

ISSN 0136-4545

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

---

---

**Журнал  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ  
МЕХАНИКИ**

---

---

**№ 3 (76)**

**2021**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:** д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**

**ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:** д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**

**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:** **М.Н. Пачева**

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

*д-р техн. наук, проф. А.В. Анциферов, д-р техн. наук, проф. В.Е. Болнокин, д-р техн. наук, проф. Н.И. Болонов, д-р физ.-мат. наук, проф. А.О. Ватульян, д-р техн. наук, проф. Л.П. Вовк, д-р техн. наук, проф. В.А. Глазунов, д-р техн. наук, с.н.с. А.А. Глухов, д-р физ.-мат. наук, проф. А.С. Гольцев, д-р физ.-мат. наук, проф. Г.В. Горр, д-р техн. наук, проф. В.В. Губанов, д-р техн. наук, с.н.с. В.А. Дрибан, д-р физ.-мат. наук, проф. А.М. Ковалев, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. Б.И. Коносевиц, д-р техн. наук, проф. В.М. Левин д-р техн. наук, проф. В.Ф. Мущанов, д-р техн. наук, проф. А.А. Петраков, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. С.Н. Судаков, д-р техн. наук, проф. Г.М. Улитин, д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Шалдырван.*

**EDITOR-IN-CHIEF:** Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**

**DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF:** Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**

**EXECUTIVE SECRETARY:** **M.N. Pacheva**

**EDITORIAL BOARD:**

*Dr. of tech., prof. A.V. Antsiferov, Dr. of tech., prof. V.E. Bolnokin, Dr. of tech., prof. N.I. Bolonov, Dr. of phys. and math., prof. A.O. Vatulyan, Dr. of tech., prof. L.P. Vovk, Dr. of tech., prof. V.A. Glazunov, Dr. of tech., senior researcher A.A. Glukhov, Dr. of phys. and math., prof. A.S. Goltsev, Dr. of phys. and math., prof. G.V. Gorr, Dr. of tech., prof. V.V. Gubanov, Dr. of tech., senior researcher V.A. Driban, Dr. of phys. and math., prof. A.M. Kovalev, Dr. of phys. and math., senior researcher B.I. Konosevich, Dr. of tech., prof. V.M. Levin, Dr. of tech., prof. V.F. Mushchanov, Dr. of tech., prof. A.A. Petrakov, Dr. of phys. and math., senior researcher S.N. Sudakov, Dr. of tech., prof. G.M. Ulitin, Dr. of phys. and math., prof. V.A. Shaldyrvan.*

Адрес редакции: 83001 Донецк, ул. Университетская, 24  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
Тел. 302 92 71, E-mail: jtam\_donnu@mail.ru

Технический редактор: Пачева М.Н.

Научный журнал «Журнал теоретической и прикладной механики» включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (приказ МОН ДНР № 616 от 14.07.2021 г) по следующим группам научных специальностей и специальностям: 01.02.00 — Механика; 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ; 05.23.17 — Строительная механика; 25.00.20 — Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика.

Журнал включен в перечень РИНЦ (Лицензионный договор № 27-01/2020 от 23.01.2020 г.).

Утверждено к печати ученым советом  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016г.

© Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Донецкий национальный университет», 2021

№ 3 (76) / 2021

Основан в 1970г.

# ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

## СОДЕРЖАНИЕ

### Механика деформируемого твердого тела

*Глушанков Е.С.* Решение задачи об изгибе тонкой пьезоэлектрической полосы при действии разности потенциалов электрического поля ..... 5

*Нескородев Р.Н.* Вязкоупругое состояние многосвязного анизотропного горного массива с горизонтальными выработками ..... 18

*Щеголева Т.А., Глухова Ж.Л., Ветчинов А.В.* Методика экспериментального исследования формоизменения металлических пластин ..... 25

### Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

*Болнокин В.Е., Павлыш В.Н., Сторожев С.В.* Алгоритм анализа моделей устойчивости цилиндрических оболочек с неконтрастными параметрами на основе применения алгебры двухкомпонентных треугольных нечетких чисел ..... 32

### Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика

*Голубев Ф.М., Иванова Л.А.* Методика обследования зданий в зонах влияния сосредоточенных деформаций земной поверхности, вызванных подработкой земной поверхности и ликвидацией угольных шахт ..... 46

*Радченко А.Г., Киселев Н.Н., Федотов С.М., Решетняк Т.А., Радченко А.А.* Новые модели формирования выбросоопасных зон в угольных пластах на региональном и текущем уровнях ..... 53



№ 3 (76) / 2021

*Founded in 1970.*

# JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

## CONTENTS

### Solid Mechanics

- Glushankov E.S.* The solution of the problem of bending of thin piezoelectric strip under the electric field potential difference action ..... 5
- Neskorodev R.N.* Viscoelastic state of multiply connected anisotropic rock mass with horizontal excavations ..... 18
- Shchegoleva T.A., Glukhova Zh.L., Vetchinov A.V.* Technique for experimental research of form change of metal plates ..... 25

### Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes

- Bolnokin V.E., Pavlysh V.N., Storozhev S.V.* Algorithm for the analysis of stability models of cylindrical shells with non-contrast parameters based on the use of the algebra of two-component triangular fuzzy numbers..... 32

### Geomechanics, Rock Damage, Mining Aerogas dynamics and Thermal Physics

- Golubev F.M., Ivanova L.A.* Methods for inspecting buildings in zones of influence of concentrated deformations of the earth's surface caused by underworking the earth's surface and the flooding of mine workings..... 46
- Radchenko A.G., Kiselev N.N., Fedotov S.M., Reshetnyak T.A., Radchenko A.A.* New models of formation hazardous areas in coal seams at the regional and current levels..... 53



## МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

©2021. Е.С. Глушанков

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ТОНКОЙ  
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ  
РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ**

Представлено решение задачи об изгибе тонкой пьезоэлектрической полосы, на краях которой задается разность электрических потенциалов и сформулированы физически реализуемые случаи механических граничных условий. Исследование сводится к построению аналитического решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и реализации численного анализа эффектов влияния электрических свойств материала плиты и механических граничных условий на электроупругое состояние полосы.

*Ключевые слова:* теория изгиба тонких плит, пьезоэлектрические материалы, изгиб электроупругой полосы, действие разности потенциалов, эффекты электромеханического деформирования, влияние механических краевых условий.

**Введение.** В качестве конструкционных элементов датчиков, устройств контроля и измерения широко используются тонкие плиты из пьезоэлектрических материалов. При эксплуатации они подвергаются различным механическим, тепловым, электромагнитным воздействиям, порождающим их упругое деформирование, что требует учета при проектировании и эксплуатации таких конструкций. При исследовании актуальных проблем изгиба пьезоэлектрических плит в рамках прикладного подхода для описания сопряженных электромеханических полей следует принимать гипотезы Кирхгофа-Лява [1–3], дополненные гипотезой о свойствах электрических компонент связанного напряженно-деформированного состояния плиты [4]. В рамках данного подхода, к настоящему времени разработаны методы анализа изгибного электроупругого деформирования тонких плит из пьезоактивных материалов [4, 5] и решены некоторые конкретные задачи этого типа [6, 7]. В частности, в работе [7] построено решение задачи об изгибе пьезоэлектрической полосы при действии нагрузки, распределенной по основанию. Целью данной работы является получение и исследование решения задачи об изгибе полосы из пьезоэлектрического материала при действии разности электрических потенциалов на краях полосы. Дано описание общего решения задачи и получены частные решения для нескольких физически реализуемых типов механических краевых условий на боковых граничных поверхностях. Основания полосы при этом полагаются неэлектропроводными. Рассмотрены следующие случаи задания механических граничных условий –

один из краев полосы жестко зашпемлен, а второй или жестко зашпемлен, или свободно оперт, или свободен от внешних воздействий; оба края полосы свободно оперты. На основе проведенных численных исследований установлены закономерности влияния вида граничных условий на краях и свойств материала полосы на характеристики ее электроупругого состояния.

### 1. Постановка задачи теории изгиба тонких пьезоэлектрических плит.

Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат  $Oxyz$  тонкую плиту толщины  $2h$ , изготовленную из пьезоэлектрического материала. Срединная плоскость плиты лежит в плоскости  $Oxy$ . Пусть для каждой точки плиты имеет место плоскость упругой симметрии, параллельная срединной плоскости. Основания плиты свободны от внешних механических воздействий и неэлектродированы. По краю плиты имеется электродное покрытие, через которое на плиту действует электрическое поле с плотностью потенциала  $\varphi_0^*$ .

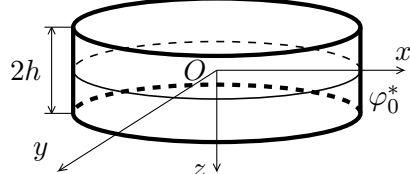


Рис. 1

В этом случае определение электроупругого состояния тонкой плиты сводится к интегрированию однородной следующей системы дифференциальных уравнений относительно функции прогиба плиты  $w(x, y)$  и функции плотности потенциала электрического поля  $\varphi_0(x, y)$ : [5, 7]

$$\begin{aligned} L_{4S}w(x, y) + L_{3G}\varphi_0(x, y) &= 0, \\ L_{3G}w(x, y) + L_{2B}\varphi_0(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $L_{4S}$ ,  $L_{3G}$ ,  $L_{2B}$  — дифференциальные операторы, определяемые следующими выражениями:

$$L_{4S} = - \left( \tilde{S}_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4\tilde{S}_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(\tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4\tilde{S}_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \tilde{S}_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right),$$

$$L_{3G} = \tilde{G}_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (\tilde{G}_{12} + \tilde{G}_{26}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \tilde{G}_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3},$$

$$L_{2B} = \tilde{B}_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\tilde{B}_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \tilde{B}_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{2h^3}{3} S_{ij}, \quad \tilde{G}_{ij} = \frac{2h^3}{3} G_{ij}, \quad \tilde{B}_{ij} = \frac{2h^3}{3} B_{ij};$$

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} & G_{11} & G_{21} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} & G_{12} & G_{22} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} & G_{16} & G_{26} \\ -G_{11} & -G_{12} & -G_{16} & B_{11} & B_{12} \\ -G_{21} & -G_{22} & -G_{26} & B_{12} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix}^{-1};$$

$s_{ij}$  — коэффициенты деформации материала плиты,  $g_{ij}$  — пьезоэлектрические модули,  $\beta_{ij}$  — коэффициенты диэлектрической проницаемости.



После решения системы дифференциальных уравнений (1) при определенных граничных условиях становятся известными функции прогиба плиты  $w$  и плотности потенциала электрического поля  $\phi_0$ , и по ним можно определять в точках плиты изгибающих моменты  $M_x$ ,  $M_y$ , крутящего момента  $H_{xy}$ , перерезывающих сил  $N_x$ ,  $N_y$ , моментов электрической индукции  $M_{D_x}$ ,  $M_{D_y}$  [5, 7]:

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_{-h}^h z \sigma_x dz = - \left( \tilde{S}_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{S}_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{S}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \tilde{G}_{11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \tilde{G}_{21} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right), \\
 M_y &= \int_{-h}^h z \sigma_y dz = - \left( \tilde{S}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{S}_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{S}_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \tilde{G}_{12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \tilde{G}_{22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right), \\
 H_{xy} &= \int_{-h}^h z \tau_{xy} dz = - \left( \tilde{S}_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{S}_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{S}_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \tilde{G}_{16} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \tilde{G}_{26} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right), \\
 N_x &= \int_{-h}^h \tau_{xz} dz = - \left( \tilde{S}_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3\tilde{S}_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (\tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \tilde{S}_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \right. \\
 &\quad \left. - \tilde{G}_{11} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - (\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16}) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - \tilde{G}_{26} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} \right), \\
 N_y &= \int_{-h}^h \tau_{yz} dz = - \left( \tilde{S}_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (\tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3\tilde{S}_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \tilde{S}_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \right. \\
 &\quad \left. - \tilde{G}_{16} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - (\tilde{G}_{12} + \tilde{G}_{26}) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - \tilde{G}_{22} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} \right), \\
 M_{D_x} &= \int_{-h}^h z D_x dz = \tilde{G}_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{G}_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{G}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \tilde{B}_{11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \tilde{B}_{12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \\
 M_{D_y} &= \int_{-h}^h z D_y dz = \tilde{G}_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{G}_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{G}_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \tilde{B}_{12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \tilde{B}_{22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  – компоненты тензора напряжений,  $D_x$ ,  $D_y$  – компоненты вектора индукции электрического поля.

Тогда становится возможным определение моментов и перерезывающих сил на произвольной площадке с нормалью  $n$  и касательной  $s$  [4, 5, 7]:

$$M_n = M_x \cos^2(nx) + M_y \cos^2(ny) - 2H_{xy} \cos(nx) \cos(ny),$$

$$\begin{aligned}
 M_s &= M_x \cos^2(ny) + M_y \cos^2(nx) + 2H_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\
 H_{ns} &= (M_y - M_x) \cos(nx) \cos(ny) + H_{xy} (\cos^2(nx) - \cos^2(ny)), \\
 N_n &= N_x \cos(nx) + N_y \cos(ny), \\
 N_s &= N_x \cos(ny) - N_y \cos(nx), \\
 M_{Dn} &= M_{Dx} \cos(nx) + M_{Dy} \cos(ny), \\
 M_{Ds} &= M_{Dx} \cos(ny) - M_{Dy} \cos(nx).
 \end{aligned} \tag{3}$$

*Механические граничные условия* [7]. Если край плиты жестко защемлен, то механические граничные условия имеют вид

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0. \tag{4a}$$

Если край плиты свободно оперт, то механические граничные условия имеют вид

$$w = 0, \quad M_n = 0. \tag{4б}$$

Если край плиты свободен от механических усилий, то механические граничные условия имеют вид

$$M_n = 0, \quad N_n + \frac{\partial H_{ns}}{\partial s} = 0. \tag{4в}$$

*Электрическое граничное условие* [7]. Поскольку электродное покрытие присутствует, то в этом случае по краю задано распределение потенциала электрического поля [8, 7]:

$$\varphi_0 = \varphi_0^*. \tag{4б}$$

## 2. Постановка задачи об изгибе тонкой поло-

**сы.** Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат  $Oxyz$  тонкую полосу толщины  $2h$  и ширины  $2a$ , изготовленную из пьезоэлектрического материала, ориентированную вдоль оси  $Oy$  (рис. 2). Срединная плоскость полосы лежит в плоскости  $Oxy$ . Основания полосы свободны от механического воздействия и неэлектродированы. По краям полосы заданы равномерные (одинаковые вдоль каждого края) механические воздействия. Каждый край полосы электродирован, причем на левом краю полосы плотность потенциала равна  $V$ , а на правом краю она равна нулю.

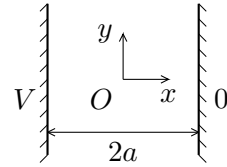


Рис. 2

Поскольку электроупругое состояние полосы не зависит от координаты  $y$ , то система (1) преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функции прогиба  $w(x)$  и функции плотности потенциала

электрического поля  $\varphi_0(x)$  [7], которая ввиду отсутствия поперечной нагрузки примет следующий вид:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{11} \frac{d^4 w}{dx^4} - \tilde{G}_{11} \frac{d^3 \varphi_0}{dx^3} &= 0, \\ \tilde{G}_{11} \frac{d^3 w}{dx^3} + \tilde{B}_{11} \frac{d^2 \varphi_0}{dx^2} &= 0.\end{aligned}\tag{5}$$

Эту систему уравнений следует решать при соответствующих граничных условиях, после чего прогиб плиты и плотность потенциала электрического поля становятся известными и по ним в любой точке плиты можно находить значения изгибающих моментов  $M_x$ ,  $M_y$ , крутящего момента  $H_{xy}$ , перерезывающих сил  $N_x$ ,  $N_y$ , моментов электрической индукции  $M_{Dx}$ ,  $M_{Dy}$  [7]:

$$\begin{aligned}M_x &= -\tilde{S}_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tilde{G}_{11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, & M_y &= -\tilde{S}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tilde{G}_{12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \\ H_{xy} &= -\tilde{S}_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tilde{G}_{16} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \\ N_x &= -\tilde{S}_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \tilde{G}_{11} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}, & N_y &= -\tilde{S}_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \tilde{G}_{16} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}, \\ M_{Dx} &= \tilde{G}_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tilde{B}_{11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, & M_{Dy} &= \tilde{G}_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tilde{B}_{12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}.\end{aligned}\tag{6}$$

После этого становится возможным определение моментов на произвольной площадке с нормалью  $n$  и касательной  $s$  по формулам (3) [7].

*Механические граничные условия* [7]. Если край полосы жестко защемлен, то механические граничные условия имеют вид

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0.\tag{7a}$$

Если край полосы свободно оперт, то механические граничные условия имеют вид

$$w = 0, \quad M_x = 0.\tag{7б}$$

Если край полосы свободен от механических усилий, то механические граничные условия имеют вид

$$M_x = 0, \quad N_x = 0.\tag{7в}$$

*Электрическое граничное условие* [7]. Если край полосы электродирован и задано значение  $V$  плотности потенциала электрического поля, то электрическое граничное условие имеет вид

$$\varphi_0 = V.\tag{8}$$

**3. Действие разности потенциалов на краях полосы.** Общее решение системы (5) имеет вид [7]

$$w(x) = C_1 \tilde{B}_{11} x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4,$$

$$\varphi_0(x) = -3C_1 \tilde{G}_{11} x^2 + C_5 x + C_6,$$

где  $C_i$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) – неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий.

*Решения краевых задач* [7]. Из (8) получаем следующие электрические условия для краев плиты:  $\varphi_0(-a) = V$ ,  $\varphi_0(a) = 0$ .

а) *Оба края полосы жестко заземлены.* Решение задачи имеет вид

$$w(x) = 0, \quad \varphi_0(x) = \frac{V}{2} \cdot \frac{a-x}{a}.$$

Тогда для моментов и перерезывающих сил получаются следующие формулы:

$$M_x = -V \cdot \frac{\tilde{G}_{11}}{2a}, \quad M_y = -V \cdot \frac{\tilde{G}_{12}}{2a}, \quad H_{xy} = -V \cdot \frac{\tilde{G}_{16}}{2a},$$

$$N_x = 0, \quad N_y = 0,$$

$$M_{Dx} = -V \cdot \frac{\tilde{B}_{11}}{2a}, \quad M_{Dy} = -V \cdot \frac{\tilde{B}_{12}}{2a}.$$

б) *Левый край полосы жестко заземлен, правый край свободно оперт.* Решение задачи имеет вид

$$w(x) = V \cdot \frac{(x+a)^2 (a-x) \tilde{G}_{11}}{4a^2 (4\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2)},$$

$$\varphi_0(x) = V \cdot \frac{(x-a) (3\tilde{G}_{11}^2 x - a (8\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2))}{4a^2 (4\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2)}.$$

Тогда для моментов и перерезывающих сил получаются следующие формулы:

$$M_x = V \cdot \frac{3(x-a) (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2) \tilde{G}_{11}}{2a^2 (4\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2)},$$

$$M_y = V \cdot \left( \frac{3 (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{12} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{12}) \tilde{G}_{11}}{2a^2 (4\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2)} x + \frac{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{12} \tilde{G}_{11} - (4\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2) \tilde{G}_{12}}{a (4\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2)} \right),$$

$$H_{xy} = V \cdot \left( \frac{3 (\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{16}) \tilde{G}_{11}}{2a^2 (4\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2)} x + \frac{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{16} \tilde{G}_{11} - (4\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2) \tilde{G}_{16}}{a (4\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2)} \right),$$

$$N_x = V \cdot \frac{3 \left( \tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2 \right) \tilde{G}_{11}}{2a^2 \left( 4\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2 \right)}, \quad N_y = V \cdot \frac{3 \left( \tilde{B}_{11} \tilde{S}_{16} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{16} \right) \tilde{G}_{11}}{2a^2 \left( 4\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2 \right)},$$

$$M_{Dx} = -V \cdot \frac{2 \left( \tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2 \right) \tilde{B}_{11}}{a \left( 4\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2 \right)},$$

$$M_{Dy} = V \cdot \left( \frac{3 \left( \tilde{G}_{11} \tilde{B}_{12} - \tilde{B}_{11} \tilde{G}_{21} \right) \tilde{G}_{11}}{2a^2 \left( 4\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2 \right)} x - \frac{\tilde{B}_{11} \tilde{G}_{21} \tilde{G}_{11} + \left( 4\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2 \right) \tilde{B}_{12}}{a \left( 4\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + 3\tilde{G}_{11}^2 \right)} \right).$$

в) Левый край полосы жестко зашцеилен, правый край свободен от механических воздействий. Решение задачи имеет вид

$$w(x) = -\frac{V}{4} \cdot \frac{(x+a)^2 \tilde{G}_{11}}{a \tilde{S}_{11}}, \quad \varphi_0(x) = \frac{V}{2} \cdot \frac{a-x}{a}.$$

Тогда для моментов и перерезывающих сил получаются следующие формулы:

$$M_x = 0, \quad M_y = V \cdot \frac{\tilde{S}_{12} \tilde{G}_{11} - \tilde{S}_{11} \tilde{G}_{12}}{2a \tilde{S}_{11}}, \quad H_{xy} = V \cdot \frac{\tilde{S}_{16} \tilde{G}_{11} - \tilde{S}_{11} \tilde{G}_{16}}{2a \tilde{S}_{11}},$$

$$N_x = 0, \quad N_y = 0,$$

$$M_{Dx} = -V \cdot \frac{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2}{2a \tilde{S}_{11}}, \quad M_{Dy} = -V \cdot \frac{\tilde{B}_{12} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{21}}{2a \tilde{S}_{11}}.$$

г) Оба края свободно оперты. Решение задачи имеет вид

$$w(x) = \frac{V}{4} \cdot \frac{(a^2 - x^2) \tilde{G}_{11}}{a \tilde{S}_{11}}, \quad \varphi_0(x) = \frac{V}{2} \cdot \frac{a-x}{a}.$$

Тогда для моментов и перерезывающих сил получаются следующие формулы:

$$M_x = 0, \quad M_y = V \cdot \frac{\tilde{S}_{12} \tilde{G}_{11} - \tilde{S}_{11} \tilde{G}_{12}}{2a \tilde{S}_{11}}, \quad H_{xy} = V \cdot \frac{\tilde{S}_{16} \tilde{G}_{11} - \tilde{S}_{11} \tilde{G}_{16}}{2a \tilde{S}_{11}},$$

$$N_x = 0, \quad N_y = 0,$$

$$M_{Dx} = -V \cdot \frac{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2}{2a \tilde{S}_{11}}, \quad M_{Dy} = -V \cdot \frac{\tilde{B}_{12} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11} \tilde{G}_{21}}{2a \tilde{S}_{11}}.$$

**4. Численные исследования.** Были проведены численные исследования электроупругого состояния бесконечных полос из следующих материалов: 1) селенид кадмия  $CdSe$  [9, 10] (материал ЭМ1); 2) титанат бария  $BaTiO_3$  [9, 11] (материал ЭМ4); 3) пьезокерамика  $PZT-4$  [9, 11] (материал ЭМ5); 4) пьезокерамика  $PZT-5A$  [9, 11] (материал ЭМ6). Физические постоянные материалов приведены в таблице 1. Были приняты следующие обозначения:  $s_0 = 10^{-6}$  МПа<sup>-1</sup>,

Таблица 1. Физические постоянные материалов

Величина	Материалы, поляризованные вдоль $Oy$				Материалы, поляризованные вдоль $Ox$			
	ЭМ1( $Oy$ )	ЭМ4( $Oy$ )	ЭМ5( $Oy$ )	ЭМ6( $Oy$ )	ЭМ1( $Ox$ )	ЭМ4( $Ox$ )	ЭМ5( $Ox$ )	ЭМ6( $Ox$ )
$s_{11}/s_0$	23, 21	8, 70	10, 90	14, 40	16, 68	7, 10	7, 90	9, 46
$s_{22}/s_0$	16, 68	7, 10	7, 90	9, 46	23, 21	8, 70	10, 90	14, 40
$s_{66}/s_0$	74, 46	17, 50	19, 30	25, 20	74, 46	17, 50	19, 30	25, 20
$s_{12}/s_0$	-5, 38	-1, 90	-2, 10	-2, 98	-5, 38	-1, 90	-2, 10	-2, 98
$g_{11}/g_0$	0, 00	0, 00	0, 00	0, 00	-81, 15	-12, 60	-26, 10	-24, 80
$g_{12}/g_0$	0, 00	0, 00	0, 00	0, 00	41, 61	5, 20	11, 10	11, 40
$g_{16}/g_0$	-124, 40	20, 20	39, 40	38, 20	0, 00	0, 00	0, 00	0, 00
$g_{21}/g_0$	-41, 61	-5, 20	-11, 10	-11, 40	0, 00	0, 00	0, 00	0, 00
$g_{22}/g_0$	81, 15	12, 60	26, 10	24, 80	0, 00	0, 00	0, 00	0, 00
$g_{26}/g_0$	0, 00	0, 00	0, 00	0, 00	124, 40	-20, 20	-39, 40	-38, 20
$\beta_{11}/\beta_0$	118987, 10	77, 93	76, 61	65, 31	106071, 50	66, 47	86, 92	66, 46
$\beta_{22}/\beta_0$	106071, 50	66, 47	86, 92	66, 46	118987, 10	77, 93	76, 61	65, 31

$g_0 = 10^{-3} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м}^2$ ,  $\beta_0 = 1 \text{ МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}$ . Рассматривались случаи, когда указанные материалы поляризованы вдоль оси  $Oy$  и вдоль оси  $Ox$ .

В таблице 2 приведены значения крутящего момента  $H_{xy}$  в некоторых точках продольно поляризованной полосы из различных материалов для различных типов механических граничных условий (м.г.у.) (тип  $a$  – оба края полосы жестко заземлены, тип  $b$  – левый край полосы жестко заземлен, правый край полосы свободно оперт, тип  $v$  – левый край полосы жестко заземлен, правый край полосы свободен от внешних воздействий, тип  $z$  – оба края полосы свободно оперты).

В таблице 3 приведены значения момента электрической индукции  $M_{Dx}$  в некоторых точках продольно поляризованной полосы из различных материалов для этих же типов механических граничных условий.

На рисунке 3 приведены графики распределения значений прогиба  $w$  поперечно поляризованной полосы из материалов ЭМ1( $Ox$ ) (линия 1), ЭМ4( $Ox$ ) (линия 2), ЭМ5( $Ox$ ) (линия 3), ЭМ6( $Ox$ ) (линия 4), когда оба края полосы элек-

Таблица 2. Значения момента  $H_{xy}$ ,  $10^{-2}$  в точках продольно поляризованной полосы

Материал	Тип м.г.у.	Точка						
		$-a$	$-2a/3$	$-a/3$	0	$a/3$	$2a/3$	$a$
ЭМ1( $Oy$ )	$a, b, v, z$	-0, 467	-0, 467	-0, 467	-0, 467	-0, 467	-0, 467	-0, 467
ЭМ4( $Oy$ )	$a, b, v, z$	380, 025	380, 025	380, 025	380, 025	380, 025	380, 025	380, 025
ЭМ4( $Oy$ )	$a, b, v, z$	433, 310	433, 310	433, 310	433, 310	433, 310	433, 310	433, 310
ЭМ6( $Oy$ )	$a, b, v, z$	410, 084	410, 084	410, 084	410, 084	410, 084	410, 084	410, 084

Таблица 3. Значения момента  $M_{Dx}$ ,  $10^{-5}$  в точках продольно поляризованной полосы

Материал	Тип м.г.у.	Точка						
		$-a$	$-2a/3$	$-a/3$	0	$a/3$	$2a/3$	$a$
ЭМ1( $Oy$ )	$a, b, v, z$	-0, 280	-0, 280	-0, 280	-0, 280	-0, 280	-0, 280	-0, 280
ЭМ4( $Oy$ )	$a, b, v, z$	-329, 229	-329, 229	-329, 229	-329, 229	-329, 229	-329, 229	-329, 229
ЭМ5( $Oy$ )	$a, b, v, z$	-212, 256	-212, 256	-212, 256	-212, 256	-212, 256	-212, 256	-212, 256
ЭМ6( $Oy$ )	$a, b, v, z$	-270, 527	-270, 527	-270, 527	-270, 527	-270, 527	-270, 527	-270, 527

Решение задачи об изгибе тонкой пьезоэлектрической полосы

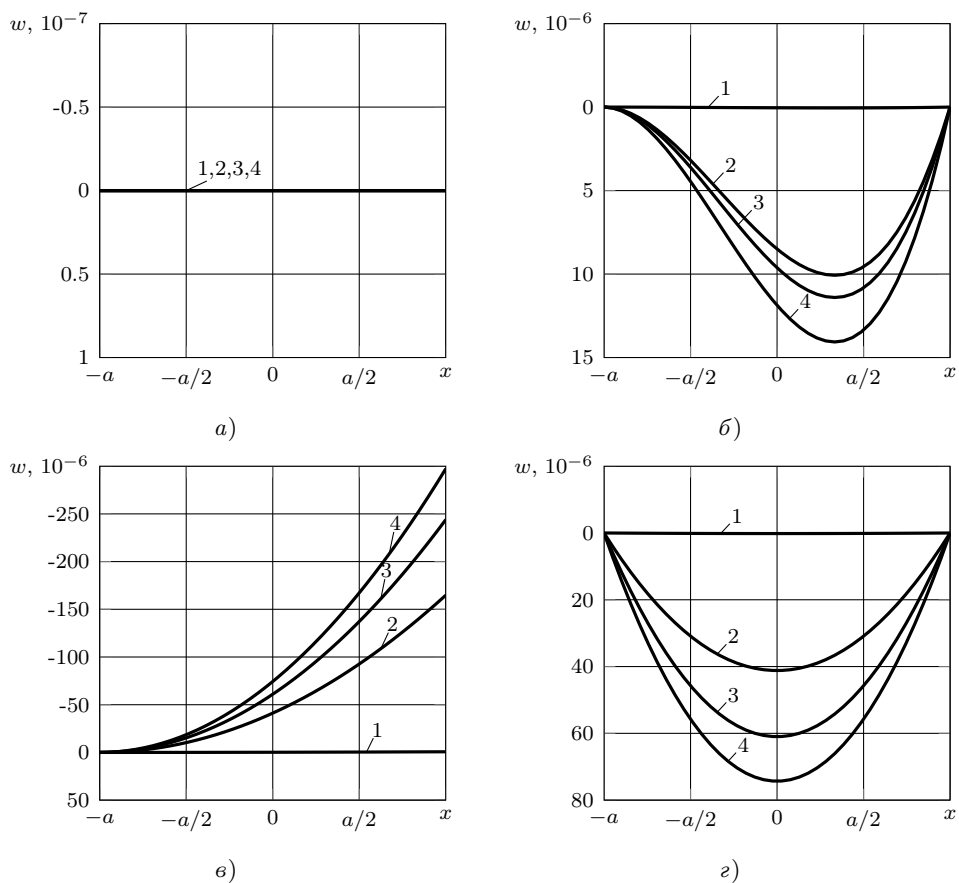


Рис. 3. Графики прогиба срединной плоскости полосы с поперечной поляризацией

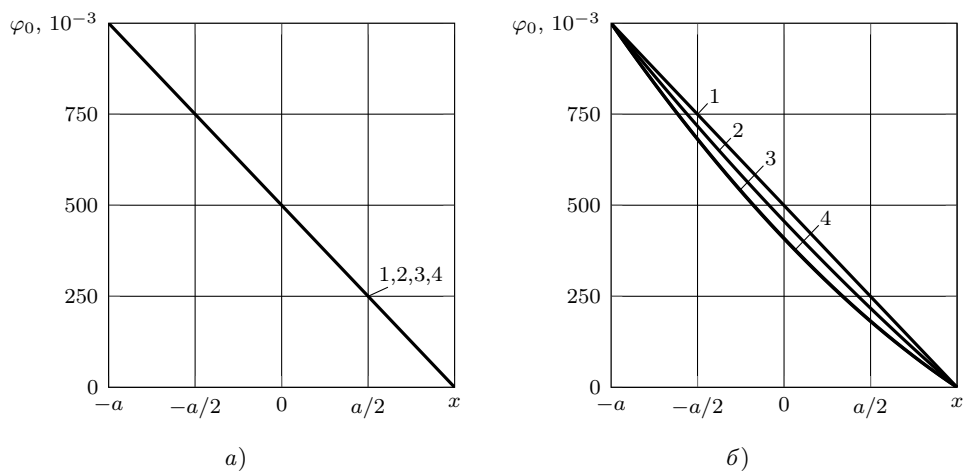


Рис. 4. Графики распределения плотности потенциала электрического поля полосы с поперечной поляризацией

тродированы, для случаев, когда оба края полосы жестко заземлены (рис. а), когда левый край полосы жестко заземлен, правый край полосы свободно оперт (рис. б), когда левый край полосы жестко заземлен, правый край полосы свободен от внешних воздействий (рис. в), оба края полосы свободно оперты (рис. з).

На рисунке 4 приведены графики распределения значений плотности потенциала электрического поля  $\varphi_0$  для поперечно поляризованной полосы из материалов ЭМ1( $Ox$ ) (линия 1), ЭМ4( $Ox$ ) (линия 2), ЭМ5( $Ox$ ) (линия 3), ЭМ6( $Ox$ ) (линия 4) для случаев, когда оба края полосы жестко заземлены, когда левый край полосы жестко заземлен, правый край полосы свободен от внешних воздействий, когда оба края полосы свободно оперты (все – рис. а), когда левый край полосы жестко заземлен, правый край полосы свободно оперт (рис. б).

В таблице 4 приведены значения моментов  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $H_{xy}$  в некоторых точках поперечно поляризованной полосы из материалов ЭМ1( $Ox$ ), ЭМ4( $Ox$ ) и ЭМ6( $Ox$ ) для различных типов механических граничных условий (м.г.у.) (тип

Таблица 4. Значения моментов  $M_x$  и  $M_y$  в точках поперечно поляризованной полосы

Величина	Тип м.г.у.	Точка						
		$-a$	$-2a/3$	$-a/3$	0	$a/3$	$2a/3$	$a$
Материал ЭМ1( $Ox$ )								
$M_x, 10^{-2}$	$a$	-1, 491	-1, 491	-1, 491	-1, 491	-1, 491	-1, 491	-1, 491
	$б$	-2, 238	-1, 865	-1, 492	-1, 119	-0, 746	-0, 373	0, 000
	$в, з$	0, 000	0, 000	0, 000	0, 000	0, 000	0, 000	0, 000
$M_y, 10^{-2}$	$a$	0, 216	0, 216	0, 216	0, 216	0, 216	0, 216	0, 216
	$б$	0, 043	0, 129	0, 216	0, 302	0, 389	0, 475	0, 562
	$в, з$	0, 563	0, 563	0, 563	0, 563	0, 563	0, 563	0, 563
Материал ЭМ4( $Ox$ )								
$M_x, 10^{-2}$	$a$	-640, 577	-640, 577	-640, 577	-640, 577	-640, 577	-640, 577	-640, 577
	$б$	-1016, 873	-847, 394	-677, 915	-508, 436	-338, 958	-169, 479	0, 000
	$в, з$	0, 000	0, 000	0, 000	0, 000	0, 000	0, 000	0, 000
$M_y, 10^{-2}$	$a$	83, 364	83, 364	83, 364	83, 364	83, 364	83, 364	83, 364
	$б$	14, 198	51, 210	88, 223	125, 235	162, 248	199, 261	236, 273
	$в, з$	286, 346	286, 346	286, 346	286, 346	286, 346	286, 346	286, 346
Материал ЭМ5( $Ox$ )								
$M_x, 10^{-2}$	$a$	-609, 530	-609, 530	-609, 530	-609, 530	-609, 530	-609, 530	-609, 530
	$б$	-1026, 767	-855, 639	-684, 511	-513, 383	-342, 256	-171, 128	0, 000
	$в, з$	0, 000	0, 000	0, 000	0, 000	0, 000	0, 000	0, 000
$M_y, 10^{-2}$	$a$	76, 734	76, 734	76, 734	76, 734	76, 734	76, 734	76, 734
	$б$	20, 234	53, 204	86, 173	119, 143	152, 112	185, 082	218, 052
	$в, з$	345, 588	345, 588	345, 588	345, 588	345, 588	345, 588	345, 588
Материал ЭМ6( $Ox$ )								
$M_x, 10^{-2}$	$a$	-638, 724	-638, 724	-638, 724	-638, 724	-638, 724	-638, 724	-638, 724
	$б$	-1073, 488	-894, 573	-715, 658	-536, 744	-357, 829	-178, 915	0, 000
	$в, з$	0, 000	0, 000	0, 000	0, 000	0, 000	0, 000	0, 000
$M_y, 10^{-2}$	$a$	83, 364	83, 364	83, 364	83, 364	83, 364	83, 364	83, 364
	$б$	1, 114	38, 140	75, 165	112, 190	149, 216	186, 241	223, 267
	$в, з$	349, 591	349, 591	349, 591	349, 591	349, 591	349, 591	349, 591



$a$  – оба края полосы жестко заземлены, тип  $b$  – левый край полосы жестко заземлен, правый край полосы свободно оперт, тип  $в$  – левый край полосы жестко заземлен, правый край полосы свободен от внешних воздействий, тип  $г$  – оба края полосы свободно оперты).

В таблице 5 приведены значения момента электрической индукции  $M_{Dx}$  в некоторых точках поперечно поляризованной полосы из материалов ЭМ1( $Ox$ ), ЭМ4( $Ox$ ) и ЭМ6( $Ox$ ) для этих же типов граничных условий.

Таблица 5. Значения момента  $M_{Dx}$ ,  $10^{-5}$  в точках поперечно поляризованной полосы

Материал	Тип м.г.у.	Точка						
		$-a$	$-2a/3$	$-a/3$	$0$	$a/3$	$2a/3$	$a$
ЭМ1( $Ox$ )	$a$	-0,313	-0,313	-0,313	-0,313	-0,313	-0,313	-0,313
	$b$	-0,313	-0,313	-0,313	-0,313	-0,313	-0,313	-0,313
	$в, г$	-0,314	-0,314	-0,314	-0,314	-0,314	-0,314	-0,314
ЭМ4( $Ox$ )	$a$	-373,531	-373,531	-373,531	-373,531	-373,531	-373,531	-373,531
	$b$	-395,303	-395,303	-395,303	-395,303	-395,303	-395,303	-395,303
	$в, г$	-479,078	-479,078	-479,078	-479,078	-479,078	-479,078	-479,078
ЭМ5( $Ox$ )	$a$	-190,668	-190,668	-190,668	-190,668	-190,668	-190,668	-190,668
	$b$	-214,123	-214,123	-214,123	-214,123	-214,123	-214,123	-214,123
	$в, г$	-339,362	-339,362	-339,362	-339,362	-339,362	-339,362	-339,362
ЭМ6( $Ox$ )	$a$	-251,703	-251,703	-251,703	-251,703	-251,703	-251,703	-251,703
	$b$	-282,021	-282,021	-282,021	-282,021	-282,021	-282,021	-282,021
	$в, г$	-441,589	-441,589	-441,589	-441,589	-441,589	-441,589	-441,589

Из полученных результатов видно, что на электроупругое состояние пьезоэлектрической полосы очень заметно влияют электрические свойства материала, в т.ч. направление электрической поляризации, а также механические граничные условия (условия закрепления границы).

В случае продольной поляризации полосы пьезоэлектрический модуль  $g_{11} = 0$ , тогда  $G_{11} = \tilde{G}_{11} = 0$ , тогда система (5) распадается на два несвязанных уравнения, и значения прогиба определяются только упругими свойствами материала и механическими граничными условиями [7]. А поскольку полоса испытывает воздействие электрического поля, то прогиб в ней не возникает. Плотность потенциала электрического поля выражается линейной функцией. Кроме этого, в полосе не возникают изгибающие моменты  $M_x$ ,  $M_y$  и момент электрической индукции в продольном направлении  $M_{Dy}$ . Однако в полосе возникает значительный крутящий момент  $H_{xy}$  и момент электрической индукции в продольном направлении  $M_{Dx}$ . Установлено, что значениях этих величин не зависят от механических граничных условий, а также одинаковы во всех точках полосы.

В случае поперечной поляризации материала полосы прогиб может иметь ненулевые значения, а также возникают изгибающие моменты  $M_x$ ,  $M_y$  и момент электрической индукции в продольном направлении  $M_{Dx}$ , а крутящий момент  $H_{xy}$  отсутствует. Если оба края полосы жестко заземлены (тип м.г.у.  $a$ ), то прогиб полосы отсутствует, а значения моментов  $M_x$  и  $M_y$  постоянны по ширине полосы, причем значения  $M_x$  превышают значения  $M_y$  в несколько раз (при данных материалах – в 7–8 раз). Если левый край полосы жестко зазем-

лен, а правый край свободно оперт (тип  $b$ ), то у левого края значения момента  $M_x$  становятся еще больше, а значения момента  $M_y$  – в несколько раз меньше, однако при приближении к правому краю значение момента  $M_x$  убывает до нуля, а момент  $M_y$  существенно возрастает. Если левый край полосы жестко защемлен, правый край полностью свободен (тип  $e$ ), то прогиб полосы является отрицательным (полоса выгибается вверх), момент  $M_x$  не возникает, а момент  $M_y$  постоянен по ширине полосы и становится довольно значительным. Если оба края полосы свободно оперты (тип  $g$ ), то значения изгибающих моментов такие же, как в предыдущем случае. Во всех случаях, кроме типа  $b$ , плотность потенциала электрического поля описывается линейной функцией, а для случая типа  $b$  возникают слагаемые второго и третьего порядка, которые, впрочем, как показали численные исследования, незначительны: отклонение от линейной функции не превышает 20%. Значения момента электрической индукции  $M_{D_x}$  во всех случаях постоянны по ширине, а наибольшие значения возникают, когда оба края полосы свободно оперты.

Наибольшие значения прогиба имеют место для полосы из материала ЭМ6. Вообще, значения всех величин для полосы из материалов ЭМ4, ЭМ5, ЭМ6 на 2–5 порядков выше, чем для полосы из материала ЭМ1. Это объясняется тем, что материал ЭМ1 обладает наибольшими значениями коэффициентов диэлектрической проницаемости  $\beta_{ij}$ , для материалов ЭМ4 и ЭМ5 эти коэффициенты на 3 порядка меньше, а для материала ЭМ6 они являются вовсе наименьшими. Такой характер влияния диэлектрической проницаемости материала на прогиб объясняется существованием обратной связи интенсивности потока индукции с коэффициентами  $\beta_{ij}$  при постоянной напряженности электрического поля. При этом, влияние упругих и пьезоэлектрических свойств материала является слабо выраженным и преимущественно состоит в слабой корректировке значений моментов.

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
2. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
3. Mansfield E.H. The bending and stretching of plates / E.H. Mansfield. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 228 p.
4. Калоеров С.А. Краевые задачи прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2019. – № 1. – С. 42–58.
5. Калоеров С.А. Задачи электроупругого, магнитоупругого и упругого изгиба тонких плит как частные задачи электромагнитоупругого изгиба / С.А. Калоеров // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2019. – № 3-4. – С. 58–79.
6. Глушанков Е.С. Решение задачи об изгибе защемленной по краю эллиптической пьезоэлектрической плиты / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2020. – Вып. 4 (73). – С. 5–15.
7. Глушанков Е.С. Решение задачи об изгибе тонкой пьезоэлектрической полосы при действии поперечной нагрузки / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2021. – Вып. 1 (74). – С. 31–55.
8. Гринченко В.Т. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – К.:

- Наук. думка, 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 5).
9. Калоев С.А. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей / С.А. Калоев, А.И. Баева, О.И. Бороненко. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 268 с.
  10. Liu J.X. Anisotropic thermopiezoelectric solids with an elliptic inclusion or a hole under uniform heat flow / J.X. Liu, X.S. Zhang, X.L. Liu, J. Zheng // Acta Mech. Sinica. – 2000. – Vol. 16. – P. 148–163.
  11. Dunn M.L. Micromechanics of coupled electroelastic composites effective thermal expansion and pyroelectric coefficients / M.L. Dunn // J. Appl. Phys. – 1993. – Vol. 73. – P. 5131–5140.

### **E.S. Glushankov**

#### **The solution of the problem of bending of thin piezoelectric strip under the electric field potential difference action.**

The solution is given for the thin piezoelectric strip bending problem with the electric potential difference being set on its bounds; the physically implementable cases of mechanical boundary conditions are formulated. The investigation is reduced to constructing the analytical solution of the boundary value problems for system of ordinary differential equations and carrying out the numerical analysis of the effects of the strip's material's electric properties and mechanical boundary conditions on the electro-elastic state of the strip.

**Keywords:** *thin plate bending theory, piezoelectric materials, electro-elastic strip's bending, electric potential difference action, electro-mechanical deformation effects, mechanical boundary conditions effects.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк

Получено 14.09.2021

Donetsk National University, Donetsk

*eugenij.glushankov@gmail.com*

УДК 539.376

©2021. Р.Н. Нескородев

## ВЯЗКОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСВЯЗНОГО АНИЗОТРОПНОГО ГОРНОГО МАССИВА С ГОРИЗОНТАЛЬНЫМИ ВЫРАБОТКАМИ

В работе предложено решение задачи вязкоупругости для массива анизотропных горных пород с протяженными горизонтальными выработками. Учет эффектов ползучести осуществлен при помощи приема преобразования интегральных уравнений состояния в задачах вязкоупругости к уравнениям закона Гука с параметрическими зависимостями деформативных характеристик материалов от времени. В качестве примера исследовано взаимное влияние друг на друга двух выработок эллиптического сечения.

**Ключевые слова:** вязкоупругость, анизотропный горный массив, горизонтальная выработка, многосвязность.

**Введение.** Для решения задач о напряженно-деформированном состоянии геомассивов с выработками сложной геометрии используются как численные (преимущественно, метод конечных элементов), так и численно-аналитические методы. Учет влияния фактора времени на напряжения и перемещения в изотропном горном массиве вокруг горизонтальных выработок, имеющих различные контуры поперечного сечения, в частности эллиптический, квадратный и в виде свода, рассмотрен в работе [1].

Для исследования плоского напряженного состояния вблизи выработок с сечениями усложненного очертания в работе [2] предложен метод построения гладких выпуклых макроконтуров произвольной конфигурации с задаваемой кривизной в любой их точке. Этот метод основан на аппроксимации граничных контуров сечений выработок криволинейными элементами, в качестве которых выбираются дуги окружностей с гладким соединением.

В работе [3] применительно к проблемам ползучести анизотропных горных массивов с горизонтальными выработками предложена методика учета свойств геоматериалов деформироваться во времени, базирующаяся на преобразовании интегральных уравнений состояния в задачах деформирования вязкоупругих горных пород к уравнениям закона Гука с параметрическими зависимостями деформативных характеристик материалов от времени. Предложенный подход не требует построения аналитических представлений ядер ползучести и релаксации в специальной форме. С использованием описанной методики в работе [4] исследовано вязкоупругое напряженное состояние массива анизотропных горных пород с протяженной выработкой эллиптического сечения, а в статье [5] исследуется вязкоупругое напряженно-деформированное состояние анизотропных массивов горных пород с выработками усложненных форм сечения.

В данной работе, с использованием методик [2 - 5], исследовано напряженно-деформированное состояние многосвязного горного массива с двумя протяжен-

ными выработками эллиптического сечения.

**1. Основные соотношения рассматриваемой краевой задачи.** Рассматривается упругое равновесие анизотропного тела – полубесконечного геомассива, отнесенного к декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , расположенной на глубине  $H$  от граничной (дневной) поверхности массива. Массив рассматривается как нижнее полупространство, в котором ось  $Ox_2$  полагается ориентированной вертикально вверх, а плоскость  $Ox_1x_3$  параллельна дневной граничной плоскости. В момент создания в нем выработок (время  $t = 0$ ) упругие постоянные исследуемого материала характеризуются матрицами  $\mathbf{A}$  (модулей упругости) или  $\mathbf{a}$  (коэффициентов деформации). Решение задачи о напряженном состоянии массива с выработками для начального момента времени строится в рамках модели идеально упругого деформирования.

При дальнейшей эксплуатации выработок (для моментов времени  $t > 0$ ) материал в их окрестностях продолжает деформироваться. Для описания этого процесса может быть использована теория вязкоупругости. Для этого может быть применен и альтернативный подход с использованием уравнений закона Гука с параметрическими зависимостями деформативных характеристик материалов от времени. Система основных соотношений рассматриваемой модели включает дифференциальные уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \partial_1 s_1 + \partial_2 s_6 + \partial_3 s_5 + X &= 0, \\ \partial_1 s_6 + \partial_2 s_2 + \partial_3 s_4 + Y &= 0, \\ \partial_1 s_5 + \partial_2 s_4 + \partial_3 s_3 + Z &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

уравнения связи между деформациями  $e_j$  и перемещениями  $U_i$

$$\begin{aligned} e_1 = \partial_1 U_1, \quad e_2 = \partial_2 U_2, \quad e_3 = \partial_3 U_3, \quad e_4 = \partial_2 U_3 + \partial_3 U_2, \\ e_5 = \partial_1 U_3 + \partial_3 U_1, \quad e_6 = \partial_1 U_2 + \partial_2 U_1; \end{aligned} \quad (2)$$

тензорные определяющие соотношения

$$e_m = \bar{a}_{mk} s_k, \quad \bar{a}_{mk} = a_{mk} (1 + p_{mk}^*) \quad (m, k = \overline{1, 6}); \quad (3)$$

$$s_m = \bar{A}_{mk} e_k, \quad \bar{A}_{mk} = A_{mk} (1 - r_{mk}^*) \quad (m, k = \overline{1, 6}), \quad (4)$$

в которых  $s_m$  – компоненты вектора механических напряжений  $\bar{s} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})$ , а также краевые условия, задаваемые на граничной поверхности выработки

$$\begin{aligned} s_1 n_1 + s_6 n_2 + s_5 n_3 = P_1, \quad s_6 n_1 + s_2 n_2 + s_4 n_3 = P_2, \\ s_5 n_1 + s_4 n_2 + s_3 n_3 = P_3. \end{aligned} \quad (5)$$

На основе свойств резольвентных операторов для интегральных уравнений с ядрами произвольного вида в работе [3] предложены соотношения для построения элементов матрицы уравнений состояния (3) и приведены упругие постоянные  $a_{mk}$  и реологические характеристики, определяющие  $p_{mk}^*$  для изотропных

и транстропных горных пород алевролит и песчаник. В частности, в случае для транстропного материала эти соотношения могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} &= \frac{1}{\bar{E}_1} = \frac{1}{E_1} (1 + p_{E1}^*) = \frac{1}{E_1} p_{E1}(t), \\
 \bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} &= -\frac{\bar{\nu}_1}{\bar{E}_1} = -\frac{\nu_1}{E_1} \left[ 1 + \frac{1}{2\nu_1} (p_{E1}(t) - 1) \right], \\
 \bar{a}_{33} &= \frac{1}{\bar{E}_2} = \frac{1}{E_2} \left[ 1 + \frac{E_2}{E_1} (p_{E1}(t) - 1) \right], \\
 \bar{a}_{13} = \bar{a}_{31} = \bar{a}_{32} = \bar{a}_{23} &= -\frac{\bar{\nu}_2}{\bar{E}_2} = -\frac{\nu_2}{E_2} \left[ 1 + \frac{E_2}{2\nu_2 E_1} (p_{E1}(t) - 1) \right], \\
 \bar{a}_{44} = \bar{a}_{55} = \frac{1}{\bar{G}_2}, \quad \bar{a}_{66} = \frac{1}{\bar{G}_1} = \frac{1}{G_1} &\left[ 1 + \frac{3}{2(1 + \nu_1)} (p_{E1}(t) - 1) \right].
 \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь  $p_{E1}(t)$  - экспериментально найденная кривая ползучести [3].

С использованием матрицы  $\bar{a}_{mk} = a_{mk} (1 + p_{mk}^*) = a_{mk} p_{mk}(t) = \mathbf{P}(t)$  в уравнениях состояния (3) и описанной в [3] связи матриц  $\mathbf{R}(t)$  и  $\mathbf{P}(t)$  может быть построена матрица  $\bar{A}_{mk} = A_{mk} (1 - r_{mk}^*) = A_{mk} r_{mk}(t) = \mathbf{R}(t)$  в уравнениях состояния (4).

В работе [6] показано, что если плоскость изотропии материала массива ориентирована под углом  $\varphi$  к дневной поверхности, ось выработки направлена под углом  $\psi$  к плоскости изотропии, а система координат  $Ox_1x_2x_3$  связана с поперечным сечением выработки, то уравнения состояния (3) и (4) в координатах  $Ox_1x_2x_3$  будут иметь форму, отвечающую уравнениям для материала, обладающего общей анизотропией.

**2. Разрешающая система для задачи обобщенной плоской деформации горного массива с горизонтальными выработками.** Рассматриваются протяженные горные выработки, ориентированные вдоль координатной оси  $Ox_3$ . Полагается, что окрестности выработок находятся в состоянии обобщенной плоской деформации и плоскостью деформирования является плоскость  $Ox_1x_2$ . В этом случае уравнения (2) принимают вид

$$\begin{aligned}
 e_1 = \partial_1 U_1, \quad e_2 = \partial_2 U_2, \quad e_3 = 0, \quad e_4 = \partial_2 U_3, \\
 e_5 = \partial_1 U_3, \quad e_6 = \partial_1 U_2 + \partial_2 U_1.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Существуют различные факторы, влияющие на формирование напряженного состояния массива. В данной работе рассматриваются силы гравитации (силы тяжести) горных пород. Во введенной системе координат компоненты вектора объемных сил принимают вид  $X = Z = 0, Y = -\rho g$ , где  $g$  - ускорение силы тяжести, а  $\rho$  - плотность однородного породного массива. В этом случае уравнения равновесия (1) принимают вид

$$\partial_1 s_1 + \partial_2 s_6 = 0, \quad \partial_1 s_6 + \partial_2 s_2 = \rho g, \quad \partial_1 s_5 + \partial_2 s_4 = 0. \tag{8}$$

При подстановке уравнений состояния (4) в уравнения равновесия (8) с учетом соотношений (7) может быть получена система дифференциальных уравнений теории вязкоупругости относительно компонент функций перемещений  $\mathbf{U} = [U_1, U_2, U_3]$

$$\begin{aligned}\bar{L}_{11}U_1 + \bar{L}_{12}U_2 + \bar{L}_{13}U_3 &= 0, \\ \bar{L}_{21}U_1 + \bar{L}_{22}U_2 + \bar{L}_{23}U_3 &= \rho g, \\ \bar{L}_{31}U_1 + \bar{L}_{32}U_2 + \bar{L}_{33}U_3 &= 0;\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}\bar{L}_{11} &= \bar{A}_{11}\partial_1^2 + 2\bar{A}_{16}\partial_1\partial_2 + \bar{A}_{66}\partial_2^2, & \bar{L}_{22} &= \bar{A}_{66}\partial_1^2 + 2\bar{A}_{26}\partial_1\partial_2 + \bar{A}_{22}\partial_2^2, \\ \bar{L}_{12} &= \bar{L}_{21} = \bar{A}_{16}\partial_1^2 + (\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66})\partial_1\partial_2 + \bar{A}_{62}\partial_2^2, \\ \bar{L}_{33} &= \bar{A}_{55}\partial_1^2 + 2\bar{A}_{45}\partial_1\partial_2 + \bar{A}_{44}\partial_2^2, \\ \bar{L}_{13} &= \bar{L}_{31} = \bar{A}_{15}\partial_1^2 + (\bar{A}_{14} + \bar{A}_{65})\partial_1\partial_2 + \bar{A}_{64}\partial_2^2, \\ \bar{L}_{23} &= \bar{L}_{32} = \bar{A}_{65}\partial_1^2 + (\bar{A}_{64} + \bar{A}_{25})\partial_1\partial_2 + \bar{A}_{24}\partial_2^2,\end{aligned}\tag{10}$$

в которой операторы  $\bar{A}_{mk}$  представляются соотношениями (4). Получаемые дифференциальные уравнения (9) описывают поведение вязкоупругой среды при плоской деформации в самом общем случае анизотропии.

При дальнейшем анализе полагается, что напряженное состояние горного массива включает начальное поле смещений и напряжений в нетронutom массиве и дополнительное поле смещений и напряжений, возникающих за счет появления выработки.

**3. Решение задачи о напряженном состоянии около выработок.** Начальное напряженно-деформированное состояние нетронutom массива в рамках гипотезы о завершении в нем процессов ползучести [1] определяется из соотношений [6]

$$\begin{aligned}U_i^0 &= \alpha_i \rho g (x_2^2 - Hx_2) \quad (i = \overline{1, 3}), \\ s_k^0 &= \tau_k \rho g (x_2 - H) \quad (k = \overline{1, 6}),\end{aligned}$$

где величины  $\alpha_i, \tau_k$  выражаются через упругие постоянные материала по формулам

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \sum_{k=1}^6 a_{6k} \tau_k, & \alpha_2 &= \sum_{k=1}^6 a_{2k} \tau_k, & \alpha_3 &= \sum_{k=1}^6 a_{4k} \tau_k, \\ \tau_1 &= - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix} / \Delta, & \tau_3 &= - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{51} & a_{52} & a_{55} \end{vmatrix} / \Delta, \\ \tau_5 &= - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \\ a_{51} & a_{53} & a_{52} \end{vmatrix} / \Delta, & \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{31} & a_{33} & a_{35} \\ a_{51} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix} / \Delta, \\ \tau_4 &= \tau_6 = 0, & \tau_2 &= 1.\end{aligned}$$

В последующем, как полагается, свойства ползучести горного массива проявляются лишь при формировании поля дополнительных напряжений и перемещений, которое в произвольный момент времени определяется на основе алгоритма решения упругой задачи.

Задача о напряженном состоянии массива анизотропных горных пород с выработками [6] приводится к определению в областях  $S_j$  функций  $\Phi_j(z_j)$ , удовлетворяющих заданным граничным условиям. Для каждого элемента  $L_r$  контура границы вводятся соответствующие комплексные потенциалы

$$\Phi_{jr} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{rkj} / \varsigma_{jr}^k.$$

Если конструируемые на основе описанной методики контуры выработок содержат  $N$  элементов, то комплексные потенциалы  $\Phi_j(z_j)$ , будут представлены в виде суммы отдельных потенциалов, связанных с каждым из элементов

$$\Phi_j(z_j) = \sum_{r=1}^N \Phi_{jr} = \sum_{r=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{rkj} / \varsigma_{jr}^k, \quad (11)$$

и с их использованием нужно удовлетворять граничным условиям на каждом из контурных элементов. Для массива с неподкрепленными выработками условия на  $r$ -м элементе имеют вид [2, 6]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 a_{jr} \Phi_j' = P_{1r}, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 b_{jr} \Phi_j' = P_{2r}, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 c_{jr} \Phi_j' = P_{3r}. \quad (12)$$

Решение задачи о напряженно-деформированном состоянии массива горных пород с выработками сводится к определению комплексных коэффициентов  $\alpha_{rkj}$  функций (11) из граничных условий (12). Приведение этой задачи к решению системы алгебраических уравнений реализовано с применением метода наименьших квадратов [2, 6]. Перемещения и напряжения, возникающие в массиве, определяются из соотношений [6]

$$U_i = U_i^0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 R_{ij} \Phi_j(z_j) \quad (i = \overline{1, 3}),$$

$$s_k = s_k^0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 P_{kj} \Phi_j'(z_j) \quad (k = \overline{1, 6}).$$

Напряжения, действующие на контуре или вблизи контура выработки на площадках, касательных и нормальных к нему, вычисляются по известным формулам [6].

**4. Результаты численных исследований.** Численные исследования проводились для массивов из трансформных (песчаник 2, алевролит 2) горных пород, упругие и реологические постоянные которых даны в работе [3]. При вычислениях считалось, что на глубине  $H = 1000$  м проведены две выработки



эллиптического сечения с полуосями  $a$ ,  $b$  и расстоянием между их центрами  $L$  (рис. 1).

В таблице 1 для различных соотношений полуосей эллиптических выработок приведены значения максимальных напряжений  $\sigma_\theta/(\rho g H)$ , возникающих в боковой стенке (точка  $A$ ) правой выработки и симметричной ей точке левого отверстия, а также значения напряжений, возникающих в кровле (точка  $B$ ) и симметричных ей точках почвы и, соответственно, точках левого отверстия. Значение  $L = \infty$  соответствует случаю одной выработки. Вычисления проводились для начального момента времени  $t = 0$ , соответствующего упругому состоянию, и для времени установившейся стабилизации процесса ползучести  $t_{st}$ . Для песчаника  $t_{st} = 860$  часов, для алевролита —  $t_{st} = 600$  часов.

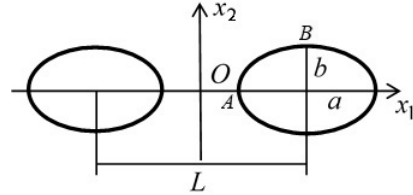


Рис. 1.

Таблица 1

Материал	$t$	$L = \infty$		$L = 20 \text{ м}$		$L = 10 \text{ м}$	
		$A$	$B$	$A$	$B$	$A$	$B$
$a = b = 2 \text{ м}$							
песчаник2	0	-5.078	0.182	-5.099	0.157	-5.213	0.143
	860	-3.989	0.351	-4.002	0.323	-4.072	0.294
алевролит2	0	-2.877	-1.157	-2.924	-1.134	-3.085	-1.074
	600	-2.209	-0.976	-2.238	-0.964	-2.350	-0.925
$a = 2, b = 1.5 \text{ м}$							
песчаник2	0	-6.491	0.332	-6.518	0.306	-6.641	0.279
	860	-5.039	0.467	-5.056	0.442	-5.134	0.407
алевролит2	0	-3.656	-1.013	-3.691	-0.995	-3.829	-0.943
	600	-2.803	-0.601	-2.826	-0.602	-2.919	-0.593
$a = 1.5, b = 2 \text{ м}$							
песчаник2	0	-4.018	-0.018	-4.030	-0.029	-4.082	-0.032
	860	-3.203	0.199	-3.209	0.179	-3.237	0.158
алевролит2	0	-2.293	-2.439	-2.332	-2.330	-2.447	-2.175
	600	-1.765	-1.475	-1.786	-1.451	-1.863	-1.392

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

- максимальные по абсолютному значению напряжения  $\sigma_\theta/(\rho g H)$ , возникающие в боковой стенке для всех вариантов расположения и соотношения полуосей выработок и материалов в стационарном состоянии, приблизительно на 30% меньше соответствующих напряжений в начальный момент;

- для материала песчаник 2 в кровле и почве возникают положительные растягивающие напряжения, что может привести к разрушению выработок в этой зоне. Для круговых выработок в процессе их эксплуатации растягивающие напряжения увеличиваются почти в два раза. Увеличение длины вертикальной полуоси эллиптических выработок приводит к уменьшению концентрации положительных напряжений в кровле и почве, а с его дальнейшим увеличением,

вообще, к переходу в зону сжимающих напряжений.

**Закключение.** При помощи преобразования интегральных уравнений состояния задач вязкоупругости к временным уравнениям закона Гука, в работе получено решение задачи ползучести анизотропных горных пород с протяженными выработками эллиптического сечения. В результате исследований выявлено, что для случая свободных выработок необходимо учитывать фактор влияния анизотропии материала во времени, поскольку он приводит к существенному изменению напряженного состояния вблизи выработок, что противоречит гипотезе о том, что свойства ползучести в анизотропных породах проявляются также, как в изотропных, а следовательно, не меняются во времени.

1. *Ержанов Ж.С.* Теория ползучести горных пород и ее приложения / Ж.С. Ержанов. – Алма-Ата: Наука, 1964. – 175 с.
2. *Нескородев Р.Н.* Применение способа гладкой аппроксимации криволинейных отверстий в решении задач плоской теории упругости / Р.Н. Нескородев // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природн. науки. – 2010. – Вип. 1. – С. 81–88.
3. *Нескородев Р.Н.* Метод преобразования интегральных уравнений состояния к временным уравнениям закона Гука / Р.Н. Нескородев // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естеств. науки. – 2016. – Вип. 3. – С. 10–21.
4. *Нескородев Р.Н.* Ползучесть анизотропных горных пород с выработками в условиях обобщенной плоской деформации / Р.Н. Нескородев // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естеств. науки. – 2016. – Вип. 4. – С. 50–57.
5. *Сторожев В.И.* Ползучесть массивов анизотропных горных пород с выработками усложненной формы сечения / В.И. Сторожев, Р.Н. Нескородев // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естеств. науки. – 2019. – Вип. 3–4. – С. 95–106.
6. *Нескородев Н.М.* Напряжения вокруг выработок в анизотропном горном массиве / Н.М. Нескородев, Р.Н. Нескородев. – Донецк: ДонНУ, 2003. – 148 с.

**R.N. Neskoro dev**

### **Viscoelastic state of multiply connected anisotropic rock mass with horizontal excavations.**

The paper proposes a solution to the viscoelasticity problem for anisotropic rock mass with extended horizontal excavations. The creep effects are taken into account using the method of transforming the integral equations of state in viscoelasticity problems to the equations of Hooke's law with parametric dependences of the deformative characteristics of materials on time. As an example, the mutual influence of two excavations of an elliptical section on each other is investigated.

**Keywords:** *viscoelasticity, anisotropic rock mass, horizontal excavation, multi-connectivity.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк

*Получено 06.10.2021*

Donetsk National University, Donetsk

*nrom72@gmail.com*

УДК УДК 669.788

©2021. Т.А. Щеголева, Ж.Л. Глухова, А.В. Ветчинов

## МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

В настоящей работе представлено описание разработанной установки и отработанной экспериментальной методики для изучения формоизменения металлических пластин при одностороннем электролитическом насыщении водородом.

*Ключевые слова:* электролитическое насыщение водородом, водородные напряжения, формоизменение металлов, экспериментальный анализ.

**Введение.** Конструкционные материалы часто подвергаются насыщению водородом при их эксплуатации. Внедренные атомы водорода расширяют кристаллическую решетку металлов. Одним из физических эффектов, вызываемых концентрационными неоднородностями водорода, является формоизменение металла. Экспериментальное изучение проявлений индуцированного водородом формоизменения металла в лабораторных условиях возможно проводить либо термическим (насыщение из газовой фазы), либо электролитическим (насыщение из электролита) методом.

Формоизменение упругонапряженной палладиевой пластины под воздействием газообразного водорода исследовано в работах [1–5]. Авторами экспериментально установлено, что на величину формоизменения оказывают влияние такие факторы как температура, давление водорода и число циклов водородного воздействия [4].

Для исследования формоизменения металлических пластин также можно использовать электролитический метод. С этой целью была спроектирована и изготовлена новая электрохимическая водородная установка (ЭВУ – 5) и разработана методика экспериментального исследования «in situ» формоизменения металлов при их электролитическом насыщении водородом. В настоящей работе представлено описание созданной установки и методики экспериментов, а также результаты исследования влияния концентрации тиомочевины и плотности тока на формоизменение металлических пластин при одностороннем электролитическом насыщении водородом.

**1. Методика и результаты экспериментального исследования.** Экспериментальная установка для насыщения исследуемых образцов водородом представлена на рисунках 1 и 2. Установка состоит из:

- блока электрохимического насыщения образцов;
- ванны из органического стекла, в которую помещается и закрепляется блок электрохимического насыщения;
- источника электропитания ИЭПП-2;
- универсального вольтметра;

– стабилизатора тока.

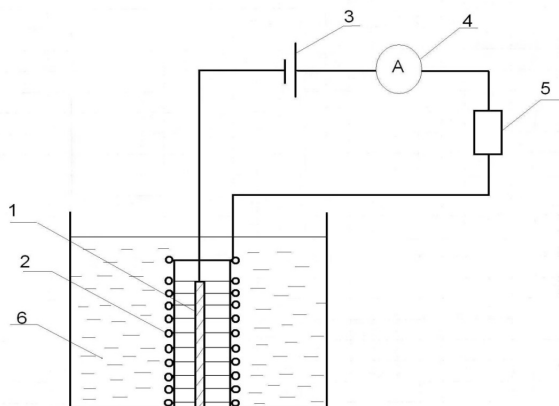


Рис. 1. Электрическая схема установки ЭВУ-5: 1 – катод (образец); 2 – анод (платиновая проволока); 3 – источник питания; 4 – амперметр; 5 – стабилизатор тока; 6 – электролит.

В центральной части блока электрохимического насыщения образцов находится держатель образца (рис. 2). Образец, который является катодом, представляет собой пластинку. Нижним концом пластинка крепится в зажиме, другой ее конец остается свободным, он изогнут в форме буквы «Г». Вокруг держателя располагаются четыре керамические трубки, на которые намотана платиновая проволока, представляющая собой анод.

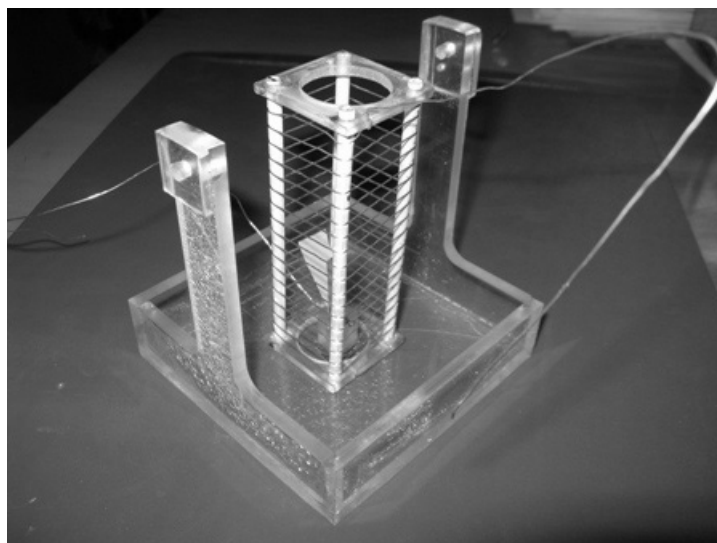


Рис. 2. Блок электрохимического насыщения образцов.

При отработке методики для экспериментов использовали образцы из Pd в

виде пластинок размером 65x5,5x0,2 мм. Их изгибали в форме буквы „Г” так, чтобы загнутый конец составлял около 3 мм. Перед отжигом образцы обезжиривали спиртом и крепили на обезжиренной подложке из нержавеющей стали. Отжиг проводили в вакууме при температуре 7000С в течение одного часа и охлаждали с печью до комнатной температуры. После отжига одну из сторон пластины покрывали цапон-лаком, другую сторону образца обезжиривали спиртом. Исследуемый образец нижним концом закрепляли в держателе блока электрохимического насыщения. После этого блок электрохимического насыщения опускали в ванну из органического стекла и заливали электролит.

Регулятор блока питания позволяет изменять силу тока в пределах от 0 до 7,5 мА. Силу тока измеряли амперметром, чтобы поддерживать ток неизменным в ходе эксперимента использовали стабилизатор. Регистрацию изменений величины стрелы прогиба свободного конца образца во время эксперимента вели при помощи катетометра и видеокамеры. Полученную запись расшифровывали кадр за кадром и посекундно в компьютерной программе Movavi Video Editor. Точность измерения стрелы прогиба образца составляет  $\pm 0,02$  мм.

На рисунке 3 приведена временная зависимость стрелы прогиба образца в реальном времени.

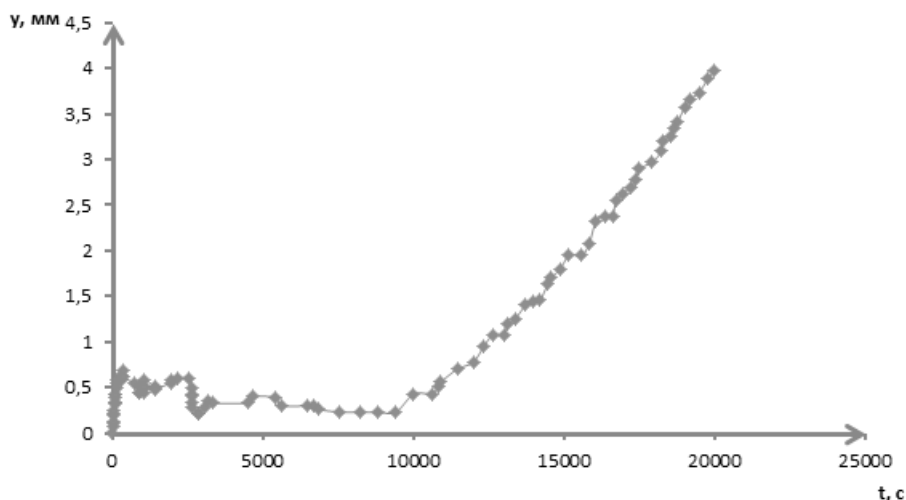


Рис. 3. Временная зависимость стрелы прогиба пластины при ее одностороннем насыщении водородом (5% р-р  $H_2SO_4$ +1,5 г/л тиомочевины).

Как видно из рисунка 3, изгиб изучаемой пластины палладия наблюдается сразу после катодного подключения образца. График имеет две характерные области. В первой области (0-10000 с) наблюдается малый изгиб образца (в пределах области упругих деформаций), и при этом формоизменение практически не изменяется. При дальнейшем наводороживании (на интервале 10000-20000 с) величина стрелы прогиба непрерывно интенсивно растет. Так как важнейшим

фактором, определяющим величину стрелы прогиба образца при его одностороннем насыщении водородом, являются возникающие при этом градиенты концентрации, то сравнительно небольшие формоизменения образца в первой области говорят об образовании  $\alpha$ -фазы в приповерхностном слое. В дальнейшем преодолевается потенциальный барьер, и образуется гидридная фаза, поэтому наблюдается ускоренный рост величины стрелы прогиба.

Анализ литературных данных [6–13] показал, что на концентрацию водорода в образце оказывают влияние такие параметры электролиза как плотность тока, время наводороживания, состав и концентрация электролита.

В таблице 1 представлены режимы электролитического насыщения металлов водородом по литературным данным.

Таблица 1

Материал	Состав электролита	Условия насыщения	Литература
$Fe_{78}Ni_1Si_9B_{12}$	$H_2SO_4$	$j=50 \text{ A/m}^2$ $\tau=20 \text{ мин}$	[6]
Э125(Zr-2,5%Nb)	1 М р-р (LiOH+H <sub>2</sub> O)	$j=0,5 \text{ A/cm}^2$ $\tau=1,2,3,7,12 \text{ ч}$	[7]
S235JR	5% р-р $H_2SO_4$ +1,5 г/л тиомочевины	$j=20-600 \text{ mA/cm}^2$ $\tau=1 \text{ ч}$	[8]
$FeCr_{25}Ni_{20}$ +добавки	1 Н р-р $H_2SO_4$ +0,01 г/л $NaAsO_2$	$j=5-50 \text{ mA/cm}^2$ $\tau=72 \text{ ч}$	[9]
Fe	1 Н р-р $H_2SO_4$ + $As_2O_3$	$j=0,018 \text{ A/cm}^2$ $\tau=320 \text{ мин}$	[10]
12X18H10T	1 М р-р $H_2SO_4$	$j=0,1-1 \text{ A/cm}^2$ $\tau=2-12 \text{ ч}$	[11]
Fe-18Cr-14Ni-2Mo	1 М р-р $H_2SO_4$	$j=10 \text{ mA/cm}^2$ $\tau=2, 5, 24 \text{ ч}$	[12]

Как видно из таблицы 1, для стимулирования наводороживания используются различные стимуляторы, такие как  $NaAsO_2$ , тиомочевина ( $(NH_2)_2CS$ ),  $As_2O_3$  под действием которых происходит торможение реакции молизации водорода, в результате чего увеличивается количество атомов водорода на поверхности пластинки, следовательно, и количество водорода, проникающего вглубь металла [13].

Для изучения влияния концентрации тиомочевины на формоизменение палладиевой пластины в качестве электролита использовали 5% р-р  $H_2SO_4$  с добавлением разного количества тиомочевины. Плотность тока во всех экспериментах составляла 0,60 мА/см<sup>2</sup>.

На рисунке 4 приведены результаты экспериментов при различных концентрациях тиомочевины в растворе. Как видно из рисунка 4, увеличение концентрации тиомочевины выше 1,5 г/л практически не влияет на формоизменение образца. Следовательно, оптимальным содержанием тиомочевины является концентрация 1,5 г/л, что согласуется с литературными данными.

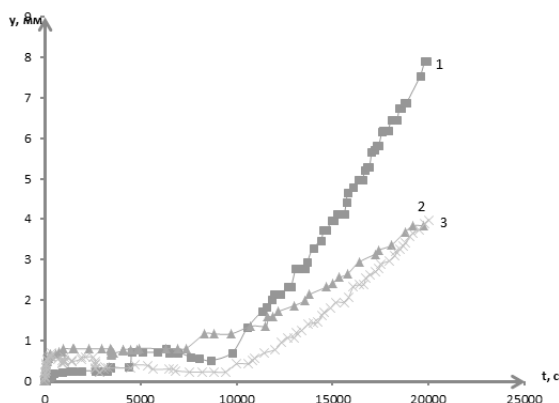


Рис. 4. Временная зависимость стрелы прогиба пластины при ее одностороннем насыщении водородом. Концентрация тиомочевины в растворе: 1 – 0,75 г/л, 2 – 3,0 г/л, 3 – 1,5 г/л.

Для исследования зависимости формоизменения от величины плотности тока в качестве электролита использовали 5% р-р  $H_2SO_4$  с добавлением 1,5 г/л тиомочевины. Плотность тока в экспериментах изменяли от 0,6 до 2,0  $mA/cm^2$ .

На рисунке 5 представлены результаты первых проведенных экспериментов.

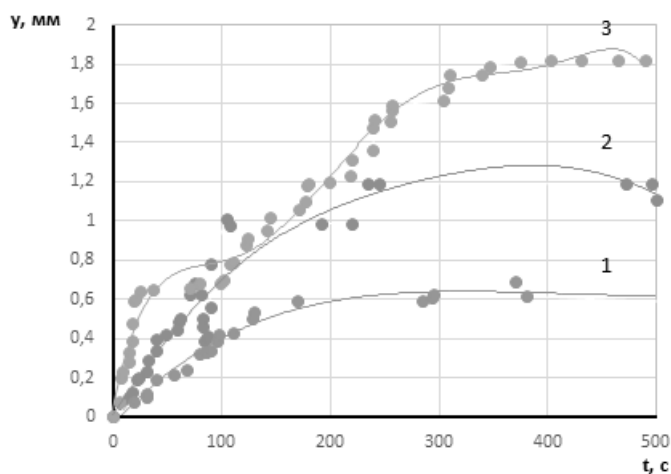


Рис. 5. Временная зависимость стрелы прогиба пластины при ее одностороннем электрохимическом насыщении водородом. Плотность тока: 1 – 0,6  $mA/cm^2$ , 2 – 1,0  $mA/cm^2$ , 3 – 2,0  $mA/cm^2$

Как видно из рисунка, на величину изгиба изучаемой пластины палладия существенное влияние оказывает плотность подаваемого тока: при увеличении плотности тока изгиб закономерно увеличивается (см. кривые 2 и 3 на рис. 5). Известно, что, изменяя плотность катодного тока наводороживания, можно изменять концентрацию водорода в образце. Однако однозначный вид зависимости содержания водорода в металлах от плотности тока пока не установлен. Вследствие одностороннего насыщения пластины водородом появляются гради-

енты концентрации водорода по толщине пластины, что вызывает появление концентрационных напряжений и приводит к изгибу образца. Таким образом, значительное возрастание стрелы прогиба образца на начальных стадиях насыщения водородом (пока в процессе насыщения еще не образуется гидридная фаза) указывает на увеличение градиентов концентрации водорода, что можно объяснить ростом концентрации водорода в приповерхностных слоях образца при увеличении плотности тока.

**Выводы.** Приведено описание изготовленной лабораторной установки для изучения формоизменения металлических образцов. Впервые экспериментально установлено, что при одностороннем электрохимическом насыщении водородом палладиевая пластина претерпевает изгиб, характер которого зависит от условий эксперимента.

Проведенные эксперименты показывают, что созданная установка и разработанная методика позволяют проводить при комнатной температуре систематическое изучение индуцированного водородом формоизменения металлических изделий в виде пластины из нержавеющей стали, никеля, палладия и других металлов и сплавов при различных режимах наводороживания. Установленные экспериментально закономерности позволят понять физику «работы» внутренних водородных напряжений, отвечающих за надежность и работоспособность металла при его эксплуатации в контакте с водородом, его изотопами и водородосодержащими средами. На этой основе предполагается разработать исходные физические данные для технологических режимов безопасной работы и эксплуатации аустенитных сталей для электрохимических и химических производств, а также мембранных сплавов для получения особо чистого водорода и его изотопов для атомной, водородной и термоядерной энергетики.

1. *Goltsov V.A. Fundamentals of Hydrogen Treatment of Materials / V.A. Goltsov // Progress in Hydrogen Treatment of Materials. – Donetsk, Coral Gables: Kassiopeya Ltd., 2001. – P. 3–37.*
2. *Goltsov V.A. Hydrogen elasticity effect and its importance in diffusion of concentration inhomogeneities in metals / V.A. Goltsov, Zh.L. Glukhova, A.L. Redko // Int. J Hydrogen Energy. – 1997. – Vol. 22. – P. 179–183.*
3. *Goltsov V.A. Progress in Hydrogen Treatment of Materials / V.A. Goltsov, Editor. – Donetsk, Coral Gables: Kassiopeya, 2001. – 543 p.*
4. *Гольцов В.А. Формоизменение палладиевой пластины под воздействием водорода / В.А. Гольцов, Р.В. Котельва, Т.А. Рюмшина [и др.] // Физика металлов и металловедение. – 1990. – Т. 10. – С. 135–141.*
5. *Глухова Ж.Л. Экспериментальное исследование индуцированного водородом формоизменения пластины из палладия и сплавов a-PdHx / Ж.Л. Глухова, Е.Н. Любименко, В.А. Гольцов // Физика и техника высоких давлений. – 2011. – Т. 21, № 3. – С. 110–118.*
6. *Скрябина Н.Е. Влияние водорода на процесс кристаллизации магнито-мягких быстрозакаленных сплавов на основе железа / Н.Е. Скрябина, В.И. Ладьянов, Д. Фрушар // Труды Пятой международной конференции «ВОМ-2007», Донецк, 21–25 мая 2007 г. – Донецк, 2007. – Ч.2 – С. 531–535.*
7. *Казаченок М.С. Влияние водородной обработки на механические свойства циркониевого сплава Э-125 / М.С. Казаченок, А.В. Панин, К.В. Оскомов [и др.] // Труды Пятой международной конференции «ВОМ-2007», Донецк, 21–25 мая 2007 г. – Донецк, 2007. – Ч.2 – С. 791–795.*



8. Мерсон Е.Д. Влияние плотности тока электролитического наводороживания на концентрацию диффузионно-подвижного водорода в низкоуглеродистой стали марки S235JR / Е.Д. Мерсон, В.А. Полуянов, Д.Л. Мерсон [и др.] // Вектор науки ТГУ. – 2015. – №4 (34). – С. 76–82.
9. Шиванюк В.Н. Влияние легирующих элементов на обусловленное водородом  $\gamma \rightarrow \epsilon$  фазовое превращение в аустенитных сталях / В.Н. Шиванюк, Ж. Фокт, В.Г. Гаврилюк // Труды Пятой международной конференции «ВОМ-2007», Донецк, 21–25 мая 2007 г. – Донецк, 2007. – Ч.2 – С. 496–500.
10. Смяловский М. Принцип нового метода исследования диффузии катодного водорода / М. Смяловский, З. Шклярская-Смяловская // Известия АН СССР. Отд. хим. наук. – 1954. – № 2. – С. 226–229.
11. Чернов И.П. Влияние имплантации водорода и гелия на физико-механические свойства ферритной стали / И.П. Чернов, Ю.П. Черданцев, Ю.В. Мартыненко [и др.] // Труды Пятой международной конференции «ВОМ-2007», Донецк, 21–25 мая 2007 г. Донецк, 2007. – Ч.2 – С. 768–772.
12. Купрекова Е.Н. Ориентационная и температурная зависимость критических скалывающих напряжений монокристаллов аустенитной нержавеющей стали Fe–18Cr–14Ni–2Mo с водородом / Е.И. Купрекова, Ю.И. Чумляков, И.П. Чернов [и др.] // Труды Пятой международной конференции «ВОМ-2007», Донецк, 21–25 мая 2007 г. – Донецк, 2007. – Ч.2 – С. 773–777.
13. Белоглазов С.М. Наводороживание стали при электрохимических процессах и его предотвращение: автореф. дис. на соиск. учен. степ. д-ра хим. наук. (02.074) / С.М. Белоглазов; Вильнюсский гос. ун-т им. В. Капсукаса. – Вильнюс, 1970. – 42 с.

**T.A. Shchegoleva, Zh.L. Glukhova, A.V. Vetchinov**

**Technique for experimental research of form change of metal plates.**

In this work the description of elaborated installation and waste experimental technique is presented for study of deformation of metal plate under single-side electrolytic hydrogen saturation.

**Keywords:** *electrolytic hydrogen saturation, hydrogen stresses, deformation of metals, experimental analysis.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет»,  
Донецк

Получено 26.10.2021

Donetsk National Technical University, Donetsk

den92kypov@mail.ru

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

---

УДК 51-74:510.22:519.6:539.3

©2021. В.Е. Болнокин, В.Н. Павлыш, С.В. Сторожев

### АЛГОРИТМ АНАЛИЗА МОДЕЛЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С НЕКОНТРАСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГЕБРЫ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ ТРЕУГОЛЬНЫХ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ

Представлено описание и результаты применения двух вариантов нечетко-множественной методики теоретического исследования моделей потери устойчивости тонкостенных изотропных цилиндрических оболочек конечной длины с обладающими разбросами значений неконтрастными физико-механическим и геометрическим параметрами при действии приложенных к краям продольных сжимающих усилий и внешнего гидростатического давления. Рассматриваемые и параллельно применяемые альтернативные подходы заключаются в использовании математического аппарата стандартной неидемпотентной арифметики нечетких треугольных чисел и идемпотентных операций арифметических вычислений, базирующихся на алгебре двухкомпонентных треугольных нечетких чисел. Рассмотрены числовые оценки результатов применения рассматриваемых подходов.

**Ключевые слова:** тонкие цилиндрические оболочки, эффекты потери устойчивости, продольное сжатие, гидростатическое давление, неконтрастные экзогенные параметры, оценки критических усилий, нечетко-множественная методика, алгебра треугольных нечетких чисел, алгебра двухкомпонентных треугольных чисел.

**Введение и цели исследования.** Проблемы исследования математических моделей потери устойчивости тонкостенных пластин и оболочек при различных видах силовых воздействий составляют один из важнейших и имеющих длительную историю изучения тематических разделов в прикладной механике деформируемого твердого тела и строительной механике [1–6]. При этом к числу ведущих факторов, обуславливающих необходимость и актуальность дальнейшей разработки подходов к синтезу и анализу моделей устойчивости тонкостенных конструкций, относится проблема учета в расчетных методиках эффектов неконтрастности исходных физико-механических и геометрических параметров рассматриваемых моделей, в том числе наличия погрешностей для экспериментальных значений параметров конструкционных материалов, разбросов для конструктивных характеристик, обусловленных технологическими допусками, отклонениями от проектных показателей при изготовлении и в режимах эксплуатации [1–6].

Как отмечалось в работах [7–14], учет перечисленных факторов неопределенности в моделях устойчивости тонкостенных конструкций может быть осуществлен на основе применения методов вероятностно-стохастического анализа [15] и методов теории нечетких множеств [16–21]. В частности, нечетко-множественные методики исследования ряда моделей устойчивости тонких стержней, изотропных цилиндрических, сферических, сфероидальных и тороидальных оболочек, а также результаты их применения в вычислительных экспериментах, представлены в работах [7–14].

Отмечается однако [11–17], что использование базирующейся на эвристическом принципе обобщения Л. Заде стандартной неидемпотентной арифметики нечетких величин в процессе расчета показателей влияния неконтрастности параметров математических моделей устойчивости тонкостенных конструкций с применением нечетко-множественного подхода, ведет к ускоренному нарастанию меры неопределенности в результатах вычислений. Соответственно, при этом в результате анализа формируются «осторожные», «пессимистические» оценки для значений вычисляемых нечетких эндогенных параметров моделей с предельно широкими прогнозируемыми разбросами и, соответственно, с рекомендациями о повышенных запасах прочности для рассматриваемых конструктивных элементов.

Анализ ряда моделей устойчивости тонких цилиндрических оболочек на основе фаззификации неконтрастных исходных параметров с переходом к их представлениям в форме нормальных трапецеидальных нечетких интервалов и применения стандартной неидемпотентной арифметики нечетких интервалов представлен в работах [7, 13, 14].

В контексте вышеизложенного, представляет интерес исследование возможностей применения при нечетко-множественном анализе факторов неопределенности для моделей деформирования тонкостенных конструкций альтернативных модифицированных версий аппарата нечетких вычислений с целью снижения уровней разбросов в значениях эндогенных параметров моделирования. К числу таких подходов принадлежит использование в расчетах арифметики треугольных нечетких чисел, базирующейся на алгебре двухкомпонентных чисел [22].

Краткая характеристика применения такого подхода при исследовании модели устойчивости тонкой сферической оболочки при действии внешнего гидростатического давления представлена в работе [23].

Целью исследований, представляемых в настоящей работе, является распространение методики использования идемпотентной арифметики треугольных нечетких чисел, базирующейся на алгебре двухкомпонентных чисел, в расчетных алгоритмах анализа моделей устойчивости цилиндрических оболочек с неконтрастными экзогенными геометрическим и физико-механическими параметрами, сопоставительный анализ применения двух версий аппарата арифметики нечетких треугольных чисел, включая сравнение результатов вычислительных экспериментов.

**1. Получение нечетко-множественных расчетных соотношений для модели устойчивости цилиндрической оболочки при действии осевых сжимающих усилий.** Модель определения критического сжимающего осевого усилия [24], приложенного к изотропной круговой тонкой цилиндрической оболочке из материала с модулем Юнга  $E$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$ , имеющей радиус  $R$ , толщину стенки  $h$  и длину  $L$ , которое в детерминистической версии модели в случае безмоментного докритического состояния для формы потери устойчивости с числом полуволн  $m$  в продольном направлении и числом волн  $n$  в окружном направлении применительно к шарнирно опертой по краям оболочке описывается выражением

$$\begin{aligned} q_{mn1}^* &= Eh [(\lambda_m/(\lambda_m^2 + n^2))^4(\lambda_m^2 + (2 + \nu)n^2) + \\ &\quad (12(1 - \nu^2))^{-1}(h/R)^2((\lambda_m^2 + n^2)^2/\lambda_m^2)] = \\ &= F_H(h, R, L, E, \nu, m, n), \lambda_m = m\pi RL^{-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

а применительно закрепленной по краям оболочке – выражением

$$\begin{aligned} q_{mn2}^* &= Eh [(2\lambda_m/(4\lambda_m^2 + n^2))^4(4\lambda_m^2 + (2 + \nu)n^2) + \\ &\quad + (12(1 - \nu^2))^{-1}(h/R)^2((4\lambda_m^2 + 2\lambda_m^2 n^2 + (3/4)n^4)/\lambda_m^2)] = \\ &= F_R(h, R, L, E, \nu, m, n). \end{aligned} \quad (2)$$

Концепция нечетко-множественного подхода к учету неопределенности, заключающейся в существовании ошибок разброса для ряда экзогенных физико-механических и геометрических параметров рассматриваемой модели, на первом этапе предполагает фазсификацию неконтрастных параметров  $h, R, E, \nu$  переход к их представлениям в виде треугольных нечетких чисел  $\tilde{h}, \tilde{R}, \tilde{E}, \tilde{\nu}$  с кортежами опорных точек и разложениями по множествам  $\alpha$ -уровня

$$\begin{aligned} \tilde{h} &= (h_1, h_2, h_3), \quad \tilde{h} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha], \\ \underline{h}_\alpha &= (1 - \alpha)h_1 + \alpha h_2, \quad \bar{h}_\alpha = \alpha h_2 + (1 - \alpha)h_3 \\ \tilde{R} &= (R_1, R_2, R_3), \quad \tilde{R} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha], \\ \underline{R}_\alpha &= (1 - \alpha)R_1 + \alpha R_2, \quad \bar{R}_\alpha = \alpha R_2 + (1 - \alpha)R_3; \\ \tilde{E} &= (E_1, E_2, E_3), \quad \tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha], \\ \underline{E}_\alpha &= (1 - \alpha)E_1 + \alpha E_2, \quad \bar{E}_\alpha = \alpha E_2 + (1 - \alpha)E_3; \\ \tilde{\nu} &= (\nu_1, \nu_2, \nu_3), \quad \tilde{\nu} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha], \\ \underline{\nu}_\alpha &= (1 - \alpha)\nu_1 + \alpha \nu_2, \quad \bar{\nu}_\alpha = \alpha \nu_2 + (1 - \alpha)\nu_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Параметр длины оболочки полагается точной величиной, задаваемой без ошибок возмущения.

Далее, с учетом свойств

$$\begin{aligned} \partial F_H(h, R, L, E, \nu, m, n)/\partial h > 0, \quad \partial F_H(h, R, L, E, \nu, m, n)/\partial R < 0, \\ \partial F_H(h, R, L, E, \nu, m, n)/\partial E > 0, \quad \partial F_H(h, R, L, E, \nu, m, n)/\partial \nu > 0, \\ \partial F_R(h, R, L, E, \nu, m, n)/\partial h > 0, \quad \partial F_R(h, R, L, E, \nu, m, n)/\partial R < 0, \\ \partial F_R(h, R, L, E, \nu, m, n)/\partial E > 0, \quad \partial F_R(h, R, L, E, \nu, m, n)/\partial \nu > 0, \end{aligned} \quad (4)$$

для представляемых треугольными нечеткими числами и описываемых на основе применения модифицированного принципа обобщения в форме разложений по множествам  $\alpha$  - срезов эндогенных параметров  $\tilde{q}_m n 1^*$ ,  $\tilde{q}_m n 2^*$

$$\tilde{q}_m n j^* = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [q_{mnj\alpha}^*, \bar{q}_{mnj\alpha}^*] \quad (5)$$

$$q_{mn1\alpha}^* = F_H(\underline{h}_\alpha, \bar{R}_\alpha, L, \underline{E}_\alpha, \underline{\nu}_\alpha, m, n), \quad \bar{q}_{mn1\alpha}^* = F_H(\bar{h}_\alpha, \underline{R}_\alpha, L, \bar{E}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha, m, n) \quad (6)$$

$$q_{mn2\alpha}^* = F_R(\underline{h}_\alpha, \bar{R}_\alpha, L, \underline{E}_\alpha, \underline{\nu}_\alpha, m, n), \quad \bar{q}_{mn2\alpha}^* = F_R(\bar{h}_\alpha, \underline{R}_\alpha, L, \bar{E}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha, m, n) \quad (7)$$

кортежи опорных значений могут быть найдены в результате стандартных арифметических нечетко-множественных вычислений с заменой в (1), (2) параметров модели  $h, R, L, E, \nu$  на  $\tilde{h}, \tilde{R}, \tilde{L}, \tilde{E}, \tilde{\nu}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{mn1}^* &= (q_{1Bn1}, q_{2mn1}, q_{3mn1}), \\ q_{1mn1} &= E_1 h_1 [(\lambda_{1m}/(\lambda_{3m}^2 + n^2))^4 (\lambda_{1m}^2 + (2 + \nu_1)n^2) + \\ &\quad + (12(1 - \nu_3^2))^{-1} (h_1/R_3)^2 ((\lambda_{1m}^2 + n^2)^2/\lambda_{3m}^2)], \\ q_{2mn1} &= E_2 h_2 [(\lambda_{2m}/(\lambda_{2m}^2 + n^2))^4 (\lambda_{2m}^2 + (2 + \nu_2)n^2) + \\ &\quad + (12(1 - \nu_2^2))^{-1} (h_2/R_2)^2 ((\lambda_{2m}^2 + n^2)^2/\lambda_{2m}^2)], \\ q_{3mn1} &= E_3 h_3 [(\lambda_{3m}/(\lambda_{1m}^2 + n^2))^4 (\lambda_{3m}^2 + (2 + \nu_3)n^2) + \\ &\quad + (12(1 - \nu_1^2))^{-1} (h_3/R_1)^2 ((\lambda_{31m}^2 + n^2)^2/\lambda_{1m}^2)]; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{mn2}^* &= (q_{1mn2}, q_{2mn2}, q_{3mn2}), \\ q_{1mn2} &= E_1 h_1 [(2\lambda_{1m}/(4\lambda_{3m}^2 + n^2))^4 (4\lambda_{1m}^2 + (2 + \nu_1)n^2) + \\ &\quad + (12(1 - \nu_3^2))^{-1} (h_1/R_3)^2 ((4\lambda_{1m}^2 + 2\lambda_{1m}^2 n^2 + (3/4)n^4)/\lambda_{3m}^2)]; \\ q_{2mn2} &= E_2 h_2 [(2\lambda_{2m}/(4\lambda_{2m}^2 + n^2))^4 (4\lambda_{2m}^2 + (2 + \nu_2)n^2) + \\ &\quad + (12(1 - \nu_2^2))^{-1} (h_2/R_2)^2 ((4\lambda_{2m}^2 + 2\lambda_{2m}^2 n^2 + (3/4)n^4)/\lambda_{2m}^2)]; \\ q_{3mn2} &= E_3 h_3 [(2\lambda_{3m}/(4\lambda_{1m}^2 + n^2))^4 (4\lambda_{3m}^2 + (2 + \nu_3)n^2) + \\ &\quad + (12(1 - \nu_1^2))^{-1} (h_3/R_1)^2 ((4\lambda_{3m}^2 + 2\lambda_{3m}^2 n^2 + (3/4)n^4)/\lambda_{1m}^2)]; \\ \lambda_{jm} &= m\pi R_j L^{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

При использовании в вычислениях  $\tilde{q}_{mn1}^*$ ,  $\tilde{q}_{mn2}^*$  правил идемпотентной арифметики, основывающейся на алгебре двухкомпонентных чисел [22], неконтрастные экзогенные параметры модели  $\tilde{h}, \tilde{R}, \tilde{E}, \tilde{\nu}$  описываются треугольными

нечеткими числами с кортежами реперных значений  $\tilde{h} = (h_1, h_2, h_3)$ ,  $\tilde{R} = (R_1, R_2, R_3)$ ,  $\tilde{E} = (E_1, E_2, E_3)$ ,  $\tilde{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ , и интерпретируются как двухкомпонентные векторы из параметрических зависимостей

$$\begin{aligned}\tilde{h} &= \{(h_1 + (h_2 - h_1)\alpha), (h_3 + (h_3 - h_2)\alpha)\} \quad \alpha \in [0, 1], \\ \tilde{R} &= \{(R_1 + (R_2 - R_1)\alpha), (R_3 + (R_3 - R_2)\alpha)\} \quad \alpha \in [0, 1], \\ \tilde{E} &= \{(E_1 + (E_2 - E_1)\alpha), (E_3 + (E_3 - E_2)\alpha)\} \quad \alpha \in [0, 1], \\ \tilde{\nu} &= \{(\nu_1 + (\nu_2 - \nu_1)\alpha), (\nu_3 + (\nu_3 - \nu_2)\alpha)\} \quad \alpha \in [0, 1].\end{aligned}\tag{10}$$

В свою очередь, идемпотентные арифметические операции для пар треугольных нечетких чисел  $\tilde{\Phi}_J = (\Phi_{J1}, \Phi_{J2}, \Phi_{J3})$ ,  $\tilde{\Phi}_Q = (\Phi_{Q1}, \Phi_{Q2}, \Phi_{Q3})$  интерпретируемых двухкомпонентными векторами параметрических зависимостей

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_J &= \{(\Phi_{J1} + (\Phi_{J2} - \Phi_{J1})\alpha), (\Phi_{J3} + (\Phi_{J2} - \Phi_{J3})\alpha)\} \quad \alpha \in [0, 1], \\ \tilde{\Phi}_Q &= \{(\Phi_{Q1} + (\Phi_{Q2} - \Phi_{Q1})\alpha), (\Phi_{Q3} + (\Phi_{Q2} - \Phi_{Q3})\alpha)\} \quad \alpha \in [0, 1],\end{aligned}\tag{11}$$

выполняются по правилу

$$\tilde{\Phi}_J * \tilde{\Phi}_Q = (\Phi_{J1} * \Phi_{Q1}, \Phi_{J2} * \Phi_{Q2}, \Phi_{J3} * \Phi_{Q3}),\tag{12}$$

где символ  $*$  соответствует произвольной операции стандартной арифметики действительных чисел. Этот результат, в свою очередь, имеет интерпретацию в виде двухкомпонентного вектора

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_J * \tilde{\Phi}_Q &= \{((\Phi_{J1} * \Phi_{Q1}) + ((\Phi_{J2} * \Phi_{Q2}) - (\Phi_{J1} * \Phi_{Q1}))\alpha), \\ &((\Phi_{J3} * \Phi_{Q3}) - ((\Phi_{J2} * \Phi_{Q2}) - (\Phi_{J3} * \Phi_{Q3}))\alpha)\}.\end{aligned}\tag{13}$$

Таким образом, результатом анализа рассматриваемой модели в варианте применения аппарата идемпотентной арифметики треугольных нечетких чисел являются представления вида

$$\tilde{q}_{mn1}^* = \{q_{1mn1} + (q_{2mn1} - q_{1mn1})\alpha, q_{3mn1} + (q_{2mn1} - q_{3mn1})\alpha\},\tag{14}$$

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{mn2}^* &= \{q_{1mn2} + (q_{2mn2} - q_{1mn2})\alpha, q_{3mn2} + (q_{2mn2} - q_{3mn2})\alpha\} \\ &\alpha \in [0, 1],\end{aligned}\tag{15}$$

в которых

$$\begin{aligned}q_{jBn1} &= E_j h_j [(\lambda_{jm}/(\lambda_{jm}^2 + n^2))^4 (\lambda_{jm}^2 + (2 + \nu_1)n^2) + \\ &+ (12(1 - \nu_j^2))^{-1} (h_j/R_j)^2 ((\lambda_{jm}^2 + n^2)^2/\lambda_{jm}^2)], \\ q_{jmn2} &= E_j h_j [(2\lambda_{jm}/(4\lambda_{jm}^2 + n^2))^4 (4\lambda_{jm}^2 + (2 + \nu_j)n^2) + \\ &+ (12(1 - \nu_j^2))^{-1} (h_j/R_j)^2 ((4\lambda_{jm}^2 + 2\lambda_{jm}^2 n^2 + (3/4)n^4)/\lambda_{jm}^2)]; \\ \lambda_{jm} &= m\pi R_j L^{-1} \quad (j = \overline{1, 3}).\end{aligned}\tag{16}$$

Соотношения (5) – (16) являются основой для вычислительного алгоритма реализации изложенных версий методики анализа рассматриваемых моделей.

**2. Нечетко-множественные расчетные соотношения для моделей устойчивости цилиндрических оболочек при нагружении сжимающими торцевыми усилиями и внешним гидростатическим давлением.** В модели следующего анализируемого типа дается описание эффектов потери устойчивости тонкостенной изотропной цилиндрической оболочки с шарнирно-опертыми краями, на которую действуют приложенные к торцевым поверхностям равномерно распределенные сжимающие усилия интенсивности  $q$  и внешнее гидростатическое давление  $p$ . Оболочка находится в условиях безмоментного начального состояния, имеет радиус  $R$ , длину  $l$ , толщину  $h$ , изгибную жесткость  $D$ , изготовлена из материала с модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ . В работе [24] Для случая осесимметричных форм потери устойчивости рассматриваемой оболочки с числом полуволн  $m$  в продольном направлении под действием осевых сжимающих нагрузжений величина критического осевого усилия [24] описывается соотношением

$$\begin{aligned} q_{m1}^{**} &= F_{m1}(E, \nu, R, h, l, m) = \\ &= E[h^3(m\pi/l)^2(12(1-\nu^2))^{-1} + hR^{-2}(m\pi/l)^{-2}]. \end{aligned} \quad (17)$$

Получаемое в рамках модели больших перемещений критическое значение внешнего гидростатического давления для цилиндрической оболочки с введенными выше характеристиками имеет представление [25]

$$\begin{aligned} p_2^* &= F_2(E, \nu, R, h, l, k) = \\ &= (2/3)(E(1-\nu^2)^{-1})(h/R)^3(4k(\pi R/(2l))^2 + 2^{1/2} + 1), \end{aligned} \quad (18)$$

в котором  $k$  – параметр граничных условий на краях оболочки, принимающий значение  $k = 0.25$  для случая шарнирно опертых краев и значение  $k = 0.5$  для случая жестко закрепленных краев.

Нахождение нечетко-множественных представлений для величин критических усилий на основе соотношений (17)–(19) в предположении о неконтрастности параметров  $h$ ,  $R$ ,  $E$ ,  $\nu$  для модели (17) и параметров  $h$ ,  $l$ ,  $E$ ,  $\nu$  для модели (18) также реализуется путем введения описаний неопределенных параметров нормальными треугольными нечеткими числами вида (3) и последующего применения двух версий аппарата нечетких вычислений. При этом учитываются и получаемые оценки

$$\begin{aligned} \partial F_{m1}(E, \nu, R, h, l, m)/\partial E &> 0, & \partial F_{m1}(E, \nu, R, h, l, m)/\partial h &> 0, \\ \partial F_{m1}(E, \nu, R, h, l, m)/\partial R &< 0, & \partial F_{m1}(E, \nu, R, h, l, m)/\partial \nu &> 0; \\ \partial F_2(E, \nu, R, h, l, k)/\partial E &> 0, & \partial F_2(E, \nu, R, h, l, k)/\partial h &> 0, \\ \partial F_2(E, \nu, R, h, l, k)/\partial \nu &> 0, & \partial F_2(E, \nu, R, h, l, k)/\partial l &< 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Соответственно, в рамках применения стандартной модификации неидемпотентной арифметики нечетких треугольных чисел можно получить:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{m1}^{**} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{q}_{m1\alpha}^{**}, \bar{q}_{m1\alpha}^{**}], \\ \underline{q}_{m1\alpha}^{**} &= F_{m1}(\underline{E}_\alpha, \underline{\nu}_\alpha, \bar{R}_\alpha, \underline{h}_\alpha, l, m), \quad \bar{q}_{m1\alpha}^{**} = F_{m1}(\bar{E}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha, \underline{R}_\alpha, \bar{h}_\alpha, l, m); \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_2^* &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{p}_{2\alpha}^*, \bar{p}_{2\alpha}^*], \\ \underline{p}_{2\alpha}^* &= F_2(\underline{E}_\alpha, \underline{\nu}_\alpha, R, \underline{h}_\alpha, \bar{l}_\alpha, k), \quad \bar{p}_{2\alpha}^* = F_2(\bar{E}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha, R, \bar{h}_\alpha, \underline{l}_\alpha, k); \end{aligned} \quad (21)$$

или

$$\begin{aligned} q_{m1}^{**} &= (q_{1m1}^{**}, q_{2m1}^{**}, q_{3m1}^{**}), \\ q_{1m1}^{**} &= E_1[h_1^3(m\pi/l)^2(12(1-\nu_3^2))^{-1} + h_1R_3^{-2}(m\pi/l)^{-2}], \\ q_{2m1}^{**} &= E_2[h_2^3(m\pi/l)^2(12(1-\nu_2^2))^{-1} + h_2R_2^{-2}(m\pi/l)^{-2}], \\ q_{3m1}^{**} &= E_3[h_3^3(m\pi/l)^2(12(1-\nu_1^2))^{-1} + h_3R_1^{-2}(m\pi/l)^{-2}]; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} p_2^* &= (p_{12}^*, p_{22}^*, p_{32}^*), \\ p_{12}^* &= (2/3)(E_1(1-\nu_3^2)^{-1})(h_1/R)^3(4k(\pi R/(2l_3))^2 + 2^{1/2} + 1), \\ p_{22}^* &= (2/3)(E_2(1-\nu_2^2)^{-1})(h_2/R)^3(4k(\pi R/(2l_2))^2 + 2^{1/2} + 1), \\ p_{32}^* &= (2/3)(E_3(1-\nu_1^2)^{-1})(h_3/R)^3(4k(\pi R/(2l_1))^2 + 2^{1/2} + 1). \end{aligned} \quad (23)$$

Результатом анализа рассматриваемой модели, представляемой соотношениями (17), (18) в варианте применения аппарата идемпотентной арифметики треугольных нечетких чисел, соответственно являются представления вида

$$\tilde{q}_{m1}^{**} = \{q_{1m1}^{**} + (q_{2m1}^{**} - q_{1m1}^{**})\alpha, q_{3m1}^{**} + (q_{2m1}^{**} - q_{3m1}^{**})\alpha\}, \quad (24)$$

$$p_2^* = \{p_{12}^* + (p_{22}^* - p_{12}^*)\alpha, p_{32}^* + (p_{22}^* - p_{32}^*)\alpha\}, \quad (25)$$

где

$$q_{jm1}^{**} = E_j[h_j^3(m\pi/l)^2(12(1-\nu_j^2))^{-1} + h_jR_j^{-2}(m\pi/l)^{-2}], \quad (26)$$

$$p_{j2}^* = (2/3)(E_j(1-\nu_j^2)^{-1})(h_j/R)^3(4k(\pi R/(2l_j))^2 + 2^{1/2} + 1). \quad (27)$$

Соотношения (20) – (27) являются основой для вычислительного алгоритма реализации вышеописанных методик.



**3. Результаты и сопоставительный анализ данных вычислительных экспериментов.** С применением разработанного для численной реализации вышеописанных методик программного приложения выполнен ряд вычислительных экспериментов, в которых рассматривается тонкая изотропная цилиндрическая оболочка с неконтрастными параметрами, интерпретируемыми как нечеткие треугольные числа. Параметры для расчетных моделей (5) – (16), (20), (22), (24), (26) заданы в виде

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= (190c_*, 198c_*, 208c_*), \quad \tilde{\nu} = (0.3, 0.31, 0.315), \\ \tilde{R} &= (1.45l_*, 1.50l_*, 1.531l_*), \quad \tilde{h} = (0.0028l_*, 0.003l_*, 0.0031l_*), \\ l &= 10.0l_*, \quad c_* = 1[\text{ГПа}], \quad l_* = 1 [\text{м}]; \end{aligned} \quad (28)$$

параметры для расчетной модели (21), (23), (25), (27) имеют значения

$$\begin{aligned} R &= 1.5l_*, \quad \tilde{E} = (190c_*, 198c_*, 208c_*), \quad \tilde{\nu} = (0.3, 0.31, 0.315), \\ \tilde{l} &= (9.95l_*, 10.0l_*, 10.02l_*), \quad \tilde{h} = (0.0028l_*, 0.003l_*, 0.0031l_*). \end{aligned} \quad (29)$$

Для заданных в указанном виде неконтрастных экзогенных параметров рассматриваемых моделей, а также набора значений детерминированных характеристик граничных условий и форм потери устойчивости рассматриваемой оболочечной конструкции, реализован цикл расчетов профилей функций принадлежности для экзогенных параметров критических усилий, определяемых с применением вышеописанных альтернативных вариантов аппарата нечетко-множественных вычислений. Априорным свойством представляемых результатов является совпадение модальных значений для треугольных нечетких чисел, описывающих эндогенные параметры критических усилий и получаемых как при использовании стандартного аппарата арифметики нечетких треугольных чисел, так и версии идемпотентных арифметических операций.

Результаты вычислительных экспериментов для модели (1) с расчетными соотношениями (5) – (16) в случае варьирования целочисленных параметров формы потери устойчивости приведены в таблице 1.

На основе их анализа можно сделать заключение о том, для ряда сочетаний параметров формы (в частности, для  $n = 0$ ,  $m = \overline{1,4}$ ;  $n = 1$ ,  $m = \overline{2,3}$ ; и т.д.) оценки разбросов значений критических усилий в пределах точности вычислений не отличаются при использовании обоих альтернативных вариантов аппарата нечетко-множественных вычислений. В доминирующем числе случаев интервалы разбросов, получаемые в случае применения версии идемпотентных арифметических операций, являются более узкими в сравнении с интервалами, определяемыми с применением стандартной арифметики треугольных нечетких чисел.

Как следует из таблицы, низшее значение критического усилия в рассматриваемых случаях отвечает форме потери устойчивости  $n=3$ ,  $m=1$ . В этом случае применение алгебры двухкомпонентных треугольных нечетких чисел влечет

Таблица 1.

Характеристики нечетко-множественных эндогенных параметров для модели (1)

Параметры формы		Модальное значение, $10^{-5} \text{ Па}$	Разбросы значений критического усилия, $10^{-5} \text{ Па}$			
			Стандартные операции		Идемпотентные операции	
m	n	$q_{2mn1}$	$q_{1mn1}$	$q_{3mn1}$	$q_{1mn1}$	$q_{3mn1}$
1	0	26748.8	25637.5	27872.4	25637.5	27872.4
2	0	6687.20	6409.38	6968.0	6409.38	6968.00
3	0	2972.09	2848.62	3096.94	2972.09	2848.62
4	0	1671.81	1602.35	1742.04	1602.35	1742.04
1	1	332.557	270.159	382.253	270.20	382.251
2	1	1179.06	1022.87	1301.95	1022.87	1301.95
3	1	1264.46	1143.65	1362.11	1143.65	1362.11
4	1	1023.08	946.204	1087.90	946.205	1087.90
1	2	8.89825	7.01536	10.4284	7.03133	10.4067
2	2	83.1946	67.5926	95.6302	67.5979	95.6228
3	2	205.984	173.285	231.735	173.288	231.730
4	2	294.799	255.741	325.529	255.744	325.525
1	3	1.68987	1.33211	2.00542	1.40857	1.90196
2	3	10.8682	8.64108	12.6704	8.66287	12.6405
3	3	37.0818	30.1239	42.6314	30.1357	42.6148
4	3	73.6108	61.2161	83.4036	61.2246	83.3914
1	4	27.5310	21.8563	32.9039	24.2253	29.7052
2	4	28.8396	22.7516	33.9843	23.3902	33.1148
3	4	91.6321	73.1823	106.573	73.5022	106.132
4	4	21.0196	17.0699	24.1756	17.0909	24.1461

уменьшение ширины интервала прогнозируемых разбросов на 27%. Профили функций принадлежности для нечетко-множественных характеристик критических усилий  $\tilde{q}_{131}^*$  применительно к этому случаю, рассчитываемые с применением стандартных и идемпотентных нечетко-множественных арифметических операций, соответственно приведены на рисунках 1, 2.

Для случая оболочки с закрепленными краями – модель (2) с расчетными соотношениями нечетко-множественных обобщений (5), (7), (9), (15), (16), низшее значение критического усилия в рассматриваемых случаях отвечает форме потери устойчивости  $n=4$ ,  $m=1$ , и применение в этом случае алгебры двухкомпонентных треугольных нечетких чисел приводит к уменьшению ширины интервала прогнозируемых разбросов на 26%. Модальное значение  $\tilde{q}_{142}^*$  в данном случае составляет  $4.146 \cdot 10^5$  Па. Соответственно для этой формы потери устойчивости на рисунке 3 и рисунке 4 представлены профили функций принадлежности для нечетко-множественных характеристик критических усилий  $\tilde{q}_{142}^*$ , рассчитанные в рамках применения стандартных и идемпотентных нечетко-множественных арифметических операций.

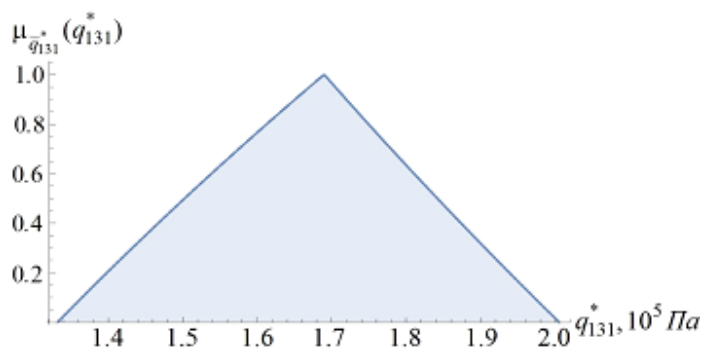


Рис. 1. Функция принадлежности для  $\tilde{q}_{131}^*$ , получаемая с использованием стандартной арифметики нечетких треугольных чисел

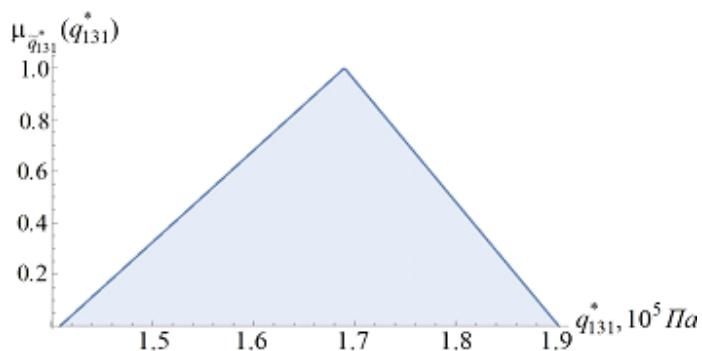


Рис. 2. Функция принадлежности для  $\tilde{q}_{131}^*$ , получаемая с использованием идемпотентной арифметики нечетких треугольных чисел

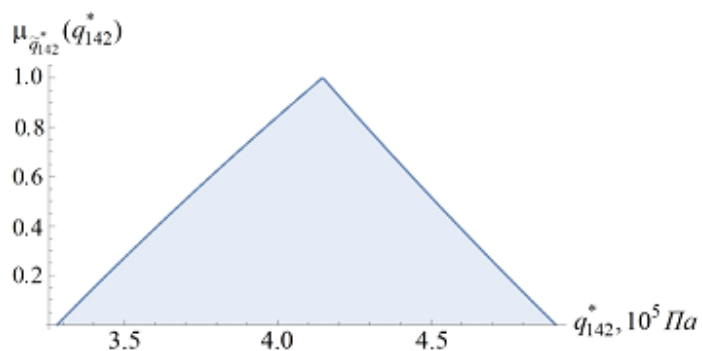


Рис. 3. Функция принадлежности для  $\tilde{q}_{142}^*$ , получаемая с использованием стандартной арифметики нечетких треугольных чисел

Применительно к модели устойчивости цилиндрической оболочки с неконтрастными параметрами (29), находящейся под действием внешнего гидростатического давления, описываемые расчетными соотношениями (21), (23), (25), (27),

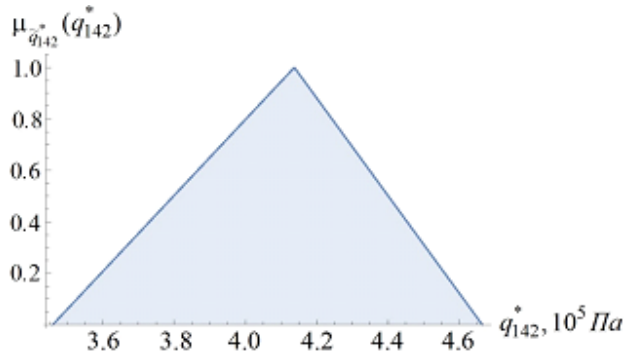


Рис. 4. Функция принадлежности для  $\tilde{q}_{142}^*$ , получаемая с использованием идемпотентной арифметики нечетких треугольных чисел

нечетко-множественные характеристики интенсивности критического внешнего гидростатического давления при задании краевого условия шарнирного опирания краев имеют визуально идентичные функции принадлежности при использовании в расчетах стандартной либо идемпотентной арифметики треугольных нечетких чисел, а их изображение дано на рисунке 5. Аналогичная картина сходных профилей функций принадлежности представлена на рисунке 6 для случая задания на краях оболочки граничных условий жесткого закрепления. Для обо-

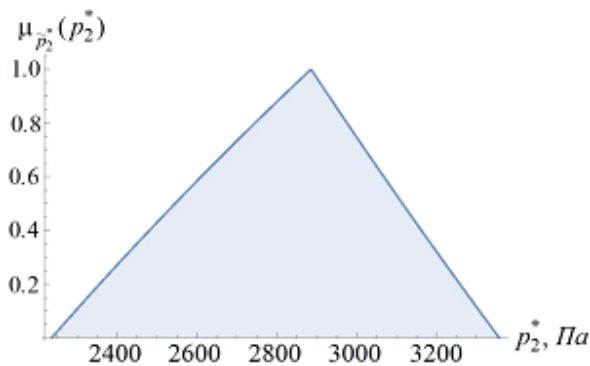


Рис. 5. Функция принадлежности  $\tilde{p}_2^*$  для оболочки с шарнирно опертыми краями.

лочки с опертыми краями модальное значение  $\tilde{p}_2^*$  составляет  $p_{22}^* = 2885.31 \text{ Па}$ , а для оболочки с закрепленными краями  $p_{22}^* = 2950.17 \text{ Па}$ .

Уменьшение ширины интервалов прогнозируемых разбросов  $\tilde{p}_2^*$  при применении в расчетах алгебры двухкомпонентных треугольных нечетких чисел в сравнении с использованием стандартной алгебры треугольных нечетких чисел, составляет в рассматриваемом случае лишь 0.3% для оболочки с шарнирно опертыми краями и менее 0.1% – для оболочки с закрепленными краями.

Таким образом, в случае модели потери устойчивости под действием гидростатического давления устанавливаемые в численных экспериментах коррекции

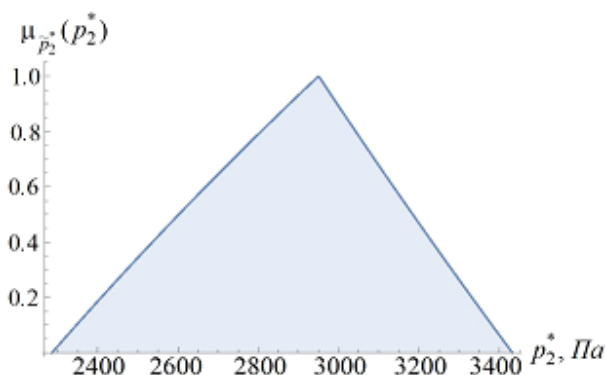


Рис. 6. Функция принадлежности  $\tilde{p}_2^*$  для оболочки с закрепленными краями.

расчетных результатов, обусловленные применением алгебры двухкомпонентных треугольных нечетких чисел вместо стандартной неидемпотентной арифметики треугольных нечетких чисел, крайне малы.

**Заключение.** В результате проведенных исследований дано описание двух вариантов нечетко-множественной методики анализа некоторых моделей потери устойчивости изотропных тонкостенных цилиндрических упругих оболочек с неконтрастными физико-механическим и геометрическими параметрами, неопределенность которых обусловлена погрешностями экспериментальных замеров, технологическими допусками, отклонениями от проектных показателей при изготовлении и эксплуатации. Представленные альтернативные подходы связаны с применением в расчетах стандартной арифметики треугольных нечетких чисел и арифметики, основанной на алгебре двухкомпонентных чисел. Получены теоретические расчетные соотношения, описывающие нечетко-множественные эндогенные параметры критических усилий применительно к ряду рассматриваемых моделей при различных вариантах граничных условий для рассматриваемых конструкций, и осуществлены вычислительные эксперименты, позволяющие дать сопоставительные оценки для численных результатах применения вышеуказанных подходов.

1. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1976. – 984 с.
2. *Алфутов Н.А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н.А. Алфутов. – М.: Наука, 1978. – 312 с.
3. *Григолюк Э.И.* Устойчивость оболочек / Э.И. Григолюк, В.В. Кабанов. – М.: Наука, 1978. – 359 с.
4. *Croll J.G.A.* Nonlinear Dynamics / J.G.A. Croll // Nonlinear Dynamics. – Vol. 43. – 2006. – P. 17–28.
5. *Греков В.Ф.* Об устойчивости тонкостенных цилиндров / Греков В.Ф., Пьянков А.А., Тодчук В.А. // Компрессорное и энергетическое машиностроение. – 2013. – №3(32). – С. 10–12.
6. *Савельев Л.М.* Устойчивость конструкций. Конспект лекций [Электронный ресурс] // – Самара: СГАУ, 2013. – 43 с. Режим доступа: <http://repo.ssau.ru/bitstream/Uchebnye-posobi>

ya/Ustoichivost-konstrukcii-Elektronnyi-resurs-elektron-konspekt-lekcii-napravlenie-15160068 – Priklad-mehanika-magist-progr-Prochnost-konstrukcii-letat-apparatov.pdf. – (Дата обращения 01.10.2021).

7. *Мутин Д.И.* Учет разброса значений экзогенных параметров в модели устойчивости тонкой цилиндрической оболочки при равномерном осевом сжатии / Д.И. Мутин, С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // Донецкие чтения 2020: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы V Международной научной конференции (Донецк, 17-18 ноября 2020 г.). – Том 1: Физико-математические и технические науки. Часть 1. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2020. – С. 77–79.
8. *Сторожев С.В.* Методы теории нечетких множеств в задачах устойчивости тонкостенных конструкций с неопределенными параметрами / С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела. Материалы IX Международного научного симпозиума (Тверь, 15-17 декабря 2020 г.). – Тверь: Тверской государственный университет, 2021. – С. 88–92.
9. *Павлыш В.Н.* Нечетко-множественный анализ математической модели устойчивости тороидальных оболочек / Павлыш В.Н., С.В. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2021. – № 1(74) – С. 65–73.
10. *Павлыш В.Н.* Исследование нечетких моделей устойчивости и резонансных колебаний замкнутых сферических и эллипсоидальных оболочек / Павлыш В.Н., С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2020. – № 3(72) – С. 32–42.
11. *Павлыш В.Н.* Влияние разбросов значений исходных параметров в моделях изгибных форм потери устойчивости сжимаемых прямых стержней: нечетко-множественный подход / Павлыш В.Н., С.В. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2020. – № 3(72) – С. 43–56.
12. *Павлыш В.Н.* Исследование нечетких моделей устойчивости и резонансных колебаний замкнутых сферических и эллипсоидальных оболочек / Павлыш В.Н., С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2020. – № 3(72) – С. 32–42.
13. *Выскуп В.Г.* Оценки влияния разброса параметров в прикладных моделях устойчивости цилиндрических оболочек / В.Г. Выскуп, Д.И. Мутин, С.В. Сторожев, Зюонг Минь Хай // Механика твердого тела. – 2020. – Вып. 50. – С. 133–144.
14. *Павлыш В.Н.* Математическое моделирование в задачах устойчивости на основе теории нечетко-множественного анализа / Павлыш В.Н., С.В. Сторожев // Проблемы искусственного интеллекта. Раздел 2. Математика. – 2021. – №2(21) – С. 44–51.
15. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. / В.А. Ломакин. – М.: ЛЕНАНД, 2014. – 144 с.
16. *Дилигенский Н.В.* Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Н.В. Дилигенский, Л.Г. Дымова, П.В. Севастьянов. – М.: Из-во Машиностроение – 1, 2004. – 397 с.
17. *Нгуен Куок Ши* Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.
18. *Bede B.* Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic / B.Bede. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. – 276 p.
19. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
20. *Ban A.I.* Trapezoidal approximation and Aggregation / A.I. Ban, L.C. Coroianu, P. Grzegorzewski // Fuzzy Sets Syst. – 2011. – Vol. 177. – P. 45–59.
21. *Grzegorzewski P.* Trapezoidal approximations of fuzzy numbers / P. Grzegorzewski, E. Mrrowka // Fuzzy Sets Syst. – 2005. – Vol. 153. – P. 115–135.
22. *Шевляков А.О.* Алгебраические операции с нечеткими треугольными числами с исполь-

- зованием алгебры двухкомпонентных чисел / А.О. Шевляков // Вестник ВГУ, Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2017. – №1. – С. 149–153.
23. Павлыш В.Н. Сопоставление результатов применения неидемпотентной арифметики и арифметики двухкомпонентных нечетких треугольных чисел для учета неопределенности в модели устойчивости тонких сферических оболочек / Павлыш В.Н., С.В. Сторожев // Донецкие чтения 2021: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы VI Международной научной конференции (Донецк, 26–27 октября 2021г.) – Том 1: Механико-математические, компьютерные и химические науки, управление. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2021. – С. 60–63.
24. Меньшенин А.А. Об устойчивости тонкостенной цилиндрической оболочки с круговыми вырезами с ребрами жесткости при ее осевом сжатии [Электронный ресурс] / А.А. Меньшенин // Научный электронный архив академии естествознания. Режим доступа: <http://econf.rae.ru/article/6968> – (Дата обращения 07.10.2020).
25. Ванько В.И. Цилиндрическая оболочка под внешним давлением: неклассическое решение задачи о больших перемещениях механика деформируемого твердого тела / В.И. Ванько // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – №4(4). – С. 1413–1414.

**V.E. Bolnokin, V.N. Pavlysh, S.V. Storozhev**

**Algorithm for the analysis of stability models of cylindrical shells with non-contrast parameters based on the use of the algebra of two-component triangular fuzzy numbers.**

A description and results of application of two variants of a fuzzy-set methodology for theoretical study of models of buckling of thin-walled isotropic cylindrical shells of finite length with non-contrasting physical-mechanical and geometric parameters with scattering error values under the action of longitudinal compressive forces applied to the edges and external hydrostatic pressure are presented. The alternative approaches considered and applied in parallel are to use the mathematical apparatus of the standard non idempotent arithmetic of fuzzy triangular numbers and idempotent arithmetic operations based on the algebra of two-component triangular fuzzy numbers. Numerical estimates of the results of applying the considered approaches are considered.

**Keywords:** *thin cylindrical shells, buckling effects, longitudinal compression, hydrostatic pressure, non-contrast exogenous parameters, estimates of critical efforts, fuzzy-multiple technique, algebra of triangular fuzzy numbers, algebra of two-component triangular numbers.*

ФГБУН “Ин-т машиноведения им. А.А. Благонравова РАН”,  
Москва  
ГОУ ВПО “Донецкий национальный технический университет”,  
Донецк  
ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства  
и архитектуры”, Макеевка

Получено 01.11.2021

*Mechanical Engineering Research Institute of the Russian  
Academy of Sciences, Moscow  
Donetsk National Technical University, Donetsk  
Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture,  
Makeevka*

*s.v.storozhev@donnasa.ru*

## ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

---

УДК УДК 622.831, 622.23.02

©2021. Ф.М. Голубев, Л.А. Иванова

### МЕТОДИКА ОБСЛЕДОВАНИЯ ЗДАНИЙ В ЗОНАХ ВЛИЯНИЯ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ВЫЗВАННЫХ ПОДРАБОТКОЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ЛИКВИДАЦИЕЙ УГОЛЬНЫХ ШАХТ

В настоящей статье описан механизм деформационных процессов, проявляющихся на земной поверхности при отработке горных выработок и затоплении угольных шахт в Центральном районе Донбасса. Разработана методика определения мест проявления наиболее опасных деформаций и предложена методика проведения обследований зданий в зонах влияния сосредоточенных деформаций земной поверхности, которая может быть использована при проведении обследований зданий при их подработке и в условиях ликвидации шахт.

*Ключевые слова:* сдвигения земной поверхности, затопление горных выработок, ликвидация шахт, сохранность зданий, образование уступа.

**Введение.** Влияние горных работ на подрабатываемые здания в Центральном районе Донбасса имеет свои специфические особенности. При отработке свиты крутопадающих пластов угля в Центральном районе Донбасса (ЦРД) на земной поверхности проявляются сосредоточенные деформации в виде уступов, вызывающих существенные повреждения объектов поверхности. Практика обследования зданий и сооружений показывает, что сдвигения и деформации земной поверхности от активизации геомеханических процессов при затоплении горных выработок ликвидированных шахт в Центральном районе Донбасса также носят сосредоточенный характер, а проявление уступообразования происходит в тех же местах, где они были зафиксированы при подработке. Актуальность работы обусловлена необходимостью фиксации повреждений конструкций в зонах сосредоточенных деформаций для своевременной разработки локальных мер защиты зданий и других объектов поверхности, для обеспечения их безопасной эксплуатации после ликвидации шахты. Основным вопросом на начальном этапе такой работы является правильный выбор обследуемых объектов, которые должны располагаться в районах, наиболее подверженных влиянию сдвижений земной поверхности.

**1. Выбор объектов обследования.** Исходными материалами для проведения выбора обследуемых объектов, согласно [1, 2], являются данные о кон-



структивной характеристике обследуемых зданий и сооружений, данные о месте расположения объектов на плане поверхности, а также планы горных работ шахты, в пределы отвода которой попадает рассматриваемый район города, геологическая карта района с выходами пластов на поверхность. Как показывает практика, в пределах ЦРД где пласты обрабатываются свитами, одно здание могут пересекать два и более уступа. Пример зафиксированных уступов в городе Горловка приведен на рисунке 1 .

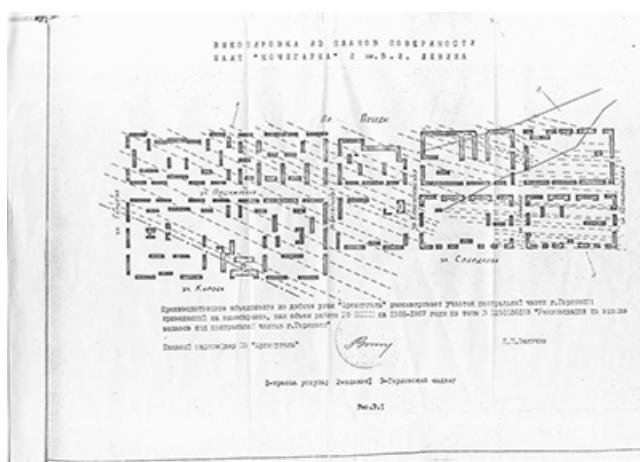


Рис. 1. Выкопировка с плана поверхности города Горловки с нанесенными трассами уступов

Данные о расположении обследуемых зданий на плане поверхности включают: данные о наличии трасс уступов в основании зданий, установленных по ранее проведенным инструментальным наблюдениям за деформациями земной поверхности, или по характерным повреждениям конструкций при предыдущих обследованиях зданий; наличие выходов под наносы угольных пластов в основании зданий, старых горных выработок, имеющих выход на дневную поверхность возле места расположения зданий (в радиусе до 20 м от шурфа), наличие зоны влияния тектонических нарушений (100 - 150 м от выхода под наносы тектонического нарушения). Определение ожидаемой высоты уступов производится согласно [3] по следующим формулам

$$h = a |i_z| l \cdot \text{Sin} \alpha \leq 0.3 \eta_m, \quad (1)$$

$$a = \frac{1}{1.69 - 0.02\alpha}, \quad (2)$$

где  $I_z$  – максимальная величина ожидаемого или вероятного наклона в месте прогнозирования уступа;  $\alpha$  – угол падения пласта (градус);  $\eta_m$  – максимальное ожидаемое оседание земной поверхности;  $a$  – эмпирический коэффициент вычисляемый по формуле (2);  $l$  – расстояние между уступами, которое следует определять из результатов натурных наблюдений или принимать равным 30 м в

районе залегания углей марки Д, ДГ, Г; равным 20 м в районе залегания углей марки Ж, К, ОС, Т; равным 15 м – в районе залегания антрацитов.

Также при выборе зданий для обследования следует учитывать расположение зон максимальных деформаций определяемых согласно [3, 4] (рис. 2). Стоит отметить, что при затоплении, зоны максимальных деформаций могут несколько смещаться относительно их расположения при подработке за счет масштабного эффекта.



Рис. 2. Пример определения зон максимальных деформаций при затоплении горных выработок шахты «Кочегарка»

В связи с тем, что большинство городов ДНР были подработаны горными работами по более чем пяти пластам, рельеф местности за последние 30 лет существенно изменился. Данный факт делает не актуальным использование планов земной поверхности составленных до распада СССР, так как они не позволяют определить прогнозируемые деформации с необходимой точностью. По этой причине, исходные данные для построения цифровой модели земной поверхности (рис. 3) извлекаются из актуальных космических снимков. В процессе подготовки исходных данных производится построение цифровых моделей каждого из отработанных пластов в пределах исследуемого участка (рис. 4). Качество моделей напрямую зависит от плотности точек сетки, по которой модель будет построена. Исходные данные для построения цифровых моделей пластов берутся из планов горных работ.

**2. Методика и критерии обследования.** Обследование здания заключается в визуальном осмотре с фиксацией всех имеющихся дефектов и повреждений конструкций на зарисовках фасадов здания и фотографической фиксацией фасадов и мест повреждений конструкций здания, а также в проведении инструментальных замеров (ширина раскрытия трещин, отклонение стен и цоколя в вертикальной и горизонтальной плоскости и др.). Обследование здания начинают с главного фасада. На зарисовку фасада наносятся все имеющиеся трещины с указанием их раскрытия и следы заделанных трещин с указанием материала

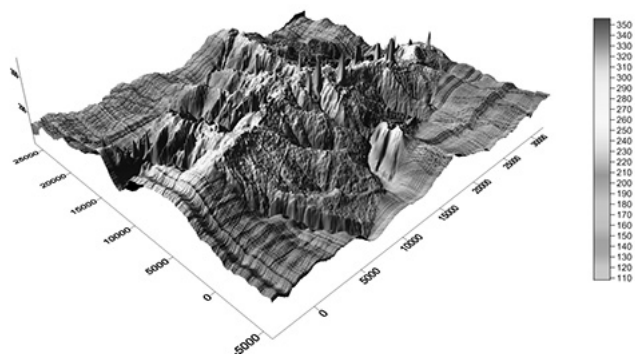


Рис. 3. Пример определения зон максимальных деформаций при затоплении горных выработок шахты «Кочегарка»

заделки и величины нового раскрытия трещины (если оно имеется). Отмечается место изгиба цоколя, срез кладки под опорными частями перемычек, перекося оконных и дверных проемов, изгиб (прогиб) оконных перемычек и поясов кладки под окнами (при наличии влияния сосредоточенных деформаций). Также проводится обследование правого, дворового и левого фасадов.

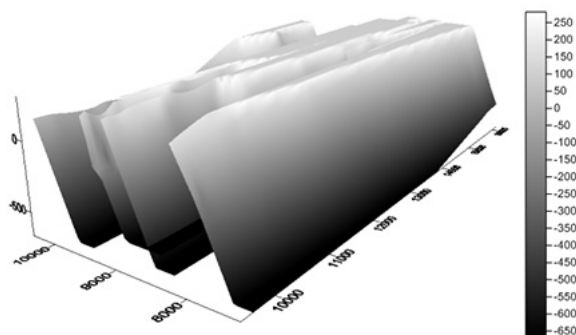


Рис. 4. Пример подготовки моделей угольных пластов для расчета деформаций земной поверхности при затоплении горных выработок и подработке земной поверхности

Данные о конструктивной характеристике здания включают: назначение (жилой дом, здание общественного назначения), этажность, год строительства, конфигурация (простой, усложненной, сложной формы в плане - прямоугольное, Г

- образное, П – образное и др.), размеры в плане (длина, ширина), высота, наличие подвала (под всем или под частью здания в плане), размеры и высота подвала, строительный объем здания, подвала, конструктивная схема (бескаркасное, каркасное, для каркасных зданий – количество и величина пролетов, шаг колонн каркаса), количество квартир и подъездов (для жилых домов). Описывается материал основных конструкций зданий: фундаментов, стен, перекрытий, каркаса (для каркасных зданий), лестничных площадок и маршей, крыши (форма двухскатная, многоскатная, плоская и др.) и кровли (шифер, черепица, рулонное покрытие и др.). Отмечается наличие конструктивных мер защиты от влияния горных работ (разрезка зданий деформационными швами на отсеки, наличие фундаментных, цокольных и поэтажных поясов и др.). По выявленным местам влияния сосредоточенных деформаций в стенах и по цоколию на фасадах здания на плане здания устанавливается трасса уступа (соединяются линией отмеченные места перегибов цоколя и перекосов оконных и дверных проемов по фасадам) и сверяется с планом поверхности, где отмечены возможные расположения трасс уступов. Как правило, трассы уступов формируются по линиям параллельным выходам под наносы угольных пластов, расстояния между трассами уступов до 20-30 м, поэтому на протяженных зданиях возможно проявление трасс 2-3 уступов. По выявленным местам трасс уступов отмечают зону влияния сосредоточенных деформаций (трещины в стенах сосредоточенные в одном месте), которая, как правило, составляет 5-10 м, иногда до 15-20 м, и в этой выявленной зоне проводят обследования внутренних помещений, в том числе подвала, лестничных клеток подъездов и квартир. Фотографическую фиксацию проводят после зарисовки фасада. Фотографируется весь фасад, или частями, если не помещается в кадр, также фиксируются отдельные участки стен, цоколя, карнизов с максимальными повреждениями, осадочные и деформационные швы. Съемка здания, как и визуальное обследование, проводится начиная с главного фасада в определенном направлении (слева направо или наоборот).

На рисунках 5, 6, показаны характерные повреждения конструкций кирпичных зданий.

Для обеспечения сохранности зданий, подвергшихся влиянию деформаций подобного рода необходимо применение мер защиты, которые назначаются по результатам обследования. К наиболее распространенным из них относятся: ремонт с расшивкой и заделкой трещин в наружных стенах, заделка трещин полимерцементным раствором, усиление участков стен в зонах максимальных трещин армированной штукатуркой, усиление перекошенных оконных проемов металлической рамой, усиление стен металлическими поясами и др. При этом рекомендуется поэтапное применение мер защиты. Очередность применения мер защиты устанавливается по результатам инструментальных наблюдений и визуальных обследований перечисленных зданий в рамках проведения мониторинга деформаций земной поверхности и состояния объектов поверхности. Особое внимание при выборе мер защиты уделяется состоянию стальных марок.



Рис. 5. Повреждение участка стены главного фасада жилого дома по ул. Первомайской, 31 в г. Горловка в зоне влияния сосредоточенных деформаций



Рис. 6. Повреждение участка стены главного фасада жилого дома по ул. Стожка, 69 в г. Горловка в зоне влияния сосредоточенных деформаций

**Выводы.** По данным выполненных исследований можно сделать следующие выводы: 1. Разработана методика проведения обследования здания в зонах влияния максимальных и сосредоточенных деформаций земной поверхности, которая может быть использована при обследовании подработанных зданий и на горных отводах ликвидированных шахт.

2. Характерные повреждения зданий в зонах влияния сосредоточенных деформаций представляют существенную угрозу для сохранения целостности жилого фонда городов и поселков ЦРД. Это подчеркивает необходимость своевременного назначения и применения мер защиты, что возможно исключительно при наличии постоянного мониторинга за состоянием объектов поверхности.

1. Инструкция по наблюдениям за сдвижением горных пород, земной поверхности и подрабатываемыми сооружениями на угольных и сланцевых месторождениях. – Утв. Минуглепром СССР 30.12.87. – М.: Недра, 1989. – 96 с.
2. Методические указания по наблюдениям за сдвижением горных пород и за подрабатываемыми сооружениями. – Л.: ВНИМИ, 1987. – 183 с.
3. ГСТУ 101.00159226.001-2003 Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом / Введ. 01.01.04. – К.: Мінпаливенерго України, 2004. – 127 с.
4. Инструкция по наблюдениям за сдвижением горных пород, земной поверхности и подрабатываемыми объектами на угольных и сланцевых месторождениях – Утв. МУП СССР 30.12.87. – М.: Недра, 1989. – 17 с.
5. Гавриленко Ю.Н. Техногенные последствия закрытия угольных шахт Украины / Ю.Н. Гавриленко, В.Н. Ермаков. – Донецк: НОРД-ПРЕСС, 2004. – 631 с.

**F.M. Golubev, L.A. Ivanova**

**Methods for inspecting buildings in zones of influence of concentrated deformations of the earth's surface caused by underworking the earth's surface and the flooding of mine workings.**

This article describes the mechanism of deformation processes that appear on the earth's surface during mining and flooding of coal mines in the Central region of Donbass. A method for determining the places of manifestation of the most dangerous deformations has been developed and a method has been proposed for conducting surveys of buildings in the zones of influence of concentrated deformations of the earth's surface, which can be used when conducting surveys of buildings during their part-time work and in conditions of mine liquidation.

**Keywords:** *displacement of the earth's surface, flooding of mine workings, liquidation of mines, preservation of buildings, formation of a ledge.*

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ), Донецк

Получено 27.10.2021

Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying (RANIMI), Donetsk

*den92kytepov@mail.ru*

УДК 622.831.322:63

©2021. А.Г. Радченко, Н.Н. Киселев, С.М. Федотов, Т.А. Решетняк, А.А. Радченко

## НОВЫЕ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ ВЫБРОСООПАСНЫХ ЗОН В УГОЛЬНЫХ ПЛАСТАХ НА РЕГИОНАЛЬНОМ И ТЕКУЩЕМ УРОВНЯХ

В статье рассмотрены физико-механическая, физико-химическая и геомехано-газотермодинамическая модели формирования выбросоопасных зон в угольном массиве. Предложена рабочая гипотеза о существовании тепловых волн разных уровней и масштабов впереди горных выработок, проводимых на газоносных угольных пластах.

**Ключевые слова:** физико-механическая модель, физико-химическая модель, геомехано-газотермодинамическая модель, физико-механические свойства углей, газокинетические свойства углей, напряженно-деформированное состояние, геомеханические, технологические и термодинамические процессы, рабочая гипотеза, тепловые волны.

**Введение и рабочие гипотезы моделирования.** В настоящее время имеется обширное количество литературы, посвященной проблеме борьбы с внезапными выбросами угля и газа. Так например, в 1961 году была опубликована работа В. В. Ходота [1], в которой была предложена физико-механическая модель формирования выбросоопасных зон в угольных пластах. Согласно [1], в формировании выбросоопасной зоны угольного пласта участвуют три главных составляющих фактора: 1) физико-механические свойства пласта - ФМС, 2) газ, содержащийся в угле, т. е. газокинетические свойства угольного пласта - ГКС; 3) напряжения, т. е. напряженно-деформированное состояние пласта - НДС (рис. 1).

Из рисунка 1 следует, что все три свойства угольного пласта тесно взаимосвязаны между собой. При росте напряженного состояния на конкретном участке пласта снижается его газопроницаемость, возрастают давление газа, энергия газа и энергия угля. С ростом давления газа возрастает склонность угольного вещества к дробимости, снижается прочность угля.

На современном этапе исследования природы выбросоопасности угольных пластов энергетическая теория В. В. Ходота [1] является наиболее распространенной гипотезой формирования выбросоопасных зон в угольных пластах. Для своего времени это была весьма актуальная и востребованная рабочая гипотеза. Следует отметить, что в последнее время были разработаны новые рабочие гипотезы формирования выбросоопасных зон в угольных пластах [2].

В настоящее время ведение горных работ на выбросоопасных угольных пластах Донбасса регламентируется нормативными документами [3]. Согласно [3], прогноз выбросоопасности угольных пластов на шахтах Донбасса выполняется на региональном и текущем уровнях, т. е. оценка степени выбросоопасности угольных пластов осуществляется на двух уровнях.

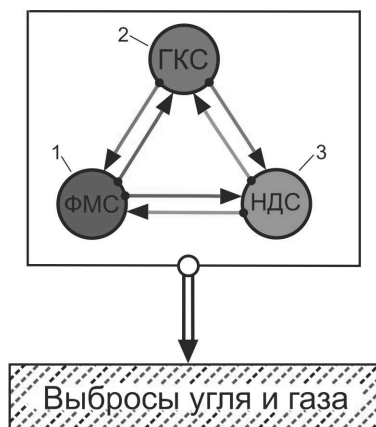


Рис. 1. Физико-механическая модель формирования выбросоопасных зон в угольном пласте (модель 1), три составляющих фактора: 1) физико-механические свойства угля – ФМС; 2) газокинетические свойства угля – ГКС; 3) напряженно-деформированное состояние пласта – НДС.

Недостатком работ [1, 4, 5] является то, что в них условия формирования выбросоопасных зон в угольных пластах рассматриваются в общем виде, т. е. оценка состояния угольных пластов осуществляется без разделения на региональный и текущий уровни. При региональном прогнозе оценка степени выбросоопасности выполняется для всего шахтопласта или крыла шахтопласта по данным геологоразведочных скважин (весовой выход летучих веществ –  $V^{daf}$ , %; толщина пластического слоя –  $y$ , мм и другие) [3]. При текущем прогнозе оценка степени выбросоопасности осуществляется только в пределах призабойной части угольного пласта для конкретной выработки. Оценка степени выбросоопасности призабойной части угольного пласта может проводиться: 1) по методике ведения текущего прогноза выбросоопасности по начальной скорости газовыделения из шпуров –  $q_n$ , л/мин, [3]; 2) по динамике начальной скорости газовыделения из шпуров –  $q_n$ , л/мин, [3].

Необходимо отметить, что с позиций энергетической теории В.В. Ходота нельзя объяснить ряд существующих фактов:

1) угли разного марочного состава характеризуются различными, нелинейно изменяющимися в ряду метаморфизма структурно-химическими (СХС), физико-механическими (ФМС) и газокинетическими свойствами (ГКС)(рис. 2);

2) угли средней стадии метаморфизма приобретают такие уникальные свойства как - спекаемость и коксуюемость;

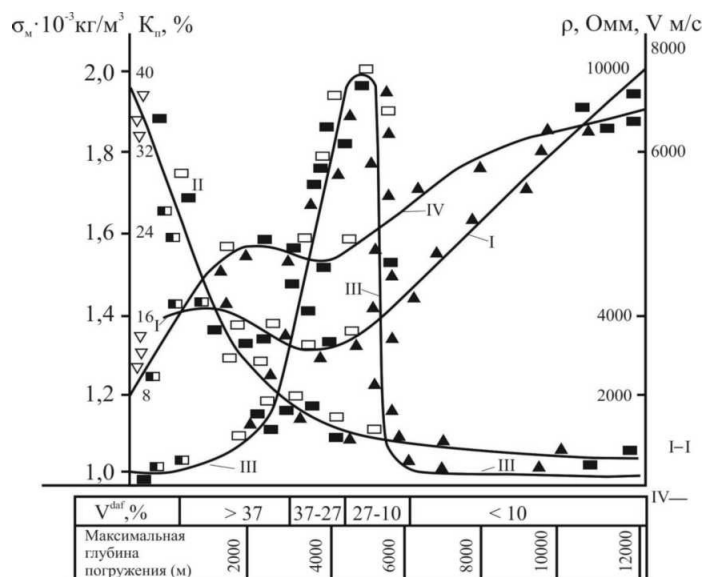
3) угли средней стадии метаморфизма имеют наиболее высокую степень выбросоопасности;

4) участки угольных пластов с высокой степенью выбросоопасности отличаются повышенными значениями градиентов температуры, измеренной на стенках скважин, пробуренных по уголю ;

5) уголь, который отброшен из полости внезапного выброса, характеризуется



повышенными значениями температуры –  $T_{уг}^{\circ}$ ,  $C$  и влажности –  $W_a$ , % .



I - плотность углей; II- пористость углей; III - удельное электрическое сопротивление; IV- скорость распространения упругих волн; по [6]

Рис. 2. Изменения физико-механических свойств углей в ряду метаморфизма.

Следует отметить, что в настоящее время недостаточное внимание уделяется разработке новых моделей формирования выбросоопасных зон в угольных пластах. Обзор литературы [1, 4, 5] показал, что в моделях формирования выбросоопасных зон в угольных пластах не учитывается ряд важных основополагающих факторов. Так, на региональном уровне следует учитывать: а) изменения, происходящие в органической массе углей в ряду метаморфизма на молекулярном и надмолекулярном уровнях; б) изменения структурно-химических свойств углей в ряду метаморфизма; в) марочный состав углей, их степень метаморфизма. На текущем уровне следует уделить внимание влиянию геомеханических, технологических и газотермодинамических процессов, протекающих в углепородном массиве при проведении горных выработок, на формирование выбросоопасных зон в угольных пластах.

Целями настоящей работы являются: 1) рассмотрение новых моделей формирования выбросоопасных зон в угольных пластах на региональном и текущем уровнях; 2) разработка основных положений рабочей гипотезы о возникновении тепловых волн, образующихся при проведении выработок в углепородном массиве.

Анализ факторов, которые способствуют формированию выбросоопасных зон в угольных пластах, нами проводился последовательно: 1) на региональном уровне; 2) на текущем уровне. На региональном уровне был выполнен анализ влияния следующих факторов на формирование выбросоопасных зон

в угольных пластах: 1) изменения в молекулярной и надмолекулярной организации углей – (МНОУ) в ряду метаморфизма – (микроуровень); 2) изменения структурно-химических свойств (СХС) углей в ряду метаморфизма – (мезоуровень); 3) влияние степени метаморфизма углей ( $S_m$ ) – (макроуровень).

В результате выполненных исследований была разработана физико-химическая модель формирования выбросоопасных зон в угольных пластах. При разработке указанной модели были использованы данные работ [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14] и основные сведения о более 40 структурно-химических моделях, которые описывают изменения органической массы углей в ряду метаморфизма. Сложные превращения и преобразования, происходящие в молекулярной и надмолекулярной организации углей в ряду метаморфизма, вызывают нелинейные изменения структурно-химических свойств углей, которые, в свою очередь, обуславливают сложные нелинейные изменения физико-механических и газокинетических свойств углей (рис. 2). Следствиями этой цепочки изменений являются: а) изменение степени метаморфизма углей, образование углей различного марочного состава; б) появление скачков углефикации (рис. 3).

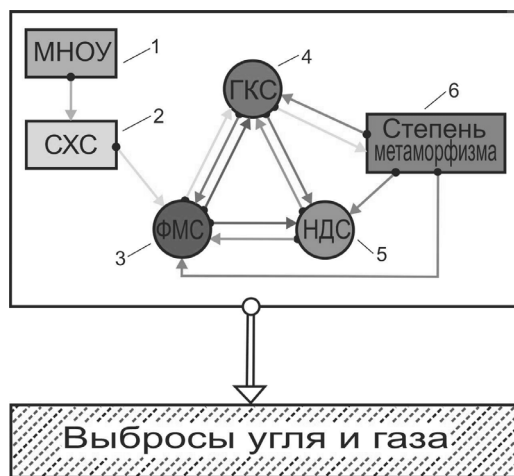


Рис. 3. Физико-химическая модель формирования выбросоопасных зон в угольных пластах (модель 2): 1) молекулярная и надмолекулярная организация угольного вещества – МНОУ; 2) структурно-химические свойства углей – СХС; 3) физико-механические свойства углей – ФМС; 4) газокинетические свойства углей – ГКС; 5) напряженно-деформированное состояние угольного пласта – НДС; 6) степень метаморфизма углей.

Нелинейные изменения структурно-химических, физико-механических и газокинетических свойств углей обуславливают сложный полимодальный характер проявления внезапных выбросов угля и газа в ряду метаморфизма в условиях Донбасса [2]. В работе [2] установлена непосредственная взаимосвязь характера проявления внезапных выбросов угля и газа в ряду метаморфизма со скачками углефикации. Результатом исследований, выполненных в работе [2], явилось дальнейшее развитие теории и практики борьбы с внезапными выбросами угля и газа. Так например, применение основных положений разработанной

физико-химической модели, описывающей особенности формирования участков повышенной потенциальной выбросоопасности в углях различного марочного состава, позволило для условий Донбасса получить следующие научные и практические результаты:

- установлен сложный, мультимодальный характер проявления внезапных выбросов угля и газа в ряду метаморфизма, при этом на пластах пологого падения наблюдается три максимума в проявлении выбросоопасности углей, а на пластах наклонного, крутого падений наблюдается два максимума в проявлении выбросоопасности [2];
- построен обобщенный график изменения комплексного показателя степени метаморфизма углей –  $S_m$  *общ* в ряду их углефикации [2, 15];
- уточнена нижняя граница проявления внезапных выбросов угля и газа для углей низкой стадии метаморфизма, [15];
- дифференцированно для пластов пологого и наклонного, крутого падений уточнены значения минимальных глубин проявления внезапных выбросов угля и газа на шахтах Донбасса [15];
- на основании выполненного анализа изменений СХС, ГКС углей, их НДС в ряду метаморфизма и с глубиной, составлен следующий горно-геологический прогноз: потенциальная выбросоопасность углей низкой и средней стадий метаморфизма на глубинах  $H = 600 - 1600$  м будет оставаться высокой [15];
- разработаны новые рабочие гипотезы формирования и проявления внезапных выбросов углей и газа [2]: 1-я гипотеза – о проявлении внезапных выбросов угля и газа по площадям; 2-я гипотеза – о проявлении внезапных выбросов угля и газа в ряду метаморфизма; 3-я гипотеза – о проявлении внезапных выбросов угля и газа с ростом глубины; выполнены экспериментальная проверка 1-й гипотезы и статистическая проверка 2-й и 3-й гипотез по фактическим данным выбросов, произошедших на шахтах Донбасса;
- разработан усовершенствованный способ ведения регионального прогноза выбросоопасности угольных пластов для шахт Донбасса [16].

Необходимо отметить, что разработанная на региональном уровне физико-химическая модель формирования участков повышенной потенциальной выбросоопасности для углей различного марочного состава (модель 2) является более объективной по сравнению с ранее известной физико-механической модель 1. В данной физико-химической модели учитываются изменения структурно-химических свойств углей в ряду метаморфизма, которые являются причиной образования углей разного марочного состава и обуславливают нелинейные изменения физико-механических и газокинетических свойств углей в ряду метаморфизма. В свою очередь, нелинейные изменения физико-механических и газокинетических свойств углей в ряду углефикации обуславливают сложный полимодальный характер проявления внезапных выбросов угля и газа в ряду метаморфизма.

Существенные результаты, достигнутые на региональном уровне, явились первым этапом в исследовании факторов, влияющих на формирование выбро-

соопасных зон в угольных пластах. Второй этап исследований был посвящен изучению основных факторов, участвующих в формировании выбросоопасных зон в угольных пластах на текущем уровне. Анализ литературы показал, что основными свойствами углепородного массива являются: 1) неоднородность и как следствие анизотропия его свойств и состояний (М.А. Садовский, Г.А. Соболев, 1987); 2) фрактальность (А.Ф. Булат, В.И. Дырда, 2005); 3) дискретность, блочность; 4) самоорганизация; 5) автомодельность, самоподобие; 6) иерархия уровней напряжений; 7) неразрывность, взаимосвязь и взаимообусловленность параллельно протекающих геомеханических, технологических, газокинетических и термодинамических процессов и явлений, которые возникают при проведении горных выработок в углепородном массиве.

Обзор работ [17–25] показал, что на текущем уровне на триаду “физико-механические свойства угля → газокинетические свойства угля → напряженно-деформированное состояние пласта” оказывают существенное влияние геомеханические, технологические и газотермодинамические процессы.

**1. Геомеханические процессы, возникающие в углепородном массиве при проведении горных выработок.** Академик М.А. Садовский в своих работах подчеркивает, что важнейшими свойствами горного массива являются: неоднородность, дискретность, постоянное деформирование, постоянный приток механической энергии. Т.Ю. Тверитинова в работе [17] указывает на волнообразное чередование геологических и тектонических структур. Согласно [17], в литосфере чередуются положительные и отрицательные структуры разных порядков, т. е. распределение структур подчиняется знакопеременному закону. Это свойство литосферы является универсальным и проявляется на уровнях от глобального до локального, а также в структурах разного возраста – от древнейших до современных. На поверхности Земли и в ее недрах происходит миграция геодинамических процессов, которые вызывают изменения геологических и геофизических характеристик литосферы. В работе [17] указанные закономерности объясняются в рамках волновой концепции строения и развития литосферы Земли. Волнообразный характер тектонических структур литосферы, циклический характер и миграция геологических процессов во времени и пространстве являются выражением многопорядковой волновой геодинамики литосферы Земли, отражающей периодическое изменение ее напряженного состояния. Из выше сказанного следует, что роль геодинамических, геологических и тектонических процессов на региональном уровне сводится к перераспределению энергии в горном массиве. Совместное воздействие геодинамических, геологических и тектонических процессов приводит к усилению неоднородности, изменчивости свойств горного массива: усиливается неравномерность в распределении структурно-химических, физико-механических, газокинетических свойств углепородного массива, а также его напряженно-деформированного состояния как по площадям, так и по глубине.

Нами углепородный массив рассматривается как единая система: «угольный

пласт – вмещающие породы». На изменение свойств и состояний углепородного массива оказывают влияние следующие факторы: состав пород кровли, очередность залегания слоев, расстояние от слоя до кровли пласта, мощность, крепость и угол залегания каждого породного слоя, глубина разработки угольного пласта; мощность, крепость и угол падения угольного пласта; длина лавы, скорость ее подвигания, расстояние отхода лавы от разрезного ходка, шаг посадки основной кровли, расстояние до максимума опорного давления и т. д. На неравномерное распределение энергии в горном массиве как по площадям, так и по глубине указывают в своих работах Г.Н. Фейт, а также в работе [20] А.Ф. Булат, В.И. Дырда, Е.Л. Звягильский, В.А. Привалов, Е.А. Панова.

В работе Ж.М. Канлыбаевой [18] указывается на знакопеременное поведение угольного пласта и вмещающих пород впереди проводимой лавы как по ходу движения забоя, так и по высоте, измеряемой от кровли пласта до земной поверхности. Ранее затухающий волнообразный характер изменения напряжений впереди проводимого забоя предсказал Вебер. Явление волнообразного изменения напряженно-деформированного состояния плит и балок на упругом состоянии известно из теории упругости. С увеличением глубины проведения выработки наблюдается явление зональной дезинтеграции горных пород. Это явление рассмотрено в работах Е.И. Шемякина, Г.Л. Фисенко, Ф.П. Глушихина и др. Образующие пространственно-временные структуры зон дезинтеграции могут перемещаться с течением времени. В горном массиве наблюдается цикличность, периодичность протекающих волновых физических процессов: периодические посадки основной кровли, периодические посадки непосредственной кровли, сменные и суточные циклы по выемке угля в лавах, цикличность в проведении противовыбросных мероприятий и т. д.

В работе [26] отмечается, что впереди движущегося забоя образуются перемещающиеся зоны пригрузки и разгрузки с последующим образованием перемещающейся зоны разрушения породного массива, а также наблюдается чередование зон разрыхленных и уплотненных пород. Согласно [26], в районе сопряжения горизонтальной выработки с вертикальным стволом по мере удаления от ствола волнообразно изменяются уровень электромагнитной эмиссии и кажущееся электросопротивление пород. В дальнейшем эти установленные закономерности были подтверждены научными открытиями № 188 [22] и № 318 [23]. Из работ [22, 23, 26] следует, что: 1) впереди проводимых горных выработок формируются неоднородные пространственно-временные структуры напряженного состояния угольного пласта; 2) напряженное состояние угольного пласта вблизи забоев горных выработок характеризуется наличием зон повышенных и пониженных напряжений.

Физические процессы, происходящие впереди проводимых выработок, разделим условно на 3 пространственно-временных уровня: 1-й уровень – краткосрочные процессы; 2-й уровень – среднесрочные процессы; 3-й уровень – долгосрочные процессы. К краткосрочным процессам следует отнести: работа ручным инструментом – это удары по пласту обушком, отбойным молотком, бурение

шпуров глубиной до 3,5 м, буровзрывные работы, торпедирование угольного массива. При краткосрочных процессах фиксируемые волновые процессы характеризуется небольшими величинами длин волн (коротковолновый диапазон) и их периодом; продолжительность процессов - ( $t_1$ ) составляет от секунд до 10-20 минут. К среднесрочным процессам относятся: выемка угля проходческими и очистными комбайнами, передвижка секций механизированной крепи, передвижка индивидуальной крепи в струговых лавах, посадка непосредственной кровли, бурение скважин длиной свыше 5,0 м; гидроотжим пласта, гидрорыхление угольного пласта и т. д. Продолжительность процессов - ( $t_2$ ) составляет от 20-30 минут до нескольких часов. К долгосрочным, длительно протекающим процессам относятся посадка основной кровли, продолжительность процессов - ( $t_3$ ) составляет 3 – 6 недель. Протекающие в горном массиве краткосрочные, среднесрочные и долгосрочные геомеханические процессы неразрывно связаны с соответствующими им по времени технологическими и газотермодинамическими процессами.

В угленосном массиве наблюдается обусловленность и взаимосвязь разных свойств (структурно-химических, физико-механических) и состояний угольных пластов (напряженно-деформированное, газокинетическое, термодинамическое). Например, образующиеся впереди горных выработок неравномерные поля напряжений создают неоднородные деформационные поля, которые в свою очередь обуславливают формирование неоднородных полей распределения природной газоносности угольных пластов –  $X_{np}$ , т. е. на разных участках угольного пласта изменяется соотношение объемов свободного и сорбированного газа. Согласно [21, 24], участки с повышенными градиентами напряжений –  $\Delta \sigma$  и природной газоносности –  $\Delta X_{np}$  отличаются повышенными градиентами температуры угольных пластов –  $\Delta T^\circ, C$  и характеризуются повышенной степенью выбороопасности.

В работе [5] указывается, что вслед за движением очистного комбайна с отставанием в 2 – 7 м движется ядро максимальных скоростей сближения пород кровли и почвы. Так, в условиях ПО «Донецкуголь» шахты № 7 / 8 им. М.И. Калинина на угольном пласте  $h_8$  «Прасковиевский» Н.Е. Волошиным выполнен ряд шахтных измерений давления газа –  $P_{газ}$  в очистном забое при подходе комбайна к месту установки манометров. В результате выполненных экспериментов было установлено, что при приближении комбайна к пункту замера наблюдается резкий скачок давления газа. Наибольшие скачки давления газа (3,6 – 4,3 МПа) были зафиксированы на расстоянии 1,8 – 5,1 м от забоя впереди угольного пласта.

На взаимосвязь технологических операций в лаве с геомеханическими процессами в горном массиве указывается и в работе [27]. Перед посадками основной кровли в угольном пласте наблюдается рост напряжений, снижаются газопроницаемость и степень дегазации пласта, возрастают давление свободного и сорбированного газа в пласте, растут температура угольного пласта и газа и внутренние термонапряжения в пласте. Нарастание и спад опорного давления

наблюдаются в зависимости от зависания и обрушения породных слоев. Впереди проводимой горной выработки формируется зона опорного давления, величина которого может быть рассчитана по алгоритму, который приведен в работе [19].

**2. Технологические процессы, выполняемые в проводимых горных выработках.** К технологическим факторам, влияющим на изменение свойств и состояний угольного пласта, относятся: схемы вскрытия шахтного поля, системы подготовки и разработки угольных пластов, глубина разработки угольного пласта; длина лавы, вынимаемая мощность пласта, способ выемки угля, скорость подвигания выработки в смену, в сутки; наличие одновременно работающих лав на данном пласте, расстояние отхода лавы от разрезного ходка, площадь выработанного пространства на данном пласте, способ управления кровлей, способ охраны проводимых горных выработок, расстояние опережения забоями подготовительных выработок забоя лавы, применяемые противовыбросные мероприятия и их параметры, расстояние до максимума опорного давления, шаг посадки основной кровли и т. д. Ряд технологических параметров может быть отнесен и к геомеханическим параметрам, так как эти параметры тесно взаимосвязаны и взаимно обусловлены.

Состояние призабойной части угольного пласта во многом зависит от: 1) способа выемки угля (буровзрывной, комбайном, гидровымывание, на отбойный молоток и др.); 2) противовыбросных мероприятий (гидроотжим, гидрорыхление пласта, гидровымывание полостей, разгрузочные скважины по углю, щели, пазы, торпедирование угля, торпедирование кровли пласта, вибровоздействие на пласт и т. д.).

При воздействии геомеханических и технологических факторов на пласт возрастают статические и динамические нагрузки на призабойную часть угольного массива. В результате этого изменяются газотермодинамические параметры пласта, прежде всего растут температура угольного пласта, температура свободного и сорбированного газа, возрастают термо- и баронапряжения. В связи с неоднородностью и анизотропией свойств угольного массива, в нем под воздействием геомеханических и технологических процессов формируются неоднородные тепловые поля. Результаты выполненных шахтных измерений показывают, что существует тесная взаимосвязь между физико-механическими свойствами углей, их напряженно-деформированным, газодинамическим состояниями и протекающими в углепородном массиве геомеханическими, технологическими и термодинамическими процессами [21].

В 2011 году академик Опарин В.Н. указывал на необходимость развивать новое научное направление: **геомеханическая термодинамика**. Руководствуясь этим положением мы проводим исследования по следующему направлению: **геомеханическая газотермодинамика выбросоопасных угольных пластов**. По данному направлению важная роль отводится изучению газотермодинамических процессов, которые наблюдаются в угольных пластах.

**3. Газотермодинамические процессы в угольных пластах.** В работе [25] Фейт Г.Н. и Малинникова О.Н. экспериментально подтверждают наличие повышенной температуры угля в выбросоопасных зонах. В работе [28] установлена взаимосвязь между напряженно-деформированным состоянием угольных образцов разных стадий метаморфизма с температурой, а также ИК-излучением. По данным [28] установлено, что уже при достижении менее 50 %-го уровня напряжений по отношению к пределу прочности испытуемых образцов пород, внутри них возникают низкочастотные процессы микродеформирования между структурными отдельностями. На стадии предразрушения в образцах породы возникают, а на стадии постпиковой нагрузки сохраняются колебания с частотой 0,5–4 Гц, т. е. в образцах наблюдаются деформационно-волновые процессы, [28].

В работе [24] рассмотрены результаты измерений температуры на выбросоопасных угольных пластах Донбасса, температуру измеряли в забоях подготовительных выработок, в шпурах на интервалах: 1, 0 – 2,0 и 2,0 – 3,0 м. Измерения показали, что в каждой отдельной выработке температура, измеренная в призабойной части угольных пластов, распределена весьма неравномерно. Критерием оценки выбросоопасности пласта являлась максимальная величина градиента температуры угля в шпуре на расстояниях 1,0 – 2,0 м и 2,0 – 3,0 м от поверхности забоя. По данным И.А. Рыженко, И.Я. Еремина, В. П. Черняка участок пласта относится: а) к неопасным при условии  $\Delta T_{2-1}; \Delta T_{3-2} < 2^\circ K$ ; б) ситуация считается угрожаемой при  $2^\circ K \leq \Delta T_{2-1}; \Delta T_{3-2} < 2,5^\circ K$ ; в) участок относится к выбросоопасным при условии  $\Delta T_{2-1}; \Delta T_{3-2} \geq 2,5^\circ K$ .

Следует подчеркнуть, что в работе [24] физическая сущность повышения температуры в выбросоопасных зонах не объясняется. Потенциально выбросоопасные зоны (зоны повышенного горного давления – ПГД, зоны горно-геологических нарушений – ГГН, зоны аномально высоких пластовых давлений – АВПД) характеризуются повышенными градиентами напряжений, что приводит к росту градиентов газового давления. Участки с повышенной степенью сжатия пласта имеют повышенные градиенты изменения давления газа, что приводит к увеличению компрессии газа на данном участке пласта и к росту температуры, часть энергии сжатия пласта переходит в тепловую энергию. Рост температуры на данном участке угольного пласта приводит еще к большей степени сжатия газа и росту термо- и баронапряжений в пласте.

Так, в работе [29] указывается, что в условиях Карагандинского угольного бассейна впереди движущейся лавы № 36 в зоне геологического нарушения в шпурах на глубине 3,6 м зафиксировано повышение температуры до  $45^\circ C$  по сравнению с фоновой, равной  $30 - 31^\circ C$ . По данным [29] на шахте им. В.И. Ленина впереди движущейся лавы в зоне максимального опорного горного давления температура угольного пласта возрастает в 2 – 3 раза против фоновых значений. Далее отмечается, что графики изменения температуры угля хорошо согласуются с закономерностями изменения опорного горного давления по мере подвигания лавы, в том числе и с шагом посадки основной кровли в очистном



забое [29].

Газотермодинамические процессы оказывают существенное влияние на свойства и состояния угольного пласта. С ростом температуры пласта возрастает кинетическая энергия свободного и сорбированного газа, растет энергия угольного массива. В работе [4] авторы указывают, что повышение температуры угольного пласта является информативным показателем и с его помощью можно выделить зоны повышенного горного давления, зоны разгрузки и дегазации пласта, зоны повышенной потенциальной выбросоопасности пласта. Участки повышенной потенциальной выбросоопасности угольных пластов характеризуются ростом концентрации потенциальной энергии упругого сжатия в призабойной зоне угольного пласта [4]. В работе [4] подчеркивается особая роль температуры, которую она играет на локальном участке угольного массива. Рост температуры объясняется с позиций наблюдаемых экзотермических эффектов, возникающих в устьях движущихся микротрещин.

В работе [30] рассмотрен внутренний нагрев грунта под воздействием внешних вибрационных и импульсных механических колебаний в частотном диапазоне от единиц до сотен герц. Установлено, что под воздействием колебаний в грунте (на глубине – 6,0 м) наблюдается сейсмותרмический эффект, т. е. грунт нагревается. Таким образом, установлена взаимосвязь между деформациями (вибровоздействие на грунт) и ростом температуры грунта. Очевидно, что при периодических осадках основной кровли в угольном массиве в призабойной части проводимых горных выработок также должен наблюдаться этот сейсмותרмический эффект, т. е. рост градиентов температуры на локальном участке пласта. Из выше изложенного следует, что геомеханические, технологические и газотермодинамические процессы оказывают существенное влияние на изменение физико-механических, газокинетических свойств угольного пласта и на его напряженно-деформированное состояние.

В работе [31] приведены результаты измерений температуры внутри междупластного целика угля на пласте IV – V шахты им. В.И. Ленина в Кузбассе. По данным [31] максимальная температура угля, достигающая 38 – 40° С, фиксировалась при подходе очистных забоев на 5–7 м к замерным станциям (рис. 4).

Из рисунка 4 следует, что при подходе лавы к замерным станциям градиенты температуры в угольном пласте значительно возрастают.

**4. Геомехано-газотермодинамическая модель формирования участков опасных по выбросам угля и газа на текущем уровне.** Выполненный обзор литературы [1 – 34] позволил разработать геомехано-газотермодинамическую модель формирования выбросоопасных зон в угольных пластах на текущем уровне - (модель 3, рис. 5).

Из рисунка 5 следует, что совместное воздействие геомеханических, технологических и газотермодинамических процессов на угольный массив приводит к изменению свойств и состояний в призабойной части угольного пласта. На отдельном участке угольного пласта при росте напряженного состояния наблюда-

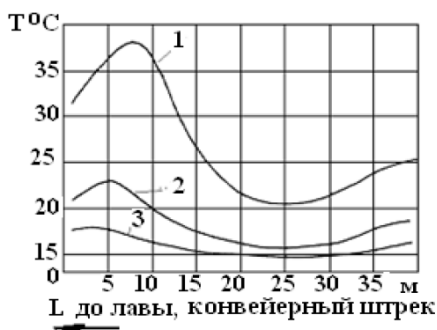


Рис. 4. Измерения температуры внутри угольного целика (расстояния областей измерения температуры от борта конвейерного штрека: 1 – 5 м; 2 – 4 м; 3 – 2 м).

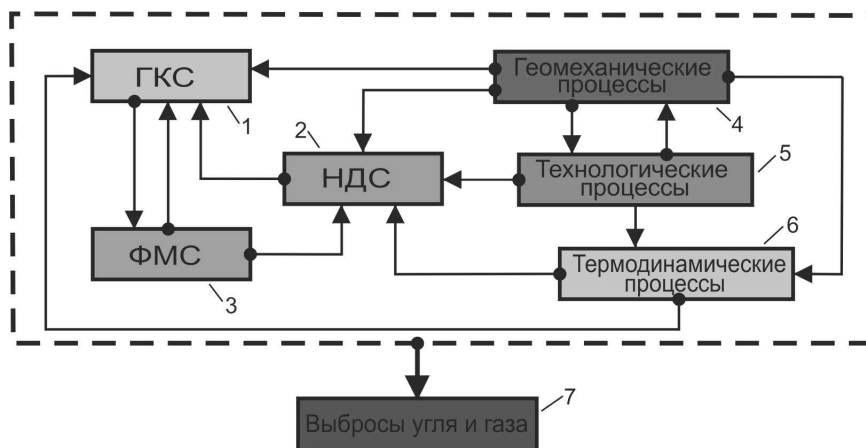


Рис. 5. Геомехано-газотермодинамическая модель формирования участков опасных по выбросам угля и газа на текущем уровне (модель 3): 1- газокинетические свойства пласта (ГКС); 2 – напряженно-деформированное состояние пласта (НДС); 3 – физико-механические свойства угля (ФМС); 4- геомеханические процессы; 5 – технологические процессы; 6 – газотермодинамические процессы; 7 – внезапные выбросы угля и газа

ется рост давления газа –  $P_{\text{газ}}$  и градиентов температуры угля –  $\Delta T_{\text{уг}}^{\circ}$ . Участки угольного пласта с повышенными значениями градиентов  $\Delta \sigma$ ,  $\Delta P_{\text{газ}}$  и  $\Delta T_{\text{уг}}^{\circ}$ , характеризуются повышенной степенью выбросоопасности.

**5. Рабочая гипотеза о возникновении тепловых волн, образующихся при проведении выработок в углеродном массиве.** При совместном корпоративном воздействии геодинамических, геологических и тектонических процессов происходит усиление неоднородности, изменчивости свойств и состояний углеродного массива, усиливается неравномерность в распределении его напряженно-деформированного состояния, его физико-механических, газокинетических и термодинамических свойств как по площадям, так и с ростом глуби-

ны. Анализ литературы [2, 6, 8, 16, 17, 18, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 34] и обобщение опыта ведения горных работ в сложных горно-геологических условиях в Донбассе [21] показали следующее. При проведении горных выработок по углепородному массиву впереди забоя выработок происходят изменения напряженного состояния вмещающих пород и угольного пласта, которые обуславливают колебания, вариации следующих параметров: 1) снижение усилий подачи буровых штанг при бурении скважин по углю –  $F$ ; рост весового выхода штыба из скважин –  $Q_{шт}$ , кг; изменения удельного электрического сопротивления угольного массива –  $\rho$ , ом · м; 2) по длине скважин наблюдаются рост начальной скорости газовыделения –  $q_n$ , л/мин и концентрации гелия –  $He$ , % и т. д. При проведении выработки впереди забоя происходят волнообразные изменения напряженного состояния вмещающих пород и угольного пласта – [18]. Участки угольного пласта с повышенными значениями градиентов напряжений –  $\Delta \sigma$ , давления газа –  $\Delta P_{газ}$  и температуры –  $\Delta T_{уг}^{\circ}$ , относятся к зонам с повышенной степенью потенциальной выбросоопасности.

Выполненный обзор и анализ многочисленной литературы позволил сформулировать основные положения рабочей гипотезы о возникновении тепловых волн, образующихся впереди проводимых горных выработок. **Основные положения рабочей гипотезы** сводятся к следующему. Впереди проводимых горных выработок, как по горизонтали, так и по вертикали, наблюдаются волнообразные изменения напряженного состояния углепородного массива (волна Вебера) [18, 22, 23]. Волнообразные изменения напряженного состояния углепородного массива вызывают нелинейные изменения газокINETического и термодинамического состояний угольного пласта. В призабойной части угольного пласта образуются тепловые волны разной длины и периодичности (рис. 4). Время существования тепловых волн обусловлено временем протекания геомеханических и технологических процессов.

Таким образом, разработанная на текущем уровне геомехано-газотермодинамическая модель 3 позволяет проследить влияние геомеханических, технологических и газотермодинамических процессов на формирование локальных участков, характеризующихся повышенной степенью потенциальной опасности по внезапным выбросам угля и газа.

**6. Дальнейшие перспективы исследований и ожидаемые результаты.** В практике ведения горных работ одной из весьма важных задач является определение величины зоны разгрузки –  $L_{раз}$ , м в призабойной части разрабатываемых угольных пластов. Величина  $L_{раз}$ , м является функцией двух переменных: начальной скорости газовыделения в скважинах –  $q_n$  и температуры, измеренной на стенках скважин –  $\Delta T_{уг}^{\circ}$

$$L_{раз} = f(q_n; T_{уг}^{\circ}). \quad (1)$$

С позиций геомеханики величина  $L_{раз}$  зависит от расстояния отхода лавы от

места предыдущей посадки основной кровли –  $R_{отх}$ , м

$$L_{раз} = f(R_{отх}). \quad (2)$$

Тогда  $q_n$  является функцией  $R_{отх}$ , м

$$q_n = f(R_{отх}). \quad (3)$$

Также по аналогии имеем

$$T_{ут}^{\circ} = f(R_{отх}). \quad (4)$$

Уравнения зависимостей (3) и (4) могут быть получены на основании применения корреляционно-регрессионного анализа данных шахтных наблюдений или путем применения метода группового учета аргументов [35]. С позиций технологии, величина зоны разгрузки –  $L_{раз}$  является функцией переменных сменного –  $L_{см}$ , м или суточного –  $L_{сут}$  подвигания забоя выработки

$$L_{раз} = f(L_{см}), \text{ м}; \quad (5)$$

$$L_{раз} = f(L_{сут}), \text{ м}. \quad (6)$$

В дальнейшем планируется выполнить:

- а) численное моделирование изменения параметра  $L_{раз}$  в зависимости от изменения параметров  $q_n$ ;  $T_{ут}^{\circ}$ ;  $L_{см}$ ,  $L_{сут}$ ;
- б) шахтные экспериментальные исследования по определению величин  $L_{раз}$ , м в различных горно-геологических условиях.

По результатам исследований будет разработан новый метод, позволяющий более точно и объективно определять величину  $L_{раз}$ , м по двум параметрам  $q_n$ , л/мин и  $T_{ут}^{\circ}$ .

### Выводы.

1. На региональном уровне разработана новая физико-химическая модель формирования выбросоопасных зон в угольных пластах. В данной модели учитывается влияние изменений структурно-химических свойств углей в ряду метаморфизма на изменения физико-механических, газокинетических свойств и напряженно-деформированного состояния угольного пласта.

2. На текущем уровне разработана новая геомехано-газотермодинамическая модель формирования выбросоопасных зон в угольных пластах, в которой учитывается влияние геомеханических, технологических и газотермодинамических процессов на физико-механические, газокинетические свойства пласта и его напряженно-деформированное состояние. Участки угольных пластов, характеризующиеся повышенными значениями градиентов напряженного состояния и давления газа, являются причиной образования зон с повышенными величинами градиентов температуры угольного массива.

3. Разработаны основные положения рабочей гипотезы о возможности возникновения тепловых волн впереди забоев проводимых горных выработок. Локальные участки с повышенными значениями градиентов напряжений –  $\Delta \sigma$

и газоносности –  $\Delta X_{\text{гп}}$  и температуры –  $\Delta T_{\text{гт}}^{\circ}$  характеризуются повышенной степенью потенциальной выбросоопасности.

4. Температура угольного пласта является одним из важных информативных параметров, поэтому в дальнейшем планируется проведение исследований по разработке нового метода определения величины зоны разгрузки угольного пласта –  $L_{\text{раз}}$  по двум параметрам  $q_{\text{н}}$ , л/мин и  $T_{\text{гт}}^{\circ}$ .

5. В данной статье впервые показан объективный характер и преимущества разработанных новых модели 2 и модели 3 по сравнению с ранее известной моделью 1 – моделью В.В. Ходота, в которой описаны условия формирования выбросоопасных участков в угольных пластах.

1. *Ходот В.В.* Внезапные выбросы угля, породы и газа / В.В. Ходот – М.: Госгортехиздат, 1961. – 363 с.
2. *Анциферов А.В.* Внезапные выбросы углей и газа в условиях Донбасса в ряду метаморфизма и с ростом глубины / А.В. Анциферов, Л.А. Камбурова, Н.Н. Киселев, А.Г. Радченко, А.А. Радченко // Труды РАНМИ: сб. научн. трудов. – Донецк, 2019. – № 8 (23), часть 2. – С. 173–192.
3. СОУ 10.1.00174088.011 – 2005 Правила ведения горных работ на пластах, склонных к газодинамическим явлениям / Киев: Минуглепром Украины, 2005. – 225 с.
4. *Булат А.Ф.* Некоторые проблемы газодинамических явлений в угольном массиве в контексте нелинейной неравновесной термодинамики / А.Ф. Булат, В.И. Дырда // Геотехнічна механіка. – 2013. – Вып. 108. – С. 3–30.
5. *Петросян А.Э.* Причины возникновения внезапных выбросов угля и газа / А.Э. Петросян, Б.М. Иванов // Основы теории внезапных выбросов угля, породы и газа. – М.: Недра, 1978. – С. 3–61.
6. *Гречухин В.В.* Изучение угленосных формаций геофизическими методами / В.В. Гречухин – М., Недра, 1980. – 360 с.
7. *Саранчук В.И.* Надмолекулярная организация, структура и свойства угля / В.И. Саранчук, А.Т. Айруни, К.Е. Ковалев; отв. Ред. Сапунов В.А. // АН УССР. Ин-т физ.-органической химии и углехимии. – Киев: науч. думка, 1988. – 192 с.
8. *Агроскин А.А.* Химия и технология угля / А.А. Агроскин. – М.: Недра, 1969. – 240 с.
9. *Гюльмалиев А.М.* Теоретические основы химии угля / А.М. Гюльмалиев, Г.С. Головин, Т.Г. Гладун. – М.: Изд-во МГГУ, 2003. – 556 с.
10. *Русьянова Н.Д.* Углехимия / Н.Д. Русьянова. – М.: Наука, 2003. – 317 с.
11. *Русчев Д.Д.* Химия твердого топлива / Д.Д. Русчев. – Л.: Химия, 1976. – 256 с.
12. *Тайц Е.М.* Методы анализа и испытания углей / Е.М. Тайц, И.А. Андреева. – М.: Недра, 1983. – 301 с.
13. *Косенко Б.М.* Изменение содержания метана и высших углеводородов в каменных углях и антрацитах Донбасса / Б.М. Косенко // Геология угольных месторождений. – М., 1969. – Т.1. – С. 129–135.
14. *Алексеев А.Д.* Прогнозирование неустойчивости системы уголь – газ / А.Д. Алексеев, Г.П. Стариков, Г.П. Чистоклетов. – Донецк: изд-во «Ноулидж» (донецкое отделение), 2010. – 343 с.
15. *Анциферов А.В.* Граничные условия и минимальные глубины проявления внезапных выбросов угля и газа на шахтах Донбасса / А.В. Анциферов, Н.Н. Киселев, А.Г. Радченко, С.М. Федотов, А.А. Радченко // Труды РАНМИ: сб. научн. трудов. – Донецк, 2020. – № 10 – 11 (25 – 26). – С. 204–223.
16. Патент на корисну модель № 75981 Спосіб визначення категорії викидонебезпечності вугільних пластів. Номер заявки: U 2012 04854, МПК (2012.01), E21F5/00. В.О. Канін, М.М. Кисельов, В.П. Коптіков, О.Г. Радченко, О.О. Радченко. Дата публікації: 25.12.2012, Бюл. № 24.

17. *Тверитинова Т.Ю.* Волновая тектоника Земли / Т.Ю. Тверитинова // Геодинамика и тектонофизика. – Москва, 2010. – Т. 1., № 3. – С. 297–312.
18. *Канлыбаева Ж. М.* Закономерности сдвижения гонных пород в массиве / Ж.М. Канлыбаева. – Алма-Ата: изд-во «Наука», 1968. – 108 с.
19. *Лобков Н.И.* Порядок расчета максимального опорного давления впереди лавы / Н.И. Лобков, А.А. Лобков // Труды РАНИМИ: сб. научн. трудов. – Донецк, 2019. – № 8 (23) (часть 1). – С. 273–284.
20. *Булат А.Ф.* Фракталы в геомеханике / А.Ф. Булат, В.И. Дырда, Е.Л. Звягильский, В.А. Привалов, Е.А. Панова. – Киев: Наук. думка, 2007. – 389 с.
21. *Минеев С.П.* Горные работы в сложных условиях на выбросоопасных угольных пластах: [монография] / С.П. Минеев, А.А. Рубинский, О.В. Витушко, А.Г. Радченко // Донецк: ООО «Східний видавничий дім», 2010. – 603 с.
22. Научное открытие № 188. Явление образования перемещающихся нарушенных зон в напряженных горных породах / В.Я. Кириченко, Е.Л. Звягильский, А.В. Левшин [и др.] // Сборник кратких описаний научных открытий, научных идей, научных гипотез. – 2002. – С. 62–63.
23. Научное открытие № 318. Закономерность самоорганизации грунтовых и породных массивов вокруг протяженных горных выработок / Л.В. Байсаров, М.А. Ильяшов, В.В. Левит [и др.]. – М.: РАЕН, 2006. – 6 с.
24. *Рыженко И.А.* Прогноз выбросоопасности призабойной части пластов по температурному режиму / И.А. Рыженко, И.Я. Еремин // Уголь Украины. – 1988. – № 3. – С. 36–37.
25. *Малинникова О.Н.* Связь термодинамических процессов с выбросоопасностью угольных пластов при ведении горных работ / О.Н. Малинникова, Г.Н. Фейт // Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках. – Симферополь: ТНУ, 2007. – С. 191–195.
26. *Ильяшов М.А.* Закономерности самоорганизации грунтовых и породных массивов, ослабленных подземными выработками / М.А. Ильяшов, Б.М. Усаченко, А.А. Яланский и др. // Материалы международной конференции «Форум горняков – 2008». – Днепропетровск: НГУ, 2008. – С. 59–72.
27. *Антипов И.В.* Шахтные исследования конвергенции вмещающих пород / И.В. Антипов, В.Е. Кравченко, Д.В. Щербинин // Уголь Украины. – 2000. – № 10. – С. 24–27.
28. *Опарин В.Н.* О некоторых особенностях взаимодействия между геомеханическими и физико-химическими процессами в угольных пластах Кузбасса / В.Н. Опарин, Т.А. Киряева, В.Ю. Гаврилов, Р.А. Шутилов, А.П. Ковчавцев, А.С. Танайно, В.П. Ефимов, И.Е. Астраханцев, И.В. Гренев // ФТПРПИ. – 2014. – № 2. – С. 3–30.
29. *Киряева Т.А.* К вопросу о механизме возникновения высоких температур при разработке угольных пластов / Т.А. Киряева, Р.И. Родин // Уголь. – 2010. – № 2. – С. 27–29.
30. *Юшин В.И.* О тепловом эффекте при механическом возбуждении сейсмических волн / В.И. Юшин, Д.Е. Аюнов // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2015. – № 2. – С. 35–46.
31. *Скрицкий В.А.* О зарождении в нарушенной части пласта процесса саморазрушения и развития его до внезапного выброса угля и газа / В.А. Скрицкий // Труды РАНИМИ: сб. научн. трудов. – Донецк, 2019. – № 8 (23), часть 1. – С. 80–91.
32. *Хохлов И.В.* Комплексное исследование массива горных пород / И.В. Хохлов. – М.: Наука, 1986. – 163 с.
33. *Лис С.Н.* Результаты исследований волновых свойств опорного давления под целиками и краевыми частями угольных пластов / С.Н. Лис. // Евразийский Союз Ученых (ЕСУ). – 2019. – № 8 (65). – С. 35–47.
34. *Беспятов Г.А.* Влияние волновых процессов на газодинамику угольных пластов: авт-т дис. на соиск. учен. степ. д-ра техн. наук. (05.15.11) / Г.А. Беспятов; КузГТУ. – Кемерово, 1996. – 34 с.
35. *Ивахненко А.Г.* Метод группового учета аргументов в задачах прогнозирования / А.Г. Ивахненко // Автоматика. – 1976. – № 6. – С. 24–34.

**A.G. Radchenko, N.N. Kiselev, S.M. Fedotov, T.A. Reshetnyak, A.A. Radchenko**  
**New models of formation hazardous areas in coal seams at the regional and current levels.**

The article considers the physico-mechanical, physico-chemical and geomechanical-gas-thermodynamic models of the formation of explosive zones in the coal mass. A working hypothesis about the existence of heat waves of different levels and scales ahead of excavations, carried out on gas-bearing coal seams, is proposed.

**Keywords:** *physical-mechanical model, physical-chemical model, geomechanical-gas-thermodynamic model, physical-mechanical properties of coals, gas-kinetic properties of coals, stress-strain state, geomechanical, technological and thermodynamic processes, working hypothesis, heat waves.*

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ), Донецк  
ООО «Лемакс», Таганрог

Получено 02.11.2021

Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying (RANIMI), Donetsk  
Lemax LLC, Taganrog

*taty-resh@yandex.ru*