

ISSN 0136-4545

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

**Журнал
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ
МЕХАНИКИ**

№ 3 (80)

2022

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА: д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ: **М.Н. Пачева**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

д-р техн. наук, проф. А.В. Анциферов, д-р техн. наук, проф. В.Е. Болнокин, д-р техн. наук, проф. Н.И. Болонов, д-р физ.-мат. наук, проф. А.О. Ватульян, д-р техн. наук, проф. Л.П. Вовк, д-р техн. наук, проф. В.А. Глазунов, д-р техн. наук, с.н.с. А.А. Глухов, д-р физ.-мат. наук, проф. А.С. Гольцев, д-р физ.-мат. наук, проф. Г.В. Горр, д-р техн. наук, проф. В.В. Губанов, д-р техн. наук, с.н.с. В.А. Дрибан, д-р физ.-мат. наук, проф. А.М. Ковалев, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. Б.И. Коносевиц, д-р физ.-мат. наук, проф. И.А. Моисеенко, д-р техн. наук, проф. В.Ф. Мущанов, д-р техн. наук, проф. В.Н. Павлыш, д-р техн. наук, проф. А.А. Петраков, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. С.Н. Судаков, д-р техн. наук, проф. Г.М. Улитин, д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Шалдырван.

EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**

DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF: Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**

EXECUTIVE SECRETARY: **M.N. Pacheva**

EDITORIAL BOARD:

Dr. of tech., prof. A.V. Antsiferov, Dr. of tech., prof. V.E. Bolnokin, Dr. of tech., prof. N.I. Bolonov, Dr. of phys. and math., prof. A.O. Vatulyan, Dr. of tech., prof. L.P. Vovk, Dr. of tech., prof. V.A. Glazunov, Dr. of tech., senior researcher A.A. Glukhov, Dr. of phys. and math., prof. A.S. Goltsev, Dr. of phys. and math., prof. G.V. Gorr, Dr. of tech., prof. V.V. Gubanov, Dr. of tech., senior researcher V.A. Driban, Dr. of phys. and math., prof. A.M. Kovalev, Dr. of phys. and math., senior researcher B.I. Konosevich, Dr. of phys. and math., prof. I.A. Moiseyenko, Dr. of tech., prof. V.F. Mushchanov, Dr. of tech., prof. V.N. Pavlysh, Dr. of tech., prof. A.A. Petrakov, Dr. of phys. and math., senior researcher S.N. Sudakov, Dr. of tech., prof. G.M. Ulitin, Dr. of phys. and math., prof. V.A. Shaldyrvan.

Адрес редакции: 83001 Донецк, ул. Университетская, 24
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
Тел. 302 92 71, E-mail: jtam_donnu@mail.ru

Технический редактор: Пачева М.Н.

Научный журнал «Журнал теоретической и прикладной механики» включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (приказ МОН ДНР № 616 от 14.07.2021 г) по следующим группам научных специальностей и специальностям: 01.02.00 — Механика; 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ; 05.23.17 — Строительная механика; 25.00.20 — Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика.

Журнал включен в перечень РИНЦ (Лицензионный договор № 27-01/2020 от 23.01.2020 г.).

Утверждено к печати ученым советом
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016 г.

© Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Донецкий национальный университет», 2022

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Механика деформируемого твердого тела

- Глушанков Е.С.* Приближенное решение задачи термоупругости для многосвязной анизотропной пластинки при скачках температуры на контурах 5
- Болнокин В.Е., Глухов А.А., Сторожев В.И.* Анализ модели распространения сдвиговых упругих волн в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном геомассиве..... 14
- Глушанков Е.С.* Исследование влияния конвективного теплообмена с внешней средой на термоэлектромагнитоупругое состояние многосвязной пластинки из пьезоматериала с жестко подкрепленными отверстиями 20
- Моисеенко И.А., Мельничук Н.Ю.* Осесимметричные продольно-сдвиговые упругие волны в протяженных сплошных цилиндрах из шестифакторно функционально неоднородного трансверсально-изотропного материала..... 33

**Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ**

- Павлыш В.Н., Новиков А.О., Чеснокова О.В.* Математическое моделирование процесса нестационарного движения жидкости в анизотропной среде 60
- Павлыш В.Н., Перинская Е.В., Буняев С.М., Кандуба Н.В.* Численное решение нелинейной краевой задачи о принудительной конвекции в многокомпонентной среде 68
- Дремов В.В., Захаров Н.И., Сторожев С.В., Полянский Д.Д.* Нечетко-множественные модификации расчетных соотношений для усредненных термомеханических характеристик пакета слоистого углепластика: теоретический алгоритм..... 77

№ 3 (80) / 2022

Founded in 1970.

JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

CONTENTS

Solid Mechanics

- Glushankov E.S.* The approximate solution of the thermoelasticity problem for multiply connected anisotropic plate in case of temperature jump discontinuities on the contours..... 5
- Bolnokin V.E., Glukhov A.A., Storozhev V.I.* Analysis of the model of shear elastic waves propagation in a semi-infinite transversally-isotropic functional-gradient geomassif..... 14
- Glushankov E.S.* The investigation of the effect of the convective heat transfer on the thermo-electro-magneto-elastic state of the multiply connected piezoelectric plate with reinforced holes 20
- Moiseyenko I.A., Melnichuk N.I.* Axisymmetric longitudinal-shear elastic waves in extended solid cylinders from a six-factor functionally inhomogeneous transversally isotropic material..... 33

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes

- Pavlysh V.N., Novikov A.O., Chesnokova O.V.* Mathematical modeling of the process unsteady fluid motion in an anisotropic medium..... 60
- Pavlysh V.N., Perinskaya E.V., Bunyaev S.M., Kanduba N.V.* Numerical solution of a nonlinear boundary value problem about forced convection in a multicomponent environment..... 68
- Dremov V.V., Zakharov N.I., Storozhev S.V., Polyansky D.D.* Fuzzy-set modifications of the calculated relationships for averaged thermomechanical characteristics of a layered carbon plastic package: a theoretical algorithm.... 77

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2022-3-5-13

EDN:BEKNUR



©2022. Е.С. Глушанков

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ СКАЧКАХ ТЕМПЕРАТУРЫ НА КОНТУРАХ

В данной работе рассмотрена задача о действии на контурах бесконечной многосвязной анизотропной пластинки температуры, имеющей конечное число скачков. С помощью численных исследований установлены закономерности порождаемого такой температурной нагрузкой термонапряженного состояния с учетом физически реальных условий.

Ключевые слова: многосвязная анизотропная пластинка, скачок температуры на контуре, температурные напряжения, комплексные потенциалы.

Введение. В различных областях науки и техники в качестве элементов и деталей конструкций находят широкое применение тонкие многосвязные пластинки из анизотропных материалов. В процессе эксплуатации эти пластинки могут подвергаться различным температурным воздействиям, в результате которых в пластинке могут возникать высокие концентрации напряжений, что следует учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций [1, 2]. К настоящему времени решены задачи о действии разности температур [3], линейного (однородного) теплового потока [4], неоднородности температуры.

В данной работе решена задача термоупругости для анизотропной многосвязной пластинки, когда на контурах имеют место резкие скачки температуры. При решении задачи граничная функция, математически имеющая точки разрыва 1-го рода, аппроксимируется близкой к ней непрерывной функцией. Здесь следует учитывать, что в действительности температура на контуре будет непрерывной функцией, а изменение температуры между двумя «предельными» значениями скачка будет происходить в достаточно малой области контура. С учетом этого, решение задачи строится с использованием конформных отображений, комплексных потенциалов. Проведены численные исследования термонапряженного состояния (ТНС) многосвязной пластинки с установлением закономерностей влияния геометрических характеристик пластинки, свойств ее материала, а также характера распределения температуры на значения напряжений в пластинке.

1. Постановка и решение задачи. Рассмотрим пластинку из анизотропного материала, занимающую бесконечную многосвязную область S , ограниченную контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с центрами $O_l(x_{0l}, y_{0l})$, полуосями a_l, b_l , углами поворота φ_l (рис. 1). Контур L_l могут располагаться произвольно относительно друг друга, в том числе и пересекаться, образуя криволинейные контуры. На контурах пластинки заданы распределения температуры $T_l(\tau)$. Контур отверстий не подкреплены либо жестко подкреплены. Значения напряжений на бесконечности равны нулю.

Функции $T_l(\tau) = T_l(x, y)$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) кусочно-непрерывны на L_l и имеют конечное число точек разрыва первого рода (скачков) $M_{lj}^0(x_{lj}^0, y_{lj}^0)$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}, j = \overline{1, \mathcal{J}_l}$, \mathcal{J}_l — количество точек разрыва функции $T_l(x, y)$ на контуре L_l).

Если несвязанную задачу определения ТНС анизотропной пластинки решать с использованием комплексных потенциалов, то она сводится к последовательному определению комплексного потенциала теплопроводности $F_3(z_3)$ и комплексных потенциалов термоупругости $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) из соответствующих граничных условий. После определения этих функций значения основных характеристик ТНС (относительной температуры T , плотностей потока тепла q_x, q_y , напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, перемещений u, v) в точках пластинки вычисляются по формулам [3, 4]

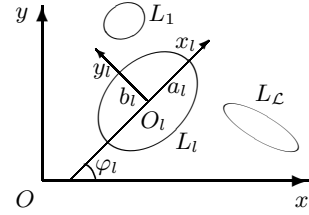


Рис. 1

$$T = 2 \operatorname{Re} F_3(z_3), \quad (1)$$

$$(q_x, q_y) = 2 \operatorname{Re} i z_{\Gamma} (\mu_3, -1) F_3'(z_3), \quad (2)$$

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi_k'(z_k), \quad (3)$$

$$(u, v) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_k, q_k) \Phi_k(z_k). \quad (4)$$

Здесь

$$z_{\Gamma} = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2};$$

μ_3 и μ_k ($k = \overline{1, 2}$) — корни характеристических уравнений теплопроводности и теории упругости [3, 4]

$$k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} = 0, \quad (5)$$

$$l_{4a}(\mu) = 0, \quad (6)$$

где

$$l_{4a}(\mu) = a_{11}\mu^4 + 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 + 2a_{26}\mu + a_{22};$$

$$p_k = a_{11}\mu_k^2 - a_{16}\mu_k + a_{12} + \frac{\delta_{k3}\alpha_1}{r_3},$$

Решение задачи термоупругости при скачках температуры на контурах

$$q_k = a_{12}\mu_k - a_{26} + \frac{a_{22}}{\mu_k} + \frac{\delta_{k3}\alpha_2}{r_3\mu_3};$$

$$r_3 = \frac{l_{2\alpha}(\mu_3)}{l_{4\alpha}(\mu_3)};$$

$$l_{2\alpha}(\mu_3) = -\alpha_1\mu_3^2 + \alpha_6\mu_3 - \alpha_2;$$

$$\Phi_3(z_3) = r_3 \int F_3(z_3) dz_3;$$

k_{ij} — коэффициенты теплопроводности материала пластинки; a_{ij} — коэффициенты деформации материала; α_i — коэффициенты теплового расширения материала; δ_{ij} — символ Кронекера.

Функции $F_3(z_3)$, $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) определены в многосвязных областях S_3 , S_k , получаемых из области S аффинными преобразованиями [3, 4]

$$z_3 = x + \mu_3 y, \quad (7)$$

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (8)$$

В общем случае эти функции имеют вид [3, 4]

$$F_3(z_3) = c_3 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{3l} w_{3l}(z_3) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{3ln} \varphi_{3ln}(z_3); \quad (9)$$

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k). \quad (10)$$

Здесь c_3 — вещественная постоянная, определяемая из условий на контурах пластинки; $D_{3l} = -q_l/4\pi\kappa_T$; q_l — суммарный тепловой поток через контур L_l в область S ; $w_{3l}(z_3) = \ln(z_3 - z_{3l})$; z_{3l} — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (9) произвольным точкам внутри контуров L_l ; c_{3ln} — комплексные постоянные, определяемые из условий на контурах пластинки; $\varphi_{3ln}(z_3) = \zeta_{3l}^{-n}$; ζ_{3l} — комплексные переменные, определяемые из конформных отображений;

$$N_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) w_{kl}(z_k);$$

Γ_k , A_{kl} , B_{kl} — постоянные, определяемые из решений систем уравнений

$$\sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k = (0, 0, 0, 0),$$

$$\sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, p_k, q_k) i A_{kl} = (0, 0, 0, 0),$$

$$\sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, p_k, q_k) iB_{kl} = (0, 0, 0, 0);$$

$$\Gamma_3 = r_3 c_3; \quad A_{3l} = r_3 D_{3l};$$

$$B_{3l} = r_3 (c_{3l1} R_{3l} - D_{3l} z_{3l}); \quad w_{kl} = \ln(z_k - z_{kl});$$

z_{kl} — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (10) произвольным точкам внутри контуров L_l ; $\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}$; ζ_{kl} — комплексные переменные, определяемые из конформных отображений.

В локальных системах координат $O_l x_l y_l$ параметрические уравнения эллипсов (рис. 1) имеют вид [3, 4]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе координат Oxy —

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l.$$

Здесь θ — угловой параметр контура ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).

Для каждой из точек скачка температуры $M_{lj}^0(x_{lj}^0, y_{lj}^0)$ существует значение этого параметра θ_{lj}^0 такое, что

$$\begin{aligned} x_{lj}^0 &= x_{0l} + a_l \cos \varphi_l \cos \theta_{lj}^0 - b_l \sin \varphi_l \sin \theta_{lj}^0, \\ y_{lj}^0 &= y_{0l} + a_l \sin \varphi_l \cos \theta_{lj}^0 + b_l \cos \varphi_l \sin \theta_{lj}^0. \end{aligned}$$

Тогда каждая кусочно-непрерывная функция $T_l(x, y) = T_l(\theta)$ на контуре L_l представима в виде совокупности функций, заданных и непрерывных на каждой эллиптической дуге контура L_l , ограниченной точками скачка M_{lj}^0 :

$$T_l(x, y) = T_l(\theta) = \{T_{lj}(\theta) \mid j = \overline{1, \mathcal{J}_l}, \theta \in (\theta_{lj}^0, \theta_{l,j+1}^0)\}.$$

Переменные ζ_{3l}, ζ_{kl} определяются из конформных отображений [3, 4]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right) \quad (11)$$

внешностей единичных кругов $|\zeta_{3l}| \geq 1, |\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{3l}, L_{kl} , получаемых из L_l аффинными преобразованиями (9), (10). Здесь

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}. \end{aligned}$$

Функция $F_3(z_3)$ должна удовлетворять граничному условию [3, 4]

$$2 \operatorname{Re} F_3(\tau_3) = T_l(\tau), \quad (12)$$

где τ — аффикс граничной точки, а τ_3 — точка, получаемая из нее аффинными преобразованиями (9).

Функции $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 2}$) должны удовлетворять граничным условиям [3, 4]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (d_{kl1}, d_{kl2}) \Phi_k(\tau_k) = (f_{l1}(\tau), f_{l2}(\tau)), \quad (13)$$

где τ_k ($k = \overline{1, 2}$) — точки, получаемые из граничных точек при аффинных преобразованиях (10); для неподкреплённых контуров L_l

$$(d_{kl1}, d_{kl2}) = (1, \mu_k),$$

$$(f_{l1}(\tau), f_{l2}(\tau)) = (c_{l1}, c_{l2}),$$

а для жестко подкреплённых контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}) = (p_k, q_k),$$

$$(f_{l1}(\tau), f_{l2}(\tau)) = (u_l(\tau), v_l(\tau)),$$

$u_l(\tau), v_l(\tau)$ — заданные на контуре значения перемещений.

В общем случае многосвязной области (рис. 1) неизвестные постоянные $c_3, D_{3l}, c_{3ln}, a_{kln}$ определяются из граничных условий (14) и (13) с использованием метода наименьших квадратов. Для этого на контурах L_i выбирается система точек $M_{im}(x_{im}, y_{im})$ ($m = \overline{1, \mathcal{M}_i}$), в которых минимизируются невязки граничных условий соответствующих задач.

В задаче теплопроводности, при подстановке функции (11) в граничное условие (14), для определения неизвестных постоянных c_3, D_{3l}, c_{3ln} получается система линейных алгебраических уравнений [3, 4]

$$2c_3 + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} w_{3l}(\tau_{3im}) D_{3l} + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{3ln}(\tau_{3im}) c_{3ln} = T_i(\tau_{im}) \quad (14)$$

$$(i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}),$$

где $\tau_{3im} = x_{im} + \mu_3 y_{im}$, τ_{im} — аффикс точки M_{im} . Систему (19) можно решать с использованием метода сингулярных разложений [5, 6]. После решения этой системы постоянные c_3, D_{3l}, c_{3ln} , а следовательно, и комплексный потенциал теплопроводности (11) будут известны. По известной функции можно в любой точке найти температуру и плотности потока тепла по формулам (1)–(2).

В задаче термоупругости, граничным условиям (13) будем удовлетворять в дифференциальной форме [3, 4], тогда при подстановке функций (11) и (12)

в продифференцированные условия (13) для определения неизвестных постоянных a_{kln} получается следующая система линейных алгебраических уравнений [3, 4]

$$\begin{aligned}
 & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} d_{ki\alpha} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) \varphi'_{kln}(\tau_{kim}) a_{kln} = \\
 & = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 d_{ki\alpha} \delta_{k,s} N'_k(\tau_{kim}) - 2 \operatorname{Re} d_{3i\alpha} \delta_{3,s} r_3 F_3(\tau_{3im}) + \frac{df_{i\alpha}}{ds}(\tau_{im}) \quad (15) \\
 & \quad (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}, \alpha = \overline{1, 2}),
 \end{aligned}$$

где $\delta_{k,s}(\tau_k) = d\tau_k/ds$, $\tau_{kim} = x_{im} + \mu_k y_{im}$. Систему (20) можно решать с использованием метода сингулярных разложений [5, 6]. После решения этой системы постоянные a_{kln} , а следовательно, комплексные потенциалы термоупругости (12) будут известны, и по ним можно находить значения основных характеристик ТНС в точках пластинки по формулам (3)–(6) [3, 4].

2. Результаты численных исследований. При проведении численных расчетов количество членов в рядах Лорана в функциях (11) и (12) и точек на контурах L_i , для которых составлялись системы уравнений (19) и (20), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности. Для этого, как показали исследования, необходимо было в указанных рядах оставлять от 120 до 200 членов, на каждом из контуров брать от 1200 до 2000 «коллокационных точек».

Были проведены численные исследования для пластинки из материалов: 1) стеклотекстолит КАСТ-В изотропный [2] (материал М1); 2) стеклопластик косоугольной намотки с наполнителем из алломоборосиликатного стекла и связующим агентом из малеиновой эпоксидной смолы [7] (материал М2).

Физико-механические постоянные для материала М1 имеют значения

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= 7,210 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}^{-1}, & a_{22} &= 7,210 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}^{-1}, \\
 a_{12} &= -0,860 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}^{-1}, & a_{66} &= 16,150 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}^{-1}, \\
 \alpha_1 &= 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}, & \alpha_2 &= 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}, \\
 k_{11} &= 20,950 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, & k_{22} &= 20,950 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)},
 \end{aligned}$$

а для материала М2 равны

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= 1,000 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}^{-1}, & a_{22} &= 0,280 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}^{-1}, \\
 a_{12} &= -0,077 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}^{-1}, & a_{66} &= 2,700 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}^{-1}, \\
 \alpha_1 &= 0,7 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}, & \alpha_2 &= 3,8 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}, \\
 k_{11} &= 0,279 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, & k_{22} &= 0,121 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}.
 \end{aligned}$$

В таблице 1 для пластинки из материала М2 с одним круговым отверстием радиуса a ($a_1 = b_1 = a$), на контуре которого задана температура

$$T_1(\theta) = \begin{cases} 1 \text{ К}, & 0 < \theta < \beta, \\ 0 \text{ К}, & \beta < \theta < 2\pi, \end{cases}$$

приведены значения нормальных напряжений σ_s в некоторых точках (с центральным углом θ , отсчитываемым от положительного направления оси Ox) контура отверстия на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от значения угла β . Наряду с точками, являющимися точками скачков температуры с центральными углами $\theta = \theta_{11}^0 = 0$ рад. и $\theta = \theta_{12}^0 = \beta$ рад., в таблице 1 приведены значения указанных напряжений в точках с центральными углами $\theta = \theta_{1j} \pm \pi/180$ рад. Эти значения приводятся соответственно выше и ниже значения напряжений в точке скачка и взяты в скобки.

Таблица 1. Значения напряжений σ_s в точках контура отверстия

θ , рад.	Значения β					
	π	$5\pi/6$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/6$
0	(0,029) 0,000 (-0,029)	(-0,020) -0,048 (-0,077)	(-0,056) -0,084 (-0,112)	(-0,072) -0,100 (-0,127)	(-0,064) -0,091 (-0,119)	(-0,036) -0,063 (-0,089)
$\pi/6$	-0,064	-0,101	-0,121	-0,121	-0,097	(-0,026) 0,005 (0,003)
$\pi/3$	-0,103	-0,127	-0,127	-0,099	(0,000) 0,014 (-0,017)	-0,030
$\pi/2$	-0,236	-0,210	-0,151	(-0,068) -0,126 (-0,169)	-0,084	-0,025
$2\pi/3$	-0,103	-0,073	(-0,097) -0,118 (-0,093)	-0,004	0,023	0,023
$5\pi/6$	-0,064	(-0,072) -0,064 (-0,031)	0,033	0,057	0,057	0,036
π	(-0,029) 0,000 (0,029)	0,063	0,091	0,100	0,084	0,048
$7\pi/6$	0,064	0,090	0,105	0,101	0,079	0,042
$4\pi/3$	0,103	0,125	0,130	0,113	0,079	0,038
$3\pi/2$	0,236	0,224	0,180	0,117	0,055	0,011
$5\pi/3$	0,103	0,065	0,024	-0,010	-0,026	-0,022
$11\pi/6$	0,064	0,022	-0,015	-0,037	-0,041	-0,026

В таблице 2 для пластинки из материала М2 с двумя круговыми отверстиями радиуса a ($a_l = b_l = a$) (рис. 2), на контурах которых задана температура

$$T_1(\theta) = T_2(\theta) = \begin{cases} 1 \text{ К}, & 0 < \theta < \pi, \\ 0 \text{ К}, & \pi < \theta < 2\pi, \end{cases}$$

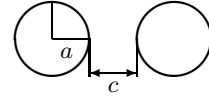


Рис. 2

приведены значения нормальных напряжений σ_s в некоторых точках контура левого отверстия в зависимости от относительного расстояния между контурами отверстий c/a .

Таблица 2.

Значения напряжений σ_s в точках контура левого отверстия

θ , рад.	Значения c/a					
	0, 01	0, 1	1	10	100	∞
$\pi/180$	-0, 001	-0, 021	-0, 027	-0, 028	-0, 028	-0, 029
$\pi/6$	0, 000	0, 001	-0, 003	-0, 045	-0, 062	-0, 064
$\pi/3$	-0, 014	-0, 016	-0, 027	-0, 078	-0, 100	-0, 103
$\pi/2$	-0, 220	-0, 221	-0, 237	-0, 242	-0, 236	-0, 236
$2\pi/3$	-0, 130	-0, 131	-0, 139	-0, 127	-0, 106	-0, 103
$5\pi/6$	-0, 078	-0, 079	-0, 083	-0, 077	-0, 066	-0, 064
$179\pi/180$	-0, 027	-0, 027	-0, 030	-0, 029	-0, 029	-0, 029

Выводы. Из данных таблиц и других полученных результатов следует, что значения напряжений в пластинке из материала М2 на два-три порядка превосходят значения соответствующих напряжений в пластинке из материала М1, поскольку материал М2 обладает лучшей теплопроводностью. В случае пластинки с несколькими отверстиями, если расстояние между контурами отверстий превосходит 20 – 30 максимальных характерных размеров, то взаимовлиянием отверстий на термонапряженное состояние около друг друга можно пренебречь.

Помимо этого, на распределение напряжений в пластинке влияет также угловое расстояние между точками скачков температуры на контурах отверстий. Так, при увеличении углового расстояния между точками скачков температуры значения напряжений в пластинке возрастают. Более значительная величина скачка температуры приводит к существенному росту значений напряжений в окрестности соответствующей точки и к менее заметному росту на отдалении от нее. В точках скачков температуры на контурах резко изменяются и значения напряжений. Чаще всего значения напряжений в точках скачков с угловым параметром $\theta = \theta_{ij}^0$ рад. являются промежуточными между значениями напряжений в точках с угловыми параметрами $\theta = \theta_{ij}^0 \pm \pi/180$ рад. Однако если материал пластинки обладает существенной анизотропией (как, например, материал М2), то напряжения в точке скачка может резко отличаться от среднего между вышеуказанными точками. На расстоянии от отверстий, составляющим

около 15–20 максимальных характерных размеров отверстий, в пластинке устанавливается близкое к однородному температурное состояние, и напряжения на таком расстоянии являются незначительными.

1. *Мотовиловец И.А.* Термоупругость / И.А. Мотовиловец, В.И. Козлов. – К.: Наук. думка, 1987. – 264 с. (Механика связных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 1).
2. *Космодамианский А.С.* Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров. – К. – Донецк: Вища школа, 1983. – 160 с.
3. *Калоеров С.А.* Термонапряженное состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Ю.С. Антонов // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 127–136.
4. *Калоеров С.А.* Термоупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами при действии линейного потока тепла и температуры на контурах / С.А. Калоеров, Ю.С. Антонов // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 102–116.
5. *Воеводин В.В.* Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
6. *Форсайт Дж.* Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моултер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
7. *Хорошун Л.П.* Термоупругие постоянные стеклопластика косоугольной намотки / Л.П. Хорошун, А.Х. Меликбекян, П.Г. Шишкин // Прикладная механика. – 1979. – Т. 15, № 1. – С. 13–18.

E.S. Glushankov

The approximate solution of the thermoelasticity problem for multiply connected anisotropic plate in case of temperature jump discontinuities on the contours.

A problem of the temperature with finite number of discontinuities acting on the contours of infinite multiply connected anisotropic plate is considered in this article. The regularities of the thermal stress state originated with this thermal loading considering physically realistic conditions are obtained with the numerical studies.

Keywords: multiply connected anisotropic plate, temperature jump discontinuity on the contour, thermal stresses, complex potentials.

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк

Получено 15.06.2022

Donetsk National University, Donetsk

eugenij.glushankov@gmail.com

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2022-3-14-19

EDN:BOBAVC



©2022. В.Е. Болнокин, А.А. Глухов, В.И. Сторожев

АНАЛИЗ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СДВИГОВЫХ УПРУГИХ ВОЛН В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОМ ГЕОМАССИВЕ

Представлен новый вариант модели описания физико-механических свойств полубесконечного массива из трансверсально-изотропного функционально-градиентного геоматериала с ортогональными граничной плоскости осью изотропии и направлением непрерывной неоднородности, локализованной в приграничной зоне и асимптотически сглаживающейся в глубине массива. Применительно к предложенной модели решена задача аналитического интегрирования уравнения распространения гармонических упругих волн сдвига вдоль произвольно ориентированного параллельного граничной плоскости направления.

Ключевые слова: полубесконечный упругий массив, неоднородные анизотропные горные материалы, распространение сдвиговых волн, аналитическое интегрирование волнового уравнения.

Введение. При синтезе и исследовании актуальных прикладных моделей распространения сейсмоакустических упругих волн в полубесконечных массивах горных пород, важным элементом достижения адекватности соответствующих моделей реальным свойствам геомассивов является учет непрерывной неоднородности физико-механических свойств слагающих горных пород при отходе от граничной поверхности вглубь полупространства с асимптотическим выходом на стабилизированные постоянные значения в глубине массива в случае неограниченного увеличения расстояния от граничной поверхности [1]. Данное соображение учитывалось в [2] при исследовании вопроса о существовании и свойствах локализованных поверхностных упругих волн в упругом массиве с непрерывным законом неоднородности по всей его толщине, где построено приближенное решение соответствующих волновых уравнений. В работах [3–5] для описания отмеченных свойств использовался прием выделения в массиве сопрягаемых зон в виде приграничного слоя с непрерывной экспоненциальной толщинной неоднородностью физико-механических параметров и находящейся под ним полубесконечной области с постоянными характеристиками плотности и модулей упругости.

В контексте представленных соображений, целью настоящей работы является описание нового варианта модели учета непрерывной неоднородности физико-механических свойств полубесконечного поперечно-анизотропного геомассива, локализованной у его поверхности, а также разработка методики интегриро-

вания формулируемого в рамках данной модели уравнения распространения горизонтально-поляризованных упругих волн сдвигового типа.

1. Общая характеристика и основные соотношения модели. Рассматривается упругий трансверсально-изотропный функционально-градиентный полубесконечный геомассив, занимающий в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$ область

$$V = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 \geq 0\}, \quad (1)$$

с ориентированными вдоль Ox_3 осью изотропии и направлением неоднородности. Для описания локализованной у его граничной поверхности $x_3 = 0$ непрерывной неоднородности физико-механических свойств со снижающейся при отходе от границы вглубь полупространства количественной мерой и с асимптотическим выходом на стабилизированные постоянные значения в глубине массива при неограниченном увеличении $|x_3|$, предлагается использование в качестве функционального закона изменения плотности и упругих постоянных массива представлений вида

$$c_{ij} = c_{ij0} \cdot \varphi(\lambda, \beta, x_3), \quad \rho = \rho_0 \cdot \varphi(\lambda, \beta, x_3) \quad (2)$$

$$(ij = 11, 12, 13, 33, 44), \quad \varphi(\lambda, \beta, x_3) = \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)),$$

где λ, β – действительные значения параметров неоднородности; $\beta > 0$ при $x_3 \geq 0$.

При данном варианте описания закона неоднородности для полупространства, в его глубине

$$c_{ij} \rightarrow c_{ij0}, \quad \rho \rightarrow \rho_0,$$

а при малых значениях толщинной координаты x_3 проявляется вид неоднородности в приграничной зоне массива. Параметр λ описывает максимальный порядок возмущения (отклонения) соответствующей характеристики у граничной поверхности $x_3 = 0$ от значения, асимптотически достигаемого в глубине полупространства при $x_3 \rightarrow \infty$, а параметр β описывает форму закона изменения этой характеристики от приграничной зоны вглубь полупространства. Характер изменения зависимостей вида $\varphi(\lambda, \beta, x_3) = \exp(\lambda \exp(-\beta x_3))$ для ряда значений параметров λ, β изображен на рисунке 1 (линия 1 отвечает значениям $\lambda = 0.1, \beta = 1.5$; линия 2 – $\lambda = 0.1, \beta = 1.0$; линия 3 – $\lambda = 0.1, \beta = 0.5$; линия 4 – $\lambda = 0.1, \beta = 0.1$) и дает представление о возможных вариантах описания этим способом свойств локализованной приграничной неоднородности.

Варьирование параметров λ, β позволяет в определенной мере описывать экспериментально обнаруживаемые закономерности изменения свойств материала массива при отходе от его границы на основе предлагаемой теоретической модели.

При исследовании задачи о распространении горизонтально поляризованных сдвиговых упругих волн вдоль направления Ox_1 в плоскости изотропии массива соответствующие представления комплексных функций волновых упругих перемещений $u_2(x_3, t)$ и напряжений σ_{12}, σ_{23} вводятся в виде

$$u_2 = f(x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - kx_1)), \quad \sigma_{12} = c_{66} \partial_1 u_2, \sigma_{23} = c_{44} \partial_3 u_2. \quad (3)$$

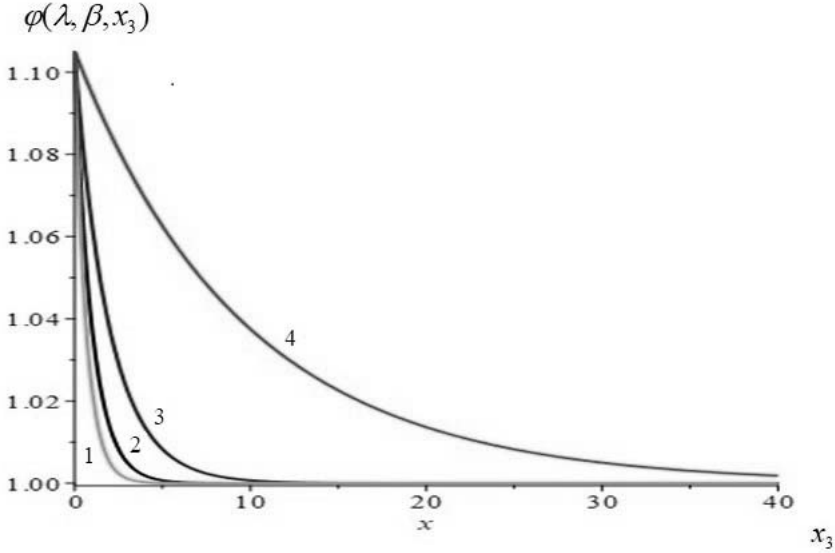


Рис. 1. Профиль функции неоднородности

Подстановка выражений (3) в соответствующее динамическое уравнение для упругой среды

$$\partial_1 \sigma_{12} + \partial_3 \sigma_{23} - \rho \ddot{u}_2 = 0, \quad \partial_j = \partial / \partial x_j, \quad (4)$$

с учетом соотношения

$$\partial_3 \sigma_{23} = c_{440} e^{\lambda e^{-\beta x_3}} e^{-\beta x_3} (-\lambda \beta) f' + c_{440} e^{\lambda e^{-\beta x_3}} f'', \quad (5)$$

приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами относительно функции $f(x_3)$

$$-k^2 c_{660} f(x_3) - c_{440} \lambda \beta e^{-\beta x_3} f' + c_{440} f'' + \rho_0 \omega^2 f = 0, \quad (6)$$

которое приводится к унифицированному виду

$$f'' - \alpha^2 f = \gamma e^{-\beta x_3} f', \quad (7)$$

где

$$\alpha^2 = (c_{660} k^2 - \rho_0 \omega^2) / c_{440}, \quad \gamma = \lambda \beta. \quad (8)$$

2. Методика интегрирования разрешающего уравнения модели. В качестве аналитического подхода к интегрированию уравнения (7) может быть применен метод последовательных приближений. При этом вводится исходное представление

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_p + \dots, \quad (9)$$

и задача сводится к построению решений рекуррентной последовательности дифференциальных уравнений

$$f_0'' - \alpha^2 f_0 = 0, \quad f_1'' - \alpha^2 f_1 = \gamma e^{-\beta x_3} f_0', \quad \dots, \quad f_p'' - \alpha^2 f_p = \gamma e^{-\beta x_3} f_{p-1}', \quad \dots \quad (10)$$

Представление для решения однородного уравнения относительно f_0 записывается в форме

$$f_0 = c_+ e^{\alpha x_3} + c_- e^{-\alpha x_3} \quad (11)$$

с произвольными коэффициентами c_+ , c_- . Соответственно данному представлению выбираются два исходных варианта задания $f_0 = e^{\alpha x_3}$ и $f_0 = e^{-\alpha x_3}$, на основе которых из рекуррентной последовательности (10) соответственно определяются два базисных решения (7).

Для варианта выбора $f_0 = e^{\alpha x_3}$ из (10) могут быть поэтапно получены представления

$$f_1 = A_1 e^{(\alpha-\beta)x_3}, \quad f_2 = A_2 e^{(\alpha-2\beta)x_3}, \quad \dots, \quad f_p = A_p e^{(\alpha-p\beta)x_3}, \quad \dots, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \gamma \alpha \left((\alpha - \beta)^2 - \alpha^2 \right)^{-1} = \gamma \alpha \left((\beta)^2 - 2\alpha\beta \right)^{-1}, \\ A_2 &= A_1 \gamma (\alpha - \beta) \left((\alpha - 2\beta)^2 - \alpha^2 \right)^{-1} = A_1 \gamma (\alpha - \beta) \left((2\beta)^2 - 4\alpha\beta \right)^{-1}, \dots, \\ A_p &= A_{p-1} \gamma (\alpha - (p-1)\beta) \left((\alpha - p\beta)^2 - \alpha^2 \right)^{-1} = \\ &= A_{p-1} \gamma (\alpha - (p-1)\beta) \left((p\beta)^2 - 2p\alpha\beta \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

В итоге, для первого базисного частного решения (7) записывается явное аналитическое представление

$$f_+(x_3) = e^{\alpha x_3} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n \left[\prod_{p=1}^n (\alpha - (p-1)\beta) \left((\alpha - p\beta)^2 - \alpha^2 \right)^{-1} \right] e^{(\alpha-n\beta)x_3}. \quad (14)$$

Соответственно, второе базисное решение (7) описывается представлением вида (14), в котором параметр α заменяется на $-\alpha$.

В рассматриваемой области V отвечающее физическим условиям затухания интенсивности волновых движений при $x_3 \rightarrow \infty$ решение (7) имеет вид

$$\begin{aligned} f_-(x_3) &= e^{-\alpha x_3} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n \left[\prod_{p=1}^n (-\alpha - (p-1)\beta) \left((-\alpha - p\beta)^2 - \alpha^2 \right)^{-1} \right] e^{(-\alpha-n\beta)x_3} \\ &(\alpha > 0, \beta > 0). \end{aligned} \quad (15)$$

Определяя для ряда в представлении (15) мажорирующий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta^n = \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma|^n \left[\prod_{p=1}^n |(-\alpha - (p-1)\beta)| \left| \left((-\alpha - p\beta)^2 - \alpha^2 \right)^{-1} \right| \right]$$

в области $x_3 \in [0, \infty]$ и используя признак Даламбера можно найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\eta_{n+1}/\eta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(|\gamma|(\alpha + n\beta) / \left((\alpha + (n+1)\beta)^2 - \alpha^2 \right) \right) = 0,$$

что обосновывает равномерную абсолютную сходимость данного ряда.

Верификации полученных представлений (14), (15) для базисных частных решений (7) проведена также на базе применения к этому уравнению процедуры численного интегрирования с использованием встроенной процедуры пакета Maple; реализуемое подобным способом сопоставление показывает высокую точность соответствия получаемых результатов вычислений.

Рассчитанный в качестве примера график зависимости $|f_-(x_3)|$ ($x_3 \in [0, 10]$) при $\lambda = 0.1, \beta = 0.1$ изображен на рисунке 2.

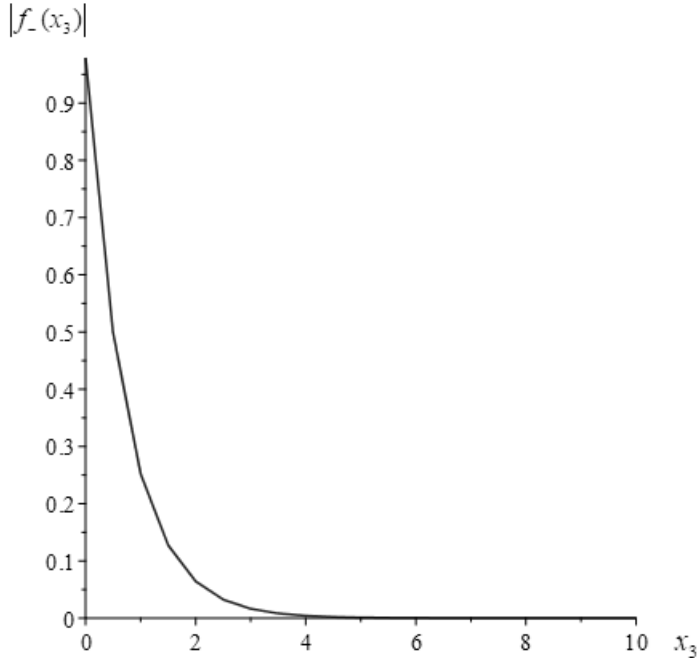


Рис. 2. Профиль функции $|f_-(x_3)|$

Заключение. Полученные на основе вышеописанного подхода аналитические представления вида (14), (15) для амплитудных функций волн сдвигового типа могут быть использованы при численно-аналитическом решении задач о распространении волн деформаций в однородных и составных волноводных

структурах, компонентами которых являются полубесконечные трансверсально-изотропные функционально-градиентные упругие тела с локализованной у граничной поверхности непрерывной экспоненциальной толщинной неоднородностью физико-механических параметров [6]. Объектами данного типа являются, в частности, области геомассивов вне пластов полезных ископаемых, исследуемые геоакустическими методами. Так, представленные результаты позволяют усовершенствовать методику анализа закономерностей распространения локализованных сдвиговых упругих волн вдоль слоя-пласта, заключенного между упругими неоднородными полупространствами горных пород.

1. Капитонов А.М. Физические свойства горных пород западной части Сибирской платформы / А.М. Капитонов, В.Г. Васильев. — Красноярск: Сибирский фед. ун-т, 2011. — 424 с.
2. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах / И.А. Викторов. — М.: Наука, 1981. — 142 с.
3. Birman V. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures / V. Birman V., L. W. Byrd // Appl. Mech. Rev. — 2007. — Vol. 60, N 5. — P. 195–216.
4. FGM: Design, processing and applications / Y. Miyamoto, W. A. Kaysser, B. H. Rabin et al. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. — 434 p.
5. Yang Y.-H. Non-destructive detection of a circular cavity in a finite functionally graded Material layer using anti-plane shear waves / Y.-H. Yang, L.-Z. Wu, X.-Q. Fang // J. Nondestructive Eval. — 2010. — Vol. 29. — P. 233–240.
6. Бирюков С.В. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах / С.В. Бирюков, Ю.В. Гуляев, В.В. Крылов, В.П. Плесский. — М.: Наука, 1991. — 414 с.

V.E. Bolnokin, A.A. Glukhov, V.I. Storozhev

Analysis of the model of shear elastic waves propagation in a semi-infinite transversally-isotropic functional-gradient geomassif.

A new version of the model for describing the physical and mechanical properties of a semi-infinite array of a transversely isotropic functionally graded geomaterial with an isotropy axis orthogonal to the boundary plane and a direction of continuous inhomogeneity localized in the boundary zone and asymptotically smoothing in the depths of the array is presented. As applied to the proposed model, the problem of analytical integration of the equation for the propagation of harmonic elastic shear waves along an arbitrarily oriented direction parallel to the boundary plane is solved.

Keywords: *semi-infinite elastic massif, heterogeneous anisotropic rock materials, shear wave propagation, analytical integration of the wave equation.*

ФГБУН “Ин-т машиноведения им. А.А. Благонравова РАН”,
Москва
ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк

Получено 01.07.2022

Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy
of Sciences, Moscow
Donetsk National University, Donetsk
stvi@donnu.ru

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2022-3-20-32

EDN:GRWIIZ



©2022. Е.С. Глушанков

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ НА ТЕРМОЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСВЯЗНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ ПЬЕЗОМАТЕРИАЛА С ЖЕСТКО ПОДКРЕПЛЕННЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

В данной работе приведены результаты исследований термоэлектромагнитоупругого состояния бесконечной многосвязной пластинки из пьезоматериала, находящейся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой. Контуры некоторых отверстий в пластинке жестко подкреплены. С помощью численных исследований изучено влияние геометрических характеристик пластинки, свойств ее материала, характеристик конвективного теплообмена, а также подкреплений на контурах отверстий на значения основных характеристик термоэлектромагнитоупругого состояния пластинки.

Ключевые слова: линейный поток тепла, конвективный теплообмен, многосвязная пластинка из пьезоматериала, жестко подкрепленные контуры отверстий, температурные напряжения, комплексные потенциалы.

Введение. В современной науке и технике широко используются конструкции, в которых в качестве элементов встречаются тонкие пластинки, изготовленные из пьезоматериалов [1]. В этих пластинках по технологическим или эксплуатационным причинам могут присутствовать концентраторы напряжений типа отверстий или трещин. В процесс эксплуатации пластинки могут подвергаться действию температурных полей, которые могут вызывать высокие концентрации напряжений в пластинке [2, 3]. К настоящему времени решены самые различные задачи о действии температурных полей в тонких пластинках из пьезоматериалов, в т.ч. разности температур [4], линейного потока тепла [5].

В работах [6, 7, 8, 9] решено множество задач термоупругости для тел из материалов, не обладающих пьезосвойствами, когда на границе тел имеет место конвективный теплообмен с внешней средой.

В работе [10] решена задача о действии линейного потока в многосвязной пластинке из пьезоматериала, на контурах которой действует конвективный теплообмен с внешней средой. При проведении численных исследований контуры пластинки полагались неподкрепленными.

В данной же работе исследовано влияние на термоэлектромагнитоупругого состояния (ТЭМУС) пластинки из пьезоматериала, находящейся в условиях при конвективного теплообмена с внешней средой, жесткого подкрепления контуров отверстий. Для случая бесконечной пластинки с одним жестко подкреп-

ленным эллиптическим отверстием приведено точное аналитическое решение задачи. Для общего случая многосвязности задача решена для пластинки как с жестко подкрепленными, так и с неподкрепленными контурами отверстий, с использованием метода наименьших квадратов. Проведены численные исследования термоэлектромагнитоупругого состояния (ТЭМУС) пластинки с одним или двумя круговыми отверстиями. Показано влияние жесткого подкрепления контуров отверстий, геометрических характеристик пластинки, свойств ее материала и коэффициента теплообмена на распределение напряжений в пластинке.

1. Постановка задачи. Рассмотрим многосвязную пластинку из пьезоматериала, занимающую бесконечную область S , ограниченную контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с центрами в точках $O_l(x_{0l}, y_{0l})$, полуосями a_l, b_l , углами поворота φ_l (рис. 1). Контур отверстия L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) имеет место конвективный теплообмен с коэффициентами h_l с внешней средой температуры \mathfrak{T}_l . Контур не подкреплён либо жестко подкреплён. На бесконечности под углом α к оси Ox действует линейный тепловой поток плотности q , а напряжения и индукции электромагнитного поля равны нулю.

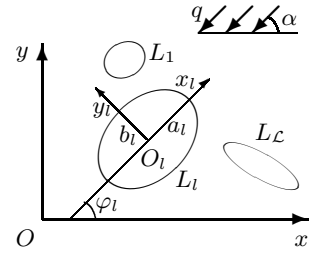


Рис. 1

Несвязанную задачу термоэлектромагнитоупругости для пьезопластинки будем решать с использованием комплексных потенциалов. Задача сводится к последовательному определению сперва комплексного потенциала теплопроводности $F_5(z_5)$, а затем комплексных потенциалов термоэлектромагнитоупругости $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) из соответствующих граничных условий. После этого значения основных характеристик ТЭМУС (температура T , плотности потока тепла q_x, q_y , напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, индукции электромагнитного поля D_x, D_y, B_x, B_y , напряженности электромагнитного поля E_x, E_y, H_x, H_y , перемещения u, v , потенциалы электромагнитного поля φ, ψ) в любой точке пластинки определяются по формулам [4, 5]

$$T = T^* + 2 \operatorname{Re} F_5'(z_5); \quad (1)$$

$$(q_x, q_y) = (q_x^*, q_y^*) + 2 \operatorname{Re} i \varkappa_T (\mu_5, -1) F_5'(z_5); \quad (2)$$

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi_k'(z_k); \quad (3)$$

$$(D_x, D_y, B_x, B_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\nu_k \mu_k, -\nu_k, \rho_k \mu_k, -\rho_k) \Phi_k'(z_k); \quad (4)$$

$$(E_x, E_y, H_x, H_y) = (E_x^*, E_y^*, H_x^*, H_y^*) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi_k'(z_k); \quad (5)$$

$$(u, v, \varphi, \psi) = (u^*, v^*, \varphi^*, \psi^*) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k). \quad (6)$$

Здесь

$$T^* = q(t_x x + t_y y),$$

$$t_x = \frac{k_{22} \cos \alpha - k_{12} \sin \alpha}{\varkappa_T^2}, \quad t_y = \frac{k_{11} \sin \alpha - k_{12} \cos \alpha}{\varkappa_T^2},$$

$$\varkappa_T = \sqrt{k_{11} k_{22} - k_{12}^2};$$

$$q_x^* = -q \cos \alpha, \quad q_y^* = -q \sin \alpha;$$

μ_5 — корень характеристического уравнения задачи теплопроводности [4, 5]

$$k_{22} \mu^2 + 2k_{12} \mu + k_{11} = 0; \quad (7)$$

μ_k ($k = \overline{1, 4}$) — корни характеристического уравнения задачи термоэлектромагнитоупругости [4, 5]

$$l_8(\mu) = 0; \quad (8)$$

где

$$l_8(\mu) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix};$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11} \mu^4 + 2s_{16} \mu^3 + (2s_{12} + s_{66}) \mu^2 + 2s_{26} \mu + s_{22},$$

$$l_{3g}(\mu) = g_{11} \mu^3 - (g_{21} + g_{16}) \mu^2 + (g_{12} + g_{26}) \mu + g_{22},$$

$$l_{3p}(\mu) = p_{11} \mu^3 - (p_{21} + p_{16}) \mu^2 + (p_{12} + p_{26}) \mu + p_{22},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11} \mu^2 + 2\beta_{12} \mu - \beta_{22},$$

$$l_{2\nu}(\mu) = -\nu_{11} \mu^2 + 2\nu_{12} \mu - \nu_{22},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11} \mu^2 + 2\chi_{12} \mu - \chi_{22};$$

$$\nu_k = \frac{l_{3p}(\mu_k) l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \nu_5 = \frac{r_\chi}{r_5},$$

$$\rho_k = \frac{l_{3g}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3p}(\mu_k)l_{2\beta}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1,4}), \quad \rho_5 = \frac{r_\omega}{r_5};$$

$$r_5 = \frac{l_5(\mu_5)}{l_8(\mu_5)}, \quad r_\chi = \frac{l_\chi(\mu_5)}{l_8(\mu_5)}, \quad r_\omega = \frac{l_\omega(\mu_5)}{l_8(\mu_5)};$$

$$l_5(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{1t}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{1m}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\chi(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\omega(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) \end{vmatrix};$$

$$l_{2\alpha}(\mu_5) = -\alpha_1\mu_5^2 + \alpha_6\mu_5 - \alpha_2,$$

$$l_{1t}(\mu_5) = t_1\mu_5 - t_2,$$

$$l_{1m}(\mu_5) = m_1\mu_5 - m_2;$$

$$p_k = s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} - (g_{11}\mu_k - g_{12})\nu_k - (p_{11}\mu_k - p_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}\alpha_1}{r_5},$$

$$q_k = s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} - (g_{21}\mu_k - g_{22})\nu_k - (p_{21}\mu_k - p_{22})\rho_k + \frac{\delta_{k5}\alpha_2}{r_5\mu_5},$$

$$r_k^0 = g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})\nu_k - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}t_1}{r_5},$$

$$h_k^0 = p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\nu_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}m_1}{r_5};$$

$$(E_x^*, E_y^*, H_x^*, H_y^*) = (t_1, t_2, m_1, m_2)T^*;$$

$$u^* = q \left(\frac{\alpha_1 t_x}{2} x^2 - \frac{\alpha_2 t_x - \alpha_6 t_y}{2} y^2 + \alpha_1 t_y x y \right),$$

$$v^* = q \left(\frac{\alpha_2 t_y}{2} y^2 - \frac{\alpha_1 t_y - \alpha_6 t_x}{2} x^2 + \alpha_2 t_x x y \right),$$

$$\varphi^* = -q \left(\frac{t_1 t_x}{2} x^2 - \frac{t_2 t_y}{2} y^2 - t_1 t_x x y \right),$$

$$\psi^* = -q \left(\frac{m_1 t_x}{2} x^2 - \frac{m_2 t_y}{2} y^2 - m_1 t_x x y \right);$$

$$\Phi_5(z_5) = r_5 \int F_5(z_5) dz_5;$$

k_{ij} — коэффициенты теплопроводности материала пластинки; s_{ij} — коэффициенты деформации материала; g_{ij} и p_{ij} — пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты; β_{ij} , ν_{ij} и χ_{ij} — коэффициенты диэлектрической, электромагнитной и магнитной проницаемостей материала; α_i — коэффициенты теплового расширения материала; t_i и m_i — пирозлектрические и пирромагнитные модули материала; δ_{ij} — символ Кронекера.

Комплексные потенциалы $F_5(z_5)$, $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1,4}$) определены в многосвязных областях S_5 , S_k , получаемых из области S аффинными преобразованиями [4, 5]

$$z_5 = x + \mu_5 y, \quad (9)$$

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (10)$$

Эти функции в общем случае многосвязности имеют вид [4, 5]

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l} w_{5l}(z_5) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5); \quad (11)$$

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k). \quad (12)$$

Здесь c_5 — вещественная постоянная, определяемая из условий на контурах пластинки; $D_{5l} = -q_l/4\pi\kappa_T$; q_l — суммарный тепловой поток через контур L_l в область S ; $w_{5l}(z_5) = \ln(z_5 - z_{5l})$; z_{5l} — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (9) произвольным точкам внутри контуров L_l ; c_{5ln} — комплексные постоянные, определяемые из условий на контурах пластинки; $\varphi_{5ln}(z_5) = \zeta_{5l}^{-n}$; ζ_{5l} — комплексные переменные, определяемые из конформных отображений;

$$N_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl});$$

Γ_k , A_{kl} , B_{kl} — постоянные, определяемые из систем уравнений

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, \nu_k, \mu_k \nu_k, \rho_k, \mu_k \rho_k) \Gamma_k = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);$$

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i A_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);$$

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i B_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);$$

$$\Gamma_5 = r_5 c_5; \quad A_{5l} = r_5 D_{5l}; \quad B_{5l} = r_5 (c_{511} R_{51} - D_{5l} z_{5l});$$

$w_{kl} = \ln(z_k - z_{kl})$; z_{kl} — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (10) произвольным точкам внутри контуров L_l ; $\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}$; ζ_{kl} — комплексные переменные, определяемые из конформных отображений.

В локальных системах координат $O_l x_l y_l$ параметрические уравнения эллипсов (рис. 1) имеют вид [4, 5]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе Oxy координат —

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l. \end{aligned}$$

Здесь θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) — угловой параметр уравнения контура.

Комплексные переменные ζ_{5l} , ζ_{kl} определяются из конформных отображений внешностей единичных кругов $|\zeta_{5l}| \geq 1$, $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{5l} , L_{kl} , получаемых из L_l аффинными преобразованиями (9), (10) [4, 5]:

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (13)$$

где

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}.$$

Функция $F_5(z_5)$ должна удовлетворять граничному условию [4, 5, 10]

$$2 \operatorname{Re} (h_l F_5(\tau_5) + i \mathcal{X}_T \delta_{5,s}(\tau_5) F_5'(\tau_5)) = q_n^* - h_l (T^* - \mathfrak{T}_l), \quad (14)$$

где

$$q_n^* = q_x^* \cos(nx) + q_y^* \cos(ny);$$

где τ — аффикс граничной точки; τ_5 — точка, получаемая из нее при аффинном преобразовании (9); $\delta_{5,s}(\tau_5) = d\tau_5/ds$, s — дуга контура отверстия.

Функции $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1,4}$) должны удовлетворять граничным условиям задачи термоэлектромагнитоупругости в дифференциальной форме [4, 5]

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) \delta_{k,s}(\tau_k) \Phi'_k(\tau_k) = \\ = \left(\frac{df_{l1}}{ds}, \frac{df_{l2}}{ds}, \frac{df_{l3}}{ds}, \frac{df_{l4}}{ds} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где τ_k ($k = \overline{1,4}$) — точки, получаемые из граничных точек при аффинных преобразованиях (10); $\delta_{k,s}(\tau_k) = d\tau_k/ds$; для неподкрепленных контуров L_l

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (1, \mu_k, \nu_k, \rho_k),$$

$$(f_{l1}, f_{l2}, f_{l3}, f_{l4}) = (c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}),$$

а для жестко подкрепленных контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (p_k, q_k, \nu_k, \rho_k),$$

$$(f_{l1}, f_{l2}, f_{l3}, f_{l4}) = (-u^*, -v^*, c_{l3}, c_{l4}).$$

2. Решение задачи для бесконечной пластинки с эллиптическим отверстием.

Рассмотрим отнесённую к декартовой системе координат бесконечную пластинку с эллиптическим отверстием, контур которого обозначим через L_1 , его полуоси — a_1, b_1 , угол поворота — φ_1 (рис. 2). Центр эллиптического контура совпадает с центром координат. На бесконечности действует линейный поток тепла плотности q под углом α к оси Ox . Через контур имеет место конвективный теплообмен с внешней средой температуры \mathfrak{T}_1 с коэффициентом теплообмена h_1 . На бесконечности отсутствуют силовые и электромагнитные воздействия. Контур отверстия жестко подкреплен, потоки электромагнитной индукции через него равны нулю.

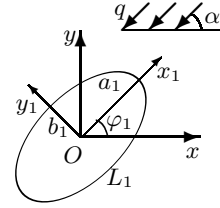


Рис. 2

Задача теплопроводности. На основе (11) функция $F_5(z_5)$ принимает вид [10]

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{51n}}{\zeta_{51}^n}. \quad (16)$$

Подставляя функцию (16) в граничное условие (14) и применяя метод рядов, получим, что $c_{51n} = 0$ ($n = 2, 3, \dots$), а для c_5 и c_{511} получаются следующие выражения [10]:

$$c_5 = \mathfrak{T}_1/2,$$

$$\begin{aligned} c_{511} = \frac{q}{2(h_1 + \varkappa_T)} \left[a_1 (i \sin(\alpha - \varphi_1) - h_1 (t_x \cos \varphi_1 + t_y \sin \varphi_1)) + \right. \\ \left. + i b_1 (i \cos(\alpha - \varphi_1) + h_1 (t_y \cos \varphi_1 - t_x \sin \varphi_1)) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, комплексный потенциал теплопроводности (16) имеет вид [10]

$$F_5(z_5) = c_5 + \frac{c_{511}}{\zeta_{51}}. \quad (17)$$

Функция $F_5(z_5)$ становится известной, и тогда можно в любой точке пластинки находить температуру и плотности потока тепла по формулам (1), (2).

Задача термоэлектромагнитоупругости. Для функции $\Phi_5(z_5)$ получим [10]

$$\Phi_5(z_5) = r_5 \int F_5(z_5) dz_5 = \Gamma_5 z_5 + B_{51} \ln \zeta_{51} + \frac{a_{512}}{\zeta_{51}^2},$$

где

$$\Gamma_5 = r_5 c_5, \quad B_{51} = r_5 c_{511} R_{51}, \quad a_{512} = r_5 c_{511} R_{51} m_{51} / 2.$$

Тогда для функций $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) получим [10]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + B_{k1} \ln \zeta_{k1} + \frac{a_{k12}}{\zeta_{k1}^2}. \quad (18)$$

Подставляя функции (18) в граничные условия (15) и применяя метод рядов, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных a_{k12} :

$$\sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, \nu_k, \rho_k) a_{k12} = (E_1, E_2, E_3, E_4),$$

где

$$\begin{aligned} E_1 &= -p_5 a_{512} - \frac{q}{8} ((\alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 b_1^2)(t_x \cos \varphi_1 + t_y \sin \varphi_1) - \\ &\quad - (\alpha_6 b_1^2 - 2\alpha_1 a_1 b_1 i)(t_y \cos \varphi_1 - t_x \sin \varphi_1)), \\ E_2 &= -q_5 a_{512} - \frac{q}{8} ((\alpha_6 b_1^2 + 2\alpha_2 a_1 b_1 i)(t_x \cos \varphi_1 + t_y \sin \varphi_1) - \\ &\quad - (\alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 b_1^2)(t_y \cos \varphi_1 - t_x \sin \varphi_1)), \\ E_3 &= -\nu_5 a_{512} - \frac{q}{8} (t_1(a_1^2 + 2a_1 b_1 i)(t_x \cos \varphi_1 + t_y \sin \varphi_1) - \\ &\quad - t_2 b_1^2(t_y \cos \varphi_1 - t_x \sin \varphi_1)), \\ E_4 &= -\rho_5 a_{512} - \frac{q}{8} (m_1(a_1^2 + 2a_1 b_1 i)(t_x \cos \varphi_1 + t_y \sin \varphi_1) - \\ &\quad - m_2 b_1^2(t_y \cos \varphi_1 - t_x \sin \varphi_1)). \end{aligned}$$

После решения этой системы уравнений становятся известными постоянные a_{k12} , а следовательно, и функции $\Phi_k(z_k)$, и тогда можно в любой точке пластинки находить значения основных характеристик ТЭМУС по формулам (3)–(6).

3. Решение задачи для бесконечной многосвязной пластинки. В общем случае многосвязной области (рис. 1) неизвестные постоянные c_5 , D_{5l} , c_{5ln} , a_{kln} , входящие в функции (11) и (12), определяются из граничных условий (14)

и (15) с использованием метода наименьших квадратов. Для этого на контурах L_i ($i = \overline{1, \mathcal{L}}$) выберем систему точек $M_{im}(x_{im}, y_{im})$ ($m = \overline{1, \mathcal{M}_i}$), в которых следует минимизировать невязки граничных условий задач теплопроводности и термоэлектромагнитоупругости.

Задача теплопроводности. При подстановке функции (11) в граничное условие (14), для определения неизвестных постоянных c_5 , D_{5l} , c_{5ln} получается система линейных алгебраических уравнений [10]

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} h_l c_5 + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (h_l w_{5l}(\tau_{5im}) + i \varkappa_T \delta_{5,s}(\tau_{5im}) w'_{5l}(\tau_{5im})) D_{5l} + \\ & + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (h_l \varphi_{5ln}(\tau_{5im}) + i \varkappa_T \delta_{5,s}(\tau_{5im}) \varphi'_{5ln}(\tau_{5im})) c_{5ln} = \\ & = q_n^*(\tau_{im}) - h_l (T^*(\tau_{im}) - \mathfrak{T}_l) \quad (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\tau_{5im} = x_{im} + \mu_5 y_{im}$, τ_{im} — аффикс точки M_{im} . После решения этой системы с использованием метода сингулярных разложений [11] постоянные c_5 , D_{5l} , c_{5ln} , а следовательно, и комплексный потенциал теплопроводности (11) будут известны. По известной функции (11) можно в любой точке пластинки найти температуру и плотности потока тепла по формулам (1), (2) [4, 5, 10].

Задача термоэлектромагнитоупругости. При подстановке функций (11) и (12) в граничные условия (15) для определения неизвестных постоянных a_{kln} получается следующая система линейных алгебраических уравнений [10]:

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) \varphi'_{kln}(\tau_{kim}) a_{kln} = \\ & = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) N'_k(\tau_{kim}) - \\ & - 2 \operatorname{Re} d_{5ip} \delta_{5,s}(\tau_{5im}) r_5 F_5(\tau_{5im}) + \frac{df_{ip}}{ds}(\tau_{im}) \\ & (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}, p = \overline{1, 4}), \end{aligned} \quad (20)$$

где $\tau_{kim} = x_{im} + \mu_k y_{im}$. После решения этой системы с использованием метода сингулярных разложений [11] постоянные a_{kln} , а следовательно, комплексные потенциалы термоэлектромагнитоупругости (12), будут известны. По известным функциям (12) можно в любой точке пластинки найти значения основных характеристик ТЭМУС по формулам (3)–(6) [4, 5, 10].

4. Численные исследования. При проведении численных расчетов количество членов в рядах Лорана в функциях (11), (12) и количество точек M_{im} на контурах L_i , для которых составлялись системы линейных алгебраических уравнений (19) и (20), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (относительная погрешность не становилась менее сотых долей процента). Для этого

необходимо было в указанных рядах оставлять от 30 до 40 членов, на каждом из контуров брать от 200 до 400 «коллокационных точек».

Были проведены численные исследования для пластинки из композита $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ (материал М1) [12]. Физико-механические постоянные этого материала имеют значения:

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= 7,165 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad s_{22} = 6,797 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad s_{66} = 19,912 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \\
 s_{12} &= -2,337 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad g_{16} = 2,028 \cdot 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{ м}^2, \\
 g_{21} &= -0,496 \cdot 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{ м}^2, \quad g_{22} = 1,157 \cdot 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{ м}^2, \\
 p_{16} &= 1,850 \cdot 10^{-5} \text{ МТл}^{-1}, \quad p_{21} = 0,576 \cdot 10^{-5} \text{ МТл}^{-1}, \quad p_{22} = 1,186 \cdot 10^{-5} \text{ МТл}^{-1}, \\
 \beta_{11} &= 0,156 \cdot 10^3 \text{ МН} \cdot \text{ м}^2 \cdot \text{ МКл}^{-2}, \quad \beta_{22} = 0,137 \cdot 10^3 \text{ МН} \cdot \text{ м}^2 \cdot \text{ МКл}^{-2}, \\
 \nu_{11} &= -0,190 \cdot 10^{-1} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{ м} \cdot \text{ МА}, \quad \nu_{22} = -0,185 \cdot 10^{-1} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{ м} \cdot \text{ МА}, \\
 \chi_{11} &= 0,336 \cdot 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{ МТл}^{-1}, \quad \chi_{22} = 0,119 \cdot 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{ МТл}^{-1}, \\
 \alpha_1 &= 8,530 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad \alpha_2 = 1,990 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \\
 t_2 &= 133,000 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot (\text{МКл} \cdot \text{ К})^{-1}, \quad m_2 = 133,000 \cdot 10^{-3} \text{ МА} \cdot (\text{м} \cdot \text{ К})^{-1}, \\
 k_{11} &= 2,500 \cdot 1 \text{ Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{ К})^{-1}, \quad k_{22} = 2,500 \cdot 1 \text{ Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{ К})^{-1}.
 \end{aligned}$$

В таблице 1 для пластинки с одним круговым отверстием радиуса a ($a_1 = b_1 = a$) (рис. 3, а), в которой действует линейный поток тепла плотности q под углом $\alpha = \pi/2$ рад., через контур которого имеет место конвективный теплообмен с коэффициентом h ($h_1 = h$) с внешней средой температуры $\mathfrak{T}_1 = 0$, с

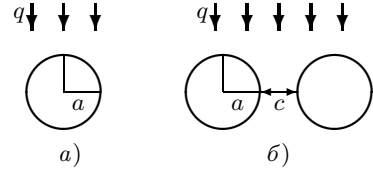


Рис. 3

точностью до множителя q приведены значения напряжений σ_s в точках контура отверстия на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от значения ha . В целях сравнения значения напряжений для случая жестко подкрепленного контура отверстия приводятся вместе со значениями для случая неподкрепленного контура, приведенными в работе [10].

В таблице 2 для пластинки с двумя круговыми отверстиями радиуса a ($a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a$), расстояние между которыми равно c (рис. 3, б), когда через их неподкрепленные контуры имеет место конвективный теплообмен с коэффициентом h ($h_1 = h_2 = h$) с внешней средой температуры $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2 = 0$, приведены значения напряжений σ_s в точках контура левого отверстия, в зависимости от значения ha для случаев $c/a = 1$ и $c/a = 10$. В целях сравнения значения напряжений для случая жестко подкрепленных контуров отверстий приводятся вместе со значениями для случая неподкрепленных контуров, которые представлены в работе [10].

Таблица 1. Значения напряжений σ_s в точках контура отверстия

Тип задачи	θ , рад.	Значения ha								
		0	0,01	0,1	0,5	1	2	10	100	∞
Контур отверстия жестко подкреплён										
ТЭМУ	$\pi/12$	0,160	0,159	0,146	0,098	0,053	-0,007	-0,141	-0,207	-0,216
	$\pi/6$	0,291	0,288	0,263	0,172	0,087	-0,026	-0,280	-0,405	-0,422
	$\pi/4$	0,319	0,315	0,284	0,169	0,062	-0,080	-0,399	-0,556	-0,578
	$\pi/3$	0,101	0,098	0,075	-0,010	-0,088	-0,193	-0,428	-0,544	-0,560
	$5\pi/12$	-0,460	-0,459	-0,451	-0,420	-0,392	-0,354	-0,269	-0,227	-0,221
	$\pi/2$	-0,869	-0,865	-0,832	-0,710	-0,597	-0,445	-0,107	0,060	0,084
ТУ	$\pi/12$	-0,053	-0,052	-0,050	-0,040	-0,032	-0,020	0,006	0,018	0,020
	$\pi/6$	-0,155	-0,155	-0,148	-0,121	-0,097	-0,065	0,007	0,043	0,048
	$\pi/4$	-0,332	-0,330	-0,316	-0,264	-0,215	-0,150	-0,006	0,066	0,076
	$\pi/3$	-0,563	-0,561	-0,538	-0,454	-0,377	-0,273	-0,041	0,074	0,090
	$5\pi/12$	-0,779	-0,775	-0,745	-0,634	-0,531	-0,394	-0,086	0,066	0,087
	$\pi/2$	-0,869	-0,866	-0,833	-0,711	-0,597	-0,446	-0,108	0,060	0,083
Контур отверстия не подкреплён [10]										
ТЭМУ	$\pi/12$	0,188	0,187	0,174	0,125	0,081	0,021	-0,113	-0,179	-0,188
	$\pi/6$	0,357	0,354	0,329	0,238	0,153	0,040	-0,214	-0,339	-0,357
	$\pi/4$	0,448	0,445	0,414	0,299	0,192	0,050	-0,269	-0,427	-0,448
	$\pi/3$	0,330	0,328	0,305	0,220	0,142	0,037	-0,198	-0,314	-0,330
	$5\pi/12$	-0,120	-0,119	-0,110	-0,080	-0,051	-0,013	0,072	0,114	0,120
	$\pi/2$	-0,476	-0,472	-0,440	-0,317	-0,204	-0,053	0,286	0,453	0,476
ТУ	$\pi/12$	-0,036	-0,036	-0,034	-0,024	-0,016	-0,004	0,022	0,035	0,036
	$\pi/6$	-0,102	-0,101	-0,094	-0,068	-0,044	-0,011	0,061	0,097	0,102
	$\pi/4$	-0,204	-0,202	-0,188	-0,136	-0,087	-0,023	0,122	0,194	0,204
	$\pi/3$	-0,327	-0,324	-0,302	-0,218	-0,140	-0,036	0,196	0,311	0,327
	$5\pi/12$	-0,433	-0,430	-0,400	-0,289	-0,186	-0,048	0,260	0,412	0,433
	$\pi/2$	-0,476	-0,472	-0,440	-0,317	-0,204	-0,053	0,286	0,453	0,476

Выводы. Из полученных данных следует, что коэффициент теплообмена h заметно влияет на значения напряжений около контуров отверстий. При значениях $ha < 0,01$ контур отверстия может считаться теплоизолированным, а при $ha > 100$ можно считать, что на контуре задана температура, равная температуре внешней среды.

При уменьшении расстояния между отверстиями значения напряжений в зоне между отверстиями уменьшаются, а вне этой зоны — возрастают, особенно в случаях значений $ha < 0,01$ или $ha > 100$. При значениях $ha < 1$ наличие жесткого подкрепления контуров отверстий приводит к более высоким концентрациям напряжений в пластинке, нежели при его отсутствии. При малых расстояниях между контурами в случае $ha > 5$ и при больших расстояниях между контурами в случае $ha > 20$ жесткое подкрепление контура отверстия ведет к его разгрузке.

Если расстояние между отверстиями $c/a > 10$, то влияние одного отверстия на ТЭМУС около другого отверстия становится незначительным и им можно пренебречь.

Исследование влияния конвективного теплообмена с внешней средой

Таблица 2. Значения напряжений σ_s в точках контура левого отверстия

Тип задачи	c/a	θ , рад.	Значения $h\alpha$						
			0	0,01	0,1	1	10	100	∞
Контур отверстия жестко подкреплены									
ТЭМУ	1	$\pi/12$	-0,052	-0,052	-0,050	-0,038	-0,012	-0,002	0,000
		$\pi/4$	-0,223	-0,222	-0,216	-0,176	-0,114	-0,100	-0,098
		$\pi/2$	-0,957	-0,952	-0,908	-0,611	-0,091	0,066	0,088
		$3\pi/4$	0,544	0,538	0,486	0,136	-0,484	-0,673	-0,698
		$11\pi/12$	0,195	0,192	0,173	0,045	-0,187	-0,259	-0,269
	10	$\pi/12$	0,263	0,262	0,251	0,173	0,011	-0,043	-0,050
		$\pi/4$	0,298	0,295	0,271	0,098	-0,258	-0,378	-0,395
		$\pi/2$	-0,873	-0,869	-0,835	-0,597	-0,106	0,060	0,083
		$3\pi/4$	0,310	0,306	0,269	0,011	-0,520	-0,700	-0,724
		$11\pi/12$	0,045	0,043	0,029	-0,074	-0,285	-0,357	-0,367
ТУ	1	$\pi/12$	-0,142	-0,141	-0,132	-0,074	0,019	0,041	0,044
		$\pi/4$	-0,497	-0,494	-0,466	-0,286	0,008	0,085	0,094
		$\pi/2$	-0,961	-0,956	-0,911	-0,613	-0,090	0,068	0,090
		$3\pi/4$	-0,341	-0,339	-0,323	-0,213	-0,011	0,054	0,063
		$11\pi/12$	-0,069	-0,069	-0,067	-0,050	-0,020	-0,009	-0,008
	10	$\pi/12$	0,053	0,053	0,056	0,077	0,121	0,136	0,138
		$\pi/4$	-0,292	-0,291	-0,276	-0,168	0,053	0,127	0,138
		$\pi/2$	-0,874	-0,870	-0,837	-0,598	-0,106	0,060	0,083
		$3\pi/4$	-0,381	-0,379	-0,365	-0,267	-0,064	0,005	0,015
		$11\pi/12$	-0,163	-0,163	-0,161	-0,144	-0,110	-0,099	-0,097
Контур отверстия не подкреплены [10]									
ТЭМУ	1	$\pi/12$	0,201	0,199	0,183	0,078	-0,087	-0,123	-0,127
		$\pi/4$	0,171	0,169	0,156	0,069	-0,090	-0,142	-0,149
		$\pi/2$	-0,713	-0,706	-0,651	-0,284	0,354	0,544	0,569
		$3\pi/4$	0,619	0,613	0,566	0,248	-0,314	-0,484	-0,507
		$11\pi/12$	0,234	0,232	0,214	0,094	-0,121	-0,188	-0,197
	10	$\pi/12$	0,209	0,208	0,193	0,089	-0,124	-0,196	-0,206
		$\pi/4$	0,428	0,425	0,395	0,183	-0,254	-0,402	-0,422
		$\pi/2$	-0,506	-0,502	-0,466	-0,216	0,300	0,475	0,499
		$3\pi/4$	0,467	0,464	0,431	0,199	-0,277	-0,439	-0,461
		$11\pi/12$	0,185	0,184	0,171	0,079	-0,110	-0,174	-0,183
ТУ	1	$\pi/12$	0,089	0,088	0,081	0,035	-0,041	-0,060	-0,062
		$\pi/4$	-0,054	-0,053	-0,049	-0,021	0,025	0,037	0,039
		$\pi/2$	-0,661	-0,655	-0,604	-0,264	0,329	0,505	0,528
		$3\pi/4$	-0,388	-0,384	-0,354	-0,155	0,193	0,295	0,309
		$11\pi/12$	-0,108	-0,107	-0,098	-0,043	0,052	0,079	0,082
	10	$\pi/12$	0,002	0,002	0,002	0,001	-0,001	-0,002	-0,002
		$\pi/4$	-0,141	-0,140	-0,130	-0,060	0,084	0,132	0,139
		$\pi/2$	-0,494	-0,490	-0,455	-0,211	0,293	0,463	0,487
		$3\pi/4$	-0,263	-0,261	-0,243	-0,112	0,156	0,247	0,259
		$11\pi/12$	-0,064	-0,064	-0,059	-0,027	0,038	0,060	0,063

Если в численных расчетах пренебрегать электромагнитными свойствами материала пластинки, то получаемые результаты будут искажены, поэтому в расчетах следует учитывать все свойства материала.

1. Желудев И.С. Физика кристаллических диэлектриков / И.С. Желудев. – М.: Наука, 1968. – 463 с.
2. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред / Ж. Можен. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
3. Партон В.З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
4. Калоеров С.А. Плоская задача термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, О.А. Сорочан // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 4. – С. 81–91.
5. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в пьезопластинках с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 1. – С. 15–26.
6. Подстригач Я.С. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно // К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
7. Parihar K.S. Transient heat conduction and analysis of thermal stresses in thin circular plate / K.S. Parihar, S.S. Patil // J. Therm. Stress. – 2011. – Vol. 34, № 4. – P. 335–351.
8. Gaikwad K.R. Analysis of transient thermoelastic temperature distribution of a thin circular plate and its thermal deflection under uniform heat generation / K.R. Gaikwad, Y.U. Naner // J. Therm. Stress. – 2021. – Vol. 44, № 1. – P. 75–85.
9. Roozbahani M.M. Temperature and stress distribution in hollow annular disk of uniform thickness with quadratic temperature-dependent thermal conductivity / M.M. Roozbahani, H. Razzaghi, M. Baghani, M. Baniassadi, M. Layeghi // J. Therm. Stress. – 2017. – Vol. 40, № 7. – P. 828–845.
10. Глушанков Е.С. Термоэлектромагнитоупругое состояние бесконечной многосвязной пьезопластинки в условиях конвективного теплообмена при действии линейного потока тепла / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2020. – Вып. 2 (75). – С. 18–29.
11. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малкольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
12. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.

E.S. Glushankov

The investigation of the effect of the convective heat transfer on the thermo-electro-magneto-elastic state of the multiply connected piezoelectric plate with reinforced holes.

In the paper, the results are presented for the investigation of thermo-electro-magneto-elastic state of infinite multiply connected piezoelectric plate under the action of convective heat transfer. The contours of some holes are reinforced. Through the numerical studies, the effects of plates's geometric characteristics, the properties of its material, the characteristic of convective heat transfer, and the holes' reinforcements on the values of the main characteristics of the thermo-electro-magneto-elastic state of the plate was investigated.

Keywords: linear heat flux, convective heat transfer, multiply connected piezoelectric plate, reinforced contours of holes, thermal stresses, complex potentials.

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк

Получено 02.09.2022

Donetsk National University, Donetsk

evgenij.glushankov@gmail.com

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2022-3-33-59

EDN:NPEDMW



©2022. И.А. Моисеенко, Н.Ю. Мельничук

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПРОДОЛЬНО-СДВИГОВЫЕ УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ПРОТЯЖЕННЫХ СПЛОШНЫХ ЦИЛИНДРАХ ИЗ ШЕСТИФАКТОРНО ФУНКЦИОНАЛЬНО НЕОДНОРОДНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Определены два альтернативных варианта шестифакторной модели радиальной функциональной неоднородности физико-механических характеристик трансверсально-изотропного материала сплошного цилиндрического волновода для случая распространяющихся осесимметричных нормальных продольно-сдвиговых упругих волн. Представлены два подхода к определению функциональных составляющих указанных моделей. Для каждого из указанных подходов определено достаточное условие несильной радиальной неоднородности, обеспечивающее построение базисного матричного решения уравнений классической математической модели волнового деформирования для рассматриваемого типа волнового процесса. Элементы базисного решения выражены через аналитические функции, представленные своими разложениями с определяемыми из явных рекуррентных соотношений коэффициентами. Дан сопоставительный анализ результатов численного эксперимента, поставленного для случаев однородных и функционально неоднородных трансверсально-изотропных свободных волноводов. Изучены эффекты влияния функциональной радиальной неоднородности материала волновода на топологию дисперсионных спектров, распределение фазовых и групповых скоростей бегущих волн продольно-сдвигового типа, кинематические и силовые характеристики волнового процесса. Приведены количественные и качественные оценки полученных численных результатов.

Ключевые слова: функционально-градиентные материалы, трансверсально-изотропный, цилиндрический волновод, осесимметричные продольно-сдвиговые волны, многофакторная модель радиальной неоднородности, базисное решение, дисперсионные соотношения.

Введение. При решении задач о распространении нормальных упругих волн в изотропных, трансверсально-изотропных и цилиндрически ортотропных функционально радиально неоднородных протяженных цилиндрах кругового поперечного сечения для получения базисных аналитических решений системы дифференциальных уравнений классической трехмерной математической модели волнового деформирования оказался плодотворным подход, связанный с наложением ограничений системного характера на вид функциональных законов радиальной неоднородности физико-механических характеристик материала волновода. Подход основан на задании с точностью до константного множителя единого для всех физико-механических характеристик материала волновода экспоненциально-степенного закона радиальной неоднородности. Таким способом построены в аналитическом виде базисные решения математических моделей и исследованы эффекты влияния фактора радиальной неоднородности материала на топологию дисперсионных спектров, распределение фазовых и групповых скоростей, кинематические характеристики бегущих осе-

симметричных и неосесимметричных нормальных упругих волн в изотропных [1], трансверсально-изотропных [2, 3] и цилиндрически ортотропных [4] протяженных цилиндрах кругового поперечного сечения.

Уход от единообразного для физико-механических характеристик материала волновода функционального закона радиальной неоднородности связан с привлечением новых моделей, с одной стороны, в достаточной мере свободных от наложения принципиально сужающих область их применения ограничений, а с другой – обеспечивающих построение в аналитическом виде базисного решения математической модели исследуемого волнового процесса. Так в [5] для исследования волн крутильного типа в трансверсально-изотропном протяженном цилиндре предложена трехфакторная модель радиальной неоднородности, на основе которой построено базисное аналитическое решение соответствующих уравнений математической модели и исследованы свойства бегущих упругих крутильных волн.

В данном исследовании для случая распространяющихся волн продольно-сдвигового типа представлены альтернативные варианты шестифакторной модели радиальной неоднородности трансверсально-изотропного материала сплошного цилиндрического волновода, с учетом предложенных двух подходов их реализации в достаточной степени свободные от наложения системных ограничений на функциональные законы несильной радиальной неоднородности физико-механических характеристик материала цилиндра. Для предложенных вариантов модели неоднородности в матричной форме построены базисные аналитические решения уравнений математической модели рассматриваемого волнового процесса и исследованы свойства бегущих продольно-сдвиговых волн.

1. Постановка задачи.

Рассматривается протяженный цилиндрический волновод, имеющий в поперечном сечении форму круга радиуса R_* и занимающий в нормированной параметром R_* безразмерной цилиндрической системе координат $O r \theta z$ область V (рис. 1)

$$V = \{r \in [0, 1], \quad \theta \in [-\pi; \pi], \quad z \in (-\infty; \infty)\}.$$

Полагается, что трансверсально-изотропный материал волновода является в радиальных направлениях функционально неоднородным

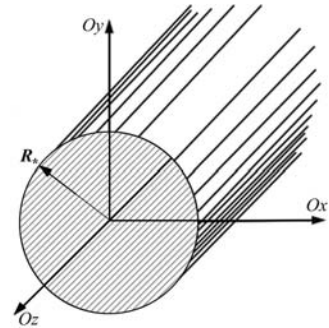


Рис. 1.

$$\begin{aligned} c_s(r) &= C_* \tilde{c}_s(r) \quad (s = 11, 12, 13, 33, 44), \\ \rho(r) &= \rho_* \tilde{\rho}(r) \quad (r \in [0, \delta]). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\tilde{c}_s = \tilde{c}_s(r) > 0$ и $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(r) > 0$ – нормированные параметрами соответственно $C_* = const$ и $\rho_* = const$, относящиеся к классу $C^1[0, \delta)$ произвольные, в пределах допустимости варьирования значений физико-механических характеристик, функциональные законы изменения вдоль радиальной координаты

модулей упругости и плотности неоднородного трансверсально-изотропного материала; δ ($\delta > 1$) – параметр, границы допустимых значений которого будут определены ниже.

При рассмотрении распространяющихся вдоль оси Oz с круговой частотой ω и нормированным параметром R_* продольным волновым числом k ($k \in \mathbb{C}$) нормальных упругих осесимметричных продольно-сдвиговых волн, пронормированные соответственно величинами R_* и C_* компоненты вектора перемещений и тензора напряжений в рамках пространственной линейной математической модели динамического напряженно-деформированного состояния упругих трансверсально-изотропных тел могут быть представлены так:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(LSW)}(r, z, t) &= \begin{bmatrix} u_r^{(LSW)}(r, z, t) \\ u_z^{(LSW)}(r, z, t) \\ u_\theta^{(LSW)} \equiv 0 \end{bmatrix} = \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_U^{(LSW)} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r) \\ \mathbf{\Sigma}^{(LSW)}(r, z, t) &= \begin{bmatrix} \sigma_{rr}^{(LSW)}(r, z, t) \\ \sigma_{\theta\theta}^{(LSW)}(r, z, t) \\ \sigma_{zz}^{(LSW)}(r, z, t) \\ \sigma_{rz}^{(LSW)}(r, z, t) \end{bmatrix} = \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_\Sigma^{(LSW)} \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(LSW)}(r) \\ &\quad \left(\sigma_{\theta z}^{(LSW)} = \sigma_{r\theta}^{(LSW)} \equiv 0 \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{P}_U^{(LSW)}$ и $\mathbf{P}_\Sigma^{(LSW)}$ – квадратные диагональные матрицы размерности соответственно 2×2 и 4×4 комплексной нормировки векторов соответственно $\mathbf{U}^{(LSW)}(r, z, t)$ и $\mathbf{\Sigma}^{(LSW)}(r, z, t)$ с безразмерными отличными от тождественного нуля компонентами соответственно вектора упругих перемещений и тензора напряжений

$$\left[\mathbf{P}_U^{(LSW)} \right]_{1,1} = 1, \quad \left[\mathbf{P}_U^{(LSW)} \right]_{2,2} = i; \quad (3)$$

$$\left[\mathbf{P}_\Sigma^{(LSW)} \right]_{j,j} = 1 \quad (j = \overline{1, 3}), \quad \left[\mathbf{P}_\Sigma^{(LSW)} \right]_{4,4} = i; \quad (4)$$

$\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)} = \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r)$ и $\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(LSW)} = \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(LSW)}(r)$ – векторные радиальные амплитудные составляющие, записываемые с учетом представлений (2) в таком виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)} &= \begin{bmatrix} \tilde{u}_r^{(LSW)} \\ \tilde{u}_z^{(LSW)} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(LSW)} &= \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{rr}^{(LSW)} \\ \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(LSW)} \\ \tilde{\sigma}_{zz}^{(LSW)} \\ \tilde{\sigma}_{rz}^{(LSW)} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{M}}^{(LSW)} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)} \quad (r \in [0, \delta]), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\tilde{u}_s^{(LSW)} = \tilde{u}_s^{(LSW)}(r)$ ($s = r, z$), $\tilde{\sigma}_s^{(LSW)} = \tilde{\sigma}_s^{(LSW)}(r)$ ($s = rr, \theta\theta, zz, rz$) – вещественные радиальные амплитудные составляющие отличных от тождественного нуля компонент соответственно вектора перемещений и тензора напряжений; $\tilde{\mathbf{M}}^{(LSW)} = \tilde{\mathbf{M}}^{(LSW)}(r)$ – матричный дифференциальный оператор следующего вида

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(LSW)} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11}d_r + \tilde{c}_{12}r^{-1} & -k\tilde{c}_{13} \\ \tilde{c}_{12}d_r + \tilde{c}_{11}r^{-1} & -k\tilde{c}_{13} \\ \tilde{c}_{13}(d_r + r^{-1}) & -k\tilde{c}_{33} \\ k\tilde{c}_{44} & \tilde{c}_{44}d_r \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Уравнения движения для рассматриваемого типа волнового процесса с учетом соотношений (1) – (6) в матричном виде могут быть записаны так:

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)}\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)} = \mathbf{O} \quad (r \in [0, \delta]). \quad (7)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)} = \tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)}(r)$ – матричный дифференциальный оператор размерности 2×2 с элементами

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)}]_{1,1} &= r^2 d_r^2 + r \left(1 + r \frac{\tilde{c}'_{11}}{\tilde{c}_{11}} \right) d_r + r \frac{\tilde{c}'_{12}}{\tilde{c}_{11}} - 1 + r^2 \left(\Omega^2 \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{c}_{11}} - k^2 \frac{\tilde{c}_{44}}{\tilde{c}_{11}} \right), \\ [\tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)}]_{1,2} &= -kr^2 \left(\frac{\tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{11}} + \frac{\tilde{c}_{44}}{\tilde{c}_{11}} \right) d_r - kr^2 \frac{\tilde{c}'_{13}}{\tilde{c}_{11}}, \\ [\tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)}]_{2,1} &= kr^2 \left(1 + \frac{\tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{44}} \right) d_r + kr \left(1 + \frac{\tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{44}} + r \frac{\tilde{c}'_{44}}{\tilde{c}_{44}} \right), \\ [\tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)}]_{2,2} &= r^2 d_r^2 + r \left(1 + r \frac{\tilde{c}'_{44}}{\tilde{c}_{44}} \right) d_r + r^2 \left(\Omega^2 \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{c}_{44}} - k^2 \frac{\tilde{c}_{33}}{\tilde{c}_{44}} \right); \end{aligned} \quad (8)$$

\mathbf{O} – нулевой вектор-столбец размерности 2; $\Omega^2 = \rho_* R_*^2 \omega^2 / C_*$ – безразмерная приведенная частота; $d_r = d/dr$.

Представленная математическая модель (1) – (8) включает также классические однородные граничные условия свободной

$$\left[\tilde{\Sigma}^{(LSW)}(1) \right]_{1,4} = \mathbf{O}, \quad (9)$$

либо жестко закрепленной

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(1) = \mathbf{O} \quad (10)$$

граничной поверхности волновода.

2. Шестифакторная модель радиальной неоднородности. Вводятся в рассмотрение декартова система координат Ox_1x_2 и комплексная переменная $\xi = x_1 + ix_2$. Формально полагается, что неотрицательная часть вещественной полуоси системы координат Ox_1x_2 совпадает с осью Or

$$Ox_1 \equiv Or \quad (x_1 \geq 0).$$

На плоскости комплексной переменной ξ вводятся шесть произвольных аналитических в области $|\xi| < \delta$ функций $\varphi(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ ($j = \overline{1,5}$). Описанный соотношениями (1) закон радиальной неоднородности с учетом вида представлений (8) далее определяется через введенные функции двумя способами:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{11}(r) &= e^{\varphi(r)}, & \tilde{c}_{12}(r) &= \psi_1(r) e^{\varphi(r)}, & \tilde{c}_{13}(r) &= \psi_2(r) e^{\varphi(r)}, \\ \tilde{c}_{33}(r) &= \psi_3(r) \psi_4(r) e^{\varphi(r)}, & \tilde{c}_{44}(r) &= \psi_3(r) e^{\varphi(r)}, \\ \tilde{\rho}(r) &= \psi_5(r) e^{\varphi(r)} \quad (r \in [0, \delta]); \end{aligned} \quad (11-A)$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{11}(r) &= \psi_3(r) e^{\varphi(r)}, & \tilde{c}_{12}(r) &= \psi_1(r) \psi_3(r) e^{\varphi(r)}, & \tilde{c}_{13}(r) &= \psi_2(r) e^{\varphi(r)}, \\ \tilde{c}_{33}(r) &= \psi_4(r) e^{\varphi(r)}, & \tilde{c}_{44}(r) &= e^{\varphi(r)}, \\ \tilde{\rho}(r) &= \psi_5(r) e^{\varphi(r)} \quad (r \in [0, \delta]). \end{aligned} \quad (11-B)$$

Соотношения (11-A) и (11-B) задают альтернативные варианты шестифакторной модели радиальной неоднородности, далее использующейся при построении целевого решения уравнения (7).

Для проведения численных экспериментов с заданными конкретными функциональными законами

$$\tilde{c}_s^{(*)}(r) > 0 \quad (s = 11, 12, 13, 33, 44), \quad \tilde{\rho}^{(*)}(r) > 0 \quad r \in [0, \delta] \quad (12)$$

определение задействованных в представлениях (11-A) и (11-B) аналитических в области $|\xi| < \delta$ функций $\varphi(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ ($j = \overline{1,5}$) может быть реализовано двумя способами.

Первым представлен подход аналитического определения указанных функций, применимый в случаях, когда функции $\tilde{c}_s^{(*)}(r)$ ($s = 11, 12, 13, 33, 44$) и $\tilde{\rho}^{(*)}(r)$ допускают аналитическое продолжение на комплексную плоскость переменной ξ и при этом $\tilde{c}_s^{(*)}(\xi)$ ($s = 11, 12, 13, 33, 44$) и $\tilde{\rho}^{(*)}(\xi)$ в области $|\xi| < \delta$ являются аналитическими. Этот случай является наиболее распространенным, поскольку физико-механические характеристики реальных функционально-градиентных материалов чаще всего определяются экспериментально в виде табличных значений, на основе которых уже задаются интерполяционные полиномы. Полагая, что $\tilde{c}_s(\xi) \equiv \tilde{c}_s^{(*)}(\xi)$ ($s = 11, 12, 13, 33, 44$) и $\tilde{\rho}(\xi) \equiv \tilde{\rho}^{(*)}(\xi)$, получаются соответствующие представлениям (11-A) и (11-B) определяющие соотношения

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \ln \left(\tilde{c}_{11}^{(*)}(\xi) \right), & \psi_1(\xi) &= \frac{\tilde{c}_{12}^{(*)}(\xi)}{\tilde{c}_{11}^{(*)}(\xi)}, & \psi_2(\xi) &= \frac{\tilde{c}_{13}^{(*)}(\xi)}{\tilde{c}_{11}^{(*)}(\xi)}, \\ \psi_3(\xi) &= \frac{\tilde{c}_{44}^{(*)}(\xi)}{\tilde{c}_{11}^{(*)}(\xi)}, & \psi_4(\xi) &= \frac{\tilde{c}_{33}^{(*)}(\xi)}{\tilde{c}_{44}^{(*)}(\xi)}, & \psi_5(\xi) &= \frac{\tilde{\rho}^{(*)}(\xi)}{\tilde{c}_{11}^{(*)}(\xi)} \quad (|\xi| < \delta); \end{aligned} \quad (13-A)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \ln\left(\tilde{c}_{44}^{(*)}(\xi)\right), \quad \psi_1(\xi) = \frac{\tilde{c}_{12}^{(*)}(\xi)}{\tilde{c}_{11}^{(*)}(\xi)}, \quad \psi_2(\xi) = \frac{\tilde{c}_{13}^{(*)}(\xi)}{\tilde{c}_{44}^{(*)}(\xi)}, \\ \psi_3(\xi) &= \frac{\tilde{c}_{11}^{(*)}(\xi)}{\tilde{c}_{44}^{(*)}(\xi)}, \quad \psi_4(\xi) = \frac{\tilde{c}_{33}^{(*)}(\xi)}{\tilde{c}_{44}^{(*)}(\xi)}, \quad \psi_5(\xi) = \frac{\tilde{\rho}^{(*)}(\xi)}{\tilde{c}_{44}^{(*)}(\xi)} \quad (|\xi| < \delta). \end{aligned} \quad (13-Б)$$

Очевидно, что представления (13-А) и (13-Б) с учетом ранее введенного условия $\delta > 1$ задают для обоих вариантов модели (11-А) и (11-Б) единое ограничение вида

$$1 < \delta \leq \min\left(\left|\tilde{c}_*^{(11)}\right|, \left|\tilde{c}_*^{(44)}\right|\right), \quad (14)$$

где $\tilde{c}_*^{(11)}$ и $\tilde{c}_*^{(44)}$ – наименьшие по модулю нули функций соответственно $\tilde{c}_{11}^{(*)}(\xi)$ и $\tilde{c}_{44}^{(*)}(\xi)$. Следует отметить, что в реализуемых соотношениями (11-А), (13-А) либо (11-Б), (13-Б) аналитическом подходе к определению искомых функций $\varphi(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ ($j = \overline{1,5}$) условие (14), определяя границы допустимых значений для введенного параметра δ , фактически накладывает ограничения на вид заданных функциональных законов для упругих модулей $\tilde{c}_{11}^{(*)}(r)$ и $\tilde{c}_{44}^{(*)}(r)$, сужая тем самым область применимости указанных моделей при построении целевого решения уравнения (7). Поэтому далее (14) будет называться достаточным (аналитическим) условием несильной радиальной неоднородности материала волновода.

Второй подход к определению функций $\varphi(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ ($j = \overline{1,5}$) реализуется любым численным методом, обеспечивающим аппроксимацию полиномами на отрезке $r \in [0, 1]$ заданных вещественных из $C^1[0, \delta]$ функций (12). Получаются соответствующие приближенные представления

$$\begin{aligned} \varphi(r) &\simeq \ln\left(\tilde{c}_{11}^{(*)}(r)\right), \quad \psi_1(r) \simeq \frac{\tilde{c}_{12}^{(*)}(r)}{\tilde{c}_{11}^{(*)}(r)}, \quad \psi_2(r) \simeq \frac{\tilde{c}_{13}^{(*)}(r)}{\tilde{c}_{11}^{(*)}(r)}, \\ \psi_3(r) &\simeq \frac{\tilde{c}_{44}^{(*)}(r)}{\tilde{c}_{11}^{(*)}(r)}, \quad \psi_4(r) \simeq \frac{\tilde{c}_{33}^{(*)}(r)}{\tilde{c}_{44}^{(*)}(r)}, \quad \psi_5(r) = \frac{\tilde{\rho}^{(*)}(r)}{\tilde{c}_{11}^{(*)}(r)} \quad (r \in [0, 1]); \end{aligned} \quad (15-А)$$

$$\begin{aligned} \varphi(r) &\simeq \ln\left(\tilde{c}_{44}^{(*)}(r)\right), \quad \psi_1(r) \simeq \frac{\tilde{c}_{12}^{(*)}(r)}{\tilde{c}_{11}^{(*)}(r)}, \quad \psi_2(r) \simeq \frac{\tilde{c}_{13}^{(*)}(r)}{\tilde{c}_{44}^{(*)}(r)}, \\ \psi_3(r) &\simeq \frac{\tilde{c}_{11}^{(*)}(r)}{\tilde{c}_{44}^{(*)}(r)}, \quad \psi_4(r) \simeq \frac{\tilde{c}_{33}^{(*)}(r)}{\tilde{c}_{44}^{(*)}(r)}, \quad \psi_5(r) \simeq \frac{\tilde{\rho}^{(*)}(r)}{\tilde{c}_{44}^{(*)}(r)} \quad (r \in [0, 1]). \end{aligned} \quad (15-Б)$$

Здесь

$$\varphi(r) = \sum_{n=0}^N a_n^{(0)} r^n, \quad \psi_p(r) = \sum_{n=0}^N a_n^{(p)} r^n \quad (p = \overline{1,5}). \quad (16)$$

Учитывая, что физико-механические характеристики реальных материалов могут быть предоставлены с весьма ограниченной точностью (относительная погрешность обычно не меньше 10^{-3}), степень N полиномов (16), обеспечивающих соответствующую точность аппроксимации, может выбираться весьма

небольшой. Следует также отметить, что в реализуемых соотношениями (15-А), (16) либо (15-Б), (16) подходе к определению искомым функций $\varphi(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ ($j = \overline{1, 5}$) помимо естественных ограничений (12) отсутствуют дополнительные, аналогичные условию (14) ограничения на заданные функциональные законы для упругих модулей $\tilde{c}_{11}^{(*)}(r)$ и $\tilde{c}_{44}^{(*)}(r)$. Указанные соображения обосновывают целесообразность применения данного подхода и в случае, когда заданный закон радиальной неоднородности (12) изначально представлен аналитическими в подходящей области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$) функциями $\tilde{c}_s^{(*)}(\xi)$ ($s = 11, 12, 13, 33, 44$), $\tilde{\rho}^{(*)}(\xi)$. Например, в случае задания функциональных законов полиномами

$$\tilde{c}_{11}^{(*)}(r) = 1 + qr^2, \quad \tilde{c}_{12}^{(*)}(r) = 1, \quad (17)$$

при определении $\psi_1(\xi)$ в рамках первого (аналитического) подхода для обоих вариантов модели (13-А) и (13-Б) получается разложение

$$\psi_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-q)^n \xi^{2n} \quad (18)$$

и определяемые из условия (14) границы допустимых значений параметра $|q| < 1$ (несильная радиальная неоднородность модуля упругости $\tilde{c}_{11}^{(*)}(r)$). В то время, как реализуемый методом наименьших квадратов для соотношений (15-А), (16) и (15-Б), (16) второй (численный) подход к определению $\psi_1(\xi)$ порождает полином

$$\psi_1(r) = \sum_{n=0}^N a_n^{(1)} r^n, \quad (19)$$

коэффициенты которого при $q = 4$ (сильная радиальная неоднородность модуля упругости $\tilde{c}_{11}^{(*)}(r)$) для различных значений N представлены в таблице 1.

Таблица 1.

N	$a_0^{(1)}$	$a_1^{(1)}$	$a_2^{(1)}$	$a_3^{(1)}$	$a_4^{(1)}$	$a_5^{(1)}$	$a_6^{(1)}$	ε
3	1.0222940	-0.7120511	-1.0809290	0.9854210				0.025
4	1.0031790	-0.1003681	-4.1393440	5.8788860	-2.4467320			0.005
5	0.9986906	0.1240594	-5.9347630	10.9060600	-8.1920670	2.2981320		0.0013
6	0.9990593	0.0975067	-5.6249820	9.5843210	-5.6430030	0.0322946	0.7552807	0.001

В последнем столбце таблицы 1 приведены значения абсолютной погрешности аппроксимации

$$\varepsilon = \max_{r \in [0,1]} \left(\left| \frac{\tilde{c}_{12}^{(*)}(r)}{\tilde{c}_{11}^{(*)}(r)} - \sum_{n=0}^N a_n^{(1)} r^n \right| \right) \quad (20)$$

для соответствующих степеней полученных полиномов (19).

3. Базисные решения и дисперсионные соотношения. Рассматривается аналитическое продолжение на комплексную плоскость переменной ξ определяемых соотношениями (11-А) либо (11-Б) функций $\tilde{c}_s(r)$ ($s = 11, 12, 13, 33, 44$) и $\tilde{\rho}(r)$. Тогда соотношения (5) – (8) допустимо переписать так:

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r) = \hat{\mathbf{U}}^{(LSW)} \Big|_{\xi=r} \quad (r \in [0, \delta)); \quad (21)$$

$$\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(LSW)}(r) = \left(\hat{\mathbf{M}}^{(LSW)} \hat{\mathbf{U}}^{(LSW)} \right) \Big|_{\xi=r} \quad (r \in [0, \delta)); \quad (22)$$

$$\hat{\mathbf{D}}^{(LSW)} \hat{\mathbf{U}}^{(LSW)} = \mathbf{O} \quad (|\xi| < \delta). \quad (23)$$

Здесь

$$\hat{\mathbf{U}}^{(LSW)} = \hat{\mathbf{U}}^{(LSW)}(\xi) = \begin{bmatrix} \hat{u}_r^{(LSW)} \\ \hat{u}_z^{(LSW)} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

где $\hat{u}_r^{(LSW)} = \hat{u}_r^{(LSW)}(\xi)$ и $\hat{u}_z^{(LSW)} = \hat{u}_z^{(LSW)}(\xi)$ – аналитические продолжения на комплексную плоскость переменной ξ вещественных функций $\tilde{u}_r^{(LSW)}(r)$ и $\tilde{u}_z^{(LSW)}(r)$; $\hat{\mathbf{M}}^{(LSW)} = \hat{\mathbf{M}}^{(LSW)}(\xi)$ и $\hat{\mathbf{D}}^{(LSW)} = \hat{\mathbf{D}}^{(LSW)}(\xi)$ – аналитические продолжения на комплексную плоскость переменной ξ вещественных матричных дифференциальных операторов $\tilde{\mathbf{M}}^{(LSW)}(r)$ и $\tilde{\mathbf{D}}^{(LSW)}(r)$, которые для соответствующих вариантов шестифакторной модели радиальной неоднородности (11-А) либо (11-Б) получают вид:

$$\hat{\mathbf{M}}^{(LSW)} = \begin{bmatrix} e^\varphi (d_\xi + r^{-1}\psi_1) & -ke^\varphi\psi_2 \\ e^\varphi (\psi_1 d_\xi + r^{-1}) & -ke^\varphi\psi_2 \\ e^\varphi\psi_2 (d_\xi + r^{-1}) & -ke^\varphi\psi_3\psi_4 \\ ke^\varphi\psi_3 & e^\varphi\psi_3 d_\xi \end{bmatrix}; \quad (25-А)$$

$$\hat{\mathbf{M}}^{(LSW)} = \begin{bmatrix} e^\varphi\psi_3 (d_\xi + r^{-1}\psi_1) & -ke^\varphi\psi_2 \\ e^\varphi\psi_3 (\psi_1 d_\xi + r^{-1}) & -ke^\varphi\psi_2 \\ e^\varphi\psi_2 (d_\xi + r^{-1}) & -ke^\varphi\psi_4 \\ ke^\varphi & e^\varphi d_\xi \end{bmatrix}; \quad (25-Б)$$

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mathbf{D}}^{(LSW)} \right]_{1,1} &= \xi^2 d_\xi^2 + \xi (1 + \xi\varphi') d_\xi + \xi (\psi_1' + \phi_1) - 1 + \\ &\quad + \xi^2 (\Omega^2\psi_5 - k^2\psi_3), \\ \left[\hat{\mathbf{D}}^{(LSW)} \right]_{1,2} &= -k\xi^2 ((\psi_2 + \psi_3) d_\xi + \psi_2' + \phi_2), \end{aligned} \quad (26-А)$$

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mathbf{D}}^{(LSW)} \right]_{2,1} &= k\xi^2 (1 + \chi_1) d_\xi + k\xi (1 + \chi_1 + \xi (\chi_3 + \varphi')), \\ \left[\hat{\mathbf{D}}^{(LSW)} \right]_{2,2} &= \xi^2 d_\xi^2 + \xi (1 + \xi\chi_3 + \xi\varphi') d_\xi + \xi^2 (\Omega^2\chi_2 - k^2\psi_4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\hat{\mathbf{D}}^{(LSW)}]_{1,1} &= \xi^2 d_\xi^2 + \xi (1 + \xi (\varphi' + \chi_3)) d_\xi + \xi (\psi'_1 + \phi_1 + \phi_3) - 1 + \\
 &\quad + \xi^2 (\Omega^2 \chi_2 - k^2 \chi_5), \\
 [\hat{\mathbf{D}}^{(LSW)}]_{1,2} &= -k\xi^2 ((\chi_1 + \chi_5) d_\xi + \chi_4 + \phi_2), \\
 [\hat{\mathbf{D}}^{(LSW)}]_{2,1} &= k\xi^2 (1 + \psi_2) d_\xi + k\xi (1 + \psi_2 + \xi\varphi'), \\
 [\hat{\mathbf{D}}^{(LSW)}]_{2,2} &= \xi^2 d_\xi^2 + \xi (1 + \xi\varphi') d_\xi + \xi^2 (\Omega^2 \psi_5 - k^2 \psi_4).
 \end{aligned} \tag{26-B}$$

В приведенных соотношениях $d_\xi = d/d\xi$ и соответственно варианту используемой модели (11-А) либо (11-Б) определены вспомогательные функции

$$\begin{aligned}
 \chi_1 = \chi_1(\xi) &= \frac{\psi_2(\xi)}{\psi_3(\xi)}, \quad \chi_2 = \chi_2(\xi) = \frac{\psi_5(\xi)}{\psi_3(\xi)}, \quad \chi_3 = \chi_3(\xi) = \frac{\psi'_3(\xi)}{\psi_3(\xi)}, \\
 \phi_1 = \phi_1(\xi) &= \psi_1(\xi) \varphi'(\xi), \quad \phi_2 = \phi_2(\xi) = \psi_2(\xi) \varphi'(\xi);
 \end{aligned} \tag{27-A}$$

$$\begin{aligned}
 \chi_1 = \chi_1(\xi) &= \frac{\psi_2(\xi)}{\psi_3(\xi)}, \quad \chi_2 = \chi_2(\xi) = \frac{\psi_5(\xi)}{\psi_3(\xi)}, \quad \chi_3 = \chi_3(\xi) = \frac{\psi'_3(\xi)}{\psi_3(\xi)}, \\
 \chi_4 = \chi_4(\xi) &= \frac{\psi'_2(\xi)}{\psi_3(\xi)}, \quad \chi_5 = \chi_5(\xi) = \frac{1}{\psi_3(\xi)}, \\
 \phi_1 = \phi_1(\xi) &= \psi_1(\xi) \varphi'(\xi), \quad \phi_2 = \phi_2(\xi) = \chi_1(\xi) \varphi'(\xi), \\
 \phi_3 = \phi_3(\xi) &= \chi_3(\xi) \psi_1(\xi).
 \end{aligned} \tag{27-B}$$

На эти функции также накладывается требование – они должны быть аналитическими в области $|\xi| < \delta$ ($\delta > 1$).

При использовании первого (аналитического) подхода к определению функций $\varphi(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ ($j = \overline{1, 5}$) требование аналитичности вспомогательных функций $\chi_j(\xi)$, $\phi_j(\xi)$ для обоих вариантов модели (11-А), (13-А), (27-А) и (11-Б), (13-Б), (27-Б) уже заложено в условие (14), поскольку в определяемой этим условием области $|\xi| < \delta$ соответствующие выбранному варианту модели функции $\psi_3(\xi)$ нулей не имеют.

Если используется второй (численный) подход к определению функций $\varphi(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ ($j = \overline{1, 5}$), то, как уже было отмечено выше, требование аналитичности вспомогательных функций $\chi_j(\xi)$, $\phi_j(\xi)$ для обоих вариантов модели (11-А), (15-А), (27-А) и (11-Б), (15-Б), (27-Б) является единственным, помимо естественного условия (12) ограничением, обеспечивающим возможность построения целевого решения уравнения (23). Оно будет выполнено, если соответственно выбранному варианту модели (11-А), (15-А), (27-А) либо (11-Б), (15-Б), (27-Б) потребовать

$$1 < \delta \leq |\xi_*|, \tag{28}$$

где ξ_* – наименьший по модулю нуль соответствующей выбранному варианту модели функции $\psi_3(\xi)$. Ограничение (28), накладывающее требования на вид заданных функциональных законов для упругих модулей $\tilde{c}_{11}^{(*)}(r)$ и $\tilde{c}_{44}^{(*)}(r)$, далее по аналогии с (14) будет называться достаточным (численным) условием несильной радиальной неоднородности материала волновода.

Следует отметить, что для некоторых, удовлетворяющих достаточному (аналитическому) условию несильной радиальной неоднородности (14) функциональных законов $\tilde{c}_{11}^{(*)}(\xi)$, $\tilde{c}_{44}^{(*)}(\xi)$ и некоторых степеней аппроксимирующего полинома

$$\psi_3(r) = \sum_{n=0}^N a_n^{(3)} r^n, \quad (29)$$

используемое при численном подходе достаточное (численное) условие несильной радиальной неоднородности (28) может не выполняться, обуславливая тем самым невозможность построения целевого решения уравнения (23). Например, если к заданным соотношениями (17) функциональным законам добавить определение

$$\tilde{c}_{44}^{(*)}(r) = 1 + pr, \quad (30)$$

то при $q = p = 0.5$ (достаточное (аналитическое) условие несильной радиальной неоднородности (14) выполняется) для различных значений N методом наименьших квадратов в рамках вариантов модели (11-А) и (11-Б) согласно соотношениям соответственно (15-А) и (15-Б) строятся полиномы (29) с характеристиками, представленными в таблице 2.

Таблица 2.

N	Вариант модели (11-А)		Вариант модели (11-Б)	
	ξ_*	ε_A	ξ_*	ε_B
2	1.0933007	$6 \cdot 10^{-3}$	1.5767732	$6 \cdot 10^{-3}$
3	0.8020626	$2 \cdot 10^{-3}$	1.3061290	$6 \cdot 10^{-4}$
4	1.0360860	$3 \cdot 10^{-4}$	1.2831760	$6 \cdot 10^{-5}$
5	0.9867653	$8 \cdot 10^{-6}$	1.3476748	$6 \cdot 10^{-6}$
6	0.9733651	$7 \cdot 10^{-6}$	1.4829524	$6 \cdot 10^{-7}$
7	1.1051205	$8 \cdot 10^{-7}$	1.4509852	$6 \cdot 10^{-8}$

В таблице 2 и ниже представленной таблице 3 приведены значения абсолютной погрешности аппроксимации

$$\varepsilon_A = \max_{r \in [0,1]} \left(\left| \frac{\tilde{c}_{44}^{(*)}(r)}{\tilde{c}_{11}^{(*)}(r)} - \sum_{n=0}^N a_n^{(3)} r^n \right| \right), \quad \varepsilon_B = \max_{r \in [0,1]} \left(\left| \frac{\tilde{c}_{11}^{(*)}(r)}{\tilde{c}_{44}^{(*)}(r)} - \sum_{n=0}^N a_n^{(3)} r^n \right| \right) \quad (31)$$

для соответствующих степеней построенных полиномов (29), жирным шрифтом выделены значения параметра ξ_* , при которых условие (28) не выполняется. На

основе представленной в таблице 2 информации можно сделать вывод, что при использовании второго (численного) подхода выбор модели (11-А) либо (11-Б), а также степени аппроксимирующего полинома (29) может иметь определяющее значение с точки зрения дальнейшей возможности построения целевого решения уравнения (23) даже в случае выполнения достаточного (аналитического) условия несильной радиальной неоднородности (14). С другой стороны, возможна ситуация, когда при невыполнении условия (14) использование второго (численного) подхода, а также подходящий выбор варианта модели (11-А) либо (11-Б) и степени аппроксимирующего полинома (29) может обеспечить выполнение достаточного (численного) условия несильной радиальной неоднородности (28), делая возможным построение целевого решения уравнения (23) с приемлемой точностью аппроксимации заданных функциональных законов модулей упругости материала волновода. Представленные в таблице 3 характеристики полинома (29) для $q = 0.3$, $p = 1.25$ обосновывают применимость варианта модели (11-Б) совместно со вторым (численным) подходом и выбором степени $N = 4$ аппроксимирующей функцию $\psi_3(r)$ полинома с абсолютной погрешностью не хуже 10^{-3} .

Таблица 3.

N	Вариант модели (11-А)		Вариант модели (11-Б)	
	ξ_*	ε_A	ξ_*	ε_B
2	0.5978713	$3 \cdot 10^{-3}$	1.3910367	$2 \cdot 10^{-2}$
3	0.6233704	$2 \cdot 10^{-3}$	1.1159488	$3 \cdot 10^{-3}$
4	0.9467001	$8 \cdot 10^{-5}$	1.0079997	$6 \cdot 10^{-4}$
5	0.9207157	$2 \cdot 10^{-5}$	0.9559652	$2 \cdot 10^{-4}$

Для обоих вариантов модели неоднородности (11-А) и (11-Б) аналитические в области $|\xi| < \delta$ функциональные составляющие выбранной модели $\varphi(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ ($j = \overline{1, 5}$), а также вспомогательные функции $\chi_j(\xi)$ (А : $j = \overline{1, 3}$; Б : $j = \overline{1, 5}$) и $\phi_j(\xi)$ (А : $j = \overline{1, 2}$; Б : $j = \overline{1, 3}$) могут быть представлены абсолютно сходящимися в указанной области разложениями вида

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(0)} \xi^n, \quad \psi_p = \psi_p(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(p)} \xi^n \quad (p = \overline{1, 5}), \\ \chi_p(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(p)} \xi^n \quad (A : p = \overline{1, 3}; \quad B : p = \overline{1, 5}), \\ \phi_p(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(p)} \xi^n \quad (A : p = \overline{1, 2}; \quad B : p = \overline{1, 3}) \quad (|\xi| < \delta). \end{aligned} \quad (32)$$

Для коэффициентов $b_n^{(p)}$ ($n = \overline{0, \infty}$) соответственно выбранному варианту модели получаются явные рекуррентные соотношения. С учетом совпадения пред-

ставлений для $\chi_j(\xi)$ ($j = \overline{1, 3}$) в соотношениях (27-А) и (27-Б), рекуррентные соотношения для $b_n^{(p)}$ допустимо записать в едином для обоих вариантов модели виде так:

$$\begin{aligned}
 b_n^{(1)} &= \left(a_n^{(2)} - \sum_{m=0}^{n-1} b_m^{(1)} a_{n-m}^{(3)} \right) / a_0^{(3)}, & b_n^{(2)} &= \left(a_n^{(5)} - \sum_{m=0}^{n-1} b_m^{(2)} a_{n-m}^{(3)} \right) / a_0^{(3)}, \\
 b_n^{(3)} &= \left((n+1) a_{n+1}^{(3)} - \sum_{m=0}^{n-1} b_m^{(3)} a_{n-m}^{(3)} \right) / a_0^{(3)}, \\
 b_n^{(4)} &= \left((n+1) a_{n+1}^{(2)} - \sum_{m=0}^{n-1} b_m^{(4)} a_{n-m}^{(3)} \right) / a_0^{(3)}, \\
 b_n^{(5)} &= \left(\delta_{0,n} - \sum_{m=0}^{n-1} b_m^{(5)} a_{n-m}^{(3)} \right) / a_0^{(3)} \quad (n = \overline{0, \infty}),
 \end{aligned} \tag{33}$$

где $\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$. Представления для $g_n^{(p)}$ получаются в таком виде

$$\begin{aligned}
 g_n^{(1)} &= \sum_{m=0}^n (n-m+1) a_{n-m+1}^{(0)} a_m^{(1)}, \\
 g_n^{(2)} &= \sum_{m=0}^n (n-m+1) a_{n-m+1}^{(0)} a_m^{(2)} \quad (n = \overline{0, \infty});
 \end{aligned} \tag{34-А}$$

$$\begin{aligned}
 g_n^{(1)} &= \sum_{m=0}^n (n-m+1) a_{n-m+1}^{(0)} a_m^{(1)}, & g_n^{(2)} &= \sum_{m=0}^n (n-m+1) a_{n-m+1}^{(0)} b_m^{(1)}, \\
 g_n^{(3)} &= \sum_{m=0}^n a_{n-m}^{(1)} b_m^{(3)} \quad (n = \overline{0, \infty}).
 \end{aligned} \tag{34-Б}$$

Уравнение (23) имеет аналитические в области $|\xi| < \delta$ частные решения $\hat{u}_s^{(LSW,particular)}(\xi)$ ($s = r, z$), которые могут быть представлены в указанной области абсолютно сходящимися разложениями вида

$$\hat{u}_s^{(LSW,particular)}(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m^{(s)} \xi^{m+\eta} \quad (s = r, z), \quad (|\xi| < \delta) \tag{35}$$

с подлежащими определению множеством коэффициентов $\{d_m^{(s)}\}_{m=0}^{\infty}$ ($s = r, z$) и параметром η ($\eta \in \{0\} \cup \mathbb{N}$). В результате подстановки представлений (32), (35) в уравнения (23), с учетом формально дополняющих разложения (32), (35) со-

отношений

$$\begin{aligned} a_j^{(p)} = 0 \quad (p = \overline{0, 5}), \quad d_j^{(s)} = 0 \quad (s = r, z), \\ b_j^{(p)} = 0 \quad (A : p = \overline{1, 3}; B : p = \overline{1, 5}), \quad g_j^{(p)} = 0 \quad (A : p = \overline{1, 2}; B : p = \overline{1, 3}) \quad (36) \\ (j = \overline{-\infty, -1}) \end{aligned}$$

для каждого варианта уравнения (23), (26-А) и (23), (26-Б) находятся два набора начальных определений

$$\eta^{(1)} = 0, \quad d_0^{(r,1)} = 0, \quad d_1^{(r,1)} = 0, \quad d_0^{(z,1)} = 1, \quad d_1^{(z,1)} = 0; \quad (37-А)$$

$$\eta^{(1)} = 0, \quad d_0^{(r,1)} = 0, \quad d_1^{(r,1)} = 0, \quad d_0^{(z,1)} = 1, \quad d_1^{(z,1)} = 0; \quad (37-Б)$$

$$\begin{aligned} \eta^{(2)} = 1, \quad d_0^{(r,2)} = 1, \quad d_1^{(r,2)} = -\frac{a_1^{(0)} + a_1^{(1)} + g_0^{(1)}}{3}, \quad d_0^{(z,2)} = 0, \\ d_1^{(z,2)} = -k \frac{1 + b_0^{(1)}}{2}; \quad (38-А) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta^{(2)} = 1, \quad d_0^{(r,2)} = 1, \quad d_1^{(r,2)} = -\frac{a_1^{(0)} + a_1^{(1)} + b_0^{(3)} + g_0^{(1)} + g_0^{(3)}}{3}, \\ d_0^{(z,2)} = 0, \quad d_1^{(z,2)} = -k \frac{1 + a_0^{(2)}}{2}. \quad (38-Б) \end{aligned}$$

Каждый вариант набора (37-А), (38-А) и (37-Б), (38-Б) определяет два линейно независимые векторные частные решения

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}}^{(LSW,particular,q)} = \hat{\mathbf{U}}^{(LSW,particular,q)}(\xi) = \begin{bmatrix} \hat{u}_r^{(LSW,particular,q)}(\xi) \\ \hat{u}_z^{(LSW,particular,q)}(\xi) \end{bmatrix} \quad (39) \\ (q = \overline{1, 2}), \end{aligned}$$

элементы которых являются аналитическими в области $|\xi| < \delta$ функциями, представленными в этой области своими абсолютно сходящимися разложениями вида

$$\begin{aligned} \hat{u}_s^{(LSW,particular,q)}(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m^{(s,q)} \xi^{m+\eta^{(q)}} \quad (s = r, z) \quad (|\xi| < \delta) \\ (q = \overline{1, 2}). \quad (40) \end{aligned}$$

Для вычисления коэффициентов $d_m^{(s,q)}$ ($m = \overline{2, \infty}$) получаются явные рекуррент-

НЫЕ СООТНОШЕНИЯ

$$\begin{aligned}
 d_m^{(r,q)} &= \frac{1}{(\eta^{(q)} + m)^2 - 1} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \left[\left((j-m) (j + \eta^{(q)}) a_{m-j}^{(0)} + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + (j-m) a_{m-j}^{(1)} + k^2 a_{m-2-j}^{(3)} - \Omega^2 a_{m-2-j}^{(5)} - g_{m-1-j}^{(1)} \right) d_j^{(r,q)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + k \left((\eta^{(q)} + m - 1) a_{m-1-j}^{(2)} + (j + \eta^{(q)}) a_{m-1-j}^{(3)} + g_{m-2-j}^{(2)} \right) d_j^{(z,q)} \right] \right), \\
 d_m^{(z,q)} &= \frac{1}{(\eta^{(q)} + m)^2} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \left[\left((j-m) (j + \eta^{(q)}) a_{m-j}^{(0)} + k^2 a_{m-2-j}^{(4)} - \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - \Omega^2 b_{m-2-j}^{(2)} - (\eta^{(q)} + j) b_{m-1-j}^{(3)} \right) d_j^{(z,q)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + k \left((1 + j - m) a_{m-1-j}^{(0)} - (\eta^{(q)} + j + 1) b_{m-1-j}^{(1)} - b_{m-2-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - k \left(m + \eta^{(q)} \right) d_{m-1}^{(r,q)} \right) \quad (m = \overline{2, \infty});
 \end{aligned} \tag{41-A}$$

$$\begin{aligned}
 d_m^{(r,q)} &= \frac{1}{(\eta^{(q)} + m)^2 - 1} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \left[\left((j-m) (j + \eta^{(q)}) a_{m-j}^{(0)} + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + (j-m) a_{m-j}^{(1)} - \Omega^2 b_{m-2-j}^{(2)} - (j + \eta^{(q)}) b_{m-1-j}^{(3)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + k^2 b_{m-2-j}^{(5)} - g_{m-1-j}^{(1)} - g_{m-1-j}^{(3)} \right) d_j^{(r,q)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + k \left((j + \eta^{(q)}) \left(b_{m-1-j}^{(1)} + b_{m-1-j}^{(5)} \right) + b_{m-2-j}^{(4)} + g_{m-2-j}^{(2)} \right) d_j^{(z,q)} \right] \right), \\
 d_m^{(z,q)} &= \frac{1}{(\eta^{(q)} + m)^2} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \left[\left((j-m) (j + \eta^{(q)}) a_{m-j}^{(0)} + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + k^2 a_{m-2-j}^{(4)} - \Omega^2 a_{m-2-j}^{(5)} \right) d_j^{(z,q)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + k \left((1 + j - m) a_{m-1-j}^{(0)} - (\eta^{(q)} + j + 1) a_{m-1-j}^{(2)} \right) d_j^{(r,q)} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - k \left(m + \eta^{(q)} \right) d_{m-1}^{(r,q)} \right) \quad (m = \overline{2, \infty}).
 \end{aligned} \tag{41-B}$$

Окончательно общее решение уравнения (23) записывается через его матричное размерности 2×2 базисное решение

$$\hat{\mathbf{U}}^{(LSW,basic)} = \hat{\mathbf{U}}^{(LSW,basic)}(\xi) = \left[\hat{\mathbf{U}}^{(LSW,particular,1)}, \hat{\mathbf{U}}^{(LSW,particular,2)} \right] \tag{42}$$

в виде

$$\hat{\mathbf{U}}^{(LSW,general)}(\xi) = \hat{\mathbf{U}}^{(LSW,basic)} \mathbf{A}. \quad (43)$$

Здесь \mathbf{A} – произвольный вектор-столбец размерности 2. Тогда используемые в представлениях (5) векторные радиальные амплитудные составляющие определяются так:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{LSW}(r) &= \left(\hat{\mathbf{U}}^{(LSW,basic)} \mathbf{A} \right) \Big|_{\xi=r}, \\ \tilde{\Sigma}^{LSW}(r) &= \left(\hat{\mathbf{M}} \hat{\mathbf{U}}^{(LSW,basic)} \mathbf{A} \right) \Big|_{\xi=r} \quad (r \in [0, \delta)). \end{aligned} \quad (44)$$

Граничные условия (9) и (10) с использованием представлений (44) определяют дисперсионные уравнения относительно безразмерного продольного волнового числа k и приведенной частоты Ω , которые для свободной и жестко закрепленной граничной поверхности волновода принимают соответственно вид

$$\Phi^{(\Sigma)}(k, \Omega) = \det \left(\left[\hat{\mathbf{M}} \hat{\mathbf{U}}^{(LSW,basic)} \right]_{(1,4),(1,2)} \Big|_{\xi=1} \right) = 0 \quad (45)$$

$$\Phi^{(U)}(k, \Omega) = \det \left(\hat{\mathbf{U}}^{(LSW,basic)}(1) \right) = 0. \quad (46)$$

4. Численный эксперимент. Анализ дисперсионных спектров и кинематических характеристик рассматриваемого типа волнового процесса проводился для свободных однородных протяженных цилиндров из цинка (Zn)[6]

$$\begin{aligned} \{ \tilde{c}_{11}^{(Zn)} = 16, 35; \quad \tilde{c}_{12}^{(Zn)} = 2, 64; \quad \tilde{c}_{13}^{(Zn)} = 5, 17; \\ \tilde{c}_{33}^{(Zn)} = 5, 31; \quad \tilde{c}_{44}^{(Zn)} = 3, 78; \quad \tilde{\rho}^{(Zn)} = 7, 134; \quad \Delta^{(Zn)} = -10, 24 \}, \quad (47) \\ C_* = 10^{10} H/m^2, \quad \rho_* = 10^3 \text{ кг}/m^3; \end{aligned}$$

кадмия (CD) [6]

$$\begin{aligned} \{ \tilde{c}_{11}^{(Cd)} = 12, 12; \quad \tilde{c}_{12}^{(Cd)} = 4, 81; \quad \tilde{c}_{13}^{(Cd)} = 4, 42; \\ \tilde{c}_{33}^{(Cd)} = 4, 45; \quad \tilde{c}_{44}^{(Cd)} = 1, 80; \quad \tilde{\rho}^{(Cd)} = 8, 749; \quad \Delta^{(Cd)} = -1, 04 \}, \quad (48) \\ C_* = 10^{10} H/m^2, \quad \rho_* = 10^3 \text{ кг}/m^3; \end{aligned}$$

магния (Mg) [6]

$$\begin{aligned} \{ \tilde{c}_{11}^{(Mg)} = 5, 88; \quad \tilde{c}_{12}^{(Mg)} = 2, 03; \quad \tilde{c}_{13}^{(Mg)} = 2, 02; \\ \tilde{c}_{33}^{(Mg)} = 5, 96; \quad \tilde{c}_{44}^{(Mg)} = 1, 14; \quad \tilde{\rho}^{(Mg)} = 1, 739; \quad \Delta^{(Mg)} = 0, 73 \}, \quad (49) \\ C_* = 10^{10} H/m^2, \quad \rho_* = 10^3 \text{ кг}/m^3; \end{aligned}$$

а также для свободных неоднородных цилиндров, функциональные законы радиальной неоднородности физико-механических характеристик материала которых были заданы так:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{11}(r) &= \tilde{c}_{11}^{(s)}(1 - 0.15r), & \tilde{c}_{12}(r) &= \tilde{c}_{12}^{(s)}(1 + 0.25r^3), \\ \tilde{c}_{13}(r) &= \tilde{c}_{13}^{(s)}(1 - 0.3r^2), \\ \tilde{c}_{33}(r) &= \tilde{c}_{33}^{(s)}(1 + 0.3r), & \tilde{c}_{44}(r) &= \tilde{c}_{44}^{(s)}(1 + 0.25r^3), & \tilde{\rho} &= \tilde{\rho}^{(s)} \end{aligned} \quad (50)$$

$(s = Zn, Cd, Mg).$

Выбор материалов (47) – (49) был обусловлен разбросом значений соответствующего материалу параметра Δ , характеризующего отличия в поведении дисперсионных кривых спектров однородных волноводов из трансверсально-изотропных и изотропных материалов [6]. Представленные материалы разбиты на три группы, каждая из которых включает соответствующий однородный и неоднородный материал с совпадающими физико-механическими характеристиками на оси волновода: (47) и $s = Zn$ (50) – группа А ($\Delta^{(Zn)} = -10, 24$); (48) и $s = Cd$ (50) – группа В ($\Delta^{(Cd)} = -1, 04$); (49) и $s = Mg$ (50) – группа В ($\Delta^{(Mg)} = 0, 73$).

Для неоднородного материала из группы А ограничение (14) получило конкретный вид

$$1 < \delta^{(Zn)} \leq 1.5874, \quad (51)$$

обусловивший допустимость применения аналитического подхода (13-А) к определению функциональных составляющих $\varphi(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ ($j = \overline{1, 5}$) выбранной для проведения численного эксперимента модели неоднородности (11-А). С целью ускорения вычислительного эксперимента на основании заданных функциональных законов $s = Zn$ (50) методом наименьших квадратов из соотношений (15-А) были получены для $\varphi(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ ($j = \overline{1, 5}$) представления в виде полиномов пятого порядка (точность представленных ниже коэффициентов меньше использованной при вычислительном эксперименте)

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &\simeq 2.79423 - 0.15000\xi - 0.01125\xi^2 - 0.00113\xi^3 - 0.00012\xi^4 - 0.00002\xi^5, \\ \psi_1(\xi) &\simeq 0.16147 + 0.02423\xi + 0.00354\xi^2 + 0.04129\xi^3 + 0.00544\xi^4 + 0.00149\xi^5, \\ \psi_2(\xi) &\simeq 0.31621 + 0.04743\xi - 0.08772\xi^2 - 0.01328\xi^3 - 0.00175\xi^4 + 0.00048\xi^5, \\ \psi_3(\xi) &\simeq 0.23119 + 0.03469\xi + 0.00507\xi^2 + 0.05912\xi^3 + 0.00778\xi^4 + 0.00213\xi^5, \\ \psi_4(\xi) &\simeq 1.40475 + 0.00136\xi + 0.40296\xi^2 - 0.25819\xi^3 - 0.21486\xi^4 + 0.12494\xi^5, \\ \psi_5(\xi) &\simeq 0.43633 + 0.06545\xi + 0.00981\xi^2 + 0.00149\xi^3 + 0.00020\xi^4 + 0.00005\xi^5. \end{aligned} \quad (52)$$

Данные соотношения обеспечили максимальную абсолютную погрешность в представлениях (15-А), не превышающую 10^{-4} . Соотношения (52) определили конкретный вид ограничения (28)

$$1 < \delta^{(Zn)} \leq 1.5379 \quad (53)$$

Таким образом, используемые для численного эксперимента физико-механические характеристики материала неоднородного волновода (47), $s = Zn$ (50), (52) определили область

$$|\xi| < \delta^{(Zn)} = 1.5379, \quad (54)$$

в которой все элементы построенного матричного базисного решения (42) будут аналитическими функциями. В случаях выбора неоднородных материалов из групп Б и В также были получены для $\varphi(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ ($j = \overline{1,5}$) аналогичные (52) представления, определившие соответствующие области $|\xi| < \delta^{(s)}$ ($\delta^{(s)} > 1; s = Cd, Mg$), в которых элементы указанного решения будут аналитическими функциями. В области изменения параметров $k \in [0, 50]$ и $\Omega \in [0, 30]$ (группа материалов А), $k \in [0, 50]$ и $\Omega \in [0, 20]$ (группа материалов Б), $k \in [0, 40]$ и $\Omega \in [0, 30]$ (группа материалов В) были построены фрагменты спектров бегущих продольно-сдвиговых нормальных волн. Указанные спектры для однородного и неоднородного волноводов из материалов трех выше перечисленных групп представлены соответственно на рисунках 2–4.

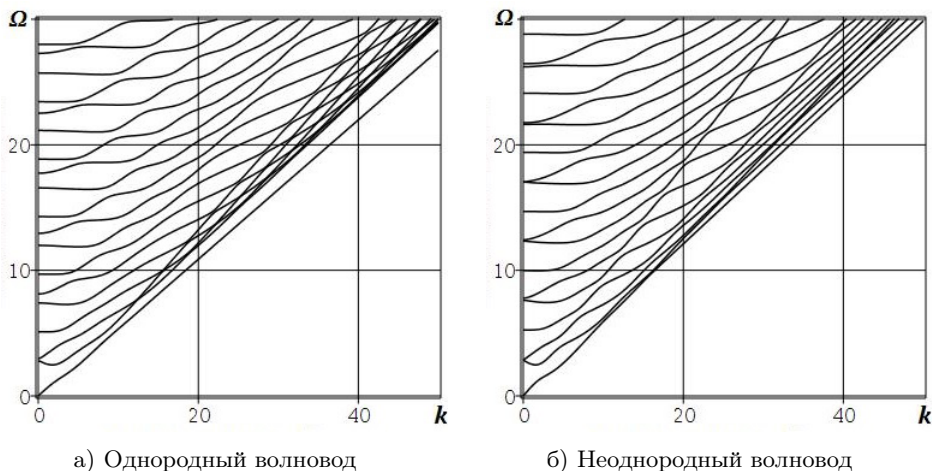


Рис. 2. Фрагменты спектров свободных волноводов из материалов группы А

Сравнение представленных фрагментов спектра позволяет отметить только качественное различие топологической картины сопоставляемых спектров. Так, в частности, можно указать на характерную локализацию асимптотического поведения в коротковолновой высокочастотной области первой моды по отношению к старшим модам однородных волноводов из материалов с отрицательным значением параметра Δ групп А (рис. 2,а) и Б (рис. 3,а), не наблюдаемую в случае неоднородных волноводов из материалов указанных групп (рис. 2,б и 3,б). При этом данная тенденция не проявляется для материалов группы В с положительным значением параметра Δ (рис. 4,а и 4,б). Также следует отметить более ранний переход на асимптотическое бездисперсионное поведение мод начиная со второй в случае неоднородного материала по сравнению с однородным материалом группы А.

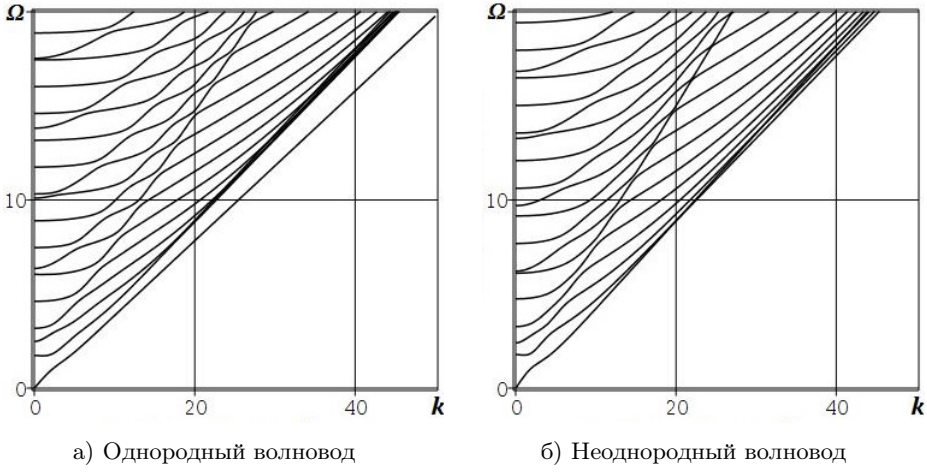


Рис. 3. Фрагменты спектров свободных волноводов из материалов группы Б

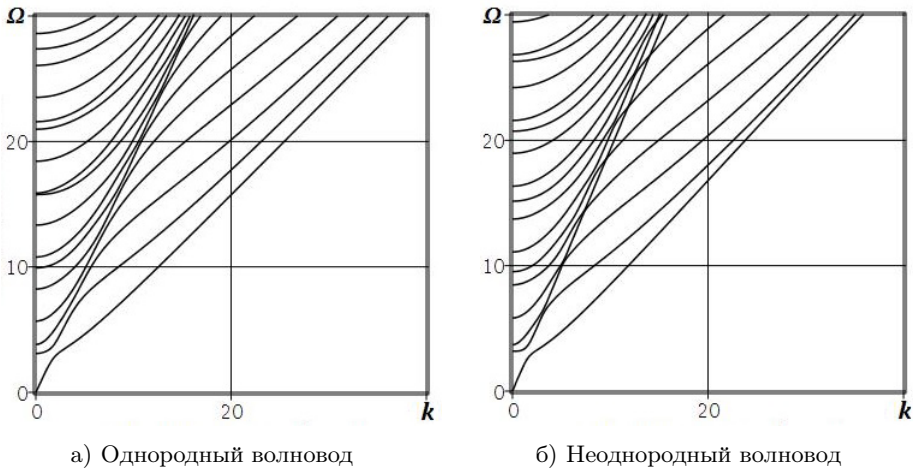


Рис. 4. Фрагменты спектров свободных волноводов из материалов группы В

С целью анализа количественных различий полученных спектров для однородного и неоднородного материалов из одной группы использовалась функция сравнения парных по номеру в соответствующих спектрах мод

$$\Delta\Omega(k) = \left(\Omega^{(\text{неоднородный})}(k) - \Omega^{(\text{однородный})}(k) \right). \quad (55)$$

На рисунках 5–7 представлены результаты сопоставительного анализа поведения низших мод фрагментов спектров однородных и неоднородных волноводов трех групп материалов. Номера сопоставляемых мод спектров и тип соответствующей линии приведены в нижней части рисунков.

В качестве характерных можно указать следующие закономерности. Низшая мода спектра неоднородного волновода для всех рассмотренных групп материалов на всем исследованном отрезке изменения значений продольного волно-

вого числа k смещена по отношению к низшей моде однородного волновода в область более высоких частот, при этом у функции сравнения $\Delta\Omega(k)$ наблюдается устойчивая асимптотика возрастающей линейной функции уже начиная с области средних длин волн при $k > 16$ для материалов группы А, $k > 20$ для материалов группы Б, $k > 5$ для материалов группы В. Указанное характерное смещение мод неоднородного волновода относительно соответствующих мод однородного волновода прослеживается в высокочастотной коротковолновой области и для старших мод всех сопоставляемых спектров.

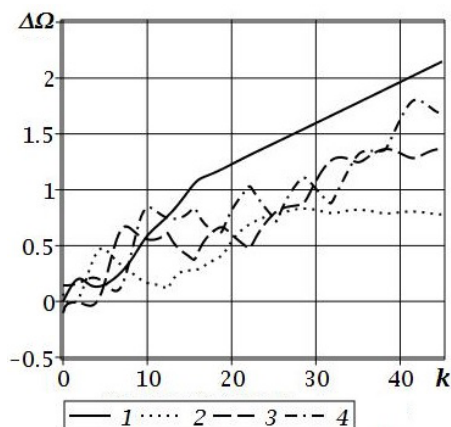


Рис. 5. Сопоставление спектров однородного и неоднородного волноводов из материалов группы А

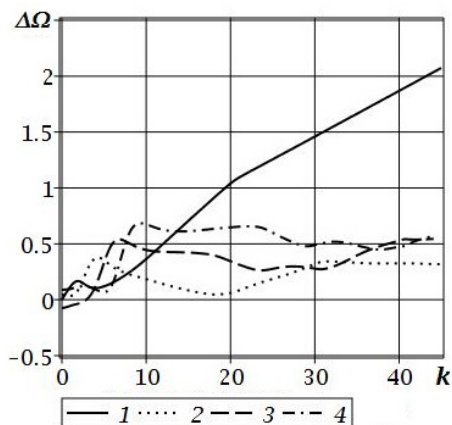


Рис. 6. Сопоставление спектров однородного и неоднородного волноводов из материалов группы Б

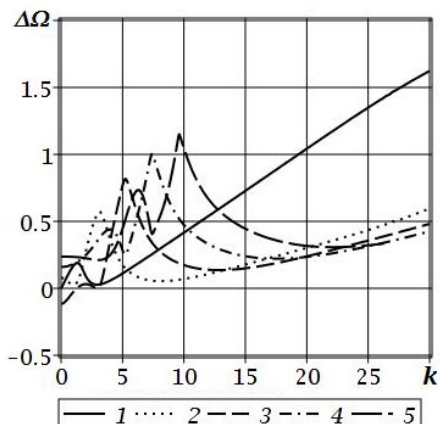


Рис. 7. Сопоставление спектров однородного и неоднородного волноводов из материалов группы В

Для приведенных на рисунках 2–4 фрагментов спектров были построены графики фазовых (рис. 8–10) и групповых (рис. 11–13) скоростей.

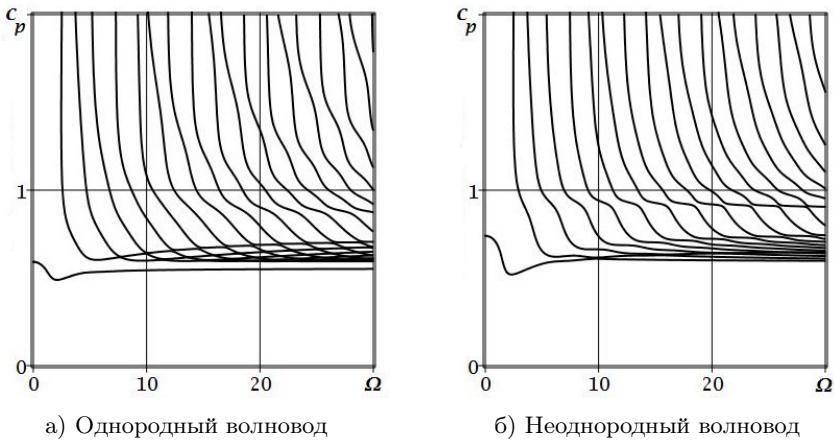


Рис. 8. Фазовые скорости волн в свободных цилиндрах из материалов группы А

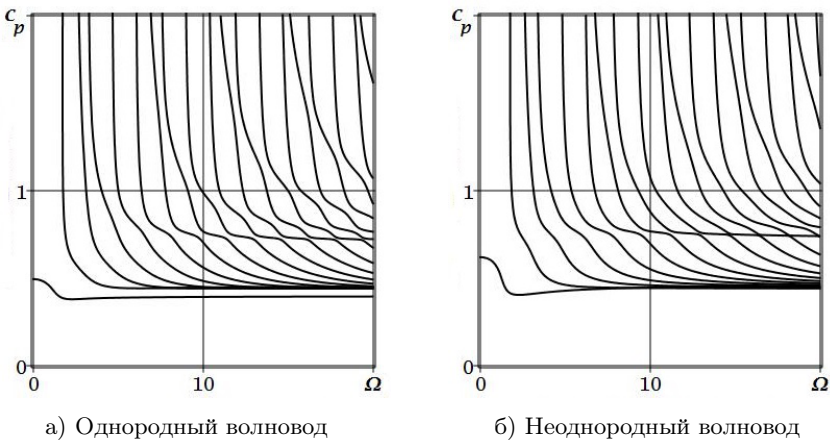


Рис. 9. Фазовые скорости волн в свободных цилиндрах из материалов группы В

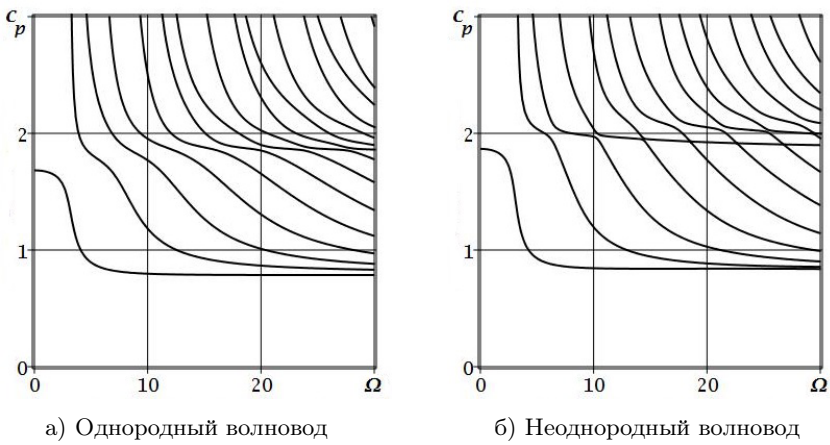


Рис. 10. Фазовые скорости волн в свободных цилиндрах из материалов группы В

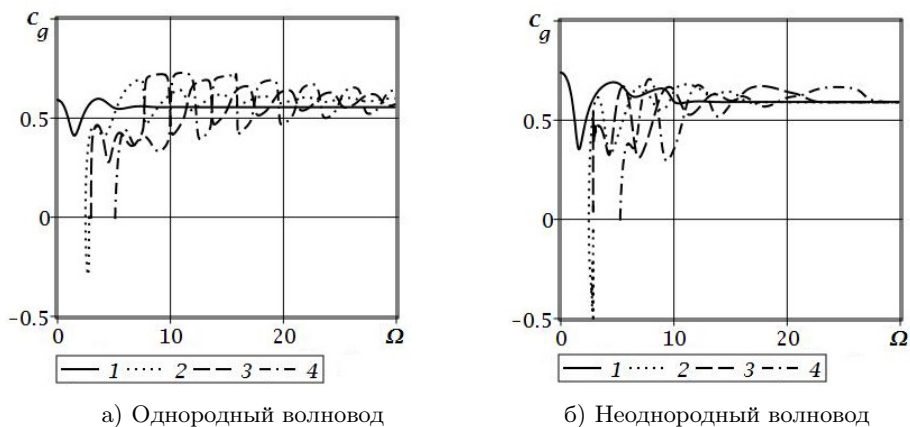


Рис. 11. Групповые скорости волн в свободных цилиндрах из материалов группы А

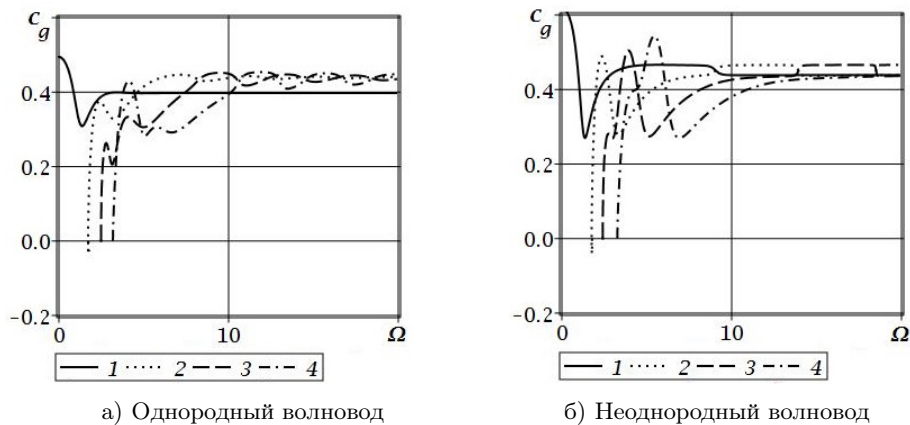


Рис. 12. Групповые скорости волн в свободных цилиндрах из материалов группы В

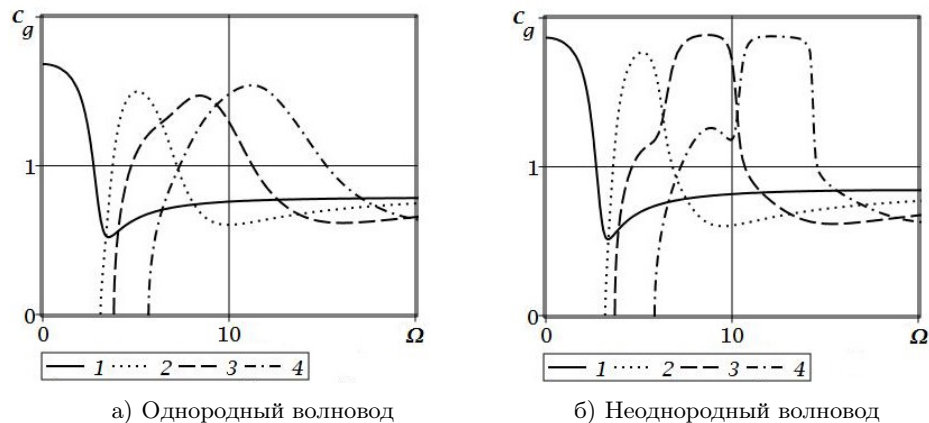


Рис. 13. Групповые скорости волн в свободных цилиндрах из материалов группы В

На представленных графиках c_p и c_g – пронормированные величиной $c_* = \sqrt{C_*/\rho_*}$ приведенные соответственно фазовая и групповая скорости. Отмеченное выше асимптотическое поведение $\Delta\Omega(k)$ как возрастающей линейной функции нашло естественное отражение в виде смещения вверх начиная со средних частот графиков фазовых скоростей первой моды неоднородного волновода относительно аналогичного графика однородного волновода для всех рассмотренных групп материалов. Характерное поведение первых мод сопоставляемых спектров проявилось и на представленных графиках – групповые скорости волн первых мод больше в неоднородных волноводах. Также отмечается отчетливо выраженный переход в исследованном диапазоне частот на асимптотическое поведение групповых скоростей волн второй и третьей мод спектра неоднородного волновода из материала группы А.

Был проведен сопоставительный анализ кинематических и силовых характеристик исследуемого волнового процесса в однородных и неоднородных волноводах из трех групп материалов. Ниже представлены графики радиальных амплитудных составляющих всех отличных от нуля компонент вектора перемещений и тензора напряжений при $k = 1$ в точках первой (рис. 14–19) и второй (рис. 20–25) мод.

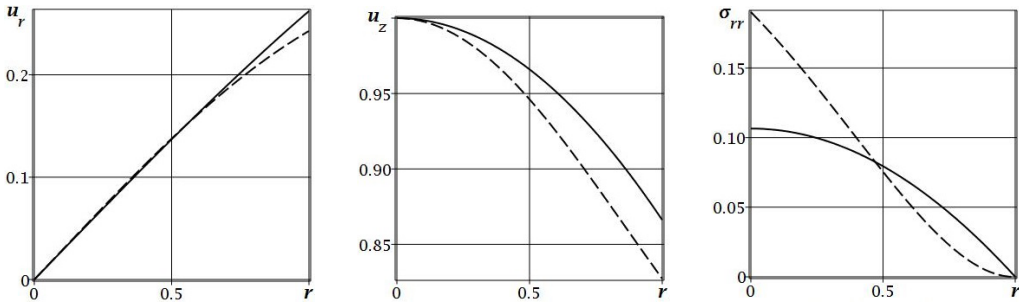


Рис. 14. Сопоставление амплитудных характеристик волн первой моды при $k = 1$ в свободных однородных (сплошная линия) и неоднородных (штриховая линия) цилиндрах из материалов группы А

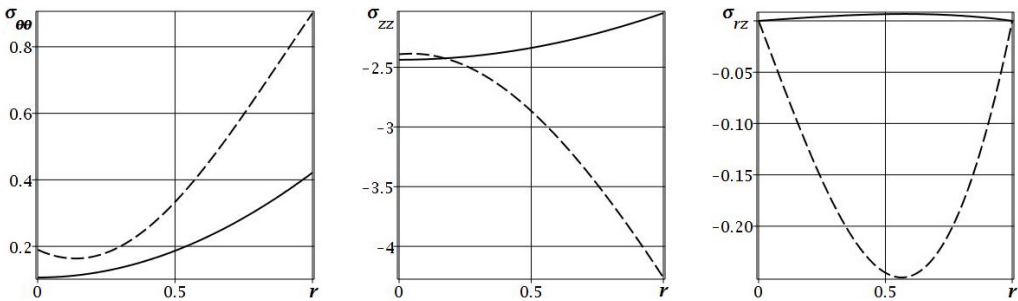


Рис. 15. Сопоставление амплитудных характеристик волн первой моды при $k = 1$ в свободных однородных (сплошная линия) и неоднородных (штриховая линия) цилиндрах из материалов группы А

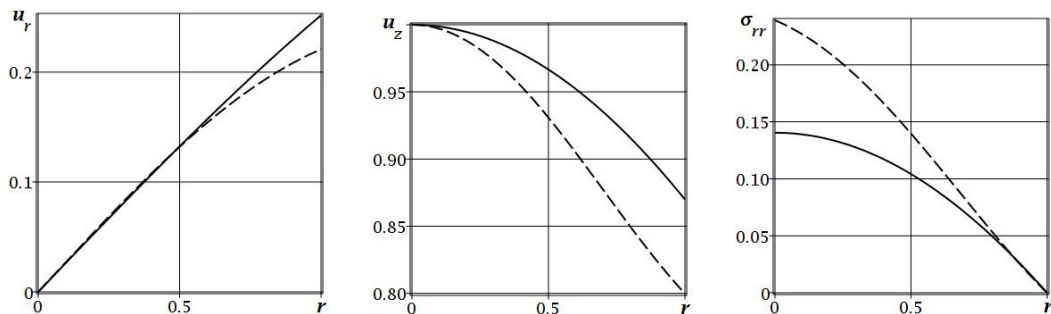


Рис. 16. Сопоставление амплитудных характеристик волн первой моды при $k = 1$ в свободных однородных (сплошная линия) и неоднородных (штриховая линия) цилиндрах из материалов группы Б

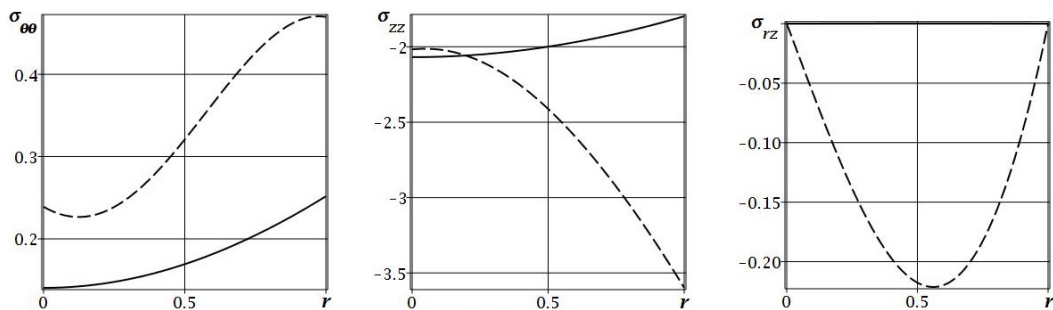


Рис. 17. Сопоставление амплитудных характеристик волн первой моды при $k = 1$ в свободных однородных (сплошная линия) и неоднородных (штриховая линия) цилиндрах из материалов группы Б

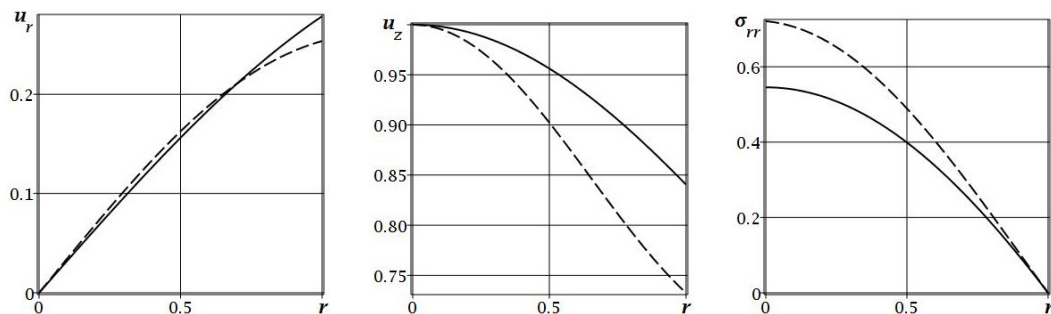


Рис. 18. Сопоставление амплитудных характеристик волн первой моды при $k = 1$ в свободных однородных (сплошная линия) и неоднородных (штриховая линия) цилиндрах из материалов группы В

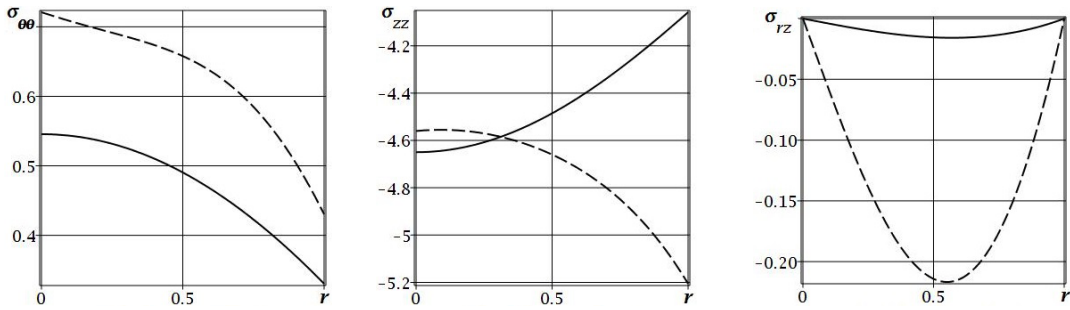


Рис. 19. Сопоставление амплитудных характеристик волн первой моды при $k = 1$ в свободных однородных (сплошная линия) и неоднородных (штриховая линия) цилиндрах из материалов группы В

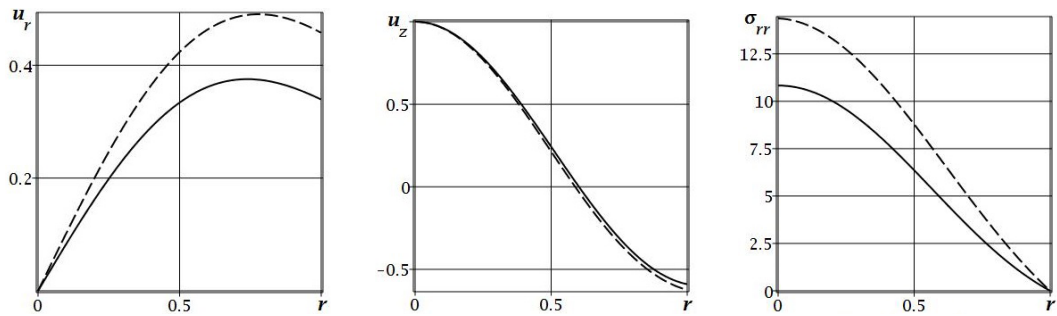


Рис. 20. Сопоставление амплитудных характеристик волн второй моды при $k = 1$ в свободных однородных (сплошная линия) и неоднородных (штриховая линия) цилиндрах из материалов группы А

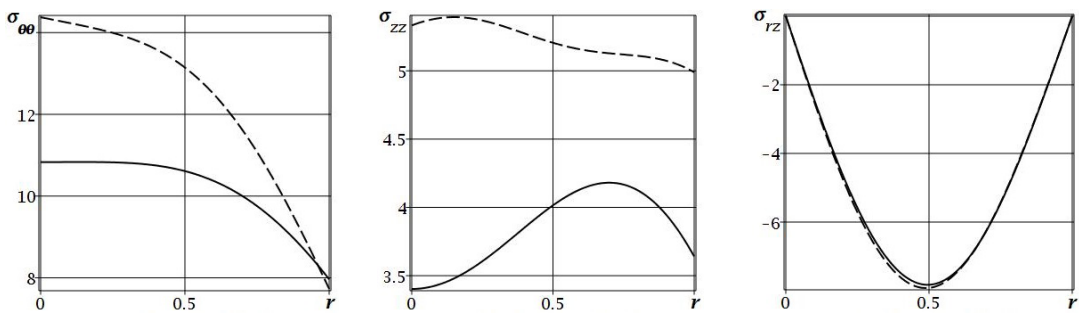


Рис. 21. Сопоставление амплитудных характеристик волн второй моды при $k = 1$ в свободных однородных (сплошная линия) и неоднородных (штриховая линия) цилиндрах из материалов группы А

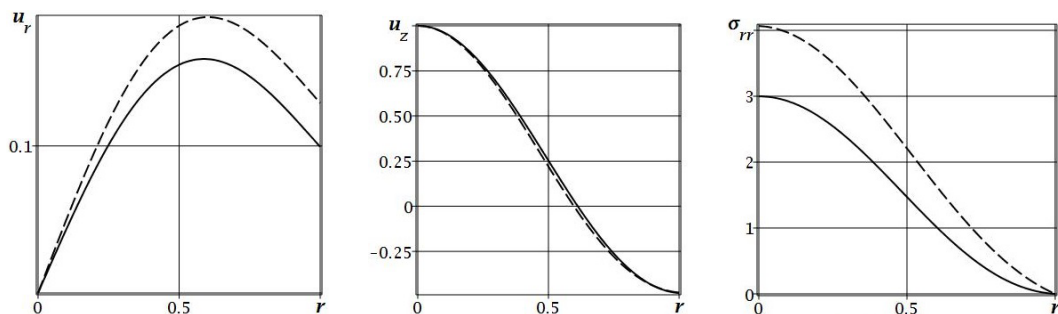


Рис. 22. Сопоставление амплитудных характеристик волн второй моды при $k = 1$ в свободных однородных (сплошная линия) и неоднородных (штриховая линия) цилиндрах из материалов группы В

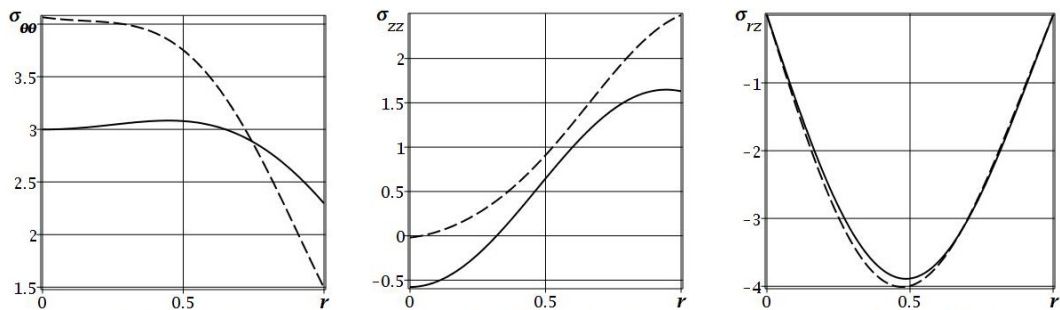


Рис. 23. Сопоставление амплитудных характеристик волн второй моды при $k = 1$ в свободных однородных (сплошная линия) и неоднородных (штриховая линия) цилиндрах из материалов группы В

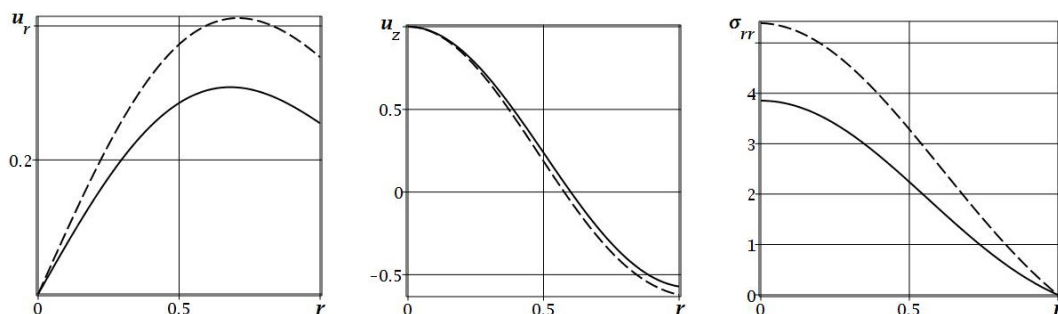


Рис. 24. Сопоставление амплитудных характеристик волн второй моды при $k = 1$ в свободных однородных (сплошная линия) и неоднородных (штриховая линия) цилиндрах из материалов группы В

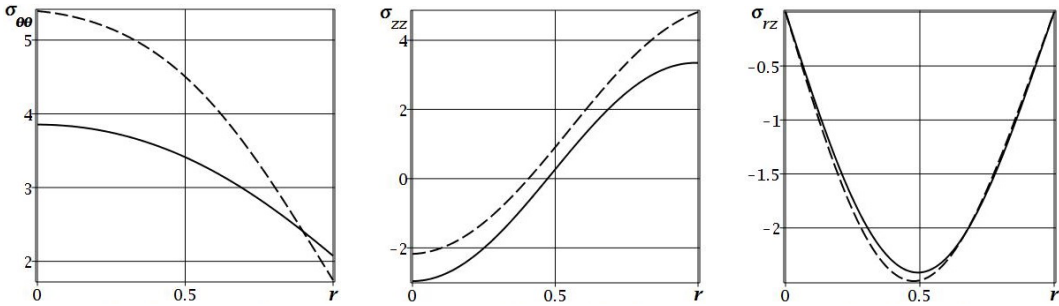


Рис. 25. Сопоставление амплитудных характеристик волн второй моды при $k = 1$ в свободных однородных (сплошная линия) и неоднородных (штриховая линия) цилиндрах из материалов группы В

В качестве характерной можно отметить следующую выявленную закономерность – более чем на порядок меньшие максимальные абсолютные значения радиальной амплитудной составляющей касательного напряжения $\tilde{\sigma}_{rz}$ по сравнению с максимальными абсолютными значениями амплитудных составляющих нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_{rr}, \tilde{\sigma}_{\theta\theta}, \tilde{\sigma}_{zz}$ в точке первой моды для однородного волновода при сопоставимых порядках значений указанных величин для неоднородного волновода, в то время как в точке второй моды характеристика $\tilde{\sigma}_{rz}$ для однородного и неоднородного волноводов имеет близкие величины, сопоставимые по максимальным абсолютным значениям с характеристиками $\tilde{\sigma}_{rr}, \tilde{\sigma}_{\theta\theta}, \tilde{\sigma}_{zz}$.

Выводы. Полученные результаты перспективны для использования в прикладных исследованиях, связанных с расчетами характеристик волноводных компонентов акустоэлектронных устройств, анализом моделей ультразвуковой диагностики, верификацией результатов, полученных прямыми численными методами.

1. Моисеенко И.А. Нормальные волны в функционально-градиентных сплошных цилиндрах / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2018. – № 1-2 (62-63). – С. 16–34.
2. Моисеенко И.А. Спектры нормальных упругих волн кручения в экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – Вып. 9 (55). – С. 139–145.
3. Моисеенко И.А. Распространение нормальных волн вдоль трансверсально изотропных функционально градиентных цилиндров // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2018. – № 1. – С. 37–54.
4. Моисеенко И.А. Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн в ортотропных цилиндрах с функционально-градиентной радиальной неоднородностью / И.А. Моисеенко, В.И. Сторожев. // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 112–124.
5. Моисеенко И.А. Исследование упругих волн крутильного типа с использованием трехфакторной модели функциональной неоднородности трансверсально изотропных сплошных цилиндрических волноводов / И.А. Моисеенко, Н.Ю. Мельничук // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 2(79). – С.5–15.
6. Космодамианский А.С. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред / А.С. Космодамианский, В.И. Сторожев. – К.: Наук. думка, 1985. – 176 с.

I.A. Moiseyenko, N.I. Melnichuk

Axisymmetric longitudinal-shear elastic waves in extended solid cylinders from a six-factor functionally inhomogeneous transversally isotropic material.

Two alternative versions of the six-factor model of the radial functional inhomogeneity of the physical and mechanical characteristics of a transversally isotropic material of a solid cylindrical waveguide are determined for the case of propagating axisymmetric normal longitudinal-shear elastic waves. Two approaches to determining the functional components of these models are presented. For each of these approaches, a sufficient condition for a weak radial inhomogeneity is determined, which ensures the construction of a basic matrix solution of the equations of the classical mathematical model of wave deformation for the type of wave process under consideration. The elements of the basic solution are expressed in terms of analytic functions represented by their expansions with coefficients determined from explicit recurrent relations. A comparative analysis of the results of a numerical experiment is given for the cases of homogeneous and functionally inhomogeneous transversally isotropic free waveguides. The effects of the influence of the functional radial inhomogeneity of the waveguide material on the topology of dispersion spectra, the distribution of phase and group velocities of traveling waves of longitudinal-shear type, and the kinematic and force characteristics of the wave process are studied. Quantitative and qualitative estimates of the obtained numerical results are given.

Keywords: *FGMs, transversally isotropic, cylindrical waveguide, axisymmetric longitudinal-shear waves, multifactorial model of radial inhomogeneity, basic solution, dispersion relations.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк

Получено 14.09.2022

Donetsk National University, Donetsk

mia@donnu.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 519.5
doi:10.24412/0136-4545-2022-3-60-67
EDN:SNOQFF



©2022. В.Н. Павлыш, А.О. Новиков, О.В. Чеснокова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Рассматривается процесс принудительного внедрения жидкости в трещиновато-пористую среду со стохастическими свойствами. Целью является обеспечение равномерного распределения жидкости с учетом анизотропии фильтрационных и коллекторских свойств среды. В основу математической модели положено нелинейное уравнение упругого режима фильтрации.

Ключевые слова: математическая модель, процесс фильтрации жидкости, анизотропия, трещиновато-пористая среда, стохастические свойства, численный метод.

Введение. При подземной добычи угля важное значение имеют мероприятия по повышению безопасности работ. Одним из основных способов предотвращения проявлений опасных и вредных свойств угольного пласта является предварительная гидравлическая обработка путем напорного внедрения жидкости в его рабочую область.

Угольный пласт рассматривается как трещиновато-пористая, сильно сцементированная сплошная среда, фильтрационные и коллекторские свойства которой носят стохастический характер. Наиболее эффективным методом исследования процесса с учетом анизотропии среды является математическое моделирование.

В работах многих отечественных и зарубежных ученых дается физическое обоснование и вывод уравнений упругой фильтрации жидкости в глубинных пластах. Анализ литературы показывает, что именно такой подход дает наиболее надежные результаты, поэтому в данной работе рассматривается возможность применения полученных авторами результатов к построению математической модели процесса движения текучих веществ в угольном пласте.

1. Исходные физические предпосылки к выводу уравнений. Авторами рассматриваются пористые горные породы, расположенные на большой глубине и находящиеся под нагрузкой вышележащих слоев, анализируются малые возмущения напряженного состояния горной пористой породы, возникаю-

щие при нагнетании жидкости в пласт, и предполагается, что кровля и почва пласта идеально жесткие и непроницаемые.

Из анализа теоретических и практических работ следует, что боковые породы можно рассматривать непроницаемыми и идеально жесткими по отношению к угольному пласту. Кроме того, можно ограничиться рассмотрением малых возмущений напряженного состояния пласта при нагнетании.

Целью настоящей статьи является определение характера движения жидкости в условиях хаотически изменяющихся коэффициентов фильтрации и пористости обрабатываемого пласта и обоснование возможных путей преодоления отрицательного влияния анизотропии.

2. Постановка задачи. На рисунке 1 приведено схематическое изображение технологии процесса воздействия через скважины, пробуренные параллельно линии забоя.

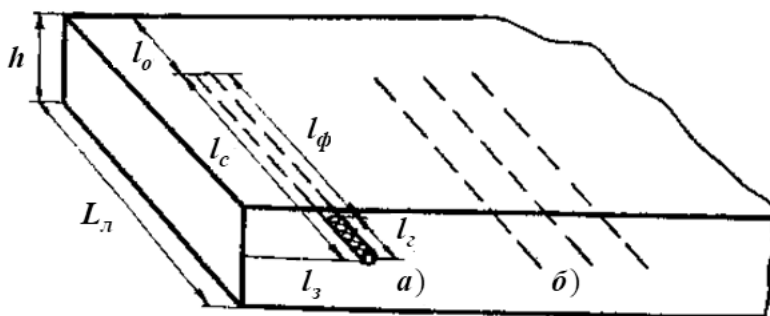


Рис. 1. Технологическая схема воздействия на пласт:
а – одиночная скважина, б – группа скважин;

$L_{л}$ – длина лавы, h – мощность пласта, l_c – длина скважины, l_{ϕ} – длина фильтрующей части, l_r – глубина герметизации, l_z – расстояние до забоя, $l_o = L_{л} - l_c$.

Как следует из вида уравнений движения и неразрывности для жидкости [1], в них входят скорости движения жидкости и смещений твердых частиц:

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = -\frac{\mu}{k} n_{\varepsilon} (w_i - u_i); \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} n_{\varepsilon} w_i = 0. \quad (2)$$

В цементированных средах деформации переупаковки твердых частиц по величине близки к деформациям изменения объема частиц, при этом можно пренебречь скоростью перемещения твердых частиц по сравнению со скоростью жидкости всюду, кроме уравнений неразрывности. Исследуя эти уравнения и рассматривая фильтрацию капельной жидкости с относительно небольшим (до 10^3 атмосфер) перепадом давлений, авторы [2] получили уравнение нелинейно-упругого режима фильтрации

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \chi \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ [1 + \alpha (P - P_0)] \frac{\partial P}{\partial x_i} \right\}, \quad (3)$$

где $\chi = k_0 / (\mu_0 (n_{\varepsilon 0} a_\rho + a_m))$ – коэффициент пьезопроводности; $\alpha = a_k + a_\rho - a_\mu$, a_k, a_n, a_ρ, a_μ – соответственно коэффициенты изменения проницаемости, пористости, вязкости и плотности.

При постановке задачи исследования для различных схем, уравнение (3) дополняется соответствующими начальными и граничными условиями.

В начальный момент времени $t = 0$ задается распределение давления в области фильтрации

$$P(x_i, t)|_{t=0} = P_0.$$

На скважине задается режим давления

$$P(x_i, t)|_{x_i=x_i^C} = P_C(t),$$

или темп нагнетания

$$\Phi_{G_c} \frac{k}{\mu} \frac{\partial P(x_i, t)}{\partial n} ds = cq(t),$$

где $P_C(t)$ – давление на скважине; x_i^C – координаты скважины; G_C – контур скважины; $q(t)$ – темп нагнетания; c – коэффициент, зависящий от размерности.

На границе области фильтрации задается либо давление, если область ограничена скважинами или выработками, либо условия непроницаемости на контакте с боковыми породами или на «бесконечности» (когда обрабатывается нетропуемый массив)

$$P(x_i, t)| = P_\Gamma,$$

или

$$\frac{\partial P(x_i, t)}{\partial n}|_\Gamma = 0,$$

где Γ – граница области фильтрации; P_Γ – давление на границе области.

Таким образом, сформулированные задачи исследования параметров процесса гидродинамического воздействия на пласт исчерпывают основные рациональные схемы обработки. Технологические схемы с иным расположением скважин будут являться частными случаями рассматриваемых задач. Дальнейшая работа заключается в математической формулировке каждой из отмеченных задач и решении полученных уравнений.

3. Методика решения задачи. Уравнение (3) – это нелинейное параболическое уравнение, точное решение которого весьма затруднено.

Для численного решения применяется метод конечных разностей. Обозначим: $P = P - P_0$. Исходное уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(P) \frac{\partial P}{\partial x} \right]. \quad (4)$$

Аппроксимируем производные по неявной четырехточечной схеме [3]

$$\frac{\partial p}{\partial t} \approx \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta t}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial p}{\partial x} \right) \approx \frac{k_{i+0,5,j} p_{i+1,j} - (k_{i+0,5,j} + k_{i-0,5,j}) p_{i,j} + k_{i-0,5,j} p_{i-1,j}}{\Delta x^2}. \quad (6)$$

Приравняв (5) и (6), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta t}{\Delta x^2} k_{i+0,5,j} p_{i+1,j} - \\ & - \left[\frac{\Delta t}{\Delta x^2} (k_{i+0,5,j} + k_{i-0,5,j}) + 1 \right] p_{i,j} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} k_{i-0,5,j} p_{i-1,j} = -p_{i,j-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение полученной системы находится методом прогонки [3].

Поскольку коэффициент $k(p)$ является функцией давления, необходимо применять итерационный процесс. В качестве первого приближения задается значение давления на предыдущем шаге по времени, затем итерационный расчет повторяется до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность.

Таким образом, исходя из начальных условий, можно рассчитать распределение давления в любой момент времени. Критерием окончания может служить момент достижения фронтом фильтрации границы отрезка l_o . Для контроля за ходом расчета можно использовать метод материального баланса и другие методы [3, 4]. На рисунке 2 приведена обобщенная блок-схема алгоритма. В ре-



Рис. 2. Общая блок-схема программы моделирования процесса фильтрации.

зультате решения получают кривые $p(x)$ для разных моментов времени и $p(t)$ на различном расстоянии от скважины.

4. Анализ результатов численных исследований. Одномерная постановка задачи дает возможность рассчитывать параметры нагнетания более совершенным методом, чем применявшиеся ранее. Однако, такая постановка не дает возможности более глубоко исследовать технологические схемы нагнетания, следовательно, не позволяет найти пути совершенствования схем воздействия.

Поэтому необходимо рассматривать двумерный случай (плоскостная фильтрация).

Двумерная (плоскостная) фильтрация.

Уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi_x \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + \alpha(p - p_0)) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \chi_y \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 + \alpha(p - p_0)) \frac{\partial p}{\partial y} \right]. \quad (8)$$

Начальные и граничные условия формулируются так же, как и в предыдущем случае.

Для решения задачи применяется схема продольно-поперечных направлений (схема Дугласа) [5,6].

Уравнение представляется в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(p) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k(p) \frac{\partial p}{\partial y} \right]. \quad (9)$$

Область определения функции $p(x, y, t)$ покрывается сеткой:

$$x_i = i \cdot \Delta x, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n;$$

$$y_j = j \cdot \Delta j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m;$$

$$t_k = k \cdot \Delta t, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Каждый шаг по времени осуществляется в два приема:

$$\begin{aligned} & 1) \quad \frac{p_{i,j}^{k+0,5} - p_{i,j}^k}{0,5 \cdot \Delta t} = \\ & = \frac{1}{\Delta x^2} \left(k_{i+0,5,j}^{k+0,5} p_{i+1,j}^{k+0,5} - \left(k_{i+0,5,j}^{k+0,5} + k_{i-0,5,j}^{k+0,5} \right) p_{i,j}^{k+0,5} + k_{i-0,5,j}^{k+0,5} p_{i-1,j}^{k+0,5} \right) + \\ & + \frac{1}{\Delta y^2} \left(k_{i,j+0,5}^k p_{i,j+1}^k - \left(k_{i,j+0,5}^k + k_{i,j-0,5}^k \right) p_{i,j}^k + k_{i,j-0,5}^k p_{i,j-1}^k \right); \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & 2) \quad \frac{p_{i,j}^{k+0,5} - p_{i,j}^k}{0,5 \cdot \Delta t} = \\ & = \frac{1}{\Delta x^2} \left(k_{i+0,5,j}^{k+0,5} p_{i+1,j}^{k+0,5} - \left(k_{i+0,5,j}^{k+0,5} + k_{i-0,5,j}^{k+0,5} \right) p_{i,j}^{k+0,5} + k_{i-0,5,j}^{k+0,5} p_{i-1,j}^{k+0,5} \right) + \\ & + \frac{1}{\Delta y^2} \left(k_{i,j+0,5}^{k+1} p_{i,j+1}^{k+1} - \left(k_{i,j+0,5}^{k+1} + k_{i,j-0,5}^{k+1} \right) p_{i,j}^{k+1} + k_{i,j-0,5}^{k+1} p_{i,j-1}^{k+1} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Исследование схем удобно производить с масштабированными (нормированными) переменными. На рисунке 3а приведено распределение давления в плоскости OXY после 10 шагов по времени. При этом коэффициент проницаемости принимался постоянным, т.е. рассматривается случай изотропного пласта. Область увлажнения до момента достижения жидкостью границ блока имеет форму, близкую к эллипсоидной. На рисунке изображены линии равного давления, линии тока направлены по нормали к ним.

На рисунке 3б приводится результат решения задачи в плоскости OYZ . При этом учтена анизотропия пласта, и коэффициент фильтрации по мощности (по оси $OZ : k_{oz}$) взят из расчета $k_{oz} = 0,05k_{ox}$. Форма обработанной зоны эллипсовидная до момента достижения границ пласта с боковыми породами, после чего искажается.

Однако, как отмечалось выше, проницаемость пласта различается не только вдоль различных осей. Структура пласта весьма сложна, и картины фильтрации, полученные выше, дают идеализированное представление о характере процесса. При такой форме области воздействия распространение влаги должно происходить равномерно, чего на самом деле не наблюдается. Следовательно, необходимо так подобрать параметры модели, чтобы получить более реальную картину процесса.

Один из путей подбора таких параметров – задание анизотропии пласта по всей области фильтрации независимо от направления осей, при этом, естественно, необходимо учесть, что коэффициент проницаемости вдоль оси OZ в любом случае в несколько раз меньше проницаемости по простиранию (оси OX). Поскольку пласт состоит из блоков с разной проницаемостью, пересечен трещинами различного происхождения, то в нем можно выделить некоторые области с различной величиной коэффициента фильтрации, и соответствующим образом задать набор коэффициентов проницаемости. Ввиду того, что выделить на практике такие области, не проникнув в пласт, невозможно, в первом приближении можно задать набор коэффициентов проницаемости хаотично, используя таблицу случайных чисел. Благодаря этому приему можно будет исследовать процесс фильтрации в условиях, более близких к реальным по сравнению со случаем, когда проницаемость осредняется по трем (двум) направлениям.

На рисунке 3в приведен результат решения задачи при таком случайном наборе коэффициентов проницаемости. Как видно из результатов моделирования, жидкость распространяется по всему пласту неравномерно, образуются слабо увлажненные участки. При этом жидкость может найти путь фильтрации, по которому быстро выйдет на соседнюю скважину, оставив большие блоки неувлажненными. Обходя эти блоки, жидкость «закупоривает» имеющийся в них метан, а это может привести к образованию зон с высоким содержанием газа под давлением, и увлажнение даст нежелательный эффект в отношении внезапного выброса. Особенно это характерно при нагнетании полимера, так как после затвердевания газ запирается в блоках с плохой проницаемостью.

Одним из возможных путей в этом направлении является метод каскадной

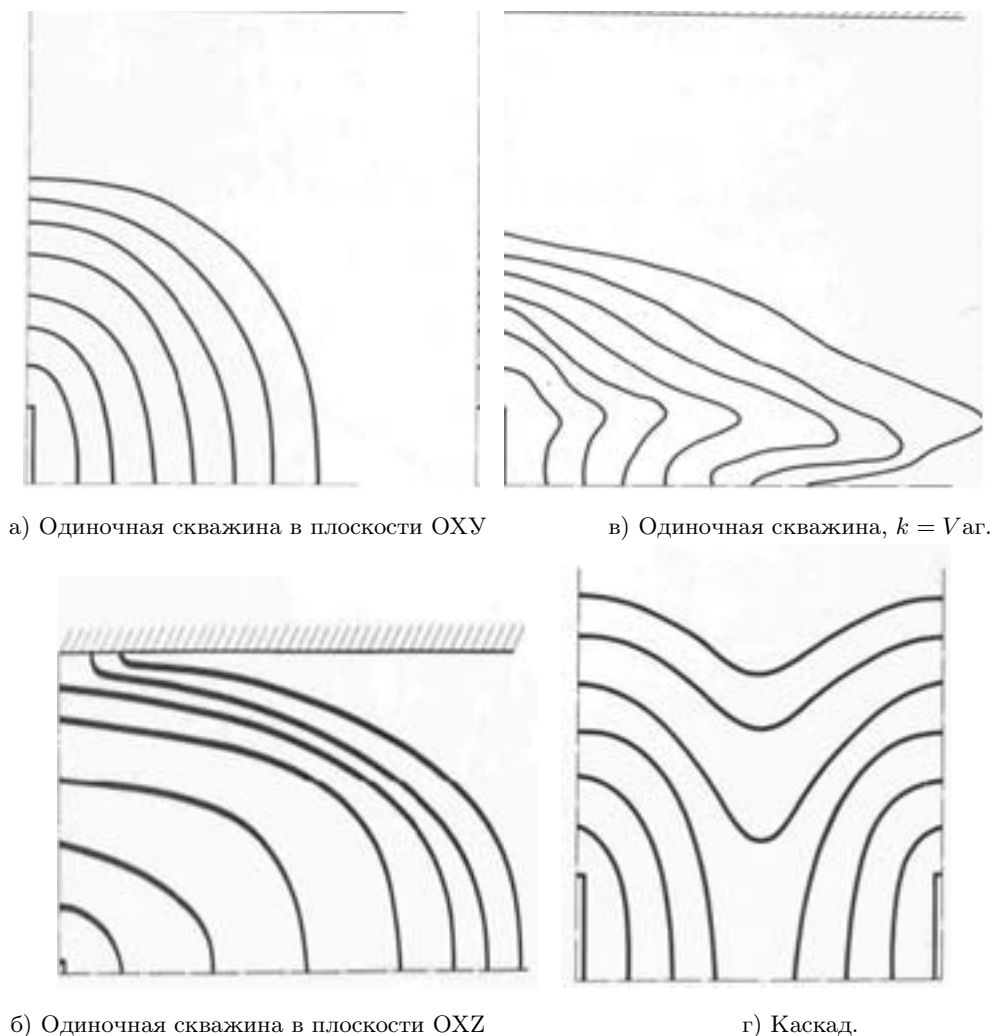


Рис. 3. Результаты моделирования скважин, пробуренных впереди забоя

обработки, сущность которого заключается в одновременном нагнетании через группу скважин в режиме, обеспечивающем взаимодействие встречных потоков (рис. 3г).

Выводы. По результатам численного моделирования установлено, что благодаря взаимодействию контуров увлажнения от соседних скважин насыщение пласта жидкостью значительно более равномерно, чем при обработке через одиночную скважину. Это происходит потому, что при встрече потоков от соседних скважин начинается их взаимодействие, и под влиянием развиваемых давлений жидкость проникает в те зоны, которые при работе одиночной скважины оставались неувлажненными или плохо увлажненными ввиду их пониженной проницаемости. Обеспечив достаточно длительную интерференцию потоков, можно

добиться значительно более равномерного распределения влаги по сравнению со схемой нагнетания через одиночные скважины. Необходимо отметить, что одновременное нагнетание через группу скважин применялось и ранее, причем отмечалась более быстрая, чем при одиночных скважинах, стабилизация процесса. Однако параметры воздействия рассчитывались как для одиночных скважин, т.е. таким образом, что интерференция потоков не происходила и качество насыщения пласта оставалось таким же, как при воздействии через одиночные скважины.

Применение метода каскадной обработки не требует никаких изменений оборудования, не влияет на технологию очистных работ, и вместе с тем позволяет намного повысить качество обработки пласта текучим и тем самым повысить эффективность воздействия.

1. Павлыш В.Н. . Развитие теории и совершенствование технологии процессов воздействия на угольные пласты: Монография / В.Н. Павлыш. – Донецк: РВА ДонНТУ, 2005. – 347 с.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – Москва: Наука, 1977. – 656 с.
3. Павлыш В.Н. Математическое моделирование процесса увлажнения угольного пласта / В.Н. Павлыш // "ICAMC'98 - 13th – ASRTP - 13th World Mining Congress. – High Tatras, Slovak Republic, 1998. – С. 219–222.
4. Булат А.Ф. Гидродинамическое воздействие на газонасыщенные угольные пласты / А.Ф. Булат, К.К. Софийский, Д.П. Силин и др. – Днепропетровск, 2003. – 220 с.
5. Павлыш В.Н. Технология каскадной гидрообработки пласта как способ преодоления его анизотропии / В.Н. Павлыш // Известия Донецк. горн. ин-та. – Донецк: ДонНТУ, 2002. – Вып. 2. – С. 58–60.
6. Павлыш В.Н. Математическая модель процесса гидродинамического воздействия на угольный пласт / В.Н. Павлыш // Известия Донецк. горн. ин-та. – Донецк: ДонНТУ, 2003. – №. 2. – С. 58–62.

V.N. Pavlysh, A.O. Novikov, O.V. Chesnokova

Mathematical modeling of the process unsteady fluid motion in an anisotropic medium.

The process of forced introduction of a liquid into a fractured-porous medium with stochastic properties is considered. The goal is to ensure a uniform distribution of the liquid, taking into account the anisotropy of the filtration and collector properties of the medium. The mathematical model is based on the nonlinear equation of the elastic filtration regime.

Keywords: *mathematical model, liquid filtration process, anisotropy, fractured-porous medium, stochastic properties, numerical method.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный технический университет”,
Донецк

Получено 19.08.2022

Donetsk National Technical University, Donetsk

pavlyshvn@mail.ru

УДК 519.5

doi:10.24412/0136-4545-2022-3-68-76

EDN:VWVGVB



©2022. В.Н. Павлыш, Е.В. Перинская, С.М. Буняев, Н.В. Кандуба

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О ПРИНУДИТЕЛЬНОЙ КОНВЕКЦИИ В МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЕ

Рассматривается краевая задача, положенная в основу математической модели конвективного перемешивания многокомпонентной смеси в аппарате закрытого типа. Целью является определение параметров конвективного процесса, при которых обеспечивается равномерное распределение частиц в сечении рабочего пространства аппарата.

Ключевые слова: математическая модель, конвекция, многокомпонентная среда, процесс, численный метод.

Введение. Технология изготовления ряда необходимых материалов предусматривает их получение из влажных неоднородных субстанций, перемешиваемых в процессе производства. На многих предприятиях в составе технологического оборудования эксплуатируются машины и аппараты, содержащие узлы конвективного типа, а именно устройства, осуществляющие перемешивание неоднородных материалов, состоящих из жидкой и твердой фазы (технологические линии химических производств, предприятия строительных материалов, технологические процессы обогащения полезных ископаемых и т. п.). При этом качество конечного продукта во многом зависит от эффективности работы конвективных узлов. Аналогичные проблемы требуют решения при проектировании машин, изготавливающих бетонные смеси, конструировании технологических линий, осуществляющих подготовку увлажнённых масс обогащённого угля, и в других отраслях.

Таким образом, стоит общая проблема расчета оптимальных параметров рассматриваемых аппаратов, что непосредственно связано с важной практической задачей повышения производительности и качества продукции.

Кардинальным направлением решения этой проблемы является применение математического моделирования с использованием современных моделей и компьютерных технологий.

В этой связи, разработка детерминированных математических моделей процессов функционирования аппаратов, содержащих узлы конвективного типа, и обоснование с их применением эффективных параметров оборудования является актуальной научно-технической задачей, имеющей отраслевое значение. Авторами рассматриваются решения задач математического моделирования машин, технологический процесс функционирования которых предполагает конвектив-

ное воздействие на многокомпонентные смеси, являющиеся сырьём для производства специальных материалов. Целью настоящей статьи является совершенствование математических моделей, вычислительных алгоритмов и программных средств для исследования процессов и обоснования параметров технологических систем, содержащих узлы конвективного типа.

1. Физико-техническая постановка задачи математического моделирования процесса функционирования однолопастного конвективного аппарата. В однолопастном конвективном аппарате математическая модель процесса перемешивания многокомпонентной смеси строится на базе уравнений, отражающих физический процесс конвекции массы, которая происходит за счет перемешивания смеси лопастью, угловая скорость вращения которой ω .

Для формирования уравнений, положенных в основу математической модели, строится формализованная геометрическая модель.

Область существования решения представляет собой внутреннее пространство G рассматриваемого аппарата (рис.1), и в этой области требуется определить концентрацию твердой фазы, учитывая при этом вихревые течения раствора, продольную и поперечную диффузию, форму внутреннего пространства и угловую скорость вращения лопасти.

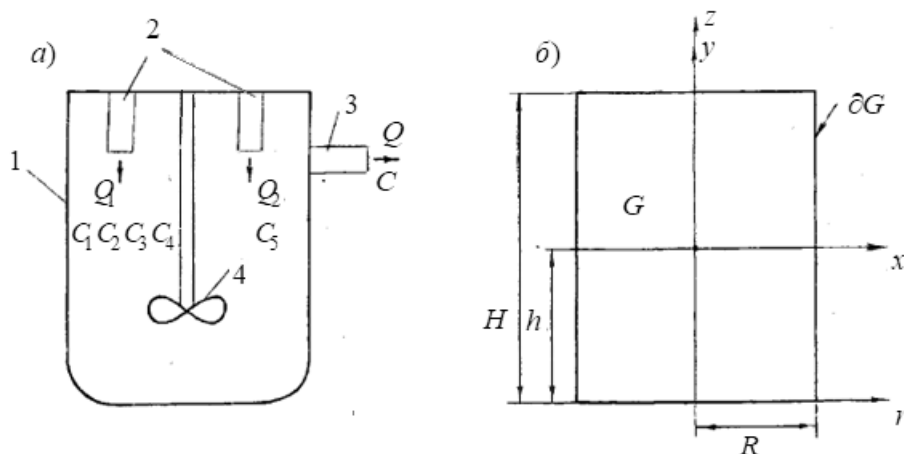


Рис. 1. Схема построения математической модели аппарата: а) 1 – корпус, 2 – входные трубопроводы, 3 – верхний перелив (выходной трубопровод), 4 – мешалка; б) к выбору координат и построению математических моделей.

Поскольку математическое моделирование процесса с применением детерминированных моделей осуществляется впервые, математические модели (а соответственно и краевые задачи) строятся от базовых соотношений с минимальным числом параметров до многомерных уравнений и систем.

Очевидно, наиболее представительной будет модель, содержащая три параметра (два пространственных и время), что соответствует обозначенной выше области решения (рис. 1).

При двух геометрических переменных x и y концентрация $C(t, x, y)$ является решением уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \cdot \frac{\partial C}{\partial t} = & -V_x \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{D_L}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + V_y \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{D_H}{h^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \\ & + \frac{Q_1(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + Q_2 C_5 - QC}{V}, \quad (x, y) \in G, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

при следующем граничном и начальном условии

$$C_x(t, x, y) = 0, \quad (t, x, y) \in [0, T] \times \partial G, \quad (2)$$

$$C(0, x, y) = C_0. \quad (3)$$

Краевая задача (1)–(2) описывает двумерный вариант модели аппарата, она содержит две неизвестные функции $\psi(x, y)$ и $C(t, x, y)$.

В случае цилиндрических координат геометрическими переменными являются радиус r и высота z . При этом

$$\text{rot} \vec{V} \Big|_{\varphi} = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r},$$

где $\vec{V} = V_r \cdot \vec{i} + V_z \cdot \vec{k}$, $V_{\varphi} = 0$, φ – угол;

$$\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} = \mu(r, z),$$

$$\frac{\partial(r \cdot V_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \cdot V_z)}{\partial z} = 0.$$

Тогда

$$V_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad V_z = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

$$\frac{1}{H^2} \cdot \frac{\partial \psi^2}{\partial z^2} + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{R^2 \cdot r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{r \cdot \omega \cdot R}{R^2 r^2 + H^2 \cdot z^2}; \quad (4)$$

$$D = (0 < r < 1, 0 < z < 1),$$

$$\psi(r, z) = 0 \quad (r, z) \in \partial D, \quad (5)$$

H и R – характерные размеры реактора.

Поле скоростей частиц в рабочем пространстве аппарата определено из решения краевой задачи (4), (5), концентрация твердой фазы $C(t, r, z)$ находится из решения следующей задачи

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \cdot \frac{\partial C}{\partial t} = & \frac{1}{r \cdot R \cdot H} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial C}{\partial z} - \frac{1}{r \cdot R \cdot H} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial C}{\partial r} + D_H \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \\ & + \frac{D_R}{r \cdot R} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{Q_1(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + Q_2 C_5 - QC}{V} \end{aligned} \quad (6)$$

$$0 < r < 1, \quad 0 < z < 1;$$

$$\frac{\partial C}{\partial n} = 0, \quad (t, r, z) \in [0, T] \times \partial D; \quad (7)$$

$$C(0, r, z) = C_0. \quad (8)$$

2. Численное решение краевых задач с использованием метода конечных разностей. Для решения нелинейных уравнений математической физики, на которых основаны математические модели процессов работы однолопастного конвективного аппарата, необходимо применять численные методы [1]. Уравнение (1) в разностном виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \cdot \frac{C_{ij} - C_{i,j-1}}{\tau} = \\ & = -V_x \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{C_{i+1,j} - C_{i-1,j}}{2h} + D_L \cdot \frac{1}{l^2} \cdot \frac{C_{i+1,j} - 2C_{ij} + C_{i-1,j}}{h^2} + f - \frac{Q}{V} \cdot C_{ij}; \\ & f = \frac{Q_1(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + Q_2 C_5}{V}. \end{aligned}$$

Краевая задача (1) – (3) сводится к системе

$$C_{ij} = A \cdot C_{i-1,j-1} + B \cdot C_{i,j-1} + D \cdot C_{i+1,j-1} + F, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{V_x}{2 \cdot l \cdot h} + \frac{D_L}{l^2 h^2} \right) \cdot T \cdot \tau, \\ B &= \left(1 - \frac{2 \cdot D_L \cdot T \cdot \tau}{l^2 h^2} - \frac{Q \cdot T \cdot \tau}{V} \right), \\ D &= \left(\frac{D_L}{l^2 h^2} - \frac{V_x}{2 \cdot l \cdot h} \right) \cdot T \cdot \tau, \\ F &= \frac{Q_1(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + Q_2 C_5}{V} \cdot T \cdot \tau. \end{aligned}$$

Численная реализация двумерных моделей базируется на соотношениях

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \cdot \frac{C_{ij}^{k+0,5} - C_{ij}^k}{0,5H_T} = -\frac{V_x}{l} \cdot \frac{C_{i+1,j}^{k+0,5} - C_{ij}^{k+0,5}}{h \cdot H_x} - \frac{V_y}{h} \cdot \frac{C_{i,j+1}^k - C_{ij}^k}{H_y} + \\ & + \frac{D_L}{l^2} \cdot \frac{C_{i+1,j}^{k+0,5} - 2C_{ij}^{k+0,5} + C_{i-1,j}^{k+0,5}}{H_x^2} + \frac{D_H}{h^2} \cdot \frac{C_{i,j+1}^k - 2C_{ij}^k + C_{i,j-1}^k}{H_y^2} + f. \end{aligned}$$

Шаг $(k + 0, 5)$:

$$\begin{aligned} & \frac{D_L}{l^2 \cdot H_x^2} \cdot C_{i-1,j}^{k+0,5} - \left(\frac{1}{0,5 \cdot T \cdot H_T} - \frac{V_x}{l \cdot H_x} + \frac{2 \cdot D_l}{l^2 \cdot H_x^2} \right) \cdot C_{ij}^{k+0,5} + \\ & + \left(\frac{D_L}{l^2 \cdot H_x^2} - \frac{V_x}{l \cdot H_x} \right) \cdot C_{i+1,j}^{k+0,5} = \left(\frac{V_y}{h \cdot H_y} - \frac{D_H}{h^2 \cdot H_y^2} \right) \cdot C_{i,j+1}^k + \\ & + \left(\frac{2 \cdot D_H}{h^2 \cdot H_y^2} - \frac{1}{0,5 \cdot T \cdot H_T} - \frac{V_y}{h \cdot H_y} \right) \cdot C_{ij}^k - \frac{D_H}{h^2 \cdot H_y^2} \cdot C_{i,j-1}^k - f. \end{aligned} \quad (10)$$

Шаг $(k + 1)$:

$$\begin{aligned} & \frac{D_H}{h^2 \cdot H_y^2} \cdot C_{i,j-1}^{k+1} - \left(\frac{1}{0,5 \cdot T \cdot H_T} - \frac{V_y}{h \cdot H_y} + \frac{2 \cdot D_H}{h^2 \cdot H_y^2} \right) \cdot C_{ij}^{k+1} + \\ & + \left(\frac{D_H}{h^2 \cdot H_y^2} - \frac{V_y}{h \cdot H_y} \right) \cdot C_{i,j+1}^{k+1} = \left(\frac{V_x}{l \cdot H_x} - \frac{D_L}{l^2 \cdot H_x^2} \right) \cdot C_{i+1,j}^{k+0,5} + \\ & + \left(\frac{2 \cdot D_L}{l^2 \cdot H_x^2} - \frac{1}{0,5 \cdot T \cdot H_T} - \frac{V_x}{l \cdot H_x} \right) \cdot C_{ij}^{k+0,5} + \frac{D_L}{l^2 \cdot H_x^2} \cdot C_{i-1,j}^{k+0,5} + f. \end{aligned}$$

Краевая задача

$$\begin{aligned} \psi(x_i, y_j) &= \psi_{ij} \quad (i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M;) \\ \psi_{0j} &= \psi_{Nj} = 0; \quad \psi_{i0} = \psi_{iM} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Разностная форма уравнения

$$\frac{1}{l^2} \cdot \frac{\partial \psi^2}{\partial x^2} + \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \mu(x, y) \quad (x, y) \in G$$

соответствует

$$\begin{aligned} \psi_{ij} &= \frac{1}{4} (\psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j} + \psi_{i,j-1} + \psi_{i,j+1}) \\ i &= 0, 1, \dots, N; \quad j = 0, 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (12)$$

Блок-схема, описание программы и сама программа приводятся ниже.

Метод конечных разностей для задачи (4) - (8):

$$\begin{aligned} C_{i+1,j} &= C_{ij} \left(1 - \frac{T \cdot H_T \cdot Q}{V} - \frac{2D_R \cdot T \cdot H_T}{R^2 \cdot H_R^2} \right) + \\ & + C_{i,j+1} \left(\frac{D_R \cdot T \cdot H_T}{2 \cdot r \cdot R \cdot H_R} + \frac{D_R \cdot T \cdot H_T}{R^2 \cdot H_R^2} - \frac{V_R \cdot T \cdot H_T}{2 \cdot R \cdot H_R} \right) + \\ & + C_{i,j-1} \left(\frac{V_R \cdot T \cdot H_T}{2 \cdot R \cdot H_R} - \frac{D_R \cdot T \cdot H_T}{2 \cdot r \cdot R^2 \cdot H_R} + \frac{D_R \cdot T \cdot H_T}{R^2 \cdot H_R^2} \right) + \\ & + \frac{Q_1(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + Q_2 C_5}{V} \cdot T \cdot H_T; \end{aligned} \quad (13)$$

$$C_{i0} = C_{iN}; \quad C_{0j} = C_{0M} = C_0. \quad (14)$$

Система уравнений (14) и (15) позволяет численно решить краевую задачу (6) - (8).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H^2} \cdot \frac{\psi_{j,k+1} - 2\psi_{jk} + \psi_{j,k-1}}{\Delta^2 z_k} + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\psi_{j+1,k} - 2\psi_{jk} + \psi_{j-1,k}}{H_R^2} - \\ & - \frac{1}{R^2 \cdot r_j} \cdot \frac{\psi_{j+1,k} - \psi_{j-1,k}}{2 \cdot H_R} = \mu(r_j, z_k), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\psi_{0k} = \psi_{Nk} = \psi_{j0} = \psi_{iM} = 0, \quad (16)$$

где

$$\psi(r_j, z_k) = \psi_{jk} \quad (j = 0, 1, \dots, N; k = 0, 1, \dots, P).$$

Базовая компьютерная программа разработана для численного моделирования гидродинамических процессов при работе однолопастных машин конвективного типа.

Уравнение в безразмерных величинах имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \cdot \frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{1}{l \cdot h} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{1}{l \cdot h} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + \\ &+ \frac{D_L}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{D_H}{h^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + f_1 + f_2 + f_3, \end{aligned} \quad (17)$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t < 1.$$

Начальное условие

$$C(x, y, 0) = C_0. \quad (18)$$

Граничные условия при отсутствии обмена с внешней средой

$$\begin{aligned} C_x(0, y, t) &= C_x(1, y, t) = 0, \\ C_y(x, 0, t) &= C_y(x, 1, t) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Функции f_j имеют вид:

$$f_1 = \begin{cases} 0, & x \neq x_1, \quad y \neq y_1; \\ \frac{Q_1 \cdot (C_1 + C_2 + C_3 + C_4)}{V_l}, & x = x_1, \quad y = y_1; \end{cases} \quad (20)$$

$$f_2 = \begin{cases} 0, & x \neq x_2, \quad y \neq y_2; \\ \frac{Q_2 \cdot C_5}{V_l}, & x = x_2, \quad y = y_2; \end{cases} \quad (21)$$

$$f_3 = \begin{cases} 0, & x \neq x_3, \quad y \neq y_3; \\ -\frac{Q \cdot C}{V_l}, & x = x_3, \quad y = y_3. \end{cases} \quad (22)$$

Функция тока $\psi(x, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \mu(x, y), \\ 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\mu(x, y) = \begin{cases} \frac{W}{V_l}, & x = x_0, \quad y = y_0; \\ \frac{W}{V_l \cdot FN \cdot (l^2(x - x_0)^2 + h^2 \cdot (y - y_0)^2)}, & x \neq x_0, \quad y \neq y_0; \end{cases} \quad (24)$$

$$\psi(x, 0) = \psi(x, 1) = \psi(0, y) = \psi(1, y) = 0. \quad (25)$$

Переменные, указанные в уравнениях, имеют следующий смысл: x, y – координаты пространства, безразмерные величины; t – время, с; C – концентрация твердой фазы в рабочем объеме цилиндра, содержащего суспензию, $\text{г}/\text{см}^3$; l – максимальный размер по оси X (радиус цилиндра), см; H – максимальный размер по оси Y (высота цилиндра), см; V_l – площадь поперечного сечения цилиндра, см; D_L, D_H – коэффициенты продольной и поперечной диффузии, безразмерные величины; f_1, f_2 – функции, отражающие точечные источники твердой фазы, если они есть, $\text{г}/(\text{с} \cdot \text{см})$; f_3 – функция, отражающая отток суспензии, $\text{г}/(\text{с} \cdot \text{см})$; C_0 – начальное распределение концентрации твердой фазы, $\text{г}/\text{см}^3$; $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$ – координаты точечных источников; (x_3, y_3) – координаты точечного оттока; Q_1, Q_2 – интенсивность источников, $\text{см}^3/\text{с}$; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 – характеристики источников (концентрация), $\text{г}/\text{см}^3$; Q – интенсивность оттока ($Q = Q_1 + Q_2$), $\text{см}^3/\text{с}$; C – характеристика оттока, $\text{г}/\text{см}$; T – время исследования процесса, с; W – угловая скорость вращения лопасти, если в рабочем объеме устанавливается устойчиво конвективного перемешивания (при его отсутствии $W = 0$), $\text{об}/\text{с}$; x_0, y_0 – координаты источника вращения; FN – вязкость суспензии, безразмерная величина.

На рисунке 2 приведена блок-схема алгоритма. Результаты выводятся на пе-

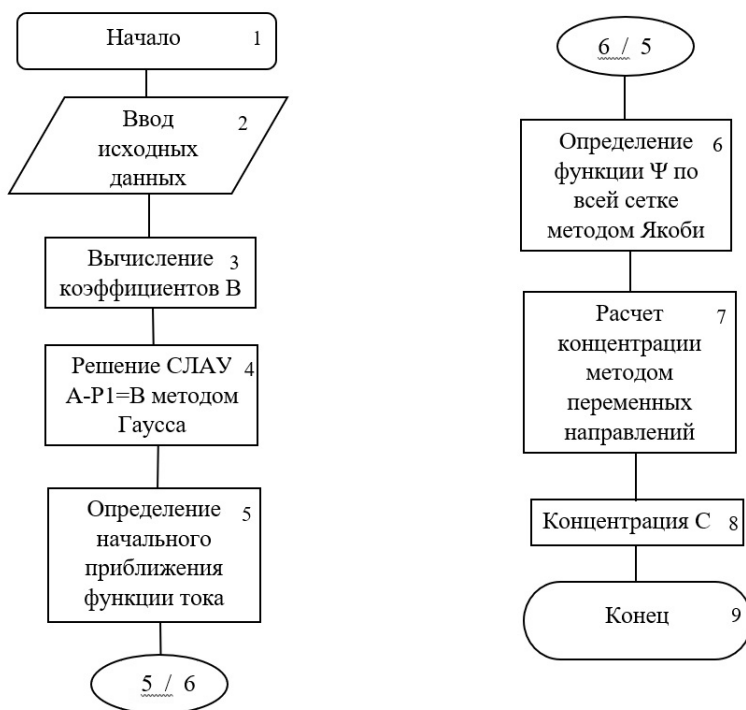


Рис. 2. Обобщённая блок-схема алгоритма численного решения задачи.

чать в виде таблиц, снабженных комментариями, что упрощает их обработку. Концентрация твердой фазы печатается в виде таблицы 20×20 , что соответствует сетке, представляющей сечение аппарата. По этим данным строятся кривые равного уровня, причем отрицательные значения опускаются (они соответствуют наличию «вихрей»).

В качестве примера приведем результаты моделирования влияния координат расположения лопасти. Моделирование проведено при скорости 0,7 и различных координатах положения лопасти вдоль вертикальной оси. Как следует из рисунка 3, наилучшим положением для борьбы с «залеганием осадка» является максимально приближенное положение к днищу.

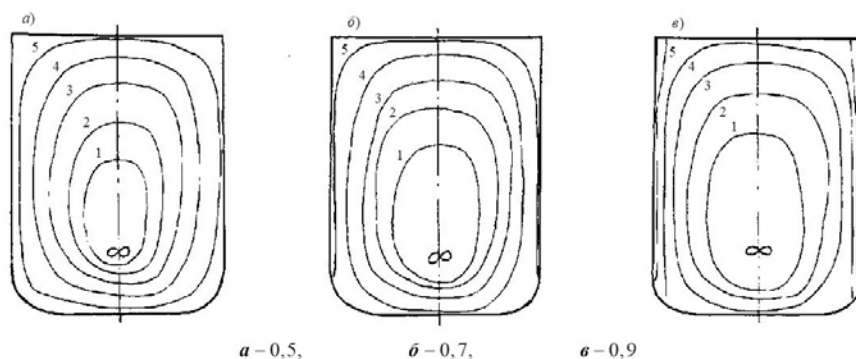


Рис. 3. Результаты моделирования процесса при различных скоростях вращения лопасти.

Выводы. Впервые разработаны детерминированные математические модели процесса перемешивания многокомпонентной смеси в однолопастном конвективном аппарате. Для решения задач исследования и совершенствования параметров выполнена численная реализация, разработаны алгоритмы и компьютерные программы, позволяющие применять разработки в различных технологических схемах, использующих принцип конвективного воздействия. Выполнены численные эксперименты по исследованию параметров аппаратов, результаты которых позволили сформировать рекомендации по совершенствованию конструкций аппарата в направлении модификации гидродинамических и геометрических параметров. Для дальнейшего использования разработанного комплекса программ к решению задач математического моделирования работы аппаратов подобного типа показаны направления доработки программ в зависимости от характера исследуемых процессов.

1. Самарский А.А. Экономическая схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана. / А.А. Самарский, Б.Д. Моисеенко // Вычислительная математика и математическая физика. – 1965. – Т.5, №5. – С. 816–827.
2. Пилов П.И. Распределение частиц твердой фазы в турбулентном потоке жидкости при выделении осадка / П.И. Пилов // Науковий вісник НГА України. – 1998. – №1. – С. 74–77.
3. Полулях А.Д. Состояние подготовки и обогащение машинных классов рядового угля в Украине / А.Д. Полулях, О.В. Ищенко // Збагачення корисних копалин: Наук.-техн. зб.

– Дніпропетровськ. – 2005. – Вип. 23 (64). – С. 21–26.

4. Математическое моделирование процессов обезвоживания обогащенного минерального сырья. Монография / Павлыш В.Н., Назимко Е.И., Тарабаева И.В., Науменко В.Г., Перинская Е.В. // под общ.ред. проф. Павлыша В.Н., проф. Назимко Е.И. – Донецк: «ВИК», 2014. – 289 с.

V.N. Pavlysh, E.V. Perinskaya, S.M. Bunyaev, N.V. Kanduba

Numerical solution of a nonlinear boundary value problem about forced convection in a multicomponent environment.

The boundary value problem underlying the mathematical model of convective mixing of a multicomponent mixture in a closed-type apparatus is considered. The aim is to determine the parameters of the convective process at which a uniform distribution of particles in the cross section of the working space of the apparatus is ensured.

Keywords: *mathematical model, convection, multicomponent medium, process, numerical method.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет»,
Донецк

Получено 05.09.2022

Donetsk National Technical University, Donetsk

pavlyshvn@mail.ru

УДК 51-74:510.22:519.6:539.3
doi:10.24412/0136-4545-2022-3-77-88
EDN:PPIRKN



©2022. В.В. Дремов, Н.И. Захаров, С.В. Сторожев, Д.Д. Полянский

НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ МОДИФИКАЦИИ РАСЧЕТНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ УСРЕДНЕННЫХ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПАКЕТА СЛОИСТОГО УГЛЕПЛАСТИКА: ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ

Представлен нечетко-множественный численно-аналитический алгоритм определения приведенных усредненных параметров жесткости и коэффициента линейного температурного расширения для многослойного пакета, составленного из тонких слоев однонаправленного волокнистого углепластика с коллинеарной их срединным плоскостям ориентацией и гексагональной укладкой волокон при варьировании угловых характеристик направлений армирования в компонентах пакета. Предлагаемый алгоритм предназначен для учета ошибок разбросов в значениях физико-механических параметров материалов армирующих волокон и связующего, а также геометрических параметров пакета и характеристик армирования в монослоях при расчетах искомых усредненных величин. Описываемый подход основывается на переходе к нечетко-множественным описаниям для неконтрастных параметров рассматриваемой модели и использовании эвристического принципа обобщения при переходе к нечетким аргументам в совокупности расчетных соотношений для усредненных термомеханических характеристик пакета.

Ключевые слова: многослойный пакет, монослои волокнистого углепластика, расчеты приведенных термомеханических характеристик, учет неконтрастности параметров, метод нечетких множеств, эвристический принцип обобщения.

Введение и цели исследования. Усреднение физико-механических характеристик и переход к приведенным параметрам гомогенизированных композиционных материалов с различными типами армирования реализуется на основе весьма широкого круга подходов, отличающихся исходными гипотезами относительно учета реальных факторов строения многокомпонентных сред и комплекса свойств наполнителя и связующего. Достаточно полную, но не исчерпывающую характеристику таких подходов, дают работы [1–10]. Содержание данных исследований указывает на то, что одной из подлежащих дальнейшему анализу проблем в контексте развития и совершенствования методов расчета приведенных физико-механических характеристик композиционных материалов, является учет параметрической неопределенности в используемых моделях в виде экспериментальных и обусловленных технологическими допусками разбросов для значений физико-механических и геометрических параметров компонентов и характеристик структурного строения композитов [3–6, 8–10]. Для учета фактора влияния параметрической неопределенности при оценивании приведенных усредненных параметров слоистых углепластиков [11–13] в ряде исследований

применялся метод анализа чувствительности [14–15]. В частности, учет влияния указанных количественных разбросов играет важную роль при решении проблем управления свойствами композитов в контексте обеспечения их технологичности при различных применениях, в частности для создания размеростабильных несущих конструкций [16–18]. Вместе с тем, ввиду значительного количества неконтрастных параметров, учет которых одновременно необходим в такого рода расчетных алгоритмах, а также ввиду ограниченности частотных выборок, представляющих информацию о подлежащих учету разбросах, в роли методологического подхода к анализу факторов параметрической неопределенности при расчетном моделировании усредненных термомеханических характеристик пакета слоистого углепластика эффективно применимы методы теории нечетких множеств [19–22].

В контексте вышесказанного, цель настоящей работы заключается в разработке теоретического нечетко-множественного алгоритма расчета усредненных термомеханических характеристик для многослойного пакета тонких элементов из волокнистого углепластика с учетом параметрической неопределенности исходных данных о свойствах его компонентов и структурном строении.

1. Детерминистическая модель расчета усредненных термомеханических характеристик пакета слоистого углепластика. В качестве исходной используется описываемая в работах [5, 8–9, 11, 15–18] система расчетных соотношений детерминистической модели последовательного оценивания приведенных термомеханических параметров для монослоя из однонаправленного волокнистого углепластика, а затем для пакета подобных монослоев с различными ориентациями однонаправленных армирующих волокон.

На первом этапе рассматривается занимающий в координатном пространстве область $V = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 \in [0, h]\}$ монослой из волокнистого композиционного материала с ориентированным по оси Ox_1 однонаправленным рядом волокон, интерпретируемого как однородный трансверсально-изотропный материал с коллинеарной Ox_1 осью изотропии. Приведенные характеристики материала слоя – продольный модуль Юнга E_1 , поперечный модуль Юнга E_2 , усредненный модуль сдвига G_{12} , коэффициенты Пуассона ν_{12} и ν_{21} , плотность ρ , коэффициенты линейного теплового расширения материала вдоль волокон γ_1 и поперек волокон γ_2 , выражаются через соответствующие параметры $E_M, G_M, \nu_M, \rho_M, \gamma_M$ для изотропного материала матрицы и параметры $E_B, G_B, \nu_B, \rho_B, \gamma_B$ для изотропного материала волокон ($E_B \gg E_M, G_B > G_M, \nu_B < \nu_M, \gamma_M > \gamma_B$), а также через параметр объемной доли волокон ζ по формулам:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_B \zeta + E_M (1 - \zeta), \\ E_2 &= \left(\zeta / E_B + (1 - \zeta) / E_M + (\zeta \nu_B + (1 - \zeta) \nu_M)^2 / (\zeta E_B + (1 - \zeta) E_M) \right)^{-1}, \\ G_{12} &= (\zeta / G_B + (1 - \zeta) / G_M)^{-1}, \\ \nu_{21} &= \nu_B \zeta + (1 - \zeta) \nu_M, \quad \nu_{12} = \nu_{21} E_2 / E_1, \\ \rho &= \rho_B \zeta + \rho_M (1 - \zeta), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= (\zeta\gamma_B E_B + (1 - \zeta)\gamma_M E_M) / (\zeta E_B + (1 - \zeta) E_M), \\ \gamma_2 &= \zeta\gamma_B (1 + \nu_B) + (1 - \zeta)\gamma_M (1 + \nu_M) - \\ &- (\zeta\nu_B + (1 - \zeta)\nu_M) (\zeta\gamma_B E_B + (1 - \zeta)\gamma_M E_M) / (\zeta E_B + (1 - \zeta) E_M).\end{aligned}$$

На втором этапе рассчитываются механические и термомеханические характеристики E_1^* , ν_{12}^* , γ_1^* для n – слойного пакета композита вдоль направления армирования Ox_{1j} в монослоях V_j относительной толщины \hat{h}_j . Данные величины описываются соотношениями:

$$\begin{aligned}E_1^* &= g_{11}^* - (g_{12}^*)^2 / g_{22}^*, \quad G_{12}^* \nu_{12}^* = g_{12}^* / g_{22}^*, \\ \gamma_1^* &= (\beta_1^* g_{22}^* - \beta_2^* g_{12}^*) / (g_{11}^* g_{22}^* - (g_{12}^*)^2), \\ \beta_1^* &= \sum_{j=1}^n [(\beta_{1j} \cos^2 \varphi_j + \beta_{2j} \sin^2 \varphi_j) h_j^*], \quad \beta_2^* = \sum_{j=1}^n [(\beta_{1j} \sin^2 \varphi_j + \beta_{2j} \cos^2 \varphi_j) h_j^*], \\ \beta_{1j} &= g_{11j} \gamma_{1j} + g_{12j} \gamma_{2j}, \quad \beta_{2j} = g_{12j} \gamma_{1j} + g_{22j} \gamma_{2j}, \\ g_{11}^* &= \sum_{j=1}^n [(g_{11j} \cos^4 \varphi_j + g_{22j} \sin^4 \varphi_j + (2g_{12j} + 4g_{66j}) \sin^2 \varphi_j \cos^2 \varphi_j) h_j^*], \\ g_{22}^* &= \sum_{j=1}^n [(g_{22j} \cos^4 \varphi_j + g_{11j} \sin^4 \varphi_j + (2g_{12j} + 4g_{66j}) \sin^2 \varphi_j \cos^2 \varphi_j) h_j^*], \\ g_{12}^* &= \sum_{j=1}^n [(g_{12j} \cos^4 \varphi_j + g_{12j} \sin^4 \varphi_j + (g_{11j} + g_{22j} - 4g_{66j}) \sin^2 \varphi_j \cos^2 \varphi_j) h_j^*], \\ g_{11j} &= E_{1j} / (1 - \nu_{12j} \nu_{21j}), \quad g_{22j} = E_{2j} / (1 - \nu_{12j} \nu_{21j}), \\ g_{12j} &= \nu_{12j} g_{22j}, \quad g_{66j} = G_{12j},\end{aligned} \quad (2)$$

в которых фигурируют термомеханические характеристики E_{1j} , E_{2j} , G_{12j} , ν_{12j} , ν_{21j} , γ_{1j} , γ_{2j} для монослоев V_j и углы поворота φ_j монослоя V_j в своей плоскости при формировании n – слойного пакета.

Использование соотношений (1) и (2) является базовым элементом в реализации нечетко-множественного подхода к получению оценок влияния разбросов значений исходных параметров на величины выходных характеристик исследуемой модели при анализе свойств размеростабильности конструкционных элементов из многослойного углепластика [16–18].

2. Нечетко-множественные расчетные соотношения для учета параметрической неопределенности модели. Расчетные соотношения для неконтрастных модулей упругости и коэффициента линейного теплового расширения пакета в рамках применяемого подхода являются результатом расширения областей определения зависимостей (1) и (2) при переходе к аргументам нечетко-множественного типа с применением эвристического принципа обобщения [19–22].

В качестве исходного шага для слоя с номером j ($j = \overline{1, n}$) вводятся описания одномодальными выпуклыми нечетко-множественными аппроксимирующими величинами для имеющих разбросы экспериментальных и технологических значений параметров $\tilde{E}_{Mj}, \tilde{G}_{Mj}, \tilde{\nu}_{Mj}, \tilde{\rho}_{Mj}, \tilde{\gamma}_{Mj}, \tilde{E}_{Bj}, \tilde{G}_{Bj}, \tilde{\nu}_{Bj}, \tilde{\rho}_{Bj}, \tilde{\gamma}_{Bj}, \tilde{\zeta}_j, \tilde{h}_j^*$, и для указанных величин записываются разложения по множествам α – уровня:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{Mj} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_{Mj\alpha}, \overline{E}_{Mj\alpha}], & \tilde{G}_{Mj} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{G}_{Mj\alpha}, \overline{G}_{Mj\alpha}], \\ \tilde{\nu}_{Mj} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_{Mj\alpha}, \overline{\nu}_{Mj\alpha}], \dots, & \tilde{\varphi}_j &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\varphi}_{j\alpha}, \overline{\varphi}_{j\alpha}], \\ \tilde{\zeta}_j &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\zeta}_{j\alpha}, \overline{\zeta}_{j\alpha}], & \tilde{h}_j^* &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_{j\alpha}^*, \overline{h}_{j\alpha}^*].\end{aligned}\quad (3)$$

Представления, получаемые в качестве нечетко-множественных обобщений расчетных соотношений (1) для приведенных неконтрастных характеристик монослоя, последовательно записываются с учетом свойств знакоопределенности частных производных в области определения аргументов.

С учетом оценок

$$\partial E_1 / \partial E_B > 0, \quad \partial E_1 / \partial E_M > 0, \quad \partial E_1 / \partial \zeta > 0,$$

можно записать

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{1j} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_{1j\alpha}, \overline{E}_{1j\alpha}], \\ \underline{E}_{1j\alpha} &= \underline{E}_{Bj\alpha} \underline{\zeta}_{j\alpha} + \underline{E}_{Mj\alpha} (1 - \underline{\zeta}_{j\alpha}), & \overline{E}_{1j\alpha} &= \overline{E}_{Bj\alpha} \overline{\zeta}_{j\alpha} + \overline{E}_{Mj\alpha} (1 - \overline{\zeta}_{j\alpha}).\end{aligned}\quad (4)$$

С учетом оценок

$$\begin{aligned}\partial E_2 / \partial E_B &> 0, & \partial E_2 / \partial E_M &> 0, & \partial E_2 / \partial \zeta &> 0, \\ \partial E_2 / \partial \nu_B &< 0, & \partial E_2 / \partial \nu_M &< 0,\end{aligned}$$

можно записать

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{2j} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_{2j\alpha}, \overline{E}_{2j\alpha}], \\ \underline{E}_{2j\alpha} &= \left(\underline{\zeta}_{j\alpha} / \underline{E}_{Bj\alpha} + (1 - \underline{\zeta}_{j\alpha}) / \underline{E}_{Mj\alpha} + \right. \\ &+ \left. \left(\underline{\zeta}_{j\alpha} \overline{\nu}_{Bj\alpha} + (1 - \underline{\zeta}_{j\alpha}) \overline{\nu}_{Mj\alpha} \right)^2 / \left(\underline{\zeta}_{j\alpha} \underline{E}_{Bj\alpha} + (1 - \underline{\zeta}_{j\alpha}) \underline{E}_{Mj\alpha} \right) \right)^{-1}, \\ \overline{E}_{2j\alpha} &= \left(\overline{\zeta}_{j\alpha} / \overline{E}_{Bj\alpha} + (1 - \overline{\zeta}_{j\alpha}) / \overline{E}_{Mj\alpha} + \right. \\ &+ \left. \left(\overline{\zeta}_{j\alpha} \underline{\nu}_{Bj\alpha} + (1 - \overline{\zeta}_{j\alpha}) \underline{\nu}_{Mj\alpha} \right)^2 / \left(\overline{\zeta}_{j\alpha} \overline{E}_{Bj\alpha} + (1 - \overline{\zeta}_{j\alpha}) \overline{E}_{Mj\alpha} \right) \right)^{-1}.\end{aligned}\quad (5)$$

С учетом неравенств

$$\partial G_{12}/\partial G_B > 0, \quad \partial G_{12}/\partial G_M > 0, \quad \partial G_{12}/\partial \zeta > 0,$$

записываются представления

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{12j} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{G}_{12j\alpha}, \overline{G}_{12j\alpha}], \\ \underline{G}_{12j\alpha} &= \left(\underline{\zeta}_{j\alpha} / \underline{G}_{Bj\alpha} + (1 - \underline{\zeta}_{j\alpha}) / \underline{G}_{Mj\alpha} \right)^{-1}, \\ \overline{G}_{12j\alpha} &= \left(\overline{\zeta}_{j\alpha} / \overline{G}_{Bj\alpha} + (1 - \overline{\zeta}_{j\alpha}) / \overline{G}_{Mj\alpha} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

При учете оценок

$$\partial \nu_{21}/\partial \nu_B > 0, \quad \partial \nu_{21}/\partial \nu_M > 0, \quad \partial \nu_{21}/\partial \zeta > 0,$$

можно записать

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_{21j} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_{21j\alpha}, \overline{\nu}_{21j\alpha}], \\ \underline{\nu}_{21j\alpha} &= \underline{\nu}_{Bj\alpha} \underline{\zeta}_{j\alpha} + \underline{\nu}_{Mj\alpha} (1 - \underline{\zeta}_{j\alpha}), \\ \overline{\nu}_{21j\alpha} &= \overline{\nu}_{Bj\alpha} \overline{\zeta}_{j\alpha} + \overline{\nu}_{Mj\alpha} (1 - \overline{\zeta}_{j\alpha}). \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая неравенства

$$\partial \nu_{12}/\partial \nu_{21} > 0, \quad \partial \nu_{12}/\partial E_2 > 0, \quad \partial \nu_{12}/\partial E_1 < 0,$$

можно получить представления

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_{12j} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_{12j\alpha}, \overline{\nu}_{12j\alpha}], \\ \underline{\nu}_{12j\alpha} &= \underline{\nu}_{21j\alpha} \underline{E}_{2j\alpha} / \underline{E}_{1j\alpha}, \quad \overline{\nu}_{12j\alpha} = \overline{\nu}_{21j\alpha} \overline{E}_{2j\alpha} / \overline{E}_{1j\alpha}. \end{aligned} \quad (8)$$

С учетом неравенств

$$\partial \gamma_1/\partial E_B < 0, \quad \partial \gamma_1/\partial E_M > 0, \quad \partial \gamma_1/\partial \zeta < 0,$$

$$\partial \gamma_1/\partial \gamma_B > 0, \quad \partial \gamma_1/\partial \gamma_M > 0,$$

могут быть получены представления

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{1j} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\gamma}_{1j\alpha}, \overline{\gamma}_{1j\alpha}], \\ \underline{\gamma}_{1j\alpha} &= \left(\overline{\zeta}_{j\alpha} \underline{\gamma}_{Bj\alpha} \overline{E}_{Bj\alpha} + (1 - \overline{\zeta}_{j\alpha}) \underline{\gamma}_{Mj\alpha} \underline{E}_{Mj\alpha} \right) / \left(\overline{\zeta}_{j\alpha} \overline{E}_{Bj\alpha} + (1 - \overline{\zeta}_{j\alpha}) \underline{E}_{Mj\alpha} \right), \\ \overline{\gamma}_{1j\alpha} &= \left(\underline{\zeta}_{j\alpha} \overline{\gamma}_{Bj\alpha} \underline{E}_{Bj\alpha} + (1 - \underline{\zeta}_{j\alpha}) \overline{\gamma}_{Mj\alpha} \overline{E}_{Mj\alpha} \right) / \left(\underline{\zeta}_{j\alpha} \underline{E}_{Bj\alpha} + (1 - \underline{\zeta}_{j\alpha}) \overline{E}_{Mj\alpha} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Наконец, принимая во внимание оценки

$$\partial\gamma_2/\partial E_B > 0, \quad \partial\gamma_2/\partial E_M < 0,$$

можно получить представления

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{2j} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\gamma}_{2j\alpha}, \bar{\gamma}_{2j\alpha}], \\ \underline{\gamma}_{2j\alpha} &= \inf_{\substack{\gamma_{Bj} \in [\underline{\gamma}_{Bj\alpha}, \bar{\gamma}_{Bj\alpha}] \\ \gamma_{Mj} \in [\underline{\gamma}_{Mj\alpha}, \bar{\gamma}_{Mj\alpha}] \\ \nu_{Bj} \in [\underline{\nu}_{Bj\alpha}, \bar{\nu}_{Bj\alpha}] \\ \nu_{Mj} \in [\underline{\nu}_{Mj\alpha}, \bar{\nu}_{Mj\alpha}] \\ \zeta_j \in [\underline{\zeta}_{j\alpha}, \bar{\zeta}_{j\alpha}]} \Phi(\underline{E}_{Bj\alpha}, \bar{E}_{Mj\alpha}, \nu_{Bj}, \nu_{Mj}, \zeta_j, \gamma_{Bj}, \gamma_{Mj}), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}_{2j\alpha} &= \sup_{\substack{\gamma_{Bj} \in [\underline{\gamma}_{Bj\alpha}, \bar{\gamma}_{Bj\alpha}] \\ \gamma_{Mj} \in [\underline{\gamma}_{Mj\alpha}, \bar{\gamma}_{Mj\alpha}] \\ \nu_{Bj} \in [\underline{\nu}_{Bj\alpha}, \bar{\nu}_{Bj\alpha}] \\ \nu_{Mj} \in [\underline{\nu}_{Mj\alpha}, \bar{\nu}_{Mj\alpha}] \\ \zeta_j \in [\underline{\zeta}_{j\alpha}, \bar{\zeta}_{j\alpha}]} \Phi(\bar{E}_{Bj\alpha}, \underline{E}_{Mj\alpha}, \nu_{Bj}, \nu_{Mj}, \zeta_j, \gamma_{Bj}, \gamma_{Mj}); \\ \Phi(E_{Bj}, E_{Mj}, \nu_{Bj}, \nu_{Mj}, \zeta_j, \gamma_{Bj}, \gamma_{Mj}) &= \\ &= \zeta_j \gamma_{Bj} (1 + \nu_{Bj}) + (1 - \zeta_j) \gamma_{Mj} (1 + \nu_{Mj}) - \\ &\quad - (\zeta_j \nu_{Bj} + (1 - \zeta_j) \nu_{Mj}) (\zeta_j \gamma_{Bj} E_{Bj} + \\ &\quad + (1 - \zeta_j) \gamma_{Mj} E_{Mj}) / (\zeta_j E_{Bj} + (1 - \zeta_j) E_{Mj}). \end{aligned} \quad (11)$$

На следующем этапе записываются нечетко-множественные соотношения, определяющие неконтрастные характеристики \tilde{g}_{11j} , \tilde{g}_{22j} , \tilde{g}_{12j} , \tilde{g}_{66j} , $\tilde{\beta}_{1j}$, $\tilde{\beta}_{2j}$. С учетом очевидных оценок знакоопределенности частных производных для соответствующих представлений (2) по их аргументам, формируются соотношения:

$$\tilde{g}_{11j} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{g}_{11j\alpha}, \bar{g}_{11j\alpha}], \quad (12)$$

$$\underline{g}_{11j\alpha} = \underline{E}_{11j\alpha} / (1 - \underline{\nu}_{12j\alpha} \underline{\nu}_{21j\alpha}), \quad \bar{g}_{11j\alpha} = \bar{E}_{11j\alpha} / (1 - \bar{\nu}_{12j\alpha} \bar{\nu}_{21j\alpha});$$

$$\tilde{g}_{22j} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{g}_{22j\alpha}, \bar{g}_{22j\alpha}], \quad (13)$$

$$\underline{g}_{22j\alpha} = \underline{E}_{22j\alpha} / (1 - \underline{\nu}_{12j\alpha} \underline{\nu}_{21j\alpha}), \quad \bar{g}_{22j\alpha} = \bar{E}_{22j\alpha} / (1 - \bar{\nu}_{12j\alpha} \bar{\nu}_{21j\alpha});$$

$$\tilde{g}_{12j} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \left[\underline{g}_{12j\alpha}, \overline{g}_{12j\alpha} \right], \quad (14)$$

$$\underline{g}_{12j\alpha} = \underline{\nu}_{12j\alpha} \underline{g}_{22j\alpha}, \quad \overline{g}_{12j\alpha} = \overline{\nu}_{12j\alpha} \overline{g}_{22j\alpha};$$

$$\tilde{g}_{66j} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \left[\underline{g}_{66j\alpha}, \overline{g}_{66j\alpha} \right], \quad (15)$$

$$\underline{g}_{66j\alpha} = \underline{G}_{12j\alpha}, \quad \overline{g}_{66j\alpha} = \overline{G}_{12j\alpha};$$

$$\tilde{\beta}_{1j} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \left[\underline{\beta}_{1j\alpha}, \overline{\beta}_{1j\alpha} \right], \quad (16)$$

$$\underline{\beta}_{1j\alpha} = \underline{g}_{11j\alpha} \underline{\gamma}_{1j\alpha} + \underline{g}_{12j\alpha} \underline{\gamma}_{2j\alpha}, \quad \overline{\beta}_{1j\alpha} = \overline{g}_{11j\alpha} \overline{\gamma}_{1j\alpha} + \overline{g}_{12j\alpha} \overline{\gamma}_{2j\alpha};$$

$$\tilde{\beta}_{2j} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \left[\underline{\beta}_{2j\alpha}, \overline{\beta}_{2j\alpha} \right], \quad (17)$$

$$\underline{\beta}_{2j\alpha} = \underline{g}_{12j\alpha} \underline{\gamma}_{1j\alpha} + \underline{g}_{22j\alpha} \underline{\gamma}_{2j\alpha}, \quad \overline{\beta}_{2j\alpha} = \overline{g}_{12j\alpha} \overline{\gamma}_{1j\alpha} + \overline{g}_{22j\alpha} \overline{\gamma}_{2j\alpha}.$$

Далее, с учетом оценок для соответствующих частных производных, определяются нечетко-множественные представления g_{11}^* , g_{22}^* , g_{12}^* , β_1^* , β_2^* :

$$\tilde{g}_{11}^* = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \left[\underline{g}_{11\alpha}^*, \overline{g}_{11\alpha}^* \right],$$

$$\begin{aligned} \underline{g}_{11\alpha}^* = & \inf_{\varphi_j \in [\underline{\varphi}_{j\alpha}, \overline{\varphi}_{j\alpha}]} \sum_{j=1}^n \left[(\underline{g}_{11j\alpha} \cos^4 \varphi_j + \underline{g}_{22j\alpha} \sin^4 \varphi_j + \right. \\ & \left. + (2\underline{g}_{12j\alpha} + 4\underline{g}_{66j\alpha}) \sin^2 \varphi_j \cos^2 \varphi_j \right] \underline{h}_{j\alpha}^*, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \overline{g}_{11\alpha}^* = & \sup_{\varphi_j \in [\underline{\varphi}_{j\alpha}, \overline{\varphi}_{j\alpha}]} \sum_{j=1}^n \left[(\overline{g}_{11j\alpha} \cos^4 \varphi_j + \overline{g}_{22j\alpha} \sin^4 \varphi_j + \right. \\ & \left. + (2\overline{g}_{12j\alpha} + 4\overline{g}_{66j\alpha}) \sin^2 \varphi_j \cos^2 \varphi_j \right] \overline{h}_{j\alpha}^*; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{22}^* &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{g}_{22\alpha}^*, \overline{g}_{22\alpha}^*], \\ \underline{g}_{22\alpha}^* &= \inf_{\varphi_j \in [\underline{\varphi}_{j\alpha}, \overline{\varphi}_{j\alpha}]} \sum_{j=1}^n \left[(\underline{g}_{22j\alpha} \cos^4 \varphi_j + \underline{g}_{11j\alpha} \sin^4 \varphi_j + \right. \\ &\quad \left. + (2\underline{g}_{12j\alpha} + 4\underline{g}_{66j\alpha}) \sin^2 \varphi_j \cos^2 \varphi_j \right] \underline{h}_{j\alpha}^*, \\ \overline{g}_{22\alpha}^* &= \sup_{\varphi_j \in [\underline{\varphi}_{j\alpha}, \overline{\varphi}_{j\alpha}]} \sum_{j=1}^n \left[(\overline{g}_{22j\alpha} \cos^4 \varphi_j + \overline{g}_{11j\alpha} \sin^4 \varphi_j + \right. \\ &\quad \left. + (2\overline{g}_{12j\alpha} + 4\overline{g}_{66j\alpha}) \sin^2 \varphi_j \cos^2 \varphi_j \right] \overline{h}_{j\alpha}^*;\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{12}^* &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{g}_{12\alpha}^*, \overline{g}_{12\alpha}^*], \\ \underline{g}_{12\alpha}^* &= \inf_{\varphi_j \in [\underline{\varphi}_{j\alpha}, \overline{\varphi}_{j\alpha}]} \sum_{j=1}^n \left[(\underline{g}_{12j\alpha} \cos^4 \varphi_j + \underline{g}_{12j\alpha} \sin^4 \varphi_j + \right. \\ &\quad \left. + (\underline{g}_{11j\alpha} + \underline{g}_{22j\alpha} - 4\underline{g}_{66j\alpha}) \sin^2 \varphi_j \cos^2 \varphi_j \right] \underline{h}_{j\alpha}^*, \\ \overline{g}_{12\alpha}^* &= \sup_{\varphi_j \in [\underline{\varphi}_{j\alpha}, \overline{\varphi}_{j\alpha}]} \sum_{j=1}^n \left[(\overline{g}_{12j\alpha} \cos^4 \varphi_j + \overline{g}_{12j\alpha} \sin^4 \varphi_j + \right. \\ &\quad \left. + (\overline{g}_{11j\alpha} + \overline{g}_{22j\alpha} - 4\overline{g}_{66j\alpha}) \sin^2 \varphi_j \cos^2 \varphi_j \right] \overline{h}_{j\alpha}^*.\end{aligned}\tag{20}$$

На заключительном этапе описываемого алгоритма на основе соотношений (2) и с учетом знакоопределенности соответствующих производных формируются нечетко-множественные представления для искомым термомеханических параметров пакета слоев волокнистого углепластика:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_1^* &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_{1\alpha}^*, \overline{E}_{1\alpha}^*], \\ \underline{E}_{1\alpha}^* &= \underline{g}_{11\alpha}^* - (\overline{g}_{12\alpha}^*)^2 / \underline{g}_{22\alpha}^*, \quad \overline{E}_{1\alpha}^* = \overline{g}_{11\alpha}^* - (\underline{g}_{12\alpha}^*)^2 / \overline{g}_{22\alpha}^*;\end{aligned}\tag{21}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_{12}^* &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_{12\alpha}^*, \overline{\nu}_{12\alpha}^*], \\ \underline{\nu}_{12\alpha}^* &= \underline{g}_{12\alpha}^* / \overline{g}_{22\alpha}^*, \quad \overline{\nu}_{12\alpha}^* = \overline{g}_{12\alpha}^* / \underline{g}_{22\alpha}^*;\end{aligned}\tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\gamma}_1^* &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\gamma}_{1\alpha}^*, \overline{\gamma}_{1\alpha}^*], \\
 \underline{\gamma}_{1\alpha}^* &= \inf_{\substack{g_{12}^* \in [\underline{g}_{12}^*, \overline{g}_{12}^*] \\ g_{22}^* \in [\underline{g}_{22}^*, \overline{g}_{22}^*]}} \left(\underline{\beta}_{1\alpha}^* g_{22}^* - \overline{\beta}_{2\alpha}^* g_{12}^* \right) / \left(\overline{g}_{11\alpha}^* g_{22}^* - (g_{12}^*)^2 \right), \\
 \overline{\gamma}_{1\alpha}^* &= \sup_{\substack{g_{12}^* \in [\underline{g}_{12}^*, \overline{g}_{12}^*] \\ g_{22}^* \in [\underline{g}_{22}^*, \overline{g}_{22}^*]}} \left(\overline{\beta}_{1\alpha}^* g_{22}^* - \underline{\beta}_{2\alpha}^* g_{12}^* \right) / \left(\underline{g}_{11\alpha}^* g_{22}^* - (g_{12}^*)^2 \right).
 \end{aligned} \tag{23}$$

Дальнейшая реализация представляемого подхода связана с выбором варианта описания нечетко-множественных величин, представляющих неконтрастные параметры модели. В качестве эффективного варианта фаззификации данных об обладающих разбросами исходных параметрах E_{Bj} , G_{Bj} , ν_{Bj} , ρ_{Bj} , γ_{Bj} , E_{Mj} , G_{Mj} , ν_{Mj} , ρ_{Mj} , γ_{Mj} , \hat{h}_j , φ_j ($j = \overline{1, n}$) в рассматриваемом случае является переход к их представлениям в виде нормальными трапецидальными нечетких интервалов [19–22] с соответствующими кортежами граничных точек интервалов носителей и модельных интервалов, и представлениями в виде суперпозиций по множествам α – срезов

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}_{Bj} &= (E_{Bj1}, E_{Bj2}, E_{Bj3}, E_{Bj4}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_{Bj\alpha}, \overline{E}_{Bj\alpha}], \\
 \underline{E}_{Bj\alpha} &= (1 - \alpha) E_{Bj1} + \alpha E_{Bj2}, \\
 \overline{E}_{Bj\alpha} &= \alpha E_{Bj3} + (1 - \alpha) E_{Bj4}; \\
 \tilde{\nu}_{Bj} &= (\nu_{Bj1}, \nu_{Bj2}, \nu_{Bj3}, \nu_{Bj4}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_{Bj\alpha}, \overline{\nu}_{Bj\alpha}], \\
 \underline{\nu}_{Bj\alpha} &= (1 - \alpha) \nu_{Bj1} + \alpha \nu_{Bj2}, \\
 \overline{\nu}_{Bj\alpha} &= \alpha \nu_{Bj3} + (1 - \alpha) \nu_{Bj4}; \\
 \tilde{E}_{Mj} &= (E_{Mj1}, E_{Mj2}, E_{Mj3}, E_{Mj4}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_{Mj\alpha}, \overline{E}_{Mj\alpha}], \\
 \underline{E}_{Mj\alpha} &= (1 - \alpha) E_{Mj1} + \alpha E_{Mj2}, \\
 \overline{E}_{Mj\alpha} &= \alpha E_{Mj3} + (1 - \alpha) E_{Mj4}; \\
 \tilde{\nu}_{Mj} &= (\nu_{Mj1}, \nu_{Mj2}, \nu_{Mj3}, \nu_{Mj4}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_{Mj\alpha}, \overline{\nu}_{Mj\alpha}], \\
 \underline{\nu}_{Mj\alpha} &= (1 - \alpha) \nu_{Mj1} + \alpha \nu_{Mj2}, \\
 \overline{\nu}_{Mj\alpha} &= \alpha \nu_{Mj3} + (1 - \alpha) \nu_{Mj4};
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\tilde{h}_j &= (h_{j1}, h_{j2}, h_{j3}, h_{j4}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_{j\alpha}, \bar{h}_{j\alpha}], \\ \underline{h}_{j\alpha} &= (1 - \alpha) h_{j1} + \alpha h_{j2}, \\ \bar{h}_{j\alpha} &= \alpha h_{j3} + (1 - \alpha) h_{j4}; \\ \tilde{\varphi}_j &= (\varphi_{j1}, \varphi_{j2}, \varphi_{j3}, \varphi_{j4}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\varphi}_{j\alpha}, \bar{\varphi}_{j\alpha}], \\ \underline{\varphi}_{j\alpha} &= (1 - \alpha) \varphi_{j1} + \alpha \varphi_{j2}, \\ \bar{\varphi}_{j\alpha} &= \alpha \varphi_{j3} + (1 - \alpha) \varphi_{j4}.\end{aligned}$$

Последовательное поэтапное использование расчетных соотношений (24), (3)–(23) и дает решение поставленной в настоящей работе проблемы.

Выводы. Результатом представленных в работе исследований является описание комплекса подлежащих поэтапному применению нечетко-множественных аналитических расчетных соотношений для нахождения неконтрастных приведенных усредненных величин модулей упругости и коэффициентов линейного теплового расширения для конструкционных элементов в виде многослойных пластин, представляющих собой пакеты из слоев волокнистого композита с однонаправленной равномерной гексагональной укладкой волокон. Представленный алгоритм базируется на соотношениях детерминистической версии соответствующей расчетной модели, предназначен для учета в ней разбросов значений исходных физико-механических и геометрических параметров армирующих волокон и матрицы, их объемных долей в композите, а также иных параметров многослойного пакета, и предполагает переход в указанных соотношениях к неконтрастным аргументам нечетко-множественного типа в рамках применения модифицированной α – уровневой версии эвристического принципа расширения. Полный комплекс расчетных соотношений приводится для случая описания значений экспериментальных и проектно-технологических исходных параметров с разбросами в виде нормальных трапецеидальных нечетких интервалов.

1. *Tsai S.W.* Composites design - Think composites / S.W. Tsai. – Dayton, 1988. – 629 p.
2. *Mallik P.K.* Composite engineering handbook / ed. P.K. Mallik. – N.Y.: M.Dekker, 1997. – 1239 p.
3. Comprehensive composite materials. Vol. 2: Polymer matrix composites. – Oxford: Elsevier, 2000. – 759 p.
4. *Мэттьюз Ф.* Композитные материалы. Механика и технология / Ф. Мэттьюз, Р. Ролингс. – Москва: Техносфера, 2004. – 408 с.
5. *Немировский Ю.В.* Эффективные физико-механические характеристики композитов, однонаправлено армированных монотропными волокнами. Сообщение 1. Модель армированной среды / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Известия высших учебных заведений. Строительство. – 2006. – № 5 (569). – С. 16–24.
6. *Mallik P.K.* Fiber-reinforced composites: materials, manufacturing and design / P.K. Mallick. – Boca Raton: CRC Press, 2007. – 616 p.

7. *Ставров В.П.* Механика композиционных материалов / В.П. Ставров. – Минск: БГТУ, 2008. – 262 с.
8. *Зиновьев П.А.* Оптимальное проектирование композитных материалов / П.А. Зиновьев, А.А. Смердов. – Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 103 с.
9. *Димитриенко Ю.И.* Об упругих свойствах композиционных материалов / Ю.И. Димитриенко, А.П. Соколов // Математическое моделирование. – 2009. – Т. 21, № 4. – С. 96–110.
10. *Vasiliev V. V.* Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements / V.V. Vasiliev, E.V. Morozov. – Elsevier, 2013. – 816 p.
11. *Гуняев Г.М.* Конструкционные эпоксидные углепластики / Г.М. Гуняев, Т.Г. Сорина, И.П. Хорошилова, А.Ф. Румянцев // Авиационная промышленность. – 1984. – № 12. – С. 41–45.
12. *Стрижалов В.А.* Жёсткость и прочность слоистых углепластиков при одноосном нагружении / В.А. Стрижалов, М.П. Земцов // Проблемы прочности. – 2001. – № 6. – С. 61–71.
13. *Huang X.* Fabrication and properties of carbon fibers / X. Huang // Materials. – 2009. – № 2(4). – P. 2369–2403.
14. *Хог Э.* Анализ чувствительности при проектировании конструкций / Э. Хог, К. Чой, В. Комков. – Москва: Мир, 1988. – 428 с.
15. *Смердов А.А.* Анализ чувствительности при проектировании композитных размеростабильных космических конструкций / А.А. Смердов // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – Вып. 7. – URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/857.html>
16. *Молодцов Г.А.* Формостабильные и интеллектуальные конструкции из композиционных материалов / Г.А. Молодцов, В.Е. Биткин, В.Ф. Симонов, Ф.Ф. Урмансов. – Москва: Машиностроение, 2000. – 352 с.
17. *Смердов А.А.* Возможности управления термическим деформированием космической платформы из углепластика / А.А. Смердов, К.П. Баслык // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2005. – № 1. – С. 41–48.
18. *Биткин В.Е.* Выбор материалов для изготовления размеростабильных несущих конструкций / В.Е. Биткин, О.Г. Жидкова, В.А. Комаров // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2018. – Т.17, № 1. – С. 100–117.
19. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
20. *Bede B.* Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. / B. Bede. – Berlin: Springer-Verlag, 2013. – 276 p.
21. *Нгуен Куок Ши* Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.
22. *Болнокин В.Е.* Нечеткие оценки эффективных характеристик микронеоднородных материалов для конструкций гидроакустического экранирования / В.Е. Болнокин, Зыюнг Минь Хай, С.В. Сторожев // Системы управления и информационные технологии. – 2017. – № 4 (70). – С. 4–8.

V.V. Dremov, N.I. Zakharov, S.V. Storozhev, D.D. Polyansky

Fuzzy-set modifications of the calculated relationships for averaged thermomechanical characteristics of a layered carbon plastic package: a theoretical algorithm.

A fuzzy-set numerical-analytical algorithm for determining the reduced averaged stiffness parameters and the linear thermal expansion coefficient for a multilayer package composed of thin layers of unidirectional fibrous carbon fiber with an orientation collinear to their midplanes and hexagonal laying of fibers by varying the angular characteristics of the reinforcement directions in the package components is presented. The proposed algorithm is designed to take into account scatter errors in the values of the physical and mechanical parameters of the materials of reinforcing fibers and

В.В. Дремов, Н.И. Захаров, С.В. Сторожев, Д.Д. Полянский

binder, as well as the geometric parameters of the package and reinforcement in monolayers when calculating the desired average values. The described approach is based on the transition to fuzzy-set descriptions for the non-contrasting parameters of the model under consideration and the use of a heuristic generalization principle in the transition to fuzzy arguments in the calculated relations for the averaged thermomechanical characteristics of the package.

Keywords: *multilayer package, monolayers of fibrous carbon fiber, calculations of reduced thermo-mechanical characteristics, accounting for non-contrast parameters, fuzzy set method, heuristic generalization principle.*

ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры”, Макеевка,
ГОУ ВПО “Донецкий национальный технический университет”,
Донецк

Получено 08.09.2022

*Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture,
Makeevka,
Donetsk National Technical University, Donetsk*

s.v.storozhev@donnasa.ru