

ISSN 0136-4545

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

**Журнал
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ
МЕХАНИКИ**

№ 3 (72)

2020

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: В.И. Сторожев

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА: С.А. Калоеров

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ: Пачева М.Н.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Анциферов А.В.

Белоусов В.В.

Болнокин В.Е.

Болонов Н.И.

Ватульян А.О.

Вовк Л.П.

Глазунов В.А.

Глухов А.А.

Гольцев А.С.

Горр Г.В.

Губанов В.В.

Дрибан В.А.

Ковалев А.М.

Коносевиц Б.И.

Левин В.М.

Муцанов В.Ф.

Недопекин Ф.В.

Петраков А.А.

Судаков С.Н.

Улитин Г.М.

Шалдырван В.А.

Адрес редакции:

83001 Донецк, ул. Университетская, 24
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
Тел. 302 92 71
E-mail: jtam_donnu@mail.ru

Технический редактор: Пачева М.Н.

Утверждено к печати ученым советом
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016г.

№ 3 (72) / 2020

Основан в 1970г.

ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Механика деформируемого твердого тела

Глушанков Е.С. Термоэлектромагнитоупругое состояние многосвязной полосы в окрестности вершин трещин при действии линейного потока тепла..... 5

Калоеров С.А. Точные аналитические решения задач электромагнитоупругости для эллиптической плиты..... 16

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Павлыш В.Н., Сторожев С.В., Номбре С.Б. Исследование нечетких моделей устойчивости и резонансных колебаний замкнутых сферических и эллипсоидальных оболочек 32

Павлыш В.Н., Сторожев С.В. Влияние разбросов значений исходных параметров в моделях изгибных форм потери устойчивости сжимаемых прямых стержней: нечетко-множественный подход..... 43

Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика

Ялпуга Е.А., Базеева Р.П., Донченко Э.В., Шалованов О.Л., Салий С.Г., Бородин Д.С. Методы мониторинга радоновыделения для изучения геодинамически активных зон горного массива..... 57

Кутепов Д.В., Гордиенко М.В., Ребенок Е.В. Мониторинг сдвижений и деформаций над затопленными участками горных работ..... 65

№ 3 (72) / 2020

Founded in 1970.

JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

CONTENTS

Solid Mechanics

- Glushankov E.S.* The thermo-electro-magneto-elastic state of multiply connected strip at the cracks' tips under heat flux action 5
- Kaloerov S.A.* Exact analytical solutions of electromagnetoelasticity problems for an elliptical plate..... 16

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes

- Pavlysh V.N., Storozhev S.V., Nombre S.B.* Investigation of fuzzy models of stability and resonance vibrations of closed spherical and ellipsoidal shells... 32
- Pavlysh V.N., Storozhev S.V.* Influence of scatter errors in the values of the initial parameters in models of bending forms of the instability of compressible straight bars: a fuzzy-set approach..... 43

Geomechanics, Rock Damage, Mining Aerogas dynamics and Thermal Physics

- Yalputa E.A., Bazeeva R.P., Donchenko E.V., Shalovanov O.L., Saliy S.G., Borodin D.S.* Methods for monitoring radon emission for studying geodynamically active zones of rock mass..... 57
- Kutepov D.V., Gordienko M.V., Rebenok Y.V.* Monitoring of mine subsidence and deformations over flooded mining districts..... 65

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

©2020. Е.С. Глушанков

ТЕРМОЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ
МНОГОСВЯЗНОЙ ПОЛОСЫ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИН
ТРЕЩИН ПРИ ДЕЙСТВИИ ЛИНЕЙНОГО ПОТОКА ТЕПЛА

Данная работа посвящена исследованию термоэлектромагнитоупругого состояния бесконечной полосы с отверстиями и трещинами вблизи вершин трещин, когда в полосе действует линейный поток тепла. Задача сводится к определению комплексных потенциалов с использованием конформных отображений и метода наименьших квадратов. После этого становится возможным определение значений коэффициентов интенсивности напряжений, индукций и напряженностей электромагнитного поля в окрестности вершин трещин. С помощью численных исследований установлены закономерности влияния геометрических характеристик полосы и свойств материала полосы на значения коэффициентов интенсивности напряжений у вершин трещин.

Ключевые слова: линейный поток тепла, термоэлектромагнитоупругое состояние, бесконечная полоса, коэффициенты интенсивности напряжений.

Введение. К настоящему времени разработаны методы и решены различные задачи термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред при различных температурных воздействиях [1, 2]. В частности, решена задача о действии линейного потока в многосвязной полосе [3], здесь же приведены результаты исследования термоэлектромагнитоупругого состояния полосы с круговым отверстием.

Однако актуальным является также исследование состояния полосы с трещинами. В работах [4, 5] с использованием интегральных преобразований решены задачи определения термоэлектроупругого состояния полосы с одной трещиной и с двумя трещинами при действии линейного потока тепла.

В данной работе на основе подхода, описанного в работе [3], описана методика определения термоэлектромагнитоупругого состояния полосы с отверстиями и трещинами при действии линейного потока тепла, а также для полосы с одной трещиной приведены результаты исследования значений коэффициентов интенсивности напряжений, индукций и напряженностей вблизи вершин трещины в зависимости геометрических характеристик полосы и трещины.

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную пластинку из пьезоматериала, отнесенную к прямоугольной системе координат Oxy , занимающую многосвязную полосу S , ограниченную контурами эллиптических отверстий L_l

($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) и парой прямолинейных границ L_p^+ ($p = \overline{1, 2}$), параллельных между собой (рис. 1). Обозначим центры эллипсов — $O_l(x_{0l}, y_{0l})$, полуоси эллипсов — a_l, b_l , углы поворота эллипсов — φ_l , углы поворота прямолинейных границ — φ_p^+ (при этом, $\varphi_2^+ = \varphi_1^+ + \pi$). Прямолинейные разрезы (трещины) представляются эллиптическими контурами с полуосью $b_l = 0$. Контуров отверстий и берега трещин могут располагаться произвольно относительно друг друга (в т.ч., касаться, пересекаться друг с другом и с прямолинейными границами). На контурах полосы заданы значения температуры T_l либо плотности потока тепла q_{ln} ($l = \overline{1; \mathcal{L} + 2}$). Значения при $l = \mathcal{L} + p$ ($p = \overline{1, 2}$) относятся к прямолинейным границам. Контуров полосы не подкреплены либо жестко подкреплены. На бесконечности под углом α к оси Ox действует линейный поток тепла плотности q (причем $\alpha = \varphi_1^+$), а напряжения и индукции электромагнитного поля равны нулю.

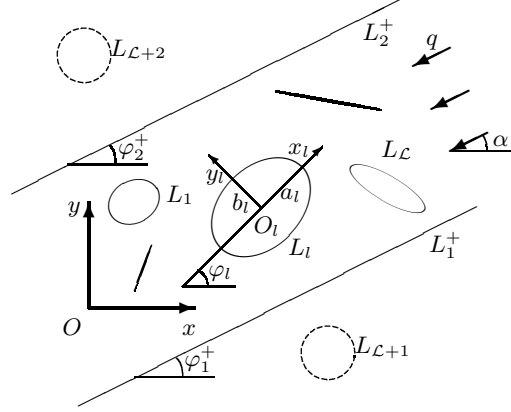


Рис. 1

Значения основных характеристик термоэлектромагнитоупругого состояния (ТЭМУС) в точках полосы (температура T ; плотности потока тепла q_x, q_y ; напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$; индукции D_x, D_y, B_x, B_y и напряженности E_x, E_y, H_x, H_y электромагнитного поля; перемещения u, v ; потенциалы φ, ψ электромагнитного поля) вычисляются по формулам [1, 3]

$$T = T^* + 2 \operatorname{Re} F_5(z_5); \quad (1)$$

$$(q_x, q_y) = (q_x^*, q_y^*) - 2 \operatorname{Re} i \chi_T(\mu_5, 1) F_5'(z_5); \quad (2)$$

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi_k'(z_k); \quad (3)$$

$$(D_x, D_y, B_x, B_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\nu_k \mu_k, -\nu_k, \rho_k \mu_k, -\rho_k) \Phi_k'(z_k); \quad (4)$$

$$(E_x, E_y, H_x, H_y) = (E_x^*, E_y^*, H_x^*, H_y^*) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi_k'(z_k); \quad (5)$$

$$(u, v, \varphi, \psi) = (u^*, v^*, \varphi^*, \psi^*) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k). \quad (6)$$

Здесь $F_5(z_5)$ и $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) — комплексные потенциалы задач теплопроводности и термоэлектромагнитоупругости [1, 3];

$$T^* = q(t_x x + t_y y),$$

$$t_x = \frac{k_{22} \cos \alpha - k_{12} \sin \alpha}{\varkappa_T^2}, \quad t_y = \frac{k_{11} \sin \alpha - k_{12} \cos \alpha}{\varkappa_T^2}, \quad \varkappa_T^2 = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2};$$

$$q_x^* = -q \cos \alpha, \quad q_y^* = -q \sin \alpha;$$

μ_5 и μ_k ($k = \overline{1, 4}$) – корни характеристических уравнений теплопроводности и электромагнитоупругости [1, 2]

$$k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} = 0; \quad (7)$$

$$\Delta(\mu) = 0; \quad (8)$$

$$\Delta(\mu) = l_{4s}(\mu)[l_{2\beta}(\mu)l_{2\chi}(\mu) - l_{2\nu}^2(\mu)] - l_{3g}(\mu)[l_{3g}(\mu)l_{2\chi}(\mu) - l_{3p}(\mu)l_{2\nu}(\mu)] - l_{3p}(\mu)[l_{3p}(\mu)l_{2\beta}(\mu) - l_{3g}(\mu)l_{2\nu}(\mu)],$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11}\mu^4 + 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 + 2s_{26}\mu + s_{22},$$

$$l_{3g}(\mu) = g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu + g_{22},$$

$$l_{3p}(\mu) = p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu + p_{22},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22},$$

$$l_{2\nu}(\mu) = -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22};$$

$$\nu_k = \frac{l_{3p}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \nu_5 = \frac{r_\chi}{r_5},$$

$$\rho_k = \frac{l_{3g}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3p}(\mu_k)l_{2\beta}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \rho_5 = \frac{r_\omega}{r_5};$$

$$r_5 = \frac{l_5(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\chi = \frac{l_\chi(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\omega = \frac{l_\omega(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)},$$

$$l_5(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{1t}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{1m}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix}, \quad l_\chi(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\omega(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) \end{vmatrix};$$

$$l_{2\alpha}(\mu_5) = -\alpha_1\mu_5^2 + \alpha_6\mu_5 - \alpha_2, \quad l_{1t}(\mu_5) = t_1\mu_5 - t_2, \quad l_{1m}(\mu_5) = m_1\mu_5 - m_2;$$

$$p_k = s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} - (g_{11}\mu_k - g_{12})\nu_k - (p_{11}\mu_k - p_{12})\rho_k + \frac{\delta_k^5 \alpha_1}{r_5},$$

$$q_k = s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} - (g_{21}\mu_k - g_{22})\nu_k - (p_{21}\mu_k - p_{22})\rho_k + \frac{\delta_k^5 \alpha_2}{r_5\mu_5},$$

$$\begin{aligned}
 r_k^0 &= g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})\nu_k - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\rho_k + \frac{\delta_k^5 t_1}{r_5}, \\
 h_k^0 &= p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\nu_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k + \frac{\delta_k^5 m_1}{r_5}; \\
 (E_x^*, E_y^*, H_x^*, H_y^*) &= (t_1, t_2, m_1, m_2)T^*; \\
 u^* &= \frac{\alpha_1 q t_x}{2} x^2 - \frac{(\alpha_2 t_x - \alpha_6 t_y)q}{2} y^2 + \alpha_1 q t_y x y, \\
 v^* &= \frac{\alpha_2 q t_y}{2} y^2 - \frac{(\alpha_1 t_y - \alpha_6 t_x)q}{2} x^2 + \alpha_2 q t_x x y, \\
 \varphi^* &= -\frac{t_1 q t_x}{2} x^2 - \frac{t_2 q t_y}{2} y^2 - t_1 q t_x x y, \\
 \psi^* &= -\frac{m_1 q t_x}{2} x^2 - \frac{m_2 q t_y}{2} y^2 - m_1 q t_x x y; \\
 \Phi_5(z_5) &= r_5 \int F_5(z_5) dz_5;
 \end{aligned}$$

$k_{ij}, s_{ij}, g_{ij}, p_{ij}, \beta_{ij}, \nu_{ij}, \chi_{ij}, \alpha_i, t_i, m_i$ — постоянные материала пластинки.

В окрестности вершин трещин значения напряжений, индукций и напряженностей электромагнитного поля имеют особенность порядка $r^{-1/2}$, где r — расстояние от точки окрестности до самой вершины. Эту особенность можно выделить, и тогда ТЭМУС характеризуется значениями коэффициентов интенсивности напряжений нормального отрыва k_1 , напряжений поперечного сдвига k_2 , индукций k_D и напряженностей k_E электрического поля, индукций k_B и напряженностей k_H магнитного поля [6]:

$$k_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} (\sigma_x \sin^2 \varphi_l + \sigma_y \cos^2 \varphi_l - 2\tau_{xy} \cos \varphi_l \sin \varphi_l), \quad (9)$$

$$k_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} ((\sigma_y - \sigma_x) \cos \varphi_l \sin \varphi_l - \tau_{xy} (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l)), \quad (10)$$

$$k_D = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} (D_y \cos \varphi_l - D_x \sin \varphi_l), \quad (11)$$

$$k_E = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} (E_y \cos \varphi_l - E_x \sin \varphi_l), \quad (12)$$

$$k_B = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} (B_y \cos \varphi_l - B_x \sin \varphi_l), \quad (13)$$

$$k_H = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} (H_y \cos \varphi_l - H_x \sin \varphi_l). \quad (14)$$

2. Решение задачи. Функции $F_5(z_5)$, $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) определены в много-связных полосах S_5, S_k , получаемых из полосы S аффинными преобразованиями [1, 2]

$$z_5 = x + \mu_5 y, \quad (15)$$

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (16)$$

Будем рассматривать полосу как пересечение двух полуплоскостей [3]. Вне каждой полуплоскости S_p^+ ($p = \overline{1, 2}$) выберем некоторые эллиптические контуры $L_{\mathcal{L}+p}$ (рис. 1). Обозначим их центры — $O_{\mathcal{L}+p}(x_{0,\mathcal{L}+p}, y_{0,\mathcal{L}+p})$, полуоси — $a_{\mathcal{L}+p}$, $b_{\mathcal{L}+p}$, углы поворота — $\varphi_{\mathcal{L}+p}$.

В общем случае функции $F_5(z_5)$, $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) примут вид [3]

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+2} D_l w_{5l}(z_5) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+2} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5); \quad (17)$$

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+2} (A_{kl} z_k + B_{kl}) w_{kl}(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k). \quad (18)$$

Здесь c_5 — вещественная постоянная, определяемая из условий на контурах пластинки; $D_l = -q_l/4\pi\kappa_T$; q_l — суммарный поток тепла через контур отверстия L_l (при $l = \overline{1, \mathcal{L}}$) или прямолинейную границу L_p^+ (при $l = \mathcal{L} + p$, $p = \overline{1, 2}$) в область S ; $w_{5l}(z_5) = \ln(z_5 - z_{5l})$ ($l = \overline{1, \mathcal{L} + 2}$); z_{5l} — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (15) произвольным точкам внутри эллиптических контуров L_{5l} , получаемых из L_l аффинными преобразованиями (15); c_{5ln} — комплексные постоянные, определяемые из условий на контурах пластинки; $\varphi_{5ln}(z_5) = \zeta_{5l}^{-n}$; ζ_{5l} — переменные; Γ_k , A_{kl} , B_{kl} — постоянные, определяемые из систем уравнений

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, \nu_k, \mu_k \nu_k, \rho_k, \mu_k \rho_k) \Gamma_k = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \quad (19)$$

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i A_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \quad (20)$$

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i B_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \quad (21)$$

$\Gamma_5 = r_5 c_5$; $A_{5l} = r_5 D_l$; $B_{5l} = r_5 (b_{5l} - D_l z_{5l})$; b_{5l} — вычет функции $F_5(z_5)$ в точке z_{5l} ; $w_{kl} = \ln(z_k - z_{kl})$ ($l = \overline{1, \mathcal{L} + 2}$); z_{kl} — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (16) произвольным точкам внутри контуров L_{kl} , получаемых из L_l аффинными преобразованиями (16); $\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}$; ζ_{kl} — переменные.

В системах координат $O_l x_l y_l$ ($l = \overline{1; \mathcal{L} + 2}$) (рис. 1) параметрические уравнения эллипсов имеют вид [1, 2]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе координат Oxy координат —

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l,$$

θ — характеристика параметрического задания эллипса ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).

Комплексные переменные ζ_{kl} ($k = \overline{1, 5}$) определяются из конформных отображений [1, 2]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (22)$$

внешностей единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} . Здесь

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_k + \mu_k \sin \varphi_k) - ib_l(\sin \varphi_k - \mu_k \cos \varphi_k)}{2R_{kl}}. \end{aligned}$$

Функция $F_5(z_5)$ должна удовлетворять граничному условию [1, 2]

$$2 \operatorname{Re} d_l F_5(t_5) = f_l(t), \quad (23)$$

в котором в случае задания значений температуры T_l

$$d_l = 1, \quad f_l = T_l,$$

а в случае задания плотности потока тепла q_{ln}

$$d_l = i\kappa_T, \quad f_l = \int_0^s (q_n^* - q_{ln}) ds + c_l.$$

Функции $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) должны удовлетворять граничным условиям [1, 2]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{kl\alpha} \delta_{k,s} \Phi'_k(t_k) = \frac{df_{l\alpha}}{ds} - 2 \operatorname{Re} d_{5l\alpha} \delta_{5,s} r_5 F_5(t_5) \quad (\alpha = \overline{1, 4}), \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_{k,s} &= dt_k/ds, \\ \Phi'_k(z_k) &= N'_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k), \end{aligned} \quad (25)$$

$$N'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+2} \left[A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \frac{A_{kl} z_k + B_{kl}}{z_k - z_{kl}} \right];$$

для неподкрепленных контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (1, \mu_k, \nu_k, \rho_k),$$

$$(f_{l1}(t), f_{l2}(t), f_{l3}(t), f_{l4}(t)) = (c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}),$$

а для жестко подкреплённых контуров

$$\begin{aligned} (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) &= (p_k, q_k, \nu_k, \rho_k), \\ (f_{l1}(t), f_{l2}(t), f_{l3}(t), f_{l4}(t)) &= (-u^*, -v^*, c_{l3}, c_{l4}). \end{aligned}$$

Неизвестные постоянные c_5 , D_l , c_{5ln} , a_{kln} определяются из граничных условий (23) и (24) с использованием метода наименьших квадратов (МНК). Для этого на контурах L_i выбирается система точек M_{im} ($m = \overline{1, M_i}$, $i = \overline{1; \mathcal{L} + 2}$, где $i = \mathcal{L} + p$ ($p = \overline{1, 2}$) относятся к прямолинейным границам), в которых удовлетворяются граничные условия соответствующих задач.

В задаче теплопроводности, при подстановке функции (17) в граничное условие (23), для определения неизвестных постоянных c_5 , D_l , c_{5ln} возникает следующая система линейных алгебраических уравнений [1, 2]:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} d_i c_5 + 2 \operatorname{Re} d_i w_{5l}(t_{5im}) D_l + 2 \operatorname{Re} d_i \varphi_{5ln}(t_{5im}) c_{5ln} &= f_i(t_{im}) \\ (i = \overline{1, \mathcal{L} + 2}, m = \overline{1, M_i}), \end{aligned} \quad (26)$$

где $t_{5im} = x_{im} + \mu_5 y_{im}$, $t_{im} = t_{im}(x_{im}, y_{im})$. Эту систему можно решить с использованием метода сингулярных разложений [7, 8], после чего становятся известными постоянные c_5 , D_l , c_{5ln} и, как следствие, функция (17). По ней можно вычислять температуру и плотности потока тепла в любой точке полосы по формулам (1), (2) [1, 2].

В задаче термоэлектромагнитоупругости, при подстановке функций (17), (25) в граничные условия (24) для определения неизвестных постоянных a_{kln} возникает следующая система линейных алгебраических уравнений [1, 2]:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}+2} \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} d_{kia} \delta_{k,s} \varphi'_{kln}(t_{kim}) a_{kln} &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{kia} \delta_{k,s} N'_k(t_{kim}) - \\ -2 \operatorname{Re} d_{5i\alpha} \delta_{5,s} r_5 F_5(t_{5im}) + \frac{df_{i\alpha}}{ds}(t_{im}) &(i = \overline{1, \mathcal{L} + 2}, m = \overline{1, M_i}, \alpha = \overline{1, 4}), \end{aligned} \quad (27)$$

где $t_{kim} = x_{im} + \mu_k y_{im}$. Эту систему можно решить с использованием метода сингулярных разложений [7, 8], после чего становятся известными постоянные a_{kln} и, как следствие, функция (18). По ней можно вычислять основные характеристики ТЭМУС в любой точке полосы по формулам (3)–(6) [1, 2]. А если отверстие с контуром L_l вырождается в трещину ($b_l \rightarrow 0$), то значения коэффициентов интенсивности (9)–(14) вблизи вершин этой трещины можно определять по формулам [9]

$$k_1^\pm = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\mu_k^2 \sin^2 \varphi_l + \cos^2 \varphi_l + 2\mu_k \sin \varphi_l \cos \varphi_l) M_k^\pm, \quad (28)$$

$$k_2^\pm = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 ((1 - \mu_k^2) \sin \varphi_l \cos \varphi_l - \mu_k (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l)) M_k^\pm, \quad (29)$$

$$(k_D^\pm, k_E^\pm) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [(-\nu_k, r_k^0 \mu_k) \cos \varphi_l - (\nu_k \mu_k, r_k^0) \sin \varphi_l] M_k^\pm, \quad (30)$$

$$(k_B^\pm, k_H^\pm) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [(-\rho_k, h_k^0 \mu_k) \cos \varphi_l - (\rho_k \mu_k, h_k^0) \sin \varphi_l] M_k^\pm, \quad (31)$$

где

$$M_k^\pm = \frac{1}{\sqrt{a_l}} \left(A_{kl}(z_{kl} \pm a_l) + B_{kl} - \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln} \right).$$

В обозначениях « \pm » знак « $-$ » соответствует левому концу трещины, знак « $+$ » соответствует правому концу трещины.

3. Численные исследования. Были проведены численные исследования для полосы, изготовленной из композита на основе титаната бария-феррита (II) кобальта $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ [10]. Его физико-механические и теплофизические постоянные приведены в таблице 1.

Таблица 1. Постоянные материала

Величина	Значение	Величина	Значение
s_{11}/s_0	7,165	β_{22}/β_0	0,137
s_{22}/s_0	6,797	ν_{11}/ν_0	-0,190
s_{66}/s_0	19,912	ν_{22}/ν_0	-0,185
s_{12}/s_0	-2,337	χ_{11}/χ_0	0,336
g_{16}/g_0	2,028	χ_{22}/χ_0	0,119
g_{21}/g_0	-0,496	α_1/α_0	8,530
g_{22}/g_0	1,157	α_2/α_0	1,990
p_{16}/p_0	1,850	t_2^σ/t_0	133,000
p_{21}/p_0	0,576	m_2^σ/m_0	133,000
p_{22}/p_0	1,186	k_{11}/k_0	2,500
β_{11}/β_0	0,156	k_{22}/k_0	2,500

Здесь приняты обозначения:

$$s_0 = 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad g_0 = 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м}^2, \quad p_0 = 10^{-5} \text{ МТл}^{-1},$$

$$\beta_0 = 10^3 \text{ МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}, \quad \nu_0 = 10^{-1} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м} \cdot \text{МА},$$

$$\chi_0 = 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{МТл}^{-1}, \quad \alpha_0 = 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad t_0 = 10^{-3} \text{ МН} \cdot (\text{МКл} \cdot \text{К})^{-1},$$

$$m_0 = 10^{-3} \text{ МА} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}, \quad k_0 = 1 \text{ Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}.$$

При проведении численных расчетов количество членов в рядах Лорана в функциях (17) и (18) и точек M_i на контурах L_i выбиралось таким, чтобы граничные условия на контурах удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (относительная погрешность становилась менее сотых долей процента). Для этого необходимо было в указанных рядах оставлять от 40 до 90 членов, на каждом из контуров брать от 500 до 1500 «коллокационных точек». Длина участков прямолинейных границ, на которых выбирались «коллокационные

точки», составляла от 40 до 60 характерных размеров концентраторов напряжений. Вспомогательные контуры $L_{\mathcal{L}+p}$ ($p = \overline{1, 2}$) выбирались в виде круговых и расположенных на расстоянии 4–6 собственных радиусов от соответствующих прямолинейных границ.

При проведении исследований решались задачи термоупругости (ТУ), когда не учитывались электромагнитные свойства материала, и термоэлектромагнитоупругости (ТЭМУ), когда подлежали учету все свойства материала.

Рассматривался случай действия линейного потока тепла в вертикальной полосе с одной теплоизолированной трещиной длины $2l$ ($a_1 = l, b_1 = 0; q_{1n} = 0$) (рис. 2). Прямолинейные границы полосы также полагались теплоизолированными ($q_{2n} = q_{3n} = 0$). Линейный поток тепла направлялся вдоль полосы, т.е. под углом $\alpha = \pi/2$ [11, 12].

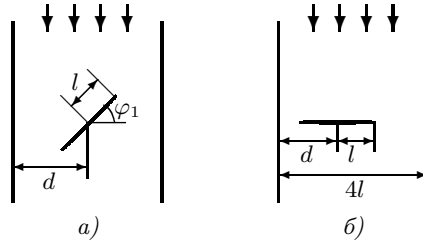


Рис. 2

В таблице 2 для полосы с наклонной трещиной длины $2l$, равноотстоящей от прямолинейных границ (расстояние между центром трещины и прямолинейными границами равно d) (рис. 2, а), приведены значения коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) k_1^-, k_2^- в окрестности левого конца трещины в зависимости от значения d/l .

Таблица 2. Значения КИН k_1^-, k_2^- у левой вершины трещины (рис. 2, а)

Тип задачи	Величина	d/l	Значения φ_1						
			0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
ТЭМУ	$k_1^- \cdot 100$	1, 1	0, 0000	-27, 7906	-55, 4497	2, 7453	0, 4561	-0, 5017	0, 0000
		2	0, 0000	4, 1000	4, 7370	4, 3102	2, 2912	0, 6140	0, 0000
		11	0, 0000	3, 0769	4, 7513	4, 4446	2, 7003	0, 8024	0, 0000
		∞	0, 0000	3, 0255	4, 6983	4, 4296	2, 7125	0, 8106	0, 0000
	$k_2^- \cdot 100$	1, 1	4, 9611	-0, 8664	-27, 0123	16, 7124	11, 0163	4, 2891	0, 0000
		2	0, 9154	3, 5574	6, 4701	8, 2299	6, 9953	3, 9864	0, 0000
		11	3, 8775	4, 5832	6, 1460	7, 2593	6, 6928	4, 0476	0, 0000
		∞	3, 9727	4, 6479	6, 1529	7, 2386	6, 6846	4, 0536	0, 0000
ТУ	$k_1^- \cdot 100$	1, 1	0, 0000	-0, 9189	-7, 3725	-3, 0850	-2, 4345	-0, 3902	0, 0000
		2	0, 0000	1, 0235	1, 8749	2, 1702	1, 4791	0, 4449	0, 0000
		11	-0, 0002	1, 1308	1, 7421	1, 6258	0, 9862	0, 2927	0, 0000
		∞	0, 0000	1, 0732	1, 6665	1, 5712	0, 9622	0, 2876	0, 0000
	$k_2^- \cdot 100$	1, 1	-9, 6757	-9, 7115	-8, 1024	-8, 4596	-2, 4657	-0, 9331	0, 0000
		2	-10, 3799	-9, 5599	-7, 7073	-5, 3968	-3, 0385	-1, 2466	0, 0000
		11	-9, 6314	-8, 9955	-7, 3191	-5, 1584	-3, 0809	-1, 3840	0, 0000
		∞	-9, 5323	-8, 9200	-7, 2931	-5, 1693	-3, 0997	-1, 3940	0, 0000

В таблице 3 для полосы шириной $4l$ с поперечной смещенной трещиной длины $2l$ приведены значения КИН k_2^-, k_2^+ в окрестности вершин трещины в зависимости от значения отношения d/l .

Таблица 3. Значения КИН k_2^-, k_2^+ у вершин трещины (рис. 2, б)

Тип задачи	Величина	Значения $d/2l$					
		2	1,9	1,7	1,5	1,3	1,1
ТЭМУ	$k_2^- \cdot 100$	0,9154	1,5337	4,2231	11,0987	14,4412	17,7176
	$k_2^+ \cdot 100$	-0,9154	-0,8757	-0,8362	-0,3466	-0,0042	21,9942
ТУ	$k_2^- \cdot 100$	-10,3799	-9,9960	-7,6556	-2,0310	3,4296	5,3341
	$k_2^+ \cdot 100$	10,3799	10,1294	10,6505	12,0965	13,1123	-16,5618

Из данных таблиц и других полученных результатов следует, что присутствие теплоизолированной трещины в полосе приводит к возникновению значительных концентраций напряжений вблизи трещины. Существенное влияние на значения КИН для вершин трещины оказывает угол наклона трещины, а также расстояние до прямолинейных границ полосы. Наибольшие значения КИН наблюдается при угле поворота трещины $\pi/6$. Когда трещина находится от прямолинейных границ на расстоянии более 10 своих длин, то прямолинейные границы слабо влияют на ТЭМУС вблизи трещины, и тогда можно решать задачу для бесконечной пластинки с одной трещиной. При сближении трещины с одной из прямолинейных границ значения КИН для ближней вершины трещины возрастают по модулю, для дальней — могут незначительно возрасти либо убывают. Однако при $d/l < 0,3$ закономерности изменения КИН для дальней вершины изменяются — они резко возрастают по модулю, при этом меняя знак.

Пренебрежение электромагнитными свойствами материала приводит к искажению результатов, поэтому эти свойства следует учитывать в расчетах.

1. Калоеров С.А. Плоская задача термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, О.А. Сорочан // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 4. – С. 81–91.
2. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в пьезопластинках с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестник Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 1. – С. 15–26.
3. Глушанков Е.С. Действие линейного потока тепла в бесконечной многосвязной полосе из пьезоматериала / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2020. – Вып. 2 (71). – С. 26–36.
4. Ueda S. Thermal stress intensity factors for a normal crack in a piezoelectric material strip / S.Ueda // J. Therm. Stress. – 2006. – Vol. 29. – P. 1107–1125.
5. Ueda S. Thermal stress intensity factors for two coplanar cracks in a piezoelectric strip / S. Ueda, Y. Tani // J. Therm. Stress. – 2008. – Vol. 31. – P. 403–415.
6. Калоеров С.А. Двумерные задачи электро- и магнитомагнитоупругости для многосвязных тел / С.А. Калоеров, А.И. Баева, О.И. Бороненко. – Донецк: Юго-Восток, 2011. – 270 с.
7. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
8. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
9. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих многосвязных сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.
10. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magnetoelastoelectroelastic solids / W.-Y. Tian,

U.Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.

11. Калоеров С.А. Потенциальные электромагнитные поля в пьезопластинах при механических, электромагнитных и тепловых воздействиях / С.А. Калоеров // Вестник Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2016. – № 4. – С. 19–34.
12. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в пьезопластинах / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестник Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2017. – № 1. – С. 12–25.

E.S. Glushankov

The thermo-electro-magneto-elastic state of multiply connected strip at the cracks' tips under heat flux action.

This article is dedicated to studying the thermo-electro-magneto-elastic state of infinite strip with holes and cracks when a linear heat flow acts in the strip. The problem is reduced to evaluation of complex potentials with using the conformal mappings and least squares. Then it is possible to evaluate the stress, inductions and tensions intensity factors at the cracks' tips. The regularities of the effect of geometric characteristics and material's properties on the stress intensity factors' values at the cracks' tips are obtained with the numerical studies.

Keywords: *linear heat flux, thermo-electro-magneto-elastic state, infinite strip, stress intensity factors.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
evgenij.glushankov@gmail.com

Получено 08.09.2020

УДК 539.3

©2020. С.А. Калоеров

ТОЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛИТЫ

Даны решения различных задач электромагнитоупругости для эллиптической плиты. При этом с использованием комплексных потенциалов, разложений голоморфных функций в ряды по полиномам Фабера и метода рядов эти задачи приведены к решениям систем линейных алгебраических уравнений 8 порядка. Рассмотрены случаи воздействий по контуру плиты, по ее верхнему основанию или в ее отдельных внутренних точках.

Ключевые слова: теория изгиба тонких плит, электромагнитоупругость, комплексные потенциалы, метод рядов, точные решения.

Введение. Несмотря на то, что в различных областях современной промышленности в качестве элементов конструкций широко используются тонкие пластинки с отверстиями и трещинами из пьезоматериалов, в которых под действием механических сил и электромагнитных полей возникает высокая концентрация напряжений и есть необходимость ее изучения, до сих пор методы исследования электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) разработаны лишь для случаев, когда пластинки находятся в условиях плоской задачи электроупругости [1], магнитоупругости [2] или электромагнитоупругости [3]. Для случая же изгиба тонких пластин (плит) из пьезоматериалов пока на основе распространения гипотез Кирхгофа [4, 5] на задачи электромагнитоупругости сформулированы краевые задачи [6], для их решения введены обобщенные комплексные потенциалы электромагнитоупругости [7] и получены граничные условия для их определения. В данной статье с использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости, разложений голоморфных функций в ряды по полиномам Фабера и метода рядов получены решения задач для эллиптической плиты при различных воздействиях по контуру, по верхнему основанию или в отдельных точках плиты.

1. Постановка и общее решение задачи. Рассмотрим тонкую электромагнитоупругую плиту, занимающую конечную область S , ограниченную эллиптическим контуром L_0 с полуосями a_0 , b_0 (рис. 1) и находящуюся от действия различных механических сил или электромагнитных полей в состоянии поперечного изгиба.

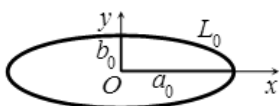


Рис. 1.

Решение задачи об определении ЭМУС данной плиты сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений в частных производных [6]

$$\begin{aligned}
 L_{4s}w + L_{3g}\varphi_0 + L_{3p}\psi_0 &= q_0, \\
 L_{3g}w + L_{2\beta}\varphi_0 + L_{2\nu}\psi_0 &= 0, \\
 L_{3p}w + L_{2\nu}\varphi_0 + L_{2\chi}\psi_0 &= 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

относительно функций прогиба $w(x, y)$ и плотностей электрической и магнитной потенциалов $\varphi_0(x, y)$ и $\psi_0(x, y)$ при заданных граничных условиях на контуре L_0 . При этом L_{ij} – известные дифференциальные операторы вида

$$\begin{aligned}
 L_{4s} &= - \left(D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\
 &\quad \left. + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right), \\
 L_{3g} &= C_{g11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (C_{g21} + 2C_{g16}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (C_{g12} + 2C_{g26}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + C_{g22} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\
 L_{3p} &= C_{p11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (C_{p21} + 2C_{p16}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (C_{p12} + 2C_{p26}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + C_{p22} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\
 L_{2\beta} &= C_{\beta11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{\beta12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{\beta22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\
 L_{2\nu} &= C_{\nu11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{\nu12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{\nu22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\
 L_{2\chi} &= C_{\chi11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{\chi12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{\chi22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Если при решении рассматриваемой задачи использовать комплексные потенциалы электромагнитоупругости [7], то она сводится к определению из соответствующих граничных условий функций $W'_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \tag{3}$$

где μ_k – корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix}
 l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\
 l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\
 l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu)
 \end{vmatrix} = 0; \tag{4}$$

$l_{ij}(\mu)$ – полиномы вида

$$\begin{aligned}
 l_{4s}(\mu) &= -(D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{66}\mu + D_{11}), \\
 l_{3g}(\mu) &= C_{g22}\mu^3 + (C_{g12} + 2C_{g26})\mu^2 + (C_{g21} + 2C_{g16})\mu + C_{g11}, \\
 l_{3p}(\mu) &= C_{p22}\mu^3 + (C_{p12} + 2C_{p26})\mu^2 + (C_{p21} + 2C_{p16})\mu + C_{p11}, \\
 l_{2\beta}(\mu) &= C_{\beta22}\mu^2 + 2C_{\beta12}\mu + C_{\beta11}, \\
 l_{2\nu}(\mu) &= C_{\nu22}\mu^2 + 2C_{\nu12}\mu + C_{\nu11}, \\
 l_{2\chi}(\mu) &= C_{\chi22}\mu^2 + 2C_{\chi12}\mu + C_{\chi11};
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\nu_k = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta_{0k}}, \quad \rho_k = \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{0k}}; \tag{6}$$

$$\Delta_{1k} = \begin{vmatrix} -l_{3g}(\mu_k) & l_{2\nu}(\mu_k) \\ -l_{3p}(\mu_k) & l_{2\chi}(\mu_k) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{2k} = \begin{vmatrix} l_{2\beta}(\mu_k) & -l_{3g}(\mu_k) \\ l_{2\nu}(\mu_k) & -l_{3p}(\mu_k) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{0k} = \begin{vmatrix} l_{2\beta}(\mu_k) & l_{2\nu}(\mu_k) \\ l_{2\nu}(\mu_k) & l_{2\chi}(\mu_k) \end{vmatrix};$$

$D_{ij} = b_{ij}D_0$ – механические жесткости плиты; $C_{gij} = c_{gij}D_0$, $C_{pij} = c_{pij}D_0$, $C_{\beta ij} = c_{\beta ij}D_0$, $C_{\nu ij} = c_{\nu ij}D_0$, $C_{\chi ij} = c_{\chi ij}D_0$ – электромагнитные жесткости плиты; $D_0 = \frac{2}{3}h^3$ – постоянная, связанная с толщиной плиты; b_{ij} , c_{gij} , c_{pij} , $c_{\beta ij}$, $c_{\nu ij}$, $c_{\chi ij}$ – элементы обратной матрицы

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} & c_{g11} & c_{g21} & c_{p11} & c_{p21} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & c_{g12} & c_{g22} & c_{p12} & c_{p22} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & c_{g16} & c_{g26} & c_{p16} & c_{p26} \\ -c_{g11} & -c_{g12} & -c_{g16} & c_{\beta11} & c_{\beta12} & c_{\nu11} & c_{\nu12} \\ -c_{g21} & -c_{g22} & -c_{g26} & c_{\beta12} & c_{\beta22} & c_{\nu12} & c_{\nu22} \\ -c_{p11} & -c_{p12} & -c_{p16} & c_{\nu11} & c_{\nu12} & c_{\chi11} & c_{\chi12} \\ -c_{p21} & -c_{p22} & -c_{p26} & c_{\nu12} & c_{\nu22} & c_{\chi12} & c_{\chi22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} & p_{11} & p_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} & p_{12} & p_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} & p_{16} & p_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & \nu_{11} & \nu_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & \nu_{12} & \nu_{22} \\ -p_{11} & -p_{12} & -p_{16} & \nu_{11} & \nu_{12} & \chi_{11} & \chi_{12} \\ -p_{21} & -p_{22} & -p_{26} & \nu_{12} & \nu_{22} & \chi_{12} & \chi_{22} \end{pmatrix}; \tag{7}$$

s_{ij} – коэффициенты деформаций материала, измеренные при постоянных индукциях электромагнитного поля; g_{ij} и p_{ij} – пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули деформаций и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях; β_{ij} , ν_{ij} , χ_{ij} – соответственно коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивостей, измеренные при постоянных напряжениях.

В рассматриваемом случае функции определены в односвязных областях S_k , получаемых из заданной области аффинными преобразованиями (3) и ограниченных контурами L_{k0} , соответствующими контуру L_0 при этих преобразованиях, причем, исходя из общего представления комплексных потенциалов [7], для рассматриваемой конечной односвязной области эти функции имеют вид

$$W'_k(z_k) = \sum_{r=1}^R (A_{kr}^0 z_k + B_{kr}^0) \ln(z_k - z_{kr}^0) + W'_{0k}(z_k), \quad (8)$$

в котором A_{kr}^0 , B_{kr}^0 – постоянные, определяемые решением систем

$$\begin{aligned} 2Re \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \lambda_k, \lambda_k \mu_k, v_k, v_k \mu_k, \frac{1}{\mu_k} \right) iA_{kr}^0 = \\ = \left(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{P_r^0}{2\pi D_{11}} \right); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} 2Re \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \lambda_k, v_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k}, d_y, b_y \right) iB_{kr}^0 = \\ = \left(0, 0, 0, 0, -\frac{M_{xr}^0}{2\pi D_{22}}, -\frac{M_{yr}^0}{2\pi D_{11}}, M_{Dr}^0, M_{Br}^0 \right); \end{aligned} \quad (10)$$

P_r^0 ($r = \overline{1, R}$) – сосредоточенные силы во внутренних точках плиты z_r^0 (x_r^0, y_r^0); $M_{xr}^0, M_{yr}^0, M_{Dr}^0, M_{Br}^0$ – компоненты сосредоточенных моментов (механических и индукций) в тех же точках; z_{kr}^0 – точки в областях S_k , соответствующие при аффинных преобразованиях (3) точкам z_r^0 ; $W'_{0k}(z_k)$ – функции, голоморфные в областях S_k . Для нахождения вида последних функций используем конформные отображения.

Отобразим внешности единичных кругов $|\zeta_{k0}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{k0}

$$z_k = R_{k0} \left(\zeta_{k0} + \frac{m_{k0}}{\zeta_{k0}} \right), \quad (11)$$

где

$$R_{k0} = \frac{a_0 - i\mu_k b_0}{2}, \quad m_{k0} = \frac{a_0 + i\mu_k b_0}{a_0 - i\mu_k b_0}. \quad (12)$$

Тогда функции $W'_{0k}(z_k)$, голоморфные в эллипсах L_{k0} , можно разложить в ряды по полиномам Фабера

$$W'_{0k}(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k0n} P_n(z_k), \quad (13)$$

где $P_n(z_k)$ – полиномы Фабера, для которых имеют место равенства [8]

$$P_0 = 1, \quad P_n(z_k) = \zeta_{k0}^n + \frac{m_{k0}^n}{\zeta_{k0}^n} (n \geq 1); \quad (14)$$

a_{k0n} – неизвестные постоянные, для определения которых используем граничные условия на контуре. В общем случае эти условия имеют вид [7]

$$2Re \sum_{k=1}^4 g_{ik0} W'_k(t_k) = f_{i0}(t) \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (15)$$

в котором g_{ik0} – постоянные; $f_{i0}(t)$ – функции, принимающие определенные значения в зависимости от способа нагружения и подкрепления контура L_0 , причем, если контур плиты L_0 нагружен внешними воздействиями в виде механических изгибающих моментов $M_n = m_0(s)$ и поперечных усилий $N_n = p_0(s)$, изгибающих индукционных моментов $M_{dn} = m_{d0}(s)$, $M_{bn} = m_{b0}(s)$, то

$$\begin{aligned} g_{1k0} &= \frac{p_k}{\mu_k}, \quad g_{2k0} = q_k, \quad g_{3k0} = d_{yk}, \quad g_{4k0} = b_{yk}, \\ f_{10}(t) &= I_{1xy0} - \int_0^s (m_0 dy + f_0 dx) - c_0 x + c_{10}, \\ f_{20}(t) &= I_{2xy0} - \int_0^s (m_0 dx - f_0 dy) + c_0 y + c_{20}, \\ f_{30}(t) &= M_{00} + \int_0^s m_{d0} ds + c_{30}, \quad f_{40}(t) = M_{00} + \int_0^s m_{b0} ds + c_{40}; \\ I_{1xy0} &= \int_0^s (M_{0x} \cos nx + (H_{0xy} - I_0) \cos ny) ds, \\ I_{2xy0} &= \int_0^s ((H_{0xy} + I_0) \cos nx + M_{0y} \cos ny) ds, \\ M_{0d} &= \int_0^s (M_{0dx} \cos nx + M_{0dy} \cos ny) ds, \\ M_{0b} &= \int_0^s (M_{0bx} \cos nx + M_{0by} \cos ny) ds. \\ J_{10} &= \int_0^s ((N_{0xy} - H_{0xy}) dx + M_{0x} dy), \\ J_{20} &= - \int_0^s (M_{0y} dx - (N_{0xy} + H_{0xy}) dy), \\ f_0(s) &= \int_0^s p_0(s) ds; \end{aligned} \quad (16)$$

c_0 – вещественная постоянная, которую в данном случае односвязной области можно принять равной нулю; c_{i0} – комплексные постоянные. Если же контур L_0 плиты жестко подкреплён, то

$$\begin{aligned} g_{1k0} = 1, \quad g_{2k0} = \mu_k, \quad g_{3k0} = d_{yk}, \quad g_{4k0} = b_{yk}, \\ f_{10}(t) = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + c_{10}, \quad f_{20}(t) = -\frac{\partial w_0}{\partial y} + c_{20}; \end{aligned} \quad (17)$$

$f_{30}(t)$, $f_{40}(t)$ сохраняют свой вид по формулам (16). При этом, если контур жестко заземлен, то $c_{10} = c_{20} = 0$; w_0 – частное решение системы уравнений (1).

Если функции $W'_k(t_k)$ определены, то по ним можно найти механические моменты, моменты индукций и поперечные силы, используя формулы [7]

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = (M_{0x}, M_{0y}, H_{0xy}) - 2Re \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k) W''_k(z_k),$$

$$p_k = D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2 - (C_{g11} + C_{g21}\mu_k) \lambda_k - (C_{p11} + C_{p21}\mu_k) \nu_k, \quad (18)$$

$$q_k = D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2 - (C_{g12} + C_{g22}\mu_k) \lambda_k - (C_{p11} + C_{p22}\mu_k) \nu_k,$$

$$r_k = D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2 - (C_{g16} + C_{g26}\mu_k) \lambda_k - (C_{p16} + C_{p26}\mu_k) \nu_k;$$

$$(M_{dx}, M_{dy}, M_{bx}, M_{by}) =$$

$$= (M_{0dx}, M_{0dy}, M_{0bx}, M_{0by}) + 2Re \sum_{k=1}^4 (d_{xk}, d_{yk}, b_{xk}, b_{yk}) W''_k(z_k),$$

$$d_{xk} = C_{g11} + 2C_{g16}\mu_k + C_{g12}\mu_k^2 - (D_{g11} + D_{g12}\mu_k) \lambda_k - (D_{p11} + D_{p12}\mu_k) \nu_k, \quad (19)$$

$$d_{yk} = C_{g21} + 2C_{g26}\mu_k + C_{g22}\mu_k^2 - (D_{g12} + D_{g22}\mu_k) \lambda_k - (D_{p12} + D_{p22}\mu_k) \nu_k,$$

$$b_{xk} = C_{p11} + 2C_{p16}\mu_k + C_{p12}\mu_k^2 - (D_{p11} + D_{p12}\mu_k) \lambda_k - (E_{p11} + E_{p12}\mu_k) \nu_k,$$

$$b_{yk} = C_{p21} + 2C_{p26}\mu_k + C_{p22}\mu_k^2 - (D_{p12} + D_{p22}\mu_k) \lambda_k - (E_{p12} + E_{p22}\mu_k) \nu_k;$$

$$(N_x, N_y) = (N_{0x}, N_{0y}) - 2Re \sum_{k=1}^4 (l_k, -s_k) W'''_k(z_k),$$

$$\begin{aligned} s_k = -D_{16} - (D_{12} + 2D_{66}) \mu_k - 3D_{26}\mu_k^2 - D_{22}\mu_k^3 + (C_{g16} + (C_{g12} + C_{g26}) \mu_k + \\ + C_{g22}\mu_k^2) \lambda_k + (C_{p16} + (C_{p12} + C_{p26}) \mu_k + C_{p22}\mu_k^2) \nu_k, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} l_k = D_{11} + 3D_{16}\mu_k + (D_{12} + 2D_{66}) \mu_k^2 + D_{26}\mu_k^3 + (C_{g11} + (C_{g21} + C_{g16}) \mu_k + \\ + C_{g26}\mu_k^2) \lambda_k - (C_{p11} + (C_{p21} + C_{p16}) \mu_k + C_{p26}\mu_k^2) \nu_k. \end{aligned}$$

Здесь величины со значком 0 в индексах относятся к частному решению и вычисляются по общим формулам для этих величин [6]

$$\begin{aligned}
 M_x &= - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right. \\
 &\quad \left. - C_{g11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - C_{g21} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - C_{p11} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - C_{p21} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right), \\
 M_y &= - \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right. \\
 &\quad \left. - C_{g12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - C_{g22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - C_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - C_{p22} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right), \\
 H_{xy} &= - \left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right. \\
 &\quad \left. - C_{g16} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - C_{g26} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - C_{p16} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - C_{p26} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right);
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 M_{dx} &= C_{g11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{g16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{g12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\
 &\quad + D_{g11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + D_{g12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + D_{p11} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + D_{p'12} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \\
 M_{dy} &= C_{g21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{g26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{g22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\
 &\quad + D_{g12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + D_{g22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + D_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + D_{p22} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \\
 M_{bx} &= C_{p11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{p16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{p12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\
 &\quad + D_{p11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + D_{p12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + E_{p11} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + E_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \\
 M_{by} &= C_{p21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{p26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{p22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\
 &\quad + D_{p12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + D_{p22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + E_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + E_{p22} \frac{\partial \psi_0}{\partial y};
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 N_x &= - \left[D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \right. \\
 &\quad - C_{g11} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - (C_{g21} + C_{g16}) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - C_{g26} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} - \\
 &\quad \left. - C_{p11} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - (C_{p21} + C_{p16}) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} - C_{p26} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right],
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$N_y = - \left[D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \right. \\ \left. - C_{g16} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - (C_{g12} + C_{g26}) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - C_{g22} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} - C_{p16} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - (C_{p12} + C_{p26}) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} - C_{p22} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right],$$

если в них вместо функций $w(x, y)$, $\varphi_0(x, y)$, $\psi_0(x, y)$ подставить частное решение системы уравнений (1) $w_0(x, y)$, $\varphi_{00}(x, y)$, $\psi_{00}(x, y)$.

Как частные случаи из приведенного решения задачи электромагнитоупругости (ЭМУ) следуют решения задач электроупругости (ЭУ), магнитоупругости (МУ) и теории упругости анизотропного тела (ТУ). Если приведенное выше решение получить для модельного материала с электромагнитными постоянными

$$g'_{ij} = \lambda_g g_{ij}, \quad \beta'_{ij} = \beta_{ij} / \lambda_g, \quad p'_{ij} = \lambda_p p_{ij}, \\ \chi'_{ij} = \chi_{ij} / \lambda_p, \quad \nu'_{ij} = \lambda_{gp} / \nu_{ij}, \quad (24)$$

где λ_g , λ_p , λ_{gp} – параметры, и принять $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} = 1$, то, ясно, получим решение задачи ЭМУ; при $\lambda_g = 1$, $\lambda_p = \lambda_{gp} = 0$ будем иметь решение задачи ЭУ; для задачи МУ $\lambda_p = 1$, $\lambda_g = \lambda_{gp} = 0$; для задачи ТУ $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} = 0$. В этих случаях, при проведении численных исследований с использованием разработанного программного приложения, для перечисленных частных задач указанные выше нулевые значения параметров нужно задавать отличными от 0, но достаточно малыми величинами, порядка 10^{-4} .

Используя приведенные формулы, для частных случаев приложенных к плите воздействий и граничных условий методом рядов найдем аналитические решения некоторых задач.

2. Решения частных задач. Действие равномерно распределенных по контуру плиты механических моментов. Пусть контур L_0 загружен постоянными механическими изгибающими моментами $M_n(s) = m_0$, а поперечные силы и индукционные моменты на нем равны нулю $N_n(s) = M_{dn}(s) = M_{bn}(s) = 0$ (рис. 2). Тогда, в силу отсутствия внутренних сосредоточенных воздействий, из одно-

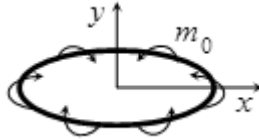


Рис. 2.

родных систем уравнений (9) и (10) следует, что $A_{kr}^0 = B_{kr}^0 = 0$, и комплексные потенциалы (8), в соответствии с (13), примут вид

$$W'_k(z_k) = W'_{0k}(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k0n} P_n(z_k). \quad (25)$$

Когда на контуре L_0 заданы моменты и поперечные силы, на основе (17) имеем

$$\begin{aligned} g_{1k0} &= \frac{p_k}{\mu_k}, & g_{2k0} &= q_k, & g_{3k0} &= d_{yk}, & g_{4k0} &= b_{yk}; \\ f_0(s) &= 0, & f_{10}(t) &= -m_0 y + c_{10}, & f_{20}(t) &= -m_0 x + c_{20}, \\ & & f_{30}(t) &= c_{30}, & f_{40}(t) &= c_{40}. \end{aligned}$$

Поэтому граничные условия (15) на L_0 примут вид

$$\begin{aligned} 2Re \sum_{k=1}^4 \left(\frac{p_k}{\mu_k}, q_k, d_{yk}, b_{yk} \right) W'_k(z_k) &= \\ &= (-m_0 y + c_{10}, -m_0 x + c_{20}, c_{30}, c_{40}). \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя функции (25) в граничные условия (26) и учитывая, что на контуре

$$\begin{aligned} x &= a_0 \cos \theta = \frac{a_0}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right), & y &= b_0 \sin \theta = -\frac{ib_0}{2} \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right), \\ \zeta_{k0} &= \sigma = e^{i\theta}, & P_0 &= 1, & P_n(z_k) &= \sigma^n + \frac{m_{k0}^n}{\sigma^n} \quad (n \geq 1), \end{aligned}$$

где θ – угловая переменная параметрического задания эллипса L_0 , получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{p_k}{\mu_k}, q_k, d_{yk}, b_{yk} \right) \left(\sigma^n + \frac{m_{k0}^n}{\sigma^n} \right) a_{k0n} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\bar{p}_k}{\bar{\mu}_k}, \bar{q}_k, \bar{d}_{yk}, \bar{b}_{yk} \right) \left(\frac{1}{\sigma^n} + \bar{m}_{k0}^n \sigma^n \right) \bar{a} \right) = \\ = \left(\frac{im_0 b_0}{2} \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right) + c_{10}, -\frac{m_0 a_0}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right) + c_{20}, c_{30}, c_{40} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Приравнивая в (27) слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях σ , получим равенства $a_{k0n} = 0$ при $n \geq 2$ и следующую систему 4 линейных алгебраических уравнений для определения a_{k01} , записываемую в форме:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \left(\left(\frac{p_k}{\mu_k}, q_k, d_{yk}, b_{yk} \right) m_{k0} a_{k01} + \left(\frac{\bar{p}_k}{\bar{\mu}_k}, \bar{q}_k, \bar{d}_{yk}, \bar{b}_{yk} \right) \bar{a}_{k01} \right) = \\ = \left(-\frac{im_0 b_0}{2}, -\frac{m_0 a_0}{2}, 0, 0 \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Тогда функции (25) с учетом равенств (11) будут такими:

$$W'_k(z_k) = W'_{k0}(z_k) = a_{k00} + a_{k01} \left(\zeta_{k0} + \frac{m_{k0}}{\zeta_{k0}} \right) = a_{k00} + a_{k01} \frac{z_k}{R_{k0}}. \quad (29)$$

Для моментов и перерезывающих сил (18), (19) получим выражения

$$\begin{aligned} & (M_x, M_y, H_{xy}, M_{dx}, M_{dy}, M_{bx}, M_{by}) = \\ & = -2Re \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k, d_{xk}, d_{yk}, b_{xk}, b_{yk}) \frac{a_{k01}}{R_{k0}}, \end{aligned} \quad (30)$$

из которых следует, что моменты постоянны во всех точках плиты, причем для любых материалов и значений полуосей эллиптического диска моменты получаются одинаковыми и такими: $M_x = M_y = m_0$, $H_{xy} = M_{dx} = M_{dy} = M_{bx} = M_{by} = 0$, т. е. в плите от действия по ее контуру изгибающих механических моментов электрические индукционные моменты не возникают, хотя и в этом случае будут возникать напряженности электрического и магнитного поля, а также деформации, что видно из уравнений состояния. Следовательно, будут возникать также перемещения и потенциалы поля.

Аналогичное решение задачи получается, если по контуру плиты действуют постоянные индукционные электрические моменты $M_{dn} = m_{d0}$ (или магнитные моменты $M_{bn} = m_{b0}$). Исследованиями установлено, что в этом случае во всех точках плиты $M_{dx} = M_{dy} = m_{d0}$, $M_x = M_y = H_{xy} = M_{bx} = M_{by} = 0$ (или $M_{bx} = M_{by} = m_{b0}$, $M_x = M_y = H_{xy} = M_{dx} = M_{dy} = 0$). То есть от действия индукционных моментов механические моменты в плите не возникают, хотя опять же возникают напряженности поля, деформации, перемещения и потенциалы поля.

Заметим, что решения задач ЭУ, МУ и ТУ полностью получаются буквальным повторением предыдущих выводов и будут отличаться от приведенного решения только системой (28). Например, для задачи ТУ эта система состоит из 2 уравнений с 2 неизвестными:

$$\sum_{k=1}^2 \left(\left(\frac{p_k}{\mu_k}, q_k \right) m_{k0} a_{k01} + \left(\frac{\bar{p}_k}{\bar{\mu}_k}, \bar{q}_k \right) \bar{a}_{k01} \right) = \left(-\frac{im_0 b_0}{2}, -\frac{m_0 a_0}{2} \right).$$

б). *Действие равномерного давления по верхнему основанию плиты.* Пусть эллиптическая плита по верхнему основанию находится под действием равномерного давления интенсивности q_0 (рис. 3). Плита по контуру L_0 жестко закреплена, моменты индукций вдоль него равны нулю.

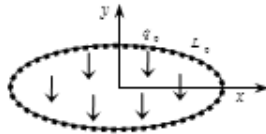


Рис. 3.

Комплексные потенциалы опять имеют вид (25). Но в данном случае сначала нужно найти частное решение системы дифференциальных уравнений (1).

Выберем это решение в виде

$$w_0(x, y) = d_1 x^4, \quad \varphi_{00}(x, y) = d_2 x^3, \quad \psi_{00}(x, y) = d_3 x^3, \quad (31)$$

в котором d_1, d_2, d_3 – неизвестные вещественные постоянные. Подставляя выражение (31) в уравнения (1) и сравнивая в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях x , можно получить систему трех линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} -24D_{11}d_1 + 6C_{g11}d_2 + 6C_{p11}d_3 &= -q_0, \\ 4C_{g11}d_1 + C_{\beta11}d_2 + C_{\nu11}d_3 &= 0, \\ 4C_{p11}d_1 + C_{\nu11}d_2 + C_{\chi11}d_3 &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему, найдем

$$\begin{aligned} d_1 &= -\frac{C_{\beta11}C_{\chi11} - C_{\nu11}^2}{\Delta}q_0, & d_2 &= -\frac{4C_{p11}C_{\nu11} - C_{g11}C_{\chi11}}{\Delta}q_0, \\ d_3 &= -\frac{4C_{g11}C_{\nu11} - C_{p11}C_{\beta11}}{\Delta}q_0; \end{aligned} \quad (32)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -24D_{11} & 6C_{g11} & 6C_{p11} \\ 4C_{g11} & C_{\beta11} & C_{\nu11} \\ 4C_{p11} & C_{\nu11} & C_{\chi11} \end{vmatrix}.$$

Из выражений (31) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_0}{\partial x} &= 4d_1 x^3, & \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} &= 12d_1 x^2, & \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} &= 24d_1 x, \\ \frac{\partial \varphi_{00}}{\partial x} &= 3d_2 x^2, & \frac{\partial^2 \varphi_{00}}{\partial x^2} &= 6d_2 x, & \frac{\partial \psi_{00}}{\partial x} &= 3d_3 x^2, & \frac{\partial^2 \psi_{00}}{\partial x^2} &= 6d_3 x, \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Тогда граничные условия (15) на L_0 для данного жестко заземленного контура на основе (17) примут вид

$$2Re \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, d_{yk}, b_{yk}) W'_k(z_k) = (-4d_1 x^3 + c_{10}, c_{20}, c_{30}, c_{40}). \quad (34)$$

Подставляя в эти условия функции (25) и учитывая, что на контуре L_0

$$\begin{aligned} x &= a_0 \cos \theta = \frac{a_0}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right), \\ x^3 &= \frac{a_0^3}{2} \left(\sigma^3 + \frac{1}{\sigma^3} \right) + \frac{3a_0}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right), \quad \zeta_{k0} = \sigma, \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \left((1, \mu_k, d_{yk}, b_{yk}) \left(\sigma^n + \frac{m_{k0}^n}{\sigma^n} \right) a_{k0n} + \right. \\ & \quad \left. + (1, \bar{\mu}_k, \bar{d}_{yk}, \bar{b}_{yk}) \left(\frac{1}{\sigma^n} + \bar{m}_{k0}^n \sigma^n \right) \bar{a}_{k0n} \right) = \\ & = \left(-\frac{d_1 a_0^3}{2} \left(\sigma^3 + \frac{1}{\sigma^3} \right) - \frac{3d_1 a_0}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right) + c_{10}, c_{20}, c_{30}, c_{40} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Приравнивая в (35) коэффициенты при одинаковых степенях σ , получаем равенства $a_{k0n} = 0$ при $n \neq 1, n \neq 3$ и две следующие системы линейных алгебраических уравнений четвертого порядка для определения a_{k01}, a_{k03} :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^4 \left((1, \mu_k, d_{yk}, b_{yk}) m_{k0}^n a_{k0n} + (1, \bar{\mu}_k, \bar{d}_{yk}, \bar{b}_{yk}) \bar{a}_{k0n} \right) = \\ & = \left(-\frac{d_1 a_0^3}{2} \delta_k^3 - \frac{3d_1 a_0}{2} \delta_k^1, 0, 0, 0 \right) \text{ при } n = 1, 3. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь δ_n^i – символ Кронекера.

Для комплексных потенциалов будем иметь

$$W'_k(z_k) = a_{k00} + a_{k01} \left(\zeta_{k0} + \frac{m_{k0}}{\zeta_{k0}} \right) + a_{k03} \left(\zeta_{k0}^3 + \frac{m_{k0}^3}{\zeta_{k0}^3} \right), \quad (37)$$

или, учитывая следующие из (11) равенства

$$\zeta_{k0} + \frac{m_{k0}}{\zeta_{k0}} = \frac{z_k}{R_{k0}}, \quad \zeta_{k0}^3 + \frac{m_{k0}^3}{\zeta_{k0}^3} = \frac{z_k^3}{R_{k0}^3} - 3m_{k0} \frac{z_k}{R_{k0}},$$

выражения

$$W'_k(z_k) = a_{k00} + (a_{k01} - 3m_{k0} a_{k03}) \frac{z_k}{R_{k0}} + a_{k03} \frac{z_k^3}{R_{k0}^3}. \quad (38)$$

Для моментов (18), (19) получим формулы

$$\begin{aligned} & (M_x, M_y, H_{xy}, M_{dx}, M_{dy}, M_{bx}, M_{by}) = \\ & = (M_{0x}, M_{0y}, H_{0xy}, M_{0dx}, M_{0dy}, M_{0bx}, M_{0by}) - \\ & - 2Re \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k, dx, dy, bx, by) \left[\frac{a_{k01}}{R_{k0}} + \frac{3a_{k03} z_k^2}{R_{k0}^3} \right], \end{aligned} \quad (39)$$

в которых для моментов с индексами 0 на основе (21), (22) и (33) имеем

$$\begin{aligned}
 M_{0x} &= -3(4D_{11}d_1 - C_{g11}d_2 - C_{p11}d_3)x^2, \\
 M_{0y} &= -3(4D_{12}d_1 - C_{g12}d_2 - C_{p12}d_3)x^2, \\
 H_{0xy} &= -3(4D_{16}d_1 - C_{g16}d_2 - C_{p16}d_3)x^2, \\
 M_{0dx} &= 3(4C_{g11}d_1 + D_{g11}d_2 + D_{p11}d_3)x^2, \\
 M_{0dy} &= 3(4C_{g21}d_1 + D_{g12}d_2 + D_{p12}d_3)x^2, \\
 M_{0bx} &= 3(4C_{p11}d_1 + D_{p11}d_2 + E_{p11}d_3)x^2, \\
 M_{0by} &= 3(4C_{p21}d_1 + D_{p12}d_2 + E_{p12}d_3)x^2.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Аналогичным образом повторением предыдущих выводов получаются решения задач ЭУ, МУ и ТУ. Так, в случае задачи ТУ системы (36) примут вид

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^2 ((1, \mu_k) m_{k0}^n a_{k0n} + (1, \bar{\mu}_k) \bar{a}_{k0n}) = \\
 &= \left(-\frac{d_1 a_0^3}{2} \delta_k^3 - \frac{3d_1 a_0}{2} \delta_k^1, 0 \right) \quad \text{при } n = 1, 3,
 \end{aligned}$$

а моменты от частного решения будут такими:

$$\begin{aligned}
 M_{0x} &= -12D_{11}d_1x^2, \quad M_{0y} = -12D_{12}d_1x^2, \quad H_{0xy} = -12D_{16}d_1x^2, \\
 M_{0dx} &= M_{0dy} = M_{0bx} = M_{0by} = 0,
 \end{aligned} \tag{41}$$

где

$$d_1 = -\frac{q_0}{24D_{11}}.$$

Заметим, что принятое частное решение (31) является наиболее удобным для использования; столь же удобное для преобразований решение получится, если в (31) переменную x заменить на y . Более общим будет, если сохранять все члены с x и дополнить аналогичными членами, содержащими y , но в этом случае из сравнения коэффициентов при степенях обеих переменных получится 5 уравнений (одно из первого уравнения (1), по 2 из второго и третьего уравнений) для 6 неизвестных. и нужно будет 2 коэффициента выбирать одинаковыми.

б). *Действие в центре плиты сосредоточенной силы.* Пусть в центре эллиптической плиты с контуром L_0 и полуосями a_0, b_0 приложена сосредоточенная сила P_1^0 (рис. 4). Как и выше, плита по контуру L_0 жестко закреплена, моменты

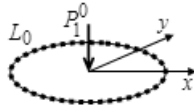


Рис. 4.

индукций на нем равны нулю.

В данном случае комплексные потенциалы (8) имеют вид

$$W'_k(z_k) = (A_{k1}^0 z_k + B_{k1}^0) \ln z_k + W'_{k0}(z_k), \quad (42)$$

где A_{k1}^0, B_{k1}^0 – постоянные, для которых из (9) и (10) имеем

$$\begin{aligned} 2Re \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \lambda_k, \lambda_k \mu_k, v_k, v_k \mu_k, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{k1}^0 &= \\ &= \left(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{P_1^0}{2\pi D_{11}} \right), \\ B_{k1}^0 &= 0; \end{aligned} \quad (43)$$

$W'_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в эллипсах L_{k0} и представимые рядами (13). Следовательно,

$$W'_k(z_k) = A_{k1}^0 z_k \ln z_k + \sum_{n=0}^{\infty} a_{k0n} P_n(z_k). \quad (44)$$

На контуре L_0 , где $\zeta_{k0} = \sigma$, учитывая, что $|\sigma| = 1$, $|\frac{m_{k0}}{\sigma^2}| < 1$, и разлагая $\ln(1 + \frac{m_{k0}}{\sigma^2})$ в ряд Тейлора, получим равенство

$$\begin{aligned} A_{k1}^0 z_k \ln z_k &= A_{k1}^0 R_{k0} \left(\sigma + \frac{m_{k0}}{\sigma} \right) \ln \sigma + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\delta_n^1 \alpha_{k2n-1} \sigma^{2n-1} + \frac{\beta_{k2n-1}}{\sigma^{2n-1}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{k0n} P_n(\sigma), \end{aligned} \quad (45)$$

в котором

$$\alpha_{k2n-1} = A_{k1}^0 R_{k0} \ln R_{k0}, \quad \beta_{k2n-1} = \frac{(-1)^n A_{k1}^0 R_{k0} m_{k0}^n}{n(n-1)}.$$

Подставляя функции (44) с учетом (45) в граничные условия (34) с нулевыми правыми частями, получим

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \left((1, \mu_k, d_{yk}, b_{yk}) \left(\sigma^n + \frac{m_{k0}^n}{\sigma^n} \right) a_{k0n} + \right. \\ &\quad \left. + (1, \bar{\mu}_k, \bar{d}_{yk}, \bar{b}_{yk}) \left(\frac{1}{\sigma^n} + \bar{m}_{k0}^n \sigma^n \right) \bar{a}_{k0n} \right) = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left((1, \mu_k, d_{yk}, b_{yk}) \left(\delta_n^1 \alpha_{k2n-1} \sigma^{2n-1} + \frac{\beta_{k2n-1}}{\sigma^{2n-1}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (1, \bar{\mu}_k, \bar{d}_{yk}, \bar{b}_{yk}) \left(\delta_n^1 \bar{\alpha}_{k2n-1} + \bar{\beta}_{k2n-1} \sigma^{2n-1} \right) \right), \end{aligned} \quad (46)$$

и применяя метод рядов, получаем $a_{k0,2n} = 0$ и систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} ((1, \mu_k, d_{yk}, b_{yk}) m_{k0}^{2n-1} a_{k0,2n-1} + (1, \bar{\mu}_k, \bar{d}_{yk}, \bar{b}_{yk}) \bar{a}_{k0,2n-1}) = \\ = \sum_{k=1}^4 ((1, \bar{\mu}_k, \bar{d}_{yk}, \bar{b}_{yk}) \delta_n^1 \bar{\alpha}_{k,2n-1} + (1, \mu_k, d_{yk}, b_{yk}) \beta_{k,2n-1}). \end{aligned} \quad (47)$$

Следовательно, для комплексных потенциалов (42) получим выражения

$$W'_k(z_k) = A_{k1}^0 z_k \ln z_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{k0,2n-1} P_{2n-1}(z_k), \quad (48)$$

и их производные

$$W''_k(z_k) = A_{k1}^0 \ln z_k + A_{k1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{k0,2n-1} P'_{2n-1}(z_k), \quad (49)$$

причем $P'_{2n-1}(z_k)$ выражаются рекуррентными формулами [8]

$$\begin{aligned} P'_1(z_k) &= \frac{1}{R_k}, P'_2(z_k) = \frac{2z_k}{R_k^2}, \\ P'_{2n+1}(z_k) &= \frac{2n+1}{2n} \frac{z_k}{R_k} P'_{2n}(z_k) - \frac{2n+1}{2n-1} m_k P'_{2n-1}(z_k), \\ P'_{2n+2}(z_k) &= \frac{2n+2}{2n+1} \frac{z_k}{R_k} P'_{2n+1}(z_k) - \frac{2n+2}{2n} m_k P'_{2n}(z_k) \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (50)$$

Зная производные комплексных потенциалов (49), найдем моменты (21), (22).

1. Калоеров С.А. Двумерная задача электроупругости для многосвязного пьезоэлектрического тела / С.А. Калоеров, А.И. Баева, Ю.А. Глуценко // Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 1. – С. 84–91.
2. Калоеров С.А. Двумерная задача магнитоупругости для многосвязного пьезомагнитного тела / С.А. Калоеров, О.И. Бороненко // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 10. – С. 64–74.
3. Калоеров С.А. Задача электромагнитоупругости для пластинки с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, А.В. Петренко, К.Г. Хорошев // Прикладная механика. – 2010. – Т. 46, № 2. – С. 93–105.
4. Kirchhoff G.R. Note relative a la theorie de l'equilibreet du mouvement d'une plaque elastique / G.R. Kirchhoff // Comptes Rendus Mathematique (Paris). – 1848. – Vol. XXVII. – P. 394–397.
5. Kirchhoff G.R. Uber das gleichgewichi und die bewegung einer elastischem scheibe / G.R. Kirchhoff // J. Fuer die Reine und Angewandte Mathematik. – 1850. – Vol. 40. – P. 51–88.
6. Калоеров С.А. Краевые задачи прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естествен. науки. – 2019. – № 1. – С. 42–58.
7. Калоеров С.А. Комплексные потенциалы теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естественные науки. – 2019. – № 3-4. – С. 37–57.

8. Космодамианский А.С. Температурные напряжения в многосвязных пластинках /А.С.Космодамианский, С.А. Калоеров. – Киев-Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.

S.A. Kaloerov

Exact analytical solutions of electromagnetoelasticity problems for an elliptical plate.

Solutions of various problems of electromagnetoelasticity for an elliptical plate are given. At the same time, using complex potentials, decomposition of holomorphic functions into series by Faber polynomials, and the series method, these problems are reduced to solutions of systems of linear algebraic equations of the 8th order. The cases of impacts along the contour of the slab, along its upper base, or at its individual internal points are considered.

Keywords: *theory of thin plates bending, electromagnetoelasticity, complex potentials, series method, exact solutions.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
kaloerov@mail.ru

Получено 23.10.2020

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 519:539.3:534.1

©2020. В.Н. Павлыш, С.В. Сторожев, С.Б. Номбре

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЧЕТКИХ МОДЕЛЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ И РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗАМКНУТЫХ СФЕРИЧЕСКИХ И ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК

Дано описание нечетко-множественной численно-аналитической методики учета факторов неопределенности экзогенных физико-механических геометрических параметров при исследованиях моделей потери устойчивости тонких изотропных идеально упругих оболочек замкнутой сферической и эллипсоидальной формы под действием интенсивных нормальных равномерно распределенных внешних усилий. Разработанный подход базируется на задании обладающих разбросами значений фазифицированных неконтрастных исходных параметров нечетко-интервальными величинами с последующим переходом к нечетко-множественным аргументам в соответствующих аналитических соотношениях детерминистических версий рассматриваемых моделей расчета критических усилий и резонансных частот путем применения модифицированной альфа-уровневой версии эвристического принципа обобщения. Описываются результаты вычислительных экспериментов по применению построенной методики.

Ключевые слова: тонкие изотропные оболочки, сферическая и эллипсоидальная форма, прикладные модели деформирования, эффекты потери устойчивости, резонансные колебания, неконтрастность механических и геометрических параметров, учет разбросов значений, методы теории нечетких множеств, эвристический принцип обобщения.

Введение и цели исследования. Теоретические исследования по проблемам потери устойчивости интенсивно нагруженных тонкостенных оболочечных конструкций, несмотря на достаточно протяженный период их реализации, продолжают оставаться крайне актуальной тематической областью математического моделирования в механике деформируемого твердого тела [1 – 5]. С возможностями эффективного анализа этих вопросов связаны, в частности, перспективы разработки новых конструктивных решений по повышению прочности, надежности и долговечности деталей и узлов машин, приборов, строительных сооружений, объектов подводной и аэрокосмической техники [6 – 10], а также ряд других важных вопросов междисциплинарного характера, касающихся в частности проблем термоядерной энергетики [11 – 12]. При этом представляющими большую важность аспектами исследований в данной области являются задачи учета факторов неопределенности экзогенных параметров исследуемых моделей, в частности их неконтрастности, связанной с разбросами экспериментальных измерений физико-механических характеристик материалов, с допустимыми тех-

нологическими отклонениями от номинальных показателей, с вариативностью эксплуатационных режимов и, соответственно, необходимость получения оценок влияния подобной неопределенности на получаемые в итоге теоретических исследований расчетные данные и выводы. Доминирующим и зарекомендовавшим свою результативность подходом к учету факторов неопределенности в моделях деформационных процессов на сегодня выступает применение методов вероятностно-стохастического анализа [13 – 14], предусматривающих, однако, определенные достаточно строгие требования к характеру исходной информации относительно ее корректной статистической природы. Дополнительные возможности в этом направлении, смягчающие условия к характеру неопределенных экзогенных данных, включая возможности использования результатов обработки частотных выборок малой мощности и выводов субъективных экспертных заключений, а также предусматривающие непосредственное оперирование неконтрастными величинами без процедур их предварительного усреднения, создает применение в исследованиях по рассматриваемой проблематике методов теории нечетких множеств (методов нечетких вычислений) [15 – 19]. Нечетко-множественный подход к получению оценок влияния разбросов исходных параметров базируется на задании обладающих разбросами значений фазифицированных неконтрастных исходных параметров нечетко-интервальными величинами с последующим переходом к нечетко-множественным аргументам в соответствующих аналитических соотношениях детерминистических версий рассматриваемых моделей расчета критических усилий и резонансных частот путем применения модифицированной альфа-уровневой версии эвристического принципа обобщения [20 – 22].

В контексте представленных соображений, целью реализуемых в работе исследований является распространение нечетко-множественной методики получения оценок влияния разбросов в значениях механических и геометрических исходных параметров на задачи потери устойчивости и резонансных колебаний тонкостенных конструкционных элементов в виде тонких замкнутых изотропных оболочек сферической и эллипсоидальной формы.

1. Соотношения детерминистических вариантов анализируемых моделей. В качестве базовых моделей в представляемом исследовании рассматриваются модели потери устойчивости и колебаний тонких замкнутых сферических и эллипсоидальных оболочек под действием равномерного внешнего давления.

Первой из рассматриваемых является модель устойчивости равномерно сжимаемой сферической изотропной оболочки радиуса R и толщины h , изготовленной из материала с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Согласно [5], критическое значение интенсивности распределенного обуславливающего потерю устойчивости внешнего нормального давления P_* на оболочку в рассматриваемом случае задается соотношением

$$P_{*1} = F_1(E, \nu, h, R) = 2Eh^2 / (R^2(3(1 - \nu^2))^{1/2}). \quad (1)$$

Вторым рассматриваемым случаем является модель подверженной равномерному внешнему давлению эллипсоидальной оболочки [1 – 4] с полуосями a и b , характеризуемой как вытянутая ($a < \sqrt{2}b$) либо сплюснутая ($a > b$). Согласно [1], для вытянутой эллипсоидальной оболочки

$$P_{*2} = F_2(E, \nu, h, a, b) = 2Eh^2 / ((2b^2 - a^2)(3(1 - \nu^2))^{1/2}), \quad (2)$$

а для сплюснутой эллипсоидальной оболочки

$$P_{*3} = F_3(E, \nu, h, a, b) = 2Eh^2b^2 / (a^4(3(1 - \nu^2))^{1/2}). \quad (3)$$

Еще одной анализируемой моделью является представленная в работе [8] модель устойчивости трансверсально-изотропной замкнутой сферической оболочки при действии нормального равномерно распределенного быстро приложенного внешнего давления, деформирование которой рассматривается в рамках учитывающей эффекты поперечного сдвига уточненной теории. Согласно данной модели базовым является описывающее колебания рассматриваемой оболочки толщины h уравнение относительно функции динамических нормальных перемещений $w(\beta, \delta, t)$

$$[c_2(\Delta + 1)^2 + 1 - h^*\Delta](\Delta + 2)w = ((R^2/Eh)(1 - h^*\Delta)(\Delta + 1 - \nu)\rho h \cdot \partial^2 w / \partial t^2), \quad (4)$$

в котором β, δ – соответственно угловые параметры долготы и широты связываемых с оболочкой географических координат; Δ – оператор Лапласа

$$\begin{aligned} \Delta &= (\sin \beta)^{-1} [\cos \beta \cdot \partial / \partial \beta + \sin \beta \cdot \partial^2 / \partial \beta^2 + (\sin \beta)^{-1} \partial^2 / \partial \delta^2]; \\ c^2 &= h^2(12(1 - \nu)R^2)^{-1}; \quad h^* = Eh^2(10(1 - \nu^2)R^2G^*)^{-1}; \end{aligned} \quad (5)$$

E – модуль Юнга материала оболочки в тангенциальных направлениях; ν – коэффициент Пуассона; G^* – модуль сдвига для плоскостей, нормальных к поверхности оболочки; ρ – плотность материала оболочки.

В рамках данной модели, согласно [8], представления для собственных частот колебаний имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_n &= \Phi(E, G^*, \nu, \rho, R, h) = \left[\frac{E(\lambda_n - 2)(c^2(\lambda_n - 1)^2 + 1 + h^*\lambda_n)}{(\rho R^2(1 + h^*\lambda_n)(\lambda_n - 1 + \nu))} \right]^{1/2}, \\ \lambda_n &= n(n + 1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (6)$$

Для оценки влияния разбросов значений экзогенных физико-механических и геометрических параметров на величины характеристик, определяемых выражениями (1) – (3), (6), в указанных функциональных соотношениях реализуется переход к нечетко-множественным аргументам с применением α – уровневой формы эвристического принципа расширения [16 – 18, 20 – 22].

2. Получение нечетко-множественных оценок для параметров критических усилий и собственных частот. Исходным этапом является процедура расширения области определения аргументов $E, G, \nu, \rho, R, a, b, h$ функциональных соотношений (1) – (3), (6) на нечетко-множественные величины

$\tilde{E}, \tilde{G}, \tilde{\nu}, \tilde{\rho}, \tilde{R}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{h}$. При этом принимается гипотеза описания неопределенных исходных параметров трапецидальными нормальными нечеткими интервалами с заданием соответствующих кортежей из параметров границ интервалов носителей и границ модальных интервалов [23, 24]:

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= (E_1, E_2, E_3, E_4), & \tilde{G} &= (G_1, G_2, G_3, G_4), & \tilde{\nu} &= (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4), \\ \tilde{\rho} &= (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4), & \tilde{R} &= (R_1, R_2, R_3, R_4), & \tilde{a} &= (a_1, a_2, a_3, a_4), \\ \tilde{b} &= (b_1, b_2, b_3, b_4), & \tilde{h} &= (h_1, h_2, h_3, h_4).\end{aligned}\quad (7)$$

Для дальнейшей реализации предлагаемой методики вводятся описания введенных нечетко-интервальных характеристик $\tilde{E}, \tilde{G}, \tilde{\nu}, \tilde{\rho}, \tilde{R}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{h}$ разложениями по α – срезам

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha], & \tilde{G} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{G}_\alpha, \overline{G}_\alpha], \\ \tilde{\nu} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha], & \tilde{\rho} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_\alpha, \overline{\rho}_\alpha], \\ \tilde{R} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha], & \tilde{a} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{a}_\alpha, \overline{a}_\alpha], \\ \tilde{b} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{b}_\alpha, \overline{b}_\alpha], & \tilde{h} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha],\end{aligned}\quad (8)$$

в которых

$$\begin{aligned}\underline{E}_\alpha &= (1 - \alpha)E_1 + \alpha E_2, & \overline{E}_\alpha &= \alpha E_3 + (1 - \alpha)E_4; \\ \underline{G}_\alpha &= (1 - \alpha)G_1 + \alpha G_2, & \overline{G}_\alpha &= \alpha G_3 + (1 - \alpha)G_4; \\ \underline{\nu}_\alpha &= (1 - \alpha)\nu_1 + \alpha \nu_2, & \overline{\nu}_\alpha &= \alpha \nu_3 + (1 - \alpha)\nu_4; \\ \underline{\rho}_\alpha &= (1 - \alpha)\rho_1 + \alpha \rho_2, & \overline{\rho}_\alpha &= \alpha \rho_3 + (1 - \alpha)\rho_4; \\ \underline{R}_\alpha &= (1 - \alpha)R_1 + \alpha R_2, & \overline{R}_\alpha &= \alpha R_3 + (1 - \alpha)R_4; \\ \underline{a}_\alpha &= (1 - \alpha)a_1 + \alpha a_2, & \overline{a}_\alpha &= \alpha a_3 + (1 - \alpha)a_4; \\ \underline{b}_\alpha &= (1 - \alpha)b_1 + \alpha b_2, & \overline{b}_\alpha &= \alpha b_3 + (1 - \alpha)b_4; \\ \underline{h}_\alpha &= (1 - \alpha)h_1 + \alpha h_2, & \overline{h}_\alpha &= \alpha h_3 + (1 - \alpha)h_4.\end{aligned}\quad (9)$$

Получаемые в рамках использования α – уровневой формы эвристического принципа обобщения [16–18, 20–22] представления нечетко-множественных эндогенных параметров рассматриваемых исследуемых расчетных моделей соответственно записываются в виде:

$$\tilde{P}_{*j} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{P}_{*j\alpha}, \overline{P}_{*j\alpha}] \quad (j = \overline{1,3}), \quad \tilde{\omega}_n = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\omega}_{n\alpha}, \overline{\omega}_{n\alpha}]. \quad (10)$$

При этом с учетом справедливых во всех областях определения функций $F_1(E, \nu, h, R)$, $F_2(E, \nu, h, a, b)$, $F_3(E, \nu, h, a, b)$, $\Phi(E, G, \nu, \rho, R, h)$ оценок

$$\begin{aligned}
 & \partial F_1(E, \nu, h, R)/\partial E > 0, \quad \partial F_1(E, \nu, h, R)/\partial \nu > 0, \\
 & \partial F_1(E, \nu, h, R)/\partial h > 0, \quad \partial F_1(E, \nu, h, R)/\partial R < 0; \\
 & \partial F_2(E, \nu, h, R)/\partial E > 0, \quad \partial F_2(E, \nu, h, R)/\partial \nu > 0, \quad \partial F_2(E, \nu, h, R)/\partial h > 0, \\
 & \partial F_2(E, \nu, h, R)/\partial a > 0, \quad \partial F_2(E, \nu, h, R)/\partial b < 0; \\
 & \partial F_3(E, \nu, h, R)/\partial E > 0, \quad \partial F_3(E, \nu, h, R)/\partial \nu > 0, \quad \partial F_3(E, \nu, h, R)/\partial h > 0, \\
 & \partial F_3(E, \nu, h, R)/\partial a < 0, \quad \partial F_3(E, \nu, h, R)/\partial b > 0; \\
 & \partial \Phi(E, G^*, \nu, \rho, R, h)/\partial \rho < 0;
 \end{aligned} \tag{11}$$

выражения для $\underline{P}_{*j\alpha}$, $\overline{P}_{*j\alpha}$, $\underline{\omega}_{n\alpha}$, $\overline{\omega}_{n\alpha}$ могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
 \underline{P}_{*1\alpha} &= 2\underline{E}_\alpha \underline{h}_\alpha^2 / (\overline{R}_\alpha^2 (3(1 - \underline{\nu}_\alpha^2))^{1/2}), \\
 \overline{P}_{*1\alpha} &= 2\overline{E}_\alpha \overline{h}_\alpha^2 / (\underline{R}_\alpha^2 (3(1 - \overline{\nu}_\alpha^2))^{1/2});
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{P}_{*2\alpha} &= 2\underline{E}_\alpha \underline{h}_\alpha^2 / ((2\underline{b}_\alpha^2 - \underline{a}_\alpha^2) (3(1 - \underline{\nu}_\alpha^2))^{1/2}), \\
 \overline{P}_{*2\alpha} &= 2\overline{E}_\alpha \overline{h}_\alpha^2 / ((2\overline{b}_\alpha^2 - \overline{a}_\alpha^2) (3(1 - \overline{\nu}_\alpha^2))^{1/2});
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{P}_{*3\alpha} &= 2\underline{E}_\alpha \underline{h}_\alpha^2 \underline{b}_\alpha^2 / (\overline{a}_\alpha^4 (3(1 - \underline{\nu}_\alpha^2))^{1/2}), \\
 \overline{P}_{*3\alpha} &= 2\overline{E}_\alpha \overline{h}_\alpha^2 \overline{b}_\alpha^2 / (\underline{a}_\alpha^4 (3(1 - \overline{\nu}_\alpha^2))^{1/2});
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\omega}_{n\alpha} &= \inf_{\substack{E \in [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha] \\ G \in [\underline{G}_\alpha, \overline{G}_\alpha] \\ \nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha] \\ R \in [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha]}} \left\{ \left[\frac{E(\lambda_n - 2)(c^2(\lambda_n - 1)^2 + 1 + h^* \lambda_n)}{(\overline{\rho}_\alpha R^2 (1 + h^* \lambda_n)(\lambda_n - 1 + \nu))} \right]^{1/2} \right\},
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{\omega}_{n\alpha} &= \sup_{\substack{E \in [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha] \\ G \in [\underline{G}_\alpha, \overline{G}_\alpha] \\ \nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \overline{\nu}_\alpha] \\ R \in [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha]}} \left\{ \left[\frac{E(\lambda_n - 2)(c^2(\lambda_n - 1)^2 + 1 + h^* \lambda_n)}{(\underline{\rho}_\alpha R^2 (1 + h^* \lambda_n)(\lambda_n - 1 + \nu))} \right]^{1/2} \right\}.
 \end{aligned}$$

Соотношения (10), (12) – (15) являются базовыми для получения численных нечетко-множественных оценок факторов неопределенности в рассматриваемых моделях.

3. Результаты вычислительных экспериментов. Описываемая методика в качестве примера реализована в задачах оценки показателей интенсивности критических внешних усилий и величин собственных частот для сферических и эллипсоидальных оболочек с нечетко-интервальными физико-механическими и геометрическими исходными параметрами.

Для модели равномерно сжимаемой извне сферической оболочки из стали рассмотрен следующий вариант задания неконтрастных экзогенных параметров:

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= (19.7E_*, 19.9E_*, 20.0E_*, 20.2E_*), \\ \tilde{\nu} &= (0.276, 0.279, 0.282, 0.285), \\ \tilde{R} &= (2.95R_*, 2.99R_*, 3.02R_*, 3.06R_*), \\ \tilde{h} &= (0.0038R_*, 0.004R_*, 0.0042R_*, 0.0044R_*), \\ E_* &= 10^{10}[\text{Па}], \quad R_* = 1[\text{м}].\end{aligned}\tag{16}$$

Получаемая в данном случае с использованием соотношений (10), (12) нечетко-множественная оценка для величины критического внешнего равномерно распределенного давления \tilde{P}_{*1} характеризуется функцией принадлежности, представляемой на рисунке 1. Вид функций принадлежности позволяет сделать вы-

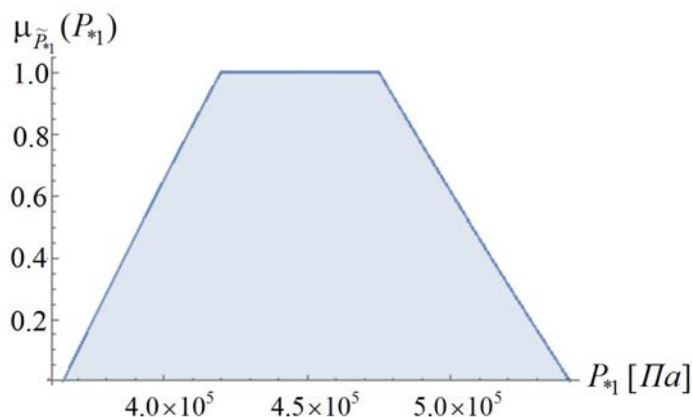


Рис.1. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*1}}(P_{*1})$.

воды о степени уверенности в возможности достижения соответствующих значений эндогенным параметром интенсивности критического давления при рассматриваемых неконтрастных параметрах расчетной модели. Можно также указать, что максимальные разбросы для задаваемых в виде (16) исходных параметров $\tilde{E}, \tilde{\nu}, \tilde{R}$ относительно медианных значений на носителях составляют не более 1.8%, а для исходного параметра \tilde{h} этот разброс составляет 7.3%. При этом оцениваемый максимальный (предельно возможный) разброс для рассчитанного эндогенного параметра \tilde{P}_{*1} относительно медианного значения на носителе составляет в данном случае порядка 19.3%, а на модальном интервале (в диа-

пазоне наиболее достоверных значений) относительно его медианного значения – порядка 6.2%.

Для модели равномерно сжимаемой извне вытянутой эллипсоидальной стальной оболочки рассмотрен вариант задания неконтрастных экзогенных параметров

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= (19.7E_*, 19.9E_*, 20.0E_*, 20.2E_*), & \tilde{\nu} &= (0.276, 0.279, 0.282, 0.285), \\ \tilde{a} &= (2.95R_*, 2.99R_*, 3.02R_*, 3.06R_*), \\ \tilde{b} &= (39.5R_*, 39.9R_*, 40.2R_*, 40.3R_*), \\ \tilde{h} &= (0.0038R_*, 0.004R_*, 0.0042R_*, 0.0044R_*), \\ E_* &= 10^{10}[\text{Па}], & R_* &= 1[\text{м}]. \end{aligned} \quad (17)$$

Нечетко-множественная оценка интенсивности критического равномерного давления, получаемая в данном случае с использованием соотношений (10), (13), характеризуется функцией принадлежности, представляемой на рисунке 2. При этом максимальные разбросы для задаваемых в виде (17) исходных параметров относительно медианных значений на носителях составляют не более 7.3%, а максимальный разброс для эндогенного параметра \tilde{P}_{*2} относительно медианного значения на носителе составляет порядка 16.8%, на модальном интервале – порядка 5.9%.

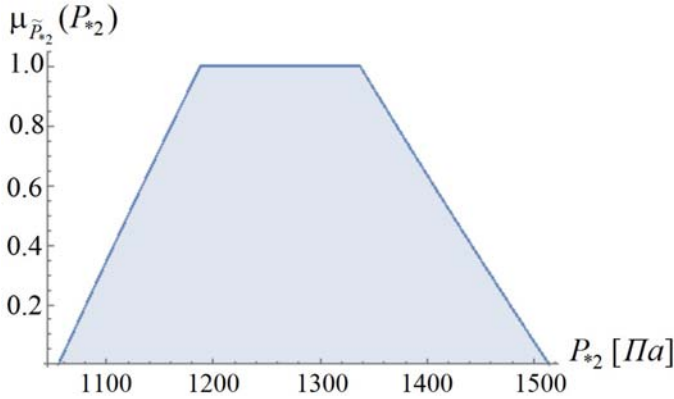


Рис.2. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*2}}(P_{*2})$.

Для модели равномерно сжимаемой сплюсненной эллипсоидальной стальной оболочки при варианте задания неконтрастных экзогенных параметров

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= (19.7E_*, 19.9E_*, 20.0E_*, 20.2E_*), \\ \tilde{\nu} &= (0.276, 0.279, 0.282, 0.285), \\ \tilde{a} &= (2.95R_*, 2.99R_*, 3.02R_*, 3.06R_*), \\ \tilde{b} &= (39.5R_*, 39.9R_*, 40.2R_*, 40.3R_*), \\ \tilde{h} &= (0.0038R_*, 0.004R_*, 0.0042R_*, 0.0044R_*), \\ E_* &= 10^{10}[\text{Па}], & R_* &= 1[\text{м}], \end{aligned} \quad (18)$$

нечетко-множественная оценка интенсивности критического давления, определяемая с использованием соотношений (10), (14), характеризуется функцией принадлежности, представляемой на рисунке 3. В данном случае для задаваемых в виде (17) исходных параметров максимальные разбросы относительно медианных значений на носителях также составляют не более 7.3%, максимальный разброс для эндогенного параметра \tilde{P}_{*3} относительно медианного значения на носителе – порядка 28.6%, на модальном интервале – порядка 7.9%.

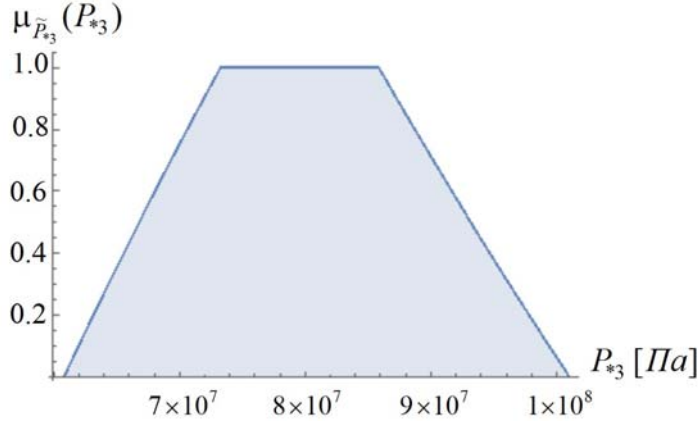


Рис.3. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*3}}(P_{*3})$.

Наконец, рассчитанная с использованием расчетных соотношений (10), (15) нечетко-множественная оценка $\tilde{\omega}_2$ для характеристики собственной частоты колебаний сферической трансверсально-изотропной оболочки в случае задания неконтрастных исходных параметров вида

$$\begin{aligned}
 \tilde{E} &= (19.7E_*, 19.9E_*, 20.0E_*, 20.2E_*), \\
 \tilde{G}^* &= (7.7E_*, 7.8E_*, 7.9E_*, 8.1E_*), \\
 \tilde{\nu} &= (0.276, 0.279, 0.282, 0.285), \\
 \tilde{\rho} &= (7.79\rho_*, 7.82\rho_*, 7.83\rho_*, 7.86\rho_*), \\
 \tilde{R} &= (2.95R_*, 2.99R_*, 3.02R_*, 3.06R_*), \\
 \tilde{h} &= (0.0038R_*, 0.004R_*, 0.0042R_*, 0.0044R_*), \\
 E_* &= 10^{10}[\text{Па}], \quad \rho_* = 10^3[\text{кг/м}^3], \quad R_* = 1[\text{м}],
 \end{aligned} \tag{19}$$

характеризуется функций принадлежности, приведенной на рисунке 4. Максимальные разбросы исходных параметров относительно медианных значений на носителях в этом варианте расчетов составляют для исходного параметра \tilde{h} – 7.3%, для остальных экзогенных параметров – не более 1.8%; максимальный разброс для эндогенного параметра $\tilde{\omega}_2$ относительно медианного значения на носителе – порядка 2.4%, на модальном интервале – порядка 0.6%.

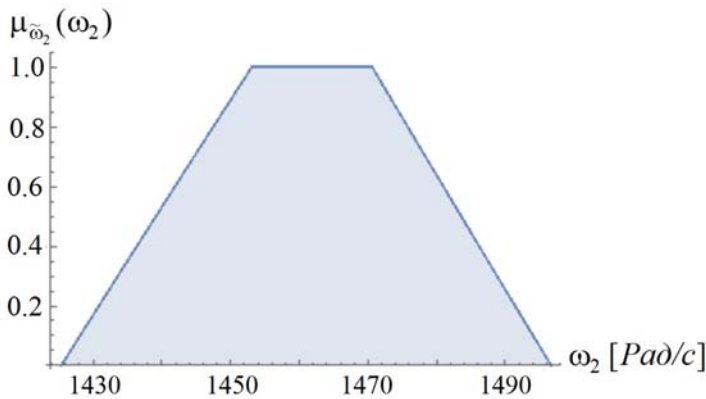


Рис.4. Профиль функции принадлежности $\mu_{\omega_2}(\omega_2)$.

Выводы. Результатом описанных в работе исследований является разработка численно-аналитической нечетко-множественной методики учета факторов неопределенности экзогенных физико-механических геометрических параметров при исследованиях прикладных моделей потери устойчивости тонких изотропных идеально упругих оболочек замкнутой сферической и эллипсоидальной формы под действием интенсивных нормальных равномерно распределенных внешних усилий. Разработанный подход базируется на задании имеющих разбросы значений фазсифицированных неконтрастных исходных параметров в виде нечетко-интервальных величин и на последующем переходе к нечетко-множественным аргументам в соответствующих аналитических соотношениях, полученных в результате анализа детерминистических версий рассматриваемых моделей расчета величин критических усилий и резонансных частот для тонких оболочек замкнутой сферической и эллипсоидальной формы, подверженных действию равномерных статических либо импульсных сжимающих нагрузок. Указанный переход реализуется путем применения модифицированной альфа-уровневой версии эвристического принципа обобщения.

Описываются результаты вычислительных экспериментов по применению построенной методики на базе применения разработанных для ее числовой реализации программных приложений. Дано описание профилей функций принадлежности для рассчитываемых нечетко-множественных эндогенных характеристик и приведен ряд сопоставлений для величин разбросов исходных параметров и разбросов в получаемых нечетко-множественных оценках.

Получаемые на основе применения описываемой методики оценки дают возможность установить диапазоны наиболее достоверных отклонений в значениях эндогенных параметров расчетных моделей при оговариваемых разбросах исходных физико-механических и геометрических параметров, а также позволяют определить для значений исследуемых характеристик предельные границы возможных разбросов на минимальном уровне уверенности. Методика позволяет использовать для получения искомых оценок неопределённую исходную

информацию экспертного характера.

1. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1976. – 984 с.
2. *Алфутов Н.А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н.А. Алфутов. – М.: Наука, 1978. – 312 с.
3. *Григолюк Э.И.* Устойчивость оболочек / Э.И. Григолюк, В.В. Кабанов. – М.: Наука, 1978. – 359 с.
4. *Croll J.G.A.* Stability in Shells / J.G.A. Croll // *Nonlinear Dynamics*. – Vol. 43. – 2006. – P. 17–28.
5. *Ильгамов М.А.* Устойчивость сферической формы оболочек и полостей / М.А. Ильгамов // Труды Института механики УНЦ РАН. – 2007. – С. 38–59.
6. *Михасев Г.И.* О бифуркации длинных оболочек, лежащих на упругом основании, под действием гидростатического давления / Г.И. Михасев, Т.В. Никонова // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2008. – № 3. – С. 129–132.
7. *Греков В.Ф.* Об устойчивости тонкостенных цилиндров / В.Ф. Греков, А.А. Пьянков, В.А. Тодчук // Компрессорное и энергетическое машиностроение. – № 3 (32). – 2013. – С. 10–12.
8. *Платонов В.В.* Устойчивость трансверсально-изотропной сферической оболочки под действием динамического нормального давления / В.В. Платонов // Вестник СПбГУ. Сер. 1. – Вып. 3. – 2010. – С. 105–110.
9. *Мнев Е.Н.* Гидроупругость оболочек / Е.Н. Мнев, А.К. Перцев. – Л.: Судостроение, 1970. – 365 с.
10. *Ilgamov M.A.* Static problems of hydroelasticity / M.A. Ilgamov. – Moscow: Fizmatlit, 1998. – 208 p.
11. *Ильгамов М.А.* Качественный анализ развития отклонений от сферической формы при схлопывании полости в жидкости / М.А. Ильгамов // ДАН. – 2005. – Т. 404, № 1. – С. 37–40.
12. *Нигматуллин Р.И.* Искажение сферичности парового пузырька в дейтерированном ацетоне / Р.И. Нигматуллин, А.А. Аганин, М.А. Ильгамов, Д.Ю. Топорков // ДАН. – 2006. – Т. 408, № 6. – С. 767–771.
13. *Болотин В.В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений / В.В. Болотин. – М.: Стройиздат, 1982. – 352 с.
14. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел / В.А. Ломакин. – М.: ЛЕНАНД, 2014. – 144 с.
15. *Дилигенский Н.В.* Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Н.В. Дилигенский, Л.Г. Дымова, П.В. Севастьянов. – М.: Издательство Машиностроение - 1, 2004. – 397 с.
16. *Ротштейн А.П.* Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов / А.П. Ротштейн, С.Д. Штовба, А.Н. Козачко. – Винница: УНІВЕРСУМ, 2007. – 215 с.
17. *Нгуен Куок Ши* Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.
18. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic / M. Hanss // An introduction with Engineering Application. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
19. *Bede B.* Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic / B. Bede. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. – 276 p.
20. *Vyskub V.G.* Model of fuzzy estimation of mechanical stress concentration for aerospace and industrial flat structures with polygonal holes of uncertain curvature at rounded corner points / V.G. Vyskub, E.I. Mutina, V.I. Storozhev, S.V. Storozhev // IOP Conf. Series: Materials

Science and Engineering, 537 (2019), 022013, URL: <http://doi:10.1088/1757-899X/537/2/022013>.

21. *Мутин Д.И.* Учет разброса значений экзогенных параметров в модели устойчивости тонкой цилиндрической оболочки при равномерном осевом сжатии / Д.И. Мутин, С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // Донецкие чтения 2020: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы V Международной научной конференции (Донецк, 17-18 ноября 2020 г.). – Том 1: Физико-математические и технические науки. Часть 1. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2020. – С. 77–79.
22. *Выскуб В.Г.* Оценки влияния разброса параметров в прикладных моделях устойчивости цилиндрических оболочек / В.Г. Выскуб, Д.И. Мутин, С.В. Сторожев, Зыюнг Минь Хай // Механика твердого тела. – 2020. – Вып. 50. – С. 133–144.
23. *Grzegorzewski P.* Trapezoidal approximations of fuzzy numbers / P. Grzegorzewski, E. Mr̄owka // Fuzzy Sets Syst. – 2005. – Vol. 153. – P. 115–135.
24. *Ban A.I.* Trapezoidal approximation and Aggregation / A.I. Ban, L.C. Coroianu, P. Grzegorzewski // Fuzzy Sets Syst. – 2011. – Vol. 177. – P. 45–59.

V.N. Pavlysh, S.V. Storozhev, S.B. Nombre

Investigation of fuzzy models of stability and resonance vibrations of closed spherical and ellipsoidal shells.

A description of a fuzzy-set numerical-analytical technique for taking into account the uncertainty factors of exogenous physical and mechanical geometric parameters when studying models of buckling of thin isotropic ideally elastic shells of a closed spherical and ellipsoidal shape under intense normal uniformly distributed external forces is given. The developed approach is based on setting non-contrasting initial parameters with scattering errors in form of fuzzy-intervals and on the subsequent transition to fuzzy-set arguments in the corresponding analytical ratios of deterministic versions of the considered models by applying a modified alpha-level version of the heuristic principle of generalization. The results of computational experiments on the application of the constructed technique for calculation of critical forces and eigenfrequencies are described.

Keywords: *thin isotropic shells, spherical and ellipsoidal shapes, applied models of deformations, buckling effects, resonant vibrations, non-contrast mechanical and geometrical parameters, accounting for scatter errors of values, methods of the theory of fuzzy sets, heuristic principle of generalization.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный технический университет”,
Донецк

Получено 25.09.2020

ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры”, Макеевка
s.storozhev@donnasa.ru

УДК 519:539.3:534.1

©2020. В.Н. Павлыш, С.В. Сторожев

ВЛИЯНИЕ РАЗБРОСОВ ЗНАЧЕНИЙ ИСХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ В МОДЕЛЯХ ИЗГИБНЫХ ФОРМ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ СЖИМАЕМЫХ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ: НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД

Дается изложение численно-аналитической нечетко-множественной методики исследования модели Эйлера, описывающей эффекты потери устойчивости прямых тонких сжимаемых изотропных стержней в рамках гипотезы линейного докритического напряженно-деформированного состояния, при дополнительном учете эффектов разброса значений исходных физико-механических и геометрических параметров. Описываемый подход базируется на применении расчетных аналитических соотношений детерминистических версий рассматриваемых вариантов модели для эндогенных параметров критических сжимающих усилий и внутренних напряжений, предполагает задание неопределенных экспериментальных и технологических экзогенных параметров модели в форме нечетко-множественных величин и дальнейшее применение процедуры перехода в расчетных соотношениях к нечетко-множественным аргументам на базе применения альфа-уровневой модифицированной формы эвристического принципа расширения. Приведены примеры применения разработанной методики и анализа получаемых результатов.

Ключевые слова: тонкие прямые стержни, осевые сжимающие усилия, эффекты потери устойчивости, прикладная модель Эйлера, влияние разбросов исходных параметров, методы теории нечетких множеств, эвристический принцип обобщения.

Введение и цели исследования. Теоретические модели анализа эффектов потери устойчивости тонкостенных стержневых конструкций, несмотря на длительный период исследования, продолжают оставаться актуальным объектом изучения в механике деформируемого твердого тела, механике строительных конструкций и сооружений, механике машин и механизмов и играют важнейшую роль в выработке оценок показателей прочности, надежности и долговечности в процессе проектных разработок по указанным направлениям [1–4]. При этом одним из первостепенных вопросов дальнейшего изучения проблем устойчивости стержневых конструкций является учет факторов неопределенности моделируемых процессов и явлений, в числе которых – разбросы экзогенных параметров исследуемых моделей, в частности их неконтрастность, обусловленная погрешностями экспериментальных измерений физико-механических характеристик материалов, технологическими отклонениями в процессах изготовления от номинальных показателей, вариативностью эксплуатационных режимов.

При наличии эффективного подхода к решению задач учета неконтрастности данных в моделях исследуемого класса [5, 6], предполагающего использование методов теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, возможности его применения не являются исчерпывающе полными в силу исходных требований к природе исходной неопределенной информации,

не всегда обеспечиваемых условий ее корректной статистической природы. В силу этих соображений представляет интерес развитие методов, дополняющих спектр инструментов исследования эффектов неопределенности в моделях механики конструкций и допускающих использование субъективных экспертных заключений о диапазонах значений исходных параметров, данных, получаемых на основе обработки маломощных неоднородных частотных выборок, и позволяющих использовать неопределенные данные, не прибегая к процедуре их предварительного усреднения. В качестве одного из возможных приемов таких исследований может рассматриваться применение методов теории нечетких множеств [7–10], использование которых в прикладных инженерных моделях технологических и деформационных процессов описывается в работах [9–12]. Данный подход основывается на применении расчетных аналитических соотношений детерминистических версий рассматриваемых теоретических инженерных моделей, предполагает задание неопределенных экспериментальных и технологических экзогенных параметров моделей в форме нечетко-множественных величин и дальнейшее применение процедуры перехода в расчетных соотношениях к нечетко-множественным аргументам на базе применения альфа-уровневой модифицированной формы эвристического принципа расширения.

В контексте изложенных соображений, целью описываемых в данной работе исследований является обобщение нечетко-множественной методики получения оценок влияния разбросов в значениях механических и геометрических исходных параметров моделей деформирования на задачи потери устойчивости при сжатии прямых тонких изотропных стержней в рамках гипотезы линейного докритического напряженно-деформированного состояния стержневых конструкций (модели Эйлера).

1. Моделирование эффектов потери устойчивости прямых упругих стержней в рамках прикладных теорий. Результаты аналитического исследования детерминистических версий прикладных математических моделей устойчивости однородных по длине сжатых в осевом направлении тонких прямых стержней при различных вариантах задания краевых условий описаны в достаточно обширном числе публикаций, в частности в работах [1–4]. Они базируются на гипотезах деформирования стержней в пределах линейной модели упругого напряженного состояния и предполагают задание в расчетах точных значений исходных геометрических и физико-механических параметров рассматриваемых конструкций. В рамках данных исследований применительно к однородным по длине стержням с различными видами граничных условий на концах получены аналитические представления для критических значений сжимающих усилий P_* и критических уровней внутренних продольных напряжений σ_* , описываемые обобщенными выражениями

$$P_* = EI_{min}\pi^2(\eta l^2)^{-1}, \quad \sigma_* = P_*F^{-1}, \quad (1)$$

в которых F – площадь поперечного сечения рассматриваемого стержня; l – длина стержня; I_{min} – минимальный изгибный (осевой) момент инерции его

поперечного сечения; η – параметр, который принимает значение $\eta = 1$ в случае шарнирного закрепления обоих концов стержня; $\eta = 4$ в случае закрепления одного из концов и свободного противоположного конца; $\eta = 0.25$ для стержня, один конец которого закреплен и неподвижен, а противоположный защемлен в подвижной опоре; $\eta = (\pi/\vartheta)^2 \approx 0.4888$, где $\vartheta \approx 4.4934$ и является наименьшим корнем трансцендентного уравнения

$$tg\vartheta = \vartheta, \quad (2)$$

в случае, когда один конец стержня жестко закреплен, а противоположный имеет шарнирную опору.

Для решения поставленной задачи в соотношения расчетных алгоритмов критических усилий должны быть включены формулы вычисления моментов инерции и площадей для рассматриваемых геометрических типов сечений. В частности, при отнесении сечений отдельных типов рассматриваемых в работе однородных по длине прямых стержней к вводимым в сечениях Ω прямоугольным Ox_1x_2 и полярным $Or\theta$ центральным координатам, описания Ω , величины F и I_{min} имеют следующий вид:

– для кольцевых сечений

$$\begin{aligned} \Omega &= \{r \in [R_1, R_2]; \theta \in [0, 2\pi]\}, \\ F &= \pi(R_2^2 - R_1^2), \quad I_{min} = \pi(R_2^4 - R_1^4)/4; \end{aligned} \quad (3)$$

– для прямоугольных сечений

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x_1 \in [-b/2, b/2]; x_2 \in [-h/2, h/2]\} \quad (h > b), \\ F &= bh, \quad I_{min} = bh^3/12; \end{aligned} \quad (4)$$

– для равнобедренных треугольных сечений с основанием b_1 и высотой h_1

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x_1 \in [-b_1/2, b_1/2]; x_2 \in [-h_1(1 - 2x_1/b_1), h_1(1 - 2x_1/b_1)]\}, \\ F &= b_1h_1/2, \quad I_{min} = b_1h_1^3/36. \end{aligned} \quad (5)$$

Соответственно, представления для интенсивностей критических сжимающих усилий и критических уровней внутренних напряжений применительно к стержням с указанными формами сечений имеют вид:

– для стержней концентрического кольцевого сечения

$$\begin{aligned} P_{*r} &= \Phi_r(E, l, R_1, R_2, \eta) = \pi^3 E (R_2^4 - R_1^4) (4\eta l^2)^{-1}, \\ \sigma_{*r} &= \Upsilon_r(E, l, R_1, R_2, \eta) = \pi^2 E (R_2^2 + R_1^2) (4\eta l^2)^{-1}; \end{aligned} \quad (6)$$

– для стержней прямоугольного сечения

$$\begin{aligned} P_{*s} &= \Phi_s(E, l, b, h, \eta) = \pi^2 E b h^3 (12\eta l^2)^{-1}, \\ \sigma_{*s} &= \Upsilon_s(E, l, b, h, \eta) = \pi^2 E h^2 (12\eta l^2)^{-1}; \end{aligned} \quad (7)$$

– для стержней равнобедренного треугольного сечения

$$\begin{aligned} P_{*t} &= \Phi_t(E, l, b_1, h_1, \eta) = \pi^2 E b_1 h_1^3 (36\eta l^2)^{-1}, \\ \sigma_{*t} &= \Upsilon_t(E, l, b_1, h_1, \eta) = \pi^2 E h_1^2 (18\eta l^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

При этом, в частности, для обеспечения совпадения величин параметров F , I_{min} кольцевого и треугольного сечений с параметрами F , I_{min} прямоугольного сечения при $b = h$, у кольцевого и треугольного сечений соответствующие геометрические параметры должны иметь вид:

$$\begin{aligned} R_2 &= b((3^{-1} + \pi^{-1})/2)^{1/2}, \quad R_1 = b((3^{-1} - \pi^{-1})/2)^{1/2}; \\ b_1 &= (8/3)^{1/2}b, \quad h_1 = (3/2)^{1/2}b. \end{aligned} \quad (9)$$

Функции $\Phi_r(E, l, R_1, R_2, \eta)$, $\Phi_s(E, l, b, h, \eta)$, $\Phi_t(E, l, b_1, h_1, \eta)$, вводимые представлениями (6), (7), (8), в соответствующих областях определения обладают следующими свойствами, используемыми далее при переходе в данных функциональных отображениях к аргументам нечетко-множественного типа:

$$\begin{aligned} \partial\Phi_r(E, l, R_1, R_2, \eta)/\partial E &> 0, \quad \partial\Phi_r(E, l, R_1, R_2, \eta)/\partial l < 0, \\ \partial\Phi_r(E, l, R_1, R_2, \eta)/\partial R_1 &< 0, \quad \partial\Phi_r(E, l, R_1, R_2, \eta)/\partial R_2 > 0; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \partial\Phi_s(E, l, b, h, \eta)/\partial E &> 0, \quad \partial\Phi_s(E, l, b, h, \eta)/\partial l < 0, \\ \partial\Phi_s(E, l, b, h, \eta)/\partial b &> 0, \quad \partial\Phi_s(E, l, b, h, \eta)/\partial h > 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \partial\Phi_t(E, l, b_1, h_1, \eta)/\partial E &> 0, \quad \partial\Phi_t(E, l, b_1, h_1, \eta)/\partial l < 0, \\ \partial\Phi_t(E, l, b_1, h_1, \eta)/\partial b_1 &> 0, \quad \partial\Phi_t(E, l, b_1, h_1, \eta)/\partial h_1 > 0; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \partial\Upsilon_r(E, l, R_1, R_2, \eta)/\partial E &> 0, \quad \partial\Upsilon_r(E, l, R_1, R_2, \eta)/\partial l < 0, \\ \partial\Upsilon_r(E, l, R_1, R_2, \eta)/\partial R_1 &> 0, \quad \partial\Upsilon_r(E, l, R_1, R_2, \eta)/\partial R_2 > 0; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \partial\Upsilon_s(E, l, b, h, \eta)/\partial E &> 0, \quad \partial\Upsilon_s(E, l, b, h, \eta)/\partial l < 0, \\ \partial\Upsilon_s(E, l, b, h, \eta)/\partial b &> 0, \quad \partial\Upsilon_s(E, l, b, h, \eta)/\partial h > 0; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \partial\Upsilon_t(E, l, b_1, h_1, \eta)/\partial E &> 0, \quad \partial\Upsilon_t(E, l, b_1, h_1, \eta)/\partial l < 0, \\ \partial\Upsilon_t(E, l, b_1, h_1, \eta)/\partial b_1 &> 0, \quad \partial\Upsilon_t(E, l, b_1, h_1, \eta)/\partial h_1 > 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Описанный комплекс результатов анализа детерминистических версий рассматриваемых моделей позволяет перейти к формированию соотношений нечетко-множественной методики учета факторов неопределенности в рассматриваемых моделях.

2. Нечетко-множественные оценки для критических значений сжимающих усилий и внутренних напряжений. Получение нечетко-множественных описаний для величин критических уровней сжимающих усилий и внутренних осевых напряжений осуществляется на основе предварительной фаззификации исходных физико-механических параметров стержней с оговоренными технологическими допусками и разбросами экспериментальных значений, и последующей реализации перехода к нечетко-множественным аргументам в аналитических соотношениях детерминистических версий рассматриваемых моделей с применением альфа-уровневой модифицированной формы эвристического принципа обобщения [13]. Получаемые при этом оценки для стержней со сходными интегральными параметрами площадей и минимальных моментов инерции поперечных сечений в весьма существенной мере зависят от конкретной геометрической формы сечений.

Исходным этапом процедуры расширения области определения функциональных соотношений (6) – (8) является замена их аргументов $E, l, R_1, R_2, b, h, b_1, h_1$ на нечетко-множественные величины $\tilde{E}, \tilde{l}, \tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \tilde{b}, \tilde{h}, \tilde{b}_1, \tilde{h}_1$. При этом принимается гипотеза описания неопределенных исходных физико-механических и геометрических параметров стержней трапецеидальными нормальными нечеткими интервалами с заданием соответствующих кортежей из граничных значений интервалов носителей и граничных значений модальных интервалов [14, 15]:

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= (E_1, E_2, E_3, E_4), & \tilde{l} &= (l_1, l_2, l_3, l_4), \\ \tilde{R}_1 &= (R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}), & \tilde{R}_2 &= (R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{24}), \\ \tilde{b} &= (b_1, b_2, b_3, b_4), & \tilde{h} &= (h_1, h_2, h_3, h_4), \\ \tilde{b}_1 &= (b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}), & \tilde{h}_1 &= (h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14}).\end{aligned}\tag{16}$$

Для дальнейшей реализации предлагаемой методики вводятся описания введенных нечетко-интервальных характеристик $\tilde{E}, \tilde{l}, \tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \tilde{b}, \tilde{h}, \tilde{b}_1, \tilde{h}_1$ разложениями по α – срезам

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [E_\alpha, \bar{E}_\alpha], & \tilde{l} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [l_\alpha, \bar{l}_\alpha], \\ \tilde{R}_1 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [R_{1\alpha}, \bar{R}_{1\alpha}], & \tilde{R}_2 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [R_{2\alpha}, \bar{R}_{2\alpha}], \\ \tilde{b} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [b_\alpha, \bar{b}_\alpha], & \tilde{h} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [h_\alpha, \bar{h}_\alpha], \\ \tilde{b}_1 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [b_{1\alpha}, \bar{b}_{1\alpha}], & \tilde{h}_1 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [h_{1\alpha}, \bar{h}_{1\alpha}],\end{aligned}\tag{17}$$

в которых

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_\alpha &= (1 - \alpha)E_1 + \alpha E_2, & \overline{E}_\alpha &= \alpha E_3 + (1 - \alpha)E_4; \\
 \underline{l}_\alpha &= (1 - \alpha)l_1 + \alpha l_2, & \overline{l}_\alpha &= \alpha l_3 + (1 - \alpha)l_4; \\
 \underline{R}_{1\alpha} &= (1 - \alpha)R_{11} + \alpha R_{12}, & \overline{R}_{1\alpha} &= \alpha R_{13} + (1 - \alpha)R_{14}; \\
 \underline{R}_{2\alpha} &= (1 - \alpha)R_{21} + \alpha R_{22}, & \overline{R}_{2\alpha} &= \alpha R_{23} + (1 - \alpha)R_{24}; \\
 \underline{b}_\alpha &= (1 - \alpha)b_1 + \alpha b_2, & \overline{b}_\alpha &= \alpha b_3 + (1 - \alpha)b_4; \\
 \underline{h}_\alpha &= (1 - \alpha)h_1 + \alpha h_2, & \overline{h}_\alpha &= \alpha h_3 + (1 - \alpha)h_4; \\
 \underline{b}_{1\alpha} &= (1 - \alpha)b_{11} + \alpha b_{12}, & \overline{b}_{1\alpha} &= \alpha b_{13} + (1 - \alpha)b_{14}; \\
 \underline{h}_{1\alpha} &= (1 - \alpha)h_{11} + \alpha h_{12}, & \overline{h}_{1\alpha} &= \alpha h_{13} + (1 - \alpha)h_{14}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Получаемые в рамках использования α – уровневой формы эвристического принципа обобщения [7–13] представления для нечетко-множественных эндогенных параметров рассматриваемых расчетных моделей соответственно записываются в виде:

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_{*j} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{P}_{*j\alpha}, \overline{P}_{*j\alpha}], & \tilde{\sigma}_{*j} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{*j\alpha}, \overline{\sigma}_{*j\alpha}] \\
 & & (j = r, s, t).
 \end{aligned} \tag{19}$$

При этом с учетом справедливых во всех областях определения функций $\Phi_r(E, l, R_1, R_2, \eta)$, $\Phi_s(E, l, b, h, \eta)$, $\Phi_t(E, l, b_1, h_1, \eta)$ оценок (10) – (15), выражения для величин $\underline{P}_{*j\alpha}$, $\overline{P}_{*j\alpha}$, $\underline{\sigma}_{*j\alpha}$, $\overline{\sigma}_{*j\alpha}$ могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}
 \underline{P}_{*r\alpha} &= \Phi_r(\underline{E}_\alpha, \overline{l}_\alpha, \overline{R}_{1\alpha}, \underline{R}_{2\alpha}, \eta) = \pi^3 \underline{E}_\alpha (\underline{R}_{2\alpha}^4 - \overline{R}_{1\alpha}^4) (4\eta \overline{l}_\alpha^2)^{-1}, \\
 \overline{P}_{*r\alpha} &= \Phi_r(\overline{E}_\alpha, \underline{l}_\alpha, \underline{R}_{1\alpha}, \overline{R}_{2\alpha}, \eta) = \pi^3 \overline{E}_\alpha (\overline{R}_{2\alpha}^4 - \underline{R}_{1\alpha}^4) (4\eta \underline{l}_\alpha^2)^{-1}; \\
 \underline{P}_{*s\alpha} &= \Phi_s(\underline{E}_\alpha, \overline{l}_\alpha, \underline{b}_\alpha, \underline{h}_\alpha, \eta) = \pi^2 \underline{E}_\alpha \underline{b}_\alpha \underline{h}_\alpha^3 (12\eta \overline{l}_\alpha^2)^{-1}, \\
 \overline{P}_{*s\alpha} &= \Phi_s(\overline{E}_\alpha, \underline{l}_\alpha, \overline{b}_\alpha, \overline{h}_\alpha, \eta) = \pi^2 \overline{E}_\alpha \overline{b}_\alpha \overline{h}_\alpha^3 (12\eta \underline{l}_\alpha^2)^{-1}; \\
 \underline{P}_{*t\alpha} &= \Phi_t(\underline{E}_\alpha, \overline{l}_\alpha, \underline{b}_{1\alpha}, \underline{h}_{1\alpha}, \eta) = \pi^2 \underline{E}_\alpha \underline{b}_{1\alpha} \underline{h}_{1\alpha}^3 (36\eta \overline{l}_\alpha^2)^{-1}, \\
 \overline{P}_{*t\alpha} &= \Phi_t(\overline{E}_\alpha, \underline{l}_\alpha, \overline{b}_{1\alpha}, \overline{h}_{1\alpha}, \eta) = \pi^2 \overline{E}_\alpha \overline{b}_{1\alpha} \overline{h}_{1\alpha}^3 (36\eta \underline{l}_\alpha^2)^{-1}; \\
 \underline{\sigma}_{*r\alpha} &= \Upsilon_r(\underline{E}_\alpha, \overline{l}_\alpha, \underline{R}_{1\alpha}, \underline{R}_{2\alpha}, \eta) = \pi^2 \underline{E}_\alpha (\underline{R}_{2\alpha}^2 + \underline{R}_{1\alpha}^2) (4\eta \overline{l}_\alpha^2)^{-1}, \\
 \overline{\sigma}_{*r\alpha} &= \Upsilon_r(\overline{E}_\alpha, \underline{l}_\alpha, \overline{R}_{1\alpha}, \overline{R}_{2\alpha}, \eta) = \pi^2 \overline{E}_\alpha (\overline{R}_{2\alpha}^2 + \overline{R}_{1\alpha}^2) (4\eta \underline{l}_\alpha^2)^{-1}; \\
 \underline{\sigma}_{*s\alpha} &= \Upsilon_s(\underline{E}_\alpha, \overline{l}_\alpha, \underline{h}_\alpha, \eta) = \pi^2 \underline{E}_\alpha \underline{h}_\alpha^2 (12\eta \overline{l}_\alpha^2)^{-1}, \\
 \overline{\sigma}_{*s\alpha} &= \Upsilon_s(\overline{E}_\alpha, \underline{l}_\alpha, \overline{h}_\alpha, \eta) = \pi^2 \overline{E}_\alpha \overline{h}_\alpha^2 (12\eta \underline{l}_\alpha^2)^{-1}; \\
 \underline{\sigma}_{*t\alpha} &= \Upsilon_t(\underline{E}_\alpha, \overline{l}_\alpha, \underline{h}_{1\alpha}, \eta) = \pi^2 \underline{E}_\alpha \underline{h}_{1\alpha}^2 (18\eta \overline{l}_\alpha^2)^{-1}, \\
 \overline{\sigma}_{*t\alpha} &= \Upsilon_t(\overline{E}_\alpha, \underline{l}_\alpha, \overline{h}_{1\alpha}, \eta) = \pi^2 \overline{E}_\alpha \overline{h}_{1\alpha}^2 (18\eta \underline{l}_\alpha^2)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Соотношения (19), (20) являются базовыми для получения численных нечетко-множественных оценок факторов неопределенности в рассматриваемых моделях.

3. Результаты вычислительных экспериментов. Описываемая методика, в качестве примера, реализована в задачах оценки показателей интенсивности критических сжимающих усилий и внутренних напряжений в стальных стержнях со следующими нечетко-интервальными физико-механическими и геометрическими исходными параметрами:

$$\begin{aligned}
 \tilde{E} &= (19.7E_*, 19.9E_*, 20.0E_*, 20.2E_*), \\
 \tilde{l} &= (1.95R_*, 1.99R_*, 2.02R_*, 2.06R_*), \\
 \tilde{R}_1 &= (4.3 \cdot 10^{-4}R_*, 4.33 \cdot 10^{-4}R_*, 4.35 \cdot 10^{-4}R_*, 4.38 \cdot 10^{-4}R_*), \\
 \tilde{R}_2 &= (2.83 \cdot 10^{-3}R_*, 2.85 \cdot 10^{-3}R_*, 2.87 \cdot 10^{-3}R_*, 2.91 \cdot 10^{-3}R_*), \\
 \tilde{b} &= (4.9 \cdot 10^{-3}R_*, 5.0 \cdot 10^{-3}R_*, 5.05 \cdot 10^{-3}R_*, 5.15 \cdot 10^{-3}R_*), \\
 \tilde{h} &= (4.9 \cdot 10^{-3}R_*, 5.0 \cdot 10^{-3}R_*, 5.05 \cdot 10^{-3}R_*, 5.15 \cdot 10^{-3}R_*), \\
 \tilde{b}_1 &= (8.15 \cdot 10^{-3}R_*, 8.16 \cdot 10^{-3}R_*, 8.18 \cdot 10^{-3}R_*, 8.195 \cdot 10^{-3}R_*), \\
 \tilde{h}_1 &= (6.11 \cdot 10^{-3}R_*, 6.12 \cdot 10^{-3}R_*, 6.13 \cdot 10^{-3}R_*, 6.15 \cdot 10^{-3}R_*), \\
 E_* &= 10^{10}[\text{Па}], \quad R_* = 1[\text{м}].
 \end{aligned} \tag{21}$$

Представленный вариант выбора нечетко-интервальных исходных параметров отвечает ситуации совпадения интегральных характеристик площадей и моментов инерции поперечных сечений для стержней с тремя рассматриваемыми типами геометрии сечений.

Результаты расчетов функций принадлежности для нечетко-множественных величин \tilde{P}_{*j} , $\tilde{\sigma}_{*j}$ ($j = r, s, t$) с использованием представлений (19), (20) в случае шарнирного закрепления обоих концов стержня ($\eta = 1$) представлены на рисунках 1, 2 для стержня кольцевого сечения, на рисунках 3, 4 – для стержня квадратного сечения, на рисунках 5, 6 – для стержня с равнобедренным треугольным сечением. Анализ профилей функций принадлежности позволяет сделать заключения относительно степени уверенности в возможности достижения эндогенными параметрами соответствующих значений из интервалов носителей описываемых нечетких множеств для рассматриваемого варианта неконтрастных исходных параметров расчетной модели.

При задании исходных нечетко-интервальных параметров в виде (21) их максимальные разбросы относительно медианных значений на носителях составляют не более 0.9% для исходного параметра R_1 ; не более 1.4% – для исходного параметра R_2 ; не более 2.5% – для исходных параметров b и h ; не более 0.3% – для исходных параметров b_1 и h_1 ; не более 1.3% – для исходного параметра E ; не более 2.7% – для исходного параметра l .

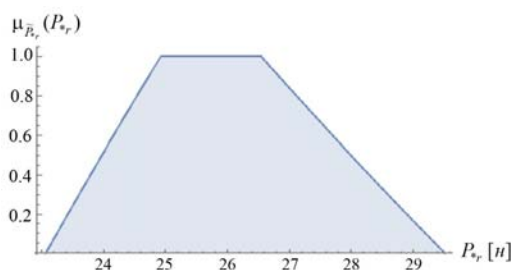


Рис. 1. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*r}}(P_{*r})$ для $\eta = 1$.

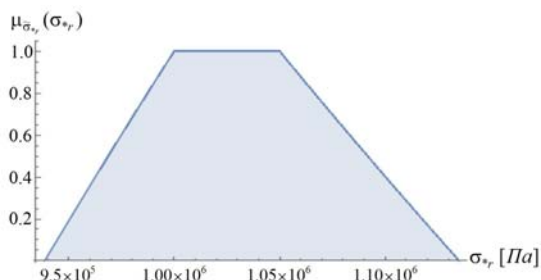


Рис. 2. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{*r}}(\sigma_{*r})$ для $\eta = 1$.

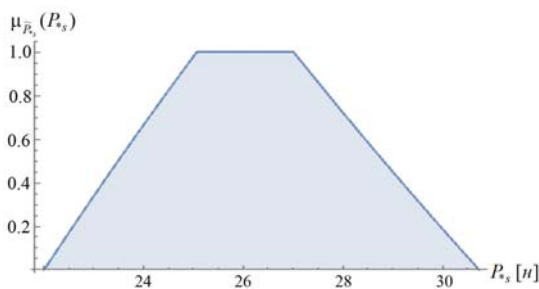


Рис. 3. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*s}}(P_{*s})$ для $\eta = 1$.

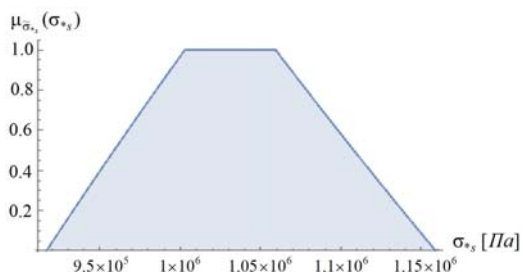


Рис. 4. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{*s}}(\sigma_{*s})$ для $\eta = 1$.

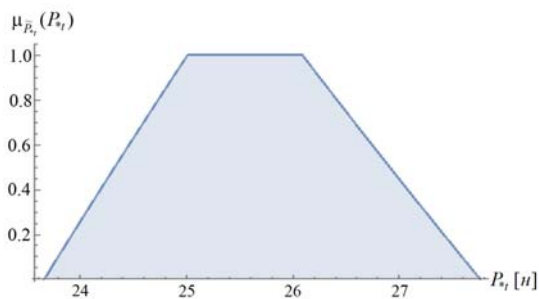


Рис. 5. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*t}}(P_{*t})$ для $\eta = 1$.

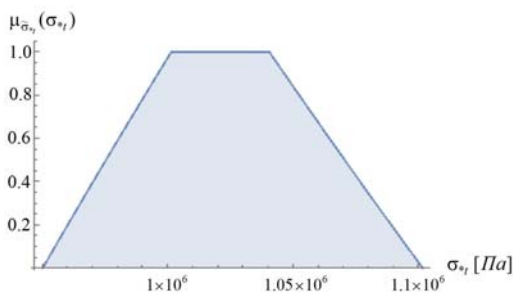


Рис. 6. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{*t}}(\sigma_{*t})$ для $\eta = 1$.

В аналогичной последовательности на рисунках 7 – 12 приведены результаты расчетов профилей функций принадлежности для нечетко-множественных эндогенных характеристик \tilde{P}_{*j} , $\tilde{\sigma}_{*j}$ применительно к случаю закрепления одного из концов стержня и его свободного противоположного конца ($\eta = 4$).

Влияние разбросов исходных параметров в моделях потери устойчивости стержней

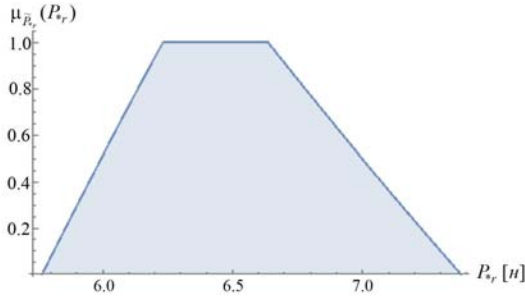


Рис. 7. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*r}}(P_{*r})$ для $\eta = 4$.

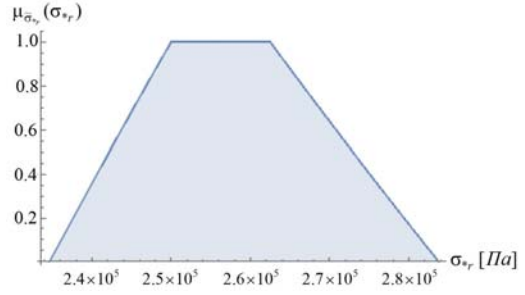


Рис. 8. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{*r}}(\sigma_{*r})$ для $\eta = 4$.

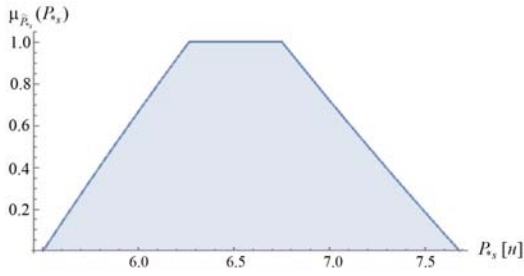


Рис. 9. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*s}}(P_{*s})$ для $\eta = 4$.

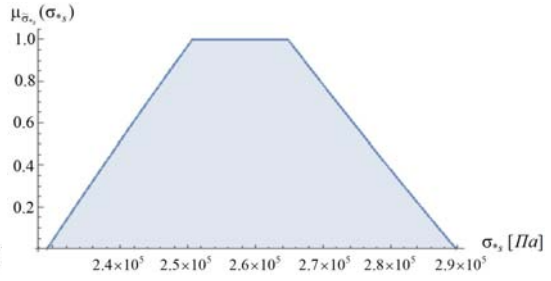


Рис. 10. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{*s}}(\sigma_{*s})$ для $\eta = 4$.

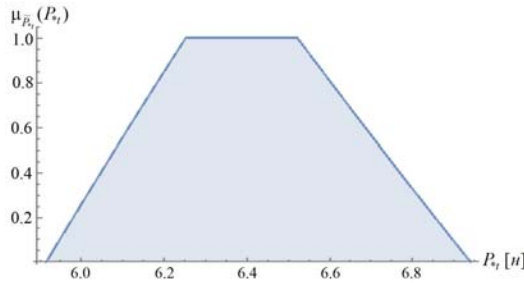


Рис. 11. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*t}}(P_{*t})$ для $\eta = 4$.

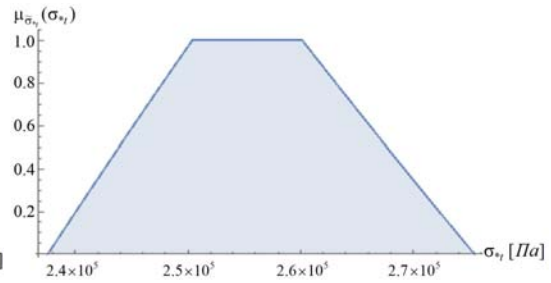


Рис. 12. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{*t}}(\sigma_{*t})$ для $\eta = 4$.

Рисунки 13 – 18 описывают результаты расчетов для стержня, один конец которого закреплен и неподвижен, а противоположный заземлен в подвижной опоре ($\eta = 0.25$).

Наконец, рисунки 19 – 24 отвечают случаю стержня, один конец которого жестко закреплен, а противоположный имеет шарнирную опору ($\eta = 0.48$).

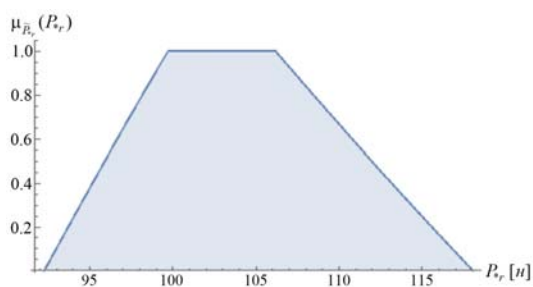


Рис. 13. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*r}}(P_{*r})$ для $\eta = 0.25$.

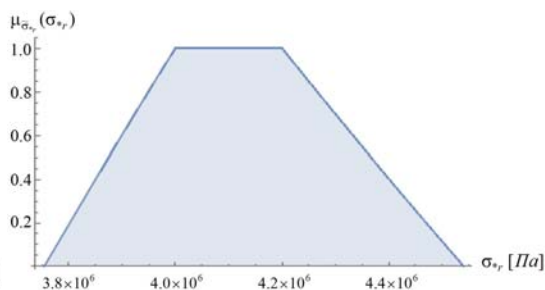


Рис. 14. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{*r}}(\sigma_{*r})$ $\eta = 0.25$.

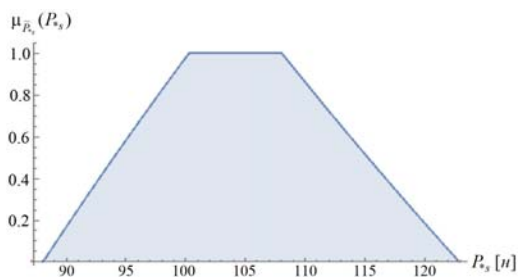


Рис. 15. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*s}}(P_{*s})$ для $\eta = 0.25$.

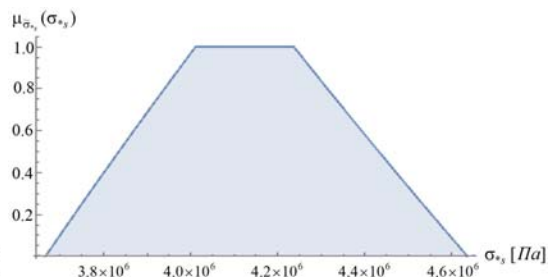


Рис. 16. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{*s}}(\sigma_{*s})$ $\eta = 0.25$.

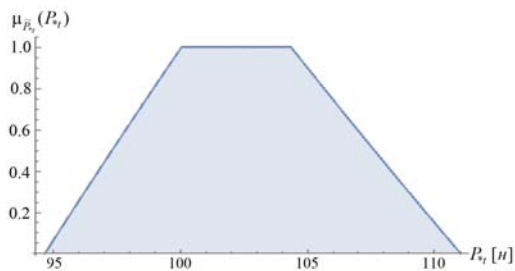


Рис. 17. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*t}}(P_{*t})$ для $\eta = 0.25$.

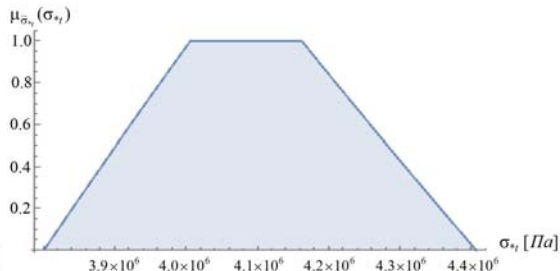


Рис. 18. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{*t}}(\sigma_{*t})$ $\eta = 0.25$.

В результате расчетов получены данные об оцениваемых максимальных (предельно возможных) разбросах для эндогенных параметров рассматриваемых вариантов моделей относительно соответствующих средних значений на носителях и данные о максимальных разбросах для анализируемых характеристик относительно соответствующих средних значений на модальных интервалах (в

Влияние разбросов исходных параметров в моделях потери устойчивости стержней

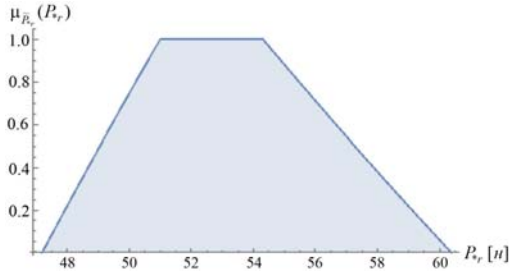


Рис. 19. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*r}}(P_{*r})$ для $\eta = 0.48$.

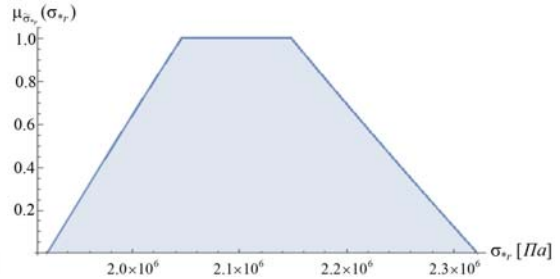


Рис. 20. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{*r}}(\sigma_{*r})$ $\eta = 0.48$.

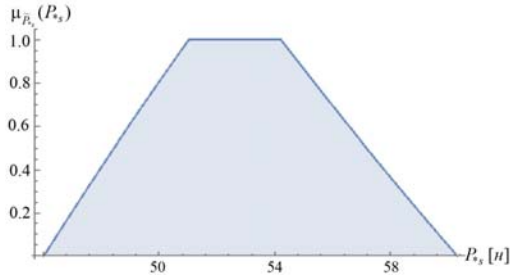


Рис. 21. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*s}}(P_{*s})$ для $\eta = 0.48$.

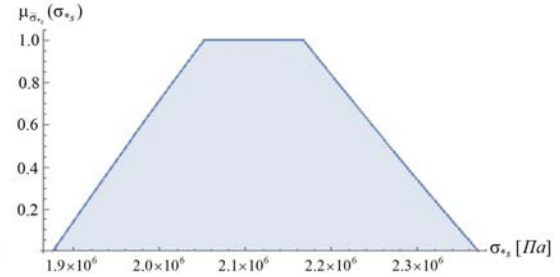


Рис. 22. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{*s}}(\sigma_{*s})$ $\eta = 0.48$.

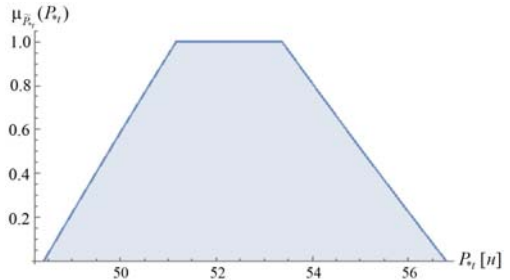


Рис. 23. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*t}}(P_{*t})$ для $\eta = 0.48$.

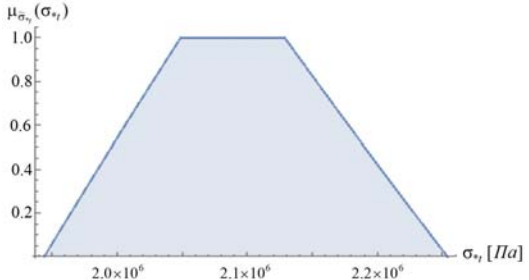


Рис. 24. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{*t}}(\sigma_{*t})$ $\eta = 0.48$.

диапазонах наиболее достоверных значений). Найденные оценки не зависят от значений параметра краевых условий η

Так, эндогенный параметр критического сжимающего усилия \tilde{P}_{*r} для стержня кольцевого сечения имеет максимальный разброс на интервале носителя порядка 12.3%, а на модальном интервале – порядка 3.1%; параметр \tilde{P}_{*s} для стерж-

ня квадратного сечения имеет максимальный разброс на интервале носителя порядка 16.5%, а на модальном интервале – порядка 3.7%; параметр \tilde{P}_{*t} для стержня треугольного сечения имеет максимальный разброс на интервале носителя порядка 7.9%, а на модальном интервале – порядка 1.1%. Для эндогенных параметров критических значений внутренних осевых напряжений в стержне определяемые разбросы таковы: параметр $\tilde{\sigma}_{*r}$ для стержня кольцевого сечения имеет максимальный разброс на интервале носителя порядка 9.5%, а на модальном интервале – порядка 2.4%; параметр $\tilde{\sigma}_{*s}$ для стержня квадратного сечения имеет максимальный разброс на интервале носителя порядка 11.7%, а на модальном интервале – порядка 2.7%; параметр $\tilde{\sigma}_{*t}$ для стержня треугольного сечения имеет максимальный разброс на интервале носителя порядка 7.4%, а на модальном интервале – порядка 1.9%.

На основании приведенных данных можно сделать заключение о формировании максимальных разбросов анализируемых характеристик для стержня квадратного сечения и минимальных – для стержня равнобедренного треугольного сечения.

Выводы. Результатом описанных в работе исследований является разработка нечетко-множественной численно-аналитической методики учета обусловленных погрешностями экспериментальных данных и технологическим допусками ошибок разбросов в значениях исходных физико-механических и геометрических параметров при анализе модели Эйлера, описывающей эффекты потери устойчивости для подверженных сжатию в осевом направлении прямых тонких изотропных стержней в рамках гипотезы линейного докритического напряженно-деформированного состояния. Получены нечетко-множественные описания для параметров критических сжимающих усилий и критических уровней внутренних осевых напряжений. Предложенный подход базируется на применении расчетных аналитических соотношений для эндогенных параметров рассматриваемых вариантов модели, полученных при исследовании ее детерминистических версий, на задании неопределенных экспериментальных и технологических экзогенных параметров модели в форме нечетко-множественных величин и дальнейшем применении процедуры перехода в расчетных соотношениях к нечетко-множественным аргументам на базе применения альфа-уровневой модифицированной формы эвристического принципа расширения. Приведены примеры применения разработанной методики с расчетами функций принадлежности для эндогенных нечетко-множественных характеристик и анализа получаемых результатов оценивания уровней их разбросов по данным о погрешностях исходных параметров.

1. *Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем* / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1976. – 984 с.
2. *Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем* / Н.А. Алфутов. – М.: Наука, 1978. – 312 с.
3. *Atanackovic T.M. Stability Theory of Elastic Rods* / T.M. Atanackovic. – Singapore: World Scientific Publishing, 1997. – 440 p.

4. *Chamekh M.* Stability of elastic rods with self-contact / M. Chamekh, S. Mani-Aouadi, M. Mokher // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2014. – V. 279. – P. 227–246. doi:10.1016/j.cma.2014.06.027
5. *Болотин В.В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений / В.В. Болотин. – М.: Стройиздат, 1982. – 352 с.
6. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел / В.А. Ломакин. – М.: ЛЕНАНД, 2014. – 144 с.
7. *Дилигенский Н.В.* Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Н.В. Дилигенский, Л.Г. Дымова, П.В. Севастьянов. – М.: Издательство Машиностроение - 1, 2004. – 397 с.
8. *Ротштейн А.П.* Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов / А.П. Ротштейн, С.Д. Штовба, А.Н. Козачко. – Винница: УНІВЕРСУМ, 2007. – 215 с.
9. *Нгуен Куок Ши* Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.
10. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic / M. Hanss // An introduction with Engineering Application. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
11. *Сторожев С.В.* Нечетко-множественные оценки скоростей волн кручения в тонкостенных стержнях на основе уточненных теорий / С.В. Сторожев, С.Б. Номбре, С.А. Прийменко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2019. – № 2-3 (67-68). – С. 32–53.
12. *Storozhev S.V.* Fuzzy estimates of resonance frequencies for three-layer composite cylindrical panels in smart aerospace and industrial structures / S.V. Storozhev, V.I. Storozhev, V.E. Bolnokin, Duong Minh Hai, D.I. Mutin // Journal of Physics: Conference Series. – 1399 (2019). – 033044. – doi:10.1088/1742-6596/1399/3/033044
13. *Болнокин В.Е.* Нечеткие оценки в моделях устойчивости стержневых конструкций / В.Е. Болнокин, С.Б. Номбре, С.В. Сторожев // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов XIV Всероссийской школы-семинара, пос. Дивноморское, 27 – 31 мая 2019г. – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2019. – С. 15.
14. *Grzegorzewski P.* Trapezoidal approximations of fuzzy numbers / P. Grzegorzewski, E. Mrówka // Fuzzy Sets Syst. – 2005. – Vol. 153. – P. 115–135.
15. *Ban A.I.* Trapezoidal approximation and Aggregation / A.I. Ban, L.C. Coroianu, P. Grzegorzewski // Fuzzy Sets Syst. – 2011. – Vol. 177. – P. 45–59.

V.N. Pavlysh, S.V. Storozhev

Influence of scatter errors in the values of the initial parameters in models of bending forms of the instability of compressible straight bars: a fuzzy-set approach.

The paper presents a numerical-analytical fuzzy-set methodology for studying the Euler model, which describes the effects of buckling of thin isotropic rods in the framework of the hypothesis of a linear subcritical stress-strain state, with additional consideration for the effects of influence of the scattering errors in the values of the initial physical, mechanical and geometric parameters. The described approach is based on the application of calculated analytical relationships of deterministic versions of the considered model variants for endogenous parameters of critical compressive forces and internal stresses and assumes setting uncertain experimental and technological exogenous parameters of the model in the form of fuzzy-set values. Then the procedure of transition in design relationships to fuzzy-set arguments based on the application of a modified form of the heuristic principle of generalization is applied. Examples of the application of the developed technique and

В.Н. Павлыш, С.В. Сторожев

the analysis of the results obtained are given.

Keywords: *thin straight rods, axial compressive forces, buckling effects, applied Euler's model, influence of scatter errors of initial parameters, methods of the theory of fuzzy sets, heuristic principle of generalization..*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный технический университет”,
Донецк
ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры”, Макеевка
s.v.storozhev@donnasa.ru

Получено 22.10.2020

**ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД,
РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ
ТЕПЛОФИЗИКА**

УДК 550.84:546.296

©2020. Е.А. Ялпуга, Р.П. Базеева, Э.В. Донченко, О.Л. Шалованов,
С.Г. Салий, Д.С. Бородин

**МЕТОДЫ МОНИТОРИНГА РАДОНОВЫДЕЛЕНИЯ ДЛЯ
ИЗУЧЕНИЯ ГЕОДИНАМИЧЕСКИ АКТИВНЫХ ЗОН ГОРНОГО
МАССИВА**

Проанализированы современные методы анализа степени радоновыделения с целью выявления геодинамически активных зон горных массивов. Обоснованы основные перспективы и способы применения радонометрии на шахтных полях Донбасса.

Ключевые слова: радон, геодинамика, массив, эманация, шахтное поле.

Введение. Современные геодинамические процессы, происходящие в Донбассе, вызываются движениями массива горных пород в результате подработки. Данные явления неблагоприятно влияют на состояние зданий и сооружений на земной поверхности. В данной статье дан краткий анализ методов мониторинга радоновыделения, применяемых для изучения современного структурно-геодинамического состояния массивов горных пород.

Донбасс – шахтерский край, где почти в каждом городе есть шахты. В настоящее время большинство из них закрыто или находится в режиме водоотлива. Исследованиями Макеевского научно-исследовательского института по безопасности работ в горной промышленности (МакНИИ) установлено [1], что радон активно выделяется из горных выработок закрытых шахт, особенно при их активном затоплении. При этом зафиксировано повышение объемной активности радона в теплое время года, особенно при понижении атмосферного давления. Так, в подвальных и рабочих помещениях ликвидируемых шахт им. А. Б. Батова, им. В. И. Ленина, «Советская» объемная активность радона составила от 8 до 1200 Бк/м³, что превышает предельно допустимые значения. Следовательно, при геодинамических исследованиях в районе подработки необходимо учитывать влияние горных выработок на величину эмиссии радона.

1. Постановка и анализ состояния проблемы. Как известно, радон – химически инертный газ, источник альфа-излучения, в 7,5 раз тяжелее атмосферного воздуха. Образуется в процессе распада U²³⁸ и Th²³². Наиболее стабильный изотоп (²²²Rn) имеет период полураспада 3,8 суток. Генерация и накоп-

ление его в горных породах происходит непрерывно. Радоновое поле в каждой точке геологического пространства характеризуется определенными значениями объемной активности радона (ОАР) в поровом воздухе и плотности потока радона (ППР) [1-3].

Геодинамически активные разрывные тектонические структуры вызывают аномалии объемной активности радона в почвенном воздухе. Проницаемость тектонических разрывов зависит от степени их геодинамической активности, так как активизация современных геодинамических процессов препятствует процессу «залечивания» трещин разрывного нарушения [2, 3]. Радонометрия как метод исследований геодинамических и сейсмических явлений широко применяется в странах бывшего СНГ и за рубежом (Россия, Украина, Беларусь, США и др.) [3-7, 9, 10].

В России при структурно-геодинамических исследованиях Далатказин Т.Ш. [2] применял метод радонометрии с целью выявления геодинамически активных зон горного массива Грибного месторождения нефти. Объект исследования – кристаллический фундамент, перекрытый толщей осадочных пород мощностью порядка 3000 м. Породы покровных отложений представлены песчаниками, алевролитами, глинами, суглинками, супесями, песками. В результате исследований установлено, что аномалии радона связаны с двумя факторами: с его поступлением из тектонического разрывного нарушения кристаллического фундамента, а также выделением газа из пород осадочного комплекса, входящих в зону геодинамического влияния этого нарушения [2].

В результате проведенной Далатказиным Т.Ш. работы были установлены следующие закономерности:

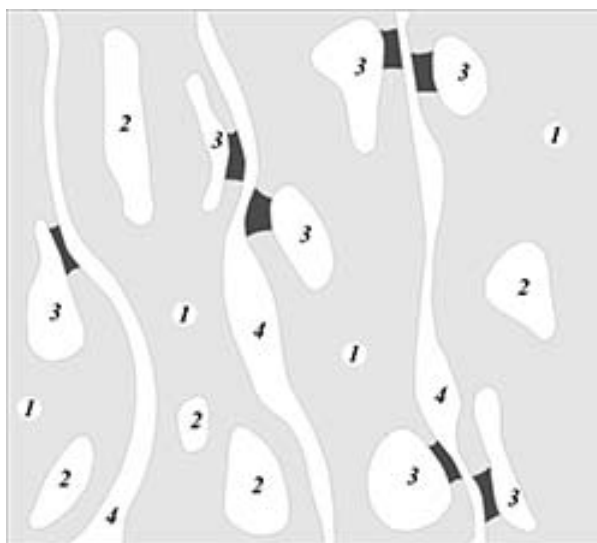
1) относительное превышение величины объемной активности радона в почвенном воздухе надразломных участков прямо пропорционально амплитудам и частотам циклических геодинамических движений;

2) установлен неравномерный характер распределения поля радоновых эманацій в пределах разрывных структур в соответствии с современной геодинамической активностью;

3) проведенные исследования подтвердили возможность эффективного использования радонометрии на территориях с мощным чехлом осадочных пород для решения задач геодинамического структурирования.

Исследованиями Уткина В.И. и Юркова А.К. [3] установлена зависимость изменения радоновыделения из трещин горного массива от давления, которая отражает изменение напряженно-деформированного состояния среды перед сейсмическим событием. В результате исследований создана модель трещиновато-пористой среды и построен график зависимости концентрации радона от давления в горном массиве. Выявленные закономерности также подтверждают эффективность использования радонометрии в качестве метода регистрации активизации геодинамических процессов (рис.1, 2).

Описанная модель трещиновато-пористой среды позволяет прогнозировать тектонические события, землетрясения и горные удары в глубоких шахтах.



1 – скелет (основание) горной породы; 2 – изолированные поры; 3 – разрушающиеся поры при изменении давления; 4 – трещины.

Рис. 1. Модель трещиновато-пористой среды по Уткину В.И. [3].

Из графика изменения концентрации радона от величины давления видно, что при увеличении давления выход радона изменяется неравномерно. Сначала с нарастанием давления трещины перекрываются и выход радона нелинейно уменьшается. Далее при увеличении нагрузки происходит разрушение массива, ломаются слабые перемычки между порами и выделение радона существенно увеличивается (рис. 2).

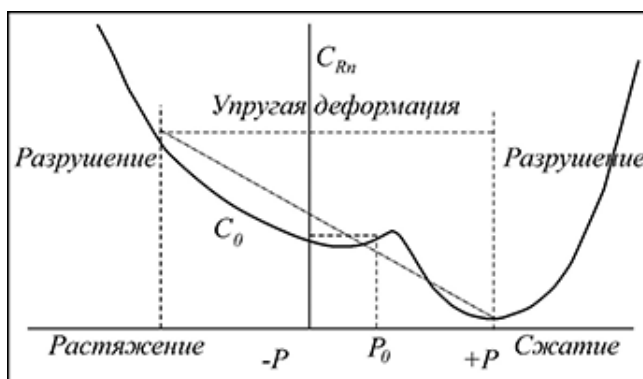
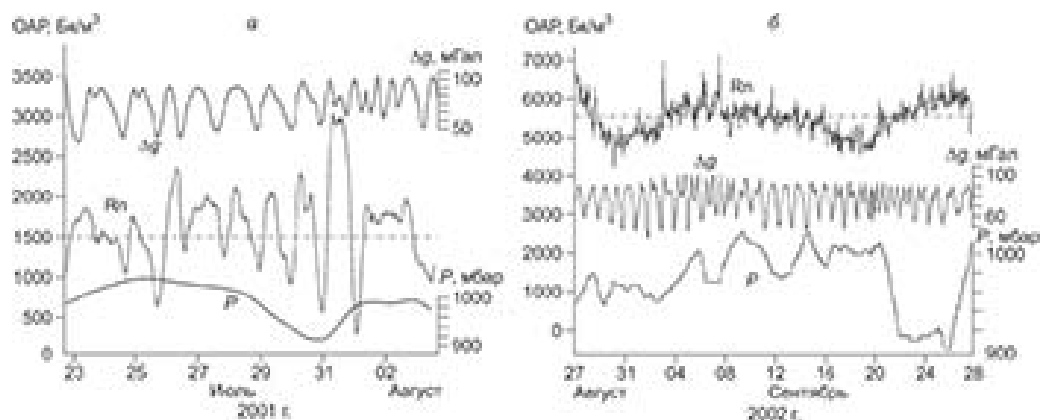


Рис. 2. Качественная характеристика изменения концентрации радона (C_{Rn}) в горной породе при изменении внешней нагрузки (P) [3].

Также в работе [3] обоснованы принципы устранения погрешностей, связанных с методикой регистрации измерений. В работе проведено сопоставление двух методик, диффузионной (метод пассивной регистрации) и конвекционной

(метод активной откачки радона). Опыты показали, что конвекционный метод позволяет снизить влияние помех за счет увеличения объема поступающего газа и сохранения целостности массива горных пород (рис. 3).



а) диффузионная; б) конвекционная; Δg – приливные вариации, Rn – вариации ОАР; P – вариации атмосферного давления.

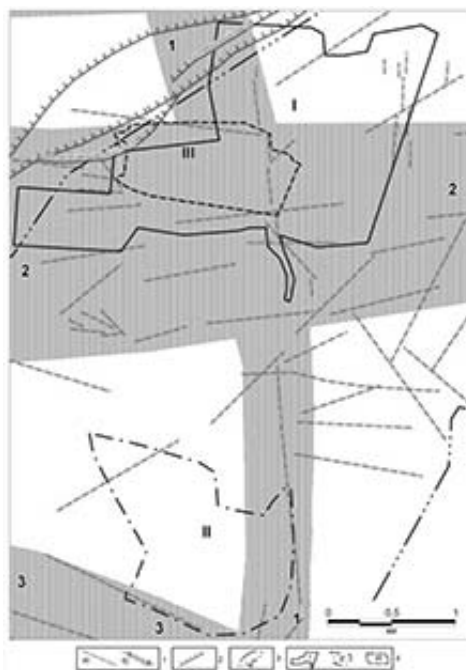
Рис. 3. Вариации объемной активности радона при различных методиках регистрации (движение блоков земной коры Тянь-Шаня) по [3].

В Донбассе радонометрия использовалась в составе методов СГДК (метод структурно-геодинамического картирования) и СТАГИ (метод структурно-атмогеохимических исследований) для картирования выходов разрывных нарушений под покровные отложения [4–6].

Важной особенностью метода СГДК является использование покровных отложений в качестве источника информации о геодинамических процессах, происходящих в тектонических структурах горного массива. Так, например, аномалии напряженного состояния покровных отложений над выходами тектонических разрывов вызывают деформации этих отложений. Деформации покровных отложений повышают их эманулирующую способность. Появляются аномалии радиоактивных газов, которые позволяют определить геодинамические зоны, связанные с активными тектоническими разрывами.

Примером применения радонометрии в составе методики структурно-атмогеохимических исследований (СТАГИ) с целью поиска перспективных мест газовых скоплений в Донбассе можно назвать работу [7]. Объект исследования – поле шахты им. А. Ф. Засядько. В результате исследований были выделены три перспективные области (Северная (I), Северная детальная (III) и Южная (II)). Исследования проводились на основе анализа снимков из космоса (рис. 4).

Наиболее интенсивные аномалии газа были обнаружены в западной, юго-западной и северной частях участка «Северный». Одна из локальных интенсивных аномалий радона находится на продолжении 18 западного конвейерного штрека по пласту m_3 , где в 2009 г. произошел внезапный выброс газа, угля и породы. Из других особенностей пространственного распределения аномальных



1 — элементы по данным дешифрирования космических снимков: а) линеаменты, б) зоны линеаментов, 2 — основные надвижки; 3 — контур шахтного поля; 4 — участки СТАГИ и их номера: I — Северный, II — Южный, III — Северный детализационный

Рис. 4. Схема результатов дешифрирования космических снимков на участке исследования «Поле шахты им. А.Ф. Засядько», 2007 г. [7].

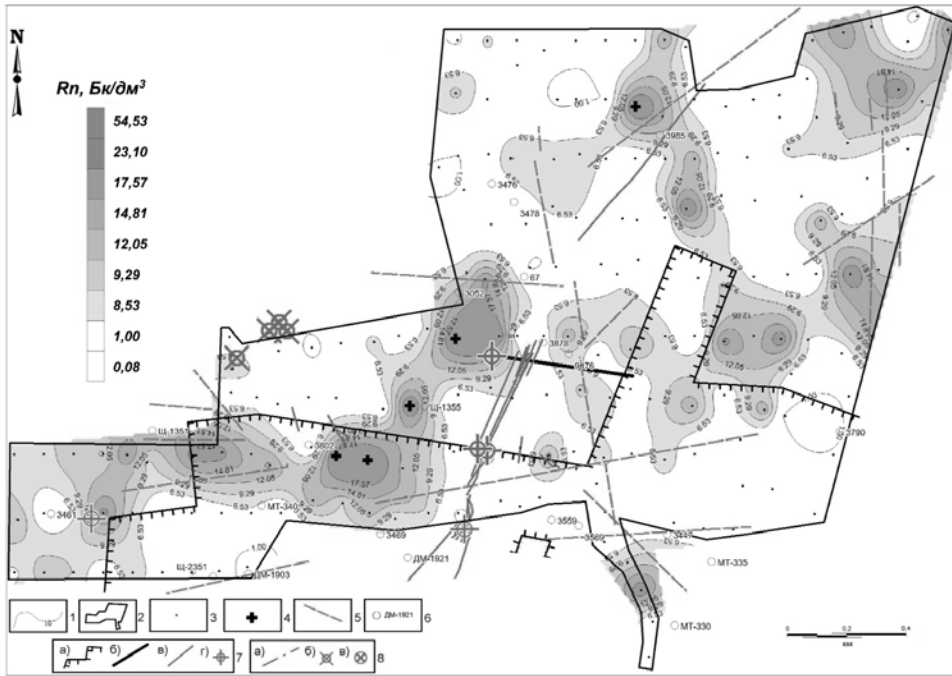
значений радона стоит отметить две субширотные зоны: первая – в южной части северного участка прослеживается вдоль 17 западного конвейерного штрека, вторая расположена севернее и совпадает с простираем широтного космолинеамента по данным дешифрирования космоснимка (рис. 5).

Таким образом, измерение концентраций радона позволяют оценить как современную геодинамику, так и прогнозировать возможные места скоплений углеводородных газов на шахтных полях в зонах разрывных нарушений.

2. Перспективы развития и использования методов мониторинга радоновыделения. В зависимости от применяемых методов исследования авторами предлагается разделить методов радонометрии две основные группы: ручные методы и автоматизированные (рис. 6).

Среди методов регистрации эманацій радонового поля необходимо отметить эманаціонно-трековый метод (ЭТМ) изучения радона, ранее применявшийся в УкрНИМИ с целью изучения геодинамики разрывных нарушений на шахтных полях. Особенностью метода является использование фотопластин для регистрации количества треков альфа-частиц. Достоинством метода является его простота, к недостаткам – зависимость результатов от оператора.

К диффузионным методам можно отнести методы измерений с помощью



1 – изолинии содержания показателя содержания радона, Бк/дм³; 2 – граница Северного участка; 3 – пункты наблюдений; 4 – пункты наблюдения, где показатель превышает среднее +3S; 5 – линеаменты; 6 – скважины и их номера; 7 – горные работы по пласту m_3 : а) граница отработанной части пласта, б) проходка по состоянию на 05.2009 г. 18 западного конвейерного штрека пласта m_3 , в) разрывные нарушения и зоны трещиноватости по результатам проходки и по результатам бурения скважины № 3985, г) места внезапных выбросов газа, угля и пород; 8 – условные обозначения из плана горных работ по пласту n_1 шахты «Бутовка»: а) ожидаемый надвиг, б) зоны ликвидированных пожаров, в) места взрыва газа.

Рис. 5. Схема распределения показателей содержания радона в подпочвенном воздухе на Северном участке поля шахты им. А.Ф. Засядько [7].



Рис. 6. Схематическое представление о методах измерения радона.

камеры, заполненной активированным углем.

К автоматизированным методам также относится метод вынужденной конвекции. Одно из главных преимуществ метода – увеличение эффективного объема исследуемых горных пород. Т.е. нивелируются существующие неоднородности геологического разреза. Еще одним важным преимуществом является упрощение организации измерений. Можно размещать регистрирующую аппаратуру в удобных местах.

В настоящее время в Институте физики земли им. О. Ю. Шмидта для проведения замеров радоновыделения используются индикаторы радона RADEX MR 107 и RADEX MR 107+. Приборы проводят часовые измерения объемной активности радона, температуру и влажность в точке расположения прибора, что позволяет производить корреляцию метеоусловий со значениями объемной активности радона [8].

Выводы. Таким образом, метод регистрации радоновыделения может быть в перспективе с успехом использован в условиях Донбасса для:

- 1) выявления участков современной активности тектонических нарушений;
- 2) выявления субвертикальных зон трещиноватости и разуплотнения горных пород как возможных путей миграции углеводородных газов, в том числе метана;
- 3) регистрации состояния горного массива перед началом выбросов и горных ударов в горных выработках шахт с целью их прогнозирования и предупреждения;
- 4) контроля результатов других геолого-геофизических методов, полученных в приповерхностной части разреза.

Для изучения изменений геодинамического состояния геологической среды под действием природных или техногенных факторов радонометрию следует выполнять в 2 этапа.

1. Первичное картирование разломов по плотности потока радона (ППР).
2. Непрерывный мониторинг объемной активности почвенного радона путем его откачки через зонд.

1. *Кременев О.Г.* Методика контроля радоновыделения на ликвидируемых угольных шахтах / О.Г. Кременев // *Материалы 5-й международной научно-практической конференции. Том 1. Проблемы и перспективы в горном деле и строительстве.* – Донецк, 2019. – С. 34–38.
2. *Далатказин Т.Ш.* Использование радонометрии при изучении современной геодинамики на территориях перекрытых мощным чехлом осадочных пород для решения задачи обеспечения безопасной эксплуатации объектов недропользования / Т.Ш. Дакталазин // *Горный информационно-аналитический бюллетень.* – 2011. – С. 97–100.
3. *Уткин В.И.* Радон как индикатор геодинамических процессов / В.И. Уткин, А.К. Юрков // *Геология и геофизика.* – 2010. – Т. 51, № 2. – С. 277–286.
4. *Панов Б.С.* Опыт применения структурно-геодинамического картирования для изучения рудоносных тектонически активных разломов / Б.С. Панов, Е.П. Тахтамиров, Ю.С. Рябоштан, В.И. Алехин // *Осадочные породы и руды: материалы науч. совещания.* – К.: Наукова думка, 1980. – С. 101–111.
5. *Савченко А.В.* Основы изучения геодинамического строения горного массива территорий расположения шламонакопителей / А.В. Савченко, О.В. Савченко, Г.А. Петенко, В.В. Ту-

Е.А. Ялпуга, Р.П. Базеева, Э.В. Донченко, О.Л. Шалованов, С.Г. Салий, Д.С. Борозин

- манов., М.Ю. Богак // Горная геология, геомеханика и маркшейдерия. Сборник научных докладов. – Том 1. – Донецк: УкрНИМИ НАН Украины, 2004. – С. 257–261.
6. Савченко А.В. Применение структурно-геодинамического картирования горного массива для обеспечения безопасности гидротехнических сооружений / В.В. Кульченко, Г.А. Петенко, О.В. Савченко, А.Н. Хромов // Горная геология, геомеханика и маркшейдерия. Сборник научных докладов. – Том 1. – Донецк: УкрНИМИ НАН Украины, 2004. – С. 234–237.
 7. Багрий І.Д. Прогнозування геодинамічних зон та перспективних площ на видобування шахтного метану вугільних родовищ Донбасу / І.Д. Багрий, П.Ф. Гожик, В.І. Почтаренко, С.Д. Аксьом, В.Р. Дубосарський. – К.: Фоліант, 2011. – 235 с.
 8. Агибалов А.О. Апробация методики выделения зон повышенной проницаемости по аномалиям объемной активности радона с помощью прибора RADEX MR 107 / А.О. Агибалов, А.И. Полетаев, А.А. Сенцов, В.А. Зайцев // Материалы всероссийской научной конференции «ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОЛОГИИ», посвященной 110-й годовщине со дня рождения Г.П. Горшкова (1909-1984). – М., Издательство «Перо», 2019. – С. 183–185.
 9. Возжеников Г.С. Радиометрия и ядерная геофизика / Г.С. Возжеников, Ю.В. Бельшев. – Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2000. – 305 с.
 10. Матвеев А.В. Влияние зон разрывных нарушений на концентрацию радона в почвенном воздухе на территории Беларуси / А.В. Матвеев, М.И. Автушко, А.К. Карабанов, Л.А. Нечипоренко, С.М. Плюснин // Геохімія та рудоутворення. - 2014. - Вип. 34. – С. 69–77.

E.A. Yalputa, R.P. Bazeeva, E.V. Donchenko, O.L. Shalovanov, S.G. Saliy, D.S. Borodin
Methods for monitoring radon emission for studying geodynamically active zones of rock mass.

Modern methods of analyzing the degree of radon emission are reviewed in order to identify geodynamically active zones of rock mass. The main prospects and methods of employing radonometry in the mine fields of Donbass are defined.

Keywords: *radon, geodynamics, rock mass, emanation, mine field.*

Республіканський академічний науково-дослідницький і
проектно-конструкторський інститут горної геології,
геомеханіки, геофізики і маркшейдерського дела (РАНИМИ),
Донець
oegi.donetsk@gmail.com

Получено 29.10.2020

УДК 621.1:528:518.5

©2020. Д.В. Кутепов, М.В. Гордиенко, Е.В. Ребенок

МОНИТОРИНГ СДВИЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ НАД ЗАТОПЛЕННЫМИ УЧАСТКАМИ ГОРНЫХ РАБОТ

В статье кратко рассмотрены основные задачи и методы мониторинга состояния земной поверхности в зонах сдвижений и деформаций горного массива вследствие мокрой консервации шахт. Приведены примеры наблюдений на шахтах «Красный Октябрь», «Красный Профинтерн», им. Румянцева, расположенных в Центральном геолого-промышленном районе Донбасса.

Ключевые слова: деформации горного массива, сдвижение земной поверхности, зоны влияния деформаций, мониторинг, наблюдательные станции, репер.

Введение. Как известно, добыча угля требует соблюдения не только норм безопасности подземных работ, но и проведения мониторинга техногенной ситуации на поверхности при эксплуатации и последующей ликвидации шахт [1]. Отличительной особенностью Донбасса является сплошная подработка районов жилой и промышленной застройки на территории всех крупных городов и поселков. Ситуация усугубляется тем, что значительное число зданий и сооружений, включая многоэтажную жилую застройку, возведено непосредственно на выходах отработанных угольных пластов. Нередко под фундаментами многоэтажных домов располагаются устья ранее погашенных вскрывающих горных выработок. Такие случаи на поверхности горных отводов ликвидируемых шахт участка Центрального района Донбасса (ЦРД) встречаются массово [1].

Дополнительным фактором активизирующим и ускоряющим процесс оседания земной поверхности является затопление выработанного пространства [5]. В результате боевых действий на большей части территории ДНР водоотливные комплексы частично, либо полностью остановили свои работы, что может привести к существенному оседанию земной поверхности (см. рис. 1) и нанести ущерб зданиям и сооружениям. Процесс подтопления шахты должен быть контролируемым. Это актуальная проблема региона.

В настоящей статье кратко рассмотрены основные задачи, теория и методы мониторинга состояния земной поверхности в зонах сдвижений и деформаций подработанного горного массива. Приведены примеры конкретных наблюдений.

1. Основные задачи мониторинга состояния земной поверхности.

Мониторинг за состоянием земной поверхности позволяет решить широкий ряд задач, среди которых основными являются:

– сбор данных об изменении контролируемых параметров деформации земной поверхности, о динамике природных и техногенных геодинамических процессов;



Рис. 1. Пример деформаций земной поверхности вызванной отработкой угольного пласта и подтоплением на участке шахты им. Румянцева.

- прогнозирование развития геодинамических процессов;
- разработка мер контроля за рисками развития негативных процессов вокруг ликвидируемой шахты;
- разработка рекомендаций по предотвращению или снижению ущерба, связанного с геодинамическими явлениями;
- контроль динамики развития негативных процессов и этапов возникновения критических состояний;
- контроль эффективности инженерно-технологических мероприятий, направленных на предотвращение или ликвидацию последствий опасных геодинамических процессов и явлений;
- оценка эффективности применения профилактических мер по устранению негативных последствий.

2. Теория и методика определения оседаний земной поверхности.

Величина оседаний земной поверхности в результате подработки зависит от ряда факторов и может быть оценена с помощью следующего соотношения [1,2]:

$$\eta_m = q_0 m_0 \cos \alpha N_1 N_2, \quad (1)$$

где

q_0 – относительная величина максимального оседания, безразмерная величина;

m_0 – остаточная мощность пласта, м;

α – угол падения пласта в пределах очистной выработки, градус;

N_1, N_2 – условные коэффициенты, характеризующие степень подработанности земной поверхности, соответственно вкрест простирания и по простиранию, безразмерные величины. Алгоритм расчета данных коэффициентов приведен в [3].

Как видно из формулы (1), ключевым параметром, определяющим величину сдвижений, является остаточная мощность, которая вычисляется по формуле:

$$m = K_1 * K_2 * K_3 * K_4 * K_5 * m, \quad (2)$$

где

K_1 — коэффициент зависящий от степени метаморфизма углей (угли марки А — $K_1=1,0$; угли марок ТС, Т, ОС, КС, КЖ, К, Ж — $K_1=0,8$; угли марок ГЖС, ГЖ, Г, ДГ, Д, — $K_1=0,6$);

K_2 — коэффициент, зависящий от последующих подработок горной выработки нижележащими пластами ($K_2 = 1$, если выработка не была подработана, $K_2=0,8$, если выработка подработана одним пластом, $K_2=0,5$ если выработка была подработана 2-мя и более пластами);

K_3 — коэффициент, зависящий от наличия пустот и зон разуплотнений (принимается после проведения дополнительных исследований);

K_4 — коэффициент, зависящий от обводненности горных пород ($K_4=0,5$ — если горные выработки затоплены, и $K_4=1$, если горные выработки не затоплены);

K_5 — коэффициент, зависящий от глубины горных работ ($K_5=1$, если $H < 100$ метров; $K_5=0,5$ при $H=101-200$ метров; $K_5=0,3$ при $H=201-300$ метров; $K_5=0,1$ при $H=300-500$ метров; если $H > 500$ метров, $K_5=0$);

m_6 — отработанная мощность пласта.

Установлено, что поднятие уровня затопления выше глубины 500 м [1] вызывает существенную активизацию процесса сдвижения земной поверхности.

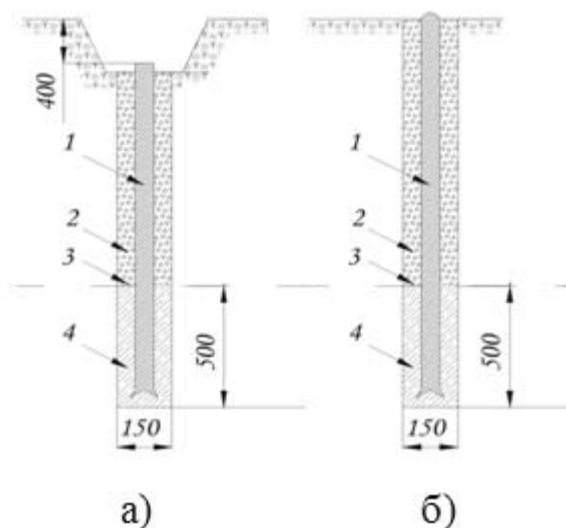
Реальные значения оседаний определяются путем наблюдений, которые проводятся в несколько этапов называемых сериями.

В идеале, закладка и проведение первой серии наблюдений должна выполняться до начала активизации процесса сдвижения. Вторая и последующие серии наблюдений, позволяют получить данные для проведения геодинамического мониторинга на поверхности горных отводов шахт.

Основная проблема, возникающая при создании системы мониторинга и организации маркшейдерских наблюдений за активизацией деформаций земной поверхности закрывающихся шахт, состоит в большой площади участка исследований, трудности прогнозирования времени и мест максимального проявления повторных сдвижений и деформаций. Следовательно, необходимо охватить практически всю площадь территории, подработанных закрытыми шахтами, при оптимальных затратах на выполнение наблюдений.

Для проведения наблюдений закладываются наблюдательные станции. Под наблюдательной станцией понимают сеть реперов заложенных на земной поверхности над горными работами, в фундаментах (цоколях) зданий или на объектах — трубопроводах, рельсах железных дорог, на технологическом оборудовании.

Типичная конструкция репера и его способ закладки представлены на рис. 2. Стандартный репер представляет собой металлический стержень диаметром 20 мм, либо металлическую трубку диаметром не менее 30 мм. Верхние концы реперов изготовленных из стержней, балок или рельсов обтачиваются. В центре высверливаются углубления диаметром 1–2 и глубиной 5–7 мм. К верхнему концу металлической трубки, используемой в качестве репера, приваривают металлическую головку с высверленным отверстием указанных размеров.



а – бетонированные заглубленные, б – бетонированные незаглубленные;
1 – металлический стержень; 2 – сухая плотная засыпка; 3 – граница сезонного промерзания;
4 – бетон

Рис. 2. Конструкция опорных реперов в деформационных геодезических сетях.

Размещение наблюдательной станции на местности выполняется с помощью спутникового геодезического оборудования либо с помощью теодолита и рулетки. При этом выбираются объекты – опорные пункты (не менее 3), относительно которых в дальнейшем будут определяться положения опорных реперов профильной линии.

Места закладки реперов в грунт в населенных пунктах должны быть в установленном порядке согласованы с соответствующими управлениями городского хозяйства (горводопровод, электросеть и др.) [4]. Закладываемые в грунт репера не должны мешать свободному передвижению пешеходов и транспорта.

После закладки наблюдательных станций проводятся измерения.

Первую серию измерений на наблюдательной станции можно начинать не ранее, чем через семь дней после закладки бетонированных реперов и три дня после закладки забивных реперов. Измерение расстояний между реперами профильных линий производится стальными компарированными рулетками длиной 30 м. Измерение длин производится с постоянным натяжением (10 кг), определяемым с помощью динамометров, с замером температуры рулетки термометром с точностью до $\pm 1^\circ$ на каждом измеряемом интервале. Измерение длин (в первой и в последующих сериях) производится дважды - в прямом и обратном направлениях. При измерении длин больших наклонных интервалов в ветреную погоду стрела провеса рулеток существенно возрастает и изменяется от порывов ветра. В таких случаях следует измерять длины компарированными проволоками.

Следующая серия наблюдений производится не ранее, чем через месяц после

первоначальных измерений. Перед каждым циклом наблюдений относительно опорных пунктов определяются координаты опорных реперов наблюдательных профилей. Полная серия инструментальных наблюдений на наблюдательной станции состоит из нивелирования всех реперов, съемки раскрытия трещин и зазоров. Под нивелированием понимается определение высот расположений реперов и превышений между ними, относительно поверхности, задаваемой опорными реперами.

Работа с каждым приемником на станции включает: центрирование приемника над пунктом с помощью электронного или оптического отвеса, измерение высоты антенны с помощью рулетки, включение приемника и его калибровка. После окончания измерений производят обработку полученных результатов, которая включает вычисление длин базовых линий (расстояний между реперами) и координат реперов в системе координат WGS-84, строгое уравнивание сети по методу наименьших квадратов, трансформирование уравненных координат в государственную или местную (условную) систему координат.

По окончании выполнения процедуры GPS-измерений необходимо переслать накопленные на карте памяти приемника данные в персональный компьютер для дальнейшей обработки. Далее производится предварительная оценка полевых измерений и отбраковка некачественных или лишних измерений. По завершении всех описанных процессов приступают к обработке GPS-данных и определению координат измеренных пунктов.

При анализе результатов необходимо связать во времени маркшейдерские данные и данные гидрогеологических наблюдений. Необходимо, проводить повторные измерения 2 раза в год [4], завершая циклы наблюдений лишь после окончания фиксации изменений значений при измерениях.

3. Наблюдения на полях шахт Донбасса. В настоящее время по описанной выше схеме проводятся наблюдения на полях шахт «Красный Октябрь», «Красный Профинтерн», им. Румянцева, расположенных в Центральном геолого-промышленном районе Донбасса в южном крыле Главной антиклинали Донбасса. Они вызваны необходимостью контроля за активизацией процессов сдвижения в результате затопления горных выработок.

Институтом РАНМИ была выполнена работа по закладке наблюдательных станций и выполнению двух серий наблюдений за смещением реперов на территории горных отводов шахт «Красный Октябрь», «Красный Профинтерн», «им. Румянцева» в результате которых выполнено определение высотного положения 780 реперов. Рассчитаны расстояния между ними.

Параллельно проведены гидрологические наблюдения.

По данным РП «Донуглереструктуризация» на момент выполнения первой серии наблюдений уровень затопления по шахте «Красный Профинтерн» находится на абсолютной отметке минус 165,3 м – глубина 402,7 м (на 18.04.2019 г.), шахты «Красный Октябрь» - на абсолютной отметке минус 184,7 м – глубина 379 м (на 22.04.2019 г.), шахты им. Румянцева - на абсолютной отметке минус 205,35 м – глубина 474 м (на 23.04.2019 г.).

По данным РП «Донуглереструктуризация» на момент выполнения второй серии наблюдений уровень затопления по шахте «Красный Профинтерн» находится на абсолютной отметке плюс 59,2 м – глубина 177,43 м (на 01.09.2020 г.), шахты «Красный Октябрь» - на абсолютной отметке плюс 40,56 м – глубина 153,64 м (на 01.09.2020 г.), шахты им. Румянцева - на абсолютной отметке минус 4,45 м – глубина 272,95 м (на 21.08.2020 г.).

Результаты изменения уровней затопления по шахтам между первой и второй сериями наблюдений приведены на рисунке 3.

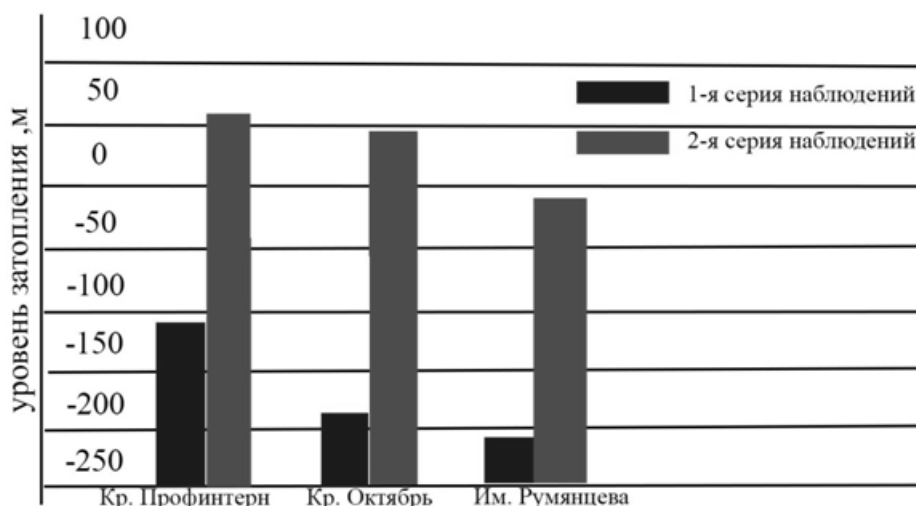


Рис. 3. График изменения уровней затопления по шахтам «Красный Профинтерн», «Красный Октябрь», им. Румянцева.

Во второй серии наблюдений зафиксировано изменение уровней затопления на указанных шахтах, что может в свою очередь привести к дальнейшим деформациям и оседанию земной поверхности. В связи с этим работы по мониторингу оседаний земной поверхности на участках данных шахт будут продолжены.

Заключение. Геодинамический мониторинг на горных отводах ликвидируемых шахт дает возможность осуществить сбор наблюдательных данных об изменении контролируемых параметров деформации земной поверхности, осуществить контроль эффективности инженерно-технологических мероприятий, направленных на предотвращение или ликвидацию последствий опасных геодинамических процессов и явлений. Заложённые наблюдательные станции помогут осуществить контроль динамики развития негативных процессов и этапов возникновения критических состояний, а так же дать оценку эффективности применения профилактических мер по устранению негативных последствий. Результаты инструментальных наблюдений могут использоваться при установлении, выборе и уточнении мер охраны зданий, сооружений и природных объектов от вредного влияния активизации деформаций земной поверхности, вызванных затоплением горнодобывающих предприятий.

1. Ликвидация угольных шахт. Защита земной поверхности от затопления горных выработок. Рекомендации: КД 12.12.004- 98: Утв. Министерством угольной промышленности Украины 20.12.98. – Донецк, 1998. – 46 с.
2. ГСТУ 101.00159226.001-2003 Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом / Введ. 01.01.04. – К. : Мінпаливенерго України, 2004. – 127 с.
3. Правила підробки будівель, споруд і природних об'єктів при добуванні вугілля підземним способом: ДСТУ 101.00159226.001. – 2003. – Затв. Мінпаливенерго України 28.11.2003. – Київ, 2004. – 128 с.
4. Инструкция по наблюдениям за сдвижением горных пород, земной поверхности и подрабатываемыми объектами на угольных и сланцевых месторождениях: Утв. МУП СССР 30.12.87. – М.: Недра, 1989. – 17 с.
5. *Гавриленко Ю.Н.* Техногенные последствия закрытия угольных шахт Украины / Ю.Н. Гавриленко, В.Н. Ермаков. – Донецк: НОРД-ПРЕСС, 2004. – 631 с.

D.V Kutepov, M.V. Gordienko, E.V. Rebenok

Monitoring of mine subsidence and deformations over flooded mining districts.

The article briefly discusses the main tasks and methods of ground surface condition monitoring in the zones of mine subsidence and deformations as a result of preservation of mines by wet method. Case studies of observations for "Krasny Oktyabr" Krasny Profintern and Rummyantsev mines, located in the Central Mining Industrial Region of Donbass are given.

Keywords: *rock deformations, mine subsidence, zones of influence of deformations, monitoring, observing station, bench mark.*

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ),
Донецк
den92kutev@mail.ru

Получено 04.11.2020