитической методики анализа модели распространения поверхностных волн Рэлея вдоль упруго-эквивалентного направления в плоскости границы функционально-градиентного ортотропного полупространства с приконтурной локализованной зоной неоднородности физико-механических свойств, описываемой двойной экспоненциальной функцией. Этапами реализуемого исследования являются разработка алгоритма интегрирования системы динамических уравнений, описывающих распространение волн исследуемого типа; получение дисперсионного уравнения для поверхностных волн релеевского типа в рассматриваемой волноводной структуре; исследование зависимостей фазовых скоростей анализируемых волн, форм распределений амплитудных функций волновых смещений и плотности среднего за период потока мощности от варьируемых параметров закона неоднородности вдоль координаты по глубине полупространства.

1. Алгоритм интегрирования системы волновых уравнений модели.

Рассматривается волновод в виде свободного по границе ортотропного функционально-градиентного полупространства с локализованной приконтурной зоной непрерывной физико-механической неоднородности, занимающий в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$ область

$$V = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 \geq \delta > 0\}. \quad (1)$$

Непрерывная неоднородность физико-механических параметров плотности и упругих свойств полупространства описывается функциональными зависимостями вида

$$c_{ij}(x_3) = c_{ij}^{(0)} \cdot \phi(\lambda, \beta, x_3), \quad \rho(x_3) = \rho^{(0)} \cdot \phi(\lambda, \beta, x_3), \quad (2)$$

$$(ij = 11, 12, 13, 33, 22, 23, 44, 55, 66), \quad \phi(\lambda, \beta, x_3) = \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)),$$

где λ, β ($\beta > 0$) – действительные параметры неоднородности. Представления (2) отвечают соображениям о формировании зоны неоднородности в приграничной зоне массива и асимптотических свойствах $c_{ij} \rightarrow c_{ij}^{(0)}$, $\rho \rightarrow \rho^{(0)}$ при $x_3 \rightarrow \infty$.

Система дифференциальных уравнений относительно комплексных амплитудных функций в представлениях функций волновых смещений

$$u_1(x_1, x_3, t) = u_{10}(x_3)e^{-i(\omega t - kx_1)}, \quad u_3(x_1, x_3, t) = u_{30}(x_3)e^{-i(\omega t - kx_1)}, \quad (3)$$

описывающих распространение релеевских волн P-SV типа вдоль упруго-эквивалентного направления Ox_1 в граничной плоскости рассматриваемого ортотропного функционально-градиентного полупространства с локализованной неоднородностью, задаваемой соотношениями (2), имеет вид:

$$\begin{aligned} & c_{44}^{(0)} u''_{10} + \gamma e^{-\beta x_3} c_{44}^{(0)} u'_{10} + (\rho^{(0)} \omega^2 - c_{11}^{(0)} k^2) u_{10} + \\ & + (c_{13}^{(0)} + c_{44}^{(0)}) (ik) u'_{30} + \gamma e^{-\beta x_3} c_{44}^{(0)} (ik) u_{30} = 0, \\ & (c_{44}^{(0)} + c_{13}^{(0)}) (ik) u'_{10} + \gamma e^{-\beta x_3} c_{13}^{(0)} (ik) u_{10} + c_{33}^{(0)} u''_{30} + \\ & + \gamma e^{-\beta x_3} c_{33}^{(0)} u'_{30} + (\rho^{(0)} \omega^2 - c_{44}^{(0)} k^2) u_{30} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

и может быть представлена в матричной форме:

$$(\underline{A}_1^{(0)} \partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(0)}) \underline{F} = -\gamma e^{-\beta x_3} (\underline{A}_2^{(1)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(1)}) \underline{F}, \quad (5)$$

где ω – циклическая частота; k – волновое число; $\underline{A}_i^{(0)}$, $\underline{A}_i^{(1)}$ – матричные коэффициенты

$$\begin{aligned} \underline{A}_1^{(0)} &= \begin{pmatrix} c_{44}^{(0)} & 0 \\ 0 & c_{33}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & ik(c_{13}^{(0)} + c_{44}^{(0)}) \\ ik(c_{13}^{(0)} + c_{44}^{(0)}) & 0 \end{pmatrix}, \\ \underline{A}_3^{(0)} &= \begin{pmatrix} (\rho^{(0)} \omega^2 - c_{11}^{(0)} k^2) & 0 \\ 0 & (\rho^{(0)} \omega^2 - c_{44}^{(0)} k^2) \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} c_{44}^{(0)} & 0 \\ 0 & c_{33}^{(0)} \end{pmatrix}, \\ \underline{A}_3^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & ikc_{44}^{(0)} \\ ikc_{13}^{(0)} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для получения решения системы (5) может быть использована методика интегрирования, рассматриваемая в работах [11–12]. В рамках ее применения для решения (5) получено представление $\underline{F}(x_3)$ в виде линейной комбинации базисных векторных частных решений $\underline{F}_j(x_3)$ с произвольными коэффициентами a_j

$$\begin{aligned}\underline{F}(x_3) &= a_1 \underline{F}_1(x_3) + a_2 \underline{F}_2(x_3), \\ \underline{F}_j(x_3) &= \begin{pmatrix} u_{10j}(x_3) \\ u_{30j}(x_3) \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (7)$$

где

$$\underline{F}_j(x_3) = \underline{F}_{0j}(x_3) + \underline{F}_{1j}(x_3) + \underline{F}_{2j}(x_3) + \dots + \underline{F}_{pj}(x_3) + \dots; \quad (8)$$

$$(\underline{A}_1^{(0)} \partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(0)}) \underline{F}_{0j}(x_3) = 0; \quad (9)$$

$$\begin{aligned}(\underline{A}_1^{(0)} \partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(0)}) \underline{F}_{1j}(x_3) &= -\gamma e^{-\beta x_3} (\underline{A}_2^{(1)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(1)}) \underline{F}_{0j}(x_3), \dots, \\ (\underline{A}_1^{(0)} \partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(0)}) \underline{F}_{pj}(x_3) &= -\gamma e^{-\beta x_3} (\underline{A}_2^{(1)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(1)}) \underline{F}_{p-1,j}(x_3), \dots; \\ \gamma &= \beta \lambda.\end{aligned}\quad (10)$$

При построении базисного частного решения $\underline{F}_j(x_3)$ в качестве $\underline{F}_{0j}(x_3)$ используется частное решение однородного уравнения (9) вида

$$\underline{F}_{0j}(x_3) = \underline{f}_{0j} e^{\delta_j x_3}, \quad (11)$$

в котором δ_j ($j = \overline{1, 2}$) – удовлетворяющие условию $\text{Re } \delta_j > 0$ корни бикубического характеристического уравнения

$$\det \begin{vmatrix} c_{44}^{(0)} \delta^2 + (\rho^{(0)} \omega^2 - c_{11}^{(0)} k^2) & ik(c_{13}^{(0)} + c_{44}^{(0)}) \delta \\ ik(c_{13}^{(0)} + c_{44}^{(0)}) \delta & c_{33}^{(0)} \delta^2 + (\rho^{(0)} \omega^2 - c_{44}^{(0)} k^2) \end{vmatrix} = 0; \quad (12)$$

\underline{f}_{0j} – вектор с компонентами вида

$$\underline{f}_{0j} = \begin{pmatrix} -ik(c_{13}^{(0)} + c_{44}^{(0)}) \delta_j \\ c_{44}^{(0)} \delta_j^2 + (\rho^{(0)} \omega^2 - c_{11}^{(0)} k^2) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Далее, согласно итерационному алгоритму (10), можно получить выражения

$$\underline{F}_{1j}(x_3) = \underline{f}_{1j} e^{(\delta_j - \beta)x_3}, \dots \underline{F}_{nj}(x_3) = \underline{f}_{nj} e^{(\delta_j - n\beta)x_3}, \dots \quad (14)$$

где

$$\underline{f}_{nj} = -\gamma \underline{M}_{1n,j}^{-1} \underline{M}_{2n,j} \underline{f}_{n-1,j}, \quad (15)$$

или

$$\begin{aligned} \underline{f}_{nj} &= (-\gamma)^n \underline{M}_{1n,j}^{-1} \underline{M}_{2n,j} \underline{M}_{1n-1,j}^{-1} \underline{M}_{2n-1,j} \dots \underline{M}_{11,j}^{-1} \underline{M}_{21,j} \underline{f}_{0j}, \\ \underline{M}_{1n,j} &= (\delta_j - n\beta)^2 \underline{A}_1^{(0)} + (\delta_j - n\beta) \underline{A}_2^{(0)} + \underline{A}_3^{(0)}, \\ \underline{M}_{2n,j} &= (\delta_j - (n-1)\beta) \underline{A}_2^{(1)} + \underline{A}_3^{(1)} \end{aligned} \quad (16)$$

Наконец, после введения обозначений

$$\underline{Q}_{nj} = \underline{M}_{1n,j}^{-1} \underline{M}_{2n,j}, \quad (17)$$

представление для $\underline{F}_j(x_3)$ принимает итоговую форму функционального ряда

$$\begin{aligned} \underline{F}_j(x_3) &= f_{0j} e^{\delta_j x_3} - \gamma \underline{Q}_{1j} \underline{f}_{0j} e^{(\delta_j - \beta)x_3} + \gamma^2 \underline{Q}_{2j} \underline{Q}_{1j} \underline{f}_{0j} e^{(\delta_j - 2\beta)x_3} - \dots + \\ &+ (-\gamma)^n \underline{Q}_{nj} \underline{Q}_{n-1,j} \dots \underline{Q}_{1j} f_{01} e^{(\delta_j - n\beta)x_3} + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

2. Получение и анализ дисперсионного соотношения для локализованных волн релеевского типа. Исходя из краевых условий на свободной граничной поверхности полупространства

$$\sigma_{31}(\delta) = 0, \quad \sigma_{33}(\delta) = 0, \quad (19)$$

и с использованием введенных в (7) обозначений для компонентов $u_{10j}(x_3)$, $u_{30j}(x_3)$ векторных базисных решений $\underline{F}_j(x_3)$, соотношения (19) трансформируются в однородную систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} a_1(u'_{101}(\delta) + iku_{301}(\delta)) + a_2(u'_{102}(\delta) + iku_{302}(\delta)) &= 0, \\ a_1(ikc_{13}^{(0)} u_{101}(\delta) + c_{33}^{(0)} u'_{301}(\delta)) + a_2(ikc_{13}^{(0)} u_{101}(\delta) + c_{33}^{(0)} u'_{301}(\delta)) &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Равенство нулю определителя данной однородной системы и представляет собой дисперсионное уравнение для локализованных волн релеевского типа в рассматриваемом функционально-градиентном полупространстве.

Результаты расчета мод исследуемых волн, реализованного с использованием разработанного специализированного программного приложения, при задании модельных величин $c_{11}^{(0)} = 3.0c_*$, $c_{33}^{(0)} = 3.0c_*$, $c_{13}^{(0)} = 1.0c_*$, $c_{44}^{(0)} = 1.0c_*$, $\rho^{(0)} = 1.0\rho_*$, $c_* = 10^{10}$ Па, $\rho_* = 10^3$ кг/м³ для варианта значений параметров неоднородности $\lambda = 1$, $\beta = 1$, представлены на рисунке 1, а количественные данные о различиях в приведенных значениях фазовых скоростей c_R локализованных релеевских волн в неоднородном полупространстве из материала с указанными значениями $c_{ij}^{(0)}$, $\rho^{(0)}$, и с варьируемыми значениями параметров $0 \leq \lambda \leq 2.5$, $0 \leq \beta \leq 2.5$ при $\omega = 5$ и скорости c_{R0} для предельного случая однородного полубесконечного ортотропного тела ($\lambda = 0$, $\beta = 0$), приведены в таблице 1.

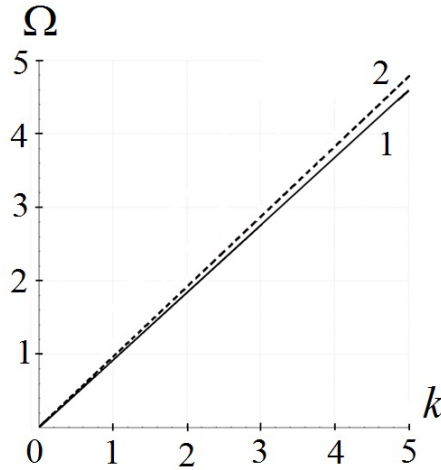


Рис.1. Моды локализованных волн в однородном полупространстве (линия 1) и в неоднородном полупространстве с $\lambda = 1$, $\beta = 1$ (штриховая линия 2)

Таблица 1.

λ	β	c_R	$\frac{c_R - c_{R0}}{c_{R0}} \cdot 100\%$
0	0	0.9194	0
0.1	0.1	0.9216	+0.23%
0.1	1.0	0.9228	+0.36%
0.1	2.5	0.9239	+0.48%
1.0	0.1	0.9310	+1.26%
1.0	0.25	0.9327	+1.44%
1.0	0.5	0.9391	+2.14%
1.0	1.0	0.9519	+3.53%
1.0	2.5	0.9589	+4.29%
2.5	0.1	0.9353	+1.72%
2.5	1.0	0.9670	+5.17%
2.5	2.5	0.9731	+5.84%

По данным расчетов можно заключить, что в рассматриваемых диапазонах изменения параметров неоднородности и частоты дисперсия исследуемых волн в неоднородном полупространстве крайне мала. При синхронном наращивании значений параметров неоднородности, как показывает таблица 1, фазовая скорость локализованной волны увеличивается.

3. Кинематические, силовые и энергетические характеристики локализованных волн релеевского типа в функционально-градиентном полупространстве. Анализ кинематических характеристик $u_{10}(x_3)$, $u_{30}(x_3)$ исследуемых волн реализуется с использованием соотношений (7), (18), (20), из

которых, соответственно, следует

$$a_1 = \eta_1 B, a_2 = -\eta_2 B, \eta_1 = u'_{102}(\delta) + iku_{302}(\delta), \eta_2 = -(u'_{101}(\delta) + iku_{301}(\delta)); \quad (21)$$

$$u_{10}(x_3) = B(\eta_1 u_{101}(x_3) - \eta_2 u_{301}(x_3)), u_{30}(x_3) = B(\eta_1 u_{102}(x_3) - \eta_2 u_{302}(x_3)), \quad (22)$$

а значение постоянной B определяется условиями нормировки соответствующих величин для свободных поверхностных волн на границе полупространства.

Результаты расчетов, представленные в таблицах 2 и 3, содержат данные о значениях нормированных амплитуд смещений $u_{30}(x_3)/u_{30}^*$ и $u_{10}(x_3)/u_{30}^*$ для исследуемых волн при углублении в функционально-градиентное полупространство с варьируемыми значениями параметров неоднородности. Значения поперечной координаты для данных в таблицах 2 и 3 отнесены к соответствующей длине λ_R исследуемых волн релеевского типа, а величины u_{30}^* являются амплитудами смещений $u_{30}(x_3)$ на граничной поверхности полупространства. Для сопоставительного анализа соответствующие зависимости амплитуд смещений

Таблица 2. Нормированные амплитуды смещений $u_{30}(x_3)/u_{30}^*$

λ		0	0.1	0.5	1.0	1.0	2.5	2.5	2.5	2.5
β		0	0.1	0.1	0.1	1.0	0.25	0.5	1.0	2.5
$\frac{x_3}{\lambda_R}$	0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	0.05	1.04	1.04	1.05	1.05	1.06	1.06	1.09	1.09	1.09
	0.10	1.04	1.04	1.05	1.05	1.09	1.08	1.15	1.15	1.14
	0.15	1.01	1.01	1.02	1.02	1.08	1.07	1.18	1.19	1.17
	0.20	0.97	0.97	0.98	0.98	1.06	1.04	1.19	1.21	1.16
	0.25	0.91	0.91	0.92	0.92	1.03	1.01	1.20	1.21	1.14
	0.30	0.85	0.85	0.86	0.86	0.99	0.98	1.20	1.20	1.10
	0.35	0.78	0.79	0.79	0.80	0.94	0.94	1.19	1.18	1.05
	0.40	0.71	0.71	0.73	0.73	0.89	0.91	1.17	1.15	0.99
	0.45	0.65	0.65	0.66	0.67	0.83	0.87	1.15	1.11	0.92
	0.50	0.59	0.59	0.60	0.61	0.78	0.84	1.13	1.06	0.86
	0.75	0.34	0.35	0.36	0.36	0.53	0.68	0.97	0.81	0.56
	1.00	0.19	0.20	0.20	0.21	0.34	0.55	0.79	0.58	0.34
	1.25	0.10	0.11	0.11	0.11	0.21	0.45	0.62	0.40	0.20
1.50	0.05	0.06	0.06	0.06	0.13	0.36	0.48	0.27	0.12	

$u_{30}(x_3)/u_{30}^*$ и $u_{10}(x_3)/u_{30}^*$ даны на рисунке 2 применительно к однородному полупространству (сплошные линии) и неоднородному полупространству с $\lambda = 2.5$, $\beta = 2.5$ (пунктирные кривые). Приведенные распределения описывают эффекты смещения зон максимальных амплитуд волновых перемещений вглубь полупространства из неоднородного материала и существенные изменения в этом случае относительных амплитудных смещений $u_{10}(x_3)/u_{30}^*$ у границы полупространства.

Таблица 3. Нормированные амплитуды смещений $u_{10}(x_3)/u_{30}^*$

λ	β	0	0.1	0.5	1.0	1.0	2.5	2.5	2.5	2.5
		0	0.1	0.1	0.1	1.0	0.25	0.5	1.0	2.5
$\frac{x_3}{\lambda_R}$	0	0.68	0.68	0.69	0.70	0.85	0.86	1.09	1.14	1.07
	0.05	0.41	0.41	0.42	0.43	0.59	0.60	0.83	0.89	0.80
	0.10	0.21	0.22	0.23	0.24	0.40	0.42	0.65	0.70	0.58
	0.15	0.08	0.08	0.09	0.10	0.25	0.30	0.52	0.54	0.38
	0.20	-0.01	-0.01	0.00	0.00	0.14	0.21	0.42	0.41	0.23
	0.25	-0.07	-0.07	-0.06	-0.06	0.06	0.15	0.34	0.30	0.10
	0.30	-0.11	-0.11	-0.11	-0.11	0.00	0.11	0.27	0.20	0.01
	0.35	-0.14	-0.14	-0.13	-0.13	-0.05	0.08	0.21	0.12	-0.06
	0.40	-0.15	-0.15	-0.15	-0.15	-0.08	0.05	0.16	0.05	-0.10
	0.45	-0.16	-0.16	-0.15	-0.15	-0.10	0.03	0.11	0.00	-0.13
	0.50	-0.15	-0.16	-0.15	-0.15	-0.12	0.02	0.08	-0.04	-0.15
	0.75	-0.11	-0.11	-0.12	-0.12	-0.13	-0.02	-0.04	-0.13	-0.15
	1.00	-0.07	-0.07	-0.07	-0.07	-0.09	-0.03	-0.08	-0.12	-0.11
	1.25	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.06	-0.04	-0.08	-0.09	-0.07
1.50	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.04	-0.04	-0.07	-0.06	-0.04	

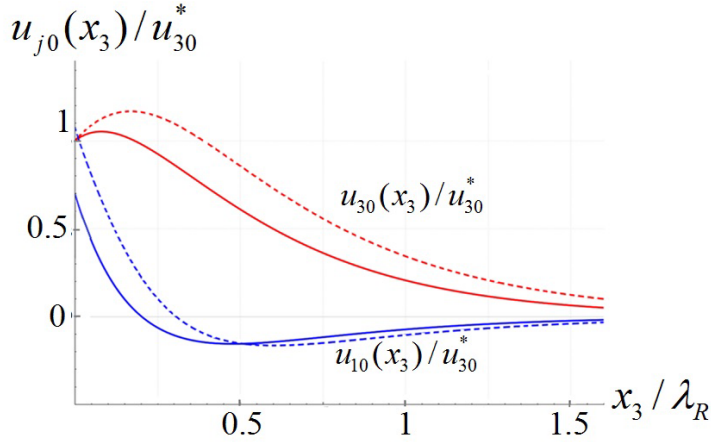


Рис.2. Зависимости относительных амплитуд смещений $u_{30}(x_3)/u_{30}^*$ и $u_{10}(x_3)/u_{30}^*$ в релеевской волне от параметра относительной глубины x_3/λ_R

На рисунке 3 представлены зависимости относительных амплитудных характеристик напряжений $\sigma_{110}(x_3)/\sigma_{11}^*$, $\sigma_{130}(x_3)/\sigma_{13}^*$, $\sigma_{330}(x_3)/\sigma_{33}^*$ в релеевской волне от параметра относительной глубины x_3/λ_R для однородного полупространства (сплошные линии) и неоднородного полупространства с $\lambda = 2.5$, $\beta = 2.5$ (пунктирные кривые). Нормирующими параметрами в этом случае являются амплитудные характеристики напряжений σ_{11}^* , σ_{13}^* , σ_{33}^* на граничной поверхности полупространства. Соответственно в таблицах 4–6 представлены расчетные

данные для относительных амплитудных характеристик динамических напряжений $\sigma_{110}(x_3)/\sigma_{11}^*$, $\sigma_{130}(x_3)/\sigma_{13}^*$, $\sigma_{330}(x_3)/\sigma_{33}^*$ в анализируемых волнах при их распространении в функционально-градиентном полупространстве с варьируемыми параметрами двойной экспоненциальной неоднородности.

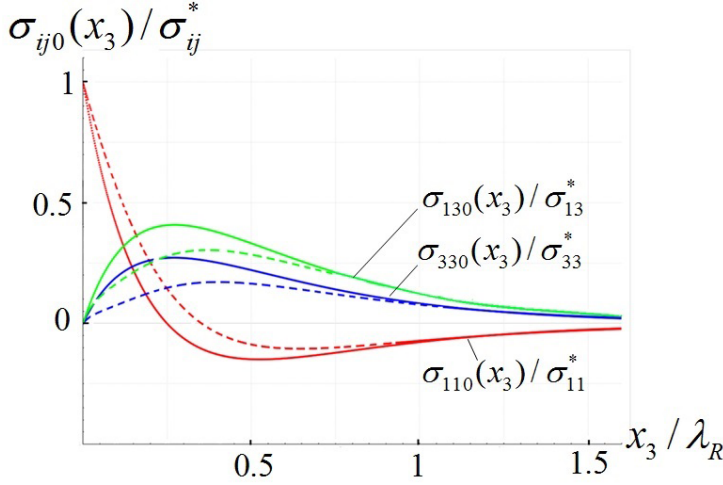


Рис.3. Зависимости относительных амплитудных характеристик напряжений $\sigma_{110}(x_3)/\sigma_{11}^*$, $\sigma_{130}(x_3)/\sigma_{13}^*$, $\sigma_{330}(x_3)/\sigma_{33}^*$ в релеевской волне от параметра относительной глубины x_3/λ_R

Таблица 4. Нормированные амплитудные характеристики напряжений $\sigma_{110}(x_3)/\sigma_{11}^*$

λ	β	0	0.1	0.5	1.0	1.0	2.5	2.5	2.5	2.5
		0	0.1	0.1	0.1	1.0	0.25	0.5	1.0	2.5
$\frac{x_3}{\lambda_R}$	0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	0.05	0.64	0.64	0.65	0.65	0.72	0.74	0.78	0.80	0.76
	0.10	0.38	0.39	0.04	0.40	0.51	0.55	0.63	0.64	0.56
	0.15	0.20	0.21	0.22	0.22	0.35	0.42	0.52	0.50	0.39
	0.20	0.07	0.08	0.09	0.09	0.23	0.32	0.42	0.39	0.25
	0.25	-0.01	-0.01	0.00	0.00	0.14	0.25	0.35	0.30	0.14
	0.30	-0.07	-0.07	-0.06	-0.06	0.06	0.19	0.29	0.21	0.06
	0.35	-0.11	-0.11	-0.10	-0.10	0.01	0.15	0.23	0.15	0.00
	0.40	-0.14	-0.14	-0.13	-0.13	-0.03	0.12	0.18	0.09	-0.04
	0.45	-0.15	-0.15	-0.14	-0.14	-0.06	0.09	0.14	0.04	-0.07
	0.50	-0.16	-0.15	-0.15	-0.15	-0.08	0.07	0.11	0.01	-0.09
	0.75	-0.12	-0.12	-0.12	-0.12	-0.10	0.01	0.00	-0.01	-0.10
	1.00	-0.07	-0.07	-0.08	-0.08	-0.08	-0.01	-0.05	-0.08	-0.07
	1.25	-0.04	-0.04	-0.05	-0.05	-0.05	-0.02	-0.06	-0.06	-0.05
1.50	-0.02	-0.02	-0.03	-0.03	-0.04	-0.03	-0.05	-0.04	-0.03	

Таблица 5. Нормированные амплитудные характеристики напряжений $\sigma_{130}(x_3)/\sigma_{13}^*$

λ	β	0	0.1	0.5	1.0	1.0	2.5	2.5	2.5	2.5
		0	0.1	0.1	0.1	1.0	0.25	0.5	1.0	2.5
$\frac{x_3}{\lambda_R}$	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.05	0.12	0.12	0.12	0.12	0.09	0.12	0.06	0.06	0.05
	0.10	0.19	0.20	0.20	0.19	0.14	0.18	0.09	0.08	0.08
	0.15	0.24	0.25	0.24	0.24	0.17	0.20	0.10	0.09	0.10
	0.20	0.27	0.27	0.27	0.26	0.18	0.21	0.11	0.10	0.13
	0.25	0.28	0.28	0.28	0.27	0.19	0.20	0.11	0.11	0.15
	0.30	0.28	0.28	0.27	0.27	0.19	0.20	0.11	0.12	0.16
	0.35	0.27	0.27	0.27	0.26	0.19	0.18	0.11	0.12	0.17
	0.40	0.267	0.26	0.25	0.25	0.19	0.17	0.11	0.13	0.17
	0.45	0.24	0.24	0.24	0.24	0.18	0.16	0.11	0.13	0.17
	0.50	0.22	0.23	0.22	0.22	0.18	0.15	0.11	0.13	0.16
	0.75	0.14	0.14	0.14	0.14	0.13	0.11	0.10	0.12	0.12
1.00	0.08	0.08	0.08	0.08	0.09	0.08	0.09	0.09	0.08	
1.25	0.04	0.05	0.05	0.05	0.06	0.06	0.07	0.06	0.05	
1.50	0.02	0.03	0.03	0.03	0.04	0.05	0.06	0.04	0.03	

Таблица 6. Нормированные амплитудные характеристики напряжений $\sigma_{330}(x_3)/\sigma_{33}^*$

λ	β	0	0.1	0.5	1.0	1.0	2.5	2.5	2.5	2.5
		0	0.1	0.1	0.1	1.0	0.25	0.5	1.0	2.5
$\frac{x_3}{\lambda_R}$	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.05	0.17	0.18	0.18	0.17	0.16	0.17	0.15	0.14	0.11
	0.10	0.29	0.29	0.29	0.29	0.25	0.27	0.23	0.20	0.17
	0.15	0.36	0.36	0.36	0.36	0.30	0.32	0.28	0.24	0.21
	0.20	0.40	0.40	0.40	0.39	0.34	0.35	0.31	0.27	0.25
	0.25	0.41	0.41	0.41	0.41	0.35	0.37	0.33	0.29	0.28
	0.30	0.41	0.41	0.41	0.41	0.36	0.37	0.34	0.30	0.30
	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.36	0.37	0.35	0.31	0.30
	0.40	0.38	0.38	0.38	0.38	0.35	0.36	0.35	0.31	0.30
	0.45	0.36	0.36	0.36	0.36	0.34	0.36	0.35	0.31	0.30
	0.50	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.35	0.35	0.31	0.28
	0.75	0.20	0.21	0.21	0.21	0.24	0.29	0.32	0.26	0.20
1.00	0.12	0.12	0.12	0.12	0.16	0.24	0.27	0.19	0.13	
1.25	0.06	0.07	0.07	0.07	0.10	0.19	0.22	0.14	0.08	
1.50	0.03	0.04	0.04	0.04	0.06	0.16	0.17	0.09	0.05	

Анализируемыми энергетическими характеристиками являлись распределения по толщине полупространства относительной функции среднего за период потока мощности $P_{1m}(x_3)/P_{1m}^*$ в исследуемых волнах, где P_{1m}^* – граничное значение $P_{1m}(x_3)$ на поверхности полупространства, а $P_{1m}(x_3)$ рассчитывается по формуле

$$P_{1m}(x_3) = (\omega/2) \cdot \text{Im}(\sigma_{110}(x_3)\bar{u}_{10}(x_3) + \sigma_{130}(x)\bar{u}_{30}(x_3)). \quad (23)$$

Графики распределений $P_{1m}(x_3)/P_{1m}^*$ для однородного полупространства (сплошная линия) и для неоднородного полупространства с параметрами $\lambda = 2.5$, $\beta = 2.5$ (пунктирная кривая) представлены на рисунке 4, а для полупространства с варьируемыми параметрами неоднородности соответствующие величины $P_{1m}(x_3)/P_{1m}^*$ приводятся в таблице 7.

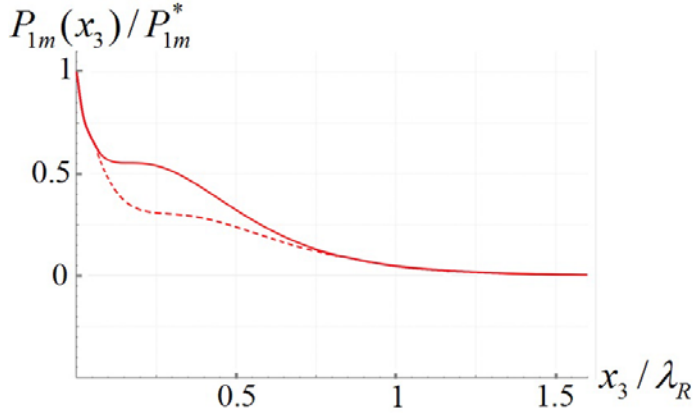


Рис.4. Зависимости относительных амплитудных характеристик относительной функции среднего за период потока мощности $P_{1m}(x_3)/P_{1m}^*$ в релейской волне от параметра относительной глубины x_3/λ_R

Таблица 7. Нормированные амплитудные характеристики относительной функции среднего за период потока мощности $P_{1m}(x_3)/P_{1m}^*$

λ	β	0	0.1	0.5	1.0	1.0	2.5	2.5	2.5	2.5
		0	0.1	0.1	0.1	1.0	0.25	0.5	1.0	2.5
$\frac{x_3}{\lambda_R}$	0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	0.05	0.66	0.66	0.66	0.66	0.69	0.72	0.74	0.74	0.68
	0.10	0.57	0.57	0.57	0.57	0.56	0.60	0.62	0.59	0.48
	0.15	0.56	0.56	0.56	0.55	0.49	0.54	0.55	0.49	0.37
	0.20	0.57	0.56	0.56	0.55	0.46	0.51	0.51	0.43	0.32
	0.25	0.56	0.55	0.54	0.54	0.44	0.48	0.47	0.38	0.31
	0.30	0.53	0.52	0.52	0.51	0.42	0.45	0.45	0.36	0.30
	0.35	0.48	0.48	0.47	0.47	0.39	0.42	0.43	0.44	0.29
	0.40	0.43	0.43	0.43	0.42	0.37	0.39	0.41	0.32	0.28
	0.45	0.37	0.38	0.37	0.37	0.34	0.36	0.39	0.31	0.26
	0.50	0.32	0.32	0.32	0.32	0.31	0.34	0.37	0.29	0.24
	0.75	0.12	0.13	0.13	0.13	0.16	0.23	0.28	0.19	0.12
	1.00	0.04	0.04	0.04	0.04	0.07	0.15	0.20	0.10	0.05
1.25	0.01	0.01	0.01	0.01	0.03	0.10	0.13	0.05	0.02	
1.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.06	0.07	0.02	0.00	

Как показывают результаты расчетов, представленные на рисунке 4, изменения в распределениях $P_{1m}(x_3)/P_{1m}^*$ наиболее выражено наблюдаются для интервала относительных глубин $0.15 < x_3/\lambda_R < 0.55$ и выражаются в уменьшении показателей интенсивности потока при сохранении, в целом, профиля закона распределения.

Заключение. Итогом проведенных исследований является разработка численно-аналитической методики анализа модели распространения поверхностных волн Рэлея вдоль упруго-эквивалентного направления в плоскости границы функционально-градиентного ортотропного полупространства с описываемой двойной экспоненциальной функцией приконтурной локализованной зоной неоднородности физико-механических свойств. Разработан алгоритм интегрирования системы волновых уравнений для среды рассматриваемого типа и получено дисперсионное уравнение, описывающее распространение релеевских поверхностных волн в рассматриваемой волноводной структуре. Осуществлено исследование фазовых скоростей анализируемых волн, а также соответствующих форм распределений вдоль координаты по глубине полупространства для амплитудных функций волновых смещений, механических напряжений и плотности среднего за период потока мощности в зависимости от варьируемых параметров закона неоднородности. Охарактеризованы некоторые эффекты в свойствах исследуемых волн, обусловленные факторами неоднородности.

Исследования проводились по теме государственного задания в ФГБОУ ВО «ДонГУ» (код FRRE-2023-0001).

1. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах / И.А. Викторов. – М: Наука, 1981. – 287 с.
2. *Дьелесан Э.* Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов / Э. Дьелесан, Д. Руайе. – М.: Наука. – 1982. – 424 с.
3. *Речицкий В.И.* Радиокomпоненты на поверхностных акустических волнах / В.И. Речицкий. – М.: Сов. радио, 1984. – 112 с.
4. *Морган Д.* Устройства обработки сигналов на поверхностных акустических волнах / Д. Морган. – М.: Радио и связь, 1990. – 415 с.
5. *Белубекян М.В.* Пространственная задача распространения поверхностных волн в трансверсально-изотропной среде / М.В. Белубекян, Д.Э. Мгерян // Известия Национальной академии наук Армении. – 2006. – Т. 59, №2. – С. 3–9.
6. *Мелешко В.В.* Упругие волноводы: история и современность / В.В. Мелешко, А.А. Бондаренко, С.А. Довгий, А.Н. Трофимчук, Г.Я. ван Хейст // Математические методы и физико-механические поля. – 2008. – Т.51, №2. – С. 86–104.
7. *Datta S.K.* Elastic Waves in Composite Media and Structures: With Applications to Ultrasonic Nondestructive Evaluation, in Mechanical Engineering Series / S.K. Datta, A.H. Sha. – Boca Raton: CRC Press, 2008. – 336 p.
8. Акустические волны в материалах и элементах конструкций с дефектами, неоднородностями и микроструктурой: монография / М.С. Аносов [и др.]; отв. ред. В.И. Ерофеев, А.О. Мальханов. – Нижний Новгород: Нижегород. гос. техн. ун-т им. Р.Е. Алексеева, 2021. – 311 с.
9. *Gabbert U.* Smart structures and structronic systems / U. Gabbert, H.S. Tzou. – Dordrecht: Kluwer Academic Pub., 2001. – 384 p.
10. *Birman V.* Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures / V. Birman, L.W. Byrd // Appl. Mech. Rev. – 2007. – Vol. 60, N 5. – P. 195–216.

11. Болнокин В.Е. Анализ модели распространения сдвиговых упругих волн в полубесконечном трансверсальноизотропном функционально-градиентном геомассиве / В.Е. Болнокин, А.А. Глухов, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – №3 (80). – С. 14–19. – doi: 10.24412/0136-4545-2022-3-14-19. – EDN BOBABC.
12. Глухов А.А. Интегрирование системы уравнений распространения произвольно ориентированных трехпарциальных поверхностных волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – №4 (81). – С. 15–22. – doi: 10.24412/0136-4545-2022-4-15-22. – EDN JBHEKR.

A.A. Glukhov, V.I. Storozhev

Analysis of the model of surface rayleigh waves propagation in a functional-gradient orthotropic half-space with a border localized zone of inhomogeneity.

A numerical-analytical technique and the results of an analysis for a model of Rayleigh surface waves propagation along the elastic-equivalent direction in the plane of the boundary of a functional-gradient orthotropic half-space with a contour localized zone of inhomogeneity of physical and mechanical properties are presented. As a variant of describing changes in the physical and mechanical characteristics of a semi-infinite orthotropic functional-gradient body when moving away from the boundary deeper into the half-space along one of its elastically equivalent directions, a dependence in the form of a double exponential function is considered. The research includes the development of an algorithm for integrating a system of dynamic equations describing the propagation of waves of the type under study; obtaining a dispersion equation for Rayleigh-type surface waves in the waveguide structure under consideration; study of the dependences of the phase velocities of the analyzed waves, the shapes of the distributions of the amplitude functions of wave displacements and the density of the average power flux over the period on the varying parameters of the law of inhomogeneity along the coordinate along the depth of the half-space.

Keywords: *Rayleigh surface waves, functional-gradient orthotropic half-space, continuous transverse heterogeneity, double exponential law of properties change, dispersion equation, parametrical dependences of phase velocities, transformations of wave displacement shapes, transformations of power flow distributions.*

Получено 27.04.2023

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2023-2-39-47

EDN:FLTANT

©2023. Е.С. Глушанков¹

ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ В УСЛОВИЯХ НЕРАВНОМЕРНОГО КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛИНЕЙНОГО ПОТОКА ТЕПЛА

В данной работе представлено решение задачи о действии линейного потока тепла в бесконечной многосвязной пластинке из анизотропного материала, когда на ее контурах имеет место неравномерный конвективный теплообмен с внешней средой. Решение было получено с применением конформных отображений, функций комплексной переменной и метода наименьших квадратов. Численными исследованиями установлено влияние геометрических характеристик пластинки, механических свойств ее материала, а также коэффициента теплообмена на термонапряженное состояние пластинки.

Ключевые слова: линейный поток тепла, многосвязная анизотропная пластинка, конвективный теплообмен, температурные напряжения, комплексные потенциалы.

Введение. В настоящее время широкое применение в науке и технике находят конструкции, содержащие в качестве элементов тонкие пластинки из анизотропных материалов. По технологическим и эксплуатационным причинам эти пластинки могут иметь отверстия или трещины, около которых под воздействием температурных полей могут возникать высокие концентрации напряжений [1]. К настоящему времени решено большое количество задач о влиянии температурных воздействий на напряженно-деформированное состояние пластинок [2, 3, 4, 5]. Также решено большое количество задач о влиянии конвективного теплообмена на напряженно-деформированное состояние упругих тел [6, 7, 8, 9].

Целью данной работы является решение задачи термоупругости о действии линейного потока тепла в пластинке из анизотропного материала, когда на контурах пластинки имеет место неравномерный конвективный теплообмен с внешней средой. Задача решена с использованием конформных отображений, функций многих обобщенных комплексных переменных, метода наименьших квадратов. Проведены численные исследования упругого состояния пластинки с одним

¹ Глушанков Евгений Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: evgenij.glushankov@gmail.com.

Glushankov Evgenij Sergeevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

круговым отверстием. Показано влияние механических свойств материала пластинки, а также характеристик коэффициента теплообмена на распределение напряжений в пластинке.

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную многосвязную пластинку из анизотропного материала, занимающую область S , ограниченную контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с центрами в точках $O_l(x_{0l}, y_{0l})$, с полуосями a_l, b_l и углами поворота φ_l (рис. 1). Контур L_l могут располагаться произвольно относительно друг друга. Через контуры пластинки имеет место конвективный теплообмен с внешней средой температуры \mathfrak{T}_l , характеризуемый переменным коэффициентом $h_l(\tau)$. Контур отверстия свободны либо жестко подкреплены. На бесконечности под углом α к оси Ox действует линейный тепловой поток плотности q , а механические воздействия отсутствуют.

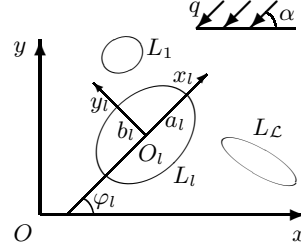


Рис. 1

Несвязанную задачу термоупругости для анизотропной пластинки будем решать с использованием комплексных потенциалов. Задача сводится к последовательному определению сперва комплексного потенциала теплопроводности $F_3(z_3)$, а затем комплексных потенциалов упругого состояния $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) из соответствующих граничных условий.

Значения основных характеристик температурного поля (температура T , плотности потока тепла q_x, q_y) в любой точке пластинки можно определять по формулам [4, 5]

$$T = T^* + 2 \operatorname{Re} F_3(z_3), \tag{1}$$

$$(q_x, q_y) = (q_x^*, q_y^*) + 2 \operatorname{Re} i\kappa (\mu_3, -1) F_3'(z_3). \tag{2}$$

Здесь

$$T^* = q (t_x x + t_y y),$$

$$t_x = \frac{k_{22} \cos \alpha - k_{12} \sin \alpha}{\kappa^2}, \quad t_y = \frac{k_{11} \sin \alpha - k_{12} \cos \alpha}{\kappa^2},$$

$$q_x^* = -q \cos \alpha, \quad q_y^* = -q \sin \alpha;$$

$$\kappa = \sqrt{k_{11} k_{22} - k_{12}^2};$$

μ_3 — корень характеристического уравнения теплопроводности [4, 5]

$$k_{22} \mu^2 + 2k_{12} \mu + k_{11} = 0. \tag{3}$$

k_{ij} — коэффициенты теплопроводности материала пластинки.

Значения основных характеристик термонапряженного состояния (напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, перемещения u, v) в любой точке пластинки можно определять

по формулам [4, 5]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k), \quad (4)$$

$$(u, v) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_k, q_k) \Phi_k(z_k), \quad (5)$$

где

$$p_k = a_{11}\mu_k^2 - a_{16}\mu_k + a_{12} + \frac{\delta_{k3}\alpha_1}{r_3},$$

$$q_k = a_{12}\mu_k - a_{26} + \frac{a_{22}}{\mu_k} + \frac{\delta_{k3}\alpha_2}{r_3\mu_3},$$

$$r_3 = \frac{l_{2\alpha}(\mu_3)}{l_{4a}(\mu_3)},$$

$$l_{2\alpha}(\mu_3) = -\alpha_1\mu_3^2 + \alpha_6\mu_3 - \alpha_2,$$

$$\Phi_3(z_3) = r_3 \int F_3(z_3) dz_3,$$

μ_k ($k = \overline{1, 2}$) — корни характеристического уравнения плоской задачи теории упругости [4, 5]

$$l_{4a}(\mu) = 0, \quad (6)$$

$$l_{4a}(\mu) = a_{11}\mu^4 + 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 + 2a_{26}\mu + a_{22},$$

a_{ij} — коэффициенты деформации материала пластинки; α_i — коэффициенты линейного теплового расширения материала пластинки; δ_{ij} — символ Кронекера.

Функции $F_3(z_3)$, $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) определены в многосвязных областях S_3 , S_k , получаемых из области S аффинными преобразованиями [4, 5]

$$z_3 = x + \mu_3 y, \quad (7)$$

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (8)$$

В общем случае функции $F_3(z_3)$, $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) будут иметь вид [4, 5]

$$F_3(z_3) = c_3 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{3l} w_{3l}(z_3) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{3ln} \varphi_{3ln}(z_3); \quad (9)$$

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k). \quad (10)$$

Здесь c_3 , D_{3l} — вещественные постоянные, определяемая из граничных условий задачи теплопроводности; $w_{3l}(z_3) = \ln(z_3 - z_{3l})$; z_{3l} — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (7) произвольным точкам внутри контуров L_l ;

c_{3ln} — комплексные постоянные, определяемые из граничных условий задачи теплопроводности; $\varphi_{3ln}(z_3) = \zeta_{3l}^{-n}$; ζ_{3l} — комплексные переменные, определяемые из конформных отображений;

$$N_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) w_{kl}(z_k);$$

Γ_k, A_{kl}, B_{kl} — комплексные постоянные, определяемые из решений систем уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k &= (0, 0, 0, 0), \\ \sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, p_k, q_k) i A_{kl} &= (0, 0, 0, 0), \\ \sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, p_k, q_k) i B_{kl} &= (0, 0, 0, 0); \end{aligned}$$

$\Gamma_3 = r_3 c_3$; $A_{3l} = r_3 D_{3l}$; $B_{3l} = r_3 (c_{3l1} R_{3l} - D_{3l} z_{3l})$; $w_{kl}(z_k) = \ln(z_k - z_{kl})$; z_{kl} — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (8) произвольным точкам внутри контуров L_l ; a_{kln} — комплексные постоянные, определяемые из граничных условий задачи термоупругости; $\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}$; ζ_{kl} — комплексные переменные, определяемые из конформных отображений.

В локальных системах координат $O_l x_l y_l$ параметрические уравнения эллипсов (рис. 1) имеют вид [4, 5]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе координат Oxy —

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l. \end{aligned}$$

Здесь θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) — угловой параметр уравнения контура.

Комплексные переменные ζ_{kl} ($k = \overline{1, 3}$) подлежат определению с использованием функций конформных отображений внешностей единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} [4, 5]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \end{aligned}$$

$$m_{kl} = \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}.$$

Функция $F_3(z_3)$ должна удовлетворять граничному условию [4, 5]

$$2 \operatorname{Re} (h_l(\tau)F_3(\tau_3) + i\kappa\delta_{3,s}(\tau_3)F_3'(\tau_3)) = q_n^*(\tau) - h_l(\tau)(T^*(\tau) - \mathfrak{T}_l), \quad (12)$$

где $\delta_{3,s}(\tau_3) = d\tau_3/ds$, s — дуга контура отверстия;

$$q_n^*(\tau) = q_x^* \cos(nx) + q_y^* \cos(ny);$$

τ — аффикс граничной точки; τ_3 — точка, получаемая из τ при аффинном преобразовании (7).

Функции $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) должны удовлетворять граничным условиям задачи термоупругости [4, 5]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (d_{kl1}, d_{kl2}) \delta_{k,s}(\tau_k) \Phi_k'(\tau_k) = \left(\frac{df_{l1}}{ds}, \frac{df_{l2}}{ds} \right), \quad (13)$$

где $\delta_{k,s}(\tau_k) = d\tau_k/ds$; τ_k ($k = \overline{1, 2}$) — комплексные переменные, отвечающие точкам на контуре при аффинных преобразованиях (8). Для неподкрепленных контуров L_l

$$(d_{kl1}, d_{kl2}) = (1, \mu_k), \quad (f_{l1}, f_{l2}) = (c_{l1}, c_{l2}),$$

а для жестко подкрепленных контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}) = (p_k, q_k), \quad (f_{l1}, f_{l2}) = (-u^*(\tau) + c_{l1}, -v^*(\tau) + c_{l2});$$

c_{lj} — неизвестные постоянные интегрирования.

2. Решение задачи. В общем случае многосвязной области (рис. 1) неизвестные постоянные $c_3, D_{3l}, c_{3ln}, a_{kln}$, входящие в функции (9) и (10), определяются из граничных условий (12) и (13) с использованием метода наименьших квадратов. Для этого на контурах L_i ($i = \overline{1, \mathcal{L}}$) выбирается система точек $M_{im}(x_{im}, y_{im})$ ($m = \overline{1, \mathcal{M}_i}$), в которых следует удовлетворять граничным условиям задач теплопроводности и термоупругости.

Задача теплопроводности. При подстановке функции (9) в граничное условие (12), для определения неизвестных постоянных c_3, D_{3l}, c_{3ln} получается следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} h_l(\tau_{im})c_3 + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (h_l(\tau_{im})w_{3l}(\tau_{3im}) + i\kappa\delta_{3,s}(\tau_{3im})w_{3l}'(\tau_{3im})) D_{3l} + \\ & + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (h_l(\tau_{im})\varphi_{3ln}(\tau_{3im}) + i\kappa\delta_{3,s}(\tau_{3im})\varphi_{3ln}'(\tau_{3im})) c_{3ln} = \\ & = q_n^*(\tau_{im}) - h_l(\tau_{im})(T^*(\tau_{im}) - \mathfrak{T}_l) \quad (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\tau_{zim} = x_{im} + \mu_3 y_{im}$, τ_{im} — аффикс точки M_{im} . После решения этой системы с использованием метода сингулярных разложений [10] постоянные c_3 , D_{3l} , c_{3ln} , а следовательно, и комплексный потенциал теплопроводности (9) будут известны. По известной функции (9) можно в любой точке пластинки найти температуру и плотности потока тепла по формулам (1), (2) [4, 5].

Задача термоупругости. При подстановке функций (9) и (10) в граничные условия (13) для определения неизвестных постоянных a_{kln} получается следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) \varphi'_{kln}(\tau_{kim}) a_{kln} = \\
 = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) N'_k(\tau_{kim}) - \\
 -2 \operatorname{Re} d_{3ip} \delta_{3,s}(\tau_{zim}) r_3 F_3(\tau_{zim}) + \frac{df_{ip}}{ds}(\tau_{im}) \\
 (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}, p = \overline{1, 2}),
 \end{aligned} \tag{15}$$

где $\tau_{kim} = x_{im} + \mu_k y_{im}$. После решения этой системы с использованием метода сингулярных разложений [10] постоянные a_{kln} , а следовательно, комплексные потенциалы термоупругости (10) будут известны. По известным функциям (10) можно в любой точке пластинки находить значения основных характеристик термонапряженного состояния по формулам (4)–(5) [4, 5].

3. Численные исследования. Были проведены численные исследования для пластинок из следующих материалов:

— текстолит КАСТ–В изотропный [3] модифицированный (материал М1):

$$a_{11} = 74,92a_0, \quad a_{22} = 74,92a_0, \quad a_{12} = -8,99a_0, \quad a_{66} = 167,79a_0,$$

$$\alpha_1 = 3,0\alpha_0, \quad \alpha_2 = 3,0\alpha_0,$$

$$k_{11} = 144,00k_0, \quad k_{22} = 144,00k_0;$$

— стеклопластик косоугольной намотки с наполнителем из алюмоборосиликатного стекла и связующим агентом из малеиновой эпоксидной смолы [3] модифицированный (материал М2):

$$a_{11} = 272,17a_0, \quad a_{22} = 1019,37a_0, \quad a_{12} = -76,15a_0, \quad a_{66} = 2548,42a_0,$$

$$\alpha_1 = 0,7\alpha_0, \quad \alpha_2 = 3,8\alpha_0,$$

$$k_{11} = 2,79k_0, \quad k_{22} = 1,21k_0.$$

Здесь $a_0 = 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}$, $\alpha_0 = 10^{-5} \text{ К}^{-1}$, $k_0 = 10^{-2} \text{ Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}$.

При проведении численных расчетов количество членов в рядах Лорана в функциях (9), (10) и количество точек M_{im} на контурах L_i , для которых составлялись системы линейных алгебраических уравнений (14) и (15), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (относительная погрешность не становилась менее сотых долей процента). Для этого, как показали расчеты, в решаемых задачах для случая материала М1, являющегося изотропным, необходимо было в рядах Лорана сохранять от 30 до 40 членов, на каждом из контуров брать от 200 до 400 «коллокационных» точек, а для случая материала М2, обладающего сильной анизотропией, необходимо было в рядах сохранять от 100 до 200 членов, на каждом из контуров брать от 1000 до 3000 «коллокационных» точек.

В таблице 1 для пластинки с одним круговым отверстием радиуса a ($a_1 = b_1 = a$) (рис. 2), в которой действует линейный поток тепла плотности q под углом $\alpha = \pi/2$, через неподкрепленный контур которого имеет место конвективный теплообмен с коэффициентом $h_1 = H(1 + \cos \theta)$ с внешней средой температуры $\mathfrak{T}_1 = 0$, с точностью до q , как множителя, приведены значения напряжений σ_s/a_0 в некоторых точках контура отверстия с центральным углом θ на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от значения Ha .

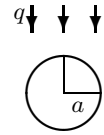


Рис. 2

Таблица 1. Значения нормированных напряжений σ_s/a_0 в точках контура отверстия

θ , рад.	Значения Ha							
	0	0,001	0,01	0,1	1	10	1000	∞
Материал М1								
$\pi/12$	-0,072	-0,072	-0,071	-0,063	-0,015	0,049	0,069	0,072
$\pi/6$	-0,139	-0,139	-0,137	-0,121	-0,030	0,095	0,133	0,139
$\pi/4$	-0,197	-0,196	-0,194	-0,171	-0,042	0,135	0,188	0,197
$\pi/3$	-0,241	-0,240	-0,238	-0,210	-0,051	0,165	0,230	0,241
$5\pi/12$	-0,269	-0,268	-0,265	-0,234	-0,057	0,184	0,257	0,269
$\pi/2$	-0,278	-0,278	-0,274	-0,242	-0,059	0,190	0,266	0,278
$7\pi/12$	-0,269	-0,268	-0,265	-0,234	-0,057	0,184	0,257	0,269
$2\pi/3$	-0,241	-0,240	-0,238	-0,210	-0,051	0,165	0,230	0,241
$3\pi/4$	-0,197	-0,196	-0,194	-0,171	-0,042	0,135	0,188	0,197
$5\pi/6$	-0,139	-0,139	-0,137	-0,121	-0,030	0,095	0,133	0,139
$11\pi/12$	-0,072	-0,072	-0,071	-0,063	-0,015	0,049	0,069	0,072
Материал М2								
$\pi/12$	-0,314	-0,267	-0,013	0,355	0,460	0,475	0,476	0,477
$\pi/6$	-0,535	-0,459	-0,040	0,592	0,782	0,809	0,812	0,812
$\pi/4$	-0,700	-0,607	-0,088	0,747	1,018	1,057	1,062	1,062
$\pi/3$	-0,926	-0,812	-0,163	0,946	1,338	1,398	1,405	1,406
$5\pi/12$	-1,396	-1,227	-0,267	1,390	2,008	2,106	2,118	2,119
$\pi/2$	-1,880	-1,637	-0,277	1,931	2,711	2,838	2,853	2,855
$7\pi/12$	-1,396	-1,204	-0,135	1,522	2,033	2,109	2,118	2,119
$2\pi/3$	-0,926	-0,800	-0,096	1,024	1,357	1,400	1,405	1,406
$3\pi/4$	-0,700	-0,611	-0,110	0,733	1,022	1,058	1,062	1,062
$5\pi/6$	-0,535	-0,473	-0,118	0,505	0,763	0,808	0,812	0,812
$11\pi/12$	-0,314	-0,280	-0,083	0,266	0,425	0,468	0,476	0,477

В таблице 2 для пластинки из материала М1 с одним круговым отверстием радиуса a , в которой действует линейный поток тепла плотности q под углом $\alpha = \pi/2$, через неподкреплённый контур которого имеет место конвективный теплообмен с коэффициентом $h_1 = H(1 + \sin \theta)$ с внешней средой температуры $\mathfrak{T}_1 = 0$, с точностью до q , как множителя, приведены значения напряжений σ_s/a_0 в некоторых точках контура отверстия, в зависимости от значения Ha .

Таблица 2. Значения нормированных напряжений σ_s/a_0 в точках контура отверстия

θ , рад.	Значения Ha						
	0	0,01	0,1	1	10	100	∞
$\pi/12$	-0,072	-0,071	-0,067	-0,039	0,022	0,057	0,072
$\pi/6$	-0,139	-0,138	-0,130	-0,075	0,042	0,111	0,139
$\pi/4$	-0,197	-0,195	-0,184	-0,105	0,060	0,157	0,197
$\pi/3$	-0,241	-0,239	-0,225	-0,129	0,073	0,192	0,241
$5\pi/12$	-0,269	-0,267	-0,251	-0,144	0,082	0,214	0,269
$\pi/2$	-0,278	-0,276	-0,260	-0,149	0,085	0,221	0,278

В таблицах случай $Ha = 0$ соответствует теплоизолированному контуру отверстия, а $Ha = \infty$ соответствует случаю, когда на контуре отверстия задана температура, равная температуре внешней среды.

Выводы. Из представленных данных следует, что коэффициент теплообмена оказывает очень сильное влияние на значения напряжений в окрестности контуров отверстий. Для вышеуказанных распределений коэффициента теплообмена часть контура отверстия плохо поддерживает теплообмен (практически теплоизолирована) при любых значениях параметра Ha .

Для материала М1, обладающего более высокими значениями коэффициентов теплопроводности (лучшей теплопроводностью), при значениях $Ha < 0,01$ контур отверстия можно считать полностью теплоизолированным; при значениях $Ha > 100$ теплоизолированная зона оказывается достаточно малой, чтобы оказывать существенное влияние термонапряженное состояние, и можно полагать, что на контуре отверстия задана температура, равная температуре внешней среды. Для материала М2, обладающего более низкой теплопроводностью, при значениях $Ha < 0,001$ контур отверстия можно считать полностью теплоизолированным; а при $Ha > 10$ можно полагать, что на контуре отверстия задана температура, равная температуре внешней среды.

Для случая пластинки из изотропного материала М1, значения напряжений σ_s по контуру обладают симметрией относительно линии действия линейного потока тепла (относительно точки $\theta = \pi/2$ рад.). В пластинке из сильно анизотропного материала М2, если коэффициент теплообмен не симметричен, указанная симметричность напряжений отсутствует, сохраняясь лишь для предельных случаев $Ha = 0$ и $Ha = \infty$. При этом, более высокие значения напряжений возникают в зоне с ухудшенным теплообменом.

Более высокая концентрация напряжений наблюдается в пластинке из материала М2, обладающего более низкими коэффициентами теплопроводности

(худшей теплопроводностью). При этом, материал М2 обладает и более высокими значениями коэффициентов деформации (меньшей жесткостью), отчего следует ожидать меньших значений напряжений. Следовательно, влияние теплопроводящих свойств материала является более значительным по сравнению с упругими свойствами.

Исследования проводились по теме государственного задания в ФГБОУ ВО «ДонГУ» (код FRRE-2023-0001).

1. *Мотовиловец И.А.* Термоупругость / И.А. Мотовиловец, В.И. Козлов. – К.: Наук. думка, 1987. – 264 с. (Механика связных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 1).
2. *Подстригач Я.С.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
3. *Космодамианский А.С.* Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров. – Киев–Донецк: Вища школа, 1983. – 160 с.
4. *Калоеров С.А.* Термонапряженное состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Ю.С. Антонов // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 127–136.
5. *Калоеров С.А.* Термоупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами при действии линейного потока тепла и температуры на контурах / С.А. Калоеров, Ю.С. Антонов // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 102–116.
6. *Гарматій Г.Ю.* Термопружний стан безмежного термочутливого тіла з циліндричною порожниною за умови конвективного теплообміну / Г.Ю. Гарматій, В.С. Попович // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2009. – Вип. 52, № 3. – С. 192–200.
7. *Parihar K.S.* Transient heat conduction and analysis of thermal stresses in thin circular plate / K.S. Parihar, S.S. Patil // J. Therm. Stress. – 2011. – Vol. 34, № 4. – P. 335–351.
8. *Gaikwad K.R.* Analysis of transient thermoelastic temperature distribution of a thin circular plate and its thermal deflection under uniform heat generation / K.R. Gaikwad, Y.U. Naner // J. Therm. Stress. – 2021. – Vol. 44, № 1. – P. 75–85.
9. *Nguyen T.D.* Frequency dependence of the magnitude of thermal stresses in a flat plate subjected to rapid thermal cycling by convective heating and cooling / T.D. Nguyen, J.R. Thomas Jr., D.P.H. Hasselman // J. Therm. Stress. – 1987. – Vol. 10, № 3. – P. 163–175.
10. *Форсайт Дж.* Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

E.S. Glushankov

The thermoelastic state of the infinite multiply connected anisotropic plate in conditions of non-uniform convective heat transfer under linear heat flux action.

A solution is presented for the problem of linear heat flux acting in the infinite multiply connected anisotropic plate, when a non-uniform convective heat transfer with external environment occurs on its contours. The solution was obtained with using the conformal mappings, the complex potentials and the least squares. The effect of plates's geometric characteristics, the properties of its material, and the heat transfer characteristics on the thermoelastic state of the plate was brought out with the numerical studies.

Keywords: *linear heat flux, multiply connected anisotropic plate, convective heat transfer, thermal stresses, complex potentials.*

Получено 17.05.2023

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2023-2-48-55

EDN:SPYOBVC

©2023. Д.С. Карасев¹, С.В. Сторожев², В.А. Шалдырван³

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ СДВИГОВЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИКЕ С ДВОЙНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Для частного варианта системы уравнений динамического электроупругого деформирования, описывающей распространение локализованных стационарных электромеханических волн Гуляева-Блюстейна вдоль поверхности полупространства линейно поляризованной пьезокерамики класса *bmm* с непрерывной поперечной неоднородностью физико-механических характеристик, описываемой двойными экспоненциальными функциями, предложен и реализован численно-аналитический алгоритм получения векторной формы базисных частных решений. Рассматриваемый вариант описания неоднородности занимающего полубесконечную область функционально-градиентного пьезоактивного материала характеризует наличие приповерхностной области существенных изменений параметров рассматриваемой модели деформирования вдоль координаты по толщине полупространства с асимптотическим сглаживанием данных изменений в его глубине. Построенные решения представлены сходящимися по норме векторными экспоненциальными рядами со слагаемыми, определяемыми с применением векторно-матричных рекуррентных соотношений.

Ключевые слова: модель распространения волн Гуляева-Блюстейна, электроупругое полупространство, функционально-градиентная пьезокерамика, двойная экспоненциальная физико-механическая неоднородность, интегрирование системы волновых уравнений, итерационный

¹Карасев Дмитрий Сергеевич – аспирант каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: vektor8899@ya.ru.

Карасев Дмитрий Сергеевич – Postgraduate, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

²Сторожев Сергей Валериевич – доктор техн. наук, проф. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.v.storozhev@donnasa.ru.

Сторожев Сергей Валериевич – Doctor of Technical Sciences, Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

³Шалдырван Валерий Анатольевич – доктор физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: shaldyrvan.v.a@mail.ru.

Shaldyrvan Valery Anatolievich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

Введение и цели исследования. Поверхностные электроупругие волны Гуляева-Блюстейна, получившие самое обширное применение в процессах функционирования акустоэлектронных устройств, по самым различным аспектам остаются до настоящего времени предметом актуальных теоретических исследований [1–7]. К ряду представляющих современный интерес новых элементов в постановке задач о распространении связанных локализованных электроупругих волн данного типа относится, в частности, учет усложненных физико-механических свойств материала пьезоактивного полупространства, проявляющихся вследствие целенаправленного применения новых технологий формирования такого материала, в том числе методов 3D печати. Создаваемые такими способами волноводы для волн Гуляева-Блюстейна являются функционально-градиентными, обладающими, в том числе, различными типами непрерывной неоднородности физико-механических свойств по толщине. Соответственно, исследование спектров и свойств локализованных электроупругих волн в таких волноводах является актуальным научным заданием с важными перспективами прикладного применения, в частности, при поиске новых конструктивных решений в процессе разработки инновационных акустоэлектронных радиокомпонентов [8–11].

В этом контексте целью данного исследования является разработка и реализация итерационного численно-аналитического алгоритма получения векторных базисных частных решений системы дифференциальных уравнений динамического электроупругого деформирования, описывающей распространение локализованных стационарных электромеханических волн Гуляева-Блюстейна вдоль поверхности полупространства линейно поляризованной пьезокерамики класса *6mm* с непрерывной поперечной неоднородностью физико-механических характеристик, описываемой двойными экспоненциальными функциями. Исследуемый вариант описания неоднородности функционально-градиентного пьезоактивного материала в полубесконечной области отвечает существованию приповерхностной области выраженных изменений его параметров вдоль координаты по толщине полупространства с асимптотическим сглаживанием темпа этих изменений в глубине [12–13]. Он является альтернативным по отношению к описанию приграничной неоднородности физико-механических свойств на базе использования экспоненциальных зависимостей, рассмотренному в работе [14].

1. Основные соотношения исследуемой модели. Рассматривается занимающая область $x_1 \geq \eta > 0$ в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$ полубесконечная непрерывно-неоднородная гексагональная пьезокерамическая упругая среда класса *6mm* с осью поляризации Ox_1 , имеющая переменные вдоль оси Ox_1 физико-механические свойства:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \cdot \vartheta(\lambda, \beta, x_1), & c_{ij} &= c_{ij0} \cdot \vartheta(\lambda, \beta, x_1), \\ e_{ij} &= e_{ij0} \cdot \vartheta(\lambda, \beta, x_1), & \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij0} \cdot \vartheta(\lambda, \beta, x_1), \\ \vartheta(\lambda, \beta, x_1) &= \exp(\lambda \exp(-\beta x_1)), \end{aligned} \quad (1)$$

где $c_{ij}(x_1)$, $e_{ij}(x_1)$, $\varepsilon_{ij}(x_1)$, $\rho(x_1)$ – соответственно модули упругости, пьезоэлектрические и диэлектрические параметры и параметр плотности функционально-градиентной пьезокерамики материала. Для введенных таким образом физико-механических характеристик материала в глубине полупространства $x_3 \geq \eta > 0$ при $\beta > 0$ имеет место асимптотическое стремление к величинам c_{ij0} , e_{ij0} , ε_{ij0} , ρ_0 .

Соотношения полной системы уравнений динамического электроупругого деформирования в квазистатическом приближении для электромагнитного поля применительно к рассматриваемому случаю распространения плоско-поляризованных поперечных стационарных поверхностных электроупругих волн Гуляева-Блюстейна вдоль координатного направления Ox_2 в рассматриваемом полупространстве, имеют исходный вид

$$\partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} - \rho \ddot{u}_3 = 0, \quad \partial_1 D_1 + \partial_2 D_2 = 0, \quad \partial_j = \partial / \partial x_j \quad (j = \overline{1, 2}); \quad (2)$$

$$\sigma_{13} = c_{44} \partial_1 u_3 + e_{15} \partial_1 \varphi, \quad \sigma_{23} = c_{44} \partial_2 u_3 + e_{15} \partial_2 \varphi, \quad (3)$$

$$D_1 = -\varepsilon_{11} \partial_1 \varphi + e_{15} \partial_1 u_3, \quad D_2 = -\varepsilon_{11} \partial_2 \varphi + e_{15} \partial_2 u_3. \quad (4)$$

где $u_3(x_1, x_2, t)$, $\varphi(x_1, x_2, t)$, $D_1(x_1, x_2, t)$, $D_2(x_1, x_2, t)$, $\sigma_{13}(x_1, x_2, t)$, $\sigma_{23}(x_1, x_2, t)$ – соответственно комплексные функции упругих волновых перемещений упругого смещения, потенциала, а также компоненты вектора индукции связанного квазистатического электрического поля и тензора механических напряжений в исследуемых локализованных SH-волнах.

Совокупность соотношений (2)–(4) первоначально сводится к системе двух уравнений в частных производных

$$\partial_1 (c_{44} \partial_1 u_3) + c_{44} \partial_2^2 u_3 + \partial_1 (e_{15} \partial_1 \varphi) + e_{15} \partial_2^2 \varphi - \rho \ddot{u}_3 = 0, \quad (5)$$

$$\partial_1 (e_{15} \partial_1 u_3) + e_{15} \partial_2^2 u_3 - \partial_1 (\varepsilon_{11} \partial_1 \varphi) - \varepsilon_{11} \partial_2^2 \varphi = 0,$$

которая после введения представлений для характеристик исследуемой электро-механической волны

$$u_3(x_1, x_2, t) = u_{30}(x_1) \exp(-i(\omega t - kx_2)), \quad (6)$$

$$\varphi(x_1, x_2, t) = \varphi_0(x_1) \exp(-i(\omega t - kx_2)),$$

где ω – циклическая частота, k – волновое число, и с учетом соотношений (1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} c_{440} u_{30}''(x_1) + e_{150} \varphi_0''(x_1) + (\rho_0 \omega^2 - c_{440} k^2) u_{30}(x_1) - e_{150} k^2 \varphi_0(x_1) = \\ = ((c_{440} u_{30}'(x_1) + e_{150} \varphi_0'(x_1)) (\lambda \beta) \exp(-\beta x_1)), \\ e_{150} u_{30}''(x_1) - \varepsilon_{110} \varphi_0''(x_1) - c_{440} k^2 u_{30}(x_1) + \varepsilon_{110} k^2 \varphi_0(x_1) = \\ = ((e_{150} u_{30}'(x_1) - \varepsilon_{110} \varphi_0'(x_1)) (\lambda \beta) \exp(-\beta x_1)). \end{aligned} \quad (7)$$

На следующем этапе преобразований система (7) записывается в следующей матричной форме

$$(\underline{A}_1 \partial_1^2 + \underline{A}_3) \underline{F}(x_1) = (\lambda\beta) \exp(-\beta x_1) \underline{A}_2 \partial_1 \underline{F}(x_1), \quad (8)$$

где

$$\underline{F}(x_1) = \begin{pmatrix} u_{30}(x_1) \\ \varphi_0(x_1) \end{pmatrix}; \quad (9)$$

$\underline{A}_1, \underline{A}_2, \underline{A}_3$ – матрицы постоянных коэффициентов

$$\begin{aligned} \underline{A}_1 &= \begin{pmatrix} c_{440} & e_{150} \\ e_{150} & \varepsilon_{110} \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_2 = \begin{pmatrix} \lambda\beta c_{440} & \lambda\beta e_{150} \\ \lambda\beta e_{150} & -\lambda\beta \varepsilon_{110} \end{pmatrix}, \\ \underline{A}_3 &= \begin{pmatrix} \rho_0 \omega^2 - c_{440} k^2 & -e_{150} k^2 \\ -e_{150} k^2 & \varepsilon_{110} k^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

В качестве способа интегрирования системы (10) предлагается использование метода последовательных приближений, представляемого алгоритмом

$$\underline{F}(x_1) = \underline{F}_0(x_1) + \underline{F}_1(x_1) + \underline{F}_2(x_1) + \dots + \underline{F}_p(x_1) + \dots \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (\underline{A}_1 \partial_3^2 + \underline{A}_3) \underline{F}_0(x_1) &= 0, \quad (\underline{A}_1 \partial_3^2 + \underline{A}_3) \underline{F}_1(x_1) = e^{-\beta x_3} \underline{A}_2 \partial_1 \underline{F}_0(x_1), \dots \\ \dots, (\underline{A}_1 \partial_3^2 + \underline{A}_3) \underline{F}_p(x_1) &= e^{-\beta x_3} \underline{A}_2 \partial_3 \underline{F}_{p-1}(x_1), \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Решение однородной системы дифференциальных уравнений относительно компонентов вектор-функции $\underline{F}_0(x_1)$ записывается в виде

$$\underline{F}_0(x_1) = a_1 \underline{\Delta}_1 e^{-\delta_1 x_1} + a_2 \underline{\Delta}_2 e^{-\delta_2 x_1}, \quad (13)$$

где a_j ($j = \overline{1, 2}$) произвольные постоянные коэффициенты, $\underline{\Delta}_j$ – векторные величины вида

$$\underline{\Delta}_j = \begin{pmatrix} \varepsilon_{110} \delta_j^2 + \varepsilon_{110} k^2 \\ e_{150} k^2 - e_{150} \delta_j^2 \end{pmatrix}; \quad (14)$$

δ_j – корни бикубического характеристического уравнения

$$\begin{aligned} (c_{440} \varepsilon_{110} - e_{150}^2) \delta^4 + ((\rho_0 \omega^2 - c_{440} k^2) \varepsilon_{110} + c_{440} \varepsilon_{110} k^2 + 2e_{150}^2 k^2) \delta^2 + \\ + ((\rho_0 \omega^2 - c_{440} k^2) \varepsilon_{110} k^2 - e_{150}^2 k^4) \delta^2 = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

удовлетворяющие условию $Re \delta_j > 0$.

Выбирая, далее, в качестве начального приближения алгоритма (11)–(12) функции

$$\underline{F}_{0j}(x_1) = \underline{\Delta}_j e^{-\delta_j x_1}, \quad (16)$$

можно последовательно получить представления

$$\underline{F}_{pj}(x_1) = \underline{Q}_j^{(p)} \exp((-p\beta + \delta_j)x_1), \quad (17)$$

где

$$\underline{Q}_j^{(p)} = \underline{M}_{0pj}^{-1} \underline{M}_{1pj} \underline{Q}_j^{(p-1)}, \quad (18)$$

$$\underline{M}_{0pj} = (-p\beta + \delta_j)^2 \underline{A}_1 + \underline{A}_3, \quad (19)$$

$$\underline{M}_{1pj} = ((-p-1)\beta + \delta_j) \underline{A}_2, \quad (20)$$

или

$$\underline{Q}_j^{(p)} = \underline{M}_{0pj}^{-1} \underline{M}_{1pj} \underline{M}_{0,p-1,j}^{-1} \underline{M}_{1,p-1,j} \cdots \underline{M}_{01j}^{-1} \underline{M}_{11j} \underline{Q}_j^{(0)}, \quad \underline{Q}_j^{(0)} = \underline{\Delta}_j. \quad (21)$$

Таким образом, для системы уравнений (7) волновых движений рассматриваемого типа в функционально-градиентной электроупругой пьезокерамической среде с двойной экспоненциальной неоднородностью получена совокупность двух базисных решений, имеющих представления в виде векторных функциональных рядов экспоненциального типа с явными аналитическими выражениями для последовательно определяемых векторных коэффициентов

$$\underline{F}_j(x_1) = \sum_{p=0}^{\infty} \underline{Q}_j^{(p)} \exp((-p\beta + \delta_j)x_1) \quad (j = \overline{1, 2}). \quad (22)$$

Анализ сходимости рядов в представлениях (22) может быть реализован с использованием признака Даламбера. Так, ввиду выполняющегося в области в области $x_1 \geq \eta > 0$ свойства

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left| \left(\|\underline{Q}_j^{(p+1)}\| \exp((-p-1)\beta + \delta_j)x_1 \right) / \left(\|\underline{Q}_j^{(p)}\| \exp((-p\beta + \delta_j)x_1) \right) \right| < 1, \quad (23)$$

функциональный ряд (22) обладает свойством сходимости по норме в указанной области.

Таким образом, для полубесконечной пьезоактивной функционально-градиентной гексагонально-анизотропной среды получены аналитические решения уравнений распространения сдвиговых электроупругих волн, являющиеся основой для исследования закономерностей распространения в рассматриваемых средах локализованных волн Гуляева-Блюстейна.

С введением для компонентов векторных коэффициентов $\underline{Q}_j^{(p)}$ и вектор-функций $\underline{F}_j(x_1)$ обозначений

$$\underline{Q}_j^{(p)} = \begin{pmatrix} q_{1jp} \\ q_{2jp} \end{pmatrix}, \quad \underline{F}_j(x_1) = \begin{pmatrix} f_{1j}(x_1) \\ f_{2j}(x_1) \end{pmatrix}, \quad (24)$$

представления для комплексных функций волновых перемещений и потенциала квазистатического электрического поля могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} u_3(x_1, x_2, t) &= (a_1 f_{11}(x_1) + a_2 f_{12}(x_1)) \exp(-i(\omega t - kx_2)), \\ \varphi(x_1, x_2, t) &= (a_1 f_{21}(x_1) + a_2 f_{22}(x_1)) \exp(-i(\omega t - kx_2)), \\ f_{nj}(x_1) &= \sum_{p=0}^{\infty} q_{njp} \exp((-p\beta + \delta_j)x_1) \quad (n, j = \overline{1, 2}). \end{aligned} \quad (25)$$

Ее использование при записи дисперсионного соотношения для волн исследуемого типа в рассматриваемом функционально-градиентном волноводе со свободной электродированной поверхностью $x_1 = \eta$ приводит к соотношению вида

$$\det \|\vartheta_{nj}\| = 0, \quad (26)$$

в котором

$$\begin{aligned} \vartheta_{1j} &= c_{44} e^{\lambda} \sum_{p=0}^{\infty} q_{1jp} (-p\beta + \delta_j) \exp((-p\beta + \delta_j)\eta) + \\ &+ e_{15} e^{\lambda} \sum_{p=0}^{\infty} q_{2jp} (-p\beta + \delta_j) \exp((-p\beta + \delta_j)\eta), \\ \vartheta_{2j} &= \sum_{p=0}^{\infty} q_{2jp} \exp((-p\beta + \delta_j)\eta) \quad (j = \overline{1, 2}). \end{aligned} \quad (27)$$

Заключение. Результатом проведенных исследований является разработка итерационного численно-аналитического алгоритма получения базисных векторных частных решений системы дифференциальных уравнений, описывающей распространение поверхностных электроупругих волн Гуляева-Блюстейна вдоль границы полубесконечного тела из линейно поляризованной пьезокерамики класса 6mm с описываемой двойными экспоненциальными функциями непрерывной поперечной неоднородностью физико-механических характеристик. Согласно использованному описанию закона изменения физико-механических параметров пьезоактивной среды по толщине волновода, в его глубине данные параметры асимптотически стремятся к постоянным величинам, а вблизи границы данный закон изменения описывает формирование области локализованной приповерхностной неоднородности свойств материала.

Построенные решения имеют форму сходящихся по норме векторных экспоненциальных рядов со слагаемыми, определяемыми с применением векторно-матричных рекуррентных соотношений.

Исследования проводились по теме государственного задания в ФГБОУ ВО «ДонГУ» (код FRRE-2023-0001).

1. Liu H. Propagation of Bleustein-Gulyaev Waves in a Pre-Stressed Layered Piezoelectric Structure / H. Liu, Z.B. Kuang, Z.M. Cai // Ultrasonics. – 2003. – Vol. 41. – P. 397–405.

2. Jin F. The Propagation Behavior of Bleustein-Gulyaev Waves in a Pre-Stressed Piezoelectric Layered Structure / F. Jin , Z. Wang , K. Kishimoto // International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. – 2003. – Vol. 4. – P. 125–138.
3. Kaplunov J. An Explicit Asymptotic Model for the Bleustein – Gulyaev Wave / J. Kaplunov, L. Kossovich, A. Zakharov // Comptes Rendus Mecanique. – 2004. – Vol. 332 (7). – P. 487–492.
4. Приказчиков Д.А. Общее представление для волны Блюштейна-Гуляева / Д.А. Приказчиков, Б. Эрбаш // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – Вып. 7. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/848.html>
5. Желнорович В.А. Поверхностные волны Релея и Блюштейна-Гуляева в упругих пьезоэлектриках при наличии релаксации диэлектрической поляризации / В.А. Желнорович // ПММ. – 2015. – Т. 79, Вып. 2. – С. 273–285.
6. Белубекян В.М., Белубекян М.В., Гараков В.Г. Условия появления волны Гуляева – Блюштейна с учетом нестационарности электрического поля / В.М. Белубекян, М.В. Белубекян, В.Г. Гараков // Доклады Национальной академии наук Армении. Механика. – 2020. – Т. 120, № 3. – С. 174–180.
7. Акустические волны в материалах и элементах конструкций с дефектами, неоднородностями и микроструктурой: монография / М.С. Аносов [и др.]; отв. ред. В.И. Ерофеев, А.О. Мальханов. – Нижний Новгород: Нижегород. гос. техн. ун-т им. Р.Е. Алексеева, 2021. – 311 с.
8. Setter N. Piezoelectric material and devices / N. Setter. – Lausanne, Switzerland: Swiss Federal Institute of Technology, 2002. – 518 p.
9. Hudai Kara Porous PZT ceramics for receiving transducers / Kara Hudai, Ramesh Rajamami, Ron Stevens, Cris R. Bowen // IEEE Trans. UFFC. – 2003. – V. – 50. – N 3. – P. 280–296.
10. Saito Y. Lead-free piezoceramics / Y. Saito, H. Takao, T. Tani, T. Nonoyama, K. Takatori, T. Homma, T. Nagaya, M. Nakamura // Nature. – 2004. – V. 432. – P. 84–87.
11. Heywang W. Piezoelectricity, evolution and future of a technology / W. Heywang, K. Lubitz, W. Wersing. – Berlin: Springer, 2008. – 581 p.
12. Болнокин В.Е. Анализ модели распространения сдвиговых упругих волн в полубесконечном трансверсальноизотропном функционально-градиентном геомассиве / В.Е. Болнокин, А.А. Глухов, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022 – №3 (80). – С. 14–19. – doi: 10.24412/0136-4545-2022-3-14-19. – EDN BOBAVC.
13. Глухов А.А. Интегрирование системы уравнений распространения произвольно ориентированных трехпрямых поверхностных волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022 – №4 (81). – С. 15–22. – doi: 10.24412/0136-4545-2022-4-15-22. – EDN JBNEKR.
14. Карасев Д.С. Интегрирование уравнений распространения связанных электроупругих сдвиговых волн в полупространстве функционально-градиентной пьезокерамики / Д.С. Карасев, С.В. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022 – №4 (81). – С. 47–52. – doi: 10.24412/0136-4545-2022-4-47-52. – EDN RAPMHU.

D.S. Karasev, S.V. Storozhev, V.A. Shaldyrvan

Integration of propagation equations of localized shear electroelastic waves in functional gradient piezoceramics with double exponential in homogeneity.

For a particular version of the system of equations of dynamic electroelastic deformation, which describes the propagation of localized stationary electromechanical Gulyaev-Blustein waves along the surface of a half-space of linearly polarized piezoceramics of class 6mm with continuous transverse inhomogeneity of physical and mechanical characteristics, described by double exponential functions, a numerical-analytical algorithm for obtaining a vector form basic private solutions is proposed

and implemented. The considered variant of describing the heterogeneity of a functionally graded piezoactive material occupying a semi-infinite region characterizes the presence of significant changes in the parameters of the considered deformation model along the thickness of the half-space in the near-surface region and asymptotic smoothing of these changes in its depth. The constructed solutions are represented by norm-convergent vector exponential series with terms determined using vector-matrix recurrence relations.

Keywords: *Gulyaev-Blustein wave propagation model, electroelastic half-space, functional-gradient piezoceramics, double exponential physical-mechanical inhomogeneity, integration of a system of wave equations, iterative analytical algorithm, exponential vector series..*

Получено 29.05.2023

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 51-74:510.22:519.6: 539.3
doi:10.24412/0136-4545-2023-2-56-66
EDN:TVWFZT



©2023. С.Б. Номбре¹, Д.Д. Полянский², С.В. Сторожев³,
Чан Ба Ле Хоанг⁴

УЧЕТ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В МОДЕЛИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ВНУТРЕННЮЮ ПОВЕРХНОСТЬ УПРУГОГО ПОЛОГО ШАРА

Представлена разработка нечетко-множественной методики учета параметрической неопределенности в виде разбросов значений исходных физико-механических и геометрических характеристик в расчетной модели термоупругого состояния полого изотропного шара, включающей применение аппарата нечетких вычислений и эвристического принципа расширения в процессе перехода к нечетко-множественным аргументам в расчетных соотношениях детерминистической версии анализируемой модели. Рассмотрены результаты применения разработанной

¹Номбре Светлана Борисовна – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.b.nombre@donnasa.ru.

Nombre Svetlana Borisovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

²Полянский Дмитрий Дмитриевич – аспирант каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: d.d.polyanskiy@donnasa.ru.

Polyansky Dmitry Dmitrievich – Postgraduate, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

³Сторожев Сергей Валериевич – доктор техн. наук, проф. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.v.storozhev@donnasa.ru.

Storozhev Sergey Valerievich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

⁴Чан Ба Ле Хоанг – канд. техн. наук, зав. каф. физики ф-та общих наук Хошиминского университета природных ресурсов и окружающей среды, Вьетнам, e-mail: Hoangtbl@hcmunre.edu.vn

Tran Ba Le Hoang – Candidate of Technical Sciences, Head of Department, Ho Chi Minh City University of Natural Resources and Environment, Vietnam, Faculty of General Sciences, Chair of Physics.

методики для анализа отдельных вариантов постановки исследуемой проблемы.

Ключевые слова: полый изотропный шар, термоупругое деформирование, температурные внешние воздействия, учет неконтрастности параметров, теоретический численно-аналитический алгоритм, аппарат нечетко-множественных вычислений, эвристический принцип расширения.

Введение. Деформируемые объекты в форме полого шара (сферической оболочки), подверженные интенсивным температурным воздействиям, представляют собой весьма распространенный класс ответственных технологических конструктивных элементов с широким спектром прикладного применения в машинах, приборах и строительных сооружениях, в качестве резервуаров в оборудовании химических и пищевых производств, в качестве элементов аэрокосмической техники [1–6]. Соответственно масштабам их применения и уровню требований к прочности и надежности, проектирование подобных конструкций должно включать все более эффективные прочностные расчетные алгоритмы. Одним из направлений их совершенствования является корректный учет параметрической неопределенности исходных характеристик рассматриваемых моделей, наличие разбросов в экспериментальных данных о свойствах конструкционных материалов, вариативность оценок для характеристик, определяемых на основе субъективных экспертных заключений, наличие проектных технологических допусков для исходных физико-механических и геометрических параметров моделей. Потенциально применимое для этого использование методов вероятностно-стохастического анализа, при всей его эффективности, устанавливает требования к характеру исходной информации о неконтрастных исходных параметрах, которые не всегда достижимы на практике. В этой связи, актуальной остается разработка подходов к учету параметрической неопределенности в моделях термомеханического деформирования шаровидных конструкций с менее жесткими требованиями к неконтрастной исходной информации о разбросах значений исходных параметров. Вариантом решения охарактеризованной проблемы является применение аппарата теории нечетких множеств, в связи с чем цель данной работы заключается в разработке и апробации методики учета параметрической неопределенности в модели обусловленного внутренним нагревом термоупругого состояния полого шара, базирующейся на аппарате нечетких вычислений [7–8] и применении эвристического принципа расширения в процессе перехода к нечетко-множественным аргументам в расчетных соотношениях детерминистической версии рассматриваемой модели [9–10].

1. Расчетные соотношения детерминистической версии модели. В рамках представленных в работах [2–6] исследований математических моделей термоупругого состояния сферических оболочек, данные конструкции рассматриваются в сферических координатах $O\rho\theta\varphi$ с полюсом, размещаемым в геометрическом центре шара, а внутренняя и внешняя граничные поверхности соответственно имеют уравнения $\rho = a$ и $\rho = b$. В рамках предположения о полярно симметричных стационарных температурных воздействиях на внутреннюю поверхность полой сферы, на ней предполагается задание параметра температуры

T_a , а температура внешней поверхности полагается равной нулю. Напряжения $\sigma_{\rho\rho}$ на граничных поверхностях $\rho = a$ и $\rho = b$ отсутствуют. При этом распределение интенсивности температурного поля $T(\rho)$ по толщине оболочки из материала с модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона ν и коэффициентом теплового расширения α_s , описывается [6] представлением

$$T(\rho) = T_a a(b/\rho - 1)(b - a)^{-1}. \quad (1)$$

Компоненты полей напряжений $\sigma_{\rho\rho}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ в области между граничными поверхностями при рассматриваемых граничных условиях имеют выражения

$$\sigma_{\rho\rho} = \lambda ab(b^3 - a^3)^{-1}(a + b + (a^2 + ab + b^2)\rho^{-1} + a^2 b^2 / \rho^3), \quad (2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda ab(b^3 - a^3)^{-1}(a + b + (a^2 + ab + b^2)(2\rho)^{-1} + a^2 b^2 / (2\rho^3)), \quad (3)$$

где

$$\lambda = ET_a \alpha_s (1 - \nu)^{-1}. \quad (4)$$

2. Нечетко-множественный анализ неконтрастности исходных параметров модели. В качестве базирующегося на теории нечетких множеств подхода к анализу влияния факторов параметрической неопределенности, в представляемой работе применяется поэтапное фрагментированное использование аппарата алгебры нечетких величин и модифицированная α -уровневая форма эвристического принципа расширения. Для всех исходных параметров – аргументов расчетных соотношений (1)–(4) детерминистической версии рассматриваемой модели, вводятся нечетко-множественные аналоги \tilde{a} , \tilde{b} , \tilde{E} , $\tilde{\alpha}_s$, $\tilde{\nu}$, \tilde{T}_a . Для исходных неконтрастных параметров рассматриваемой модели получение соответствующих нечетко-множественных величин на базе имеющихся экспериментальных и экспертных данных реализуется на основе выбора типа нечетко-множественного описания с применением комплекса методик фазсификации [7]. Неконтрастные экзогенные параметры \tilde{a} , \tilde{b} , \tilde{E} , $\tilde{\alpha}_s$, $\tilde{\nu}$, \tilde{T}_a оговоренного типа, а также промежуточные и выходные расчетные параметры $\tilde{\lambda}$, \tilde{T} , $\tilde{\sigma}_\rho$, $\tilde{\sigma}_\theta$, представляются разложениями по множествам α -уровней. Так, в случае описания исходных величин \tilde{a} , \tilde{b} , \tilde{E} , $\tilde{\alpha}_s$, $\tilde{\nu}$, \tilde{T}_a несимметричными квазигауссовыми нормальными нечеткими числами, вводимые представления имеют форму

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha], \\ \underline{a}_\alpha &= m_{*a} - \sigma_{*la}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \bar{a}_\alpha = m_{*a} + \sigma_{*ra}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ \tilde{b} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha], \\ \underline{b}_\alpha &= m_{*b} - \sigma_{*lb}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \bar{b}_\alpha = m_{*b} + \sigma_{*rb}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \end{aligned} \quad (5)$$

Учет параметрической неопределенности в модели температурных воздействий

$$\begin{aligned}
\tilde{E} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha], \\
\underline{E}_\alpha &= m_{*E} - \sigma_{*lE}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \overline{E}_\alpha = m_{*E} + \sigma_{*rE}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
\tilde{\alpha}_s &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\alpha}_{s\alpha}, \overline{\alpha}_{s\alpha}], \\
\underline{\alpha}_{s\alpha} &= m_{*\alpha_s} - \sigma_{*l\alpha_s}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \overline{\alpha}_{s\alpha} = m_{*\alpha_s} + \sigma_{*r\alpha_s}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
\tilde{\nu} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha], \\
\underline{\nu}_\alpha &= m_{*\nu} - \sigma_{*l\nu}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \overline{\nu}_\alpha = m_{*\nu} + \sigma_{*r\nu}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
\tilde{T}_a &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{T}_{a\alpha}, \overline{T}_{a\alpha}], \\
\underline{T}_{a\alpha} &= m_{*T_a} - \sigma_{*lT_a}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \overline{T}_{a\alpha} = m_{*T_a} + \sigma_{*rT_a}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}.
\end{aligned}$$

В случае описания \tilde{a} , \tilde{b} , \tilde{E} , $\tilde{\alpha}_s$, $\tilde{\nu}$, \tilde{T}_a треугольными нечеткими числами с соответствующими кортежами реперных точек

$$\begin{aligned}
\tilde{a} &= (a_1, a_2, a_3), \quad \tilde{b} = (b_1, b_2, b_3), \quad \tilde{E} = (E_1, E_2, E_3), \\
\tilde{\alpha}_s &= (\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \alpha_{s3}), \quad \tilde{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3), \quad \tilde{T}_a = (T_{a1}, T_{a2}, T_{a3}),
\end{aligned} \tag{6}$$

в их представлениях разложениями по множествам α – уровней

$$\begin{aligned}
\underline{a}_\alpha &= (1 - \alpha)a_1 + \alpha a_2, \quad \overline{a}_\alpha = \alpha a_2 + (1 - \alpha)a_3; \\
\underline{b}_\alpha &= (1 - \alpha)b_1 + \alpha b_2, \quad \overline{b}_\alpha = \alpha b_2 + (1 - \alpha)b_3; \\
\underline{E}_\alpha &= (1 - \alpha)E_1 + \alpha E_2, \quad \overline{E}_\alpha = \alpha E_2 + (1 - \alpha)E_3; \\
\underline{\alpha}_{s\alpha} &= (1 - \alpha)\alpha_{s1} + \alpha \alpha_{s2}, \quad \overline{\alpha}_{s\alpha} = \alpha \alpha_{s2} + (1 - \alpha)\alpha_{s3}; \\
\underline{\nu}_\alpha &= (1 - \alpha)\nu_1 + \alpha \nu_2, \quad \overline{\nu}_\alpha = \alpha \nu_2 + (1 - \alpha)\nu_3; \\
\underline{T}_{a\alpha} &= (1 - \alpha)T_{a1} + \alpha T_{a2}, \quad \overline{T}_{a\alpha} = \alpha T_{a2} + (1 - \alpha)T_{a3}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Для промежуточных и выходных расчетных параметров далее также используются представления в виде разложений по множествам α –уровней

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha], \quad \tilde{T}(\rho) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{T}_\alpha(\rho), \overline{T}_\alpha(\rho)], \\
\tilde{\sigma}_{\rho\rho}(\rho) &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{\rho\rho\alpha}(\rho), \overline{\sigma}_{\rho\rho\alpha}(\rho)], \quad \tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\rho) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{\theta\theta\alpha}(\rho), \overline{\sigma}_{\theta\theta\alpha}(\rho)].
\end{aligned} \tag{8}$$

В разрабатываемом расчетном алгоритме используется модифицированный α -уровневый вариант эвристического принципа расширения [8–10], в процессе применения которого учитываются оценки, получаемые на основе дополнительных исследований, и справедливые во всех областях определения соответствующих параметров-аргументов

$$\partial T/\partial T_a \geq 0, \quad \partial T/\partial a \geq 0, \quad \partial T/\partial b \geq 0; \quad (9)$$

$$\partial \lambda/\partial T_a \geq 0, \quad \partial \lambda/\partial \nu \geq 0, \quad \partial \lambda/\partial \alpha_s \geq 0, \quad \partial \lambda/\partial E \geq 0; \quad (10)$$

$$\partial \sigma_{\rho\rho}/\partial T_a \geq 0, \quad \partial \sigma_{\rho\rho}/\partial E \geq 0, \quad \partial \sigma_{\rho\rho}/\partial \alpha_s \geq 0, \quad \partial \sigma_{\rho\rho}/\partial \nu \geq 0; \quad (11)$$

$$\partial \sigma_{\theta\theta}/\partial T_a \geq 0, \quad \partial \sigma_{\theta\theta}/\partial E \geq 0, \quad \partial \sigma_{\theta\theta}/\partial \alpha_s \geq 0, \quad \partial \sigma_{\theta\theta}/\partial \nu \geq 0. \quad (12)$$

С учетом оценок (9)–(12) можно получить следующие расчетные соотношения:

$$\underline{\lambda}_\alpha = \underline{T}_{\alpha\alpha} \underline{E}_\alpha \underline{a}_{s\alpha} (1 - \underline{\nu}_\alpha)^{-1}, \quad \bar{\lambda}_\alpha = \bar{T}_{\alpha\alpha} \bar{E}_\alpha \bar{a}_{s\alpha} (1 - \bar{\nu}_\alpha)^{-1}; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \underline{T}_\alpha(\rho) &= \underline{T}_{a\alpha} \underline{a}_\alpha (\underline{b}_\alpha/\rho - 1) (\underline{b}_\alpha - \underline{a}_\alpha)^{-1}, \\ \bar{T}_\alpha(\rho) &= \bar{T}_{a\alpha} \bar{a}_\alpha (\bar{b}_\alpha/\rho - 1) (\bar{b}_\alpha - \bar{a}_\alpha)^{-1}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\underline{\sigma}_{\rho\rho\alpha} = \inf_{\substack{a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha]}} \underline{\lambda}_\alpha ab (b^3 - a^3)^{-1} (a + b + (a^2 + ab + b^2)\rho^{-1} + a^2 b^2/\rho^3), \quad (15)$$

$$\bar{\sigma}_{\rho\rho\alpha} = \sup_{\substack{a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha]}} \bar{\lambda}_\alpha ab (b^3 - a^3)^{-1} (a + b + (a^2 + ab + b^2)\rho^{-1} + a^2 b^2/\rho^3);$$

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{\theta\theta\alpha} &= \inf_{\substack{a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha]}} \underline{\lambda}_\alpha ab (b^3 - a^3)^{-1} (a + b + (a^2 + ab + b^2)(2\rho)^{-1} + a^2 b^2/(2\rho^3)), \\ \bar{\sigma}_{\theta\theta\alpha} &= \sup_{\substack{a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha]}} \bar{\lambda}_\alpha ab (b^3 - a^3)^{-1} (a + b + (a^2 + ab + b^2)(2\rho)^{-1} + a^2 b^2/(2\rho^3)). \end{aligned} \quad (16)$$

В случае описания исходных неконтрастных параметров треугольными нечеткими числами, кортежи реперных значений представления для нечетко-множественных характеристик $\tilde{\lambda}$, $\tilde{T}(\rho)$ могут быть также найдены с применением правил арифметики нечетких чисел данного типа [7–8] в форме

$$\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad (17)$$

$$\lambda_1 = T_{a1}E_1\alpha_{s1}(1 - \nu_1)^{-1}, \quad \lambda_2 = T_{a2}E_2\alpha_{s2}(1 - \nu_2)^{-1},$$

$$\lambda_3 = T_{a3}E_3\alpha_{s3}(1 - \nu_3)^{-1};$$

$$\tilde{T}(\rho) = (T_1(\rho), T_2(\rho), T_3(\rho)), \quad (18)$$

$$T_1(\rho) = T_{a1}a_1(b_1/\rho - 1)(b_3 - a_1)^{-1},$$

$$T_2(\rho) = T_{a2}a_2(b_2/\rho - 1)(b_2 - a_2)^{-1},$$

$$T_3(\rho) = T_{a3}a_3(b_3/\rho - 1)(b_1 - a_3)^{-1}.$$

Расчетные соотношения (13)–(18) и представляют разработанный алгоритм учета параметрической неопределенности в модели термоупругого состояния нагреваемого по внутренней поверхности полого шара, базирующийся на аппарате нечетких вычислений.

3. Результаты вычислительных экспериментов. Численное моделирование с применением разработанного подхода реализовано применительно к сферической конструкции из стали без учета возможных разбросов в размерах $a = 1.20 L_*$, $b = 1.240 L_*$, $L_* = 1$ м, неконтрастные физико-механические параметры которой, в случае их описания треугольными нечеткими числами \tilde{E} , $\tilde{\alpha}_s$, $\tilde{\nu}$, задавались в виде

$$\tilde{E} = (19.7E_*, 20.0E_*, 20.6E_*), \quad \tilde{\alpha}_s = (11A_*, 14A_*, 18A_*),$$

$$\tilde{\nu} = (0.29, 0.3, 0.305), \quad E_* = 10^4 \text{ МПа}, \quad A_* = 10^{-6} \text{ град}^{-1}. \quad (19)$$

Параметр внешнего температурного воздействия в рассматриваемом случае имеет представление

$$\tilde{T}_a = (145 T_*, 150 T_*, 165 T_*), \quad T_* = 1^\circ\text{C}. \quad (20)$$

Исследование данного варианта модели проведено на базе расчетного алгоритма, реализуемого с использованием соотношений (13)–(16) без учета неконтрастности геометрических параметров a и b . Последовательно определяемые дискретные описания нечетко-множественных выходных характеристик исследуемой модели граничными значениями интервалов α – уровней для $\rho_m = (a + b)/2$ представлены в таблице 1, и позволяют для данного варианта исходных параметров оценивать разбросы вычисляемых эндогенных показателей относительно соответствующих модальных значений. Вычисляемые модальные значения оцениваемых неопределенных характеристик для трех значений ρ из интервала $\rho \in [a, b]$ даны в таблице 2. Рассчитанные профили функций принадлежности для нечетко-множественных характеристик $\tilde{T}(\rho)$, $\tilde{\sigma}_{\rho\rho}(\rho)$, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\rho)$ при значениях параметра $\rho_1 = 0.9a + 0.1b$, $\rho_2 = 0.5a + 0.5b$, $\rho_3 = 0.1a + 0.9b$ представлены на рисунках 1–9.

Таблица 1.

Значения α	Эндогенные термомеханические расчетные характеристики					
	$T_\alpha(\rho_m), C^\circ$	$T_\alpha(\rho_m), C^\circ$	$\underline{\sigma}_{\rho\rho\alpha}(\rho_m), \text{МПа}$	$\bar{\sigma}_{\rho\rho\alpha}(\rho_m), \text{МПа}$	$\underline{\sigma}_{\theta\theta\alpha}(\rho_m), \text{МПа}$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta\alpha}(\rho_m), \text{МПа}$
0	71.31	81.15	-7.21	-3.63	0.60	1.20
0.05	71.43	80.78	-7.09	-3.69	0.61	1.18
0.1	71.56	80.41	-6.96	-3.75	0.62	1.16
0.15	71.68	80.04	-6.84	-3.81	0.64	1.14
0.2	71.80	79.67	-6.72	-3.87	0.65	1.12
0.25	71.93	79.30	-6.60	-3.94	0.66	1.10
0.3	72.05	78.93	-6.48	-4.00	0.67	1.08
0.35	72.17	78.57	-6.36	-4.06	0.68	1.06
0.4	72.30	78.20	-6.24	-4.13	0.69	1.04
0.45	72.42	77.83	-6.12	-4.19	0.70	1.02
0.5	72.54	77.46	-6.01	-4.25	0.71	1.00
0.55	72.66	77.09	-5.89	-4.32	0.72	0.98
0.6	72.79	76.72	-5.78	-4.38	0.73	0.96
0.65	72.91	76.35	-5.67	-4.45	0.74	0.94
0.7	73.03	75.98	-5.56	-4.51	0.75	0.93
0.75	73.16	75.61	-5.45	-4.58	0.76	0.91
0.8	73.28	75.25	-5.34	-4.65	0.77	0.89
0.85	73.40	74.88	-5.23	-4.71	0.79	0.87
0.9	73.52	74.51	-5.13	-4.78	0.80	0.85
0.95	73.65	74.14	-5.02	-4.85	0.81	0.84
1.0	73.77	73.77	-4.92	-4.92	0.82	0.82

Таблица 2.

Значения ρ_i	Модальные значения неконтрастных эндогенных характеристик		
	$T_*(\rho_i), C^\circ$	$\tilde{\sigma}_{\rho\rho*}(\rho_i), \text{МПа}$	$\tilde{\sigma}_{\theta\theta*}(\rho_i), \text{МПа}$
0.9 a + 0.1 b	134.55	-1.825	-243.85
0.5 a + 0.5 b	73.77	-4.916	0.82
0.1 a + 0.9 b	14.56	-1.717	236.05

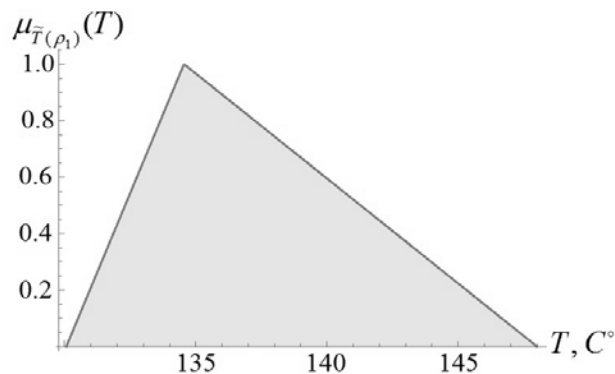


Рис. 1. Профиль функции принадлежности $\mu_{\bar{T}(\rho_1)}(T)$



Рис. 2. Профиль функции принадлежности $\mu_{\bar{\sigma}_{\rho\rho}(\rho_1)}(\sigma_{\rho\rho})$

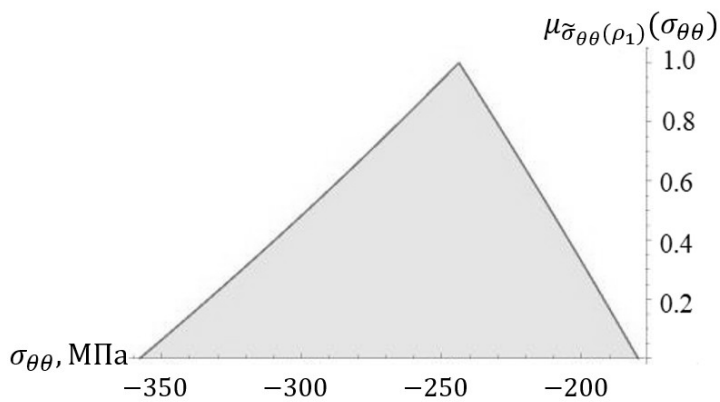


Рис. 3. Профиль функции принадлежности $\mu_{\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\rho_1)}(\sigma_{\theta\theta})$

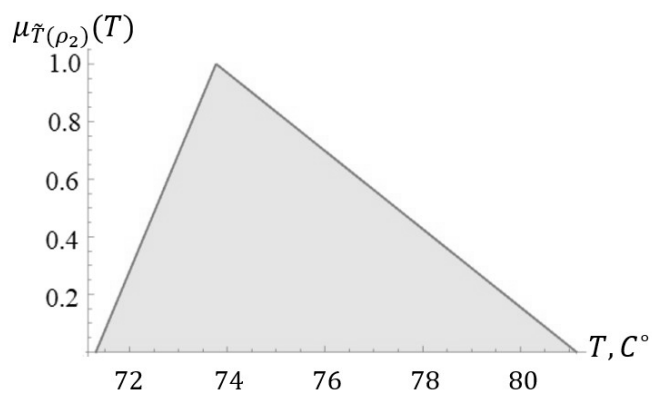


Рис. 4. Профиль функции принадлежности $\mu_{\bar{T}(\rho_2)}(T)$

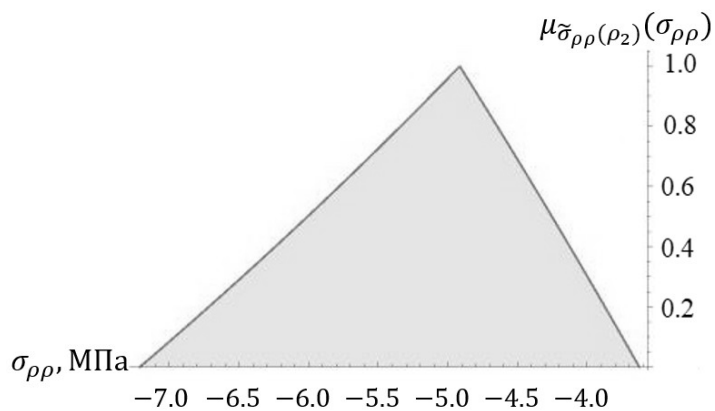


Рис. 5. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{\rho\rho}(\rho_2)}(\sigma_{\rho\rho})$

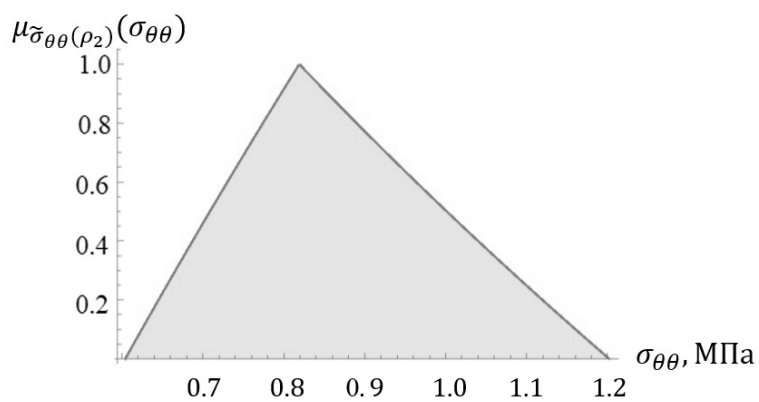


Рис. 6. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\rho_2)}(\sigma_{\theta\theta})$

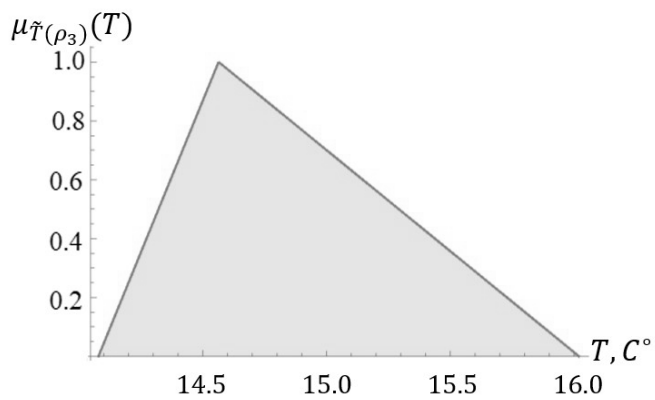


Рис. 7. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{T}(\rho_3)}(T)$

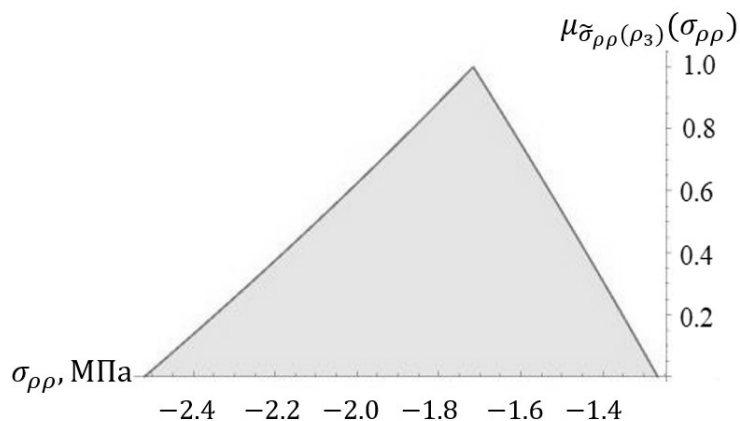


Рис. 8. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{\rho\rho}(\rho_3)}(\sigma_{\rho\rho})$

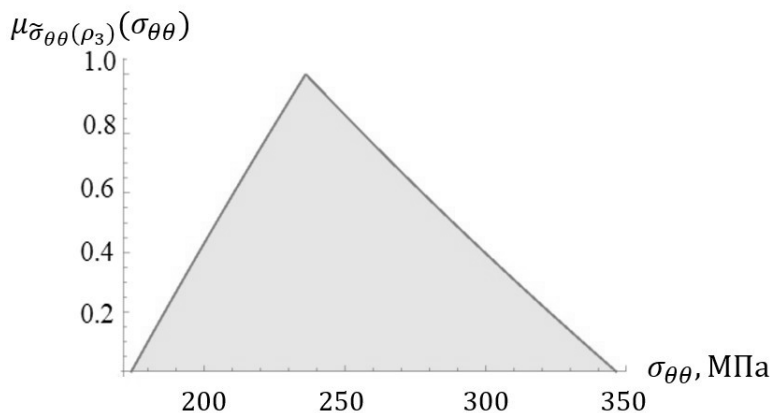


Рис. 9. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\rho_3)}(\sigma_{\theta\theta})$

Анализ полученных расчетных данных указывает на сопоставимость предельных величин разбросов на интервалах носителей для экзогенных и эндогенных нечетко-множественных величин.

Заключение. Результатом представленных в работе исследований является осуществленная разработка и количественная цифровая апробации численно-аналитической методики учета параметрической неопределенности в модели стационарного термоупругого состояния полого изотропного шара, обусловленного равномерным нагревом внутренней полости с поддержанием на ее поверхности постоянной температуры. Методика базируется на аппарате нечетких вычислений и применении эвристического принципа расширения в процессе перехода к нечетко-множественным аргументам в расчетных соотношениях, полученных для детерминистической версии рассматриваемой модели.

Исследования проводились по теме государственного задания в ФГБОУ ВО «ДонГУ» (код FRRE-2023-0001).

1. *Бажанов В.А.* Расчет конструкций на тепловые воздействия / В.А. Бажанов, И.И. Гольденблат, Н.А. Николаенко, А.М. Синюков. – М.: Машиностроение, 1969. – 599 с.
2. *Коваленко А.Д.* Термоупругость / А.Д. Коваленко. – К.: Вища школа, 1975. – 215 с.
3. *Подстригач Я.С.* Термоупругость тонких оболочек / Я.С. Подстригач. – К.: Наукова думка, 1978. – 343 с.
4. *Миронов Д.Н.* Решение стационарной задачи термоупругости и термопластичности в приближении эффективной модели для тела сферической формы / Д.Н. Миронов, В.П. Гончаренко, Ю.А. Чигарева, В.А. Чигарев // Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник. – 2016. – Вып. 31. – С. 185–195.
5. *Мурашкин Е.В.* Термоупругопластическое деформирование многослойного шара / Е.В. Мурашкин, Е.П. Дац // Механика твердого тела. – 2017. – № 5. – С. 1–7.
6. *Сёмка Э.В.* Упругопластическое состояние полого шара / Э.В. Сёмка // Вестник инженерной школы ДВФУ. – 2020. – № 3(44). – С. 3–12. doi: <http://www.dx.doi.org/10.24866/2227-6858/2020-3-1>
7. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / М. Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
8. *Нгуен Куок Ши* Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.
9. *Дремов В.В.* Нечетко-множественные модификации расчетных соотношений для усредненных термомеханических характеристик пакета слоистого углепластика: теоретический алгоритм / В.В. Дремов, Н.И. Захаров, С.В. Сторожев, Д.Д. Полянский // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022 – №3 (80). – С. 77–88. – doi:10.24412/0136-4545-2022-3-77-88. – EDN PPIRKN.
10. *Номбре С.Б.* Анализ неконтрастной модели осесимметричного термонапряженного состояния полого цилиндра / С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – №4 (81). – С. 63–76. – doi:10.24412/0136-4545-2022-4-63-76. – EDN TOGBNE.

S.B. Nombbre, D.D. Polyansky, S.V. Storozhev, Tran Ba Le Hoang

Taking into account parametric uncertainty in the model of temperature effects on the inner surface of an elastic hollow ball.

The development of a fuzzy-set methodology for taking into account parametric uncertainty in the form of scatters in the values of the initial physical-mechanical and geometric characteristics in the calculation model of the thermoelastic state of a hollow isotropic ball is presented, including the use of fuzzy calculation apparatus and the heuristic principle of expansion in the process of transition to fuzzy-set arguments in the calculation relations of the deterministic versions of the analyzed model. The results of applying the developed methodology for individual options for setting the problem under study are considered.

Keywords: *hollow isotropic ball, thermoelastic deformation, external temperature influences, non-contrast parameters, theoretical numerical-analytical algorithm, fuzzy set calculation apparatus, heuristic expansion principle.*

Получено 18.05.2023

ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

УДК 622.831.24

doi:10.24412/0136-4545-2023-2-67-73

EDN:WDWPRW



©2023. Н.И. Лобков¹, В.С. Маевский², А.А. Лобков³

ОСОБЕННОСТИ РАЗВИТИЯ ОБЛАСТИ СДВИЖЕНИЯ ПОРОДНОГО МАССИВА В РЕЗУЛЬТАТЕ ВЫЕМКИ УГЛЯ

Приведены результаты исследования интенсивных сдвижений породных слоев над выработанным пространством. Установлено, что шаг посадки основной кровли зависит от величины предельного пролета и динамически изменяется в пределах выемочного поля лавы.

Ключевые слова: лава, выработанное пространство, размер выработанного пространства, породные слои, основная кровля, разрушение слоя, обрушение слоя

Введение. Вмещающий угольные пласты массив в земной коре представлен слоями осадочных пород. Породные слои изначально находятся под давлением, сформированным весом вышележащих пород. Другими словами, каждый породный слой горного массива находится в напряженном состоянии. Ненарушенный угольный пласт в нетронутом породном массиве можно представить как твердое тело, содержащее твердые, жидкие и газообразные компоненты.

Равновесие нетронутого угольного пласта, как сложной физико-химической системы, определяется физико-химическими превращениями, зависящими от глубины залегания, давления газа, температуры, а также от величины действующих напряжений в рассматриваемой точке массива. Величина вертикальных

¹Лобков Николай Иванович – доктор техн. наук, зав. отд. управления геомеханическими и технологическими процессами РАНИМИ, Донецк, e-mail: nilobkov@mail.ru.

Lobkov Nikolay Ivanovich – Doctor of Technical Sciences, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geomechanical and Technological Processes Management.

²Маевский Валерий Стефанович – доктор техн. наук, вед. науч. сотр. отд. управления геомеханическими и технологическими процессами РАНИМИ, Донецк, e-mail: ranimi@ranimi.org.

Mayevsky Valery Stefanovich – Doctor of Technical Sciences, Leading Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geomechanical and Technological Processes Management.

³Лобков Артем Андреевич – канд. техн. наук, инженер ОГВГСО МЧС, Донецк, e-mail: Cyrizan@yandex.ru.

Lobkov Artem Andreevich – Candidate of Technical Sciences, Engineer, Operational State Paramilitary Mountain Rescue Squad of the Ministry of Emergency Situations.

сжимающих напряжений в каждой точке массива определяется, как произведение объемного веса пород и глубины залегания (γH). В процессе ведения горных работ (проведения выработок, выемки угля) происходит перераспределение напряжений, под действием которых формируется горное давление, определяющее состояние угольного пласта [1].

В контексте изложенного, целью данной работы является определение геодинамических условий разрушения и обрушения слоя основной кровли над выработанным пространством.

1. Постановка задачи. При выемке угля происходит перераспределение напряжений и в породах кровли. Если представить породный слой в кровле пласта как плиту, жестко защемленную с двух, трех либо четырех сторон, то наибольшие изменения не только вертикальных, но и горизонтальных напряжений происходят в местах защемления. Перераспределения напряжений в изгибающихся над выработанным пространством слоях происходят с разной интенсивностью.

На интенсивность перераспределения напряжений влияют прочностные и механические свойства пород, а также удаление породного слоя от разрабатываемого пласта. Подобные перераспределения напряжений оказывают влияние на процессы разрушения и обрушения породных слоев, ведут к снижению безопасности ведения горных работ.

Для совершенствования технологии безопасного ведения горных работ необходимо изучить характер перераспределения напряжений, существующих в краевой зоне угольного пласта. При теоретическом рассмотрении этой проблемы к породным слоям до их разрушения могут быть применены законы линейных упругих деформаций сплошной среды. Это позволяет прогнозировать области пониженных механических напряжений, в которых возможно раскрытие трещин в породных слоях и обрушение породных слоев.

Аналитические исследования процесса изгиба породных слоев, проведенные с помощью компьютерного моделирования и использованием программы «Ansys», показывают характер распределения горизонтальных сжимающих и растягивающих напряжений в каждом слое [1]. На рисунке 1 показано распределение горизонтальных растягивающих и сжимающих напряжений при изгибе слоя 1 (основная кровля), как балки, жестко защемленной с двух сторон. Подобный изгиб характерен до первичной посадки основной кровли. Обрушение возможно при достижении слоем основной кровли предельного пролета. Изгибается, разрушается и обрушается мощный породный слой 1. Слои 2–4 являются слоями пригрузки и деформируются вместе со слоем 1.

Предельные перед обрушением пролеты кровли слоев 4–2, значительно меньшей величины, чем у слоя 1. Поэтому они обрушаются раньше слоя 1 и собственным весом пригружают слой 1. При предельном пролете слоя перед обрушением в точках **а** и **б** концентрируются горизонтальные растягивающие напряжения, под действием которых зарождаются магистральные трещины, пересекающие слой 1 по всей мощности. Распространение трещины от точки **а** по всей мощности слоя опережает распространение трещины из точки **б** за счет сжатия устья

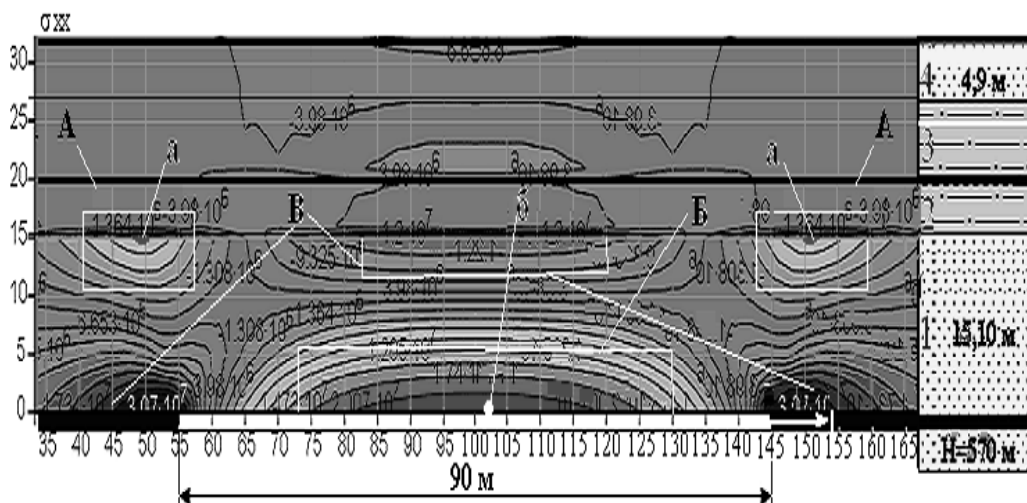


Рис. 1. Распределение горизонтальных напряжений в слоях при их изгибе: 1...4 – породные слои; А, Б – растягивающие напряжения соответственно у верхней и нижней кромки слоя 1; В – горизонтальные сжимающие напряжения; а, б – точки зарождения трещины соответственно на верхней и нижней кромках слоя.

трещины горизонтальными сжимающими напряжениями, сконцентрированными у верхней кромки слоя В. В пласте в зоне опорного давления за счет разрушения призабойной части пласта горизонтальные сжимающие напряжения ускоряют развитие трещины.

Особенности строения породного массива над пластом определяют характер разрушения и обрушения основной кровли в призабойном пространстве под действием горизонтальных растягивающих напряжений.

2. Экспериментальные исследования разрушения и обрушения породного слоя. В результате натурных и экспериментальных исследований установлено влияние подвигания очистного забоя на разрушение и обрушение основной кровли [2, 3]. При подвигании очистного забоя увеличивается длина предельного пролета.

На рисунке 2 показан характер изменения конвергенции боковых пород в призабойном пространстве лавы.

Из рисунка видно нарастание конвергенции с увеличением предельного пролета и с увеличением отхода лавы от предыдущего обрушения основной кровли. На рисунке 3 приведен вид разрушения основной кровли при первичной посадке.

При пересечении магистральной трещиной слоя основной кровли происходит ее обрушение. Аналогичное разрушение основной кровли происходит в период вторичной посадки, представленной консолью.

Обрушение и разрушение, обусловленное практически мгновенным пересечением магистральной трещиной слоя по всей его мощности, также происходит практически мгновенно.

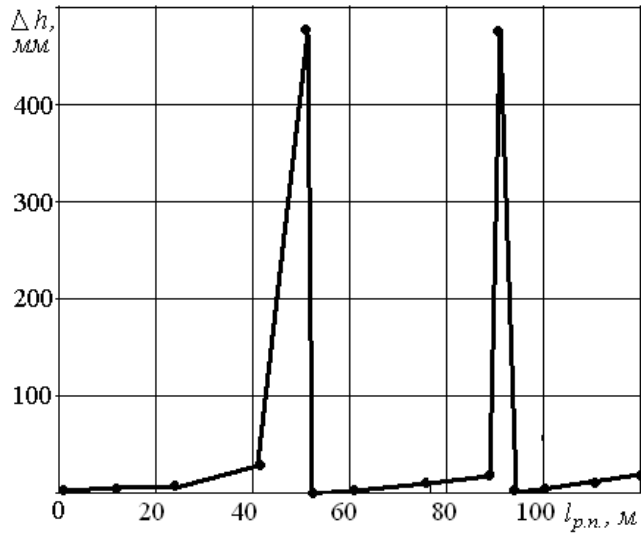


Рис. 2. Изменение конвергенции боковых пород пласта Δh в зависимости от отхода лавы от предыдущего обрушения $l_{p.n.}$.

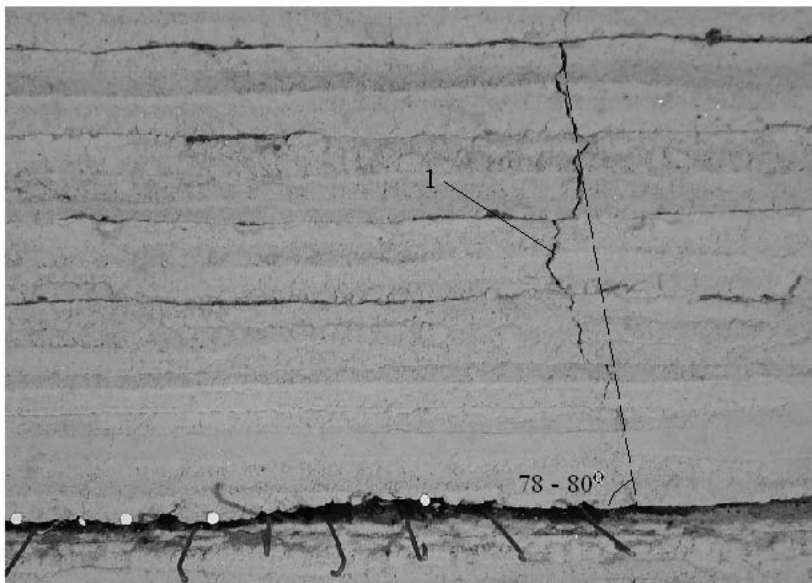


Рис. 3. Образование магистральной трещины при изгибе и разрушении слоя основной кровли.

3. Аналитическое описание процесса разрушения породного слоя.

Величину предельного пролета группы слоев кровли можно определить из условия равенства высвобождающейся упругой энергии слоя при образовании трещины длиной Δl и затраченной энергии на ее образование [5]:

$$-\Delta W = \Delta \Gamma, \quad (1)$$

где ΔW – высвобождающаяся упругая энергия при образовании трещины длиной Δa ; $\Delta \Gamma$ – энергия, которую необходимо затратить на образование трещины длиной Δa .

Условие для образования трещины [5] записывается в виде

$$\frac{2\pi\sigma^2 l_T}{E} \Delta l_T = 4\Delta l_T, \quad (2)$$

или

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\Gamma}{\pi l_T}},$$

где σ – действующее напряжение, МПа; l_T – критическая длина трещины, м; E – модуль упругости, МПа; Γ – поверхностная энергия тела, Дж/м².

Учитывая нарушенность вмещающего массива, разрушение породного слоя при изгибе начинается с роста существующей трещины, критическая длина которой $l_{кр}$, м определяется из выражения

$$l_{кр} = \frac{2EG_c}{\pi\sigma_p^2}, \quad (3)$$

где G_c – эффективная поверхностная энергия, Дж/м²; σ_p – предел прочности породы на растяжение, МПа.

Величина горизонтальных напряжений в породном слое может быть определена, как напряжение в изогнутой балке при ее жестком закреплении с двух сторон на опорах [6]

$$\sigma_p = \frac{ql_{пр}^2}{2h^2}, \quad (4)$$

либо как напряжение при изгибе консольной балки с жестким закреплением

$$\sigma_p = \frac{3ql_{пр}^2}{h^2}, \quad (5)$$

где q – распределенная нагрузка на породный слой, Мн/м²; $l_{пр}$ – предельный пролет слоя перед обрушением, м; h – мощность несущего породного слоя, м.

Величина распределенной нагрузки q_i , Мн/м², обусловленной весом одного i -го слоя, определяется выражением

$$q_i = \gamma_i h_i, \quad (6)$$

где γ_i , Мн/м³ – объемный вес породы слоя.

Величина распределенной нагрузки q , Мн/м², обусловленной весом группы слоев, записывается в виде

$$q = \sum_{i=1}^n \gamma_i h_i \quad (7)$$

где n – количество слоев в группе.

Подставляя значения действующих напряжений (4)–(7) в (3), получаем выражения для определения предельного пролета кровли над выработанным пространством.

При первичном обрушении породного слоя

$$\ell_{\text{пр}}^2 = \frac{2h_c}{\gamma_c} \sqrt{\frac{2EG_c}{\pi\ell_{\text{кр}}}}, \quad (8)$$

где $\ell_{\text{пр}}$ – предельный пролет породного слоя перед посадкой, м; h_c – мощность рассчитываемого слоя, м; γ_c – объёмная масса породы, н/м³; $\ell_{\text{кр}}$ – критическая длина трещины в слое, м.

При первичном обрушении группы слоев

$$\ell_{\text{пр}}^2 = \frac{2h_c^2}{\sum_{i=1}^n \gamma_i h_i} \sqrt{\frac{2EG_c}{\pi\ell_{\text{кр}}}}, \quad (9)$$

где $\sum_{i=1}^n \gamma_i h_i$ – распределенная нагрузка группы слоев, Мн/м².

Учитывая зависимость предельного пролета изгибающейся группы породных слоев кровли от подвигания лавы и её изгиб, как балки с опорой в точке максимального опорного давления, подтвержденный результатами натурных и лабораторных исследований, можно утверждать, что впереди лавы образуется зона с уменьшенными сжимающими напряжениями над угольным пластом. Образование этих зон (зон разгрузки пласта) происходит периодически, расстояние между ними определяется величиной предельного пролета изгибающейся группы слоев.

Аналогично происходят обрушения каждого породного слоя во вмещающем породном массиве от пласта до поверхности.

Выводы. По итогам исследований установлены следующие закономерности. Во-первых, по мере подвигания лавы увеличивается число породных слоев, приходящих в сдвижение над выработанным пространством. Во-вторых, с ростом выработанного пространства, обусловленного количеством последовательно отработанных лав, зона сдвижения породных слоев достигает дневной поверхности.

Исследования проводились в ФГБНУ «РАНИМИ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 1023020600011-0-2.7.5)

1. Ключко И.И. Особенности изменения напряженного состояния впереди лавы в процессе выемки угля / И.И. Ключко, Н.И. Лобков // Вісті Донецького гірничого інституту. – 2011. – № 2. – С. 135–141.
2. Лобков Н.И. Исследование сдвижения породных слоев над очистными выработками пологих пластов / Н.И. Лобков // Сб. трудов международной научно-техн. конференции “Проблемы механики горно-металлургического комплекса”. – Днепропетровск: НТУ, 2002. – С. 175–176.

3. *Канлыбаева Ж.М.* Закономерности сдвижения горных пород в массиве / Ж.М. Канлыбаева. – Алма-Ата: Наука, 1968. – 108 с.
4. *Лобков Н.И.* Моделирование характера поведения породного массива над выработанным пространством лав / Н.И. Лобков, А.И. Сергиенко, Л.Г. Сергиенко // Зб. наукових праць НГУ. – 2006. – Т. 1, № 26. – С. 56–65.
5. *Griffiths A.* The phenomenon of rupture and flow in solids / A. Griffiths // Phil. Trans. Roy. Soc. – 1920. – A. V. 220. – P. 150–160.
6. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности // Учебник под ред. Г.С. Варданяна – М.: Изд-во АСВ, 1995. – 568 с.

N.I. Lobkov, V.S. Mayevsky, A.A. Lobkov

Features of the development of the field of rock massif displacement as a result of coal mining.

The results of the study of intensive displacements of rock layers over the developed space are presented. It is established that the landing pitch of the main roof depends on the size of the maximum span and dynamically changes within the excavation field of lava.

Keywords: *face, worked-out space, limit span, roof layers, main roof, layer destruction, layer collapse.*

Получено 12.04.2023

УДК 622.834:658.011.56
doi:10.24412/0136-4545-2023-2-74-85
EDN:XEWFNC



©2023. В.Б. Скаженик¹, И.В. Чернышенко², Н.Н. Грищенко³,
Ф.М. Голубев⁴

ПРОГНОЗ СДВИЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ОСНОВЕ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Проведен анализ методов прогноза сдвижений и деформаций земной поверхности при подработке подземными горными выработками. Выделены особенности методов, их достоинства и недостатки. Рассмотрены численные методы и программные средства, реализующие эти методы. Отмечены современные требования к методам прогноза сдвижений и деформаций на основе компьютерного моделирования. Представлены результаты использования программного обеспечения для пространственной визуализации сдвижений земной поверхности а также результаты визуального сравнения мульды сдвижения, полученной при использовании метода типовых кривых и вероятностного метода. Сформулированы основные направления совершенствования методов прогноза последствий подработки земной поверхности на основе компьютерного моделирования.

Ключевые слова: сдвижения земной поверхности, вероятностный метод, программное обеспечение, пространственная визуализация, методы прогноза.

Введение. Одной из насущных проблем Донбасса является проявление последствий подработки горными выработками угольных шахт территорий насе-

¹Скаженик Владимир Борисович – канд. техн. наук, доцент каф. разработки месторождений полезных ископаемых ДонНТУ, Донецк, e-mail: geosoft.svb@gmail.com.

Skazhenik Vladimir Borisovich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Donetsk National Technical University, Chair of Development of Mineral Deposits.

²Чернышенко Иван Владимирович – аспирант каф. разработки месторождений полезных ископаемых ДонНТУ, Донецк, e-mail: i.w.tschernyschenko@gmail.com.

Chernyshenko Ivan Vladimirovich – Postgraduate, Donetsk National Technical University, Donetsk, Chair of Development of Mineral Deposits.

³Грищенко Николай Николаевич – доктор техн. наук, зав. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНМИ, Донецк, e-mail: gringm@gmail.com.

Grishchenkov Nikolai Nikolaevich – Doctor of Technical Sciences, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

⁴Голубев Филипп Максимович – канд. техн. наук, вед. науч. сотр. отд. сдвижения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНМИ, Донецк, e-mail: f_golubev@list.ru.

Golubev Philipp Maksimovich – Candidate of Technical Sciences, Leading Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

ленных пунктов и инфраструктурных объектов. Вызванные подземными очистными работами сдвижения и деформации земной поверхности приводят к разрушению сооружений, объектов инфраструктуры и природных объектов, к значительному экономическому ущербу.

Повышение качества принимаемых решений и, соответственно, снижения ущерба, можно достичь за счет повышения достоверности прогноза сдвижений и деформаций земной поверхности на основе адекватных моделей. Однако моделирование процессов, происходящих при подработке слоев горных пород, является сложной задачей из-за большого количества влияющих факторов и их неоднозначного влияния в различных условиях.

Многообразие моделей прогноза сдвижений и деформаций массива горных пород предопределяется множеством возможных состояний моделируемой среды, ее неоднородностью и различными свойствами горных пород. Обычно рассматривают модели упругого, неупругого, пластического деформирования, а также модели разрушения, потери сплошности массива горных пород. Выделяют модели сплошных, блочных, слоистых, дискретных сред. Однако в силу неточности исходной информации о структуре и качественных характеристиках массива горных пород, а также неадекватности теоретических моделей, обусловленной упрощениями, в основу многих методов прогноза сдвижений и деформаций земной поверхности положены зависимости и закономерности, установленные экспериментальным путем [1].

Развитие компьютерных технологий обработки информации предопределяет возможность и целесообразность разработки новых методов моделирования и прогноза процессов сдвижений и деформаций горных пород.

Цель данной работы заключается в анализе существующих методов прогноза сдвижений и деформаций земной поверхности и разработке методических подходов к созданию систем прогноза на основе компьютерного моделирования.

1. Характеристика подходов к решению рассматриваемой проблемы. При расчете сдвижений и деформаций горных пород и земной поверхности выделяют эмпирические, полуэмпирические, численные методы (табл. 1).

Наиболее распространенными являются эмпирические или полуэмпирические методы. Эмпирические методы основаны на экспериментальных зависимостях и закономерностях, полученных в частных условиях. В силу неповторимости условий разработки месторождений, точность и надежность прогноза на основе этих методов может существенно снижаться.

Широкое распространение получили методы типовых кривых, устанавливающих характер и параметры сдвижения земной поверхности [1]. Среди этих методов выделяют: метод характерных точек (определяются границы влияния подземных горных работ и отдельные точки, характеризующие мульду оседания); метод типового распределения оседаний в мульде сдвижений (общий вид мульды устанавливается предварительно и задается в относительных единицах; в зависимости от конкретных условий кривая оседания масштабируется).

Метод Кнотте в качестве исходных данных использует максимальное воз-

Таблица 1. Особенности и недостатки методов прогноза сдвижений горных пород

Название метода	Особенности метода, достоинства	Недостатки метода
Метод интеграционных сеток.	Интеграционная сетка строится по данным натуральных измерений оседаний.	Учитываются не все значимые факторы.
Методы типовых кривых.	Параметры деформационных процессов определяются через переменные коэффициенты, установленные в результате натуральных наблюдений.	Применение ограничено районами, где условия идентичны.
Основанные на функциях влияния (метод Кнотге, метод Санна, метод Бейера, метод Литвинишина [2], Тригонометрическая функция Бальса, степенная функция Бейера, экспоненциальная функция Занна и Эрхардта-Зауэра [3].	Функции влияния описывают характер и степень влияния элементарных площадок подработки на земную поверхность.	Форма мульды идеализирована. В качестве исходных данных используются не все факторы, которые в действительности влияют на процесс.
Метод конечных элементов (FEM - Finite Element Method).	Основан на теории упругости. Учитывается картина распределения напряжений в очистной выработке. Есть возможность учета нелинейного характера деформирования. Есть возможность учета фактора времени. Реализован в программах Ansys, Comsol, Midas, Plaxis, Abaqus, ZSoil.	Требуются большие вычислительные возможности компьютерной техники [4]. Используются методы неявного решения, тогда как проблемы с высокой нелинейностью, лучше всего решаются кодами, использующими метод явного решения [5].
Метод конечных разностей (FDM - Finite Difference Method).	Используется схема расчета Лагранжа, позволяющая материалам поддаваться и течь, а сетке деформироваться (в режиме больших деформаций) и перемещаться вместе с представленным материалом, и встроенный язык программирования, позволяющий создавать новые функции и изменение моделей поведения или параметров - [5, 6]. Реализован в программах FLAC (Fast Lagrangian Analysis of Continua), FLAC3D.	Ограничения при работе со сложными геометрическими областями.

Таблица 1. Продолжение

Название метода	Особенности метода, достоинства	Недостатки метода
Метод дискретных элементов (DEM - Discrete Element Method).	DEM применяется для условий, описываемых как блочные, когда необходимо явно моделировать множество стыков. [5]. Реализован в программах PFC2D, UDEC, 3DEC, DDA.	Ограничения на количество рассматриваемых в модели элементов, обусловленное вычислительными возможностями.
Метод граничных элементов (BEM - Boundary Element Method).	Возможно моделирование бесконечно больших областей; требует меньших вычислительных возможностей, чем метод конечных элементов; обеспечивает моделирование распространения трещин в сплошных средах.	Ограничения при моделировании неоднородных материалов, при моделировании нелинейного поведения материала (например, пластичности) или процессов развития разрушения.

можное оседание и предельный (граничный) угол сдвижения. В данном методе влияние элементарного объема подработки характеризуется кривой нормального распределения вероятностей – кривой Гауса. Такое предположение основано на аналогии влияния подработки и свойства нормального распределения вероятностей, заключающегося в том, что данному распределению подвержены случайные величины, которые являются суммой многих случайных слабо взаимосвязанных величин. Данный метод широко распространен в Китае и рекомендуется правилами Национального угольного бюро [2].

При обосновании вида компьютерной модели для прогноза сдвижений земной поверхности из-за уплотнения горных пород, в работе [7] авторы выделяют эмпирические, аналитические и теоретические модели. Подчеркивается, что эти модели отличаются количеством учитываемых параметров, требуемым на разработку модели временем а также требуемой производительностью компьютерной техники. Для построения компьютерной модели процессов авторы делают выбор в пользу стохастической модели (модели функции влияния). На основе этой модели разработана компьютерная программа, обеспечивающая корректировку параметров моделирования и прогноз сдвижений земной поверхности.

Недостатки использования функции времени Кнотте рассмотрены в работе [8]. С целью устранения этих недостатков, как подчеркивают авторы, применяются методы модификации параметров, кусочного моделирования и теоретического анализа.

В работе [5] авторы отмечают ограниченность применения эмпирических методов областью, соответствующей месту получения исходных данных. По мнению авторов, физические модели помогают понять механизмы смещений горных пород, но являются дорогостоящими и не всегда применимыми для прогноза

сдвижений и деформаций горных пород.

Характеризуя численные методы прогноза сдвижений земной поверхности, авторы отмечают их строгость и возможность расчета напряжений и деформаций в анализируемой области, но для использования этих методов необходимо определять характеристики горных пород с высокой точностью.

Среди численных методов выделяют метод граничных элементов (ВЕМ), метод дискретных элементов (DEM), метод конечных элементов (FEM), метод конечных разностей (FDM) (табл. 1).

Характеризуя эти методы, авторы отдают предпочтение методу конечных разностей, отмечая его преимущества по сравнению с методом конечных элементов: использование метода явного решения в условиях высокой нелинейности функций; моделирование деформирования и перемещения сетки в режиме больших деформаций за счет использования схемы расчета Лагранжа.

В работе [9] прогноз оседания поверхности, вызванной горными работами, также проводится с помощью метода конечных разностей. В качестве исходных данных задаются значения механических параметров массива горных пород. Калибровка модели производится на основе имеющихся данных мониторинга оседания земной поверхности под влиянием подземных горных работ. В результате использования методов экспериментального проектирования и численного моделирования уточняются основные механические характеристики пласта и вмещающих горных пород. Наличие модели позволяет рассматривать различные сценарии развития горных работ и выбирать наиболее рациональный с позиции минимизации отрицательных последствий подработки земной поверхности.

Вопросы точности и надежности прогноза параметров сдвижения горных пород при подработке земной поверхности рассмотрены в работе [10].

Известные программные комплексы, используемые для численного моделирования сдвижений и деформаций земной поверхности, обладают обширным набором моделей поведения горных пород, однако не обеспечивают возможности комплексного моделирования сети горных выработок и динамики развития горных работ. Кроме того, решения, полученные с использованием этих программ, трудно проверяемы [11]. Как правило, в этих моделях нет прямой связи между вариантом развития горных работ и моделью поведения горного массива.

2. Применение модифицированных подходов. С целью повышения точности методов прогноза сдвижений и деформаций земной поверхности использовался программный комплекс, обеспечивающий пространственное компьютерное моделирование и анимацию процессов, происходящих при подработке территорий угольными шахтами.

Для пространственного моделирования объектов угольной шахты использовалась система «Шахта 3D» [12]. Программное обеспечение реализовано на языках высокого уровня; для программирования графических функций используется библиотека OpenGL. Структура программного комплекса включает модули, обеспечивающие пространственное моделирование следующих объектов: угольные пласты, существующие горные выработки, проектные горные выра-

ботки, дневная поверхность, отработанное пространство, данные геологической разведки (траектории скважин и структура пласта), геологические нарушения. Проектные варианты развития горных работ отстраиваются в полуавтоматизированном режиме. Для заданных сечений горных выработок в трехмерной модели указывается трасса проектируемой горной выработки. При этом возможна привязка трассы к поверхности пласта (для пластовых выработок), либо к произвольной плоскости (для полевых выработок). Параметры сформированных объектов фиксируются в базе данных (длины, объемы и др.). Программа имеет развитый экспорт-импорт графических и цифровых данных (форматы Autocad, Gemcom, Micromine).

С использованием разработанного программного обеспечения произведено визуальное сравнение мульды сдвижения земной поверхности, рассчитанной в соответствии с утвержденной методикой, основанной на методе типовых кривых, и мульды, рассчитанной в соответствии с методом Кнотте.

Расчет максимального оседания, в соответствии с утвержденной методикой, производится по формуле [13]

$$\eta_m = q_0 m \cos \alpha N_1 N_2, \quad (1)$$

где q_0 – относительная величина максимального оседания; m – вынимаемая мощность пласта, м; α – угол падения пласта в пределах очистной выработки, градусы; N_1, N_2 – условные коэффициенты, характеризующие степень подработанности земной поверхности, соответственно вкрест простирания и по простиранию.

Оседание в произвольной точке мульды определяется из выражения

$$\eta = \eta_m S(z_x) S(z_y). \quad (2)$$

Значения функций $S(z)$, отражающих характер распределения деформаций в мульде сдвижения, в соответствии с утвержденной методикой определены из данных натурных наблюдений и приняты в расчетах для условий Донецкого угольного бассейна. При этом аргумент z отражает отношение расстояния от расчетной точки до проекции на поверхность линии максимального оседания к длине полумульды.

В соответствии с методом Кнотте, оседание в каждой точке земной поверхности η под влиянием отработки запасов в области S определяется следующим образом [14]:

$$\eta(x, y) = \eta_m \iint_S f(x) f(y) dx dy, \quad (3)$$

где $f(x)$ и $f(y)$ – функции влияния Кнотте;

$$f(x) = \frac{1}{R} e^{-\pi(x/R)^2}; \quad (4)$$

$$f(y) = \frac{1}{R} e^{-\pi(y/R)^2}, \quad (5)$$

где R – радиус влияния подработки, который определяется через среднюю глубину разработки H и предельный (граничный) угол сдвижения β

$$R = H/tg\beta. \quad (6)$$

Оседание в каждой точке земной поверхности $\eta(x, y)$ можно представить через коэффициенты распределения оседания $C(x)$, $C(y)$ [14]

$$\eta(x, y) = \eta_m C(x)C(y); \quad (7)$$

$$C(x) = \frac{1}{2} \left\{ \left[erf\left(\sqrt{\pi}\frac{x}{R}\right) + 1 \right] - \left[erf\left(\sqrt{\pi}\frac{x-l}{R}\right) + 1 \right] \right\}; \quad (8)$$

$$C(y) = \frac{1}{2} \left\{ \left[erf\left(\sqrt{\pi}\frac{y}{R}\right) + 1 \right] - \left[erf\left(\sqrt{\pi}\frac{y-L}{R}\right) + 1 \right] \right\}. \quad (9)$$

С целью сравнения методов задавались одинаковые исходные данные, приведенные в таблице 2.

Таблица 2.

Исходные данные при построении мульды сдвижения земной поверхности

Наименование фактора	Обозначение	Значение
Средняя глубина разработки, м	H	600
Вынимаемая мощность пласта, м	m	1
Угол падения пласта, град	α	18
Длина отработки, м	l	1200
Ширина отработки, м	L	900
Предельный (граничный) угол сдвижения, град	β	70
Коэффициент оседания	q	0,878

Расчеты проводились по сетке 20x20 метров. Результаты визуализации мульды сдвижения, полученной двумя методами, представлены на рисунке 1. Полученные результаты свидетельствуют об идентичности оценки максимального оседания двумя методами, однако область полной подработки, рассчитанная утвержденным методом, меньше.

Для визуализации динамических процессов при подработке подземными очистными работами в среде свободно распространяемого программного обеспечения Blender на языке Python разработаны программные модули для формирования и отображения календарных планов развития горных работ [15]. В соответствии с заданным вариантом развития горных работ и динамическими характеристиками процесса сдвижения земной поверхности моделируются смещения и деформации.

Прогноз сдвижений и деформаций земной поверхности

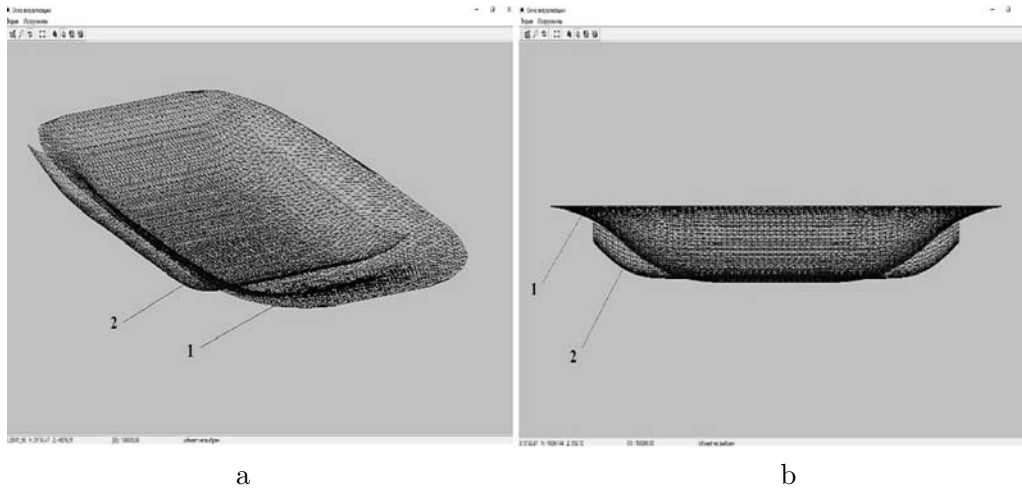


Рис. 1. Муфта сдвижения, рассчитанная утвержденным методом [13] (1) и вероятностным методом (2) (а – вид в 3D; б – проекция на плоскость, параллельную линии простирания пласта)

На рисунке 2 представлена визуализация изменения продольных относительных деформаций при подработке земной поверхности (значения деформаций на рисунке для наглядности увеличены в 200 раз). Такое представление позволяет оценить изменчивость во времени параметров процесса сдвижения земной поверхности и соотнести область распространения деформаций с объектами инфраструктуры, отраженными в модели шахты.

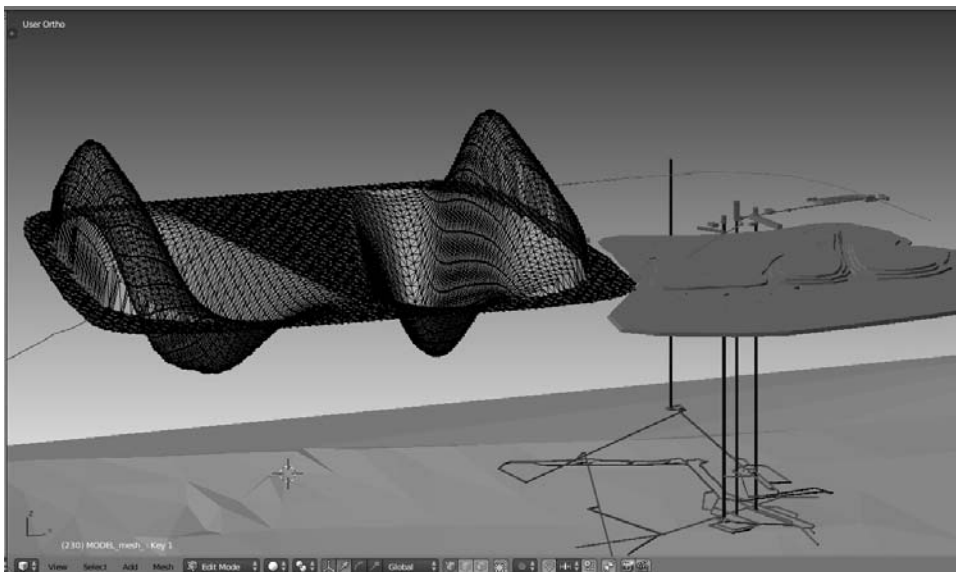


Рис. 2. Визуализация продольных относительных деформаций

С использованием разработанного программного обеспечения получена анимационная модель изменения во времени параметров процесса сдвижения земной поверхности при подработке подземного трубопровода, расположенного продольно относительно направления подвигания очистного забоя. При таком расположении трубопровода знакопеременные деформации растяжения-сжатия распространяются вдоль линии подвигания забоя, и при определенных условиях значения деформаций в распространяемых волнах могут суммироваться, что предопределяет необходимость оценки параметров в динамике [16].

С целью фиксации момента достижения критических деформаций в динамике вдоль трассы трубопровода рассчитывались оседания, горизонтальные сдвижения и горизонтальные деформации (рис. 3). Как видно из рисунка, момент достижения критических деформаций наблюдается в промежуточном положении (при отходе лавы на 980 м, рис. 3 б). В установившемся положении значение горизонтальных деформаций находится в допустимых пределах (рис. 3 в). Данный пример свидетельствует о необходимости моделирования процессов в динамике.

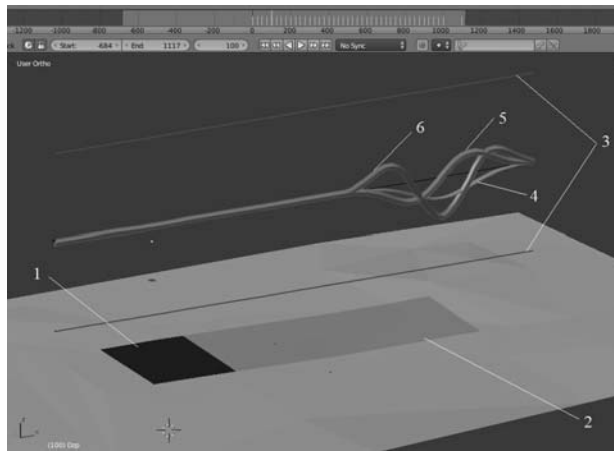
Выводы. Проведенное сравнение методов прогноза деформаций земной поверхности показало их полную сходимость по показателям максимальных оседаний и существенное отличие объема мульды, что может привести к существенным погрешностям расчетов при определении характера распределения деформаций в мульде. В связи с этим, актуальной задачей является совершенствование методов прогноза сдвижений и деформаций земной поверхности под влиянием подземных горных работ, которое подразумевает комплексное моделирование горнодобывающих объектов и процессов, происходящих при подработке. Для их реализации разработаны программные средства, обеспечивающие:

- построение пространственной модели угольной шахты, отражающей структуру вмещающих пород, отработанные и оставшиеся запасы, конфигурацию сети горных выработок, объекты на поверхности;
- моделирование динамики развития горных работ, включающее процедуры формирования календарных планов отработки запасов;
- визуализацию сдвижений и деформаций горных пород во времени, фиксацию моментов времени, в которые значения деформаций превышают допустимые.

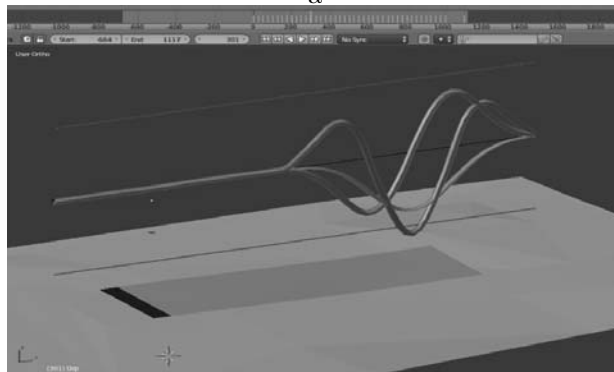
Возможные направления совершенствования методики прогноза последствий подработки земной поверхности угольными шахтами:

- разработка статистических и численных моделей прогноза, учитывающих все значимые факторы, влияющие на сдвижения и деформации земной поверхности;
- разработка программных средств для адаптации моделей на основе обучения с использованием нейросетевых технологий, что предполагает классификацию горнодобывающих объектов в зависимости от горно-геологических и горнотехнических условий и прогноз изменения состояния горного массива в динамике.

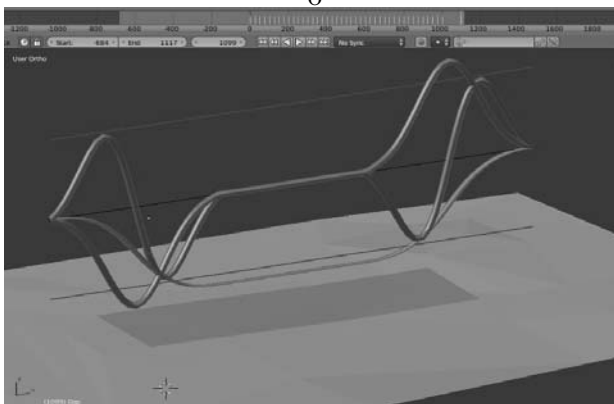
Прогноз сдвигов и деформаций земной поверхности



а



б



в

Рис. 3. Динамика параметров процесса сдвижения земной поверхности при отходе лавы на 780 метров (а), при отходе лавы на 980 метров (б), в установившемся положении (в) (1 – выемочный столб; 2 – отработанная часть лавы; 3 – верхний и нижний уровни допустимых деформаций; 4, 5, 6 - графики изменения оседания, горизонтальных сдвигов, горизонтальных деформаций соответственно)

Исследования проводились в ФГБНУ «РАНИМИ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 1023020600011-0-2.7.5)

1. *Викторов С.Д.* Механика сдвижения и разрушения горных пород / С.Д. Викторов, С.А. Гончаров, М.А. Иофис, В.М. Закалинский. – М.: ИПКОН, 2019. – 354 с.
2. *Tan X.* Extraction of Irregularly Shaped Coal Mining Area Induced Ground Subsidence Prediction Based on Probability Integral Method / X. Tan, B. Song, H. Bo, Y. Li, M. Wang, G. Lu // *Appl. Sci.* – 2020. – 10(18), 6623. <https://doi.org/10.3390/app10186623>
3. *Кутепов Ю.Ю.* Численное моделирование процесса сдвижения породных массивов применительно к горно-геологическим условиям шахты имени Рубана в Кузбассе / Ю.Ю. Кутепов, Е.Б. Боргер // *Горный информационно-аналитический бюллетень.* – 2017. – № 5. – С. 66–75.
4. *Дрибан В.А.* Особенности решения систем линейных алгебраических уравнений для метода конечных элементов в геомеханике / В.А. Дрибан, А.Г. Петрушин // *ТРУДЫ РАНИМИ: сб. научн. трудов.* – Донецк. – 2021. – № 12–13(27–28). – С. 172–184.
5. *Alejandro L.* FDM predictive methodology for subsidence due to flat and inclined coal seam mining / L. Alejandro, P. Ramirez-Oyanguren, J. Taboada // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences.* – 1999. – V. 36, Is. 4. – P. 475–491.
6. *Назимко В.В.* Исследование экологически опасных необратимых сдвижений массива горных пород над выработками солевых шахт / В.В. Назимко // *Геотехнічна механіка.* – 2015. – Вип. 124. – С. 128–138.
7. *Witkowski W.T.* Software for Estimation of Stochastic Model Parameters for a Compacting Reservoir / W.T. Witkowski, R. Hejmanowski // *Applied Sciences.* – 2020. – 10(9), 3287; <https://doi.org/10.3390/app10093287>
8. *Cheng H.* A New Dynamic Prediction Model for Underground Mining Subsidence Based on Inverse Function of Unstable Creep / H. Cheng, L. Zhang, L. Guo, X. Wang, S. Peng // *Advances in Civil Engineering.* – 2021. – Vol. 2021. – P. 1–9. <https://doi.org/10.1155/2021/9922136>
9. *Xu N.* Surface subsidence prediction for the WUTONG mine using a 3-D finite difference method / N. Xu, P. Kulatilake, H. Tian, X. Wu, Y. Nan, T. Wei // *Computers and Geotechnics.* – 2013. – Vol. 48, no. 3. – P. 134–145.
10. *Hejmanowski R.* Evaluation of reliability of subsidence prediction based on spatial statistical analysis / R. Hejmanowski, A. Malinowska. // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* – 2009. – 46. – P. 432–438.
11. *Шашкин А.Г.* Вязко-упруго-пластическая модель поведения глинистого грунта / А.Г. Шашкин // *Развитие городов и геотехническое строительство.* – 2011. – № 2. – С. 1–32.
12. *Скаженик В.Б.* Проектирование разработки месторождений на основе компьютерного моделирования / В.Б. Скаженик // *Вісті Донецьк. гірнич. ін-ту.* – 2011. – № 1. – С. 8–14.
13. ГСТУ 101.00159226.001-2003. Правила подработки зданий и сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом. – Введ. 2003-10-28. – Киев: УкрНИМИ НАН Украины, 2004. – 128 с.
14. *Yan J.* The application and development of Knothe influence function in China / J. Yan, Y. Lun, J. Yue, A. Preube, A. Sroka // *Trans. of the Strata Mech. Res. Inst.* – 2018. – Vol. 20, no 1. – P. 115–122.
15. *Чернышенко И.В.* Компьютерное моделирование динамики развития горных работ на угольной шахте / И.В. Чернышенко // *Сб. научн. труд. X Междунар. научн.-практич. конф. «Современные тенденции и инновации в науке и производстве».* – 2021. – С. 182-1–182-8.
16. *Анциферов А.В.* Маркшейдерское обеспечение охраны трубопроводных коммуникаций на подрабатываемых территориях / А.В. Анциферов, Н.Н. Грищенко, Е.В. Блинникова // *Горн. информ.-аналитич. бюлл. (научн.-технич. журн.).* – 2017. – № 11. – С. 82–91.

V.B. Skazhenik, I.V. Chernyshenko, N.N. Grishchenkov, Ph.M. Golubev

Prediction of displacements and deformations of the earth's surface based on computer modeling.

The analysis of methods for forecasting displacements and deformations of the earth's surface during undermining by underground mine workings has been carried out. The features of the methods, their advantages and limitations are highlighted. Numerical methods and software tools that implement these methods are considered. Modern requirements for prediction methods of displacements and deformations based on computer simulation are noted. The results of using software for spatial visualization of the earth's surface displacements are presented, as well as the results of a visual comparison of the surface subsidence using the method of type curves and the stochastic method. The main directions for improving the methods for predicting the consequences of underworking the earth's surface on the basis of computer simulation are formulated.

Keywords: *displacement of the earth's surface, stochastic method, software, spatial visualization, prediction methods.*

Получено 25.05.2023