

ISSN 0136-4545

ФГБОУ ВО «ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

---

---

**Журнал  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ  
МЕХАНИКИ**

---

---

**№ 3 (84)**

**2023**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:** д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**  
**ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:** д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**  
**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:** канд. физ.-мат. наук **М.Н. Пачева**

#### **РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

д-р техн. наук, проф. **А.В. Анциферов**, д-р техн. наук, проф. **В.Е. Болнокин**, д-р техн. наук, проф. **Н.И. Болонов**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.О. Ватульян**, д-р техн. наук, проф. **Л.П. Вовк**, д-р техн. наук, проф. **В.А. Глазунов**, д-р техн. наук, с.н.с. **А.А. Глухов**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.С. Гольцев**, д-р физ.-мат. наук, проф. **Г.В. Горр**, д-р техн. наук, проф. **В.В. Губанов**, д-р техн. наук, с.н.с. **В.А. Дрибан**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.М. Ковалев**, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. **Б.И. Коносевиц**, д-р физ.-мат. наук, проф. **И.А. Моисеенко**, д-р техн. наук, проф. **В.Ф. Мущанов**, д-р техн. наук, проф. **В.Н. Павлыш**, д-р техн. наук, проф. **А.А. Петраков**, д-р техн. наук, доц. **С.В. Сторожев**, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. **С.Н. Судаков**, д-р техн. наук, проф. **Г.М. Улитин**, д-р физ.-мат. наук, проф. **В.А. Шалдырван**, д-р техн. наук, проф. **В.П. Шамота**

**EDITOR-IN-CHIEF:** Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**

**DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF:** Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**

**EXECUTIVE SECRETARY:** Cand. of phys. and math. **M.N. Pacheva**

#### **EDITORIAL BOARD:**

Dr. of tech., prof. **A.V. Antsiferov**, Dr. of tech., prof. **V.E. Bolnokin**, Dr. of tech., prof. **N.I. Bolonov**, Dr. of phys. and math., prof. **A.O. Vatulyan**, Dr. of tech., prof. **L.P. Vovk**, Dr. of tech., prof. **V.A. Glazunov**, Dr. of tech., senior researcher **A.A. Glukhov**, Dr. of phys. and math., prof. **A.S. Goltsev**, Dr. of phys. and math., prof. **G.V. Gorr**, Dr. of tech., prof. **V.V. Gubanov**, Dr. of tech., senior researcher **V.A. Driban**, Dr. of phys. and math., prof. **A.M. Kovalev**, Dr. of phys. and math., senior researcher **B.I. Konosevich**, Dr. of phys. and math., prof. **I.A. Moiseyenko**, Dr. of tech., prof. **V.F. Mushchanov**, Dr. of tech., prof. **V.N. Pavlysh**, Dr. of tech., prof. **A.A. Petrakov**, Dr. of tech., doc. **S.V. Storozhev**, Dr. of phys. and math., senior researcher **S.N. Sudakov**, Dr. of tech., prof. **G.M. Ulitin**, Dr. of phys. and math., prof. **V.A. Shaldyrvan**, Dr. of tech., prof. **V.P. Shamota**.

Адрес редакции: 83001 Донецк, ул. Университетская, 24  
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»  
Тел. 302 92 71, E-mail: jtam\_donnu@mail.ru

Технический редактор: Пачева М.Н.

Научный журнал «Журнал теоретической и прикладной механики» включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (приказ МОН ДНР № 616 от 14.07.2021 г) по следующим научным специальностям: 1.1.7 — Теоретическая механика, динамика машин (физико-математические науки); 1.1.8 — Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки); 1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки); 2.1.9 — Строительная механика (технические науки); 2.8.6 — Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика (технические науки).

Журнал включен в перечень РИНЦ (Лицензионный договор № 27-01/2020 от 23.01.2020 г.).

Утверждено к печати ученым советом  
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»  
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016 г.

© Федеральное государственное бюджетное  
учреждение высшего образования  
«Донецкий государственный университет», 2023

№ 3 (84) / 2023

Основан в 1970г.

# ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

### Механика твердого тела

*Ткаченко Д.Н.* О движении главной оси эллипсоида инерции в частном случае решения С.В. Ковалевской..... 5

### Механика деформируемого твердого тела

*Бондаренко Н.С., Гольцев А.С.* Исследование состояния изгиба ортотропных пластин на базе  $\{1,0\}$ -аппроксимации с учетом «гипотетического» модуля сдвига ..... 16

*Глухова Ж.Л., Щеголева Т.А.* Водородоупругие эффекты в системах МЕ-Н..... 28

*Карасев Д.С., Сторожев С.В., Шалдырван В.А.* Интегрирование уравнений распространения локализованных электроупругих волн релеевского типа в полупространстве функционально-градиентной пьезокерамики с двойной экспоненциальной неоднородностью..... 36

*Калоеров С.А., Сероштанов А.В, Мироненко А.Б.* Изгиб тонкой электроупругой многосвязной полуплоскости..... 44

*Моисеенко И.А., Вовк Л.П., Дзундза А.И., Мельничук Н.Ю.* Исследование свойств неосесимметричных волн в протяженных цилиндрах на основе шестифакторной модели радиальной неоднородности трансверсально-изотропного материала..... 61

*Глушанков Е.С., Мироненко А.Б.* Термонапряженное состояние бесконечной многосвязной анизотропной пластинки с жестко подкрепленными отверстиями, находящейся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой..... 82

*Глухов А.А., Моисеенко И.А., Сторожев В.И.* Локализованные волны сдвига в поперечно-неоднородном анизотропном слое между неоднородными полупространствами..... 93

**Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ**

*Гольцев А.С., Номбре С.Б., Полянский Д.Д., Сторожев С.В.* Нечетко-множественный учет разброса параметров в модели термомеханических воздействий на поверхности упругого полого шара..... 102

**Геомеханика, разрушение горных пород,  
рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика**

*Иванова Л.А., Голубев Ф.М.* Последствия подработки в сложных горно-геологических условиях и назначение мер защиты на примере дома детского творчества в городе Кировское..... 115

*Глухов А.А.* О возможности прогноза расположения зон вероятного скопления метана сейсмическими методами..... 123

*Лобков Н.И., Радченко А.Г.* Геодинамические основы формирования опорного давления в результате подвигания очистных забоев..... 132

№ 3 (84) / 2023

*Founded in 1970.*

# JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

## CONTENTS

### **Rigid Body Dynamics**

- Tkachenko D.N.* On the motion of the main axis of the ellipsoid of inertia in the special case of S.V. Kovalevskaya's solution..... 5

### **Solid Mechanics**

- Bondarenko N.S., Goltsev A.S.* Investigation of the bending state of orthotropic plates on the base of {1,0}-approximation in the presence of a «hypothetical» shear modulus..... 16
- Glukhova Zh.L., Shchegoleva T.A.* Hydrogen-elastic effects in ME-H systems..... 28
- Karasev D.S., Storozhev S.V., Shaldyryan V.A.* Integration of propagation equations of localized electroelastic waves of the Rayleigh type in the half-space of functional-gradient piezoceramics with double exponential inhomogeneity ..... 36
- Kaloerov S.A., Seroshtanov A.V., Mironenko A.B.* Bending of a thin electroelastic multiply connected half-plane ..... 44
- Moiseyenko I.A., Vovk L.P., Dzundza A.I., Melnichuk N.I.* Study of the properties of non-axisymmetric waves in extended cylinders based on a six-factor model of radial inhomogeneity of a transversely isotropic material ..... 61
- Glushankov E.S., Mironenko A.B.* The thermo-stress state of infinite multiply connected anisotropic plate with reinforced holes under the convective heat transfer action..... 82
- Glukhov A.A., Moiseyenko I.A., Storozhev V.I.* Localized shear waves in a transversely inhomogeneous anisotropic layer between inhomogeneous half-spaces..... 93

**Mathematical Modeling,  
Numerical Methods and Program Complexes**

*Goltsev A.S., Nombre S.B., Polyansky D.D., Storozhev S.V.* Fuzzy-set accounting of parameters scatter errors in the model of thermomechanical loads impact on the surfaces of an elastic hollow ball..... 102

**Geomechanics, Rock Damage,  
Mining Aerogas dynamics and Thermal Physics**

*Ivanova L.A., Golubev Ph.M.* The consequences of part-time work in difficult mining and geological conditions and the appointment of protective measures on the example of the children's creativity house in the city of Kirovskoye..... 115

*Glukhov A.A.* On the possibility of predicting the location of zones of probable methane accumulation by seismic methods..... 123

*Lobkov N.I., Radchenko A.G.* Geodynamic basis of forvation of reference pressure as a result of driving of clian-up faces..... 132

## МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 53.38; 53.39

doi:10.24412/0136-4545-2023-3-5-15

EDN:GKZQQY

©2023. Д.Н. Ткаченко<sup>1</sup>О ДВИЖЕНИИ ГЛАВНОЙ ОСИ ЭЛЛИПСОИДА ИНЕРЦИИ  
В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ РЕШЕНИЯ С.В. КОВАЛЕВСКОЙ

Ранее движение гироскопа Ковалевской изучалось либо с помощью прямого метода Пуансо, либо с помощью модифицированного метода Пуансо. В данной статье исследованы свойства движения главной оси эллипсоида инерции тела в неподвижном пространстве. Показано, что это движение имеет периодический характер.

**Ключевые слова:** комплексный подход, истолкование движения, углы Эйлера, метод Пуансо.

**Введение.** В динамике твердого тела, имеющего неподвижную точку, применялись различные методы истолкования движения. Г.К. Суслов [1] в своем учебнике по теоретической механике подробно изложил основные результаты, которые установлены в исследовании решений уравнений Эйлера–Пуассона. В монографиях [2, 3] проведен дополнительный анализ публикаций по данной теме и показано, что прямой метод Пуансо [4] получил наибольшее применение в истолковании движения твердого тела, имеющего неподвижную точку (к настоящему времени все решения уравнений Эйлера–Пуассона изучены с помощью теоремы Пуансо и уравнений П.В. Харламова [5]). Г.В. Горр [6] предложил модифицированный метод Пуансо, в основе которого лежит истолкование движения тела путем качения без скольжения подвижного аксоида по неподвижному аксоиду вектора, коллинеарного вектору угловой скорости тела. Он показал, что такой подход в изучении геометрии движения тела в решениях В.А. Стеклова [7] и А.И. Докшевича [8] позволяет значительно упростить истолкование движения: например, в решении В.А. Стеклова направляющими линиями аксоидов вспомогательного вектора являются эллипсы, в решении А.И. Докшевича направляющей линией подвижного аксоида вспомогательного вектора является эллипс, а направляющей линией неподвижного аксоида этого вектора – плоская алгебраическая кривая шестого порядка. Модифицированный метод Пуансо применен

<sup>1</sup>Ткаченко Дмитрий Николаевич – канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотр. ФГБНУ ИПММ, Донецк, e-mail: dntkachenko@mail.ru.

Glushankov Evgenij Sergeevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Junior Researcher, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk.

и в статьях Г.В. Горра и А.И. Синенко [9], Г.В. Горра и Е.К. Щетининой [10], Г.В. Горра, Д.А. Данилюка, Д.Н. Ткаченко [11].

В динамике твердого тела широко используется методика апекса, которая заключается в исследовании главных осей инерции в неподвижном пространстве (например, оси симметрии тела в решении Ж. Лагранжа). Последней работой по данной теме является статья Х.М. Яхьи [12], в которой изучено движение главной оси в решении Д.Н. Горячева уравнений Эйлера–Пуассона. Для решения уравнений движения тела в потенциальном силовом поле Г.В. Горр [13] получил наглядное представление о движении главной оси инерции тела, поскольку это движение является периодическим. А.В. Мазнев [14, 15] изучил движение апекса для регулярных прецессий и прецессионно-изоконических движений.

Остановимся на кратком анализе решения С.В. Ковалевской [16]. Ранее уже было отмечено, что в решении С.В. Ковалевской получены значительные результаты по кинематическому истолкованию движения методом Пуансо (см. обзор [2]). Целесообразно отметить статью Б.К. Млодзеевского [17], посвященную исследованию частного случая решения С.В. Ковалевской, и статью П.В. Харламова [18], в которой дополнены результаты [17], статью Г.В. Горра и А.Я. Савченко [19], в которой найден частный случай решения С.В. Ковалевской, характеризующийся свойством периодичности движения тела (метод Пуансо для этого решения применен в [20]).

Г.В. Горр [21] провел анализ большинства подходов в кинематическом истолковании движения тела с неподвижной точкой и предложил комплексный подход в данной задаче.

Настоящая статья посвящена изучению движения главной оси эллипсоида инерции в пространстве для случая [19].

**1. Постановка задачи.** Запишем уравнения движения тяжелого твердого тела

$$A\dot{\bar{\omega}} = A\bar{\omega} \times \bar{\omega} + s(\bar{l} \times \bar{v}), \quad \dot{\bar{v}} = \bar{v} \times \bar{\omega}, \quad (1)$$

где введены обозначения:  $\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  – вектор угловой скорости;  $\bar{v} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  – единичный вектор, указывающий направление силы тяжести;  $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$  – тензор инерции в неподвижной точке  $O$ ;  $s$  – произведение веса тела и расстояния от неподвижной точки до центра тяжести;  $\bar{l} = (l_1, l_2, l_3)$  – единичный вектор, направленный из неподвижной точки  $O$  в точку  $C$ . Точка над переменными обозначает производную по времени  $t$ . Подвижную систему координат обозначим через  $O_{xyz}$  ( $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$  – единичные вектора этой системы), то есть решение уравнений (1) имеет вид

$$\bar{v}(t) = \nu_1(t)\bar{i}_1 + \nu_2(t)\bar{i}_2 + \nu_3(t)\bar{i}_3, \quad (2)$$

$$\bar{\omega}(t) = \omega_1(t)\bar{i}_1 + \omega_2(t)\bar{i}_2 + \omega_3(t)\bar{i}_3. \quad (3)$$

Уравнения (1) имеют три первых интеграла

$$A\bar{\omega} \cdot \bar{\omega} - 2(\bar{s} \cdot \bar{v}) = 2E, \quad \bar{v} \cot \bar{v} = 1, \quad A\bar{\omega} \cdot \bar{v} = k, \quad (4)$$



где  $E, k$  – произвольные постоянные,  $\bar{s} = s\bar{l}$ .

**Метод апекса.**

Пусть  $O_{\xi\eta\zeta}$  – неподвижная система координат с единичными векторами  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ . Введем углы Эйлера  $\theta, \varphi, \psi$  таким образом, что  $\theta$  – угол между векторами  $\bar{i}_3$  и  $\bar{v}_3$ . Тогда

$$\nu_1 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \nu_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \nu_3 = \cos \theta, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, & \omega_2 &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_3 &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (6)$$

Согласно [21], запишем векторную форму соотношений, которые следуют из (5), (6)

$$\theta = \arccos(\bar{v} \cdot \bar{i}_3), \quad \varphi = \arctg \frac{\bar{v} \cdot \bar{i}_1}{\bar{v} \cdot \bar{i}_2}, \quad \psi = \frac{(\bar{\omega}_{\Pi} \times \bar{i}_3) \cdot (\bar{v} \times \bar{i}_3)}{(\bar{v} \times \bar{i}_3)^2}. \quad (7)$$

Следовательно, после интегрирования уравнений динамики, соотношения (2), (3), (5), (6) позволяют определить положение тела в неподвижном пространстве

$$\begin{aligned} \bar{i}_1 &= (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta) \cdot \bar{v}_1 + \\ &+ (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta) \cdot \bar{v}_2 + \sin \varphi \sin \theta \cdot \bar{v}_3, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \bar{i}_2 &= -(\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \theta) \cdot \bar{v}_1 - \\ &-(\sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \cos \theta) \cdot \bar{v}_2 + \cos \varphi \sin \theta \cdot \bar{v}_3, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\bar{i}_3 = \sin \psi \sin \theta \cdot \bar{v}_1 - \cos \psi \sin \theta \cdot \bar{v}_2 + \cos \theta \cdot \bar{v}_3. \quad (10)$$

Метод апекса состоит в исследовании одного из уравнений системы (8)–(10).

**Модифицированный метод Пуансо [6].**

Если определены функции  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $\psi = \psi(t)$ ,  $\theta = \theta(t)$  из (7), то компоненты вектора  $\omega$  в неподвижной системе координат можно получить из формулы

$$\bar{\omega}_H = \omega_{\xi} \bar{v}_1 + \omega_{\eta} \bar{v}_2 + \omega_{\zeta} \bar{v}_3, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{\xi} &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta, & \omega_{\eta} &= \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta, \\ \omega_{\zeta} &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta. \end{aligned} \quad (12)$$

Прямой метод Пуансо можно применить, используя либо соотношения (6), (12) (см. статью Б.К. Млодзеевского [17]), либо уравнения П.В. Харламова [5]

$$\omega_{\xi} = \omega_{\rho} \cos \alpha, \quad \omega_{\eta} = \omega_{\rho} \sin \alpha, \quad \omega_{\zeta} = \bar{\omega}_{\Pi} \cdot \bar{v}, \quad \omega_{\rho}^2 = \omega^2 - \omega_{\rho}^2, \quad (13)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} = \frac{1}{\omega_{\rho}^2} [\dot{\bar{\omega}} \times (\bar{v} \times \bar{\omega})]. \quad (14)$$

Отметим, что в [6] получена более простая формула для полярного угла  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg}(\alpha(t) - \psi(t)) = \frac{\delta(\bar{\omega}_{\Pi}(t) \times \bar{v}(t)) \cdot (\bar{v}(t) \times \bar{i}_3)}{\bar{i}_3 \cdot (\bar{\omega}_H(t) \times \bar{v}(t))}, \quad (15)$$

так как  $\psi(t)$  при применении комплексного подхода уже найдена (см. третью формулу из (7)). Модифицированный метод Пуансо [6] состоит в том, что в качестве аксоидов, с помощью которых представляется движение тела, принимаются аксоиды вспомогательного вектора

$$\bar{b} = b(t)\bar{\omega}. \quad (16)$$

Например, если  $\omega_3(t) \neq 0$ , то в [6] вектор (16) выбирается следующим образом

$$\bar{b}_{\Pi}(t) = \frac{1}{\omega_3(t)} \left( \frac{\omega_1(t)}{\omega_3(t)} \bar{i}_1 + \frac{\omega_2(t)}{\omega_3(t)} \bar{i}_2 + \bar{i}_3 \right). \quad (17)$$

После этого определяется вектор

$$\bar{b}_{\Pi}(t) = b_{\xi} \bar{v}_1 + b_{\eta} \bar{v}_2 + b_{\zeta} \bar{v}_3, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} b_{\xi} &= b_{\rho} \cos \alpha, & b_{\eta} &= b_{\rho} \sin \alpha, & b_{\zeta} &= \bar{b}_{\Pi} \cdot \nu, & b_{\rho}^2 &= b^2 - b_{\zeta}^2, \\ \dot{\alpha} &= \frac{1}{b_{\rho}^2} [b_{\Pi}(t) \cdot (\bar{v} \times \bar{b}_{\Pi}(t))], \end{aligned} \quad (19)$$

а затем движение тела воспроизводится качением без скольжения аксоида  $\bar{b}_{\Pi}(t)$  по аксоиду  $\bar{b}_H(t)$ .

**2. Частный случай решения С.В. Ковалевской.** Рассмотрим уравнения (1) при условиях [16]

$$l_1 = 1, \quad l_2 = 0, \quad l_3 = 0, \quad A_1 = A_2 = 2A_3, \quad (20)$$

а вместо переменных  $\omega_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) введем безразмерные переменные

$$p = \sqrt{\frac{A_3}{s}} \omega_1, \quad q = \sqrt{\frac{A_3}{s}} \omega_2, \quad r = \sqrt{\frac{A_3}{s}} \omega_3, \quad \tau = \sqrt{\frac{s}{A_3}} t.$$

Тогда из уравнений (1) и первых интегралов (4) получим

$$\dot{p} = \frac{1}{2}qr, \quad \dot{q} = -\frac{1}{2}(rp + \nu_3), \quad \dot{r} = \nu_2, \quad (21)$$

$$\dot{\nu}_1 = r\nu_2 - q\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = p\nu_3 - r\nu_3, \quad \dot{\nu}_3 = q\nu_2 - p\nu_3, \quad (22)$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad 2(p^2 + q^2) + r^2 = 2\nu_1 + 6l_1, \quad 2(p\nu_1 + q\nu_2) + r\nu_3 = 2l. \quad (23)$$

Уравнения (21), (22) допускают первый интеграл С.В. Ковалевской:

$$(\nu_1 + p^2 - q^2)^2 + (\nu_2 + 2pq)^2 = K^2, \quad (24)$$

где  $K$  – произвольная постоянная. В формулах (23) произвольные постоянные  $l, l_1$  введены вместо  $k, E$ .

Рассмотрим частный случай [19] решения С.В. Ковалевской, который характеризуется условиями  $l = 0$ ,  $K = 0$ . Обозначая  $3l_1 = 2R^2$ , запишем его в виде

$$p = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - r^2}, \quad q = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + \frac{2}{R}r - 4R^2}, \quad (25)$$

$$\nu_1 = \frac{1}{2}(r^2 + \frac{1}{R}r - 4R^2), \quad \nu_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{(4R^2 - r^2)(r^2 + \frac{2}{R}r - 4R^2)}, \quad (26)$$

$$\nu_3 = \frac{1}{2R}\sqrt{4R^2 - r^2}, \quad \frac{dr}{d\tau} = -\frac{1}{2}\sqrt{(4R^2 - r^2)(r^2 + \frac{2}{R}r - 4R^2)}. \quad (27)$$

Переменная  $r$  изменяется в промежутке

$$r \in [r_*, r^*], \quad (r_* = \frac{\sqrt{1 + 4R^4} - 1}{R}, \quad r^* = 2R), \quad (28)$$

в котором функции, входящие в (25)–(28), действительны. Без ограничения общности задачи, полагаем  $R > 0$ .

Подвижный годограф вектора угловой скорости представим как линию пересечения поверхностей

$$\frac{p^2}{R^2} + \frac{r^2}{4R^2} = 1, \quad (r + \frac{1}{R})^2 - 4q^2 = \frac{1 + 4R^4}{R^2}. \quad (29)$$

Движение конца вектора угловой скорости по подвижному годографу – периодическое с периодом по  $\tau$

$$T = 8 \int_{r_*}^{r^*} \frac{dr}{\sqrt{(4R^2 - r^2)(r^2 + \frac{2}{R}r - 4R^2)}}. \quad (30)$$

Уравнения неподвижного годографа для решения (25)–(27) таковы [19]:

$$\omega_\zeta = \frac{r}{4R}\sqrt{4R^2 - r^2}, \quad \omega_\rho^2 = \frac{r}{16R^2}(r^3 + 12R^2r + 8R), \quad (31)$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = -\frac{(2R^3 + r^2 + 4R^2)(4R^2 - r^2)}{r(r^3 + 12R^2r + 8R)}. \quad (32)$$

В [19] показано, что неподвижный годограф вектора угловой скорости является замкнутой кривой, движение конца векторов по подвижному годографу – периодическое с периодом (30). Поэтому движение гироскопа С.В. Ковалевской в данном случае – периодическое. Полученные результаты дают представление о движении гироскопа С.В. Ковалевской в рассматриваемом частном случае  $K = 0$ ,  $3l_1 = 2R^2$ ,  $l = 0$  прямым методом Пуансо.

В [20] выполнено исследование решения (25)–(27) в эллиптических функциях Якоби. Вводя модули эллиптических функций

$$k^2 = \frac{\sqrt{1 + 4R^2} - 2R^2}{2\sqrt{1 + 4R^2}}, \quad k'^2 = (1 - k^2) = \frac{\sqrt{1 + 4R^2} + 2R^2}{2\sqrt{1 + 4R^2}}, \quad (33)$$

и вспомогательный параметр  $\alpha_0 = \frac{k'}{k}$ , который связан с параметром  $R$  соотношением  $4R^2 = \frac{\alpha_0^2 - 1}{\alpha_0}$ , запишем решение (25)–(27)

$$p = \sqrt{\alpha_0^2 - 1} \frac{\operatorname{cn} u}{\alpha_0 + \operatorname{cn}^2 u}, \quad q = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{k(\alpha_0 + \operatorname{cn}^2 u)}, \quad r = 2R \frac{\alpha_0 - \operatorname{cn}^2 u}{\alpha_0 + \operatorname{cn}^2 u}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{\operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u + k^2(1 - \alpha_0^2) \operatorname{cn}^2 u}{k^2(\alpha_0 + \operatorname{cn}^2 u)^2}, \quad \nu_2 = -2\sqrt{\alpha_0^2 - 1} \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{(\alpha_0 + \operatorname{cn}^2 u)^2}, \\ \nu_3 &= 2\sqrt{\alpha_0} \frac{\operatorname{cn} u}{\alpha_0 + \operatorname{cn}^2 u}, \quad u = -\mu_0 \tau \quad (\mu_0 = \frac{1}{2\sqrt{kk'}}). \end{aligned} \quad (35)$$

В формулах (34), (35)  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$ ,  $\operatorname{dn}$  – эллиптические функции с модулями (33).

**3. Годограф вектора  $\vec{i}_3$ .** Поскольку основной целью статьи является исследование движения главных осей в пространстве, то остановимся на наиболее важной задаче – изучении движения третьей подвижной оси, которая характеризуется как ось динамической симметрии ( $A_2 = A_1$ ) гироскопа Ковалевской. В силу (10) имеем векторное представление годографа вектора  $\vec{i}_3$ :

$$\vec{i}_3 = \sin \psi \sin \theta \cdot \vec{v}_1 - \cos \psi \sin \theta \cdot \vec{v}_2 + \cos \theta \cdot \vec{v}_3. \quad (36)$$

В статье [10] получено следующее значение для угла прецессии

$$\psi(r) = \psi_0 - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2R} \left( \sqrt{r^2 + \frac{2r}{R} - 4R^2} - r \right). \quad (37)$$

Так как результат [10] о периодичности движения гироскопа установлен без явного интегрирования (32), то представляется целесообразным указать зависимость  $\alpha(r)$ , используя формулу (15)

$$\alpha(r) = -[2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2R} \left( \sqrt{r^2 + \frac{2r}{R} - 4R^2} - r \right) + \operatorname{arctg} \frac{4R^2 + r^2}{2R \sqrt{r^2 + \frac{2r}{R} - 4R^2}}]. \quad (38)$$

Применить формулу (38) можно при численном интегрировании в задаче кинематического истолкования движения гироскопа Ковалевской.

Для получения наглядной картины движения главной оси инерции, единичный вектор которой имеет вид (36), рассмотрим следующий пример

$$\alpha_0 = 2, \quad k = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad k' = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad R = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}. \quad (39)$$

Запишем решение (34), (35)

$$p(u) = \sqrt{3} \frac{\operatorname{cn} u}{2 + \operatorname{cn}^2 u}, \quad q(u) = \sqrt{5} \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{2 + \operatorname{cn}^2 u}, \quad r(u) = \frac{\sqrt{3}(2 - \operatorname{cn}^2 u)}{\sqrt{2}(2 + \operatorname{cn}^2 u)}, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \nu_1(u) &= \frac{4 - 6\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{cn}^4 u}{(2 + \operatorname{cn}^2 u)^2}, \quad \nu_2(u) = -2\sqrt{15} \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{(2 + \operatorname{cn}^2 u)^2}, \\ \nu_3(u) &= \frac{2\sqrt{2} \operatorname{cn} u}{2 + \operatorname{cn}^2 u}, \end{aligned} \quad (41)$$

О движении главной оси эллипсоида инерции в частном случае решения С.В. Ковалевской

$$\sin \theta(u) = \frac{2 - \operatorname{cn}^2 u}{2 + \operatorname{cn}^2 u}, \quad \cos \theta(u) = \frac{2\sqrt{2}\operatorname{cn}^2 u}{2 + \operatorname{cn}^2 u}, \quad (42)$$

$$\frac{d\psi(u)}{du} = \frac{\sqrt{3}\operatorname{cnu}}{2 - \operatorname{cn}^2 u}, \quad (u = -\sqrt{5}\tau). \quad (43)$$

В силу соотношений (40)–(42) движение конца вектора  $\bar{i}_3$  из формулы (36) характеризуется свойством периодичности с периодом  $4T_*$ , где

$$T_* = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dw}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 w}}. \quad (44)$$

Разобьем отрезок по  $u \in [0, 4T_*]$ . Согласно свойству функции  $\operatorname{cnu}$  имеем:  $\operatorname{cn}T_* = 0$ ,  $\operatorname{cn}3T_* = 0$ ; при  $u \in (0, T_*) = g_1(u)$  функция  $\operatorname{cnu}$  убывает от значения 1 до 0; при  $u \in (T_*, 2T_*) = g_2(u)$  функция  $\operatorname{cnu}$  убывает от нулевого значения до  $-1$ ; при  $u \in (2T_*, 3T_*) = g_3(u)$  функция  $\operatorname{cnu}$  возрастает от  $-1$  до нулевого значения; при  $u \in (3T_*, 4T_*) = g_4(u)$  функция  $\operatorname{cnu}$  возрастает от нуля до единицы. Из формулы (43) следует, что на множествах  $g_1(u)$ ,  $g_4(u)$  функция  $\psi(u)$  возрастает, а на множествах  $g_2(u)$ ,  $g_3(u)$  она убывает. Для того, чтобы указать значения  $\psi(u)$  в точках  $u = 0, T_*, 2T_*, 3T_*, 4T_*$  подставим  $r(u)$  из третьей формулы системы (40) в равенство (37) (полагаем  $\psi_0 = 0$ )

$$\psi(u) = -2\operatorname{arctg} \frac{1}{2 + \operatorname{cn}^2 u} \left[ \frac{2\sqrt{2}\operatorname{cnu} \cdot \sqrt{4 + \operatorname{cn}^2 u}}{\sqrt{3}} - (2 - \operatorname{cn}^2 u) \right] = F(u). \quad (45)$$

Из (45) получим следующее значение для  $\psi(u)$ :

$$\psi(0) = \psi(2T_*) = \psi(4T_*) = 2\operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \kappa_1, \quad (46)$$

$$\psi\left(\frac{T_*}{2}\right) = -2\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\kappa_2, \quad \psi\left(\frac{3T_*}{2}\right) = 2\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \kappa_3. \quad (47)$$

Для более наглядного исследования годографа (36) введем в плоскости  $O\xi\eta$  вместо переменной  $\psi$  переменную

$$\tilde{\psi} = \psi + \frac{3\pi}{2}. \quad (48)$$

Тогда, в силу (42), (48), из равенства (36) получим

$$\bar{i}_3 = X\bar{v}_1 + Y\bar{v}_2 + Z\bar{v}_3, \quad (49)$$

где

$$\begin{aligned} X = X(u) &= \frac{2 - \operatorname{cn}^2 u}{2 + \operatorname{cn}^2 u} \cos \tilde{\psi}(u), & Y = Y(u) &= \frac{2 - \operatorname{cn}^2 u}{2 + \operatorname{cn}^2 u} \sin \tilde{\psi}(u), \\ Z = Z(u) &= \frac{2\sqrt{2}\operatorname{cnu}}{2 + \operatorname{cn}^2 u}. \end{aligned} \quad (50)$$

Для нахождения  $\tilde{\psi}(u)$  необходимо воспользоваться формулами (45), (48); значения функции  $\tilde{\psi}(u)$  в точках  $u = 0, \frac{T_*}{2}, T_*, \frac{3T_*}{2}, 4T_*$  получим из равенств (45), (48)

(новые значения – значения для  $\tilde{\psi}(u)$  обозначим через  $\tilde{\kappa}_1, \tilde{\kappa}_2$ ). Выполним поворот вокруг  $O_\zeta$  системы  $O_{\xi\eta\zeta}$  на угол  $\frac{3\pi}{2}$ , чтобы новое значение  $\tilde{\psi}(u)$  обращалось в нуль в новой системе  $O_{\xi^*\eta^*\zeta}$ . Введем в плоскости  $O_{\xi^*\eta^*}$  полярную систему с координатам  $X(u), Y(u)$ :

$$X(u) = \rho(u) \cos \tilde{\psi}(u), \quad Y(u) = \rho(u) \sin \tilde{\psi}(u), \quad \rho(u) = \frac{2 - \operatorname{cn}^2 u}{2 + \operatorname{cn}^2 u}, \quad (51)$$

и рассмотрим проекцию годографа вектора (49) на плоскость  $O_{\xi^*\eta^*}$ , которая задается соотношениями (51). Обозначим через  $\beta$  – угол между касательной к кривой (51) и полярным радиусом. В силу (43), (51), имеем

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{3}(2 + \operatorname{cn}^2 u)}{8 \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}. \quad (52)$$

Из формул (51), (52) следует, что проекция (51) вектора (49) расположена в кольце с радиусами  $\frac{1}{3}$  и 1 (т.е.  $\rho_{\min} = \frac{1}{3}$ ,  $\rho_{\max} = 1$ ), причем она касается окружности  $\rho = \frac{1}{3}$ , а тангенс угла между касательной к (51) и полярным радиусом окружности равен (используем (39), (52))

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \pm \frac{\sqrt{15}}{8}, \quad (53)$$

причем знак плюс соответствует значению  $u = \frac{T_*}{2}$ , а знак минус –  $u = \frac{3T_*}{2}$ . Проекция (51) изображена на рисунке 1.

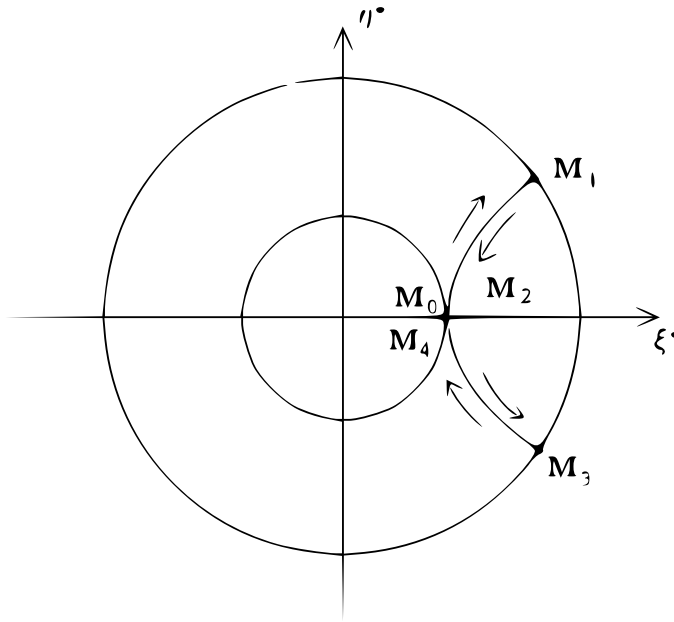


Рис. 1. Проекция годографа  $\vec{v}_3$  на горизонтальную плоскость

Сделаем пояснения к рисунку 1. Обозначим через  $M$  изображающую точку годографа (51). Движение точки  $M$  по данной кривой обозначено стрелкой. Точка  $M_0$  соответствует начальному значению  $u = 0$ ; далее, на основании формул (43) устанавливаем, что угол  $\tilde{\psi}(u)$  возрастает (то есть множеству  $g_1(u)$  соответствует часть кривой  $M_0M_1$ ). В точке  $M_1$ :  $\frac{d\tilde{\psi}(u)}{du} = 0$ , а, далее,  $\tilde{\psi}(u)$  убывает, и на множествах  $g_2(u)$ ,  $g_3(u)$  точка  $M$  занимает положения точек  $M_2$  и  $M_3$  (часть кривой рисунка 1, заключенная между точками  $M_1$  и  $M_3$ , соответствует множествам  $g_2(u)$ ,  $g_3(u)$ ). В точке  $M_3$ , соответствующей значению  $u = 3T_*$ , угол  $\tilde{\psi}(u)$  достигает минимального значения. При изменении переменной  $u$  на множестве  $g_4(u)$  угол  $\tilde{\psi}(u)$  возрастает; изображающая точка на  $g_4(u)$  движется по кривой  $M_3M_4$  и достигает ее при  $u = 4T_*$ . Далее процесс движения точки  $M$  по кривой (51) повторяется. То есть, показан периодический характер движения точки  $M$  по проекции (51).

Для того, чтобы получить годограф (49), необходимо отобразить кривую (51) (рис. 1) на единичную сферу. Изображаемую точку годографа (49) обозначим через  $N$ . Кривые на сфере, соответствующие множествам  $g_i(u)$ , обозначим через  $G_i(u)$ ; точка  $M_0(\frac{1}{3}, 0)$  отображается в точку  $N_0(\frac{1}{3}, 0, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ ; точка  $M_1(\cos \tilde{\psi}(\frac{T_*}{2}), \sin \tilde{\psi}(\frac{T_*}{2}))$  отображается в точку  $N_1$  (поскольку она принадлежит экваториальной плоскости  $O_{\xi^*\eta^*}$ , то ее первые две координаты совпадают с координатами точки  $M_1$ ). Таким образом, в результате получим часть  $G_1$  годографа (49).

Очевидно, что при  $u \in g_2(u)$  часть  $G_2$  годографа (49) симметрична  $G_1$  относительно экваториальной плоскости  $O_{\xi^*\eta^*}$ . Поэтому точка  $N_2$  имеет координаты  $(\frac{1}{3}, 0, -\frac{2\sqrt{2}}{3})$ , а  $G_2$  находится ниже экваториальной плоскости  $O_{\xi^*\eta^*}$ . Части  $G_3$  и  $G_4$  симметричны соответственно  $G_2$  и  $G_1$  относительно плоскости  $O_{\xi^*\zeta}$ .

Для исследования годографа (49) необходимо определить

$$\frac{d\vec{i}_3(u)}{du} = \frac{dX(u)}{du}\vec{v}_1 + \frac{dY(u)}{du}\vec{v}_2 + \frac{dZ(u)}{du}\vec{v}_3. \quad (54)$$

Из соотношений (50)

$$\frac{dX(u)}{du} = \frac{cnu}{(2 + cn^2u)^2} [\text{snudnu} \cos \psi(u) - \sqrt{3}(2 + cn^2u) \sin \psi(u)], \quad (55)$$

$$\frac{dY(u)}{du} = \frac{cnu}{(2 + cn^2u)^2} [\text{snudnu} \sin \psi(u) + \sqrt{3}(2 + cn^2u) \cos \psi(u)], \quad (56)$$

$$\frac{dZ(u)}{du} = -\frac{2\sqrt{2}}{(2 + cn^2u)^2} (2 - cn^2u) \text{snudnu}. \quad (57)$$

На окружности с радиусом  $\frac{1}{3}$  функции  $\text{sn}u = 0$ ,  $\text{cnu} = \pm 1$  (знак плюс отвечает точкам  $N_0, N_4$  на годографе (49), знак минус – точке  $N_2$ ). Из (55)–(57) устанавливаем, что  $\frac{dZ(u)}{du} = 0$ , т.е. вектор (54) ортогонален оси  $O_\zeta$  ( $\frac{dX(u)}{du} \neq 0$ ,  $\frac{dY(u)}{du} \neq 0$ ). На экваториальной окружности с радиусом  $\rho = 1$  функции  $\text{sn}u$  и  $\text{cnu}$

таковы:  $\sin u = 1$ ,  $\cos u = 0$ ; поэтому в точках  $N_1$  и  $N_3$  имеем  $\frac{dX(u)}{du} = 0$ ,  $\frac{dY(u)}{du} = 0$ ,  $\frac{dZ(u)}{du} = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$ . Следовательно, в точках  $N_1$  и  $N_3$  вектор  $\frac{d\vec{z}(u)}{du}$  коллинеарен оси  $Oz$ .

Автор выражает благодарность Горру Г.В. за постановку задачи и советы в ходе проведенного исследования.

1. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика / Г.К. Суслов. – М.–Л.: Гостехиздат. – 1946. – 655 с.
2. *Горр Г.В.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние / Г.В. Горр, Л.В. Кудряшова, Л.А. Степанова. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
3. *Гашененко И.Н.* Классические задачи динамики твердого тела / И.Н. Гашененко, Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – Киев: Наук. думка, 2012. – 402 с.
4. *Poinsot L.* Theorie nouvelle e la rotation des corp / L. Poinsot // J. Math. Pures et Appl. – 1851. – Vd. 1, 16. – P. 289–336.
5. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку / П.В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, вып. 3. – С. 502–507.
6. *Горр Г.В.* Об одном подходе в применении теорем Паунсо кинематического истолкования движения тела с неподвижной точкой / Г.В. Горр // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 26–36.
7. *Стеклов В.А.* Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку / В.А. Стеклов // Тр. отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1899. – **10**, вып. 1. – С. 1–3.
8. *Докшевич А.И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона / А.И. Докшевич. – Киев: Наук. думка, 1992. – 168 с.
9. *Горр Г.В.* О кинематическом истолковании движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой / Г.В. Горр, А.И. Синенко // Прикл. математика и механика. – 2014. – **20**, вып. 3. – С. 334–345.
10. *Горр Г.В.* О движении тяжелого твердого тела в двух частных случаях решения С.В. Ковалевской / Г.В. Горр, Е.К. Щетинина // Нелинейная динамика. – 2018. – **14**, № 1. – С. 123–138.
11. *Горр Г.В.* Кинематическое истолкование движения тела в одном частном случае решения Горячева–Чашгина / Г.В. Горр, Д.А. Данилюк, Д.Н. Ткаченко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017. – №3–4 (60–61). – С. 19–32.
12. *Yehia H.M.* Goriachev’s solution in the dynamics of a rigid body about a fixed point / H.M. Yehia // Механика твердого тела. – 2018. – Вып. 48. – С. 106–116.
13. *Горр Г.В.* О движении оси симметрии твердого тела под действием потенциальных сил в случае трех инвариантных соотношений / Г.В. Горр // Механика твердого тела. – 2019. – Вып. 49. – С. 10–23.
14. *Мазнев А.В.* Исследование движения главных осей инерции твердого тела с неподвижной точкой в случае регулярных прецессий / А.В. Мазнев // Механика твердого тела. – 2020. – Вып. 50. – С. 43–55.
15. *Мазнев А.В.* О движении главных осей инерции в случае прецессионно-изоконических движений гиростата под действием потенциальных сил / А.В. Мазнев // Механика твердого тела. – 2021. – Вып. 51. – С. 22–38.
16. *Ковалевская С.В.* Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки В кн. Ковалевская С.В. Научные работы. (Классики науки). – М.: Изд-во АН СССР, 1948. – С. 15–220.
17. *Млодзеевский Б.К.* Об одном случае движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки / Б.К. Млодзеевский // Мат. сборник. – 1986. – Т. 18, вып. 1. – С. 78–85.
18. *Харламов П.В.* Движение гироскопа С.В. Ковалевской в случае Б.К. Млодзеевского /



*О движении главной оси эллипсоида инерции в частном случае решения С.В. Ковалевской*

- П.В. Харламов // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 7. – С. 9–17.
19. Горр Г.В. Об одном случае движения тяжелого твердого тела в решении С.В. Ковалевской / Г.В. Горр, А.Я. Савченко // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 66–73.
  20. Гашененко И.Н. Один частный случай движения гироскопа С.В. Ковалевской / И.Н. Гашененко, В.Н. Касяник // Механика твердого тела. – 1983. – Вып. 15. – С. 31–34.
  21. Горр Г.В. Комплексный подход в истолковании движения твердого тела, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горр // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2021. – № 6. – С. 58–73.

**D.N. Tkachenko**

**On the motion of the main axis of the ellipsoid of inertia in the special case of S.V. Kovalevskaya's solution.**

Previously, the motion of the Kovalevskaya gyroscope was studied either using the direct Poinso method or using a modified Poinso method. In this article, the properties of motion of the main axis of the ellipsoid of inertia of a body in a fixed space are investigated. It is shown that this movement has a periodic character.

**Keywords:** *an integrated approach, interpretation of the movement, Euler angles, Poinso method.*

*Получено 29.09.2023*

## МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

---

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2023-3-16-27

EDN:GXANAZ



©2023. Н.С. Бондаренко<sup>1</sup>, А.С. Гольцев<sup>2</sup>

### ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ ИЗГИБА ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН НА БАЗЕ $\{1,0\}$ -АППРОКСИМАЦИИ С УЧЕТОМ «ГИПОТЕТИЧЕСКОГО» МОДУЛЯ СДВИГА

На базе обобщённой теории в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации построено решение задачи статики ортотропных пластин при учете «гипотетического» модуля сдвига. Рассмотрено действие сосредоточенной силы, вызывающей состояние изгиба. Исследовано влияние механических характеристик ортотропного материала пластины на величину обобщённых перерезывающих сил.

**Ключевые слова:** ортотропная пластина, сосредоточенная сила, «гипотетический» модуль сдвига,  $\{1,0\}$ -аппроксимация, двумерное интегральное преобразование Фурье, специальная  $G$ -функция.

**Введение.** Тонкостенные конструкции в виде пластин и оболочек находят широкое применение в различных отраслях промышленности: строительстве, судостроении, авиационной и ракетно-космической отрасли и т. п. В настоящее время в проектируемых тонкостенных конструкциях всё чаще используются композиционные материалы, обладающие выраженной анизотропией упругих свойств. Определение напряжённо-деформированного состояния (НДС) таких конструкций в рамках классической теории сопряжено со значительными погрешностями, поскольку гипотезы Кирхгофа-Лява не позволяют учитывать поперечные сдвиги и обжатие. Использование современных композиционных ма-

---

<sup>1</sup>Бондаренко Наталья Сергеевна – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. прикладной механики и компьютерных технологий ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: n.bondarenko@donnu.ru.

Bondarenko Natalya Sergeevna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Applied Mechanics and Computer Technologies.

<sup>2</sup>Гольцев Аркадий Сергеевич – доктор физ.-мат. наук, проф., зав. каф. прикладной механики и компьютерных технологий ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: a.s.goltsev@mail.ru.

Goltsev Arkady Sergeevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Applied Mechanics and Computer Technologies.

териалов обуславливает необходимость разработки новых математических моделей, применяемых при проведении прочностных расчётов тонкостенных элементов конструкций. При этом важное значение имеют проблемы расчёта пластин и оболочек с концентраторами напряжений, например, подверженных сосредоточенным силовым и тепловым воздействиям.

Вопросам статики и динамики пластин и оболочек при локальных термосиловых воздействиях посвящено значительное количество публикаций последних лет. Так, в работе И.И. Петрова, Д.О. Сердюка, П.Д. Скопинцева [1] исследуется круговая цилиндрическая оболочка с постоянной толщиной, на боковую поверхность которой воздействует нестационарная нагрузка. Предполагается, что материал оболочки упругий и ортотропный, с симметрией относительно срединной поверхности оболочки. В качестве модели оболочки приняты гипотезы Кирхгофа-Лява. Фундаментальные решения построены для цилиндрической оболочки большой протяжённости и для шарнирно опертой по торцам цилиндрической оболочки.

Целью исследования, проводимого в публикации П.Г. Великанова, Н.И. Куканова, Д.М. Халитовой [2], является развитие непрямого метода граничных элементов (МГЭ) для решения задач деформирования изотропных пластин на упругом основании со сложным контуром в условиях термомеханического нагружения (сосредоточенные, распределённые нагрузки и температурные поля) при различных граничных условиях. При этом деформирование линейно-упругой пластинки описывается моделью, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява. Для решения поставленной задачи на базе МГЭ предварительно было получено фундаментальное решение задачи изгиба изотропной пластины на упругом основании Винклера и Пастернака-Власова.

В статье В.В. Фирсанова, А.Х. Во [3] рассматривается вариант уточнённой теории расчёта НДС продольно подкреплённых цилиндрических оболочек под действием локальной осесимметричной нагрузки. Перемещения оболочки аппроксимируются полиномами более высокой степени по отношению к классической теории типа Кирхгофа-Лява, Тимошенко-Рейсснера.

В публикации Б.Д. Аннина, Ю.М. Волчкова [4] с использованием модифицированных уравнений упругого слоя построены уравнения слоистых ортотропных и трансверсально-изотропных пластин. Выполнено численное моделирование НДС слоистых пластин и проведено сравнение полученных численных решений с аналитическими решениями.

Основной целью настоящей работы является определение обобщённых перерезывающих сил, описываемых фундаментальным решением задачи изгиба ортотропной пластины на базе  $\{1,0\}$ -аппроксимации. Данная работа представляет собой продолжение исследования [5], в рамках которого были найдены обобщённые перемещения – фундаментальное решение задачи статики для случая изгиба ортотропной пластины в рамках  $\{1,0\}$ -аппроксимации.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим ортотропную пластину толщины  $2h$  в безразмерной системе координат  $Ox_1 x_2 x_3$ , отнесенных к параметру полутолщи-

ны пластины  $h$ . Пластина подвержена действию вертикальной сосредоточенной силы, приложенной в начале координат.

Система уравнений НДС ортотропных пластин на базе  $\{1,0\}$ -аппроксимации получена методом И.Н. Векуа на основе разложения искомым и заданных функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра от поперечной координаты.

В частности, компоненты вектора объёмной силы имеют вид:

$$F_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{2}m_i(x_1, x_2)P_1(x_3) \quad (i = 1, 2);$$

$$F_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}q(x_1, x_2)P_0(x_3),$$

где  $P_0(x_3) = 1$ ,  $P_1(x_3) = x_3$  – полиномы Лежандра.

Система дифференциальных уравнений  $\{1,0\}$ -аппроксимации, описывающая напряженное состояние при изгибе, включает [6] следующие соотношения.

- Уравнения связи усилий и перемещений

$$\begin{aligned} M_1 &= D_1 \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \nu_{21} \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} \right); & M_2 &= D_2 \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \nu_{12} \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} \right); \\ H &= D_{12} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right); & Q_m &= \Lambda_m \left( \gamma_m + \frac{\partial w_0}{\partial x_m} \right) \quad (m = 1, 2). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\gamma_1, \gamma_2, w_0$  – обобщённые перемещения пластины, из которых  $\gamma_1, \gamma_2$  являются аналогами углов поворота нормали,  $w_0$  – аналог прогиба срединной поверхности;  $M_1, M_2, H_{12}$  – обобщённые моменты, являющиеся аналогами изгибающих и крутящего моментов;  $Q_1, Q_2$  – обобщённые усилия, являющиеся аналогами перерезывающих сил;

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; & D_2 &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; & D_{12} &= \frac{2G_{12}}{3E}; \\ \Lambda_1 &= \frac{5G_{13}}{3E}; & \Lambda_2 &= \frac{5G_{23}}{3E}; & E &= \sqrt{E_1 E_2}, \end{aligned}$$

где  $E_1, E_2$  – модули Юнга для направлений  $x_1, x_2$  соответственно;  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$  – модули сдвига, характеризующие изменение углов между главными направлениями  $x_1$  и  $x_2, x_1$  и  $x_3, x_2$  и  $x_3$  соответственно;  $\nu_{12}, \nu_{21}$  – коэффициенты Пуассона.

Между упругими постоянными существует зависимость  $E_2\nu_{12} = E_1\nu_{21}$ , из которой следует соотношение  $D_2\nu_{12} = D_1\nu_{21}$ .

Обобщённые моменты в уравнениях (1) отнесены к величине  $Eh^2$ , а обобщённые перерезывающие силы – отнесены к  $Eh$ .

- Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_2} - Q_1 + m_1 = 0; \quad \frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_1} - Q_2 + m_2 = 0; \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + q = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Математической моделью сосредоточенных воздействий в механике является дельта-функция Дирака. Она фигурирует в качестве функций нагрузки в правых частях разрешающих уравнений. Фундаментальные решения системы (1), (2) имеют определённый механический смысл – это решения задач о действии сосредоточенных сил на пластину [7]. Поэтому компоненты вектора объёмной силы в данном исследовании выбираются в виде

$$m_j(x_1, x_2) = m_j^* \delta(x_1, x_2) \quad (j = 1, 2); \quad q(x_1, x_2) = q^* \delta(x_1, x_2), \quad (3)$$

где  $\delta(x_1, x_2)$  – двумерная дельта-функция Дирака;  $m_j^* = \text{const}$ ;  $q^* = \text{const}$ .

При проведении всех дальнейших преобразований предполагается возможность введения «гипотетического» модуля сдвига [8]:

$$G_{12} = \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2(1 + \sqrt{\nu_{12} \nu_{21}})}. \quad (4)$$

Равенство (4) позволяет установить такую физическую аналогию между изотропией и ортотропией материала:

$$E \leftrightarrow \sqrt{E_1 E_2}; \quad \nu \leftrightarrow \sqrt{\nu_{12} \nu_{21}},$$

т. е. усреднённые в некотором смысле механические характеристики ортотропной пластины соответствуют характеристикам изотропной пластины.

Исследованию различных аспектов возможности применения модели «приведённой» ортотропии (4) при расчётах НДС ортотропных оболочек, подверженных локальным тепловым воздействиям, на базе классической теории посвящены публикации Н.В. Дергачёвой [9, 10].

**2. Методика решения задачи.** Подставляя соотношения упругости в перемещениях (1) в уравнения равновесия (2), получим систему уравнений равновесия в перемещениях:

$$L_{i1}\gamma_1 + L_{i2}\gamma_2 + L_{i3}w_0 = -m_i \quad (i = 1, 2); \quad L_{31}\gamma_1 + L_{32}\gamma_2 + L_{33}w_0 = q, \quad (5)$$

где правые части имеют вид (3);  $L_{ij}$  – дифференциальные операторы второго порядка вида

$$\begin{aligned} L_{11} = D_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \Lambda_1; \quad L_{12} = L_{21} = (\nu_{21} D_1 + D_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}; \\ L_{13} = L_{31} = -\Lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1}; \quad L_{22} = D_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + D_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \Lambda_2; \end{aligned}$$

$$L_{23} = L_{32} = -\Lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_2}; \quad L_{33} = - \left( \Lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \Lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right).$$

Применяя двумерное интегральное преобразование Фурье [11] к соотношениям (5), получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\mathbf{B}_1 \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1 \\ \tilde{\gamma}_2 \\ \tilde{w}_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} m_1^* \\ m_2^* \\ -q^* \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} D_1 \xi_1^2 + D_{12} \xi_2^2 + \Lambda_1 & (\nu_{21} D_1 + D_{12}) \xi_1 \xi_2 & -i \Lambda_1 \xi_1 \\ (\nu_{21} D_1 + D_{12}) \xi_1 \xi_2 & D_{12} \xi_1^2 + D_2 \xi_2^2 + \Lambda_2 & -i \Lambda_2 \xi_2 \\ -i \Lambda_1 \xi_1 & -i \Lambda_2 \xi_2 & -\Lambda_1 \xi_1^2 - \Lambda_2 \xi_2^2 \end{bmatrix};$$

$\xi_1, \xi_2$  – координаты точки в пространстве трансформант;  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{w}_0$  – трансформанты обобщённых перемещений.

В результате замены независимых переменных в пространстве оригиналов и трансформант

$$\eta_1 = \sqrt{\Lambda_1} \xi_1; \quad \eta_2 = \sqrt{\Lambda_2} \xi_2; \quad y_1 = \frac{x_1}{\sqrt{\Lambda_1}}; \quad y_2 = \frac{x_2}{\sqrt{\Lambda_2}}, \quad (7)$$

СЛАУ (6) примет вид:

$$\mathbf{B}_2 \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1 \sqrt{\Lambda_1} \\ \tilde{\gamma}_2 \sqrt{\Lambda_2} \\ \tilde{w}_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{m_1^*}{\sqrt{\Lambda_1}} \\ \frac{m_2^*}{\sqrt{\Lambda_2}} \\ -q^* \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} A_1 \eta_1^2 + A_4 \eta_2^2 + 1 & A_3 \eta_1 \eta_2 & -i \eta_1 \\ A_3 \eta_1 \eta_2 & A_4 \eta_1^2 + A_2 \eta_2^2 + 1 & -i \eta_2 \\ -i \eta_1 & -i \eta_2 & -\eta_1^2 - \eta_2^2 \end{bmatrix};$$

$$A_1 = \frac{D_1}{\Lambda_1^2}; \quad A_2 = \frac{D_2}{\Lambda_2^2}; \quad A_3 = \frac{\nu_{21} D_1 + D_{12}}{\Lambda_1 \Lambda_2}; \quad A_4 = \frac{D_{12}}{\Lambda_1 \Lambda_2}.$$

Решение СЛАУ (8) может быть записано в форме:

$$\tilde{\gamma}_1 = \sum_{k=0}^{11} \alpha_{1k} \tilde{\Psi}_k; \quad \tilde{\gamma}_2 = \sum_{k=0}^{11} \alpha_{2k} \tilde{\Psi}_k; \quad \tilde{w}_0 = \sum_{k=0}^{11} \alpha_{3k} \tilde{\Psi}_k, \quad (9)$$

где

$$\tilde{\Psi}_0 = \frac{1}{\tilde{\Delta}_1}; \quad \tilde{\Psi}_1 = \frac{1}{\tilde{\Delta}_2}; \quad \tilde{\Psi}_2 = \frac{i \eta_1}{\tilde{\Delta}_2}; \quad \tilde{\Psi}_3 = \frac{i \eta_2}{\tilde{\Delta}_2}; \quad \tilde{\Psi}_4 = \frac{\eta_1^2}{\tilde{\Delta}_2};$$

$$\tilde{\Psi}_5 = \frac{\eta_2^2}{\tilde{\Delta}_2}; \quad \tilde{\Psi}_6 = \frac{\eta_1 \eta_2}{\tilde{\Delta}_2}; \quad \tilde{\Psi}_7 = \frac{\eta_1^2}{\tilde{\Delta}_1 \tilde{\Delta}_2}; \quad \tilde{\Psi}_8 = \frac{\eta_2^2}{\tilde{\Delta}_1 \tilde{\Delta}_2}; \quad \tilde{\Psi}_9 = \frac{\eta_1 \eta_2}{\tilde{\Delta}_1 \tilde{\Delta}_2};$$

$$\tilde{\Psi}_{10} = \frac{i\eta_1^2\eta_2}{\tilde{\Delta}_1\tilde{\Delta}_2}; \quad \tilde{\Psi}_{11} = \frac{i\eta_1\eta_2^2}{\tilde{\Delta}_1\tilde{\Delta}_2}; \quad (10)$$

$$\tilde{\Delta}_1 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + 1/A_4; \quad \tilde{\Delta}_2 = (\sqrt{\Lambda_1}\eta_1^2 + \sqrt{\Lambda_2}\eta_2^2)^2.$$

Ненулевые коэффициенты в соотношениях (9) определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{\Lambda_2}} &= \frac{\alpha_{23}}{\sqrt{\Lambda_1}} = \frac{q^*}{2\pi\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}}; & \alpha_{14} &= -\frac{\alpha_{32}}{\sqrt{\Lambda_1}} = \frac{m_1^*}{2\pi\Lambda_1}; \\ \frac{\alpha_{16}}{m_2^*} &= \frac{\alpha_{26}}{m_1^*} = -\frac{A_3}{2\pi A_4\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}}; & \alpha_{18} &= -\frac{\alpha_{15}}{A_4} = -\frac{m_1^*A_2}{2\pi\Lambda_1A_4^2}; \\ \frac{\alpha_{19}}{m_2^*} &= \frac{\alpha_{29}}{m_1^*} = \frac{1 + A_3/A_4}{2\pi A_4\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}}; & \frac{\alpha_{3,11}}{m_1^*} &= -\frac{\alpha_{1,11}}{q^*} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Lambda_1}} \frac{A_3 - A_2 + A_4}{A_4}; \\ \alpha_{25} &= -\frac{\alpha_{33}}{\sqrt{\Lambda_2}} = \frac{m_2^*}{2\pi\Lambda_2}; & \alpha_{27} &= -\frac{\alpha_{24}}{A_4} = -\frac{m_2^*A_1}{2\pi\Lambda_2A_4^2}; \\ \frac{\alpha_{3,10}}{m_2^*} &= -\frac{\alpha_{2,10}}{q^*} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Lambda_2}} \frac{A_3 - A_1 + A_4}{A_4}; & \alpha_{30} &= \alpha_{31} = \frac{q^*}{2\pi}; \\ & & \frac{\alpha_{37}}{A_1} &= \frac{\alpha_{38}}{A_2} = \frac{q^*}{2\pi A_4}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для нахождения оригиналов функций  $\tilde{\Psi}_1$ – $\tilde{\Psi}_6$ , определяемых соотношениями (10), применяется формула обращения для двумерного интегрального преобразования Фурье [11]. Применение методики обращения может быть продемонстрировано на примере функции  $\tilde{\Psi}_4$ . Для других трансформант  $\tilde{\Psi}_1$ – $\tilde{\Psi}_6$  все преобразования будут аналогичными. С учётом замены переменных (7), получим

$$\Psi_4 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_4 e^{-i(\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2)} d\eta_1 d\eta_2. \quad (12)$$

Сделаем новую замену переменных в двойных интегралах (12) (в пространстве оригиналов и трансформант):

$$\zeta_1 = \sqrt[4]{A_1}\eta_1; \quad \zeta_2 = \sqrt[4]{A_2}\eta_2; \quad z_1 = \frac{y_1}{\sqrt[4]{A_1}}; \quad z_2 = \frac{y_2}{\sqrt[4]{A_2}}. \quad (13)$$

Тогда соотношение (12) после выделения в интегралах чётных и нечётных частей примет вид:

$$\Psi_4 = \frac{2}{\pi\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}\sqrt[4]{A_1^3A_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta_1^2 \cos \zeta_1 z_1 \cos \zeta_2 z_2}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2} d\zeta_1 d\zeta_2. \quad (14)$$

Следующий этап реализации разрабатываемого подхода заключается в переходе в (14) к полярным координатам по формулам

$$z_1 = r \cos \varphi; \quad z_2 = r \sin \varphi; \quad \zeta_1 = \rho \cos \theta; \quad \zeta_2 = \rho \sin \theta, \quad (15)$$

и применении разложения Якоби-Ангера [12]

$$\cos(x \cos \varphi \cos \theta) \cos(x \sin \varphi \sin \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-1)^n J_{2n}(x) \cos 2n\varphi \cos 2n\theta, \quad (16)$$

где  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\varepsilon_n = 2$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ );  $J_\nu(x)$  – функция Бесселя первого рода порядка  $\nu$ .

Тогда с учётом значения интеграла

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \cos 2n\theta d\theta = \begin{cases} \pi/4, & n = 0; \\ \pi/8, & n = 1; \\ 0, & n = 2, 3, 4, \dots \end{cases} \quad (17)$$

выражение (14) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \Psi_4 &= \frac{1}{2\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} \sqrt[4]{A_1^3 A_2}} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{J_0(r\rho)}{\rho} d\rho - \cos 2\varphi \int_0^{\infty} \frac{J_2(r\rho)}{\rho} d\rho \right\} = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} \sqrt[4]{A_1^3 A_2}} \left( \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \ln \frac{\gamma r}{2} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\ln \gamma = 0,5772\dots$  – постоянная Эйлера.

В формуле (18) при вычислении значения интегралов использовалось понятие конечной части (f.p.) от расходящегося интеграла [13] и представления табличных интегралов [14].

Аналогичным образом определяем функции  $\Psi_1$ – $\Psi_3$ ,  $\Psi_5$ ,  $\Psi_6$ :

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= -\frac{1}{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} \sqrt[4]{A_1 A_2}} \frac{r^2}{4} \left( \frac{1}{2} - \ln \frac{\gamma r}{2} \right); \\ \Psi_2 &= \frac{1}{2\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} \sqrt[4]{A_1^2 A_2}} r \cos \varphi \left( \frac{1}{2} - \ln \frac{\gamma r}{2} \right); \\ \Psi_3 &= \frac{1}{2\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} \sqrt[4]{A_1 A_2^2}} r \sin \varphi \left( \frac{1}{2} - \ln \frac{\gamma r}{2} \right); \\ \Psi_5 &= \frac{1}{2\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} \sqrt[4]{A_1 A_2^3}} \left( \frac{1}{2} \cos 2\varphi - \ln \frac{\gamma r}{2} \right); \\ \Psi_6 &= -\frac{\sin 2\varphi}{4\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} A_1 A_2}, \end{aligned} \quad (19)$$

где, с учётом (7), (13), (15),

$$r = \sqrt{\frac{x_1^2}{\Lambda_1 \sqrt{A_1}} + \frac{x_2^2}{\Lambda_2 \sqrt{A_2}}}; \quad \cos \varphi = \frac{x_1}{\sqrt{\Lambda_1} \sqrt[4]{A_1} r}; \quad \sin \varphi = \frac{x_2}{\sqrt{\Lambda_2} \sqrt[4]{A_2} r}.$$



Методика обращения трансформант  $\tilde{\Psi}_0, \tilde{\Psi}_7 - \tilde{\Psi}_{11}$  может быть продемонстрирована на примере функции  $\tilde{\Psi}_7$ . В результате применения формулы обращения для двумерного интегрального преобразования Фурье [11] к трансформанте  $\tilde{\Psi}_7$  и выделения в интегралах чётных и нечётных частей, можно получить

$$\Psi_7 = \frac{2}{\pi\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\eta_1^2 \cos \eta_1 y_1 \cos \eta_2 y_2}{(\eta_1^2 + \eta_2^2 + 1/A_4) (\sqrt{A_1}\eta_1^2 + \sqrt{A_2}\eta_2^2)} d\eta_1 d\eta_2. \quad (20)$$

При переходе к полярным координатам по формулам

$$y_1 = r_0 \cos \varphi_0; \quad y_2 = r_0 \sin \varphi_0; \quad \eta_1 = \rho \cos \theta; \quad \eta_2 = \rho \sin \theta,$$

с учётом разложения Якоби-Ангера (16) и значений интегралов от тригонометрических функций (17), соотношение (20) примет вид:

$$\Psi_7 = \frac{2}{\pi\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos 2n\varphi_0 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2n\theta \cos^2 \theta d\theta}{f(\theta)} \int_0^\infty \frac{J_{2n}(r_0\rho) d\rho}{\rho(\rho^2 + 1/A_4)},$$

где

$$f(\theta) = \left( \sqrt{A_1} \cos^2 \theta + \sqrt{A_2} \sin^2 \theta \right)^2; \quad r_0 = \sqrt{\frac{x_1^2}{\Lambda_1} + \frac{x_2^2}{\Lambda_2}};$$

$$\cos \varphi_0 = \frac{x_1}{\sqrt{\Lambda_1} r_0}; \quad \sin \varphi_0 = \frac{x_2}{\sqrt{\Lambda_2} r_0}.$$

При сравнении интегралов, входящих в выражения для  $\Psi_7$ , с интегральным представлением специальной G-функции [12]

$$G_{n,\nu} = (-1)^n \left(\frac{r}{2}\right)^{\nu-n} \int_0^\infty \frac{\rho^{\nu-n+1} J_{\nu+n}(r\rho)}{\rho^2 + z^2} d\rho;$$

$$r > 0; \quad \operatorname{Re} z > 0; \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < n + 3/2,$$

можно заметить, что

$$\Psi_7 = -\frac{2A_4}{\pi\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} I_{7,0} \left\{ \ln \frac{\gamma r_0}{2} + G_{0,0} \left( \frac{r_0}{\sqrt{A_4}} \right) \right\} -$$

$$-\frac{r_0^2}{\pi\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} \sum_{n=1}^{\infty} I_{7,n} \cos 2n\varphi_0 G_{n+1,n-1} \left( \frac{r_0}{\sqrt{A_4}} \right). \quad (21)$$

Аналогично можно найти

$$\Psi_0 = \frac{1}{2\pi} G_{0,0} \left( \frac{r_0}{\sqrt{A_4}} \right); \quad \Psi_8 = -\frac{2A_4}{\pi\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} I_{8,0} \left\{ \ln \frac{\gamma r_0}{2} + G_{0,0} \left( \frac{r_0}{\sqrt{A_4}} \right) \right\} -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{r_0^2}{\pi\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} \sum_{n=1}^{\infty} I_{8,n} \cos 2n\varphi_0 G_{n+1,n-1} \left( \frac{r_0}{\sqrt{A_4}} \right); \\
 \Psi_9 &= -\frac{r_0^2}{2\pi\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} \sum_{n=1}^{\infty} I_{9,n} \sin 2n\varphi_0 G_{n+1,n-1} \left( \frac{r_0}{\sqrt{A_4}} \right); \\
 \Psi_{10} &= -\frac{2r_0}{\pi\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} \sum_{n=0}^{\infty} I_{10,n} \sin (2n+1)\varphi_0 G_{n+1,n} \left( \frac{r_0}{\sqrt{A_4}} \right); \\
 \Psi_{11} &= -\frac{2r_0}{\pi\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} \sum_{n=0}^{\infty} I_{11,n} \cos (2n+1)\varphi_0 G_{n+1,n} \left( \frac{r_0}{\sqrt{A_4}} \right), \tag{22}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 I_{7,n} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta \cos 2n\theta d\theta}{f(\theta)}; & I_{8,n} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta \cos 2n\theta d\theta}{f(\theta)}; \\
 I_{9,n} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta \sin 2n\theta d\theta}{f(\theta)}; & I_{10,n} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta \sin (2n+1)\theta d\theta}{f(\theta)}; \\
 I_{11,n} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta \sin^2 \theta \cos (2n+1)\theta d\theta}{f(\theta)}. \tag{23}
 \end{aligned}$$

Таким образом, оригиналы обобщённых перемещений имеют вид

$$\gamma_1 = \sum_{k=0}^{11} \alpha_{1k} \Psi_k; \quad \gamma_2 = \sum_{k=0}^{11} \alpha_{2k} \Psi_k; \quad w_0 = \sum_{k=0}^{11} \alpha_{3k} \Psi_k, \tag{24}$$

где функции  $\Psi_k$  определяются соотношениями (19), (21), (22), а коэффициенты – соотношениями (11).

При подстановке выражения для обобщённых перемещений (24) в соотношения связи усилий и перемещений (1), можно получить

$$\begin{aligned}
 M_1 &= D_1 \left( \sum_{k=0}^{11} \alpha_{1k} \Psi_{k,1} + \nu_{21} \sum_{k=0}^{11} \alpha_{2k} \Psi_{k,2} \right); \\
 M_2 &= D_2 \left( \sum_{k=0}^{11} \alpha_{2k} \Psi_{k,2} + \nu_{12} \sum_{k=0}^{11} \alpha_{1k} \Psi_{k,1} \right); \\
 H_{12} &= D_{12} \left( \sum_{k=0}^{11} \alpha_{1k} \Psi_{k,2} + \sum_{k=0}^{11} \alpha_{2k} \Psi_{k,1} \right);
 \end{aligned}$$

$$Q_m = \Lambda_m \left( \sum_{k=0}^{11} \alpha_{mk} \Psi_k + \sum_{k=0}^{11} \alpha_{3k} \Psi_{k,m} \right) \quad (m = 1, 2), \quad (25)$$

где

$$\Psi_{k,m} = \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_m} \quad (k = \overline{1, 11}; m = 1, 2).$$

**3. Анализ результатов численных исследований.** Проведены численные исследования влияния значений упругих констант ортотропного материала пластины на обобщённые перерезывающие силы (25). Значения коэффициентов в правых частях (3) уравнений равновесия в перемещениях (5) были выбраны в виде:  $m_1^* = m_2^* = q^* = 1$ .

Анализ построенных фундаментальных решений проведён на примере изотропного и ортотропного материалов пластины, механические характеристики которых приведены в таблице 1. В качестве изотропного материала рассмотрена равнопрочная стеклоткань типа 120 [15], а в качестве ортотропного – стеклопластик [16].

Таблица 1. Характеристики материалов

Материал	$E_1$ , ГПа	$E_2$ , ГПа	$G_{12}$ , ГПа	$G_{13}$ , ГПа	$G_{23}$ , ГПа	$\nu_{12}$
Изотропный	73	73	30,4	30,4	30,4	0,2
Ортотропный	122	183	60	44,8	39,3	0,2

Для апробации рассматриваемой модели изгиба пластин было разработано программное приложение, с помощью которого построены графики обобщённых перерезывающих сил  $Q_{1,2}$  (рис. 1, 2). Вычисление интегралов (23) осуществлялось методом численного интегрирования Файлона.

Графики на рис. 1, 2 построены вдоль оси абсцисс ( $x_2 = 0$ ), при этом кривые 1 соответствуют изотропному материалу, а кривые 2 – ортотропному.

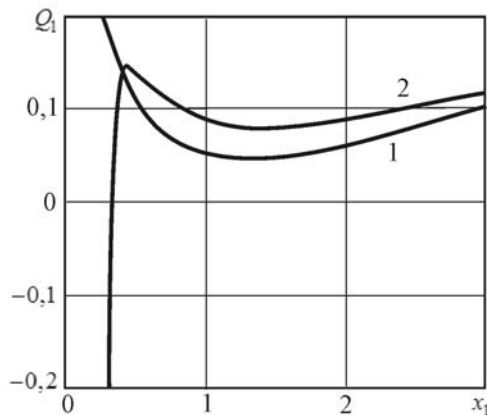


Рис. 1. Обобщённая перерезывающая сила  $Q_1$

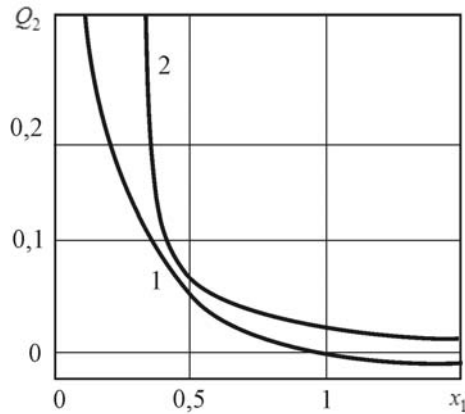


Рис. 2. Обобщённая перерезывающая сила  $Q_2$

Из рисунков 1, 2 видно, что механические характеристики материала пластины при учете «гипотетического» модуля сдвига (4) оказывают существенное влияние на величину обобщённых перерезывающих сил.

**Выводы.** Решена задача статики, описывающая состояние изгиба ортотропной пластины при учете «гипотетического» модуля сдвига. В основу рассматриваемой модели положены уравнения обобщённой теории пластин в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации. Дальнейшее уточнение полученных решений возможно за счёт удержания большего количества членов рядов разложений заданных и искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра, что возможно, например, в рамках  $\{1,2\}$ -аппроксимации.

На основе анализа приведённых выше графиков (рис. 1, 2) сделан вывод, что без учета параметров ортотропии материала при решении задач статики могут возникать значительные погрешности. Судя по графикам, максимальная погрешность в этом случае может достигать порядка 60% при  $x_1 > 0,5$ , а также значительно увеличиваться в окрестности начала координат.

Исследование проводилось по теме государственного задания (№ госрегистрации 1023031000025-7-1.1.1;1.1.2).

1. Петров И.И. Фундаментальные решения для ортотропной цилиндрической оболочки / И.И. Петров, Д.О. Сердюк, П.Д. Скопинцев // Труды МАИ. – 2022. – № 124. – 40 с.
2. Великанов П.Г. Использование непрямого метода граничных элементов для расчета изотропных пластин на упругом основании Винклера и Пастернака – Власова / П.Г. Великанов, Н.И. Куканов, Д.М. Халитова // Вестник Самарского университета. Естественно-научная серия. – 2021. – Т. 27, № 2. – С. 33–47.
3. Фирсанов В.В. Исследование продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной нагрузки по уточненной теории / В.В. Фирсанов, А.Х. Во // Труды МАИ. – 2018. – № 102. – 19 с.
4. Аннин Б.Д. Нелинейное деформирование цилиндрической панели ступенчато-переменной жёсткости на упругом основании методом граничных элементов / Б.Д. Аннин, Ю.М. Волчков // Актуальные проблемы механики сплошной среды. – Ижевск : ООО «Принт», 2020. – С. 15–19.

5. Бондаренко Н.С. Определение обобщённых перемещений в случае изгиба ортотропной пластины в рамках  $\{1,0\}$ -аппроксимации при наличии «гипотетического» модуля сдвига / Н.С. Бондаренко // Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в металлургии и машиностроении: материалы VI Дальневосточной конференции с международным участием, Комсомольск-на-Амуре, 5–7 октября 2022 г. / редкол.: А.И. Евстигнеев (отв. ред.) [и др.]. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2022. – С. 179–186.
6. Пелех Б.Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б.Л. Пелех, В.А. Лазько. – Киев: Наукова думка, 1982. – 296 с.
7. Шевченко В.П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек // Концентрация напряжений / Под ред. А.Н. Гузя, А.С. Космодамианского, В. П. Шевченко. – Киев: А.С.К., 1998. – 387 с. (Механика композитов: В 12 т. Т. 7). – С. 159–196.
8. Великанов П.Г. Математические аналогии для решения задач прочности, устойчивостей и колебаний ортотропных пластин и оболочек / П.Г. Великанов, Ю.П. Артюхин // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2022. – Т. 19, № 3. – С. 47–54.
9. Дергачева Н.В. Исследование термоупругих усилий и моментов при локальном тепловом нагреве ортотропной оболочки / Н.В. Дергачева // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. – 2010. – Вип. 2. – С. 71–76.
10. Дергачева Н.В. Исследование термоупругого состояния ортотропных оболочек при локальном тепловом нагреве / Н.В. Дергачева // Теоретическая и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 180–186.
11. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. – М.: Издательство иностранной литературы, 1955. – 668 с.
12. Хижняк В.К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учебное пособие / В.К. Хижняк, В.П. Шевченко. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.
13. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках / С. Лукасевич. – М.: Мир, 1982. – 544 с.
14. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 752 с.
15. Мельников Д.А. Теоретический расчет и экспериментальное определение модуля упругости и прочности стеклопластика ВПС-53/120 / Д.А. Мельников, А.А. Громова, А.Е. Раскутин, А.О. Курносов // Труды ВИАМ. – 2017. – № 1 (49). – С. 64–75.
16. Трещев А.А. Деформирование прямоугольных ортотропных пластин средней толщины из материалов, чувствительных к виду напряженного состояния / А.А. Трещев, М.А. Лапшина // Строительная механика и конструкции. – 2022. – № 3 (34). – С. 20–32.

**N.S. Bondarenko, A.S. Goltsev**

**Investigation of the bending state of orthotropic plates on the base of  $\{1,0\}$ -approximation in the presence of a «hypothetical» shear modulus.**

The solution of statics problem for orthotropic plates in the case of the presence of a «hypothetical» shear modulus is constructed on the base of the generalized theory in the version of  $\{1,0\}$ -approximation. The action of a concentrated force causing a bending state is considered. The influence of the mechanical characteristics of the orthotropic plate material on the value of the generalized shear forces is investigated.

**Keywords:** *orthotropic plate, concentrated force, «hypothetical» shear modulus,  $\{1,0\}$ -approximation, two-dimensional Fourier integral transform, special G-function.*

Получено 04.09.2023

УДК (669.788+660.234):539.371/372

doi:10.24412/0136-4545-2023-3-28-35

EDN:IKGRXV

©2023. Ж.Л. Глухова<sup>1</sup>, Т.А. Щеголева<sup>2</sup>

## ВОДОРОДОУПРУГИЕ ЭФФЕКТЫ В СИСТЕМАХ МЕ-Н

В настоящей статье дан анализ водородоупругих эффектов, как результата взаимосвязи поля упругих напряжений и концентрации водорода в металлах. Рассмотрено математическое описание влияния водородоупругих напряжений на диффузию водорода.

**Ключевые слова:** водородоупругость, водородоупругие эффекты, эффект Горского, эффект Льюиса, диффузионно-упругие эффекты.

**Введение и постановка задачи.** В связи с развитием водородной энергетики и водородных технологий постоянно возрастает интерес к проблемам взаимодействия водорода с металлами, определяющим широкое и безопасное вхождение этих технологий в жизнь. В частности, интенсивно развивается новая область материаловедения – водородная обработка материалов (ВОМ), ставящая своей целью улучшение структуры и свойств материалов путем применения водорода в современных методах обработки металлов, сплавов и интерметаллидов [1]. В основе некоторых видов ВОМ лежат водородоупругие эффекты, вызванные взаимосвязанностью влияния диффузионного перераспределения водорода в металле, с одной стороны, и эволюции в нем водородоупругих концентрационных (ВК-) напряжений, с другой. Известные водородоупругие эффекты – это разные проявления одного и того же более общего явления – явления водородоупругости.

В настоящей статье дан анализ водородоупругих эффектов, как результата взаимосвязи поля упругих напряжений и концентрации водорода в металлах. Рассмотрено математическое описание влияния водородоупругих напряжений на диффузию водорода.

**1. Эффект Льюиса.** «Uphill»-эффект, названный впоследствии именем Льюиса, был открыт при исследовании проникновения водорода через трубчатые мембраны из палладия и его сплавов. Он проявлялся в том, что внезап-

---

<sup>1</sup> Глухова Жанна Лукьяновна – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. физики ф-та металлургии и теплоэнергетики ДонНТУ, Донецк, e-mail: zhglukhova@yandex.ru.

Glukhova Zhanna Lukyanovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk National Technical University, Donetsk, Faculty of Metallurgy and Thermal Power Engineering, Chair of Physics.

<sup>2</sup> Щеголева Татьяна Александровна – ассистент каф. физики ф-та металлургии и теплоэнергетики ДонНТУ, Донецк, e-mail: physics@donntu.ru.

Shchegoleva Tat'yana Aleksandrovna – Assistant, Donetsk National Technical University, Donetsk, Faculty of Metallurgy and Thermal Power Engineering, Chair of Physics.

ное повышение или понижение содержания водорода на внешней поверхности мембраны, достигаемое изменением давления контактирующего газообразного водорода или электролитическими методами, приводило к первоначальным изменениям давления внутри трубки противоположным тем, что ожидалось по законам нормальной (по Фику) диффузии.

Например, внезапное дополнительное повышение содержания водорода на внешней поверхности трубки, вызванное электролитическим методом, приводило к начальному уменьшению давления водорода внутри нее. Объяснение данного явления заключается в изменении давления внутри трубки в результате обратного изгиба стенки трубки, вызванного расширением ее внешней части при поглощении водорода. Такой изгиб способствует протеканию восходящей («Uphill») диффузии водорода [2, 3] из области, сжатой у внутренней поверхности стенки трубки, к расширенной у внешней поверхности. По этой же причине внезапное понижение содержания водорода на внешней поверхности трубки приводит к повышению давления внутри трубки.

Следует подчеркнуть, что описанные выше эффекты проявляются при комнатной температуре лишь при высокой каталитической активности внутренней поверхности, когда легко достигается равновесие между газообразным водородом внутри трубки и растворенным в металле водородом.

**2. Эффект Горского.** В твердом растворе, не подвергающемся действию напряжений, равновесие наступает только тогда, когда растворенные атомы распределены статистически равномерно. Если внутри системы имеются флуктуации напряжения, то условия равновесия больше не соответствуют однородному распределению растворенных атомов. Следовательно, если увеличение концентрации какой-либо из компонент раствора сопровождается ростом постоянной решетки, то при равновесных условиях растяжение сопровождается увеличением концентрации [4]. Таким образом, флуктуации растяжения будут стремиться создать флуктуации концентрации. Релаксация будет происходить благодаря атомной диффузии, направленной против градиента концентрации. В.С. Горский впервые отметил, что такая диффузия приведет к неупругим деформациям в достаточно тонких пластинках (упругому последствию) [5]. Неупругие деформации в эффекте Горского являются обратимыми. Неупругость здесь понимается в том смысле, что кроме мгновенного (упругого) отклика существует также зависимый от времени неупругий отклик системы на внешнее воздействие [6]. Полную деформацию образца при этом можно представить в виде суммы упругой и неупругой (диффузионной) деформации.

Более полную теорию, построенную с теми же предположениями, что и теория Горского, опубликовал Конобеевский [7], применив ее для качественного объяснения некоторых экспериментально обнаруженных свойств бинарных сплавов. Конобеевский показал, что напряженное состояние, существующее в деформированном сплаве, может быть изменено не только за счет чисто механических процессов или рекристаллизации, но также и за счет процессов диффузии. При наличии разницы в атомных объемах компонентов твердого раствора

диффузионные потоки должны создавать перераспределение напряжений (релаксацию) или вызывать дополнительную деформацию (последствие). В свою очередь, напряжения могут и должны создавать концентрационные потоки, вызывая явление восходящей диффузии.

Таким образом, Горский в своей классической работе 1935 г. [5], а затем Конобеевский в 1943 г. [7] показали, что локальные градиенты упругих напряжений в кристаллических телах определяют диффузионный дрейф атомов, который может быть направлен в сторону, противоположную градиенту концентрации, то есть обрести характер восходящего потока. В эффекте Горского есть две численные величины, которые можно пронаблюдать и измерить: время релаксации неупругих деформаций  $\tau$  и релаксационная деформация (или релаксационная сила)  $\Delta_E$ .

Время релаксации неупругих деформаций  $\tau$  характеризуется временем, требуемым для установления градиента концентрации дефектов, который является причиной неупругой деформации. Так как деформация в режиме диффузионной неупругости определяется элементарными диффузионными актами, то данные о характерном времени релаксации  $\tau$  несут информацию о коэффициенте диффузии водорода в кристалле-матрице. Релаксационная деформация  $\Delta_E$  определяется как

$$\Delta_E = \frac{\varepsilon_{el}}{\varepsilon_{nel}},$$

где  $\varepsilon_{el}$  и  $\varepsilon_{nel}$  – неупругая деформация и, соответственно, внешняя упругая деформация. Релаксационная деформация, ее зависимость от температуры и концентрации, количественно описывают след дипольно-упругого тензора, температурную зависимость и зависимость от концентрации производной химического потенциала по концентрации водорода.

**3. Диффузионно-упругие эффекты.** Диффузионно-упругие эффекты проявляются в виде откликов линейных тел на зависимые от времени поля напряжений, возникающие во время диффузии атомов внедрения в решетке металла.

Наглядным проявлением таких эффектов является формоизменение металла под воздействием водорода [8-10]. При определенной геометрии образца (например, тонкая пластинка, проволока) и определенных условиях насыщения, вызывающих несимметричные градиенты концентрации водорода, водородоупругие напряжения приводят к изменению формы образцов.

В качестве примера можно привести изменение формы упругонапряженной палладиевой пластины при насыщении водородом в области температур, лежащих выше или вблизи критической точки начала гидридного превращения [8]. Воздействие водорода на упругонапряженную палладиевую пластину приводит к ее изгибу, имеющему обратимую и необратимую составляющие. Необратимая часть формоизменения  $\Delta y_{ост}$  обусловлена теми структурными изменениями в металле, которые при водородном воздействии вызваны собственно растворен-



ным водородом, градиентами его концентрации и перераспределением водорода из-за формирующихся дефектов. Формоизменение палладиевых пластин наблюдается и при их одностороннем насыщении водородом как из газовой фазы [9], так и при электролитическом наводороживании [10]. При одностороннем и резком насыщении водородом и при последующей дегазации в исследованном интервале температур и давлений водорода палладиевые пластины (рис. 1) в начальные моменты водородных воздействий (участки А→Б и Г→Д) имеют максимальные изгибы, которые со временем уменьшаются и принимают стационарные значения.

Основной причиной изгиба палладиевой пластины при одностороннем и резком насыщении водородом и при последующей дегазации является возникновение и релаксация водородных концентрационных напряжений. Обратимая часть формоизменения  $\Delta y_{обр}$  является прямым следствием наличия в образцах градиентов концентрации водорода. Остаточное формоизменение в первой части цикла водородного воздействия в основном связано с замедлением диффузионного транспорта водорода водородоупругими напряжениями без выравнивания концентрации водорода по толщине пластины за временной промежуток эксперимента. «Остаточные» градиенты – важная и, по-видимому, главная причина наблюдаемых остаточных формоизменений.

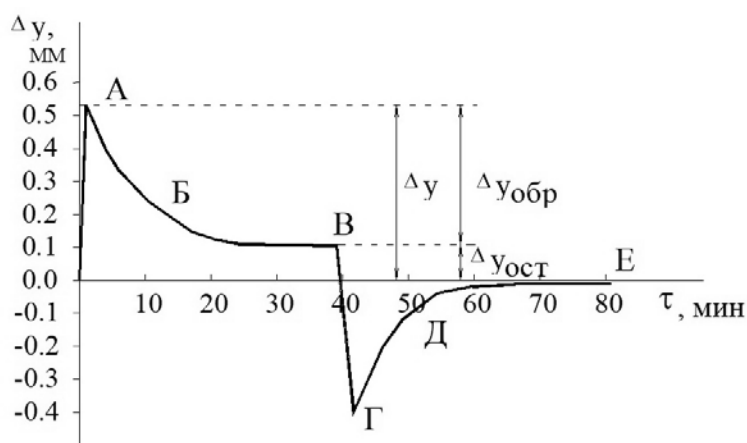


Рис. 1. Пример зависимости изгиба палладиевой пластины  $\Delta y$  от времени при одностороннем насыщении водородом (участок А, Б, В) и последующей дегазации (участок Г, Д, Е)

При электролитическом одностороннем насыщении водородом палладиевой пластины также наблюдаются максимальные изгибы в начальные моменты времени. Изгибы уменьшаются только при подключении обратной полярности. И в этом случае наблюдается остаточная деформация (рис. 2).

#### 4. Математическое описание влияния водородоупругих напряжений на диффузию водорода.

Как правило, математическое описание диффузии с учетом поля напряжений представлено только для решения частных задач. Обычно концентрацион-

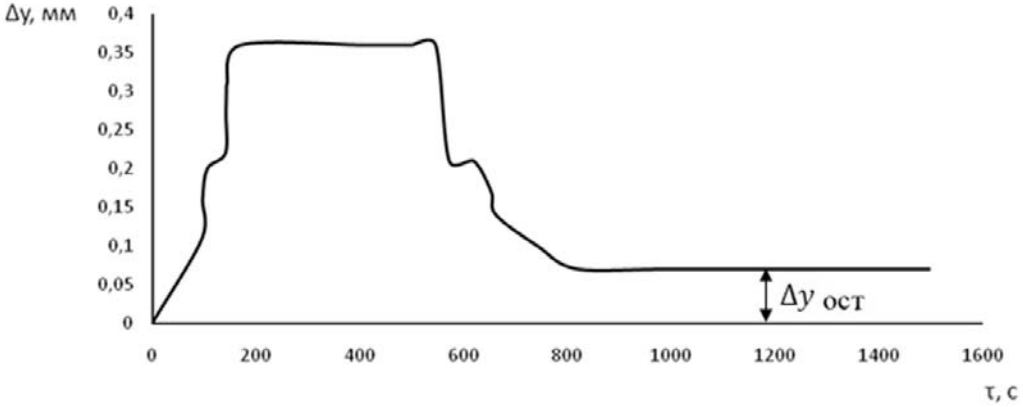


Рис. 2. Пример зависимости изгиба палладиевой пластины  $\Delta y$  от времени при одностороннем электролитическом насыщении водородом (0–500 с) и последующей обратной полярности (500–1500 с)

ные напряжения рассчитывали по аналогии с температурными напряжениями. Логичное и физически обоснованное решение данной задачи представлено в [11], где для расчета напряжений предложено использовать следующие соотношения:

$$\sigma_{xx} = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_{yy}(x, t) = \frac{EV}{3(1-\nu)} \left\{ \Delta c - \frac{1}{L} \int_0^L \Delta c dx - \frac{12}{L^3} \left( x - \frac{L}{2} \right) \int_0^L \Delta c \left( x - \frac{L}{2} \right) dx \right\}, \quad (2)$$

$$\sigma_{zz}(x, t) = \sigma_{yy}(x, t), \quad (3)$$

где  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  – компоненты тензора напряжений,  $V$  – парциальный молярный объем водорода,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\Delta c$  – изменение концентрации,  $L$  – толщина мембраны,  $x$  – пространственная координата.

Уравнения записаны для напряжений, возникающих при одномерной диффузии водорода (концентрация изменяется вдоль координаты  $x$ ). В уравнении (2) первый член связан с эффектом расширения кристаллической решетки при растворении водорода. Второй и третий члены уравнения (2) связаны с возникающими при этом концентрационными напряжениями, необходимыми для сохранения сплошности мембраны.

Для напряжений вида (1)–(3) уравнение потока водорода и уравнение, определяющее пространственно-временное изменение концентрации, можно записать в виде [11–12]:

$$J(x, t) = -D \frac{\partial C}{\partial x} - B_0 C D \frac{\partial C}{\partial x} + 12 \frac{B_0 C D}{L^3} \int_0^L (C - C_0) (x - 0.5L) dx, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} = & (1 + B_0 C) D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - B_0 D \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)^2 + \\ & + 12 \frac{B_0 D}{L^3} \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right) \int_0^L (C - C_0) (x - 0.5L) dx, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $B_0 = 2V^2 E / (3(1 - \nu) RT)$ ,  $J(x, t)$  – диффузионный поток водорода,  $C$  – концентрация,  $D$  – коэффициент диффузии водорода,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $T$  – температура,  $C_0$  – концентрация водорода, равномерно распределенного по толщине мембраны до начала диффузионного процесса. В общем случае концентрация  $C$  является функцией пространственной координаты и времени, а  $C_0$  остается постоянной величиной и равна концентрации водорода на внутренней поверхности трубчатой мембраны.

Первый член в уравнении (4) соответствует движущей силе, созданной градиентом концентрации. Этот вклад в поток пропорционален градиенту концентрации (по Фику).

Второй и третий члены уравнения (4) соответствуют движущей силе, созданной градиентом напряжений. Компонента, представленная вторым членом уравнения (4), также пропорциональна градиенту концентрации. Величина этой компоненты, кроме того, зависит от упругих констант материала мембраны, температуры эксперимента и начальной концентрации  $C_0$ . Эта компонента будет увеличивать величину диффузионного потока [12]. Компонента, представленная третьим членом уравнения (4), имеет прямо противоположное направление первым двум компонентам. Величина этой компоненты будет зависеть как от упругих констант материала мембраны, поддерживаемой при эксперименте температуры, начальной концентрации  $C_0$  в мембране, так и от других параметров, определяемых геометрическим фактором и неравномерным распределением водорода в стенке мембраны в процессе его проникновения. Величина этих параметров и градиент концентрации будут зависимыми от времени и связанными с пространственно-временным изменением концентрации водорода в процессе диффузии. Пространственно-временное изменение концентрации водорода в мембране в процессе проникновения определяется общим решением уравнения (5).

Установленный экспериментально характер временных зависимостей водородоупругого формоизменения [9] хорошо согласуется с результатами расчетов, выполненных путем математического моделирования одностороннего насыщения палладиевой пластины водородом и ее водородоупругого формоизменения,

в основу которого также была положена аналогия между явлением водородоупругости и термоупругости [13]. Несмотря на достигнутые успехи, описанный выше подход к описанию водородоупругих эффектов содержит вполне определенные ограничения для их физического понимания. В уравнениях водородоупругости, записанных по аналогии с уравнениями термоупругости, не может быть учтено такое явление как «восходящая» диффузия, так как в процессах теплопроводности подобное явление не имеет места.

В [14] обобщены термодинамические основы этого явления и дано его математическое описание в неизотермических и изотермических условиях. Неизотермическая водородоупругость описана системой связанных нелинейных дифференциальных уравнений, отражающих взаимозависимость и взаимообусловленность эволюции концентрационных водородных полей, температурных полей и полей деформаций (напряжений). Изотермическая водородоупругость описана системой связанных нелинейных дифференциальных уравнений, учитывающих взаимозависимую и взаимообусловленную эволюцию концентрационных водородных полей и полей деформаций (напряжений) в условиях, когда можно пренебречь переносом тепла потоками водорода и изменениями температуры вследствие упругих деформаций и формоизменений. При этом в уравнении диффузии поток водорода в каждой точке системы Me-H определяется двумя движущими термодинамическими силами: градиентом концентрации водорода и градиентом внутренних напряжений. Таким образом, данный подход учитывает возможность «восходящей» диффузии водорода в системах Me-H.

**Заключение.** Таким образом, водородоупругие эффекты следует рассматривать как результат взаимосвязи поля упругих напряжений и концентрации водорода в металлах. В настоящее время они нашли широкое практическое применение. Экспериментальные методы, основанные на эффекте Горского, позволяют исследовать термодинамические характеристики, определяющие фазовые переходы и условия равновесия в системах металл-водород. При использовании эффекта Горского поверхностные барьеры типа окисных пленок (ниобий, ванадий и другие металлы) помогают предотвратить «утечку» водорода из образца в окружающую среду в процессе измерений. Эффект Льюиса применяется в мембранных технологиях для расчета коэффициента диффузии водорода с учетом начального содержания водорода внутри стенок мембран. Анализ диффузионно-упругих эффектов позволяет рассчитывать параметры конструкций, используемых в водородной энергетике и в технологиях, где присутствует контакт водорода с металлами. Данный перечень можно продолжить. Обобщенное математическое описание диффузии с учетом поля напряжений нуждается в дальнейшей разработке и представляет собой актуальную проблему

Работа выполнялась в соответствии с основными направлениями научной деятельности проблемной научно-исследовательской лаборатории взаимодействия водорода с металлами и водородных технологий кафедры физики Донецкого национального технического университета в рамках госбюджетных научно-исследовательских работ Министерства образования и науки Донецкой Народ-

ной республики (номер регистрации:Н-2021-6)

1. *Goltsov V.A.* Fundamentals of Hydrogen Treatment of Materials / V.A. Goltsov // Progress in Hydrogen Treatment of Materials – Донецк-Coral Gables: Kassiopeya Ltd. – 2001. – P. 3–37.
2. *Lewis F.A.* The “Uphill” Diffusion of Hydrogen. Strain-gradient Induced Effects in Palladium Alloy Membranes / F.A. Lewis, K. Kandasamy, B. Baranowski // Platinum Metals Rev. – 1988. – 32(1). – P. 22–26.
3. *Tong X.Q.* Mechanical-stain-induced influences on hydrogen diffusion within Pd77Ag23 alloy membranes / X.Q. Tong, F.A. Lewis // Journal of the Less-Common Metals. – 1991. – Vol.169. – P. 157–165.
4. *Зинер К.* Упругость и неупругость металлов / К. Зинер. – М.: ИЛ, 1954. – 396 с.
5. *Gorsky W.S.* Theorie der elastischen Nachwirkung in ungeordneten Mischkristallen (Elastische Nachwirkung zweiter Art.) / W.S. Gorsky // Phys. Z. Sowjetunion. – 1935. – № 8. – P. 457–471.
6. *Гегузин Я.Е.* Восходящая диффузия и диффузионное последствие / Я.Е. Гегузин // УФН. – 1986. – Т. 149, № 1. – С. 149–159.
7. *Конобеевский С.Т.* Диффузия в твердых растворах под влиянием распределенных напряжений / С.Т. Конобеевский // ЖЭТФ. – 1949. – Вып. 6. – С. 200–214.
8. *Kotelva R.V.* Form Changing of Palladium under Hydrogen Treatment / R.V. Kotelva, Zh.L. Glukhova // Int. Journal Hydrogen Energy. – 1997. – Vol. 22, № 2/3. – P. 175–177.
9. *Гольцов В.А.* Упругое изменение формы палладиевой пластины под действием водорода. Результаты эксперимента / В.А. Гольцов, Ж.Л. Глухова // Физика металлов и металловедение. – 2000. – Т. 90, № 4. – С. 68–73.
10. *Щеголева Т.А.* Электрохимическая водородная установка для исследования формоизменения металлов и сплавов / Т.А. Щеголева, А.В. Ветчинов, В.А. Гольцов // Вестник ДонНТУ. Специальный выпуск «Металлургические процессы и оборудование». – 2016. – № 4(4). – С. 23–26.
11. *Kandasamy K.* Influences of self-induced stress on permeation flux and space-time variation of concentration during diffusion of hydrogen in a palladium alloy / K. Kandasamy // Int. Journal Hydrogen Energy. – 1995. – Vol.20, № 6. – P. 455–463.
12. *Kandasamy K.* The Influences of induced Elastic Fields on Permeation of Hydrogen in Palladium and Palladium Alloys / K. Kandasamy // Defect and Diffusion Forum. – 1997. – Vol. 150–151. – P. 56–65.
13. *Goltsov V.A.* Hydrogen elasticity effect and its importance in diffusion of concentration inhomogeneities in metals / V.A. Goltsov, Zh.L. Glukhova, A.L. Redko // Int. Journal Hydrogen Energy. – 1997. – Vol. 22. – P. 179–183.
14. *Глухова Ж.Л.* Явление водородоупругости в системах металл-водород материалов / Ж.Л. Глухова, В.А. Гольцов // Альтернативная энергетика и экология. – 2014. – № 1. – С. 138–151.

**Glukhova Zh.L., Shchegoleva T.A.**

#### **HYDROGEN-ELASTIC EFFECTS IN ME-H SYSTEMS.**

This article analyzes the hydrogen-elastic effects as a result of the relationship between the elastic stress field and the hydrogen concentration in metals. A mathematical description of the effect of hydrogen-elastic stresses on hydrogen diffusion is considered

**Keywords:** *hydrogen elasticity, hydrogen elastic effects, Gorsky effect, Lewis effect, diffusion-elastic effects.*

Получено 07.09.2023

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2023-3-36-43

EDN:IVOJVW

©2023. Д.С. Карасев<sup>1</sup>, С.В. Сторожев<sup>2</sup>, В.А. Шалдырван<sup>3</sup>

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН РЕЛЕЕВСКОГО ТИПА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИКИ С ДВОЙНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Представлен численно-аналитический итерационный алгоритм получения базисных частных решений для системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающей распространение стационарных локализованных продольно-сдвиговых электроупругих волн в полубесконечном функционально-градиентном пьезокерамическом теле класса *btt* с двойным экспоненциальным законом изменения физико-механических параметров вдоль ортогонального граничной плоскости направления линейной поляризации. Используемый вариант описания неоднородности отвечает существованию приповерхностной области выраженных изменений физико-механических характеристик пьезоактивного материала и их выход на постоянные асимптотические значения в глубине полупространства. Формой представления полученных базисных решений являются сходящиеся по норме векторные экспоненциальные ряды, члены которых последовательно определяются из векторно-матричных рекуррентных соотношений.

**Ключевые слова:** линейно-поляризованная функционально-градиентная пьезокерамика, полубесконечное тело, двойная экспоненциальная физико-механическая неоднородность, локализованные электроупругие волны релеевского типа, базисные решения волновых уравнений, итерационный алгоритм, векторные экспоненциальные ряды.

<sup>1</sup>Карасев Дмитрий Сергеевич – аспирант каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: vektor8899@ya.ru.

Karasev Dmitry Sergeevich – Postgraduate, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>2</sup>Сторожев Сергей Валериевич – доктор техн. наук, проф. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.v.storozhev@donnasa.ru.

Storozhev Sergey Valerievich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

<sup>3</sup>Шалдырван Валерий Анатольевич – доктор физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: shaldyrvan.v.a@mail.ru.

Shaldyrvan Valery Anatolievich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

**Введение и цели исследования.** Актуальными заданиями для современного этапа развития теории конструирования акустоэлектронных радиокомпонентов, в которых используются различные типы поверхностных электроупругих волн [1–6], является изучение возможностей эффективного использования в этих конструкциях новейших типов создаваемых на базе применения аддитивных технологий функционально-градиентных пьезоэлектрических материалов [7–12]. В этой связи, соответственно представляет интерес дальнейшее развитие теоретических методов расчетного анализа моделей волновых процессов в непрерывно-неоднородных пьезоактивных средах, в том числе эффективных численно-аналитических подходов с надежной базой приемов верификации. Применительно к некоторым задачам учета локализованных приграничных зон выраженной неоднородности физико-механических свойств материалов в полубесконечных телах из функционально-градиентной линейно-поляризованной пьезокерамики, при исследовании поверхностных сдвиговых электроупругих волн, в работах [13–16] рассмотрены модели экспоненциальной и двойной экспоненциальной зависимости параметров материала вдоль координаты по толщине полупространства с асимптотическим сглаживанием темпа изменений свойств в глубине, и предложены итерационные алгоритмы аналитического интегрирования соответствующих систем волновых уравнений для неоднородной пьезоактивной среды.

В этом контексте, целью исследований, представляемых в данной работе, является разработка итерационного численно-аналитического алгоритма для получения векторных базисных частных решений системы дифференциальных уравнений связанного электромеханического динамического деформирования функционально-градиентной пьезокерамики, описывающей распространение стационарных поверхностных продольно-сдвиговых электроупругих волн релеевского типа вдоль граничной плоскости полубесконечного тела из линейно поляризованной пьезокерамики класса *бтт* с задаваемой двойными экспоненциальными функциями непрерывной поперечной неоднородностью физико-механических свойств.

**1. Основные соотношения исследуемой модели.** Рассматривается занимающая область  $x_3 \geq \mu > 0$  в координатном пространстве  $Ox_1x_2x_3$  полубесконечная непрерывно-неоднородная гексагональная пьезокерамическая упругая среда класса *бтт* с осью поляризации  $Ox_3$  и переменными вдоль оси  $Ox_3$  характеристиками вида

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \cdot \vartheta(\lambda, \beta, x_3), \quad c_{ij} = c_{ij0} \cdot \vartheta(\lambda, \beta, x_3), \quad e_{ij} = e_{ij0} \cdot \vartheta(\lambda, \beta, x_3), \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij0} \cdot \vartheta(\lambda, \beta, x_3) \quad \vartheta(\lambda, \beta, x_3) = \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $c_{ij}(x_3)$ ,  $e_{ij}(x_3)$ ,  $\varepsilon_{ij}(x_3)$ ,  $\rho(x_3)$  – соответственно модули упругости, пьезоэлектрические и диэлектрические параметры, а также параметр плотности функционально-градиентной пьезокерамики. В рамках введенных зависимостей параметров пьезоактивной среды от координаты  $x_3$ , в глубине полупространства  $x_3 \geq \eta > 0$  при  $\beta > 0$  имеет место их асимптотическое стремление к величине

нам  $c_{ij0}$ ,  $e_{ij0}$ ,  $\varepsilon_{ij0}$ ,  $\rho_0$ , а область, прилегающая к граничной плоскости  $x_3 = \mu$ , является зоной выраженной неоднородности материала.

Система дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами относительно комплексных функций динамических перемещений  $u_j(x_1, x_2, x_3, t)$  и потенциала квазистатического электрического поля  $\phi(x_1, x_2, x_3, t)$ , описывающая распространение локализованных связанных электроупругих волн релеевского типа с плоским фронтом вдоль координатного направления  $Ox_1$  в полупространстве  $x_3 \geq \mu > 0$  из рассматриваемого неоднородного пьезоэлектрического материала, может быть записана в форме

$$\begin{aligned}
 & c_{11}(x_3)\partial_1^2 u_1(x_1, x_3, t) + \partial_3(c_{44}(x_3)\partial_3 u_1(x_1, x_3, t)) + \\
 & + c_{13}(x_3)\partial_1 \partial_3 u_3(x_1, x_3, t) + \partial_3(c_{44}(x_3)\partial_1 u_3(x_1, x_3, t)) + \\
 & + e_{31}(x_3)\partial_1 \partial_3 \phi(x_1, x_3, t) + \partial_3(e_{15}(x_3)\partial_1 \phi(x_1, x_3, t)) - \\
 & \quad - \rho(x)\partial_t^2 u_3(x_1, x_3, t) = 0, \\
 & c_{44}(x_3)\partial_1 \partial_3 u_1(x_1, x_3, t) + \partial_3(c_{13}(x_3)\partial_1 u_1(x_1, x_3, t)) + \\
 & + c_{44}(x_3)\partial_1^2 u_3(x_1, x_3, t) + \partial_3(c_{33}(x_3)\partial_3 u_3(x_1, x_3, t)) + \\
 & + e_{15}(x_3)\partial_1^2 \phi(x_1, x_3, t) + \partial_3(e_{33}(x_3)\partial_3 \phi(x_1, x_3, t)) - \\
 & \quad - \rho(x)\partial_t^2 u_3(x_1, x_3, t) = 0, \\
 & e_{15}(x_3)\partial_1 \partial_3 u_1(x_1, x_3, t) + \partial_3(e_{31}(x_3)\partial_1 u_1(x_1, x_3, t)) + \\
 & + e_{15}(x_3)\partial_1^2 u_3(x_1, x_3, t) + \partial_3(e_{33}(x_3)\partial_3 u_3(x_1, x_3, t)) + \\
 & - \varepsilon_{11}(x_3)\partial_1^2 \phi(x_1, x_3, t) - \partial_3(\varepsilon_{33}(x_3)\partial_3 \phi(x_1, x_3, t)) = 0, \\
 & \quad \partial_j = \partial/\partial x_j, \partial_t = \partial/\partial t,
 \end{aligned} \tag{2}$$

и с введением применительно к волнам исследуемого типа представлений

$$\begin{aligned}
 u_1(x_1, x_3, t) &= u_{10}(x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - kx_1)), \\
 u_3(x_1, x_3, t) &= u_{30}(x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - kx_1)), \\
 \phi(x_1, x_3, t) &= \phi_0(x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - kx_1)),
 \end{aligned} \tag{3}$$

а также с использованием выражений (1), преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 & c_{440}u_{10}''(x_3) - c_{110}k^2 u_{10}(x_3) + (c_{130} + c_{440})iku_{30}'(x_3) + \\
 & \quad + (e_{150} + e_{310})ik\phi_0'(x_3) + \rho_0\omega^2 u_{10}(x_3) = \\
 & = \gamma(c_{440}(u_{10}'(x_3) + iku_{30}(x_3)) + e_{150}ik\phi_0(x_3))e^{-\beta x_3}, \\
 & (c_{130} + c_{440})iku_{10}'(x_3) + c_{330}u_{30}''(x_3) - c_{440}k^2 u_{30}(x_3) - \\
 & \quad - e_{150}k^2 \phi_0(x_3) + e_{330}\phi_0''(x_3) + \rho_0\omega^2 u_{30}(x_3) = \\
 & = \gamma(c_{130}iku_{10}(x_3) + c_{330}u_{30}'(x_3) + e_{330}\phi_0'(x_3))e^{-\beta x_3}, \\
 & (e_{150} + e_{310})iku_{10}'(x_3) + e_{330}u_{30}''(x_3) - e_{150}k^2 u_{30}(x_3) + \\
 & \quad + \varepsilon_{110}k^2 \phi_0(x_3) - \varepsilon_{330}\phi_0''(x_3) = \\
 & = \gamma(e_{310}iku_{10}(x_3) + e_{330}u_{30}'(x_3) - \varepsilon_{330}\phi_0'(x_3))e^{-\beta x_3}, \quad \gamma = \lambda\beta.
 \end{aligned} \tag{4}$$



**2. Алгоритм интегрирования.** Интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4) осуществляется с применением итерационного метода последовательных приближений, для чего рассматриваемая система записывается в матрично-векторной форме

$$(\underline{B}_1 \partial_3^2 + \underline{B}_2 \partial_3 + \underline{B}_3) \underline{\Phi}(x_3) = \gamma \exp(-\beta x_3) (\underline{D}_2 \partial_3 + \underline{D}_3) \underline{\Phi}(x_3), \quad (5)$$

где

$$\underline{\Phi}(x_3) = \begin{pmatrix} u_{10}(x_3) \\ u_{30}(x_3) \\ \phi_0(x_3) \end{pmatrix}; \quad (6)$$

$\underline{B}_1, \underline{B}_2, \underline{B}_3$  и  $\underline{D}_1, \underline{D}_2$  – матрицы постоянных коэффициентов

$$\begin{aligned} \underline{B}_1 = \|b_{1ij}\| &= \begin{pmatrix} c_{440} & 0 & 0 \\ 0 & c_{330} & e_{330} \\ 0 & e_{330} & -\varepsilon_{330} \end{pmatrix}, \\ \underline{B}_2 = \|b_{2ij}\| &= \begin{pmatrix} 0 & (c_{130} + c_{440})ik & (e_{150} + e_{310})ik \\ (c_{130} + c_{440})ik & 0 & 0 \\ (e_{150} + e_{310})ik & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \underline{B}_3 = \|b_{3ij}\| &= \begin{pmatrix} \rho_0 \omega^2 - c_{110} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_0 \omega^2 - c_{440} k^2 & -e_{150} k^2 \\ 0 & -e_{150} k^2 & \varepsilon_{110} k^2 \end{pmatrix}, \\ \underline{D}_1 = \|d_{1ij}\| &= \begin{pmatrix} c_{440} & 0 & 0 \\ 0 & c_{330} & e_{330} \\ 0 & e_{330} & -\varepsilon_{330} \end{pmatrix}, \\ \underline{D}_2 = \|d_{2ij}\| &= \begin{pmatrix} 0 & c_{440} ik & e_{150} ik \\ c_{130} ik & 0 & 0 \\ e_{310} ik & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Реализуемый итерационный алгоритм включает соотношения

$$\underline{\Phi}(x_3) = \underline{\Phi}_0(x_3) + \underline{\Phi}_1(x_3) + \underline{\Phi}_2(x_3) + \dots + \underline{\Phi}_n(x_3) + \dots, \quad (8)$$

$$(\underline{B}_1 \partial_3^2 + \underline{B}_2 \partial_3 + \underline{B}_3) \underline{\Phi}_0(x_3) = 0, \quad (9)$$

$$(\underline{B}_1 \partial_3^2 + \underline{B}_2 \partial_3 + \underline{B}_3) \underline{\Phi}_1(x_3) = -\gamma e^{-\beta x_3} (\underline{D}_1 \partial_3 + \underline{D}_2) \underline{\Phi}_0(x_3), \dots, \quad (10)$$

$$(\underline{B}_1 \partial_3^2 + \underline{B}_2 \partial_3 + \underline{B}_3) \underline{\Phi}_n(x_3) = -\gamma e^{-\beta x_3} (\underline{D}_1 \partial_3 + \underline{D}_2) \underline{\Phi}_{n-1}(x_3). \quad (11)$$

Задача определения начального приближения  $\underline{\Phi}_0(x_3)$ , состоящая в получении базисных решений системы однородных дифференциальных уравнений (9) с постоянными коэффициентами, решается на базе применения метода Эйлера. Характеристическое бикубическое полиномиальное уравнение для однородной системы (9) имеет вид

$$\vartheta_1 \delta^6 + \vartheta_2 \delta^4 + \vartheta_3 \delta^2 + \vartheta_4 = 0, \quad (12)$$

Д.С. Карасев, С.В. Сторожев, В.А. Шалдырван

$$\begin{aligned}
\vartheta_1 &= -c_{440}(c_{330}\varepsilon_{330} + e_{330}^2), \\
\vartheta_2 &= k^2(c_{330}(e_{150}^2 + 2e_{150}e_{310} + e_{310}^2 + c_{440}\varepsilon_{110} + c_{110}\varepsilon_{330}) - \\
&\quad - c_{130}(2e_{150}e_{330} + 2e_{310}e_{330} + 2c_{440}\varepsilon_{330} - c_{130}\varepsilon_{330}) + \\
&\quad + e_{330}(c_{110}e_{330} - 2c_{440}e_{310})) - (c_{440}\varepsilon_{330} + e_{330}^2)\rho_0\omega^2, \\
\vartheta_3 &= 2c_{130}e_{150}k^4(e_{150} + e_{310}) + c_{440}k^4(2c_{130}\varepsilon_{110} - \\
&\quad - e_{310}^2 - c_{110}\varepsilon_{330}) - c_{110}k^4(2e_{150}e_{330} + c_{330}\varepsilon_{110}) + \\
&\quad + e_{150}\rho_0\omega^2k^2(e_{150} + 2e_{310} + 2e_{330}) + \varepsilon_{110}\rho_0\omega^2k^2(c_{330} + c_{440}) + \\
&\quad + \varepsilon_{330}\rho_0\omega^2k^2(c_{110} + c_{440}) + k^4c_{130}^2\varepsilon_{110} + e_{310}^2\rho_0\omega^2k^2 - \varepsilon_{330}(\rho_0\omega^2)^2, \\
\vartheta_4 &= c_{110}k^6(e_{150}^2 + c_{440}\varepsilon_{110}) - \rho_0\omega^2k^4(e_{150}^2 + c_{110}\varepsilon_{110}) + \\
&\quad + \varepsilon_{110}k^2\rho_0\omega^2(\rho_0\omega^2 - c_{110}k^2),
\end{aligned} \tag{13}$$

а его корни  $\pm\delta_1, \pm\delta_2, \pm\delta_3$  в явном аналитическом виде определяются по формулам Кардано. Соответственно, базисные частные решения (9) могут быть представлены в форме

$$\underline{\Phi}_{0j}^{(\pm)} = \underline{\zeta}_{0j}^{(\pm)} e^{\pm\delta_j x_3}, \quad \underline{\zeta}_{0j}^{(\pm)} = (\underline{\zeta}_{10j}^{(\pm)}, \underline{\zeta}_{20j}^{(\pm)}, \underline{\zeta}_{30j}^{(\pm)})^T, \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}
\underline{\zeta}_{10j}^{(\pm)} &= 1, \quad \underline{\zeta}_{20j}^{(\pm)} = (\tau_{21j}^{(\pm)}\tau_{13j}^{(\pm)} - \tau_{11j}^{(\pm)}\tau_{23j}^{(\pm)}) / (\tau_{12j}^{(\pm)}\tau_{23j}^{(\pm)} - \tau_{22j}^{(\pm)}\tau_{13j}^{(\pm)}), \\
\underline{\zeta}_{30j}^{(\pm)} &= (\tau_{21j}^{(\pm)}\tau_{12j}^{(\pm)} - \tau_{11j}^{(\pm)}\tau_{22j}^{(\pm)}) / (\tau_{12j}^{(\pm)}\tau_{23j}^{(\pm)} - \tau_{22j}^{(\pm)}\tau_{13j}^{(\pm)}), \\
\tau_{pqj}^{(\pm)} &= \pm\delta_j^2 b_{1pq} \pm \delta_j b_{2pq} + b_{3pq}.
\end{aligned} \tag{15}$$

После определения в форме (14) шести базисных решений (9), построение соответствующих решений (5) реализуется согласно итерационному алгоритму с выбором последовательных приближений в виде

$$\begin{aligned}
\underline{\Phi}_{0j}^{(\pm)} &= \underline{\zeta}_{0j}^{(\pm)} e^{\pm\delta_j x_3}, \quad \underline{\Phi}_{1j}^{(\pm)}(x_3) = \underline{\zeta}_{1j}^{(\pm)} e^{(\pm\delta_j - \beta)x_3}, \dots, \\
\underline{\Phi}_{nj}^{(\pm)}(x_3) &= \underline{\zeta}_{nj}^{(\pm)} e^{(\pm\delta_j - n\beta)x_3}, \dots
\end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}
\underline{\zeta}_{nj}^{(\pm)} &= -\gamma(\underline{M}_{1nj}^{(\pm)})^{-1} \underline{M}_{2n,j}^{(\pm)} \underline{\zeta}_{n-1,j}^{(\pm)}, \\
\underline{M}_{1nj}^{(\pm)} &= (\pm\delta_j - n\beta)^2 \underline{B}_1 + (\pm\delta_j - n\beta) \underline{B}_2 + \underline{B}_3, \\
\underline{M}_{2nj} &= (\pm\delta_j - (n-1)\beta) \underline{D}_1 + \underline{D}_2.
\end{aligned} \tag{17}$$

На базе соотношений (17) может быть получено представление

$$\underline{\zeta}_{nj}^{(\pm)} = (-\gamma)^n (\underline{M}_{1nj}^{(\pm)})^{-1} \underline{M}_{2nj}^{(\pm)} (\underline{M}_{1,n-1,j}^{(\pm)})^{-1} \underline{M}_{2,n-1,j}^{(\pm)} \dots (\underline{M}_{11j}^{(\pm)})^{-1} \underline{M}_{21j}^{(\pm)} \underline{\zeta}_{0j}^{(\pm)}, \tag{18}$$

а при введении обозначения

$$\underline{Q}_{nj}^{(\pm)} = (\underline{M}_{1nj}^{(\pm)})^{-1} \underline{M}_{2nj}^{(\pm)}, \tag{19}$$

выражение (18) принимает вид

$$\zeta_{nj}^{(\pm)} = (-\gamma)^n \underline{Q}_{nj}^{(\pm)} \cdot \underline{Q}_{n-1,j}^{(\pm)} \cdot \dots \cdot \underline{Q}_{1j}^{(\pm)} \zeta_{0j}^{(\pm)}. \quad (20)$$

В итоге, базисные частные решения (5) записываются в следующей явной форме

$$\underline{\Phi}_j^{(\pm)}(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_{nj}^{(\pm)} \exp((-n\beta \pm \delta_j)x_3) \quad (j = \overline{1, 3}). \quad (21)$$

Исследование сходимости экспоненциальных рядов в представлениях (21), как и в работах [13–16], может быть проведено с использованием критерия Даламбера. С учетом выполняющегося в области  $x_3 \geq \mu > 0$  свойства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\|\zeta_{n+1,j}^{(\pm)}\| \exp((-n-1)\beta \pm \delta_j)x_3)}{\|\zeta_{nj}^{(\pm)}\| \exp((-n)\beta \pm \delta_j)x_3)} \right| < 1, \quad (22)$$

функциональный ряд (22) является сходящимся по норме в этой области. Вводя, далее, представления

$$\zeta_{nj}^{(\pm)} = \begin{pmatrix} \chi_{1nj}^{(\pm)} \\ \chi_{2nj}^{(\pm)} \\ \chi_{3nj}^{(\pm)} \end{pmatrix} \quad (j = \overline{1, 3}), \quad \underline{\Phi}_j^{(\pm)}(x_3) = \begin{pmatrix} \eta_{1j}^{(\pm)}(x_3) \\ \eta_{2j}^{(\pm)}(x_3) \\ \eta_{3j}^{(\pm)}(x_3) \end{pmatrix} \quad (j = \overline{1, 3}), \quad (23)$$

$$\eta_{mj}^{(\pm)}(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{mnj}^{(\pm)} \exp((-n\beta \pm \delta_j)x_3) \quad (j = \overline{1, 3}),$$

с учетом требований рассматриваемой модели относительно свойств затухания характеристик волнового поля при  $x_3 \rightarrow \infty$ , для комплексных функций волновых упругих перемещений, для комплексных функций механических напряжений на граничной поверхности полупространства, а также для комплексной функции потенциала квазистатического электрического поля, можно записать выражения

$$u_1(x_1, x_3, t) = (\beta_1 \eta_{11}^{(-)}(x_3) + \beta_2 \eta_{12}^{(-)}(x_3) + \beta_3 \eta_{13}^{(-)}(x_3)) \exp(-i(\omega t - kx_1)), \quad (24)$$

$$u_3(x_1, x_3, t) = (\beta_1 \eta_{21}^{(-)}(x_3) + \beta_2 \eta_{22}^{(-)}(x_3) + \beta_3 \eta_{23}^{(-)}(x_3)) \exp(-i(\omega t - kx_1));$$

$$\sigma_{31}(x_1, x_3, t) = (\beta_1 (c_{44} ik \eta_{21}^{(-)}(x_3) + c_{44} \partial_3 \eta_{11}^{(-)}(x_3)) + \beta_2 (c_{44} ik \eta_{22}^{(-)}(x_3) + c_{44} \partial_3 \eta_{12}^{(-)}(x_3)) + \beta_3 (c_{44} ik \eta_{23}^{(-)}(x_3) + c_{44} \partial_3 \eta_{13}^{(-)}(x_3)) \exp(-i(\omega t - kx_1)), \quad (25)$$

$$\sigma_{33}(x_1, x_3, t) = (\beta_1 (c_{13} ik \eta_{11}^{(-)}(x_3) + c_{22} \partial_3 \eta_{21}^{(-)}(x_3)) + \beta_2 (c_{13} ik \eta_{12}^{(-)}(x_3) + c_{33} \partial_3 \eta_{22}^{(-)}(x_3)) + \beta_3 (c_{13} ik \eta_{13}^{(-)}(x_3) + c_{33} \partial_3 \eta_{23}^{(-)}(x_3)) \exp(-i(\omega t - kx_1));$$

$$\phi(x_1, x_3, t) = (\beta_1 \eta_{31}^{(-)}(x_3) + \beta_2 \eta_{32}^{(-)}(x_3) + \beta_3 \eta_{33}^{(-)}(x_3)) \exp(-i(\omega t - kx_1)), \quad (26)$$

с использованием которых дисперсионное уравнение для исследуемых электроупругих локализованных волн релеевского типа в функционально-градиентном

пьезокерамическом полупространстве со свободной от механических напряжений электродированной границей имеет формулировку

$$\begin{aligned}
 F(\omega, k) &= \text{Det} \|\lambda_{pq}\| = 0 \quad (p, q = \overline{1, 3}), \\
 \lambda_{1q} &= c_{44}ik\eta_{2q}^{(-)}(\mu) + c_{44}\partial_3\eta_{1q}^{(-)}(\mu), \\
 \lambda_{2q} &= c_{13}ik\eta_{1q}^{(-)}(\mu) + c_{22}\partial_3\eta_{2q}^{(-)}(\mu), \quad \lambda_{3q} = \eta_{3q}^{(-)}(\mu).
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

**Заключение.** Итогом реализованных исследований является разработка численно-аналитического итерационного алгоритма поиска базисных частных решений для системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающей распространение стационарных локализованных продольно-сдвиговых электроупругих волн в полубесконечном функционально-градиентном пьезокерамическом теле класса *btt* с двойным экспоненциальным законом изменения физико-механических параметров вдоль ортогонального граничной плоскости направления линейной поляризации. Искомые базисные решения получены в виде сходящихся по норме векторных экспоненциальных рядов, члены которых последовательно определяются из векторно-матричных рекуррентных соотношений. В аналитической форме сформулировано дисперсионное уравнение для исследуемых электроупругих локализованных волн релеевского типа в функционально-градиентном пьезокерамическом полупространстве со свободной от механических напряжений электродированной границей.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 1023030100040-4 1.1.2;2.3.1).

1. *Takali F.* Surface Acoustic Wave Energy in Piezoelectric Material / F. Takali, A. Njeh, M.H. Ben Ghozlen // *Physics Procedia*. – 2009. – Vol. 2, Issue. 3. – P. 1369–1375. <https://doi.org/10.1016/j.phpro.2009.11.104>
2. *Tanaka S.* Piezoelectric acoustic wave devices based on heterogeneous integration technology / S. Tanaka // *Proceedings 2014 IEEE International Frequency Control Symposium (FCS) (Taipei, Taiwan)*. – 2014. – P. 1–4. doi: 10.1109/FCS.2014.6859994.
3. *Chen S.* Study on the electromechanical coupling coefficient of Rayleigh-type surface acoustic waves in semi-infinite piezoelectrics/non-piezoelectrics superlattices / S. Chen, Y. Zhang, S. Lin, Z. Fu // *Ultrasonics*. 2014 Feb; 54(2):604-8. doi: 10.1016/j.ultras.2013.08.013. Epub 2013 Aug 30. PMID: 24035609.
4. *Желнорович В.А.* Поверхностные волны Релея и Блостейна-Гуляева в упругих пьезоэлектриках при наличии релаксации диэлектрической поляризации // *ПММ*. – 2015. – Т. 79, Вып. 2. – С. 273–285.
5. *Washim R.A.* Piezoelectric MEMS based acoustic sensors: A review / Reza Ali Washim, Prasad Mahanth // *Sensors and Actuators A: Physical*. – 2020. – Vol. 301, 111756. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2019.111756>
6. *Setter N.* Piezoelectric material and devices / N. Setter. – Lausanne, Switzerland: Swiss Federal Institute of Technology, 2002. – 518 p.
7. *Hudai K.* Porous PZT ceramics for receiving transducers / Kara Hudai, Ramesh Rajamami, Ron Stevens, Cris R. Bowen // *IEEE Trans. UFFC*. – 2003. – V. – 50. – N 3. – P. 280–296.
8. *Saito Y.* Lead-free piezoceramics / Y. Saito, H. Takao, T. Tani, T. Nonoyama, K. Takatori, T. Homma, T. Nagaya, M. Nakamura // *Nature*. – 2004. – V. 432. – P. 84–87.
9. *Heywang W.* Piezoelectricity, evolution and future of a technology / W. Heywang, K. Lubitz, W. Wersing. – Berlin: Springer, 2008. – 581 p.

10. *Рыбьянец А.Н.* Свойства керамических пьезокомпозигов ЦТС/ЦТС / А.Н. Рыбьянец // Известия РАН. Серия физическая. – 2010. – Т. 74. – № 8. – С. 1150–1153.
11. *Луговаца М.А.* Complex material properties of porous piezoelectric ceramics / М.А. Lugovaya, А.А. Naumenko, А.Н. Rybyanets, S.A. Shcherbinin // Ferroelectrics. – 2015. – V. 484, Issue. 1. – P. 87–94.
12. *Рыбьянец А.Н.* Упругие диэлектрические и пьезоэлектрические свойства керамоматричных композигов ЦТС/а-АОс / А.Н. Рыбьянец, Г.М. Константинов, А.А. Науменко, Н.А. Швецова, Д.И. Макарьев, М.А. Луговая // ФТТ. – 2015. – Т. 57., Вып. 3. – С. 515518.
13. *Болнокин В.Е.* Анализ модели распространения сдвиговых упругих волн в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном геомассиве / В.Е. Болнокин, А.А. Глухов, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022 – №3 (80). – С. 14–19. – doi: 10.24412/0136-4545-2022-3-14-19. – EDN: BOBAVC.
14. *Глухов А.А.* Интегрирование системы уравнений распространения произвольно ориентированных трехпарциальных поверхностных волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022 – №4 (81). – С. 15–22. – doi: 10.24412/0136-4545-2022-4-15-22. – EDN: JBHEKR.
15. *Глухов А.А.* Анализ модели распространения поверхностных релеевских волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве с приграничной локализованной зоной неоднородности / А.А. Глухов, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – №2 (83). – С. 26–38. – doi: 10.24412/0136-4545-2023-2-26-38. – EDN: ETYFCH.
16. *Карасев Д.С.* Интегрирование уравнений распространения локализованных сдвиговых электроупругих волн в функционально-градиентной пьезокерамике с двойной экспоненциальной неоднородностью / Д.С. Карасев, В.И. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – №2 (83). – С. 48–55. – doi: 10.24412/0136-4545-2023-2-48-55. – EDN: SPYOBС.

**D.S. Karasev, S.V. Storozhev, V.A. Shaldyrvan**

**Integration of propagation equations of localized electroelastic waves of the Rayleigh type in the half-space of functional-gradient piezoceramics with double exponential inhomogeneity.**

A numerically analytical iterative algorithm for obtaining basic partial solutions for a system of partial differential equations describing the propagation of stationary localized longitudinally shear electroelastic waves in a semi-infinite functional gradient piezoceramic body of class 6mm with a double exponential law of change of physical and mechanical parameters along an orthogonal boundary plane of the direction of linear polarization is presented. The used variant of the description of heterogeneity corresponds to the existence of a near-surface region of pronounced changes in the physico-mechanical characteristics of a piezoactive material and their output to constant asymptotic values in the depth of the half-space. The form of representation of the obtained basic solutions is normally convergent vector exponential series, the terms of which are sequentially determined from vector-matrix recurrence relations.

**Keywords:** *linearly polarized functional gradient piezoceramics, semi-infinite body, double exponential physico-mechanical inhomogeneity, localized electroelastic waves of the Relev type, basic solutions of wave equations, iterative algorithm, vector exponential series.*

*Получено 11.09.2023*

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2023-3-44-60

EDN:JHSYGU

©2023. С.А. Калоеров<sup>1</sup>, А.В. Сероштанов<sup>2</sup>, А.Б. Мироненко<sup>3</sup>

## ИЗГИБ ТОНКОЙ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ МНОГОСВЯЗНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Решена задача электроупругости о поперечном изгибе полуплоскости с внутренними отверстиями и трещинами. При этом функции, голоморфные вне эллипсов, разлагаются в ряды Лорана по отрицательным степеням соответствующих переменных, а функции, голоморфные в нижних полуплоскостях, методом интегралов типа Коши выражаются через функции, сопряженные к указанным функциям. Определение неизвестных коэффициентов рядов осуществляется на основе удовлетворением граничным условиям на контурах отверстий и трещин обобщенным методом наименьших квадратов, приводящим задачу к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений. Описаны результаты численных исследований для полуплоскости с различными отверстиями и трещинами. Установлены закономерности изменения напряженно-деформированного состояния плиты в зависимости от ее материала и геометрических характеристик отверстий и трещин.

**Ключевые слова:** электроупругая тонкая плита, полуплоскость, отверстия, комплексные потенциалы, интегралы типа Коши, обобщенный метод наименьших квадратов.

**Введение.** Тонкие пластинки из пьезоэлектроматериалов, которые широко используются в качестве элементов различных конструкций современной науки и техники, могут содержать отверстия и трещины [1–8]. Под действием различных механических сил и электрических полей около отверстий и тре-

<sup>1</sup>Калоеров Стефан Алексеевич – доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: kaloerov@mail.ru.

Kaloerov Stefan Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>2</sup>Сероштанов Александр Владимирович – аспирант каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: aleks.serosht@gmail.com.

Seroshtanov Alexandr Vladimirovich – Postgraduate, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>3</sup>Мироненко Андрей Борисович – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: a.mironenko@donnu.ru.

Mironenko Andrey Borisovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

щин в таких плитах возникают высокие концентрации изгибающих моментов, что необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Наиболее достоверные результаты по определению электроупругого состояния (ЭУС) многосвязных плит с отверстиями и трещинами получаются при решении задач методами, использующими комплексные потенциалы теории изгиба электромагнитоупругих тонких плит [9]. Использование аппарата комплексных потенциалов дало возможность решить широкий класс задач по изгибу многосвязных пьезоплит с отверстиями произвольной форме и трещинами [10]. Как показали исследования в случае плоской задачи, при решении задач для полуплоскости наиболее достоверные результаты при удовлетворении граничным условиям на прямолинейной границе получаются при использовании метода интегралов типа Коши [11–13]. Что же касается граничных условий на контурах отверстий и трещин, то наиболее простым для реализации и обеспечивающим достаточно высокую точность их удовлетворения является обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК) [13, 14].

В данной работе с использованием комплексных потенциалов теории изгиба электроупругих плит [9], метода интегралов типа Коши при удовлетворении граничным условиям на прямолинейной границе и с применением ОМНК при удовлетворении граничным условиям на контурах отверстий и трещин построено решение задачи об изгибе пьезоэлектрической полуплоскости с внутренними отверстиями и трещинами. Описаны результаты численных исследований, с помощью которых установлены закономерности изменения ЭУС в зависимости от физико-механических свойств материала плиты и геометрических характеристик отверстий и трещин.

**1. Постановка и решение задачи.** Рассмотрим многосвязную пьезоэлектроплиту в виде нижней полуплоскости  $S^-$  с прямолинейной границей  $L^+$  и эллиптическими отверстиями с контурами  $L_l$  и полуосями  $a_l, b_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) (рис. 1). Выберем систему координат  $Oxy$  с началом  $O$  на прямолинейной границе и осью  $Ox$  вдоль этой границы. Прямолинейная граница не нагружена, контуры отверстий не нагружены или жестко подкреплены.

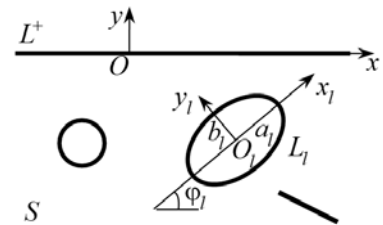


Рис. 1.

На бесконечности действуют механические  $M_x^\infty = m_x$  и электрические  $M_{dx}^\infty = m_{dx}$  моменты, а остальные моменты равны нулю  $M_y^\infty = H_{xy}^\infty = M_{dy}^\infty = 0$ .

Отнесем эллипсы  $L_l$  к локальным системам координат  $O_l x_l y_l$  с началами в центрах эллипсов и направлениями осей  $O_l x_l$  вдоль полуосей  $a_l$ . При этом в системе  $O_l x_l y_l$  параметрическое уравнение эллипса  $L_l$  будет иметь форму:

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе координат  $Oxy$  оно принимает вид

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l,$$

$$y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l,$$

где  $\theta$  – угловая характеристика параметрического задания эллипса, изменяющаяся от 0 до  $2\pi$ ;  $x_{0l}, y_{0l}$  – координаты начала локальной системы координат  $O_l x_l y_l$  в основных координатах  $Oxy$ ;  $\varphi_l$  – угол между направлениями осей  $Ox$  и  $O_l x_l$ , отсчитываемый от оси  $Ox$  против часовой стрелки. При этом, некоторые из эллипсов могут быть прямолинейными разрезами; при наличии отверстий с криволинейными контурами последние аппроксимируются совокупностями дуг эллипсов и берегов разрезов.

Если задачу по определению ЭУС рассматриваемой полуплоскости решать с использованием комплексных потенциалов электроупругости [9, 10, 16], то она сводится к нахождению из соответствующих граничных условий функций  $W'_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 3}$ ) обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (1)$$

где  $\mu_k$  – корни характеристического уравнения 6-го порядка

$$\begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) \end{vmatrix} = 0;$$

$l_{ij}(\mu)$  – полиномы вида

$$l_{4s}(\mu) = -(D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{66}\mu + D_{11}),$$

$$l_{3g}(\mu) = C_{g22}\mu^3 + (C_{g12} + 2C_{g26})\mu^2 + (C_{g21} + 2C_{g16})\mu + C_{g11},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = C_{\beta22}\mu^2 + 2C_{\beta12}\mu + C_{\beta11};$$

$D_{ij} = b_{ij}D_0$ ,  $C_{gij} = c_{gij}D_0$ ,  $C_{\beta ij} = c_{\beta ij}D_0$  – упругие и электрические жесткости плиты;  $D_0 = \frac{2}{3}h^3$  – постоянная, связанная с толщиной плиты;  $b_{ij}$ ,  $c_{gij}$ ,  $c_{\beta ij}$ , элементы обратной матрицы

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} & c_{g11} & c_{g21} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & c_{g12} & c_{g22} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & c_{g16} & c_{g26} \\ -c_{g11} & -c_{g12} & -c_{g16} & c_{\beta11} & c_{\beta12} \\ -c_{g21} & -c_{g22} & -c_{g26} & c_{\beta12} & c_{\beta22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -c_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix}^{-1}$$

$s_{ij}$  – коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электрического поля;  $g_{ij}$  – пьезоэлектрические модули материала, измеренные при постоянных напряжениях;  $\beta_{ij}$  – коэффициенты диэлектрической проницаемости материала, измеренные при постоянных напряжениях.

Граничные условия на контуре  $L_l$  (механические и электромагнитные) для определения комплексных потенциалов имеют вид [9]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ikl} W'_k(t_k) = 0, \quad (2)$$



где

$$(g_{1kl}, g_{2kl}, g_{3kl}) = (p_k/\mu_k, q_k, d_{yk}),$$

в случае, если контуры отверстий свободны от загрузжений, и

$$(g_{1kl}, g_{2kl}, g_{3kl},) = (1, \mu_k, d_{yk}),$$

когда контуры отверстий жестко подкреплены;  $p_k, q_k, d_{yk}$  – известные постоянные [9].

В рассматриваемом случае комплексные потенциалы имеют вид [9]

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + W'_{k0}(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} W'_{kl}(z_k), \quad (3)$$

где  $\Gamma_k$  – постоянные, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений 6-го порядка

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2 - \nu_k (C_{g11} + C_{g21}\mu_k)) \Gamma_k &= -M_x^\infty, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2 - \nu_k (C_{g12} + C_{g22}\mu_k)) \Gamma_k &= 0, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2 - \nu_k (C_{g16} + C_{g26}\mu_k)) \Gamma_k &= 0, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (C_{g11} + C_{g16}\mu_k + C_{g12}\mu_k^2 - \nu_k (\beta_{11} + \beta_{12}\mu_k)) \Gamma_k &= -M_{dx}^\infty, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (C_{g21} + C_{g26}\mu_k + C_{g22}\mu_k^2 - \nu_k (C_{\beta12} + C_{\beta22}\mu_k)) \Gamma_k &= 0, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В выражениях (3)  $W'_{k0}(z_k)$  – функции, голоморфные в нижних полуплоскостях  $S_k^-$ , получаемых из заданной области  $S^-$  аффинными преобразованиями (1);  $W'_{kl}(z_k)$  – функции, голоморфные вне контуров  $L_{kl}$  областей  $S_k^-$ , соответствующих эллипсам  $L_l$  области  $S^-$  при аффинных преобразованиях (1).

Для построения указанных функций используем конформные отображения. Отообразим конформно внешности единичных кругов  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{kl}$ , используя формулы [15]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left( \zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (5)$$

где

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}.$$

После этих отображений функции  $W'_{kl}(z_k)$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ), голоморфные вне отверстий с контурами  $L_{kl}$ , в областях переменных  $\zeta_{kl}$  будут голоморфными вне единичных кругов  $|\zeta_{kl}| \geq 1$ , включая бесконечно удаленную точку, и их можно разложить в ряды Лорана по отрицательным степеням  $\zeta_{kl}$

$$W'_{kl}(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k), \quad (6)$$

где  $\varphi_{kln}(z_k) = (\zeta_{kl}^n(z_k))^{-1}$ ;  $a_{kln}$  – неизвестные постоянные, которые будем определять из граничных условий на контурах плиты.

Для свободной от загрузки прямолинейной границы (для этого случая коэффициенты перед комплексными потенциалами в граничных условиях обозначим индексом ноль вверху), в граничных условиях имеем

$$g_{1kl} = g_{1k}^0 = \frac{p_k}{\mu_k}, \quad g_{2kl} = g_{2k}^0 = q_k, \quad g_{3kl} = g_{3k}^0 = d_{y_k},$$

$$(f_1^+(t), f_2^+(t), f_3^+(t)) =$$

$$= \left( \int_0^s (m^+ dy + f^+ dx) - c^+ x, \int_0^s (m^+ dx - f^+ dy) + c^+ y, - \int_0^s m_d^+ ds \right) + (c_1^+, c_2^+, c_3^+);$$

$f^+(s) = \int_0^s p^+(s) ds$ ;  $c^+$ ,  $c_i^+$  – соответственно вещественная и комплексные постоянные. Тогда граничные условия на прямолинейной границе запишем в виде системы

$$g_{1k}^0 W'_k(t_k) + g_{1k+1}^0 W'_{k+1}(t_{k+1}) + g_{1k+2}^0 W'_{k+2}(t_{k+2}) =$$

$$= - \sum_{j=1}^3 \overline{g_{1k+j-1}^0 W'_{k+j-1}(t_k)},$$

$$g_{2k}^0 W'_k(t_k) + g_{2k+1}^0 W'_{k+1}(t_{k+1}) + g_{2k+2}^0 W'_{k+2}(t_{k+2}) =$$

$$= - \sum_{j=1}^3 \overline{g_{2k+j-1}^0 W'_{k+j-1}(t_k)}, \quad (7)$$

$$g_{3k}^0 W'_k(t_k) + g_{3k+1}^0 W'_{k+1}(t_{k+1}) + g_{3k+2}^0 W'_{k+2}(t_{k+2}) =$$

$$= - \sum_{j=1}^3 \overline{g_{3k+j-1}^0 W'_{k+j-1}(t_k)},$$

с определителем

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} g_{1k}^0 & g_{1k+1}^0 & g_{1k+2}^0 \\ g_{2k}^0 & g_{2k+1}^0 & g_{2k+2}^0 \\ g_{3k}^0 & g_{3k+1}^0 & g_{3k+2}^0 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^3 g_{ik}^0 M_{ik},$$

в котором  $M_{ik}$  – алгебраические дополнения элементов первого столбца  $g_{ik}^0$

$$M_{1k} = \begin{vmatrix} g_{2k+1}^0 & g_{2k+2}^0 \\ g_{3k+1}^0 & g_{3k+2}^0 \end{vmatrix}, \quad M_{2k} = - \begin{vmatrix} g_{1k+1}^0 & g_{1k+2}^0 \\ g_{3k+1}^0 & g_{3k+2}^0 \end{vmatrix}, \quad M_{3k} = \begin{vmatrix} g_{1k+1}^0 & g_{1k+2}^0 \\ g_{2k+1}^0 & g_{2k+2}^0 \end{vmatrix}.$$

При этом  $k$  – индекс, принимающий значения 1, 2, 3, причем значения индекса  $k + j$ , большие 3, формально полагаются равными  $k + j - 3$ .

Решая систему (7), найдем

$$W'_k(t_k) = \frac{\Delta_{jk}}{\Delta_k},$$

где

$$\Delta_{jk} = \begin{vmatrix} - \sum_{j=1}^3 \overline{g_{1k+j-1}^0} \overline{W'_{k+j-1}(t_{k+j-1})} & g_{1k+1}^0 & g_{1k+2}^0 \\ - \sum_{j=1}^3 \overline{g_{2k+j-1}^0} \overline{W'_{k+j-1}(t_{k+j-1})} & g_{2k+1}^0 & g_{2k+2}^0 \\ - \sum_{j=1}^3 \overline{g_{3k+j-1}^0} \overline{W'_{k+j-1}(t_{k+j-1})} & g_{3k+1}^0 & g_{3k+2}^0 \end{vmatrix},$$

или

$$W'_k(t_k) = - \frac{1}{\Delta_k} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \overline{g_{ik+j-1}^0} \overline{W'_{k+j-1}(t_{k+j-1})} M_{ik}.$$

Окончательно граничные условия на прямолинейной границе запишем в виде

$$W'_k(t_k) = - \sum_{j=1}^3 \overline{r_{kk+j-1}} \overline{W'_{k+j-1}(t_{k+j-1})} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad (8)$$

где

$$\overline{r_{kk+j-1}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\overline{g_{ik+j-1}^0}}{\Delta_k} M_{ik}.$$

Для точек прямолинейной границы  $L^+$  имеем

$$\begin{aligned} x &= t, & y &= h^+, & z &= x + iy = t, \\ z_k &= t_k = x + \mu_k y = t, & \overline{t_k} &= t_k = t, & \overline{t_{k+j-1}} &= t_k = t \quad (j = \overline{1, 3}). \end{aligned} \quad (9)$$

Подставив функции (3) в граничные условия (8) на прямолинейной границе  $L^+$ , получим

$$\begin{aligned} & W'_{k0}(t_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} W'_{kl}(z_k) = \\ & = - \sum_{j=1}^3 \overline{r_{kk+j-1}} \left[ W'_{k+j-1,0}(t_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \overline{W'_{k+j-1l}}(\overline{t_{k+j-1}}) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь учтено, что на основе системы уравнений (4), выполняются следующие равенства

$$\Gamma_k t_k - \sum_{j=1}^3 \overline{r_{kk+j-1}} \overline{\Gamma_{k+j-1}} \overline{t_{k+j-1}} = 0.$$

На прямолинейной границе для граничных значений сопряженных величин имеем

$$\begin{aligned} \overline{W'_{k+j-1,0}(t_{k+j-1})} &= \overline{W'_{k+j-1,0}(t_{k+j-1})} = \overline{W'_{k+j-1,0}(t_k)}, \\ \overline{W'_{k+j-1l}(t_{k+j})} &= \overline{W'_{k+j-1l}(t_k)} = W_{k+j-1l}^+(t_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{a_{k+j-1ln}}}{\left[\zeta_{k+j-1l}^+(t_k)\right]^n}. \end{aligned}$$

Кроме того, при переходе в конформных отображениях (5) к сопряженным величинам и замене граничных значений по формулам (9), для граничных значений переменных находим

$$\overline{z_{k+j-1}} = t_k = \overline{z_{k+j-1l}} + \overline{R_{k+j-1l}} \left( \zeta_{k+j-1l}^+ + \frac{\overline{m_{k+j-1l}}}{\zeta_{k+j-1l}^+} \right) \quad (j = 1, 2, 3).$$

Заменяя в этих соотношениях граничные значения  $t_k$  переменными  $z_k$  из областей  $S_k$ , приходим к конформным отображениям

$$z_k = \overline{z_{k+j-1l}} + \overline{R_{k+j-1l}} \left( \zeta_{k+j-1l}^+ + \frac{\overline{m_{k+j-1l}}}{\zeta_{k+j-1l}^+} \right) \quad (j = 1, 2, 3), \quad (11)$$

где переменная  $\bar{\zeta}$  для лучшего восприятия заменена на  $\zeta^+$ , что подчеркивает ее связь с условиями на границе  $L^+$ .

Можно показать, что равенства (11) представляет собой конформные отображения внешности единичных кругов  $|\zeta_{k+j-1l}^+| \geq 1$  на внешности контуров  $L_{k+j-1l}^+$  верхней (относительно границы  $L^+$ ) полуплоскости  $S_k^+$  переменной  $z_k$ . Например, в случае ортотропной полуплоскости, когда комплексные параметры являются чисто мнимыми ( $\mu_k = i\beta_k$ ), это будут эллипсы  $L_{k+j-1l}^+$ , симметричные эллипсам  $L_{k+j-1l}$  полуплоскостей  $S_k$ , где заданы исходные комплексные потенциалы  $W'_k(z_k)$ . Следовательно, функции  $W_{k+j-1l}^+(z_k)$  являются функциями, голоморфными вне контуров  $L_{k+j-1l}^+$  в верхних полуплоскостях  $S_k^+$  (а следовательно, они голоморфны в нижних полуплоскостях  $S_k^-$ ), и для них имеют место разложения в ряды Лорана вида

$$W_{k+j-1l}^+(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_{k+j-1ln}} \varphi_{k+j-1ln}^+(z_k), \quad (12)$$

где  $\varphi_{k+j-1ln}^+(z_k) = \frac{1}{(\zeta_{k+j-1l}^+)^n}$ ;  $\zeta_{k+j-1l}^+$  – переменные, определяемые из конформных отображений (11).

Исходя из указанных свойств входящих в условия (10) функций, умножив обе части этих условий на ядро Коши  $\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{t-z_k}$ , и вычислив интегралы типа Коши от них по бесконечной прямой  $L^+$ , получим

$$W'_{k0}(z_k) = - \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{j=1}^3 \overline{r_{kk+j-1}} \overline{W'_{k+j-1l}}(t_k).$$

Подставив это значение функции  $W'_{k0}(z_k)$  в (3), для комплексных потенциалов получим

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[ W'_{kl}(z_k) - \sum_{j=1}^3 \overline{r_{kk+j-1}} \overline{W'_{k+j-1l}}(z_k) \right],$$

а затем, на основе разложений (6) и (12), будем иметь выражение

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_{kln} \varphi_{kln}(z_k) - \sum_{j=1}^3 \overline{r_{kk+j-1}} \overline{a_{k+j-1ln}} \psi_{k+j-1ln}(z_k) \right], \quad (13)$$

в котором

$$\varphi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n}, \quad \varphi_{k+j-1ln}^+(z_k) = \frac{1}{(\zeta_{k+j-1l}^+)^n}.$$

Функции (13) точно удовлетворяют граничным условиям на прямолинейной границе. Но они содержат неизвестные коэффициенты рядов  $a_{kln}$ . Для определения этих коэффициентов используем граничные условия (2) на контурах отверстий, предварительно продифференцировав их, чтобы исключить входящие в их правые части постоянные. Имеем

$$2Re \sum_{k=1}^3 g_{ikl} \hat{\delta}_{ks} W''_k(t_k) = 0, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} W''_k(z_k) &= \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi'_{kln}(z_k) a_{kln} - \\ &- \sum_{j=1}^3 \overline{r_{kk+j-1}} \psi'_{k+j-1ln}(z_k) \overline{a_{k+j-1ln}}], \\ \varphi'_{kln}(z_k) &= - \frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, \\ \psi'^+_{k+j-1ln}(z_k) &= - \frac{n}{(\zeta_{k+j-1l}^+)^{n-1} \overline{R_{k+j-1l}} \left( (\zeta_{k+j-1l}^+)^2 - \overline{m_{k+j-1l}} \right)} \\ &(j = 1, 2, 3), \\ \hat{\delta}_{ks} &= dz_k/ds. \end{aligned} \quad (15)$$

Функции (15) точно удовлетворяют граничным условиям на прямолинейной границе  $L^+$ . Граничные же условия на контурах отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, L}$ ) будем использовать для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$  ( $k = \overline{1, 3}$ ;  $l = \overline{1, L}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ). Для многосвязных областей эти условия удобнее использовать в дифференциальной форме (14). В этом случае они не будут содержать постоянных слагаемых, входящих в правые части граничных условий.

Граничным условиям (14) на контурах отверстий будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [13, 14, 16, 17]. Для этого выберем на каждом из контуров  $L_p$  области  $S$  систему точек  $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$  ( $p = \overline{1, \mathcal{L}}$ ,  $m = \overline{1, M_p}$ ), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (15). Тогда для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$  получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp} \delta_{k,s} \left[ \varphi'_{kln}(t_{kpm}) a_{kln} - \sum_{j=1}^3 r_{kk+j-1} \psi_{k+j-1ln}(t_{kpm}) \overline{a_{k+j-1ln}} \right] = \quad (16)$$

$$= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ikp} \delta_{k,s} \Gamma_k \quad (i = \overline{1, 3}; \quad p = \overline{1, \mathcal{L}}; \quad m = \overline{1, M_p}).$$

Кроме уравнений (16), для каждого контура отверстия должны выполняться уравнения

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 i a_{kp1} = 0 \quad (p = \overline{1, \mathcal{L}}), \quad (17)$$

следующие из условия однозначности прогиба при полном обходе контуров отверстий  $L_p$ .

Систему (16), дополненную уравнениями (17), будем решать с использованием сингулярных разложений [18, 19]. После нахождения псевдорешений этой системы, постоянные  $a_{kln}$ , а следовательно и функции  $W'_k(z_k)$ , будут известными, и по ним можно вычислять основные характеристики ЭУС (изгибающие и крутящий моменты, моменты индукций и перерезывающие силы на основных площадках). В частности, механические моменты и моменты индукций вычисляются по формулам [9]

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_k, q_k, r_k) W''_k(z_k);$$

$$(M_{dx}, M_{dy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (d_{xk}, d_{yk}) W''_k(z_k).$$

Зная основные характеристики, можно найти также моменты на произвольных площадках с нормалью  $n$  и касательной  $s$ , используя формулы

$$\begin{aligned} M_n &= M_x \cos^2 nx + M_y \cos^2 ny + 2H_{xy} \cos nx \cos ny, \\ M_s &= M_x \cos^2 ny + M_y \cos^2 nx - 2H_{xy} \cos nx \cos ny; \\ H_{ns} &= (M_y - M_x) \cos nx \cos ny + H_{xy} (\cos^2 nx - \cos^2 ny). \\ M_{dn} &= M_{dx} \cos^2 nx + M_{dy} \cos^2 ny. \end{aligned}$$

При этом, если некоторый эллипс  $L_l$  переходит в прямолинейный разрез-трещину, то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности механических моментов, моментов индукций и напряженностей (КИМИН). В частности, для механических моментов имеем формулы [20]

$$\begin{aligned} k_{1M}^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 [p_k \sin^2 \varphi_l + q_k \cos^2 \varphi_l - 2r_k \sin \varphi_l \cos \varphi_l] M_k, \\ k_{2M}^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 [(q_k - p_k) \cos \varphi_l \sin \varphi_l + r_k (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l)] M_k, \end{aligned}$$

в которых

$$M_k = \mp \frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n a_{kln}.$$

Как частный случай из приведенного решения задачи электроупругости (ЭУ) следуют решение задачи теории упругости (ТУ). Это решение получается из приведенного, если в нем принять равными нулю  $g_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$  [9]. Но для проведения численных исследований в обоих случаях можно пользоваться программой решения общей задачи электроупругости, проводя вычисления для модельного материала с постоянными

$$g'_{ij} = \lambda_g g_{ij}, \quad \beta'_{ij} = \lambda_{gp} \beta_{ij},$$

где  $\lambda_g$ ,  $\lambda_{gp}$  – пьезопараметры модельного материала. При этом для задачи ЭУ нужно принять  $\lambda_g = \lambda_{gp} = 1$ ; для задачи ТУ  $\lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ .

**2. Описание результатов численных исследований.** Численные исследования проводились для плит из двух типов пьезоэлектрических материалов  $M1$  и  $M2$ . Материалом  $M1$  является селенит кадмия, а материалом  $M2$  – пьезокерамика  $PZT-4$ . Ненулевые физико-механические постоянные для этих материалов приведены в таблице 1.

При проведении численных исследований количество членов в бесконечных рядах (15) для каждого отверстия и количество точек  $M_p$  на контурах  $L_p$ , в которых удовлетворялись граничные условия при получении уравнений системы (16), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контуре не начинали

выполняться с достаточно высокой степенью точности (пока модуль абсолютной погрешности не становился меньше  $10^{-3}$ ). Для получения таких результатов в описываемых ниже случаях достаточно было оставлять от 10 до 100 членов в указанных рядах, а на контуре  $L_p$  брать от 50 до 500 равномерно (по угловой переменной параметрического задания эллипсов) удаленных друг от друга точек. Ниже описаны результаты численных исследований для изгиба полуплоскости с отверстиями и трещинами под действием на бесконечности изгибающих моментов  $M_x^\infty = m_x$ . Представляемые результаты отнесены к величине  $m_x$ . Нормирующими параметрами для характеристик материалов, представленных в таблице 1, являются величины

$$s_0 = 10^{-6} \text{МПа}^{-1}, \quad g_0 = 10^{-2} \text{МКл}^{-1} \cdot \text{м}^2, \quad \beta_0 = 10^3 \text{МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}.$$

Таблица 1.

Физико-механические постоянные материалов

Величина	Материалы	
	М1	М2
$s_{11}/s_0$	22,260	10,745
$s_{22}/s_0$	14,984	7,398
$s_{66}/s_0$	47,481	7,637
$s_{12}/s_0$	-6,437	-2,542
$g_{16}/g_0$	109,22	2,054
$g_{21}/g_0$	-4,333	-1,159
$g_{22}/g_0$	8,016	2,458
$\beta_{11}/\beta_0$	19,612	0,106
$\beta_{22}/\beta_0$	10,612	0,090

В таблице 2 для задачи изгиба полуплоскости с круговым отверстием радиуса  $a_1$  (рис. 2) из материалов М1 и М2 приведены значения изгибающих моментов в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения  $c/a_1$ , где  $c$  – длина перемычки между контуром отверстия и границей полуплоскости. На рисунке 3 для некоторых значений  $c/a_1$  в зависимости от центрального угла  $\theta$ , отсчитываемого от оси  $Ox$  против часовой стрелки, изображены графики распределения  $M_s/m_x$  по контуру отверстия, а на рисунке 4 – для некоторых значений  $c/a_1$  даны графики распределения  $M_x/m_x$  вдоль границы полуплоскости. Сплошные и штриховые линии соответственно относятся к плитам из материалов М1 и М2.

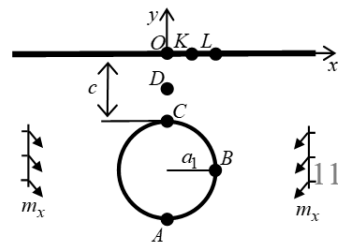


Рис. 2.

Как следует из таблицы 2, рисунков 3 и 4, с приближением отверстия к прямолинейной границе значения моментов в точках перемычки резко возрас-



Изгиб тонкой электроупругой многосвязной полуплоскости

Таблица 2. Значения изгибающих моментов  
около контура кругового отверстия в зависимости от  $c/a_1$

Материал	Точка	Момент	$c/a_1$					
			$\infty$	2	1	0,5	0,1	0,01
M1	A	$M_x$	1,760	1,798	1,837	1,886	1,994	2,077
	B	$M_y$	0,397	0,388	0,380	0,368	0,335	0,310
	C	$M_x$	1,760	1,837	1,992	2,341	4,264	12,327
	D	$M_x$	1,000	1,334	1,656	2,133	4,185	12,292
	O	$M_x$	1,000	1,283	1,588	2,067	4,155	12,272
	K	$M_x$	1,000	1,238	1,452	1,697	1,845	0,887
	L	$M_x$	1,000	1,141	1,173	1,111	0,700	0,276
M2	A	$M_x$	1,421	1,458	1,487	1,518	1,575	1,614
	B	$M_y$	-0,058	-0,057	-0,056	-0,055	-0,053	-0,051
	C	$M_x$	1,421	1,526	1,699	2,012	3,490	9,474
	D	$M_x$	1,000	1,343	1,592	1,948	3,468	9,468
	O	$M_x$	1,000	1,290	1,556	1,925	3,459	9,466
	K	$M_x$	1,000	1,227	1,382	1,530	1,496	0,666
	L	$M_x$	1,000	1,094	1,053	0,931	0,540	0,235

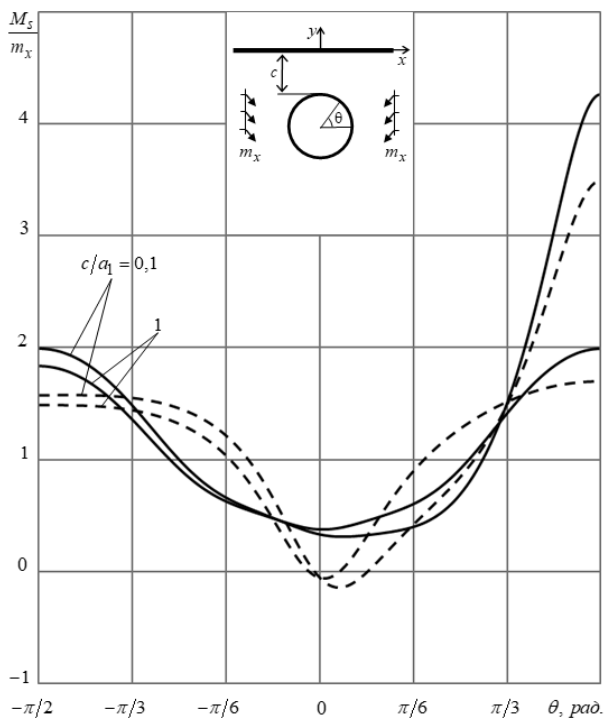


Рис. 3. Графики распределения моментов  $M_s/m_x$  около контура кругового отверстия в полуплоскости для некоторых значений  $c/a_1$ .

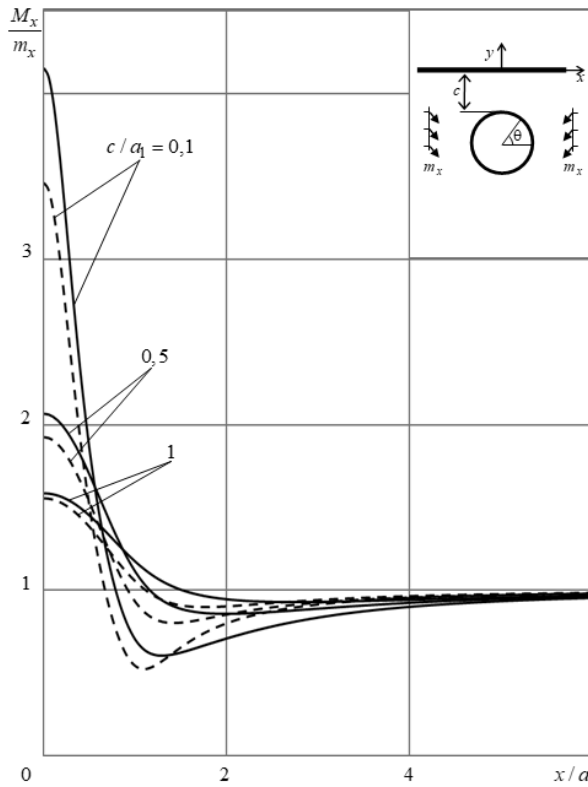


Рис. 4. Графики распределения  $M_x/m_x$  по отрезку прямолинейной границы в полуплоскости с круговым отверстием для некоторых значений  $c/a_1$ .

тают, незначительно изменяясь в остальных точках. Концентрация моментов наблюдается и вблизи точки перемычки на прямолинейной границе, причем при удалении от этой точки значения моментов быстро уменьшаются, а затем растут до значения, соответствующего случаю полуплоскости без отверстия ( $M_x/m_x = 1$ ). Это реализуется для достаточно далеких точек от точки перемычки (при  $x/a_1 \geq 10$ ). Эта закономерность резко отличает изгиб полуплоскости от растяжения (плоская задача), когда при уменьшении длины перемычки происходит уменьшение значений напряжений в точке перемычки на прямолинейной границе, затем при удалении от этой точки наблюдается увеличение напряжений, затем снижение до значения в сплошной полуплоскости, причем это предельное значение достигается уже при расстояниях  $x/a_1 \approx 2$ .

В таблице 3 для изгиба полуплоскости с вертикальной трещиной полудлины  $l_1$  (рис. 5) приведены значения КИМ для концов  $E, F$  трещины и величины изгибающих моментов  $M_x$  в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения  $c/l_1$ , где  $c$  – длина перемычки между трещиной и границей полуплоскости. При этом характерными точками были  $D(0, l_1 + c/2)$ ,  $O(0, l_1 + c)$ ,  $L(l_1, l_1 + c)$ ,  $M(2l_1, l_1 + c)$ .

Таблица 3. Значения КИМ  $k_1$  и моментов  $M_x/m_x$  в некоторых точках полуплоскости с вертикальной трещиной в зависимости от  $c/l_1$

Материал	Точка	Величина	$c/l_1$					
			$\infty$	2	1	0,5	0,1	0,01
M1	E	$k_1^-$	1,000	1,014	1,031	1,057	1,132	1,219
	F	$k_1^+$	1,000	1,020	1,053	1,123	1,519	3,063
	D	$M_x$	1,000	1,192	1,452	1,965	5,461	34,404
	O	$M_x$	1,000	1,109	1,285	1,660	4,385	27,379
	L	$M_x$	1,000	1,079	1,099	1,027	0,837	0,715
	M	$M_x$	1,000	1,021	0,975	0,927	0,868	0,829
M2	E	$k_1^-$	1,000	1,013	1,029	1,053	1,125	1,209
	F	$k_1^+$	1,000	1,018	1,049	1,115	1,499	3,022
	D	$M_x$	1,000	1,191	1,451	1,964	5,479	34,637
	O	$M_x$	1,000	1,119	1,310	1,716	4,641	29,219
	L	$M_x$	1,000	1,053	1,031	0,962	0,837	0,758
	M	$M_x$	1,000	0,998	0,966	0,940	0,909	0,886

Как следует из данных таблицы 3, при приближении трещины к границе полуплоскости значения изгибающих моментов в точках перемычки, включая точку перемычки на прямолинейной границе, резко растут; вдоль прямолинейной границы уже при небольшом удалении от перемычки влияние трещины на значения моментов мало, и при  $x/l_1 \geq 1$  этого влияния почти нет. При сближении трещины с прямолинейной границей резко растут значения КИМ для ближайшей к границе полуплоскости вершины  $F$  трещины, и при этом КИМ для дальней от полуплоскости вершины  $E$  изменяется незначительно.

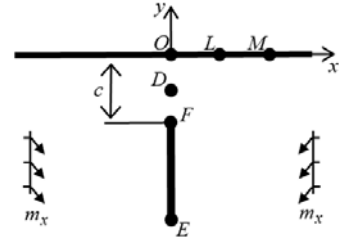


Рис. 5.

В таблице 4 для изгиба полуплоскости с круговым отверстием радиуса  $a_1$  с центром на расстоянии радиуса от границы ( $h^+ = 2a_1$ ) и вертикальной центральной трещиной длины  $2l_2$  (рис. 6) с точностью до множителя  $m_x$  приведены значения коэффициентов интенсивности для вершин трещины и изгибающих моментов  $M_x/m_x$  в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения  $2l_2/a_1$ . При этом длины перемычек между трещиной и другими границами  $c = (a_1 - 2l_2)/2$ . На рисунке 7 изображены графики распределения моментов  $M_s/m_x$  по контуру отверстия.

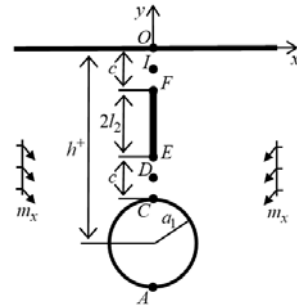


Рис. 6.

Как следует из данных таблицы 4 и рисунка 7, в случае трещины в перемычке полуплоскости с круговым отверстием с уменьшением расстояния между трещиной и другими границами (полуплоскости и контура отверстия) значения

Таблица 4.

Значения КИМ  $k_1$  и моментов  $M_x/m_x$  в некоторых точках полуплоскости с круговым отверстием и центральной трещиной длины  $2l_2$  в перемычке в зависимости от  $2l_2/a_1$

Материал	Точка	Величина	$2l_2/a_1$								
			0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
М1	E	$k_1^-$	0,372	0,535	0,669	0,794	0,923	1,066	1,242	1,496	2,009
	F	$k_1^+$	0,368	0,523	0,648	0,763	0,879	1,007	1,168	1,406	1,904
	A	$M_x$	1,837	1,840	1,844	1,850	1,859	1,870	1,885	1,906	1,957
	C	$M_x$	2,012	2,077	2,193	2,379	2,666	3,123	3,903	5,469	12,504
	D	$M_x$	1,833	1,942	2,110	2,350	2,698	3,225	4,096	5,798	13,442
	I	$M_x$	1,628	1,717	1,863	2,079	2,399	2,888	3,706	5,321	13,110
	O	$M_x$	1,608	1,671	1,783	1,962	2,238	2,675	3,419	4,905	12,144
М2	E	$k_1^-$	0,356	0,511	0,638	0,758	0,881	1,020	1,195	1,452	1,976
	F	$k_1^+$	0,355	0,507	0,630	0,746	0,864	0,998	1,166	1,417	1,923
	A	$M_x$	1,488	1,489	1,491	1,493	1,497	1,502	1,509	1,518	1,529
	C	$M_x$	1,718	1,775	1,878	2,043	2,299	2,706	3,406	4,814	9,066
	D	$M_x$	1,675	1,771	1,924	2,148	2,478	2,981	3,822	5,481	10,235
	I	$M_x$	1,597	1,686	1,831	2,047	2,366	2,857	3,677	5,301	10,044
	O	$M_x$	1,574	1,631	1,733	1,895	2,147	2,548	3,235	4,617	8,684

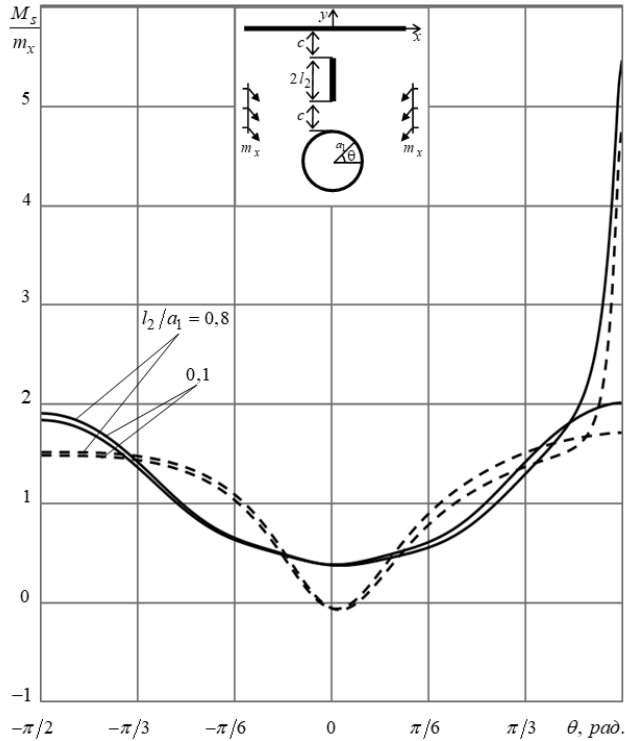


Рис.7. Графики распределения моментов  $M_s/m_x$  около контура кругового отверстия в полуплоскости с центральной трещиной в перемычке для некоторых значений отношения  $l_2/a_1$ .

изгибающих моментов около контура отверстия, в точках перемычки и прямолинейной границы вблизи перемычки, резко возрастают. В отличие от предыдущего, в этом случае значительно увеличиваются значения КИМ для обоих концов трещины.

**Выводы.** Таким образом, дано решение задачи об изгибе тонкой пьезоэлектрической многосвязной полуплоскости с отверстиями и прямолинейными трещинами. Для решения задачи использованы комплексные потенциалы [15, 16], их разложения в ряды Лорана, удовлетворение граничным условиям на прямолинейной границе методом интегралов типа Коши [11–13], а на контурах отверстий и трещин – обобщенным методом наименьших квадратов [13, 14, 16, 17]. При таком подходе граничные условия на прямолинейной границе удовлетворяются точно, а на контурах отверстий – приближенно, с высокой степенью точности. Описаны результаты численных исследований для плиты с круговым отверстием или трещиной, с круговым отверстием и трещиной в перемычке, в том числе выходящей из контура отверстия. Изучены закономерности изменения напряженно-деформированного состояния плиты в зависимости от ее материала и геометрических характеристик отверстий и трещин.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 1023030100040-4- 1.1.2;2.3.1).

1. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практическое применение / У. Кэди. – М.: Иностран. лит., 1949. – 720 с.
2. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
3. Бичурин М.И. Магнитоэлектрические материалы / М.И. Бичурин, В.М. Петров, Д.А. Филиппов, Г. Сринивасан, С.В. Нан. – М.: Акад. естествознания, 2006. – 296 с.
4. Пятаков А.П. Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение / А.П. Пятаков // Бюллетень Российского магнитного общества. – 2006. – Т. 5, № 2. – С. 1–3.
5. Nan C.-W. Multiferroic magnetoelectric composites: Historical perspective, status, and future directions / C.-W. Nan, M.I. Bichurin, S. Dong, D. Viehland, G. Srinivasan // J. Appl. Phys. – 2008. – V. 103, N 3. – P. 031101.
6. Tian R. Magnetolectric properties of piezoelectric-piezomagnetic composites with elliptical nanofibers / R. Tian, J. Liu, X. Liu // Acta Mechanica Solida Sinica. – 2020. – V. 33. – P. 368–380.
7. Srinivas S. The effective magnetoelectric coefficients of polycrystalline multiferroic composites / S. Srinivas, Y.L. Jiang // Acta Mater. – 2005. – V. 53. – P. 4135–4142.
8. Бочкарев С.А. Гидроупругая устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, выполненных из пьезоэлектрического материала / С.А. Бочкарев, С.В. Лекомцев // Вестник Перм. науч.-исслед. политех. ун-та. Механика. – 2019. – № 2. – С. 35–48.
9. Калоеров С.А. Основные соотношения прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / А.С. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2022. – № 1. – С. 20–38.
10. Калоеров С.А. Решение задачи об электромагнитоупругом изгибе многосвязной плиты / А.С. Калоеров, А.В. Сероштанов // Прикладная математика и техническая физика. – 2022. – Т. 63, № 4. – С. 143–155.
11. Калоеров С.А. Напряженное состояние анизотропной полуплоскости с конечным числом эллиптических отверстий / А.С. Калоеров // Прикладная механика. – 1966. – Т. 2, № 10.

– С. 75–82.

12. Калоеров С.А. Решение основных задач теории упругости для многосвязной анизотропной полуплоскости / С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина // Теорет. и прикладная механика. – 1997. – Вып. 27. – С. 44–63.
13. Калоеров С.А. Решение задач теории упругости для многосвязных полуплоскости и полосы / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков, А.Б. Мироненко // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2023. – № 4. – С. 23–37.
14. Калоеров С.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 103–116.
15. Калоеров С.А. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Теорет. и прикл. механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 45–56.
16. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / Воеводин В.В. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
17. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 279 с.
18. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – V. 29, N 4. – P. 1322–1342.
19. Drmac Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 / Z. Drmac, K. Veselic // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – V. 29, N 4. – P. 1343–1362.
20. Калоеров С. А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих анизотропных сред / С. А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.
21. Hou P. F. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material / P. F. Hou, G. H. Teng, H.-R. Chen // Mech. Materials. – 2009. – V. 41. – P. 329–338.

**S.A. Kaloerov, A.V. Seroshtanov, A.B. Mironenko**

### **Bending of a thin electroelastic multi-connected half-plane.**

The electroelasticity problem of transverse bending of a half-plane with internal holes and cracks has been solved. In this case, functions that are holomorphic outside ellipses are decomposed into Laurent series by negative degrees of the corresponding variables, and functions that are holomorphic in the lower half-planes are expressed using Cauchy-type integrals in terms of functions conjugate to these functions. The unknown coefficients of the series are determined by satisfying the boundary conditions on the contours of holes and cracks using the generalized least squares method, which leads the problem to solving an overridden system of linear algebraic equations. The results of numerical studies for a half-plane with various holes and cracks are described. Patterns of changes in the stress-strain state of the plate depending on its material and geometric characteristics of holes and cracks have been established.

**Keywords:** *electroelastic thin plate, half-plane, holes, complex potentials, Cauchy type integrals, generalized least squares method.*

*Получено 15.09.2023*

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2023-3-61-81

EDN:QUUGEC

©2023. И.А. Моисеенко<sup>1</sup>, Л.П. Вовк<sup>2</sup>, А.И. Дзундза<sup>3</sup>, Н.Ю. Мельничук<sup>4</sup>

## ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛН В ПРОТЯЖЕННЫХ ЦИЛИНДРАХ НА ОСНОВЕ ШЕСТИФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ РАДИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Определены три альтернативных варианта шестифакторной модели радиальной функциональной неоднородности физико-механических характеристик трансверсально-изотропного материала сплошного цилиндрического волновода для случая распространяющихся неосесимметричных волн. Представлены два подхода к определению функциональных составляющих указанных моделей, определены достаточные условия несильной радиальной неоднородности, обеспечивающие существование целевого базисного решения уравнений трехмерной линейной модели волнового деформирования. Построено базисное решение, элементы которого выражены через аналитические функции. Дан сопоставительный анализ результатов численного эксперимента, проведенного для случаев бегущих изгибных волн в однородном и функционально неоднородных трансверсально-изотропных свободных волноводах, представлены количествен-

---

<sup>1</sup>Моисеенко Игорь Алексеевич – доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: miamia733@mail.ru.

*Moiseyenko Igor Alekseevich* – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>2</sup>Вовк Леонид Петрович – доктор техн. наук, проф. каф. математического моделирования ф-та транспорт. и информ. технологий АДИ ДонНТУ, Горловка, e-mail: leonidvovk166@gmail.com.

*Vovk Leonid Petrovich* – Doctor of Technical Sciences, Professor, Automobile and Highway Institute, Gorlovka, Faculty of Transport and Information Technologies, Chair of Mathematical Modeling.

<sup>3</sup>Дзундза Алла Ивановна – доктор пед. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: alladzundza@mail.ru.

*Dzundza Alla Ivanovna* – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>4</sup>Мельничук Наталия Юрьевна – ассистент каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: nata-250396@yandex.ru.

*Melnichuk Natalia Iurievna* – Assistant, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

ные и качественные оценки полученных численных результатов.

**Ключевые слова:** функционально-градиентные материалы, трансверсально-изотропный, цилиндрический волновод, неосесимметричные волны, модель радиальной неоднородности, базисное решение.

**Введение.** Функционально-градиентные материалы в настоящее время активно исследуются как в плане поиска новых технологических подходов к достижению целевых свойств при их создании путем, например, применения методов 3-D печати, так и в плане разработки новых теоретических подходов к анализу математических моделей, описывающих механические процессы в объектах из таких материалов. Теоретическое исследование волновых процессов в функционально-градиентных волноводах предполагает, как правило, построение новых аналитических решений для соответствующих математических моделей. В этом направлении продуктивными оказались подходы, основанные на введении специальных моделей функциональной неоднородности физико-механических характеристик материалов таких волноводов. Так в работах [2–4] представлены исследования на основе единой для всех упруго-механических характеристик трансверсально-изотропного и цилиндрически ортотропного материалов сплошного цилиндрического волновода экспоненциально-степенной модели радиальной неоднородности, а в работах [5, 6] для построения базисных решений математических моделей осесимметричных волновых процессов в протяженных круговых цилиндрах привлечены специальные многофакторные модели радиальной неоднородности упруго-механических характеристик трансверсально-изотропного материала, позволяющие учитывать независимый характер функциональных законов от радиальной координаты для указанных характеристик.

В данном исследовании на основе предложенной шестифакторной модели радиальной неоднородности упруго-механических характеристик трансверсально-изотропного материала цилиндрического волновода кругового сечения построено базисное решение и исследованы свойства бегущих неосесимметричных волн изгибного типа в свободных волноводах указанного типа.

**1. Математическая модель.** Рассматривается имеющий в поперечном сечении форму круга радиуса  $R_*$  протяженный цилиндрический волновод, занимающий в нормированной параметром  $R_*$  безразмерной цилиндрической системе координат  $Or\theta z$  область

$$V = \{r \in [0, 1], \theta \in [-\pi, \pi], z \in (-\infty, \infty)\}. \quad (1)$$

Трансверсально-изотропный материал волновода полагается функционально неоднородным вдоль радиальной координаты:

$$c_s(r) = C_* \tilde{c}_s(r) \quad (s = 11, 12, 13, 33, 44), \quad \rho(r) = \rho_* \tilde{\rho}(r) \quad (r \in [0, 1]). \quad (2)$$

Здесь  $C_* = const$  [Н/м<sup>2</sup>] и  $\rho_* = const$  [кг/м<sup>3</sup>]. Полагается, что произвольные, в пределах допустимости варьирования значений физико-механических характеристик, функциональные законы

$$\tilde{c}_s = \tilde{c}_s(r) > 0 \quad (s = 11, 12, 13, 33, 44), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}(r) > 0 \quad (r \in [0, \delta]), \quad (3)$$



относятся к классу  $C^2 [0, \delta)$ . Для параметра  $\delta$  ( $\delta > 1$ ) границы допустимых значений будут определены ниже.

В рамках пространственной линейной математической модели волновой динамики рассматриваются распространяющиеся вдоль оси  $Oz$  в протяженном цилиндре из материала (2) с геометрией (1) нормальные упругие неосесимметричные волны с круговой частотой  $\omega$ , нормированным параметром  $R_*$  продольным волновым числом  $k$  ( $k \in \mathbb{C}$ ) и окружным волновым числом  $\tau$  ( $\tau \in \mathbb{N}$ ). В матричной форме вводятся представления для вектор-столбцов с нормированными величинами соответственно  $R_*$  и  $C_*$  компонентами вектора упругих перемещений

$$\mathbf{U}(r, \theta, z, t) = [u_r(r, \theta, z, t), u_\theta(r, \theta, z, t), u_z(r, \theta, z, t)]^T \quad (4)$$

и тензора напряжений

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma}(r, \theta, z, t) = & [\sigma_{rr}(r, \theta, z, t), \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, z, t), \sigma_{zz}(r, \theta, z, t), \\ & \sigma_{\theta z}(r, \theta, z, t), \sigma_{rz}(r, \theta, z, t), \sigma_{r\theta}(r, \theta, z, t)]^T. \end{aligned} \quad (5)$$

Для интегрирования уравнений движения, входящих в математическую модель рассматриваемого волнового процесса, применяется метод разделения переменных в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(r, \theta, z, t) = & \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_U \mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r), \\ \mathbf{\Sigma}(r, \theta, z, t) = & \exp(-i\omega t + ikz) \mathbf{P}_\Sigma \mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(\tau)}(r). \end{aligned} \quad (6)$$

В представлениях (6)  $\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r)$  и  $\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(\tau)}(r)$  – вектор-столбцы с зависящими от радиальной координаты вещественными амплитудными составляющими соответствующих компонент волнового процесса

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) = & [\tilde{u}_r^{(\tau)}(r), \tilde{u}_\theta^{(\tau)}(r), \tilde{u}_z^{(\tau)}(r)]^T, \\ \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{(\tau)}(r) = & [\tilde{\sigma}_{rr}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{zz}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{\theta z}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{rz}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(\tau)}(r)]^T; \end{aligned} \quad (7)$$

$\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta)$  и  $\mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta)$  – вещественные диагональные матрицы функциональной зависимости целевого решения от угловой координаты с отличными от нуля элементами

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta)]_{1,1} = & [\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta)]_{3,3} = \cos(\tau\theta), \quad [\mathbf{T}_U^{(\tau)}(\theta)]_{2,2} = \sin(\tau\theta), \\ [\mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta)]_{j,j} = & \cos(\tau\theta) \quad (j = 1, 2, 3, 5), \quad [\mathbf{T}_\Sigma^{(\tau)}(\theta)]_{j,j} = \sin(\tau\theta) \quad (j = 4, 6); \end{aligned} \quad (8)$$

$\mathbf{P}_U$  и  $\mathbf{P}_\Sigma$  – диагональные матрицы комплексной нормировки целевого решения с отличными от нуля элементами

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}_U]_{1,1} = & [\mathbf{P}_U]_{2,2} = 1, \quad [\mathbf{P}_U]_{3,3} = i, \\ [\mathbf{P}_\Sigma]_{j,j} = & 1 \quad (j = 1, 2, 3, 6), \quad [\mathbf{P}_\Sigma]_{j,j} = i \quad (j = 4, 5). \end{aligned} \quad (9)$$

Векторные функции  $\tilde{\Sigma}^{(\tau)}(r)$  и  $\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r)$  связаны между собой соотношением

$$\tilde{\Sigma}^{(\tau)}(r) = \tilde{\mathbf{G}}(r) \tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r), \quad (10)$$

где  $\tilde{\mathbf{G}}(r)$  – матрица-функция размерности  $6 \times 6$  с отличными от нуля элементами

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{G}}(r)]_{1,1} &= [\tilde{\mathbf{G}}(r)]_{2,2} = \tilde{c}_{11}, & [\tilde{\mathbf{G}}(r)]_{1,2} &= [\tilde{\mathbf{G}}(r)]_{2,1} = \tilde{c}_{12}, \\ [\tilde{\mathbf{G}}(r)]_{1,3} &= [\tilde{\mathbf{G}}(r)]_{2,3} = [\tilde{\mathbf{G}}(r)]_{3,1} = [\tilde{\mathbf{G}}(r)]_{3,2} = \tilde{c}_{13}, & (11) \\ [\tilde{\mathbf{G}}(r)]_{3,3} &= \tilde{c}_{33}, & [\tilde{\mathbf{G}}(r)]_{4,4} &= [\tilde{\mathbf{G}}(r)]_{5,5} = \tilde{c}_{44}, & [\tilde{\mathbf{G}}(r)]_{6,6} &= \tilde{c}_{66}; \end{aligned}$$

$\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r)$  – матричный размерности  $6 \times 3$  дифференциальный оператор, отличные от нуля элементы которого имеют вид

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r)]_{1,1} &= d_r, & [\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r)]_{2,1} &= r^{-1}, & [\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r)]_{2,2} &= \tau r^{-1}, \\ [\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r)]_{3,3} &= -k, & [\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r)]_{4,2} &= k, & [\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r)]_{4,3} &= -\tau r^{-1}, & (12) \\ [\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r)]_{5,1} &= k, & [\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r)]_{5,3} &= d_r, & [\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r)]_{6,1} &= -\tau r^{-1}, \\ & & [\tilde{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r)]_{6,2} &= d_r - r^{-1}. \end{aligned}$$

В соотношениях (11)  $\tilde{c}_{66} = (\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{12})/2$ .

С учетом соотношений (2) – (12) уравнения движения преобразуются в систему из трех однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которую в матричной форме можно представить так:

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(r) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) = \mathbf{O} \quad (r \in [0, \delta]). \quad (13)$$

Здесь  $\mathbf{O}$  – нулевой вектор-столбец размерности 3;  $\tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(r)$  – матричный размерности  $3 \times 3$  дифференциальный оператор с элементами

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(r)]_{n,n} &= r^2 d_r^2 + \tilde{f}_{nn}^{(1)} r d_r + \tilde{f}_{nn}^{(2)} \quad (n = \overline{1, 3}), \\ [\tilde{\mathbf{D}}^{(\tau)}(r)]_{n,m} &= \tilde{f}_{nm}^{(1)} r d_r + \tilde{f}_{nm}^{(2)} \quad (n, m = 1, 2; 2, 1; 1, 3; 3, 1; 2, 3; 3, 2). \end{aligned} \quad (14)$$

В соотношениях (14) используются функции  $\tilde{f}_{nm}^{(s)} = \tilde{f}_{nm}^{(s)}(r)$  ( $s = \overline{1, 2}$ ;  $n, m = \overline{1, 3}$ )

вида

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{11}^{(1)} &= 1 + \frac{\tilde{c}'_{11}}{\tilde{c}_{11}} r, & \tilde{f}_{11}^{(2)} &= -1 - \tau^2 \frac{\tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}} + \frac{\tilde{c}'_{12}}{\tilde{c}_{11}} r + \left( \Omega^2 \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{c}_{11}} - k^2 \frac{\tilde{c}_{44}}{\tilde{c}_{11}} \right) r^2, \\
 \tilde{f}_{12}^{(1)} &= \tau \left( \frac{\tilde{c}_{12}}{\tilde{c}_{11}} + \frac{\tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}} \right), & \tilde{f}_{12}^{(2)} &= -\tau \left( 1 + \frac{\tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}} - \frac{\tilde{c}'_{12}}{\tilde{c}_{11}} r \right), \\
 \tilde{f}_{13}^{(1)} &= -k \left( \frac{\tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{11}} + \frac{\tilde{c}_{44}}{\tilde{c}_{11}} \right) r, & \tilde{f}_{13}^{(2)} &= -k \frac{\tilde{c}'_{13}}{\tilde{c}_{11}} r^2, \\
 \tilde{f}_{21}^{(1)} &= -\tau \left( 1 + \frac{\tilde{c}_{12}}{\tilde{c}_{66}} \right), & \tilde{f}_{21}^{(2)} &= -\tau \left( 1 + \frac{\tilde{c}_{11}}{\tilde{c}_{66}} + \frac{\tilde{c}'_{66}}{\tilde{c}_{66}} r \right), \\
 \tilde{f}_{22}^{(1)} &= 1 + \frac{\tilde{c}'_{66}}{\tilde{c}_{66}} r, & \tilde{f}_{22}^{(2)} &= -1 - \tau^2 \frac{\tilde{c}_{11}}{\tilde{c}_{66}} - \frac{\tilde{c}'_{66}}{\tilde{c}_{66}} r + \left( \Omega^2 \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{c}_{66}} - k^2 \frac{\tilde{c}_{44}}{\tilde{c}_{66}} \right) r^2, \\
 \tilde{f}_{23}^{(1)} &= 0, & \tilde{f}_{23}^{(2)} &= k\tau \left( \frac{\tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{66}} + \frac{\tilde{c}_{44}}{\tilde{c}_{66}} \right) r, \\
 \tilde{f}_{31}^{(1)} &= k \left( 1 + \frac{\tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{44}} \right) r, & \tilde{f}_{31}^{(2)} &= k \left( 1 + \frac{\tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{44}} + \frac{\tilde{c}'_{44}}{\tilde{c}_{44}} r \right) r, \\
 \tilde{f}_{32}^{(1)} &= 0, & \tilde{f}_{32}^{(2)} &= k\tau \left( 1 + \frac{\tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{44}} \right) r, \\
 \tilde{f}_{33}^{(1)} &= 1 + \frac{\tilde{c}'_{44}}{\tilde{c}_{44}} r, & \tilde{f}_{33}^{(2)} &= -\tau^2 + \left( \Omega^2 \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{c}_{44}} - k^2 \frac{\tilde{c}_{33}}{\tilde{c}_{44}} \right) r^2.
 \end{aligned} \tag{15}$$

В соотношениях (12), (14), (15)  $d_r = d/dr$ ;  $\phi' = d\phi/dr$ ;  $\Omega^2 = \rho_* R_*^2 \omega^2 / C_*$  – безразмерная приведенная частота.

Представленная математическая модель (1) – (15) дополняется классическими однородными граничными условиями свободной

$$\left[ \tilde{\Sigma}^{(\tau)}(1) \right]_{(1,5,6)} = \mathbf{O}, \tag{16}$$

либо жестко закрепленной

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(1) = \mathbf{O} \tag{17}$$

граничной поверхности волновода.

**2. Модель радиальной неоднородности.** В декартовой системе координат  $Ox_1x_2$  на плоскости комплексной переменной  $\xi = x_1 + ix_2$  формально полагается, что неотрицательная часть полуоси  $Ox_1$  совпадает с осью  $Or$ . С учетом вида определяемых в соотношениях (15) функций  $\tilde{f}_{nm}^{(s)}$  ( $s = \overline{1,2}$ ;  $n, m = \overline{1,3}$ ) далее функциональные законы (3) рассматриваются в рамках трех альтернативных вариантов модели радиальной неоднородности материала волновода в виде

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_{11} &= e^\varphi, & \tilde{c}_{12} &= (1 - 2\psi_1) e^\varphi, & \tilde{c}_{13} &= \psi_2 e^\varphi, & \tilde{c}_{33} &= \psi_3 e^\varphi, \\
 \tilde{c}_{44} &= \psi_4 e^\varphi, & \tilde{c}_{66} &= \psi_1 e^\varphi, & \tilde{\rho}(r) &= \psi_5 e^\varphi & (r \in [0, 1]);
 \end{aligned} \tag{18-A}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_{11} &= \psi_1 e^\varphi, & \tilde{c}_{12} &= (\psi_1 - 2) e^\varphi, & \tilde{c}_{13} &= \psi_2 e^\varphi, & \tilde{c}_{33} &= \psi_3 e^\varphi, \\
 \tilde{c}_{44} &= \psi_4 e^\varphi, & \tilde{c}_{66} &= e^\varphi, & \tilde{\rho}(r) &= \psi_5 e^\varphi & (r \in [0, 1]);
 \end{aligned} \tag{18-B}$$

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{11} &= \psi_1 e^\varphi, & \tilde{c}_{12} &= (\psi_1 - 2\psi_4) e^\varphi, & \tilde{c}_{13} &= \psi_2 e^\varphi, & \tilde{c}_{33} &= \psi_3 e^\varphi, \\ \tilde{c}_{44} &= e^\varphi, & \tilde{c}_{66} &= \psi_4 e^\varphi, & \tilde{\rho}(r) &= \psi_5 e^\varphi \quad (r \in [0, 1]).\end{aligned}\quad (18-B)$$

Здесь  $\varphi = \varphi(\xi)$  и  $\psi_s = \psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 5}$ ) – произвольные, аналитические в области  $|\xi| < \delta$  функции. Для каждого из вариантов модели неоднородности (18-A)– (18-B) рассматривается аналитическое продолжение на плоскость комплексной переменной  $\xi$  определяемого соотношениями (14), (15) дифференциального оператора  $\hat{\mathbf{D}}^{(\tau)}(r)$  в оператор  $\hat{\mathbf{D}}^{(\tau)}(\xi)$  с элементами

$$\begin{aligned}\left[ \hat{\mathbf{D}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{n,n} &= \xi^2 d_\xi^2 + \hat{f}_{nn}^{(1)} \xi d_\xi + \hat{f}_{nn}^{(2)} \quad (n = \overline{1, 3}), \\ \left[ \hat{\mathbf{D}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{n,m} &= \hat{f}_{nm}^{(1)} \xi d_\xi + \hat{f}_{nm}^{(2)} \quad (n, m = 1, 2; 2, 1; 1, 3; 3, 1; 2, 3; 3, 2),\end{aligned}\quad (19)$$

где  $d_\xi = d/d\xi$ . Соответственно выбранному варианту модели неоднородности (18-A) – (18-B) определяются входящие в соотношения (19) функции  $\hat{f}_{nm}^{(s)} = \hat{f}_{nm}^{(s)}(\xi)$  ( $s = \overline{1, 2}$ ;  $n, m = \overline{1, 3}$ ) так:

$$\begin{aligned}\hat{f}_{11}^{(1)} &= 1 + \varphi' \xi, \\ \hat{f}_{11}^{(2)} &= -1 - \tau^2 \psi_1 + (\varphi' - 2\psi'_1 - 2\phi_1) \xi + (\Omega^2 \psi_5 - k^2 \psi_4) \xi^2, \\ \hat{f}_{12}^{(1)} &= \tau(1 - \psi_1), \quad \hat{f}_{12}^{(2)} = \tau(-1 - \psi_1 + (\varphi' - 2\psi'_1 - 2\phi_1) \xi), \\ \hat{f}_{13}^{(1)} &= -k(\psi_2 + \psi_4) \xi, \\ \hat{f}_{13}^{(2)} &= -k(\phi_2 + \psi'_2) \xi^2, \\ \hat{f}_{21}^{(1)} &= \tau(1 - \chi_1), \\ \hat{f}_{21}^{(2)} &= -\tau(1 + \chi_1 + (\varphi' + \chi_{10}) \xi), \\ \hat{f}_{22}^{(1)} &= 1 + (\varphi' + \chi_{10}) \xi, \\ \hat{f}_{22}^{(2)} &= -1 - \tau^2 \chi_1 - (\varphi' + \chi_{10}) \xi + (\Omega^2 \chi_4 - k^2 \chi_3) \xi^2, \\ \hat{f}_{23}^{(1)} &= 0, \quad \hat{f}_{23}^{(2)} = k\tau(\chi_2 + \chi_3) \xi, \\ \hat{f}_{31}^{(1)} &= k(1 + \chi_7) \xi, \\ \hat{f}_{31}^{(2)} &= k(1 + \chi_7 + (\varphi' + \chi_{13}) \xi) \xi, \\ \hat{f}_{32}^{(1)} &= 0, \quad \hat{f}_{32}^{(2)} = k\tau(1 + \chi_7) \xi, \\ \hat{f}_{33}^{(1)} &= 1 + (\varphi' + \chi_{13}) \xi, \\ \hat{f}_{33}^{(2)} &= -\tau^2 + (\Omega^2 \chi_9 - k^2 \chi_8) \xi^2;\end{aligned}\quad (20-A)$$

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_{11}^{(1)} &= 1 + (\varphi' + \chi_{10}) \xi, \\
 \hat{f}_{11}^{(2)} &= -1 - \tau^2 \chi_1 + (\varphi' + \chi_{10} - 2\phi_3) \xi + (\Omega^2 \chi_4 - k^2 \chi_3) \xi^2, \\
 \hat{f}_{12}^{(1)} &= \tau (1 - \chi_1), \hat{f}_{12}^{(2)} = \tau (-1 - \chi_1 + (\varphi' + \chi_{10} - 2\phi_3) \xi), \\
 \hat{f}_{13}^{(1)} &= -k (\chi_2 + \chi_3) \xi, \hat{f}_{13}^{(2)} = -k (\chi_{11} + \phi_4) \xi^2, \\
 \hat{f}_{21}^{(1)} &= \tau (1 - \psi_1), \hat{f}_{21}^{(2)} = -\tau (1 + \psi_1 + \xi \varphi'), \hat{f}_{22}^{(1)} = 1 + \xi \varphi', \\
 \hat{f}_{22}^{(2)} &= -1 - \tau^2 \psi_1 - \xi \varphi' + (\Omega^2 \psi_5 - k^2 \psi_4) \xi^2, \\
 \hat{f}_{23}^{(1)} &= 0, \hat{f}_{23}^{(2)} = k\tau (\psi_2 + \psi_4) \xi, \\
 \hat{f}_{31}^{(1)} &= k (\chi_7 + 1) \xi, \hat{f}_{31}^{(2)} = k (1 + \chi_7 + (\varphi' + \chi_{13}) \xi) \xi, \\
 \hat{f}_{32}^{(1)} &= 0, \hat{f}_{32}^{(2)} = k\tau (\chi_7 + 1) \xi, \\
 \hat{f}_{33}^{(1)} &= 1 + (\varphi' + \chi_{13}) \xi, \hat{f}_{33}^{(2)} = -\tau^2 + (\Omega^2 \chi_9 - k^2 \chi_8) \xi^2.
 \end{aligned} \tag{20-B}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_{11}^{(1)} &= 1 + (\varphi' + \chi_{10}) \xi, \\
 \hat{f}_{11}^{(2)} &= -1 - \tau^2 \chi_3 + (\varphi' + \chi_{10} - 2\chi_{12} - 2\phi_5) \xi + (\Omega^2 \chi_4 - k^2 \chi_1) \xi^2, \\
 \hat{f}_{12}^{(1)} &= \tau (1 - \chi_3), \hat{f}_{12}^{(2)} = \tau (-1 - \chi_3 + (\varphi' + \chi_{10} - 2\chi_{12} - 2\phi_5) \xi), \\
 \hat{f}_{13}^{(1)} &= -k (\chi_1 + \chi_2) \xi, \hat{f}_{13}^{(2)} = -k (\chi_{11} + \phi_4) \xi^2, \\
 \hat{f}_{21}^{(1)} &= \tau (1 - \chi_6), \hat{f}_{21}^{(2)} = -\tau (1 + \chi_6 + (\varphi' + \chi_{13}) \xi), \\
 \hat{f}_{22}^{(1)} &= 1 + (\varphi' + \chi_{13}) \xi, \\
 \hat{f}_{22}^{(2)} &= -1 - \tau^2 \chi_6 + (\varphi' + \chi_{13}) \xi + (\Omega^2 \chi_9 - k^2 \chi_5) \xi^2, \\
 \hat{f}_{23}^{(1)} &= 0, \hat{f}_{23}^{(2)} = k\tau (\chi_5 + \chi_7) \xi, \\
 \hat{f}_{31}^{(1)} &= k (\psi_2 + 1) \xi, \hat{f}_{31}^{(2)} = k (1 + \psi_2 + \xi \varphi') \xi, \\
 \hat{f}_{32}^{(1)} &= 0, \hat{f}_{32}^{(2)} = k\tau (\psi_2 + 1) \xi, \\
 \hat{f}_{33}^{(1)} &= 1 + \xi \varphi', \hat{f}_{33}^{(2)} = -\tau^2 + (\Omega^2 \psi_5 - k^2 \psi_3) \xi^2.
 \end{aligned} \tag{20-B}$$

В соотношениях (20-A) – (20-B) использован общий набор вспомогательных функций  $\chi_m = \chi_m(\xi)$  ( $m = \overline{1, 13}$ ) и  $\phi_n = \phi_n(\xi)$  ( $n = \overline{1, 5}$ ) вида

$$\begin{aligned}
 \chi_1 &= \frac{1}{\psi_1}, \quad \chi_2 = \frac{\psi_2}{\psi_1}, \quad \chi_3 = \frac{\psi_4}{\psi_1}, \quad \chi_4 = \frac{\psi_5}{\psi_1}, \quad \chi_5 = \frac{1}{\psi_4}, \quad \chi_6 = \frac{\psi_1}{\psi_4}, \\
 \chi_7 &= \frac{\psi_2}{\psi_4}, \quad \chi_8 = \frac{\psi_3}{\psi_4}, \quad \chi_9 = \frac{\psi_5}{\psi_4}, \quad \chi_{10} = \frac{\psi'_1}{\psi_1}, \quad \chi_{11} = \frac{\psi'_2}{\psi_1}, \\
 \chi_{12} &= \frac{\psi'_4}{\psi_1}, \quad \chi_{13} = \frac{\psi'_4}{\psi_4}, \quad \phi_1 = \psi_1 \varphi', \quad \phi_2 = \psi_2 \varphi', \quad \phi_3 = \chi_1 \varphi', \\
 \phi_4 &= \chi_2 \varphi', \quad \phi_5 = \chi_3 \varphi'.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Ставится целевая задача построить для уравнения

$$\hat{\mathbf{D}}^{(\tau)}(\xi) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(\tau)}(\xi) = \mathbf{O} \quad (|\xi| < \delta) \tag{22}$$

набор из трех линейно независимых частных решений вида

$$\hat{\mathbf{U}}^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi) = \left[ \hat{u}_r^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi), \hat{u}_\theta^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi), \hat{u}_z^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi) \right]^T \quad (23)$$

$$(q = \overline{1, 3})$$

с аналитическими в области  $|\xi| < \delta$  элементами  $\hat{u}_s^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi)$  ( $s = r, \theta, z; q = \overline{1, 3}$ ). Известно, что система дифференциальных уравнений (22) имеет аналитические в области  $|\xi| < \delta$  решения, если для выбранного варианта модели неоднородности (18-А) – (18-В) определяемые в соответствующих соотношениях (20-А) – (20-В) функции  $\hat{f}_{nm}^{(j)}(\xi)$  ( $j = \overline{1, 2}; n, m = \overline{1, 3}$ ) будут аналитическими в области  $|\xi| < \delta$  [7, 8].

Рассматриваются два подхода к определению аналитических в области  $|\xi| < \delta$  функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 5}$ ) по заданным функциональным законам (3) – аналитический и численный.

Аналитический подход может быть реализован при выполнении трех условий. Во-первых, функции  $\tilde{c}_s(r)$  ( $s = 11, 12, 13, 33, 44$ ) и  $\tilde{\rho}(r)$  допускают аналитическое продолжение на плоскость комплексной переменной  $\xi$  в аналитические в области  $|\xi| < \delta$  функции соответственно  $\hat{c}_s(\xi)$  ( $s = 11, 12, 13, 33, 44$ ) и  $\hat{\rho}(\xi)$ . Во-вторых, определяемые из полученных соответственно выбранному варианту модели неоднородности (18-А) – (18-В) соотношений

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = \ln(\hat{c}_{11}(\xi)), \quad \psi_1(\xi) = \frac{\hat{c}_{66}(\xi)}{\hat{c}_{11}(\xi)}, \quad \psi_2(\xi) = \frac{\hat{c}_{13}(\xi)}{\hat{c}_{11}(\xi)}, \\ \psi_3(\xi) = \frac{\hat{c}_{33}(\xi)}{\hat{c}_{11}(\xi)}, \quad \psi_4(\xi) = \frac{\hat{c}_{44}(\xi)}{\hat{c}_{11}(\xi)}, \quad \psi_5(\xi) = \frac{\hat{\rho}(\xi)}{\hat{c}_{11}(\xi)}, \end{aligned} \quad (24-А)$$

либо

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = \ln(\hat{c}_{66}(\xi)), \quad \psi_1(\xi) = \frac{\hat{c}_{11}(\xi)}{\hat{c}_{66}(\xi)}, \quad \psi_2(\xi) = \frac{\hat{c}_{13}(\xi)}{\hat{c}_{66}(\xi)}, \\ \psi_3(\xi) = \frac{\hat{c}_{33}(\xi)}{\hat{c}_{66}(\xi)}, \quad \psi_4(\xi) = \frac{\hat{c}_{44}(\xi)}{\hat{c}_{66}(\xi)}, \quad \psi_5(\xi) = \frac{\hat{\rho}(\xi)}{\hat{c}_{66}(\xi)}, \end{aligned} \quad (24-В)$$

либо

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = \ln(\hat{c}_{44}(\xi)), \quad \psi_1(\xi) = \frac{\hat{c}_{11}(\xi)}{\hat{c}_{44}(\xi)}, \quad \psi_2(\xi) = \frac{\hat{c}_{13}(\xi)}{\hat{c}_{44}(\xi)}, \\ \psi_3(\xi) = \frac{\hat{c}_{33}(\xi)}{\hat{c}_{44}(\xi)}, \quad \psi_4(\xi) = \frac{\hat{c}_{66}(\xi)}{\hat{c}_{44}(\xi)}, \quad \psi_5(\xi) = \frac{\hat{\rho}(\xi)}{\hat{c}_{44}(\xi)}, \end{aligned} \quad (24-В)$$

функции  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 5}$ ) являются аналитическими в области  $|\xi| < \delta$ . В-третьих, определяемые соотношениями (21) функции  $\chi_j(\xi)$  ( $j = \overline{1, 13}$ ), входящие соответственно выбранной модели неоднородности (18-А) – (18-В) в соотношения (20-А) – (20-В) также являются аналитическими в области  $|\xi| < \delta$ . Второе и третье условия выполняются, если потребовать выполнение единого для

трех альтернативных вариантов модели неоднородности (18-A) – (18-B) достаточного аналитического условия несильной радиальной неоднородности материала волновода в виде

$$1 < \delta \leq \min \left( \left| \xi_*^{(1)} \right|, \left| \xi_*^{(2)} \right|, \left| \xi_*^{(3)} \right| \right), \quad (25)$$

где  $\xi_*^{(1)}$ ,  $\xi_*^{(2)}$  и  $\xi_*^{(3)}$  – наименьшие по модулю нули функций соответственно  $\hat{c}_{11}(\xi)$ ,  $\hat{c}_{44}(\xi)$  и  $\hat{c}_{66}(\xi)$ .

Численный подход реализуется любым численным методом, позволяющим определить аппроксимирующие полиномы для искомых функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 5}$ )

$$\varphi(\xi) = \sum_{n=0}^N a_n^{(0)} \xi^n, \quad \psi_s(\xi) = \sum_{n=0}^N a_n^{(s)} \xi^n \quad (s = \overline{1, 5}) \quad (26)$$

из полученных соответственно выбранному варианту модели неоднородности (18-A) – (18-B) приближенных соотношений:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &\approx \ln(\tilde{c}_{11}(r)), \quad \psi_1(r) \approx \frac{\tilde{c}_{66}(r)}{\tilde{c}_{11}(r)}, \quad \psi_2(r) \approx \frac{\tilde{c}_{13}(r)}{\tilde{c}_{11}(r)}, \\ \psi_3(r) &\approx \frac{\tilde{c}_{33}(r)}{\tilde{c}_{11}(r)}, \quad \psi_4(r) \approx \frac{\tilde{c}_{44}(r)}{\tilde{c}_{11}(r)}, \quad \psi_5(r) \approx \frac{\tilde{\rho}(r)}{\tilde{c}_{11}(r)} \quad (r \in [0, 1]); \end{aligned} \quad (27-A)$$

$$\begin{aligned} \varphi(r) &\approx \ln(\tilde{c}_{66}(r)), \quad \psi_1(r) \approx \frac{\tilde{c}_{11}(r)}{\tilde{c}_{66}(r)}, \quad \psi_2(r) \approx \frac{\tilde{c}_{13}(r)}{\tilde{c}_{66}(r)}, \\ \psi_3(r) &\approx \frac{\tilde{c}_{33}(r)}{\tilde{c}_{66}(r)}, \quad \psi_4(r) \approx \frac{\tilde{c}_{44}(r)}{\tilde{c}_{66}(r)}, \quad \psi_5(r) \approx \frac{\tilde{\rho}(r)}{\tilde{c}_{66}(r)} \quad (r \in [0, 1]); \end{aligned} \quad (27-B)$$

$$\begin{aligned} \varphi(r) &\approx \ln(\tilde{c}_{44}(r)), \quad \psi_1(r) \approx \frac{\tilde{c}_{11}(r)}{\tilde{c}_{44}(r)}, \quad \psi_2(r) \approx \frac{\tilde{c}_{13}(r)}{\tilde{c}_{44}(r)}, \\ \psi_3(r) &\approx \frac{\tilde{c}_{33}(r)}{\tilde{c}_{44}(r)}, \quad \psi_4(r) \approx \frac{\tilde{c}_{66}(r)}{\tilde{c}_{44}(r)}, \quad \psi_5(r) \approx \frac{\tilde{\rho}(r)}{\tilde{c}_{44}(r)} \quad (r \in [0, 1]). \end{aligned} \quad (27-B)$$

С учетом представления (26) при численном подходе для выполнения целевой задачи требуется обеспечить аналитичность в области  $|\xi| < \delta$  только определяемых соотношениями (21) функций  $\chi_j(\xi)$  ( $j = \overline{1, 13}$ ), входящих соответственно выбранному варианту модели неоднородности (18-A) – (18-B) в соотношения (20-A) – (20-B). Это требование обеспечивается достаточным численным условием несильной радиальной неоднородности материала волновода вида

$$1 < \delta \leq |s_*|, \quad (28)$$

где  $s_*$  – наименьший по модулю нуль функций  $\psi_1(\xi)$  и  $\psi_4(\xi)$ , которые определяются из соответственно выбранному варианту модели неоднородности (18-A)–(18-B) соотношениями (26), (27-A) – (27-B).

Необходимо отметить, что численный подход может считаться более гибким с точки зрения реализации поставленной целевой задачи поскольку, во-первых, достаточное условие (28) зависит от порядка аппроксимирующих полиномов в представлениях (26) и для рассматриваемых альтернативных вариантов модели неоднородности (18-А) – (18-В) накладывает различающиеся ограничения на заданные функциональные законы (3), во-вторых, при проведении численных экспериментов полиномиальные представления (26) более оптимальны с точки зрения временных затрат, чем определяемые при аналитическом подходе соотношениями (24-А) – (24-В) разложения. Сделанный вывод не противоречит тому факту, что найденные при численном подходе функции  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1,5}$ ) на основании выбранного варианта модели неоднородности (18-А) – (18-В) определяют отличающиеся от заданных соотношениями (3) функциональные законы  $\tilde{c}_s^{(*)}(r)$  ( $s = 11, 12, 13, 33, 44$ ) и  $\tilde{\rho}^{(*)}(r)$ , для которых будет реализовываться целевая задача. Это следует из того, что физико-механические характеристики реальных материалов определяются экспериментально с достаточно ограниченной точностью  $\varepsilon$ , поэтому степень  $N$  полиномов в представлениях (26), обеспечивающая соответствующую точность аппроксимации

$$\max_{r \in [0,1]} \left| \tilde{c}_s(r) - \tilde{c}_s^{(*)}(r) \right| < \varepsilon \quad (s = 11, 12, 13, 33, 44), \quad \max_{r \in [0,1]} \left| \tilde{\rho}(r) - \tilde{\rho}^{(*)}(r) \right| < \varepsilon, \quad (29)$$

может выбираться небольшой.

**3. Базисное решение.** Полученные в рамках аналитического либо численного подходов по заданным функциональным законам (3) аналитические в области  $|\xi| < \delta$  функции  $\varphi(\xi)$ ,  $\psi_j(\xi)$  ( $j = \overline{1,5}$ ), а также полученные на их основе функции  $\chi_j(\xi)$  ( $j = \overline{1,13}$ ),  $\phi_j(\xi)$  ( $j = \overline{1,13}$ ) и подлежащие определению элементы  $\hat{u}_s^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi)$  ( $s = r, \theta, z$ ;  $q = \overline{1,3}$ ) искомых частных решений (23) представляются абсолютно и равномерно сходящимися в любом круге  $|\xi| \leq s$  ( $0 < s < \delta$ ) разложениями вида

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(0)} \xi^n, \quad \psi_j(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} \xi^n \quad (j = \overline{1,5}), \\ \chi_j(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(j)} \xi^n \quad (j = \overline{1,13}), \quad \phi_j(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(j)} \xi^n \quad (j = \overline{1,5}), \\ \hat{u}_s^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi) &= \xi^{\eta_q + \kappa_s} \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(s,q)} \xi^n \quad (s = r, \theta, z; q = \overline{1,3}). \end{aligned} \quad (30)$$

В представлениях (30)  $\kappa_r = \kappa_\theta = 0$ ,  $\kappa_z = 1$ ;  $\left\{ a_n^{(j)} \right\}_{n=0}^{\infty}$  ( $j = \overline{0,5}$ ) – наборы коэффициентов, определяемые соответственно выбранному варианту модели неоднородности (18-А) – (18-В) из соотношений (24-А) – (24-В) при аналитическом подходе, либо из соотношений (26), (27-А) – (27-В) при численном подходе ( $a_n^{(j)} = 0$   $j = \overline{0,5}$ ;  $n = \overline{N+1, \infty}$ );  $\left\{ b_n^{(j)} \right\}_{n=0}^{\infty}$  ( $j = \overline{1,13}$ ) и  $\left\{ g_n^{(j)} \right\}_{n=0}^{\infty}$  ( $j = \overline{1,5}$ ) –



определяемые из соотношений (21) наборы коэффициентов вида

$$b_n^1 = \left( \delta_{0,n} - \sum_{m=0}^{n-1} b_m^1 a_{n-m}^{(1)} \right) / a_0^{(1)}, \quad b_n^{(2)} = \left( a_n^{(2)} - \sum_{m=0}^{n-1} b_m^{(2)} a_{n-m}^{(1)} \right) / a_0^{(1)}, \dots$$

$$g_n^{(1)} = \sum_{m=0}^n (n-m+1) a_{n-m+1}^{(0)} a_m^{(1)}, \dots$$

$$(n = \overline{0, \infty}),$$
(31)

где

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & m = n; \\ 0, & m \neq n; \end{cases} \quad (32)$$

$\eta_q \in \{0\} \cup \mathbb{N}$  ( $q = \overline{1, 3}$ ) и  $\left\{ d_n^{(s,q)} \right\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $|d_0^{(r,q)}| + |d_0^{(\theta,q)}| + |d_0^{(z,q)}| \neq 0$  ( $s = r, \theta, z$ ;  $q = \overline{1, 3}$ ) – подлежащие определению соответственно параметры и наборы коэффициентов.

Для каждого варианта модели неоднородности (18-A) – (18-B) после подстановки разложений (30) в соответствующие соотношения (20-A) – (20-B) из уравнения (22) определяется последовательность систем линейных уравнений третьего порядка, включающая однородную систему, решениями которой являются три линейно независимые вектора

$$\mathbf{B}_0^{(q)} = \left[ d_0^{(r,q)}, d_0^{(\theta,q)}, d_0^{(z,q)} \right]^T \quad (q = \overline{1, 3}) \quad (33)$$

с элементами

$$d_0^{(r,1)} = 1, \quad d_0^{(\theta,1)} = -1, \quad d_0^{(z,1)} = 0 \quad (\eta_1 = \tau - 1),$$

$$d_0^{(r,2)} = 0, \quad d_0^{(\theta,2)} = 0, \quad d_0^{(z,2)} = 1 \quad (\eta_2 = \tau - 1),$$

$$d_0^{(r,3)} = \left( \tau - (\tau + 2) a_0^{(1)} \right) a_0^{(4)}, \quad d_0^{(\theta,3)} = \left( \tau \left( a_0^{(1)} - 1 \right) - 2 \right) a_0^{(4)},$$

$$d_0^{(z,3)} = k a_0^{(1)} \left( a_0^{(2)} + a_0^{(4)} \right) \quad (\eta_3 = \tau + 1);$$
(34-A)

$$d_0^{(r,1)} = 1, \quad d_0^{(\theta,1)} = -1, \quad d_0^{(z,1)} = 0 \quad (\eta_1 = \tau - 1),$$

$$d_0^{(r,2)} = 0, \quad d_0^{(\theta,2)} = 0, \quad d_0^{(z,2)} = 1 \quad (\eta_2 = \tau - 1),$$

$$d_0^{(r,3)} = \left( (\tau - 2) a_0^{(1)} - \tau \right) a_0^{(4)}, \quad d_0^{(\theta,3)} = \left( \tau - (\tau + 2) a_0^{(1)} \right) a_0^{(4)},$$

$$d_0^{(z,3)} = k \left( a_0^{(2)} + a_0^{(4)} \right) \quad (\eta_3 = \tau + 1);$$
(34-B)

$$d_0^{(r,1)} = 1, \quad d_0^{(\theta,1)} = -1, \quad d_0^{(z,1)} = 0 \quad (\eta_1 = \tau - 1),$$

$$d_0^{(r,2)} = 0, \quad d_0^{(\theta,2)} = 0, \quad d_0^{(z,2)} = 1 \quad (\eta_2 = \tau - 1),$$

$$d_0^{(r,3)} = \tau a_0^{(1)} - (\tau + 2) a_0^{(4)}, \quad d_0^{(\theta,3)} = -(\tau + 2) a_0^{(1)} + \tau a_0^{(4)},$$

$$d_0^{(z,3)} = k \left( a_0^{(2)} + 1 \right) a_0^{(4)} \quad (\eta_3 = \tau + 1),$$
(34-B)

а также три последовательности неоднородных систем вида

$$\mathbf{Q}_n^{(q)} \mathbf{B}_n^{(q)} = \mathbf{F}_n^{(q)} \left( \left\{ \mathbf{B}_m^{(q)} \right\}_{m=0}^{n-1} \right) \quad (n = \overline{1, \infty}). \quad (35)$$

$$q = 1, 2, 3.$$

Матричные уравнения (35) для выбранного варианта модели неоднородности (18-А) – (18-В) с учетом соответствующих представлений (34-А) – (34-В) задают для каждого частного решения  $q = 1, 2, 3$  рекуррентные матричные соотношения, определяющие три набора векторов  $\left\{ \mathbf{B}_n^{(q)} = \left[ d_n^{(r,q)}, d_n^{(\theta,q)}, d_n^{(z,q)} \right]^T \right\}_{n=1}^{\infty}$  ( $q = \overline{1, 3}$ ). Указанные наборы и заданные соотношениями (33), (34-А) – (34-В) три вектора  $\mathbf{B}_0^{(q)}$  ( $q = \overline{1, 3}$ ) определяют коэффициенты в разложениях (30) элементов  $\hat{u}_s^{(\tau, \text{particular}, q)}(\xi)$  ( $s = r, \theta, z$ ;  $q = \overline{1, 3}$ ) искомых трех частных решений (23) уравнения (22).

Входящие в уравнение (35) матрицы  $\mathbf{Q}_n^{(q)}$  размерности  $3 \times 3$  и вектор-столбцы  $\mathbf{F}_n^{(q)}$  длиной 3 соответственно выбранному варианту модели неоднородности (18-А) – (18-В) имеют такие элементы

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{1,1} &= (\eta_q + n)^2 - \tau^2 a_0^{(1)} - 1, \\ \left[ \mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{1,2} &= -\tau \left( (\eta_q + n + 1) \left( a_0^{(1)} - 1 \right) + 2 \right), \\ \left[ \mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{1,3} &= 0, \quad \left[ \mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{2,1} = -\tau \left( (\eta_q + n + 1) \left( b_0^{(1)} - 1 \right) + 2 \right), \\ \left[ \mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{2,2} &= (\eta_q + n)^2 - \tau^2 b_0^{(1)} - 1, \quad \left[ \mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{2,3} = 0, \\ \left[ \mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{3,1} &= k (\eta_q + n + 1) \left( b_0^{(7)} + 1 \right), \\ \left[ \mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{3,2} &= k\tau \left( b_0^{(7)} + 1 \right), \quad \left[ \mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{3,3} = (\eta_q + n + 1)^2 - \tau^2, \end{aligned} \quad (36-A)$$

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{F}_n^{(q)} \right]_1 &= \sum_{j=0}^{n-1} \left( \left( (j-n)(j+\eta_q+1) a_{n-j}^{(0)} + (2(n-j) + \tau^2) a_{n-j}^{(1)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \Omega^2 a_{n-2-j}^{(5)} + k^2 a_{n-2-j}^{(4)} + 2g_{n-1-j}^{(1)} \right) d_j^{(1,q)} + \tau \left( (j-n) a_{n-j}^{(0)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (2n + \eta_q - j + 1) a_{n-j}^{(1)} + 2g_{n-1-j}^{(1)} \right) d_j^{(2,q)} + k \left( (\eta_q + n - 1) a_{n-2-j}^{(2)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\eta_q + j + 1) a_{n-2-j}^{(4)} + 2g_{n-3-j}^{(2)} \right) d_j^{(3,q)} \right), \\ &\quad \dots; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[ \mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{1,1} &= (\eta_q + n)^2 - \tau^2 b_0^{(1)} - 1, \\
 \left[ \mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{1,2} &= -\tau \left( (\eta_q + n + 1) \left( b_0^{(3)} - 1 \right) + 2 \right), \\
 \left[ \mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{2,1} &= -\tau \left( (\eta_q + n + 1) \left( a_0^{(1)} - 1 \right) + 2 \right), \\
 \left[ \mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{2,2} &= (\eta_q + n)^2 - \tau^2 a_0^{(1)} - 1, \\
 \left[ \mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{3,1} &= k (\eta_q + n + 1) \left( b_0^{(7)} + 1 \right), \quad \left[ \mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{3,2} = k\tau \left( b_0^{(7)} + 1 \right), \\
 \left[ \mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{3,3} &= (\eta_q + n + 1)^2 - \tau^2,
 \end{aligned} \tag{36-B}$$

$$\begin{aligned}
 \left[ \mathbf{F}_n^{(q)} \right]_1 &= \sum_{j=0}^{n-1} \left( \left( (j-n) (j + \eta_q + 1) a_{n-j}^{(0)} + \tau^2 b_{n-j}^{(1)} + k^2 b_{n-2-j}^{(3)} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \Omega^2 b_{n-2-j}^{(4)} - (j + \eta_q + 1) b_{n-1-j}^{(10)} + 2g_{n-1-j}^{(3)} \right) d_j^{(1,q)} + \tau \left( (j-n) a_{n-j}^{(0)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (j + \eta_q + 1) b_{n-j}^{(1)} - b_{n-1-j}^{(10)} + 2g_{n-1-j}^3 \right) d_j^{(2,q)} + \right. \\
 &\quad \left. + k \left( (j + \eta_q + 1) \left( b_{n-2-j}^{(2)} + b_{n-2-j}^{(3)} \right) + b_{n-3-j}^{(11)} + g_{n-3-j}^{(4)} \right) d_j^{(3,q)} \right), \\
 &\quad \dots;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[ \mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{1,1} &= (\eta_q + n)^2 - \tau^2 b_0^{(3)} - 1, \\
 \left[ \mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{1,2} &= -\tau \left( (\eta_q + n + 1) \left( b_0^{(3)} - 1 \right) + 2 \right), \\
 \left[ \mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{2,1} &= -\tau \left( (\eta_q + n + 1) \left( b_0^{(6)} - 1 \right) + 2 \right), \\
 \left[ \mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{2,2} &= (\eta_q + n)^2 - \tau^2 b_0^{(6)} - 1, \quad \left[ \mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{3,1} = k (\eta_q + n + 1) \left( a_0^{(2)} + 1 \right), \\
 \left[ \mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{3,2} &= k\tau \left( a_0^{(2)} + 1 \right), \quad \left[ \mathbf{Q}_n^{(q)} \right]_{3,3} = (\eta_q + n + 1)^2 - \tau^2, \\
 \left[ \mathbf{F}_n^{(q)} \right]_1 &= \sum_{j=0}^{n-1} \left( \left( (j-n) (j + \eta_q + 1) a_{n-j}^{(0)} + k^2 b_{n-2-j}^{(1)} + \tau^2 b_{n-j}^{(3)} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \Omega^2 b_{n-2-j}^{(4)} - (j + \eta_q + 1) b_{n-1-j}^{(10)} + 2b_{n-1-j}^{(12)} + 2g_{n-1-j}^{(5)} \right) d_j^{(1,q)} + \right. \\
 &\quad \left. + \tau \left( (j-n) a_{n-j}^{(0)} + (j + \eta_q + 1) b_{n-j}^{(3)} - b_{n-1-j}^{(10)} + 2b_{n-1-j}^{(12)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2g_{n-1-j}^{(5)} \right) d_j^{(2,q)} + k \left( (j + \eta_q + 1) b_{n-2-j}^{(1)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (j + \eta_q + 1) b_{n-2-j}^{(2)} + b_{n-3-j}^{(11)} + g_{n-3-j}^{(4)} \right) d_j^{(3,q)} \right), \\
 &\quad \dots
 \end{aligned} \tag{36-B}$$

Следует отметить, что для соотношений (36-А) – (36-В) получается единое представление

$$\begin{aligned} \det \left( \mathbf{Q}_n^{(q)} \right) &= (n-2)n^2(n+2\tau-2)(n+2\tau)^2 \quad (q = \overline{1,2}), \\ \det \left( \mathbf{Q}_n^{(q)} \right) &= n(n+2)^2(n+2\tau)(n+2\tau+2)^2 \quad (q = 3). \end{aligned} \quad (37)$$

Поскольку  $\det \left( \mathbf{Q}_2^{(q)} \right) = 0$  ( $q = \overline{1,2}$ ), то на основании Теоремы Кронекера-Капелли [1] для выбранного варианта модели неоднородности (18-А) – (18-В) получаются условия совместности системы линейных уравнений (35) при  $n = 2$  и  $q = \overline{1,2}$  в таком виде:

$$\tau = 1 \quad \text{либо} \quad \tau \geq 2 \quad \text{и} \quad a_0^{(1)}a_1^{(0)} + a_1^{(1)} = 0; \quad (38-А)$$

$$\tau = 1 \quad \text{либо} \quad \tau \geq 2 \quad \text{и} \quad a_1^{(0)} = 0; \quad (38-Б)$$

$$\tau = 1 \quad \text{либо} \quad \tau \geq 2 \quad \text{и} \quad a_0^{(4)}a_1^{(0)} + a_1^{(4)} = 0. \quad (38-В)$$

Таким образом, при  $\tau \geq 2$  для построения базисного набора частных решений (23) уравнения (22) необходимо привлекать исключительно численный подход к определению аналитических в области  $|\xi| < \delta$  функций  $\varphi(\xi)$ ,  $\psi_j(\xi)$  ( $j = \overline{1,5}$ ) и соответственно выбранному варианту модели неоднородности (18-А) – (18-В) полагать в полиномиальных представлениях (26)

$$a_1^{(0)} = a_1^{(1)} = 0; \quad (39-А)$$

$$a_1^{(0)} = 0; \quad (39-Б)$$

$$a_1^{(0)} = a_1^{(4)} = 0. \quad (39-В)$$

Окончательно базисное решение уравнения (22) в матричном виде задается так:

$$\hat{\mathbf{U}}^{(\tau,basic)}(\xi) = \left[ \hat{\mathbf{U}}^{(\tau,particualar,1)}(\xi), \hat{\mathbf{U}}^{(\tau,particualar,2)}(\xi), \hat{\mathbf{U}}^{(\tau,particualar,3)}(\xi) \right]. \quad (40)$$

Тогда общее решение уравнения (13) определяется через базисное решение (40) в виде

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,general)}(r) = \hat{\mathbf{U}}^{(\tau,basic)}(r) \mathbf{A}, \quad (41)$$

где  $\mathbf{A}$  – произвольный вектор-столбец размерности 3. С учетом представления (10) определяется векторная функция  $\tilde{\Sigma}^{(\tau,general)}(r)$  в виде

$$\tilde{\Sigma}^{(\tau,general)}(r) = \left( \hat{\mathbf{G}}(\xi) \hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(\tau,basic)}(\xi) \right) \Big|_{\xi=r} \mathbf{A}, \quad (42)$$

где  $\hat{\mathbf{G}}(\xi)$  и  $\hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi)$  – аналитические продолжения на плоскость комплексной переменной  $\xi$  определяемых соотношениями соответственно (11), (18-A) – (18-B) и (12) матрицы функции  $\hat{\mathbf{G}}(r)$  и матричного оператора  $\hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(r)$ . Отличные от нуля элементы  $\hat{\mathbf{G}}(\xi)$  и  $\hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi)$  имеют такой вид:

$$\begin{aligned} \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{n,m} &= (1 - 2 \psi_1(\xi)) e^{\varphi(\xi)} \quad (n, m = 1, 2; 2, 1), \\ \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{n,m} &= \psi_2(\xi) e^{\varphi(\xi)} \quad (n, m = 1, 3; 3, 1; 2, 3; 3, 2), \\ \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{j,j} &= e^{\varphi(\xi)} \quad (j = \overline{1, 2}), \quad \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{3,3} = \psi_3(\xi) e^{\varphi(\xi)}, \\ \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{j,j} &= \psi_4(\xi) e^{\varphi(\xi)} \quad (j = \overline{4, 5}), \quad \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{6,6} = \psi_1(\xi) e^{\varphi(\xi)}; \end{aligned} \quad (43-A)$$

$$\begin{aligned} \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{n,m} &= (\psi_1(\xi) - 2) e^{\varphi(\xi)} \quad (n, m = 1, 2; 2, 1), \\ \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{n,m} &= \psi_2(\xi) e^{\varphi(\xi)} \quad (n, m = 1, 3; 3, 1; 2, 3; 3, 2), \\ \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{j,j} &= \psi_1(\xi) e^{\varphi(\xi)} \quad (j = \overline{1, 2}), \quad \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{3,3} = \psi_3(\xi) e^{\varphi(\xi)}, \\ \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{j,j} &= \psi_4(\xi) e^{\varphi(\xi)} \quad (j = \overline{4, 5}), \quad \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{6,6} = e^{\varphi(\xi)}; \end{aligned} \quad (43-B)$$

$$\begin{aligned} \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{n,m} &= (\psi_1(\xi) - 2 \psi_4(\xi)) e^{\varphi(\xi)} \quad (n, m = 1, 2; 2, 1), \\ \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{n,m} &= \psi_2(\xi) e^{\varphi(\xi)} \quad (n, m = 1, 3; 3, 1; 2, 3; 3, 2), \\ \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{j,j} &= \psi_1(\xi) e^{\varphi(\xi)} \quad (j = \overline{1, 2}), \quad \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{3,3} = \psi_3(\xi) e^{\varphi(\xi)}, \\ \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{j,j} &= e^{\varphi(\xi)} \quad (j = \overline{4, 5}), \quad \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \right]_{6,6} = \psi_4(\xi) e^{\varphi(\xi)}; \end{aligned} \quad (43-B)$$

$$\begin{aligned} \left[ \hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{1,1} &= d_\xi, \quad \left[ \hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{2,1} = \xi^{-1}, \quad \left[ \hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{2,2} = \tau \xi^{-1}, \\ \left[ \hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{3,3} &= -k, \quad \left[ \hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{4,2} = k, \quad \left[ \hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{4,3} = -\tau \xi^{-1}, \\ \left[ \hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{5,1} &= k, \quad \left[ \hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{5,3} = d_\xi, \quad \left[ \hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{6,1} = -\tau \xi^{-1}, \\ \left[ \hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{6,2} &= d_\xi - \xi^{-1}. \end{aligned} \quad (44)$$

**4. Дисперсионные соотношения.** Граничные условия (16) и (17) с учетом представлений (23), (40) – (42) определяют дисперсионные уравнения относительно безразмерного продольного волнового числа  $k$  и приведенной частоты  $\Omega$  соответственно

$$\Phi_\Sigma^{(\tau)}(k, \Omega) = \det \left( \left( \hat{\mathbf{S}}^{(\tau)}(\xi) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, basic)}(\xi) \right) \Big|_{\xi=1} \right) = 0 \quad (45)$$

и

$$\Phi_U^{(\tau)}(k, \Omega) = \det \left( \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, basic)}(1) \right) = 0, \quad (46)$$

а также однородные уравнения для нахождения с точностью до скалярного множителя вектора  $\mathbf{A}$  соответственно

$$\left( \hat{\mathbf{S}}^{(\tau)}(\xi) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{(\tau, basic)}(\xi) \right) \Big|_{\xi=1} \mathbf{A} = \mathbf{O} \quad (47)$$

и

$$\hat{\mathbf{U}}^{(\tau, basic)}(1) \mathbf{A} = \mathbf{O}. \quad (48)$$

В соотношениях (45) и (47) используется матричный дифференциальный оператор

$$\hat{\mathbf{S}}^{(\tau)}(\xi) = \left[ \hat{\mathbf{G}}(\xi) \hat{\mathbf{M}}^{(\tau)}(\xi) \right]_{(1,5,6),(1,2,3)}. \quad (49)$$

**5. Численный эксперимент.** Анализ дисперсионных спектров, фазовых и групповых скоростей бегущих изгибных волн проводился при значении окружного волнового числа  $\tau = 1$  для свободного однородного протяженного цилиндра из цинка ( $Zn$ )

$$\tilde{c}_s = \tilde{c}_s^{(Zn)} \quad (s = 11, 12, 13, 33, 44), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(Zn)}, \quad (50)$$

а также для свободных неоднородных цилиндров, функциональные законы радиальной неоднородности физико-механических характеристик материала которых были заданы так:

$$\tilde{c}_{11} = \tilde{c}_{11}^{(Zn)} (1 + 0, 2 r^3), \quad \tilde{c}_s = \tilde{c}_s^{(Zn)} \quad (s = 12, 13, 33, 44), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(Zn)}; \quad (51-A)$$

$$\tilde{c}_{33} = \tilde{c}_{33}^{(Zn)} (1 + 0, 2 r^3), \quad \tilde{c}_s = \tilde{c}_s^{(Zn)} \quad (s = 11, 12, 13, 44), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(Zn)}; \quad (51-B)$$

$$\tilde{c}_{44} = \tilde{c}_{44}^{(Zn)} (1 + 0, 2 r^3), \quad \tilde{c}_s = \tilde{c}_s^{(Zn)} \quad (s = 11, 12, 13, 33), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(Zn)}; \quad (51-B)$$

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(Zn)} (1 + 0, 2 r^3), \quad \tilde{c}_s = \tilde{c}_s^{(Zn)} \quad (s = 11, 12, 13, 33, 44). \quad (51-Г)$$

В соотношениях (50), (51-A) – (51-Г)

$$\left\{ \tilde{c}_{11}^{(Zn)} = 16, 35; \tilde{c}_{12}^{(Zn)} = 2, 64; \tilde{c}_{13}^{(Zn)} = 5, 17; \tilde{c}_{33}^{(Zn)} = 5, 31; \right. \\ \left. \tilde{c}_{44}^{(Zn)} = 3, 78; \tilde{\rho}^{(Zn)} = 7, 134 \right\}, \quad (52) \\ C_* = 10^{10} \text{ Н/М}^2, \quad \rho_* = 10^3 \text{ кг/М}^3.$$

Выбор определяемых соотношениями (51-A) – (51-Г) законов неоднородности был обусловлен задачей исследовать влияние на топологическую картину спектра бегущих изгибных волн фактора наличия неоднородности по отдельной физико-механической характеристике трансверсально-изотропного материала.

Далее волновод, задаваемый физико-механическими характеристиками (50) будет называться однородным волноводом, а с характеристиками (51-А) – (51-Г) – соответственно неоднородным волноводом А – Г.

Для неоднородных волноводов (51-А) – (51-Г) исследованы аналитический (24-А) – (24-В) и численный (26), (27-А) – (27-В) при  $N = 5$  подходы к определению функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 5}$ ) в представленных соотношениями (18-А) – (18-В) вариантах модели неоднородности. На основании аналитического (25) и численного (28) условий несильной радиальной неоднородности материала волновода определены допустимые значения параметра  $\delta$ . Результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1.

Волновод	Верхняя граница значения параметра $\delta$				Максимальное значение $\epsilon_{ps}$ в соотношениях (29) при численном подходе (варианты модели неоднородности)		
	Аналитический подход	Численный подход (варианты модели неоднородности)					
		А	Б	В	А	Б	В
А	1.6124	1.4994	1.4147	1.6124	0.00005	0.00008	0
Б	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	0	0
В	1.7099	1.7099	1.7099	1.4994	0	0	0.00011
Г	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	0	0

Основываясь на данных таблицы 1 и результатах тестирования временных затрат на вычисление базисного решения (40), для проведения вычислительного эксперимента был выбран вариант модели неоднородности (18-А) и численный подход (26), (27-А) при  $N = 5$  для определения функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi_s(\xi)$  ( $s = \overline{1, 5}$ ).

В области изменения параметров  $k \in [0, 12]$  и  $\Omega \in [0, 14]$  для свободного однородного волновода с характеристиками (50) и свободных неоднородных волноводов с характеристиками (51-А) – (51-Г) были построены фрагменты спектров бегущих изгибных ( $\tau = 1$ ) волн. Указанные фрагменты спектров представлены на рисунках 1–5.

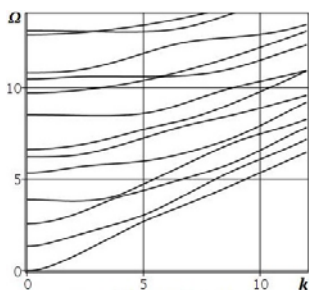


Рис. 1. Спектр однородного волновода

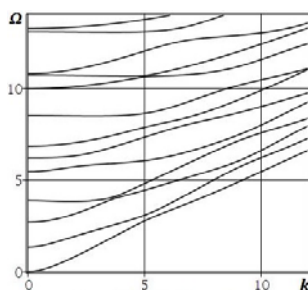


Рис. 2. Спектр неоднородного волновода А

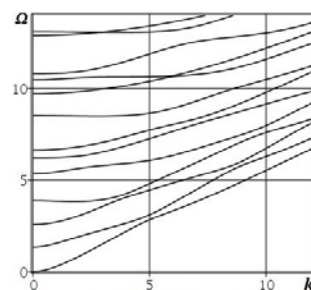


Рис. 3. Спектр неоднородного волновода Б

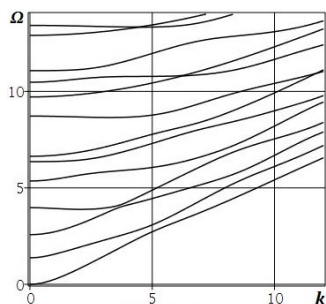


Рис. 4. Спектр неоднородного волновода В

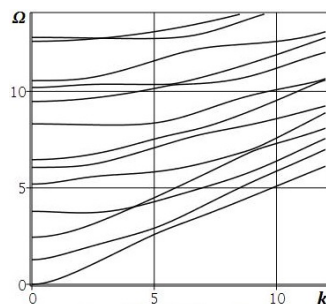


Рис. 5. Спектр неоднородного волновода Γ

Количественные различия построенных фрагментов спектров исследованы с помощью функции сравнения парных по номеру мод в сопоставляемых спектрах однородного и неоднородного волноводов

$$\Delta\Omega(k) = \left( \Omega^{(\text{неоднородный})}(k) - \Omega^{(\text{однородный})}(k) \right). \quad (53)$$

На рисунках 6–9 представлены результаты сопоставительного анализа поведения пяти низших мод фрагментов спектров однородного и неоднородного волновода А – Г. Номера парных мод в сопоставляемых спектрах и тип соответствующей линии указаны в нижней части рисунков.

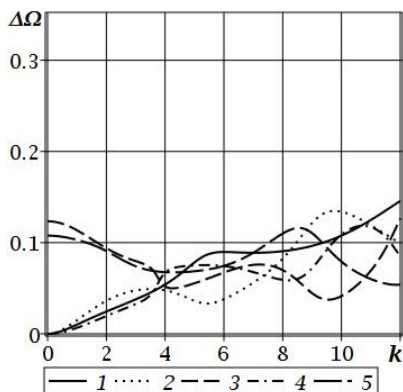


Рис. 6. Сопоставление спектров однородного и неоднородного волновода А

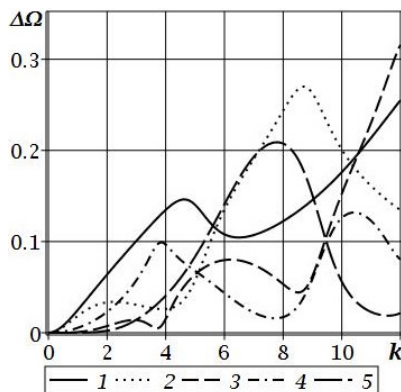


Рис. 7. Сопоставление спектров однородного и неоднородного волновода Б

Анализ рисунков показывает существенную зависимость топологии спектра от неоднородности по упругим модулям  $\tilde{c}_{11}(r)$  (рис. 2, 6),  $\tilde{c}_{33}(r)$  (рис. 3, 7),  $\tilde{c}_{44}(r)$  (рис. 4, 8) и плотности  $\tilde{\rho}(r)$  (рис. 5, 9). При этом отмечаются следующие закономерности. Количественные значения функции  $\Delta\Omega(k)$  при сопоставлении спектров однородного и неоднородного исключительно по модулю  $\tilde{c}_{11}(r)$  волноводов (рис. 6) в абсолютных значениях оказались в два раза меньшими, чем значения указанной функции при сопоставлении спектров однородного и неоднородных исключительно по модулям  $\tilde{c}_{33}(r)$  (рис. 7),  $\tilde{c}_{44}(r)$  (рис. 8) и плотности



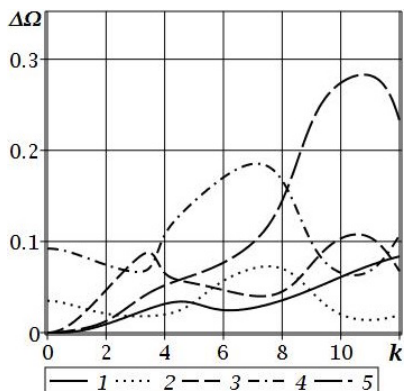


Рис. 8. Сопоставление спектров однородного и неоднородного волновода В

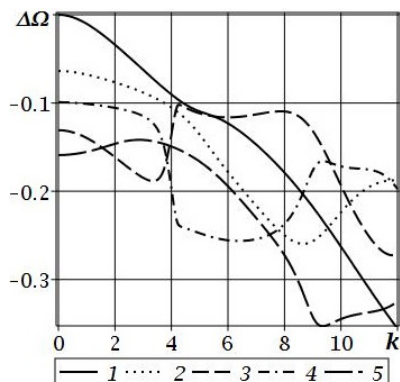


Рис. 9. Сопоставление спектров однородного и неоднородного волновода Γ

$\tilde{\rho}(r)$  (рис. 9) волноводов. Все пять низших мод спектров неоднородных исключительно по модулям  $\tilde{c}_{11}(r)$ ,  $\tilde{c}_{33}(r)$  либо  $\tilde{c}_{44}(r)$  волноводов смещены по отношению к соответствующим модам однородного волновода в область более высоких частот (рис. 6–8), в то время как для неоднородного исключительно по плотности  $\tilde{\rho}(r)$  волновода тенденция противоположная – все пять низших мод его спектра смещены по отношению к соответствующим модам однородного волновода в область более низких частот (рис. 9).

Для всех неоднородных волноводов А – В характерными являются локальные всплески функции  $\Delta\Omega(k)$  в окрестности значений волнового параметра  $k$ , соответствующих зонам сближения смежных мод в сопоставляемых спектрах. Указанные эффекты проиллюстрированы на рисунках 10–13.

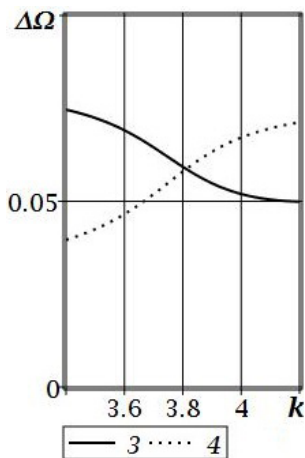


Рис. 10. Взаимное влияние сближающихся смежных мод в сопоставляемых спектрах однородного и неоднородного волновода А

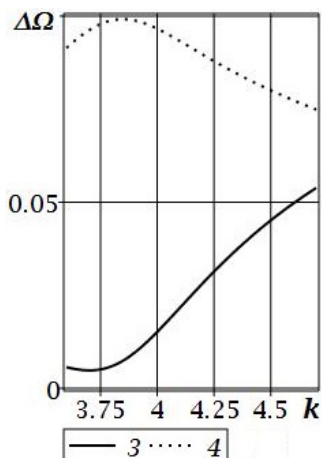


Рис. 11. Взаимное влияние сближающихся смежных мод в сопоставляемых спектрах однородного и неоднородного волновода Б

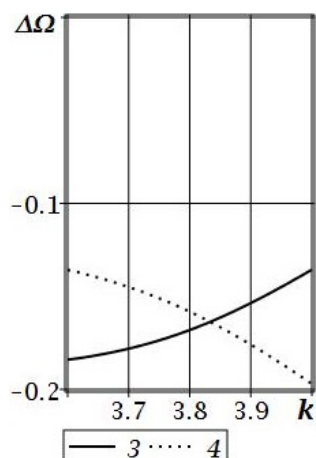
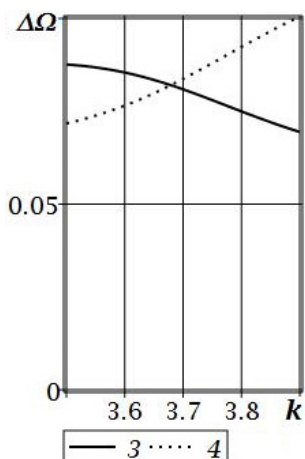


Рис. 12. Взаимное влияние сближающихся смежных мод в сопоставляемых спектрах однородного и неоднородного волновода В

Рис. 13. Взаимное влияние сближающихся смежных мод в сопоставляемых спектрах однородного и неоднородного волновода Г

**Выводы.** Представленные результаты актуальны в прикладных исследованиях, связанных с расчетами характеристик волноводных компонентов акустоэлектронных устройств, анализом моделей ультраакустической диагностики, верификацией результатов, полученных прямыми численными методами.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 1023030100040-4- 1.1.2;2.3.1).

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Главная редакция физико-математической литературы. – 1968. – 431 с.
2. Моисеенко И.А. Спектры нормальных упругих волн кручения в экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – Вып. 9 (55). – С. 139–145.
3. Моисеенко И.А. Распространение нормальных волн вдоль трансверсально изотропных функционально-градиентных цилиндров // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2018. – № 1. – С. 37–54.
4. Моисеенко И.А. Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн в ортотропных цилиндрах с функционально-градиентной радиальной неоднородностью / И.А. Моисеенко, В.И. Сторожев. // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 112–124.
5. Моисеенко И.А. Исследование упругих волн крутильного типа с использованием трехфакторной модели функциональной неоднородности трансверсально изотропных сплошных цилиндрических волноводов / И.А. Моисеенко, Н.Ю. Мельничук // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 2(79). – С. 5–15. – doi: 10.24412/0136-4545-2022-2-5-15. – EDN: ATARHS
6. Моисеенко И.А. Осесимметричные продольно-сдвиговые упругие волны в протяженных сплошных цилиндрах из шестифакторно функционально неоднородного трансверсально-изотропного материала / И.А. Моисеенко, Н.Ю. Мельничук // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 3(80). – С. 33–59. – doi: 10.24412/0136-4545-2022-3-33-59. – EDN: NPEDMW
7. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харьков: НТИУ. – 1939. – 719 с.

8. *Petrowsky I.G.* Sur l'analyticite des solutions des systems d'equations differentielles / I.G. Petrowsky // Матем. сб. – 1939. – № 5(47). P. 3–70.

**I.A. Moiseyenko, L.P. Vovk, A.I. Dzundza, N.I. Melnichuk**

**Study of the properties of non-axisymmetric waves in extended cylinders based on a six-factor model of radial inhomogeneity of a transversally isotropic material.**

Three alternative variants of the six-factor model of radial functional inhomogeneity of the physical and mechanical characteristics of a transversally isotropic material of extended cylindrical waveguide are determined for the case of propagating non-axisymmetric waves. Two approaches to determining the functional components of these models are presented, and sufficient conditions of weak radial inhomogeneity are determined to ensure the existence of a target basic solution to the equations of a three-dimensional linear wave deformation model. A basic solution has been constructed, the elements of which are expressed through analytical functions. A comparative analysis of the results of a numerical experiment conducted for the case of traveling bending waves in homogeneous and functionally inhomogeneous transversally isotropic free waveguides is given, quantitative and qualitative estimates of the numerical results obtained are presented.

**Keywords:** *FGMs, transversally isotropic, cylindrical waveguide, non-axisymmetric waves, model of radial inhomogeneity, basic solution, dispersion relations.*

*Получено 19.09.2023*

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2023-3-82-92

EDN:TYKLQA

©2023. Е.С. Глушанков<sup>1</sup>, А.Б. Мироненко<sup>2</sup>

## ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ МНОГОСВЯЗНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С ЖЕСТКО ПОДКРЕПЛЕННЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В УСЛОВИЯХ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

В данной работе приведены результаты исследований термонапряженного состояния бесконечной многосвязной анизотропной пластинки, находящейся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой. Контуры некоторых отверстий в пластинке имеют жесткое подкрепление. С помощью численных исследований изучено влияние геометрических характеристик пластинки, свойств ее материала, характеристик конвективного теплообмена, а также подкреплений на контурах отверстий на значения напряжений в пластинке.

**Ключевые слова:** многосвязная анизотропная пластинка, конвективный теплообмен, жестко подкрепленные контуры отверстий, температурные напряжения, комплексные потенциалы.

**Введение.** В современной науке и технике широко применяются конструкции, где в качестве элементов содержатся тонкие пластинки из анизотропных материалов. В силу различных причин в этих пластинках могут присутствовать отверстия и трещины. При воздействии температурных полей в пластинках могут возникать значительные концентрации напряжений, которые следует учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. К настоящему времени решено множество задач о влиянии температурных воздействий на термонапряженное состояние пластинок [1–5]. В частности, также решено большое количество задач о влиянии конвективного теплообмена на термонапряженное

---

<sup>1</sup> Глушанков Евгений Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: evgenij.glushankov@gmail.com.

Glushankov Evgenij Sergeevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>2</sup> Мироненко Андрей Борисович – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: a.mironenko@donnu.ru.

Mironenko Andrey Borisovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

состояние упругих тел [6–11].

В данной работе решена задача термоупругости для многосвязной пластинки из анизотропного материала, когда контуры пластинки жестко подкреплены. Задача решена с использованием конформных отображений, функций комплексной переменной, метода наименьших квадратов. Проведены численные исследования термонапряженного состояния пластинки с одним или двумя круговыми отверстиями. Установлены закономерности влияния свойств материала пластинки, жесткого подкрепления контуров, а также характеристик теплообмена, на распределение напряжений в пластинке.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим бесконечную многосвязную пластинку из анизотропного материала, занимающую область  $S$ , ограниченную контурами произвольно расположенных эллиптических отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) с центрами в точках  $O_l(x_{0l}, y_{0l})$ , полуосями  $a_l, b_l$ , углами поворота  $\varphi_l$  (рис. 1). На контурах отверстий  $L_l$  имеет место конвективный теплообмен с коэффициентами  $h_l$  с внешней средой температуры  $\mathfrak{T}_l$ . Контуры  $L_l$  не подкреплены либо жестко подкреплены. На бесконечности отсутствуют тепловые и механические воздействия.

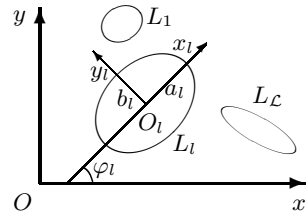


Рис. 1

Решать несвязанную задачу термоупругости будем с использованием комплексных потенциалов. Тогда задача сводится к последовательному определению комплексного потенциала теплопроводности  $F_3(z_3)$ , а затем комплексных потенциалов термоупругости  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 2}$ ) из соответствующих граничных условий. После определения комплексных потенциалов значения основных характеристик термонапряженного состояния (ТНС) – относительной температуры  $T$ , плотностей потока тепла  $q_x, q_y$ , напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , перемещений  $u, v$  в точках пластинки, можно определять по формулам [4, 5]

$$T = 2 \operatorname{Re} F_3(z_3), \quad (1)$$

$$(q_x, q_y) = 2 \operatorname{Re} i\kappa(\mu_3, -1) F_3'(z_3), \quad (2)$$

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi_k'(z_k), \quad (3)$$

$$(u, v) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_k, q_k) \Phi_k(z_k). \quad (4)$$

Здесь  $\mu_3$  и  $\mu_k$  ( $k = \overline{1, 2}$ ) – корни характеристических уравнений теплопроводности и теории упругости [4, 5, 11]

$$k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} = 0, \quad (5)$$

$$l_{4a}(\mu) = 0, \quad (6)$$

Е.С. Глушанков, А.Б. Мироненко

$$l_{4a}(\mu) = a_{11}\mu^4 + 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 + 2a_{26}\mu + a_{22};$$

$$p_k = a_{11}\mu_k^2 - a_{16}\mu_k + a_{12} + \frac{\delta_{k3}\alpha_1}{r_3};$$

$$q_k = a_{12}\mu_k - a_{26} + \frac{a_{22}}{\mu_k} + \frac{\delta_{k3}\alpha_2}{r_3\mu_3};$$

$$r_3 = \frac{l_{2\alpha}(\mu_3)}{l_{4a}(\mu_3)};$$

$$l_{2\alpha}(\mu_3) = -\alpha_1\mu_3^2 + \alpha_6\mu_3 - \alpha_2;$$

$$\Phi_3(z_3) = r_3 \int F_3(z_3) dz_3;$$

$$\kappa = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2};$$

$k_{ij}$  — коэффициенты теплопроводности материала пластинки;  $a_{ij}$  — коэффициенты деформации материала пластинки;  $\alpha_i$  — коэффициенты линейного теплового расширения материала пластинки;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Функции  $F_3(z_3)$ ,  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 2}$ ) определены в многосвязных областях  $S_3$ ,  $S_k$ , получаемых из области  $S$  аффинными преобразованиями [4, 5, 11]

$$z_3 = x + \mu_3 y. \quad (7)$$

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (8)$$

В общем случае эти функции будут иметь вид [4, 5, 11]

$$F_3(z_3) = c_3 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{3l} w_{3l}(z_3) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{3ln} \varphi_{3ln}(z_3); \quad (9)$$

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k). \quad (10)$$

Здесь  $c_3$ ,  $D_{3l}$  — вещественные постоянные, определяемые из граничных условий;  $w_{3l}(z_3) = \ln(z_3 - z_{3l})$ ;  $z_{3l}$  — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (7) произвольным точкам внутри контуров  $L_l$ ;  $c_{3ln}$  — комплексные постоянные, определяемые из граничных условий;  $\varphi_{3ln}(z_3) = \zeta_{3l}^{-n}$ ;  $\zeta_{3l}$  — комплексные переменные, определяемые из конформных отображений;

$$N_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) w_{kl}(z_k);$$

$\Gamma_k$ ,  $A_{kl}$ ,  $B_{kl}$  — постоянные, определяемые из решений систем уравнений

$$\sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k = (0, 0, 0, 0),$$

$$\sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, p_k, q_k) iA_{kl} = (0, 0, 0, 0),$$

$$\sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, p_k, q_k) iB_{kl} = (0, 0, 0, 0);$$

$\Gamma_3 = r_3 c_3$ ;  $A_{3l} = r_3 D_{3l}$ ;  $B_{3l} = r_3 (c_{3l1} R_{3l} - D_{3l} z_{3l})$ ;  $w_{kl} = \ln(z_k - z_{kl})$ ;  $z_{kl}$  — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (8) произвольным точкам внутри контуров  $L_l$ ;  $a_{kln}$  — комплексные постоянные, определяемые из граничных условий;  $\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}$ ;  $\zeta_{kl}$  — комплексные переменные, определяемые из конформных отображений.

В локальных системах координат  $O_l x_l y_l$  параметрические уравнения эллипсов (рис. 1) имеют вид [4, 5, 11]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе  $Oxy$  координат —

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l,$$

$$y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l.$$

Здесь  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) — угловой параметр уравнения контура.

Комплексные переменные  $\zeta_{kl}$  ( $k = \overline{1, 3}$ ) определяются из конформных отображений внешностей единичных кругов  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{kl}$  [4, 5, 11]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left( \zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (11)$$

где

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}.$$

Функция  $F_3(z_3)$  должна удовлетворять граничному условию

$$2 \operatorname{Re} (h_l F_3(\tau_3) + i \kappa \delta_{3,s}(\tau_3) F_3'(\tau_3)) = h_l \mathfrak{T}_l, \quad (12)$$

где

$$q_n^* = q_x^* \cos(nx) + q_y^* \cos(ny);$$

$\tau_3$  — точка, получаемая из граничной точки при аффинном преобразовании (7);  $\delta_{3,s}(\tau_3) = d\tau_3/ds$ ,  $s$  — дуга контура отверстия.

Функции  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 2}$ ) должны удовлетворять граничным условиям задачи термоупругости

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (d_{kl1}, d_{kl2}) \Phi_k(\tau_k) = (f_{l1}(\tau), f_{l2}(\tau)), \quad (13)$$

которые в дифференциальной форме [4, 5] имеют вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (d_{kl1}, d_{kl2}) \delta_{k,s}(\tau_k) \Phi'_k(\tau_k) = \left( \frac{df_{l1}}{ds}(\tau), \frac{df_{l2}}{ds}(\tau) \right), \quad (14)$$

где  $\tau_k$  ( $k = \overline{1, 2}$ ) — точки, получаемые из граничной точки при аффинных преобразованиях (8);  $\tau$  — аффикс граничной точки;  $\delta_{k,s}(\tau_k) = d\tau_k/ds$ . Для неподкреплённых контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}) = (1, \mu_k), \quad (f_{l1}(\tau), f_{l2}(\tau)) = (c_{l1}, c_{l2}),$$

а для жестко подкреплённых контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}) = (p_k, q_k), \quad (f_{l1}(\tau), f_{l2}(\tau)) = (u_l(\tau), v_l(\tau));$$

$c_{lj}$  — неизвестные постоянные интегрирования;  $u_l(\tau), v_l(\tau)$  — заданные на границе значения перемещений.

## 2. Решение задачи для бесконечной пластинки с эллиптическим отверстием.

Рассмотрим отнесённую к декартовой системе координат бесконечную анизотропную пластинку с эллиптическим отверстием, контур которого обозначим через  $L_1$ , его полуоси —  $a_1, b_1$ , угол поворота —  $\varphi_1$  (рис. 2). Центр эллиптического контура совпадает с началом координат. Через контур имеет место конвективный теплообмен с внешней средой температуры  $\mathfrak{T}_1$  с коэффициентом теплообмена  $h_1$ . На бесконечности отсутствуют тепловые и механические воздействия. Контур отверстия жестко подкреплён.

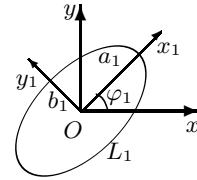


Рис. 2

*Задача теплопроводности.* На основе (9) функция  $F_3(z_3)$  принимает вид

$$F_3(z_3) = c_3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{31n}}{\zeta_{31}^n}. \quad (15)$$

Подставляя функцию (15) в граничное условие (12) и применяя метод рядов, получим, что  $c_3 = \mathfrak{T}_1/2$  и  $c_{31n} = 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Таким образом, комплексный потенциал теплопроводности (15) имеет вид

$$F_3(z_3) = c_3 = \frac{\mathfrak{T}_1}{2}. \quad (16)$$



Таким образом, во всех точках пластинки температуры является постоянной и равна  $\mathfrak{T}_1$ , а плотности потоков тепла равны нулю.

*Задача термупругости.* Для функции  $\Phi_5(z_5)$  получим

$$\Phi_3(z_3) = r_3 \int F_3(z_3) dz_3 = \Gamma_3 z_3, \quad (17)$$

где  $\Gamma_3 = r_3 c_3$ . Тогда функции  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 2}$ ) будем искать в виде

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \frac{a_{k11}}{\zeta_{k1}}. \quad (18)$$

Используя конформные отображения (11), перепишем функции (17) и (18) в виде

$$\Phi_3(z_3) = \Gamma_3 R_{31} \zeta_{31} + \frac{\Gamma_3 R_{31} m_{31}}{\zeta_{31}}, \quad (19)$$

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k R_{k1} \zeta_{k1} + \frac{\Gamma_k R_{k1} m_{k1} + a_{k11}}{\zeta_{k1}}. \quad (20)$$

Подставим функции (19) и (20) в граничные условия (13), при этом учитывая, что на контуре отверстия  $\zeta_{k1} = \sigma$  и  $\overline{\zeta_{k1}} = \overline{\sigma} = \frac{1}{\sigma}$  ( $k = \overline{1, 3}$ ):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \left[ (p_k, q_k) \left( \Gamma_k R_{k1} \sigma + \frac{\Gamma_k R_{k1} m_{k1} + a_{k11}}{\sigma} \right) + \right. \\ & \left. + (\overline{p}_k, \overline{q}_k) \left( \frac{\overline{\Gamma}_k \overline{R}_{k1}}{\sigma} + (\overline{\Gamma}_k \overline{R}_{k1} \overline{m}_{k1} + \overline{a}_{k11}) \sigma \right) \right] = \\ & = - \left[ (p_3, q_3) \left( \Gamma_3 R_{31} \sigma + \frac{\Gamma_3 R_{31} m_{31}}{\sigma} \right) + \right. \\ & \left. + (\overline{p}_3, \overline{q}_3) \left( \frac{\overline{\Gamma}_3 \overline{R}_{31}}{\sigma} + (\overline{\Gamma}_3 \overline{R}_{31} \overline{m}_{31} + \overline{a}_{311}) \sigma \right) \right]. \end{aligned}$$

Применим метод рядов. Тогда, приравнивая коэффициенты при  $\frac{1}{\sigma}$ , получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных  $a_{k11}$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \left[ (p_k, q_k) (\Gamma_k R_{k1} m_{k1} + a_{k11}) + (\overline{p}_k, \overline{q}_k) \overline{\Gamma}_k \overline{R}_{k1} \right] = \\ & = - \left[ (p_3, q_3) \Gamma_3 R_{31} m_{31} + (\overline{p}_3, \overline{q}_3) \overline{\Gamma}_3 \overline{R}_{31} \right], \end{aligned}$$

или

$$\sum_{k=1}^2 (p_k, q_k) a_{k11} = - \sum_{k=1}^3 \left[ (p_k, q_k) \Gamma_k R_{k1} m_{k1} + (\overline{p}_k, \overline{q}_k) \overline{\Gamma}_k \overline{R}_{k1} \right]. \quad (21)$$

После решения этой системы уравнений становятся известными постоянные  $a_{k11}$ , а, следовательно, и функции  $\Phi_k(z_k)$ , и тогда можно в любой точке пластинки находить значения основных характеристик ТНС по формулам (3)–(4).

Видно, что термонапряженное состояние пластинки с одним отверстием не зависит от характеристик теплообмена, поскольку в пластинке устанавливается температура, равная температуре внешней среды. Поэтому в случае пластинки с одним отверстием можно использовать решение задачи для случая, когда на контуре отверстия задано значение температуры.

**3. Решение задачи для бесконечной многосвязной пластинки.** В общем случае многосвязной области (рис. 1) неизвестные постоянные  $c_3$ ,  $D_{3l}$ ,  $c_{3ln}$ ,  $a_{kln}$ , входящие в функции (9) и (10), определяются из граничных условий (12) и (14) с использованием метода наименьших квадратов. Для этого на контурах  $L_i$  ( $i = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) выберем систему точек  $M_{im}(x_{im}, y_{im})$  ( $m = \overline{1, \mathcal{M}_i}$ ), в которых будем минимизировать невязки граничных условий задач теплопроводности и термоупругости.

*Задача теплопроводности.* При подстановке функции (9) в граничное условие (12) для определения неизвестных постоянных  $c_3$ ,  $D_{3l}$ ,  $c_{3ln}$  получается система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} h_l c_3 + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (h_l w_{3l}(\tau_{3im}) + i \kappa \delta_{3,s}(\tau_{3im}) w'_{3l}(\tau_{3im})) D_{3l} + \\ & + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (h_l \varphi_{3ln}(\tau_{3im}) + i \kappa \delta_{3,s}(\tau_{3im}) \varphi'_{3ln}(\tau_{3im})) c_{3ln} = h_l \bar{\Sigma}_l \\ & (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}), \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\tau_{3im} = x_{im} + \mu_3 y_{im}$ ,  $\tau_{im}$  — аффикс точки  $M_{im}$ . После решения этой системы с использованием метода сингулярных разложений [12] постоянные  $c_3$ ,  $D_{3l}$ ,  $c_{3ln}$ , а, следовательно, и комплексный потенциал теплопроводности (9) будут известны. По известной функции (9) можно в любой точке пластинки найти температуру и плотности потока тепла по формулам (1), (2) [4, 5, 11].

*Задача термоупругости.* При подстановке функций (9) и (10) в граничные условия (14) для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$  получается следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) \varphi'_{kln}(\tau_{kim}) a_{kln} = \\ & = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) N'_k(\tau_{kim}) - \\ & - 2 \operatorname{Re} d_{3ip} \delta_{3,s}(\tau_{3im}) r_3 F_3(\tau_{3im}) + \frac{df_{ip}}{ds}(\tau_{im}) \\ & (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}, p = \overline{1, 2}), \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\tau_{kim} = x_{im} + \mu_k y_{im}$ ,  $\tau_{im}$  — аффикс точки  $M_{im}$ . После решения этой системы с использованием метода сингулярных разложений [12] постоянные  $a_{kln}$ , а, следовательно, комплексные потенциалы термоупругости (10), будут известны. По известным функциям (10) можно в любой точке пластинки найти значения основных характеристик ТНС по формулам (3)–(4) [4, 5, 11].

**4. Численные исследования.** Были проведены численные исследования для пластинок из следующих материалов:

— стеклотекстолит КАСТ–В [3] изотропный модифицированный (материал М1) с параметрами [11]:

$$\begin{aligned} a_{11} = 74,92a_0, \quad a_{22} = 74,92a_0, \quad a_{12} = -8,99a_0, \quad a_{66} = 167,79a_0, \\ \alpha_1 = 3,0\alpha_0, \quad \alpha_2 = 3,0\alpha_0, \\ k_{11} = 144,00k_0, \quad k_{22} = 144,00k_0; \end{aligned}$$

— стеклопластик косоугольной намотки с наполнителем из алюмоборосиликатного стекла и связующим агентом из малеиновой эпоксидной смолы [3] модифицированный (материал М2) с параметрами [11]:

$$\begin{aligned} a_{11} = 272,17a_0, \quad a_{22} = 1019,37a_0, \quad a_{12} = -76,15a_0, \quad a_{66} = 2548,42a_0, \\ \alpha_1 = 0,7\alpha_0, \quad \alpha_2 = 3,8\alpha_0, \\ k_{11} = 2,79k_0, \quad k_{22} = 1,21k_0. \end{aligned}$$

Здесь  $a_0 = 10^{-6}$  МПа<sup>-1</sup>,  $\alpha_0 = 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>,  $k_0 = 10^{-2}$  Вт · (м · К)<sup>-1</sup>.

При проведении расчетов количество членов в рядах в функциях (9), (10) и количество «коллокационных» точек  $M_{im}$  на контурах  $L_i$  увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (относительная погрешность не становилась менее сотых долей процента). Для этого в решаемых задачах для случая материала М1, являющегося изотропным, необходимо было в рядах Лорана сохранять от 30 до 40 членов, а на каждом из контуров брать от 200 до 400 «коллокационных» точек. Для случая материала М2, обладающего сильной анизотропией, необходимо было в рядах сохранять от 50 до 150 членов, а на каждом из контуров брать от 1000 до 2000 «коллокационных» точек.

В таблице 1 для пластинки с одним или двумя круговыми отверстиями радиуса  $a$  ( $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a$ ) (рис. 3), расстояние между которыми равно  $c$ , через подкрепленные контуры которых действует конвективный теплообмен с внешней средой температуры  $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2 = 1$ , приведены значения нормальных напряжений  $\sigma_n/a_0$  в точках контура левого отверстия на площадках, параллельных контуру, в зависимости от значения  $c/a$ . Случай  $c/a = \infty$  соответствует пластинке с одним круговым отверстием.

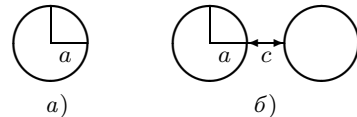


Рис. 3

Здесь  $\sigma_n/a_0$  — значения нормальных напряжений в точках контура левого отверстия на площадках, параллельных контуру, в зависимости от значения  $c/a$ . Случай  $c/a = \infty$  соответствует пластинке с одним круговым отверстием.

Таблица 1.

Значения напряжений  $\sigma_s/a_0$  в точках контура отверстия

$\theta$ , рад.	Значение $c/a$					
	0, 1	0, 5	1	2	10	$\infty$
Материал М1						
0	1, 865	0, 739	0, 526	0, 421	0, 362	0, 358
$\pi/6$	0, 188	0, 362	0, 376	0, 371	0, 359	0, 358
$\pi/3$	0, 174	0, 251	0, 291	0, 326	0, 355	0, 358
$\pi/2$	0, 315	0, 315	0, 321	0, 333	0, 354	0, 358
$2\pi/3$	0, 395	0, 372	0, 362	0, 356	0, 356	0, 358
$5\pi/6$	0, 434	0, 403	0, 387	0, 374	0, 359	0, 358
$\pi$	0, 445	0, 413	0, 396	0, 380	0, 361	0, 358
Материал М2						
0	0, 099	0, 038	0, 028	0, 022	0, 019	0, 019
$\pi/6$	0, 005	0, 018	0, 020	0, 021	0, 020	0, 020
$\pi/3$	0, 011	0, 016	0, 018	0, 021	0, 023	0, 023
$\pi/2$	0, 021	0, 021	0, 022	0, 023	0, 025	0, 025
$2\pi/3$	0, 024	0, 023	0, 023	0, 023	0, 023	0, 023
$5\pi/6$	0, 023	0, 022	0, 021	0, 021	0, 020	0, 020
$\pi/2$	0, 022	0, 021	0, 020	0, 020	0, 019	0, 019

В таблице 2 для аналогичных случаев приведены значения напряжений  $\sigma_s/a_0$  в точках контура левого отверстия на площадках, перпендикулярных контуру.

В таблице 3 для пластинки из материала М2 с двумя круговыми отверстиями радиуса  $a$ , расстояние между которыми равно  $c$  (рис. 3, б), через подкрепленные контуры которых действует конвективный теплообмен с коэффициентом  $h$  ( $h_1 = h_2 = h$ ) с внешней средой температуры  $\mathfrak{T}_1 = 1$ ,  $\mathfrak{T}_2 = 0$ , приведены значения нормальных напряжений  $\sigma_s/a_0$  в некоторых точках контуров отверстий в зависимости от значения параметра  $ha$  при некоторых значениях  $c/a$ .

Таблица 2. Значения напряжений  $\sigma_s/a_0$  в точках контура отверстия

$\theta$ , рад.	Значение $c/a$					
	0, 1	0, 5	1	2	10	$\infty$
Материал М1						
0	-0, 177	-0, 312	-0, 337	-0, 350	-0, 357	-0, 358
$\pi/6$	-0, 378	-0, 357	-0, 355	-0, 356	-0, 357	-0, 358
$\pi/3$	-0, 379	-0, 370	-0, 366	-0, 361	-0, 358	-0, 358
$\pi/2$	-0, 363	-0, 363	-0, 362	-0, 361	-0, 358	-0, 358
$2\pi/3$	-0, 353	-0, 356	-0, 357	-0, 358	-0, 358	-0, 358
$5\pi/6$	-0, 348	-0, 352	-0, 354	-0, 356	-0, 357	-0, 358
$\pi/12$	-0, 347	-0, 351	-0, 353	-0, 355	-0, 357	-0, 358
Материал М2						
0	-0, 030	-0, 034	-0, 035	-0, 036	-0, 036	-0, 036
$\pi/6$	-0, 027	-0, 024	-0, 023	-0, 023	-0, 024	-0, 024
$\pi/3$	-0, 024	-0, 018	-0, 016	-0, 015	-0, 014	-0, 014
$\pi/2$	-0, 020	-0, 020	-0, 020	-0, 019	-0, 019	-0, 019
$2\pi/3$	-0, 010	-0, 012	-0, 013	-0, 014	-0, 014	-0, 014
$5\pi/6$	-0, 023	-0, 023	-0, 023	-0, 024	-0, 024	-0, 024
$\pi/2$	-0, 036	-0, 036	-0, 036	-0, 036	-0, 036	-0, 036

Таблица 3. Значения напряжений  $\sigma_s/a_0$  в точках контуров отверстий

$ha$	$\theta$ , рад.	Значение $c/a$							
		Левое отверстие				Правое отверстие			
		0,1	1	10	100	0,1	1	10	100
0,001	0	-0,015	-0,018	-0,020	-0,022	-0,016	-0,016	-0,016	-0,014
	$\pi/4$	-0,012	-0,009	-0,010	-0,011	-0,007	-0,007	-0,007	-0,006
	$\pi/2$	-0,011	-0,011	-0,011	-0,012	-0,009	-0,009	-0,008	-0,007
	$3\pi/4$	-0,008	-0,009	-0,010	-0,011	-0,012	-0,008	-0,007	-0,006
	$\pi$	-0,019	-0,019	-0,020	-0,022	-0,015	-0,017	-0,016	-0,014
0,1	0	-0,018	-0,029	-0,035	-0,036	-0,001	-0,001	0,000	0,000
	$\pi/4$	-0,019	-0,017	-0,020	-0,021	0,003	0,003	0,003	0,003
	$\pi/2$	-0,021	-0,021	-0,021	-0,021	0,001	0,002	0,002	0,003
	$3\pi/4$	-0,018	-0,019	-0,020	-0,021	-0,005	0,000	0,002	0,003
	$\pi$	-0,035	-0,035	-0,035	-0,036	-0,012	-0,006	-0,001	0,000
10	0	-0,033	-0,036	-0,037	-0,037	0,001	0,001	0,001	0,001
	$\pi/4$	-0,024	-0,020	-0,021	-0,021	0,004	0,004	0,003	0,004
	$\pi/2$	-0,023	-0,023	-0,022	-0,022	0,004	0,004	0,003	0,003
	$3\pi/4$	-0,020	-0,020	-0,021	-0,021	-0,001	0,003	0,003	0,004
	$\pi$	-0,036	-0,036	-0,037	-0,037	0,003	0,001	0,001	0,001
$\infty$	0	-0,034	-0,036	-0,037	-0,037	0,001	0,001	0,001	0,001
	$\pi/4$	-0,024	-0,020	-0,021	-0,021	0,004	0,004	0,003	0,004
	$\pi/2$	-0,023	-0,023	-0,022	-0,022	0,004	0,004	0,003	0,003
	$3\pi/4$	-0,020	-0,020	-0,021	-0,021	0,000	0,003	0,003	0,004
	$\pi$	-0,036	-0,036	-0,037	-0,037	0,004	0,001	0,001	0,001

**Выводы.** Из полученных данных следует, что наличие жесткого подкрепления контуров отверстий значительно влияет на распределение напряжений в пластинке. Если температурное поле в пластинке однородно, то при уменьшении расстояния между отверстиями происходит резкий рост значений напряжений  $\sigma_n$  в области перемычки, а значения напряжений  $\sigma_s$  несколько уменьшаются. Вне области перемычки изменения напряжений незначительны.

В случае неоднородного температурного поля распределение напряжений в пластинке имеет разный характер в окрестностях различных отверстий. Наибольшая концентрация напряжений возникает вблизи контура отверстия, где температура внешней среды наиболее отличается от начальной температуры. При значениях параметра  $ha < 0,001$  различие в термонапряженном состоянии около различных отверстий остается незначительным. Однако при увеличении значения  $ha$  концентрация напряжений существенно возрастает около контура отверстия, где температура внешней среды наибольшая. Если температура внешней среды внутри отверстия близка к начальной температуре, то концентрация напряжений около контура этого отверстия резко уменьшается.

Более высокая концентрация напряжений возникает в пластинке из материала М1, обладающего большей жесткостью (меньшими значениями коэффициентов деформации).

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 1023030100040-4- 1.1.2;2.3.1).

1. *Мотовиловец И.А.* Термоупругость / И.А. Мотовиловец, В.И. Козлов. – К.: Наук. думка, 1987. – 264 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 1).
2. *Подстригач Я.С.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно // К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
3. *Космодамианский А.С.* Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров // К.–Донецк: Вища шк. 1983. – 160 с.
4. *Калоеров С.А.* Термонапряженное состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Ю.С. Антонов // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 127–136.
5. *Калоеров С.А.* Термоупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами при действии линейного потока тепла и температуры на контурах / С.А. Калоеров, Ю.С. Антонов // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 102–116.
6. *Гарматій Г.Ю.* Термопружний стан безмежного термочутливого тіла з циліндричною порожниною за умови конвективного теплообміну / Г.Ю. Гарматій, В.С. Попович // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2009. – Вип. 52, № 3. – С. 192–200.
7. *Parihar K.S.* Transient heat conduction and analysis of thermal stresses in thin circular plate / K.S. Parihar, S.S. Patil // J. Therm. Stress. – 2011. – Vol. 34, № 4. – P. 335–351.
8. *Gaikwad K.R.* Analysis of transient thermoelastic temperature distribution of a thin circular plate and its thermal deflection under uniform heat generation / K.R. Gaikwad, Y.U. Naner // J. Therm. Stress. – 2021. – Vol. 44, № 1. – P. 75–85.
9. *Nguyen T.D.* Frequency dependence of the magnitude of thermal stresses in a flat plate subjected to rapid thermal cycling by convective heating and cooling / T.D. Nguyen, J.R. Thomas Jr., D.P.H. Hasselman // J. Therm. Stress. – 1987. – Vol. 10, № 3. – P. 163–175.
10. *Бондаренко Н.С.* Влияние теплопроницаемости разреза на коэффициенты интенсивности напряжений при термоупругом изгибе пластин в условиях одностороннего теплообмена / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2023. – № 1. – С. 3–11.
11. *Глушанков Е.С.* Термонапряженное состояние бесконечной анизотропной пластинки в условиях неравномерного конвективного теплообмена с внешней средой под действием линейного потока тепла / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2023. – Вып. 2 (83). – С. 39–47. – doi: 10.24412/0136-4545-2023-2-39-47. – EDN: FLTAHT.
12. *Форсайт Дж.* Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

**E.S. Glushankov, A.B. Mironenko**

**The thermo-stress state of infinite multiply connected anisotropic plate with reinforced holes under the convective heat transfer action.**

In the paper the results for the investigation of thermo-stress state of infinite multiply connected anisotropic plate under the action of convective heat transfer are presented. The contours of some holes in the plate are reinforced. Through the numerical studies, the effects of plates's geometric characteristics, the properties of its material, the characteristic of convective heat transfer, and the holes' reinforcements on the values of the stresses in the plate are investigated.

**Keywords:** multiply connected anisotropic plate, convective heat transfer, reinforced contours of holes, thermal stresses, complex potentials.

Получено 06.10.2023

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2023-3-93-101

EDN:UUNEXN

©2023. А.А. Глухов<sup>1</sup>, И.А. Моисеенко<sup>2</sup>, В.И. Сторожев<sup>3</sup>

## ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ВОЛНЫ СДВИГА В ПОПЕРЕЧНО-НЕОДНОРОДНОМ АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ МЕЖДУ НЕОДНОРОДНЫМИ ПОЛУПРОСТРАНСТВАМИ

Построено и проанализировано решение задачи о распространении симметричных стационарных локализованных сдвиговых горизонтально-поляризованных волн вдоль направления в плоскости трансверсально-изотропного упругого слоя-включения с изменяющимися вдоль координаты по его толщине согласно экспоненциальному закону физико-механическими характеристиками. Слой окружен идеально контактирующими упругими полупространствами из однотипных трансверсально-изотропных материалов с приграничными зонами неоднородности, описываемой двойным экспоненциальными функциями. Для рассматриваемого типа волновых движений получены дисперсионные уравнения, рассчитаны некоторые фрагменты дисперсионных спектров и кинематические характеристики исследуемых локализованных волн.

**Ключевые слова:** *слой-пласт между полупространствами, трансверсально-изотропные функционально-градиентные материалы, экспоненциальные и двойные экспоненциальные законы неоднородности, локализованные сдвиговые волны, дисперсионные характеристики, кинематические свойства.*

**Введение и постановка задачи.** Исследование процессов распространения волн напряжений в составных телах-волноводах, образуемых упругим слоем, контактирующим с деформируемыми полупространствами, в контексте ря-

---

<sup>1</sup>Глухов Антон Александрович – аспирант каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: antonglukhov2012@yandex.com.

Glukhov Anton Alexandrovich – Postgraduate, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>2</sup>Моисеенко Игорь Алексеевич – доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: miamia733@mail.ru.

Moiseyenko Igor Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>3</sup>Сторожев Валерий Иванович – доктор техн. наук, проф., зав. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: stvistvi@mail.ru.

Storozhev Valeriy Ivanovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

да некоторых выполненных исследований по данной проблеме [1–6], продолжает сохранять актуальность с точки зрения дальнейшего учета различных усложненных физико-механических свойств компонентов. К ряду таких усложнений относится сочетание факторов механической анизотропии и непрерывной поперечной неоднородности материалов слоя и полупространств, особо характерной для создаваемых на базе аддитивных технологий функционально-градиентных анизотропных нанокompозитов, а также для структурированных геомассивов из анизотропных неоднородных геоматериалов в окрестности зон контакта пластов с вмещающими массивами. При этом, в первую очередь представляет интерес исследование случаев формирования локализованных приповерхностных областей выраженной неоднородности в зонах контакта слоя и полупространства, сглаживающейся с выходом на асимптотические характеристики однородных материалов при отдалении от поверхности контакта. Исследования волновых деформационных процессов, базирующиеся на таких вариантах описания законов непрерывной неоднородности, представлены, в частности, в работах [7–10].

Таким образом, целью представляемых в данной работе исследований является разработка численно-аналитической методики описания процессов распространения локализованных сдвиговых горизонтально-поляризованных упругих волн в трансверсально-изотропном экспоненциально неоднородном слое между трансверсально-изотропными функционально-градиентными полупространствами с двойной экспоненциальной неоднородностью, интерпретирующей возмущение свойств материалов полупространства и экспоненциальной неоднородности слоя вблизи контактной плоскости, а также апробация предлагаемой методики для анализа дисперсионных и кинематических характеристик рассматриваемых волн.

**1. Описание структуры и свойств волновода.** Рассматривается пространственное составное упругое тело, занимающее в декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$  область

$$V_{\Sigma} = V^{(+)} \cup V^{(1)} \cup V^{(2)} \cup V^{(-)}, \quad (1)$$

$$V^{(+)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 > h\}, \quad V^{(-)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 < -h\},$$

$$V^{(1)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, 0 \leq x_3 \leq h\}, \quad V^{(2)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, 0 \geq x_3 \geq -h\}.$$

Материал составного трансверсально-изотропного слоя  $V^{(1)} \cup V^{(2)}$  толщиной  $2h$  обладает симметричной поперечной экспоненциальной неоднородностью физико-механических характеристик относительно срединной плоскости. Представления для модулей упругости  $c_{ij}^{(1)}(x_3)$ ,  $c_{ij}^{(2)}(x_3)$  и параметров плотности материалов  $\rho^{(1)}(x_3)$ ,  $\rho^{(2)}(x_3)$  в компонентах  $V^{(1)}$  и  $V^{(2)}$  слоя соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} c_{ij}^{(1)}(x_3) &= c_{ij0}^{(1)} \exp(\mu x_3), c_{ij}^{(2)}(x_3) = c_{ij0}^{(2)} \exp(-\mu x_3), \\ \rho^{(1)}(x_3) &= \rho_0^{(1)} \exp(\mu x_3), \rho^{(2)}(x_3) = \rho_0^{(2)} \exp(-\mu x_3), \end{aligned} \quad (2)$$



где  $\mu$  – коэффициент неоднородности. В трансверсально-изотропных полупространствах  $V^{(+)}$  и  $V^{(-)}$  у границ их контакта со слоем имеются локализованные приповерхностные области выраженной неоднородности физико-механических свойств, описываемой в рассматриваемой модели модели двойными экспоненциальными функциями. Эти характеристики соответственно имеют представления

$$\begin{aligned} c_{ij}^{(+)}(x_3) &= A_{ij0}^{(+)} \cdot \varphi^{(+)}(\lambda, \beta, x_3), \quad \rho^{(+)}(x_3) = \rho_0^{(+)} \cdot \varphi^{(+)}(\lambda, \beta, x_3), \\ \varphi^{(+)}(\lambda, \beta, x_3) &= \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} c_{ij}^{(-)}(x_3) &= A_{ij0}^{(-)} \cdot \varphi^{(-)}(\lambda, \beta, x_3), \quad \rho^{(-)}(x_3) = \rho_0^{(-)} \cdot \varphi^{(-)}(\lambda, \beta, x_3), \\ \varphi^{(-)}(\lambda, \beta, x_3) &= \exp(\lambda \exp(\beta x_3)), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\lambda$  и  $\beta > 0$  – коэффициенты неоднородности материалов полупространств.

**2. Представления для волновых упругих перемещений и напряжений.** Уравнения стационарного динамического деформирования для компонентов  $V^{(1)}$  и  $V^{(2)}$  волновода в случае распространяющихся вдоль координатного направления  $Ox_1$  сдвиговых горизонтально поляризованных волн с парциальными комплексными функциями напряженности

$$u_2^{(j)}(x_1, x_3, t) = u_{20}^{(j)}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)) \quad (j = \overline{1, 2}), \quad (5)$$

для рассматриваемого случая трансформируются в уравнения для определения комплексных амплитудных функций  $u_{20}^{(j)}(x_3)$ , имеющие вид

$$\begin{aligned} c_{440}^{(j)} \partial_3^2 u_{20}^{(j)}(x_3) + (-1)^j c_{440}^{(j)} \mu \partial_3 u_{20}^{(j)}(x_3) - c_{660}^{(j)} k^2 u_{20}^{(j)}(x_3) + \rho_0^{(j)} \omega^2 u_{20}^{(j)}(x) = 0, \\ \partial_3 = \partial / \partial x_3, \end{aligned} \quad (6)$$

и записываются в форме

$$u_{20}'' + (-1)^j \mu u_{20}' + \delta_j u_{20} = 0, \quad \delta_j = (\rho_0^{(j)} \omega^2 - c_{660}^{(j)} k^2) / c_{440}^{(j)}. \quad (7)$$

Соответственно, при условии

$$A_{ij0}^{(1)} = A_{ij0}^{(2)}, \quad \rho_0^{(1)} = \rho_0^{(2)}, \quad (8)$$

выражения для  $u_{20}^{(j)}(x_3)$  могут быть представлены в общем виде

$$u_{20}^{(j)}(x_3) = A_1^{(j)} \exp(\gamma_1^{(j)} x_3) + A_2^{(j)} \exp(\gamma_2^{(j)} x_3), \quad (9)$$

где

$$\gamma_q^{(j)} = ((-1)^{j+1} \mu + (-1)^{q+1} (\mu^2 - 4\delta_j)^{1/2}) / 2. \quad (10)$$

В свою очередь, на базе представлений (9) могут быть получены выражения для амплитудных функций механических напряжений в компонентах  $V^{(1)}$  и  $V^{(2)}$  составного слоя

$$\begin{aligned}\sigma_{12}^{(j)}(x_3) &= ikc_{660}^{(j)} \exp((-1)^{j+1}\mu x_3)u_{20}^{(j)}(x_3), \\ \sigma_{23}^{(j)}(x_3) &= c_{440}^{(j)} \exp((-1)^{j+1}\mu x_3)\partial_3 u_{20}^{(j)}(x_3) \quad (j = \overline{1, 2}).\end{aligned}\quad (11)$$

Уравнения волнового деформирования относительно комплексных функций динамических упругих перемещений

$$u_2^{(\pm)}(x_1, x_3, t) = u_{20}^{(\pm)}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)), \quad (12)$$

для случая сдвиговых волн в полупространствах имеют вид

$$\begin{aligned}c_{440}^{(\pm)}\partial_3^2 u_{20}^{(\pm)}(x_3) \mp c_{440}^{(j)} \lambda \beta \exp(\mp \beta x_3)\partial_3 u_{20}^{(\pm)}(x_3) - \\ - c_{660}^{(\pm)}k^2 u_{20}^{(\pm)}(x_3) + \rho_0^{(\pm)}\omega^2 u_{20}^{(\pm)}(x) = 0.\end{aligned}\quad (13)$$

Решения  $F^{(+)}(x_3)$ ,  $F^{(-)}(x_3)$  уравнений вида (13) с явными аналитическими представлениями построены в работах [7–10] на основе применения итерационного метода последовательных приближений в форме экспоненциальных рядов, и, с учетом требуемых асимптотических свойств  $|u_{20}^{(\pm)}(x_3)| \rightarrow 0$  при  $|x_3| \rightarrow \pm\infty$ , выражения для этих решений и, соответственно, для амплитудных функций волновых перемещений в полубесконечных областях  $V^{(+)}$  и  $V^{(-)}$ , имеют вид:

$$\begin{aligned}F^{(\pm)}(x_3) &= e^{\mp \alpha^{(\pm)} x_3} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (\pm \gamma)^n & \left[ \prod_{p=1}^n (\mp \alpha^{(\pm)} \mp (p-1)\beta) ((\alpha^{(\pm)} + p\beta)^2 - (\alpha^{(\pm)})^2)^{-1} \right] e^{(\mp \alpha^{(\pm)} \mp n\beta)x_3};\end{aligned}\quad (14)$$

$$u_{20}^{(+)}(x_3) = A_+ F^{(+)}(x_3), \quad u_{20}^{(-)}(x_3) = A_- F^{(-)}(x_3). \quad (15)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\gamma = \beta \lambda; \quad \alpha^{(+)} &= ((c_{660}^{(+)}k^2 - \rho_0^{(+)}\omega^2)/c_{440}^{(+)} )^{1/2}, \quad \text{Re} \alpha^{(+)} > 0; \\ \alpha^{(-)} &= ((c_{660}^{(-)}k^2 - \rho_0^{(-)}\omega^2)/c_{440}^{(-)} )^{1/2}, \quad \text{Re} \alpha^{(-)} > 0;\end{aligned}$$

$A_+$ ,  $A_-$  – произвольные коэффициенты; также  $F^{(+)}(x_3) = F^{(-)}(-x_3)$ .

Соответствующие представлениям (14) выражения для динамических напряжений на площадках с нормалью  $Ox_3$  в областях  $V^{(+)}$  и  $V^{(-)}$  могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned}\sigma_{230}^{(+)}(x_3) &= A_+ c_{44}^{(+)} \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)) \partial_3 F^{(+)}(x_3), \\ \sigma_{230}^{(-)}(x_3) &= A_- c_{44}^{(-)} \exp(\lambda \exp(\beta x_3)) \partial_3 F^{(-)}(x_3),\end{aligned}\quad (16)$$

где

$$\begin{aligned}\partial_3 F^{(\pm)}(x_3) &= \mp \alpha^{(\pm)} e^{\mp \alpha^{(\pm)} x_3} + \sum_{n=1}^{\infty} (\pm \gamma)^n (\mp \alpha^{(\pm)} \mp n\beta) \left[ \prod_{p=1}^n (\mp \alpha^{(\pm)} \mp (p-1)\beta) \times \right. \\ &\quad \left. \times ((\alpha^{(\pm)} + p\beta)^2 - (\alpha^{(\pm)})^2)^{-1} \right] e^{(\mp \alpha^{(\pm)} \mp n\beta)x_3}.\end{aligned}\quad (17)$$

При этом имеют место свойства

$$\partial_3 F^{(+)}(x_3) = -\partial_3 F^{(-)}(-x_3), \quad \sigma_{230}^{(+)}(x_3) = -\sigma_{230}^{(-)}(-x_3). \quad (18)$$

Таким образом, для случая исследуемых симметричных волн

$$A_+ = A_- = A_s. \quad (19)$$

**3. Получение дисперсионного соотношения для симметричных локализованных волн.** Дальнейший анализ рассматриваемой модели реализуется для оговоренного выше случая

$$A_{ij0}^{(1)} = A_{ij0}^{(2)}, \quad \rho_0^{(1)} = \rho_0^{(2)}, \quad A_{ij0}^{(+)} = A_{ij0}^{(-)}, \quad \rho_0^{(+)} = \rho_0^{(-)}.$$

Граничные условия идеального механического контакта компонентов составного волновода в краевой задаче о распространении волн исследуемого типа сводятся к соотношениям для амплитудных функций в представлениях комплексных функций динамических перемещений (5), (12) и имеют вид

$$u_{20}^{(+)}(h) = u_{20}^{(1)}(h), \quad \sigma_{230}^{(+)}(h) = \sigma_{230}^{(1)}(h); \quad (20)$$

$$u_{20}^{(1)}(0) = u_{20}^{(2)}(0), \quad \sigma_{230}^{(1)}(0) = \sigma_{230}^{(2)}(0); \quad (21)$$

$$u_{20}^{(2)}(-h) = u_{20}^{(-)}(-h), \quad \sigma_{230}^{(2)}(-h) = \sigma_{230}^{(-)}(-h). \quad (22)$$

Согласно представлениям (10) имеют место свойства

$$\gamma_1^{(2)} = -\gamma_2^{(1)}, \quad \gamma_2^{(2)} = -\gamma_1^{(1)}, \quad (23)$$

с учетом которых можно записать

$$\begin{aligned} u_{20}^{(1)}(x_3) &= A_1^{(1)} \exp(\gamma_1^{(1)} x_3) + A_2^{(1)} \exp(\gamma_2^{(1)} x_3), \\ u_{20}^{(2)}(x_3) &= A_1^{(2)} \exp(-\gamma_1^{(1)} x_3) + A_2^{(2)} \exp(-\gamma_2^{(1)} x_3). \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом, для анализируемых симметричных волн из условий

$$u_{20}^{(1)}(x_3) = u_{20}^{(2)}(-x_3), \quad \sigma_{230}^{(1)}(x_3) = -\sigma_{230}^{(2)}(-x_3), \quad (25)$$

и с учетом представлений (24) следует, что

$$A_1^{(1)} = A_1^{(2)}, \quad A_2^{(1)} = A_2^{(2)}. \quad (26)$$

При этом, из граничного условия (21) для напряжений в плоскости  $x_3 = 0$ , при учете выражений (25)–(27) и свойства  $A_{ij0}^{(1)} = A_{ij0}^{(2)}$ , в качестве следствия может быть записано соотношение

$$A_2^{(1)} = -\frac{\gamma_1^{(1)}}{\gamma_2^{(1)}} A_1^{(1)}. \quad (27)$$

Вводя переобозначение  $A_1^{(1)} = A_c$  и принимая во внимание (28), можно получить представление

$$u_{20}^{(c)} = A_c \exp(\gamma_1^{(1)} x_3) - A_c \frac{\gamma_1^{(1)}}{\gamma_2^{(1)}} \exp(\gamma_2^{(1)} x_3). \quad (28)$$

С учетом свойств (15), (20), (26), можно заключить, что пары краевых условий (21) и (23) являются эквивалентными, и достаточно в дальнейшем процессе получения дисперсионных соотношений для анализируемых симметричных сдвиговых локализованных волн рассматривать только краевые условия (21), которые после соответствующих подстановок принимают вид

$$\begin{aligned} A_s F^{(+)}(h) - A_c (\exp(\gamma_1^{(1)} h) + \frac{\gamma_1^{(1)}}{\gamma_2^{(1)}} \exp(\gamma_2^{(1)} h)) &= 0, \\ A_s c_{440}^{(+)} \exp(\lambda \exp(-\beta h)) \partial_3 (F^{(+)}(h)) - & \\ - c_{440}^{(-)} \exp(\mu h) (\gamma_1^{(1)} A_c \exp(\gamma_1^{(1)} h) - \gamma_2^{(1)} A_c \frac{\gamma_1^{(1)}}{\gamma_2^{(1)}} \exp(\gamma_2^{(1)} h)) &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Искомое дисперсионное соотношение является равенством нулю определителя системы линейных алгебраических уравнений (30) и записывается в форме соотношения

$$\begin{aligned} -F^{(+)}(h) c_{44}^{(c)} \exp(\mu h) (\gamma_1^{(1)} \exp(\gamma_1^{(1)} h) - \gamma_2^{(1)} \frac{\gamma_1^{(1)}}{\gamma_2^{(1)}} \exp(\gamma_2^{(1)} h)) + \exp(\gamma_1^{(1)} h) + & \\ + \frac{\gamma_1^{(1)}}{\gamma_2^{(1)}} \exp(\gamma_2^{(1)} h) c_{44}^{(n)} \exp(\lambda \exp(\beta h)) \partial F^{(+)}(h) &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

**4. Результаты вычислительных экспериментов.** Реализация представленной расчетной методики проведена для следующего варианта задания физико-механических и геометрических параметров модели:

$$\begin{aligned} c_{660}^{(\pm)} = c_{440}^{(\pm)} = 38 \text{ МПа}, \quad c_{660}^{(1)} = c_{440}^{(1)} = c_{660}^{(2)} = c_{440}^{(2)} = 14 \text{ МПа}, \\ \rho_0^{(\pm)} = 1800 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_0^{(1)} = \rho_0^{(2)} = 1650 \text{ кг/м}^3, \quad H = 20 \text{ м}. \end{aligned}$$

Диапазоны варьирования параметров циклической частоты и волнового числа соответственно составляли  $\omega \in [0, 40]$  рад/с,  $k \in [0, 40]$  рад/м; для параметров неоднородности выбирались значения  $\mu = -1$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$ .

На рисунке 1 представлены результаты расчетов в указанном диапазоне трех низших действительных ветвей анализируемого дисперсионного спектра. При этом можно отметить, что низшая мода характеризуется малой степенью дисперсии, но имеет ненулевую частоту записания.

Далее, на рисунках 2–4 соответственно приведены результаты расчетов в точках по толщине слоя и вне слоя в полупространствах на удалении до двух

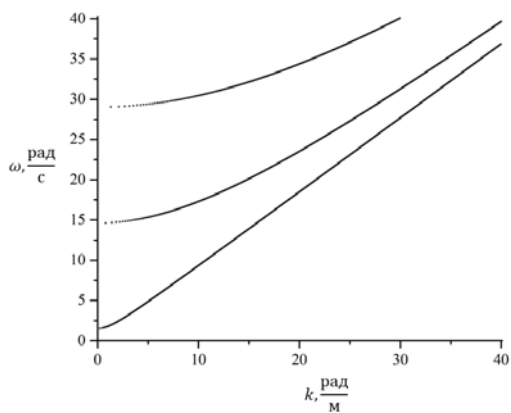


Рис. 1. Фрагмент диаграммы дисперсионных кривых

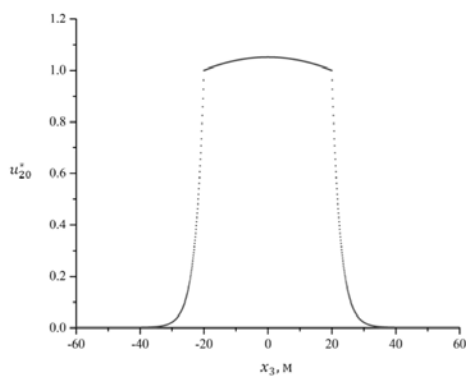


Рис. 2. Распределение амплитуд нормированных смещений  $|u_{20}(x_3)/u_{20}(h)|$  по толщине волновода для волны первой моды

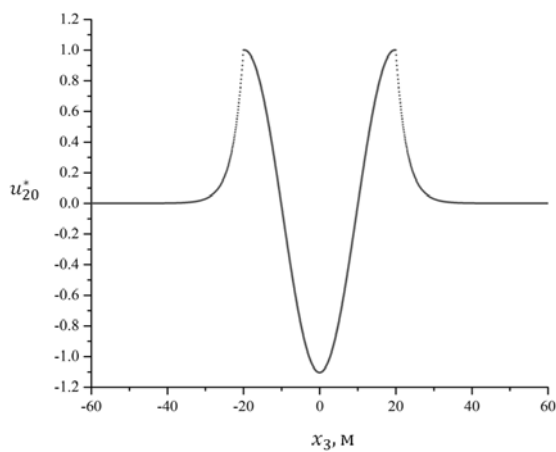


Рис. 3. Распределение амплитуд нормированных смещений  $|u_{20}(x_3)/u_{20}(h)|$  по толщине волновода для волны второй моды

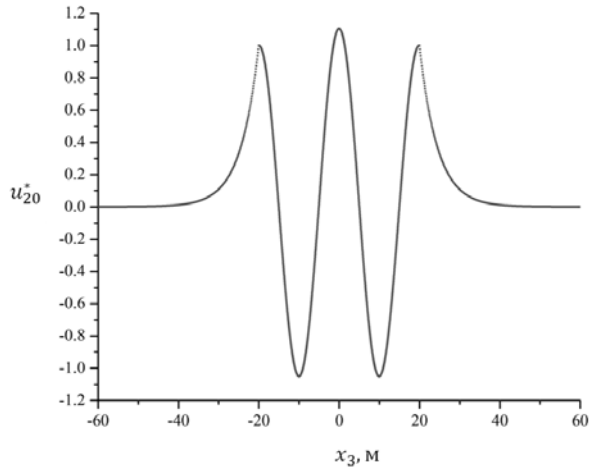


Рис. 4. Распределение амплитуд нормированных смещений  $|u_{20}(x_3)/u_{20}(h)|$  по толщине волновода для волны третьей моды

полутолщин слоя относительных амплитудных характеристик волновых перемещений для волн, имеющих частоту  $\omega = 30$  рад/с и принадлежащих трем различным рассчитанным модам спектра. Представляемые кинематические характеристики соответственно определяются выражениями  $|u_{20}(x_3)/u_{20}(h)|$ .

**Заключение.** В результате проведенных исследований осуществлена разработка численно-аналитической методики описания процессов распространения локализованных сдвиговых горизонтально-поляризованных упругих волн в трансверсально-изотропном экспоненциально неоднородном слое между трансверсально-изотропными функционально-градиентными полупространствами с двойной экспоненциальной неоднородностью, интерпретирующей возмущение свойств материалов полупространства и экспоненциальной неоднородности слоя вблизи контактной плоскости. В аналитической форме получено дисперсионное соотношение для исследуемых локализованных волн. Проведена численная апробация предлагаемой методики для анализа дисперсионных и кинематических характеристик рассматриваемых волн.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 1023030100040-4- 1.1.2;2.3.1).

1. *Rossikhin Y.A.* Slightly inhomogeneous surface wave in an isotropic half-space in the presence of weak anisotropy by its surface / Y.A. Rossikhin // J. Acoust. Soc. Am. – 1992. – Volume 92, Issue 5. – P. 2741–2746. <https://doi.org/10.1121/1.404391>
2. *Kumar S.* Propagation of SH-type waves in inhomogeneous anisotropic layer overlying an anisotropic viscoelastic half-space / S. Kumar, P.C. Pal, S. Bose // International Journal of Engineering, Science and Technology. – 2014. – Vol. 6, No. 4. – P. 24–30.
3. *Gupta S.* Torsional surface waves in an inhomogeneous layer over a gravitating anisotropic porous half-space / S. Gupta, A. Pramanik // J. Phys.: Conf. Ser. – 2015. – Vol. 662. 012008 doi: 10.1088/1742-6596/662/1/012008
4. *Kakar R.* Dispersion of Love wave in an isotropic layer sandwiched between orthotropic and

- prestressed inhomogeneous half-spaces / R. Kakar // Latin American Journal of Solids and Structures. – 2015. – 12 (10). <https://doi.org/10.1590/1679-78251918>
5. Zorammuana C. SH-Wave at a Plane Interface between Homogeneous and Inhomogeneous Fibre-Reinforced Elastic Half-Spaces / C. Zorammuana, S.S. Singh. // Indian Journal of Materials Science. – Vol. 2015. – Article ID 532939, 8 pages. <http://dx.doi.org/10.1155/2015/532939>
  6. Vaishnava P.K. Propagation of Torsional Surface Wave in Anisotropic Layer Between Two Half-Spaces / P.K. Vaishnava, S. Kundua // Procedia Engineering. – 2016. – Vol. 144. – P. 1270–1277. – doi: 10.1016/j.proeng.2016.05.115
  7. Болнокин В.Е. Анализ модели распространения сдвиговых упругих волн в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном геомассиве / В.Е. Болнокин, А.А. Глухов, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022 – №3 (80). – С. 14–19. – doi: 10.24412/0136-4545-2022-3-14-19. – EDN: BOBAVC.
  8. Глухов А.А. Интегрирование системы уравнений распространения произвольно ориентированных трехпарциальных поверхностных волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022 – №4 (81). – С. 15–22. – doi: 10.24412/0136-4545-2022-4-15-22. – EDN: JBNEKR.
  9. Глухов А.А. Волны Лява в структуре «однородный изотропный слой на трансверсально-изотропном полупространстве с двойной экспоненциальной неоднородностью» / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – №1 (82). – С. 32–39. – doi: 10.24412/0136-4545-2023-1-32-39. – EDN: ENGOVX.
  10. Глухов А.А. Анализ модели распространения поверхностных релеевских волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве с приграничной локализованной зоной неоднородности / А.А. Глухов, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – №2 (83). – С. 26–38. – doi: 10.24412/0136-4545-2023-2-26-38. – EDN: ETYFCH.

**A.A. Glukhov, I.A. Moiseyenko, V.I. Storozhev**

**Localized shear waves in a transversely inhomogeneous anisotropic layer between inhomogeneous half-spaces.**

A solution to the problem of propagation of symmetrical stationary localized shear horizontally polarized waves along the direction in the plane of a transversely isotropic elastic layer-inclusion with physical and mechanical characteristics varying along the coordinate along its thickness according to an exponential law has been constructed and analyzed. The layer is surrounded by ideally contacting elastic half-spaces of the same type of transversally isotropic materials with border zones of heterogeneity described by double exponential functions. For the type of wave motions under consideration, dispersion equations is obtained, some fragments of dispersion spectra and kinematic characteristics of the localized waves under study is calculated.

**Keywords:** *layer between half-spaces, transversely isotropic functional-gradient materials, exponential and double exponential laws of heterogeneity, localized shear waves, dispersion characteristics, kinematic properties.*

*Получено 11.10.2023*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

---

УДК 51-74:510.22:519.6: 539.3  
doi:10.24412/0136-4545-2023-3-102-114  
EDN:VJEVZB



©2023. А.С. Гольцев<sup>1</sup>, С.Б. Номбре<sup>2</sup>, Д.Д. Полянский<sup>3</sup>, С.В. Сторожев<sup>4</sup>

### НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ УЧЕТ РАЗБРОСА ПАРАМЕТРОВ В МОДЕЛИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОГО ПОЛОГО ШАРА

Дана разработка методики нечетко-множественного учета разбросов в значениях исходных физико-механических и геометрических параметров для модели полярно-симметричного деформирования изотропного упругого полого шара при комплексных силовых и температурных воздействиях на его внутреннюю и внешнюю граничные поверхности. Описываемая методика базируется на использовании расчетных соотношений детерминистического варианта рассматриваемой модели с дальнейшим поэтапным фрагментированным применением операций нечетко-множественных вычислений и альфа-уровневой модификации эвристического принципа обобщения в процессе перехода к неконтрастным аргументам в указанных расчетных

---

<sup>1</sup> *Гольцев Аркадий Сергеевич* – доктор физ.-мат. наук, проф., зав. каф. прикладной механики и компьютерных технологий ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: a.s.goltsev@mail.ru.

*Goltsev Arkady Sergeevich* – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Applied Mechanics and Computer Technologies.

<sup>2</sup> *Номбре Светлана Борисовна* – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.b.nombre@donnasa.ru.

*Nombre Svetlana Borisovna* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

<sup>3</sup> *Полянский Дмитрий Дмитриевич* – аспирант каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: d.d.polyanskiy@donnasa.ru.

*Polyansky Dmitry Dmitrievich* – Postgraduate, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

<sup>4</sup> *Сторожев Сергей Валериевич* – доктор техн. наук, проф. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.v.storozhev@donnasa.ru.

*Storozhev Sergey Valerievich* – Doctor of Technical Sciences, Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.



формулах. Представлены отдельные результаты численной реализации предложенной методики.

**Ключевые слова:** *изотропный полый шар, полярно-симметричное деформирование, внутреннее и внешнее давление, тепловые поверхностные воздействия, разбросы исходных параметров, нечетко-множественный учет неконтрастности, эвристический принцип обобщения.*

**Введение и постановка задачи.** Актуальность проблемы теоретического исследования моделей термосилового упругого и упругопластического деформирования конструкционных элементов в виде толстостенной сферической оболочки (полого шара) отмечалась в целом ряде современных научных публикаций [1–6] в связи с разнообразными применениями таких объектов в качестве составляющих технологического оборудования энергетических, металлургических, химических и пищевых производств, в качестве конструкционных элементов аэрокосмической техники, приборов и строительных сооружений. Повышенные требования к оценкам прочности и надежности при проектировании и эксплуатации таких конструкций диктуют особую необходимость учета в теоретических исследованиях процессов их термомеханического деформирования неточностей задания величин исходных расчетных параметров, в том числе разбросов экспериментальных данных о физико-механических свойствах используемых материалов, предусматриваемых при изготовлении технологических допусков, вариативных субъективных экспертных оценок для отдельных базовых характеристик конструкций. Решение варианта задачи учета неконтрастности исходных данных при расчете параметров термомеханического деформирования конструкций сферической формы дано в работе [7] на основе применения методов вероятностно-стохастического анализа, предполагающих наличие статистически корректной информации о подлежащих учету разбросах. Снижающий уровень требований к характеру исходной неопределенной информации нечетко-множественный подход [8, 9] при исследовании задач термомеханического деформирования с разбросами исходных параметров представлен в работах [10, 11], а для модели термоупругого состояния полого шара, обусловленного внутренним нагревом без учета внешних термических воздействий и действия механических усилий на его граничных поверхностях, такой подход предложен и реализован в [12]. В этой связи, целью исследований, представляемых в данной статье, является распространение нечетко-множественной методики учета параметрической неопределенности экзогенных характеристик модели полярно-симметричного деформирования изотропного упругого полого шара на общий случай комбинированных равномерно распределенных силовых и температурных воздействий на его внутреннюю и внешнюю граничные поверхности.

Схема реализуемого исследования заключается в поэтапном фрагментированном применении операций нечетко-множественных вычислений и альфа-уровневой модификации эвристического принципа обобщения при переходе к неконтрастным аргументам в расчетных соотношениях для характеристик детерминистического варианта рассматриваемой модели. Система этих соотношений

применительно к конструкции рассматриваемого типа, отнесенной к сферическим координатам  $O\rho\theta\varphi$  с размещаемым в геометрическом центре шара полюсом  $O$ , с уравнениями  $\rho = a$  и  $\rho = b$  для внутренней и внешней граничных поверхностей, на которых задаются граничные условия

$$(T)_{\rho=a} = T_a, \quad (T)_{\rho=b} = T_b, \quad (1)$$

$$(\sigma_{\rho\rho})_{\rho=a} = -P_a, \quad (\sigma_{\rho\rho})_{\rho=b} = -P_b, \quad (2)$$

соответственно имеет вид

$$T(\rho) = T_a - \Delta T \cdot ab((b-a))^{-1}(\rho^{-1} - a^{-1}), \quad (3)$$

$$\sigma_\rho = A + B\rho^{-3} + \lambda\rho^{-1}, \quad (4)$$

$$\sigma_\theta = A - (B/2)\rho^{-3} + (\lambda/2)\rho^{-1}, \quad (5)$$

$$A = (a^3 P_a - b^3 P_b - \lambda(b^2 - a^2))(b^3 - a^3)^{-1}, \quad (6)$$

$$B = (a^3 b^3 (P_b - P_a) - \lambda a^2 b^2 (b - a))(b^3 - a^3)^{-1}, \quad (7)$$

$$\lambda = ab\Delta T E \alpha_s (1 - \nu)^{-1} (b - a)^{-1}, \quad (8)$$

$$\Delta T = T_b - T_a. \quad (9)$$

В выражениях (1)–(9)  $T_a$  и  $P_a$  – параметры температуры и давления на внутренней поверхности полого шара;  $T_b$  и  $P_b$  – параметры температуры и давления на его внешней поверхности;  $E$ ,  $\nu$ ,  $\alpha_s$  – соответственно модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент теплового расширения материала рассматриваемого сферического тела.

**1. Нечетко-множественный расчетный алгоритм.** При получении соотношений нечетко-множественной модификации расчетного алгоритма анализа модели комбинированных термомеханических деформирующих воздействий на граничные поверхности упругого полого шара, для исходных, промежуточных и выходных эндогенных параметров в выражениях (3)–(9) вводятся нечетко-множественные расширения  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{P}_a$ ,  $\tilde{P}_b$ ,  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{\alpha}_s$ ,  $\tilde{\nu}$ ,  $\tilde{T}_a$ ,  $\tilde{T}_b$ ,  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{T}$ ,  $\tilde{\sigma}_\rho$ ,  $\tilde{\sigma}_\theta$ , представляемые разложениями по множествам  $\alpha$  – уровней

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha], & \tilde{b} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha], \\ \tilde{P}_a &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{P}_{a\alpha}, \bar{P}_{a\alpha}], & \tilde{P}_b &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{P}_{b\alpha}, \bar{P}_{b\alpha}], \\ \tilde{E} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha], & \tilde{\alpha}_s &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\alpha}_{s\alpha}, \bar{\alpha}_{s\alpha}], & \tilde{\nu} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha], \\ \tilde{T}_a &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{T}_{a\alpha}, \bar{T}_{a\alpha}], & \tilde{T}_b &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{T}_{b\alpha}, \bar{T}_{b\alpha}], & \tilde{\lambda} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{A}_\alpha, \overline{A}_\alpha], & \tilde{B} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{B}_\alpha, \overline{B}_\alpha], & \tilde{T}(\rho) &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{T}_\alpha(\rho), \overline{T}_\alpha(\rho)], \\ \tilde{\sigma}_\rho(\rho) &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{\rho\alpha}(\rho), \overline{\sigma}_{\rho\alpha}(\rho)], & \tilde{\sigma}_\theta(\rho) &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{\theta\alpha}(\rho), \overline{\sigma}_{\theta\alpha}(\rho)].\end{aligned}$$

При описании нечетко-множественных обобщений  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{P}_a$ ,  $\tilde{P}_b$ ,  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{\alpha}_s$ ,  $\tilde{\nu}$ ,  $\tilde{T}_a$ ,  $\tilde{T}_b$  для неконтрастных экзогенных параметров рассматриваемой модели нормальными треугольными нечеткими числами

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= (a_1, a_2, a_3), & \tilde{b} &= (b_1, b_2, b_3), \\ \tilde{P}_a &= (P_{a1}, P_{a2}, P_{a3}), & \tilde{P}_b &= (P_{b1}, P_{b2}, P_{b3}), \\ \tilde{E} &= (E_1, E_2, E_3), & \tilde{\alpha}_s &= (\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \alpha_{s3}), & \tilde{\nu} &= (\nu_1, \nu_2, \nu_3), \\ \tilde{T}_a &= (T_{a1}, T_{a2}, T_{a3}), & \tilde{T}_b &= (T_{b1}, Y_{b2}, T_{b3}),\end{aligned}\tag{11}$$

границы интервалов  $\alpha$  – уровня имеют вид

$$\begin{aligned}\underline{a}_\alpha &= (1 - \alpha)a_1 + \alpha a_2, & \overline{a}_\alpha &= \alpha a_2 + (1 - \alpha)a_3; \\ \underline{b}_\alpha &= (1 - \alpha)b_1 + \alpha b_2, & \overline{b}_\alpha &= \alpha b_2 + (1 - \alpha)b_3; \\ \underline{P}_{a\alpha} &= (1 - \alpha)P_{a1} + \alpha P_{a2}, & \overline{P}_{a\alpha} &= \alpha P_{a2} + (1 - \alpha)P_{a3}; \\ \underline{P}_{ab} &= (1 - \alpha)P_{b1} + \alpha P_{b2}, & \overline{P}_{b\alpha} &= \alpha P_{b2} + (1 - \alpha)P_{b3}; \\ \underline{E}_\alpha &= (1 - \alpha)E_1 + \alpha E_2, & \overline{E}_\alpha &= \alpha E_2 + (1 - \alpha)E_3; \\ \underline{\alpha}_{s\alpha} &= (1 - \alpha)\alpha_{s1} + \alpha \alpha_{s2}, & \overline{\alpha}_{s\alpha} &= \alpha \alpha_{s2} + (1 - \alpha)\alpha_{s3}; \\ \underline{\nu}_\alpha &= (1 - \alpha)\nu_1 + \alpha \nu_2, & \overline{\nu}_\alpha &= \alpha \nu_2 + (1 - \alpha)\nu_3; \\ \underline{T}_{a\alpha} &= (1 - \alpha)T_{a1} + \alpha T_{a2}, & \overline{T}_{a\alpha} &= \alpha T_{a2} + (1 - \alpha)T_{a3}; \\ \underline{T}_{ab} &= (1 - \alpha)T_{b1} + \alpha T_{b2}, & \overline{T}_{b\alpha} &= \alpha T_{b2} + (1 - \alpha)T_{b3}.\end{aligned}\tag{12}$$

В случае использования для описания неопределенных исходных параметров обобщений  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{P}_a$ ,  $\tilde{P}_b$ ,  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{\alpha}_s$ ,  $\tilde{\nu}$ ,  $\tilde{T}_a$ ,  $\tilde{T}_b$  в форме нормальных трапециевидальных нечетких интервалов

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= (a_1, a_2, a_3, a_4), & \tilde{b} &= (b_1, b_2, b_3, b_4), \\ \tilde{P}_a &= (P_{a1}, P_{a2}, P_{a3}, P_{a4}), & \tilde{P}_b &= (P_{b1}, P_{b2}, P_{b3}, P_{b4}), \\ \tilde{E} &= (E_1, E_2, E_3, E_4), & \tilde{\alpha}_s &= (\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \alpha_{s3}, \alpha_{s4}), & \tilde{\nu} &= (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4), \\ \tilde{T}_a &= (T_{a1}, T_{a2}, T_{a3}, T_{a4}), & \tilde{T}_b &= (T_{b1}, Y_{b2}, T_{b3}, T_{b4}),\end{aligned}\tag{13}$$

границы интервалов в соответствующих разложениях (10) имеют представления

$$\begin{aligned}\underline{a}_\alpha &= (1 - \alpha)a_1 + \alpha a_2, & \overline{a}_\alpha &= \alpha a_3 + (1 - \alpha)a_4; \\ \underline{b}_\alpha &= (1 - \alpha)b_1 + \alpha b_2, & \overline{b}_\alpha &= \alpha b_3 + (1 - \alpha)b_4; \\ \underline{P}_{a\alpha} &= (1 - \alpha)P_{a1} + \alpha P_{a2}, & \overline{P}_{a\alpha} &= \alpha P_{a3} + (1 - \alpha)P_{a4}; \\ \underline{P}_{ab} &= (1 - \alpha)P_{b1} + \alpha P_{b2}, & \overline{P}_{b\alpha} &= \alpha P_{b3} + (1 - \alpha)P_{b4};\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_\alpha &= (1 - \alpha)E_1 + \alpha E_2, & \overline{E}_\alpha &= \alpha E_3 + (1 - \alpha)E_4; \\
 \underline{\alpha}_{s\alpha} &= (1 - \alpha)\alpha_{s1} + \alpha\alpha_{s2}, & \overline{\alpha}_{s\alpha} &= \alpha\alpha_{s3} + (1 - \alpha)\alpha_{s4}; \\
 \underline{\nu}_\alpha &= (1 - \alpha)\nu_1 + \alpha\nu_2, & \overline{\nu}_\alpha &= \alpha\nu_3 + (1 - \alpha)\nu_4; \\
 \underline{T}_{a\alpha} &= (1 - \alpha)T_{a1} + \alpha T_{a2}, & \overline{T}_{a\alpha} &= \alpha T_{a3} + (1 - \alpha)T_{a4}; \\
 \underline{T}_{ab} &= (1 - \alpha)T_{b1} + \alpha T_{b2}, & \overline{T}_{b\alpha} &= \alpha T_{b3} + (1 - \alpha)T_{b4}.
 \end{aligned}$$

В случае описания параметрических обобщений  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{P}_a$ ,  $\tilde{P}_b$ ,  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{\alpha}_s$ ,  $\tilde{\nu}$ ,  $\tilde{T}_a$ ,  $\tilde{T}_b$  нормальными нечеткими несимметричными квазигауссовыми числами границы интервалов в разложениях (10) имеют выражения

$$\begin{aligned}
 \underline{a}_\alpha &= m_{*a} - \sigma_{*la}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{a}_\alpha &= m_{*a} + \sigma_{*ra}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
 \underline{b}_\alpha &= m_{*b} - \sigma_{*lb}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{b}_\alpha &= m_{*b} + \sigma_{*rb}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
 \underline{P}_{a\alpha} &= m_{*P_a} - \sigma_{*lP_a}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{P}_{a\alpha} &= m_{*P_a} + \sigma_{*rP_a}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
 \underline{P}_{b\alpha} &= m_{*P_b} - \sigma_{*lP_b}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{P}_{b\alpha} &= m_{*P_b} + \sigma_{*rP_b}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
 \underline{E}_\alpha &= m_{*E} - \sigma_{*lE}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{E}_\alpha &= m_{*E} + \sigma_{*rE}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
 \underline{\alpha}_{s\alpha} &= m_{*\alpha_s} - \sigma_{*l\alpha_s}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{\alpha}_{s\alpha} &= m_{*\alpha_s} + \sigma_{*r\alpha_s}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
 \underline{\nu}_\alpha &= m_{*\nu} - \sigma_{*l\nu}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{\nu}_\alpha &= m_{*\nu} + \sigma_{*r\nu}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
 \underline{T}_{a\alpha} &= m_{*T_a} - \sigma_{*lT_a}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{T}_{a\alpha} &= m_{*T_a} + \sigma_{*rT_a}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
 \underline{T}_{b\alpha} &= m_{*T_b} - \sigma_{*lT_b}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \overline{T}_{b\alpha} &= m_{*T_b} + \sigma_{*rT_b}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

При каждом из указанных вариантов введения нечетко-множественных представлений для неконтрастных экзогенных параметров модели реализуется применение комплекса методик фаззификации [8] имеющихся массивов неопределенных экспериментальных и экспертных данных.

Разрабатываемый алгоритм нечетко-множественного анализа влияния параметрической неопределенности в модели комбинированных термомеханических воздействий на поверхности упругого полого изотропного шара предполагает поэтапное фрагментированное использование арифметики нечетких величин и  $\alpha$ -уровневой модифицированной формы эвристического принципа обобщения. Для эффективного применения модифицированного принципа обобщения предварительно осуществляются дополнительные исследования свойств знакоопределенности частных производных от расчетных функциональных характеристик детерминистической версии модели по некоторым из их аргументов в соответствующей области совокупного изменения переменных, в итоге которых получены оценки

$$\begin{aligned}
 \partial T / \partial T_a &\leq 0, & \partial T / \partial T_b &\geq 0, \\
 \text{sign}(\partial T / \partial a) &= \text{sign}(T_a - T_b), & \text{sign}(\partial T / \partial b) &= \text{sign}(T_b - T_a);
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 \partial \lambda / \partial T_a &\leq 0, & \partial \lambda / \partial T_b &\geq 0, & \partial \lambda / \partial a &\geq 0, & \partial \lambda / \partial b &\leq 0, \\
 \partial \lambda / \partial \nu &\geq 0, & \partial \lambda / \partial \alpha_s &\geq 0, & \partial \lambda / \partial E &\geq 0;
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\partial A/\partial P_a \geq 0, \quad \partial A/\partial P_b \leq 0, \quad \partial A/\partial \lambda \leq 0; \quad (18)$$

$$\partial B/\partial P_a \leq 0, \quad \partial B/\partial P_b \geq 0, \quad \partial B/\partial \lambda \leq 0; \quad (19)$$

$$\partial \sigma_\rho/\partial A \geq 0, \quad \partial \sigma_\rho/\partial B \geq 0, \quad \partial \sigma_\rho/\partial \lambda \geq 0; \quad (20)$$

$$\partial \sigma_\theta/\partial A \geq 0, \quad \partial \sigma_\theta/\partial B \leq 0, \quad \partial \sigma_\theta/\partial \lambda \geq 0. \quad (21)$$

С учетом оценок (16)–(21) и на основе дополнительных альтернативных условий для границ носителей нечетко-множественных экзогенных параметров  $\tilde{T}_a$  и  $\tilde{T}_b$  ( $\bar{T}_{a0} < \underline{T}_{b0}$  либо  $\bar{T}_{b0} < \underline{T}_{a0}$ ) записывается следующая последовательность расчетных соотношений формируемого нечетко-множественного алгоритма:

$$\begin{aligned} \underline{\lambda}_\alpha &= \underline{a}_\alpha \bar{b}_\alpha (\underline{T}_{b\alpha} - \bar{T}_{a\alpha}) \underline{E}_\alpha \underline{\alpha}_s (1 - \underline{\nu}_\alpha)^{-1} (\bar{b}_\alpha - \underline{a}_\alpha)^{-1}, \\ \bar{\lambda}_\alpha &= \bar{a}_\alpha \underline{b}_\alpha (\bar{T}_{b\alpha} - \underline{T}_{a\alpha}) \bar{E}_\alpha \bar{\alpha}_s (1 - \bar{\nu}_\alpha)^{-1} (\underline{b}_\alpha - \bar{a}_\alpha)^{-1}; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_\alpha &= \inf_{\substack{a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha]}} (a^3 \underline{P}_{a\alpha} - b^3 \bar{P}_{b\alpha} - \bar{\lambda}_\alpha (b^2 - a^2)) (b^3 - a^3)^{-1}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\bar{A}_\alpha = \sup_{\substack{a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha]}} (a^3 \bar{P}_{a\alpha} - b^3 \underline{P}_{b\alpha} - \underline{\lambda}_\alpha (b^2 - a^2)) (b^3 - a^3)^{-1};$$

$$\begin{aligned} \underline{B}_\alpha &= \inf_{\substack{a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha]}} (a^3 b^3 (\underline{P}_b - \bar{P}_a) - \bar{\lambda}_\alpha a^2 b^2 (b - a)) (b^3 - a^3)^{-1}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\bar{B}_\alpha = \sup_{\substack{a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha]}} (a^3 b^3 (\bar{P}_b - \underline{P}_a) - \underline{\lambda}_\alpha a^2 b^2 (b - a)) (b^3 - a^3)^{-1};$$

$$\underline{\sigma}_{\rho\alpha}(\rho) = \underline{A}_\alpha + \underline{B}_\alpha \rho^{-3} + \underline{\lambda}_\alpha \rho^{-1}, \quad \bar{\sigma}_{\rho\alpha}(\rho) = \bar{A}_\alpha + \bar{B}_\alpha \rho^{-3} + \bar{\lambda}_\alpha \rho^{-1}; \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{\theta\alpha}(\rho) &= \underline{A}_\alpha - (\bar{B}_\alpha/2) \rho^{-3} + (\underline{\lambda}_\alpha/2) \rho^{-1}, \\ \bar{\sigma}_{\theta\alpha}(\rho) &= \bar{A}_\alpha - (\underline{B}_\alpha/2) \rho^{-3} + (\bar{\lambda}_\alpha/2) \rho^{-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

В случае  $\bar{T}_{a0} < \underline{T}_{b0}$

$$\begin{aligned} \underline{T}_\alpha(\rho) &= \bar{T}_{a\alpha} + (\bar{T}_{a\alpha} - \underline{T}_{b\alpha}) \bar{a}_\alpha \underline{b}_\alpha ((\underline{b}_\alpha - \bar{a}_\alpha))^{-1} (\rho^{-1} - \bar{a}_\alpha^{-1}), \\ \bar{T}_\alpha(\rho) &= \underline{T}_{a\alpha} + (\underline{T}_{a\alpha} - \bar{T}_{b\alpha}) \underline{a}_\alpha \bar{b}_\alpha ((\bar{b}_\alpha - \underline{a}_\alpha))^{-1} (\rho^{-1} - \underline{a}_\alpha^{-1}); \end{aligned} \quad (27)$$

а при  $\bar{T}_{b0} < \underline{T}_{a0}$

$$\begin{aligned} \underline{T}_\alpha(\rho) &= \bar{T}_{a\alpha} + (\bar{T}_{a\alpha} - \underline{T}_{b\alpha}) \underline{a}_\alpha \bar{b}_\alpha ((\bar{b}_\alpha - \underline{a}_\alpha))^{-1} (\rho^{-1} - \underline{a}_\alpha^{-1}), \\ \bar{T}_\alpha(\rho) &= \underline{T}_{a\alpha} + (\underline{T}_{a\alpha} - \bar{T}_{b\alpha}) \bar{a}_\alpha \underline{b}_\alpha ((\underline{b}_\alpha - \bar{a}_\alpha))^{-1} (\rho^{-1} - \bar{a}_\alpha^{-1}). \end{aligned} \quad (28)$$

При использовании в реализуемом исследовании представлений неконтрастных экзогенных параметров в виде нормальных треугольных нечетких чисел (11) либо в виде нормальных трапециевидальных нечетких интервалов (13), часть расчетных соотношений в рамках представляемой методики может быть записана в явной форме с применением аппарата арифметики соответствующих нечетких величин. Так, в частности, для случая (11)

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda} &= (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \\ \lambda_1 &= a_1 b_1 (T_{b1} - T_{a3}) E_1 \alpha_{s1} ((1 - \nu_1)(b_3 - a_1))^{-1}, \\ \lambda_2 &= a_2 b_2 (T_{b2} - T_{a2}) E_2 \alpha_{s2} ((1 - \nu_2)(b_2 - a_2))^{-1}, \\ \lambda_3 &= a_3 b_3 (T_{b3} - T_{a1}) E_3 \alpha_{s3} ((1 - \nu_3)(b_1 - a_3))^{-1};\end{aligned}\tag{29}$$

$$\begin{aligned}\tilde{T}(\rho) &= (T_1(\rho), T_2(\rho), T_3(\rho)), \\ T_1(\rho) &= T_{a1} + (T_{a1} - T_{b3}) a_1 b_1 (\rho^{-1} - a_1^{-1}) / (b_3 - a_1), \\ T_2(\rho) &= T_{a2} + (T_{a2} - T_{b2}) a_2 b_2 (\rho^{-1} - a_2^{-1}) / (b_2 - a_2), \\ T_3(\rho) &= T_{a3} + (T_{a3} - T_{b1}) a_3 b_3 (\rho^{-1} - a_3^{-1}) / (b_1 - a_3);\end{aligned}\tag{30}$$

$$\tilde{A} = (A_1, A_2, A_3), \quad A_1 = \underline{A}_0, \quad A_2 = \underline{A}_1, \quad A_3 = \overline{A}_0;\tag{31}$$

$$\tilde{B} = (B_1, B_2, B_3), \quad B_1 = \underline{B}_0, \quad B_2 = \underline{B}_1, \quad B_3 = \overline{B}_0;\tag{32}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_\rho(\rho) &= (\sigma_{\rho1}(\rho), \sigma_{\rho2}(\rho), \sigma_{\rho3}(\rho)), \\ \sigma_{\rho1}(\rho) &= A_1 + B_1 \rho^{-3} + \lambda_1 \rho^{-1}, \quad \sigma_{\rho2}(\rho) = A_2 + B_2 \rho^{-3} + \lambda_2 \rho^{-1}, \\ \sigma_{\rho3}(\rho) &= A_3 + B_3 \rho^{-3} + \lambda_3 \rho^{-1};\end{aligned}\tag{33}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_\theta(\rho) &= (\sigma_{\theta1}(\rho), \sigma_{\theta2}(\rho), \sigma_{\theta3}(\rho)), \\ \sigma_{\theta1}(\rho) &= A_1 - (B_3/2)\rho^{-3} + (\lambda_1/2)\rho^{-1}, \\ \sigma_{\theta2}(\rho) &= A_2 - (B_2/2)\rho^{-3} + (\lambda_2/2)\rho^{-1}, \\ \sigma_{\theta3}(\rho) &= A_3 - (B_1/2)\rho^{-3} + (\lambda_3/2)\rho^{-1}.\end{aligned}\tag{34}$$

Для варианта описания экзогенных параметров (13)

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda} &= (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), \\ \lambda_1 &= a_1 b_1 (T_{b1} - T_{a4}) E_1 \alpha_{s1} ((1 - \nu_1)(b_4 - a_1))^{-1}, \\ \lambda_2 &= a_2 b_2 (T_{b2} - T_{a3}) E_2 \alpha_{s2} ((1 - \nu_2)(b_3 - a_2))^{-1}, \\ \lambda_3 &= a_3 b_3 (T_{b3} - T_{a2}) E_3 \alpha_{s3} ((1 - \nu_3)(b_2 - a_3))^{-1}, \\ \lambda_4 &= a_4 b_4 (T_{b4} - T_{a1}) E_4 \alpha_{s4} ((1 - \nu_4)(b_1 - a_4))^{-1};\end{aligned}\tag{35}$$

$$\begin{aligned}\tilde{T}(\rho) &= (T_1(\rho), T_2(\rho), T_3(\rho), T_4(\rho)), \\ T_1(\rho) &= T_{a1} + (T_{a1} - T_{b4})a_1b_1(\rho^{-1} - a_1^{-1})/(b_4 - a_1), \\ T_2(\rho) &= T_{a2} + (T_{a2} - T_{b3})a_2b_2(\rho^{-1} - a_2^{-1})/(b_3 - a_2), \\ T_3(\rho) &= T_{a3} + (T_{a3} - T_{b2})a_3b_3(\rho^{-1} - a_3^{-1})/(b_2 - a_3), \\ T_4(\rho) &= T_{a4} + (T_{a4} - T_{b1})a_4b_4(\rho^{-1} - a_4^{-1})/(b_1 - a_4);\end{aligned}\quad (36)$$

$$\tilde{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4), \quad A_1 = \underline{A}_0, \quad A_2 = \underline{A}_1, \quad A_3 = \overline{A}_1, \quad A_4 = \overline{A}_0; \quad (37)$$

$$\tilde{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4), \quad B_1 = \underline{B}_0, \quad B_2 = \underline{B}_1, \quad B_3 = \overline{B}_1, \quad B_4 = \overline{B}_0; \quad (38)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_\rho(\rho) &= (\sigma_{\rho1}(\rho), \sigma_{\rho2}(\rho), \sigma_{\rho3}(\rho), \sigma_{\rho4}(\rho)), \\ \sigma_{\rho1}(\rho) &= A_1 + B_1\rho^{-3} + \lambda_1\rho^{-1}, \quad \sigma_{\rho2}(\rho) = A_2 + B_2\rho^{-3} + \lambda_2\rho^{-1}, \\ \sigma_{\rho3}(\rho) &= A_3 + B_3\rho^{-3} + \lambda_3\rho^{-1}, \quad \sigma_{\rho4}(\rho) = A_4 + B_4\rho^{-3} + \lambda_4\rho^{-1};\end{aligned}\quad (39)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_\theta(\rho) &= (\sigma_{\theta1}(\rho), \sigma_{\theta2}(\rho), \sigma_{\theta3}(\rho)), \\ \sigma_{\theta1}(\rho) &= A_1 - (B_4/2)\rho^{-3} + (\lambda_1/2)\rho^{-1}, \quad \sigma_{\theta2}(\rho) = A_2 - (B_3/2)\rho^{-3} + (\lambda_2/2)\rho^{-1}, \\ \sigma_{\theta3}(\rho) &= A_3 - (B_2/2)\rho^{-3} + (\lambda_3/2)\rho^{-1}, \quad \sigma_{\theta4}(\rho) = A_4 - (B_1/2)\rho^{-3} + (\lambda_4/2)\rho^{-1}.\end{aligned}\quad (40)$$

Расчетные соотношения (22)–(40) дают описание предлагаемого алгоритма учета разбросов для величин исходных параметров в модели комбинированных термомеханических воздействий на поверхности упругого изотропного полого шара.

**2. Результаты вычислительных экспериментов.** Расчетный анализ рассматриваемой модели с применением разработанной нечетко-множественной методики проводился для толстостенной сферической оболочки из стали без учета возможных разбросов в ее геометрических размерах, рассматривавшихся как контрастные величины  $a = 2.0 L_*$ ,  $b = 2.2 L_*$ ,  $L_* = 1\text{м}$ . Оболочка нагревается извне, а на ее внутренней поверхности поддерживается нулевая температура. К внутренней и внешней граничным поверхностям приложено давление.

Для имеющих разбросы значений неконтрастных физико-механических параметров  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{\alpha}_s$ ,  $\tilde{\nu}$  выбирались описания нормальными трапецидальными нечеткими интервалами вида

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= (19.9E_*, 20.0E_*, 20.1E_*, 20.15E_*), \\ \tilde{\nu} &= (0.295, 0.3, 0.302, 0.305), \quad \tilde{\alpha}_s = (13.9A_*, 14A_*, 14.05A_*, 14.1A_*), \\ E_* &= 10^4\text{МПа}, \quad A_* = 10^{-6}\text{град}^{-1}.\end{aligned}\quad (41)$$

Неконтрастные характеристики внешних силовых и температурных воздействий  $\tilde{P}_a$ ,  $\tilde{P}_b$ ,  $\tilde{T}_a$ ,  $\tilde{T}_b$  задавались в виде

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_a &= (10.485 P_*, 10.495 P_*, 10.505 P_*, 10.510 P_*), \\
 \tilde{P}_b &= (0.0125 P_*, 0.0127 P_*, 0.0129 P_*, 0.0131 P_*), \\
 \tilde{T}_a &= (0, 0, 0, 0), \quad \tilde{T}_b = (98 T_*, 100 T_*, 101 T_*, 102 T_*), \\
 P_* &= 101325 \text{Па}, \quad T_* = 1^\circ\text{C}.
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

Результатами дефаззификации по методу медиан [8] для представленных нечеткими трапецидальными интервалами неконтрастных экзогенных параметров (41), (42) являются величины

$$\begin{aligned}
 E &= 20.0375 E_*, \quad \nu = 0.3005, \quad \alpha_s = 14.0125 A_*, \\
 P_a &= 10.49875 P_*, \quad P_b = 0.0128 P_*, \quad T_a = 0, \quad T_b = 100.25 T_*.
 \end{aligned}$$

На рисунках 1–9 представлены функции принадлежности нечетко-множественных характеристик  $\tilde{T}(\rho)$ ,  $\tilde{\sigma}_\rho(\rho)$ ,  $\tilde{\sigma}_\theta(\rho)$ , рассчитанные в случае задания указанных неконтрастных исходных параметров нормальными нечеткими трапецидальными интервалами во внутренних точках рассматриваемого сферического тела для значений параметра  $\rho_1 = 0.9a + 0.1b$ ,  $\rho_2 = 0.5a + 0.5b$ ,  $\rho_3 = 0.1a + 0.9b$ .

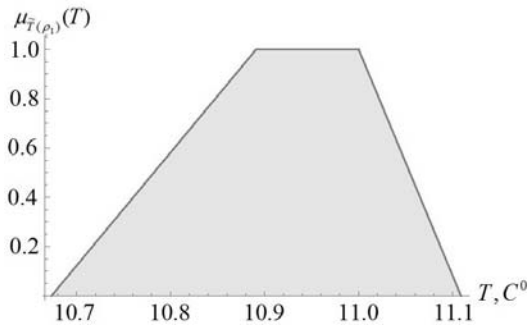


Рис. 1. Профиль функции принадлежности  $\mu_{\tilde{T}(\rho_1)}(T)$

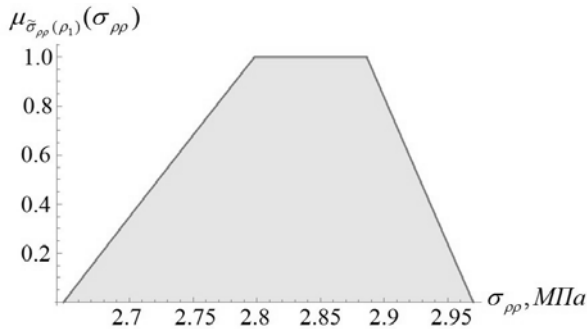


Рис. 2. Профиль функции принадлежности  $\mu_{\tilde{\sigma}_{\rho\rho}(\rho_1)}(\sigma_{\rho\rho})$



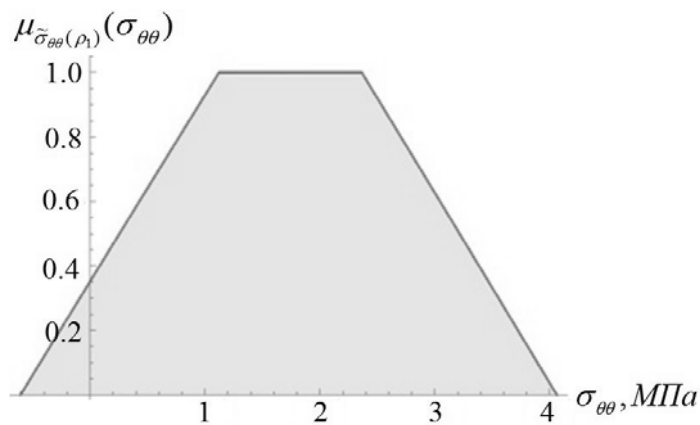


Рис. 3. Профиль функции принадлежности  $\mu_{\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\rho_1)}(\sigma_{\theta\theta})$

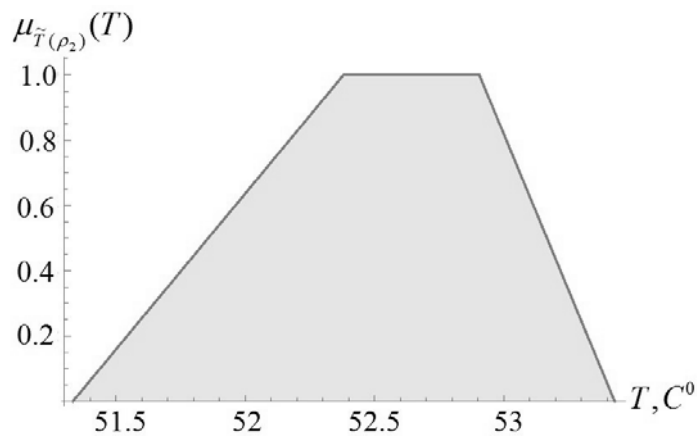


Рис. 4. Профиль функции принадлежности  $\mu_{\tilde{T}(\rho_2)}(T)$

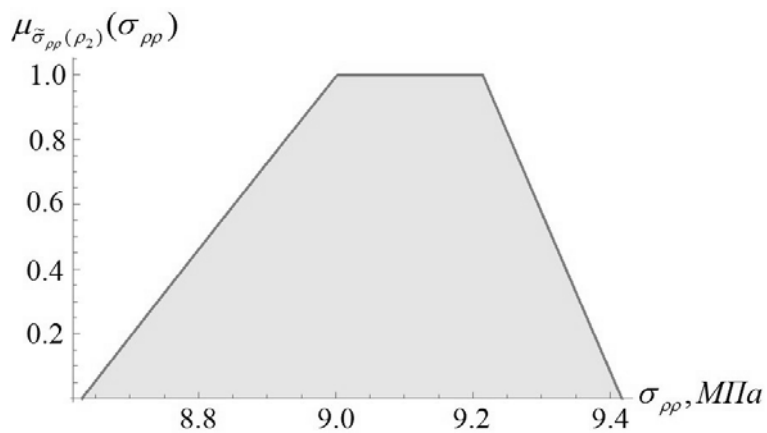


Рис. 5. Профиль функции принадлежности  $\mu_{\tilde{\sigma}_{\rho\rho}(\rho_2)}(\sigma_{\rho\rho})$

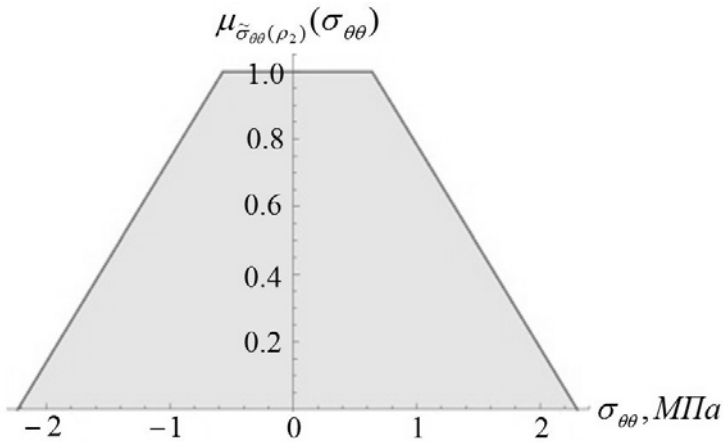


Рис. 6. Профиль функции принадлежности  $\mu_{\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\rho_2)}(\sigma_{\theta\theta})$

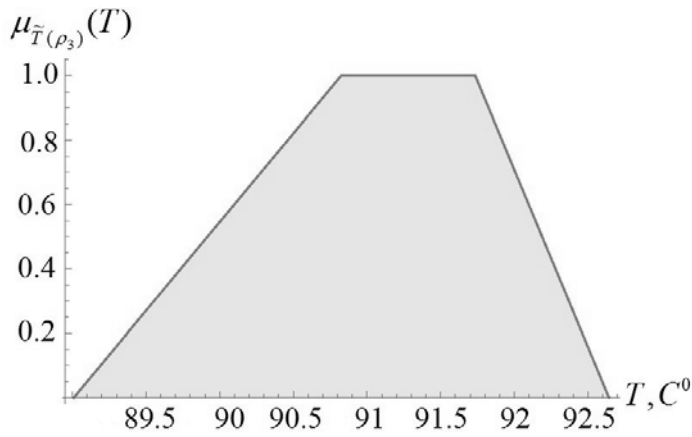


Рис. 7. Профиль функции принадлежности  $\mu_{\tilde{T}(\rho_3)}(T)$

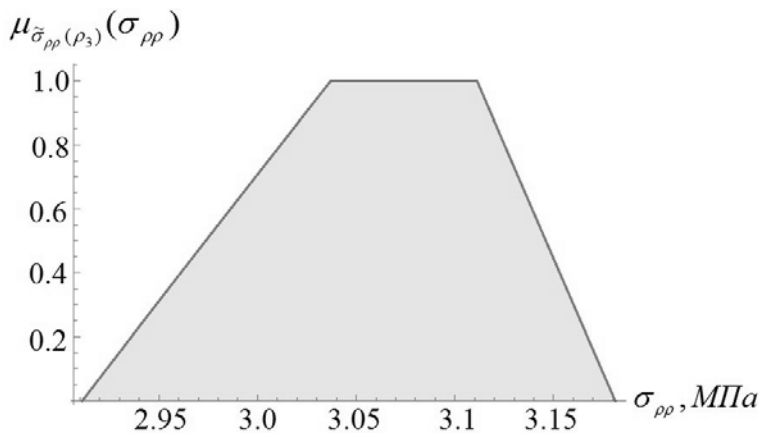


Рис. 8. Профиль функции принадлежности  $\mu_{\tilde{\sigma}_{\rho\rho}(\rho_3)}(\sigma_{\rho\rho})$

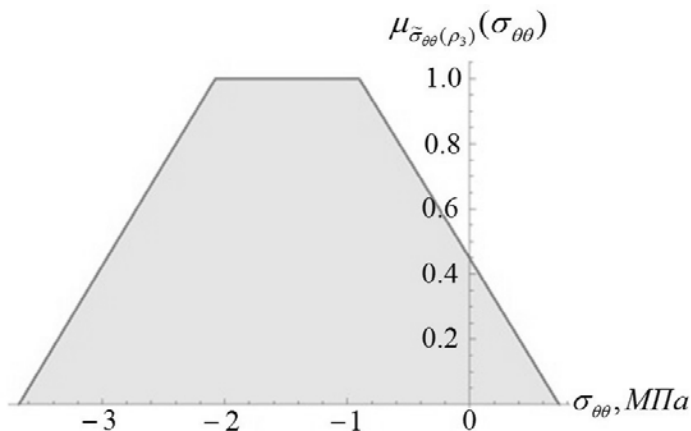


Рис. 9. Профиль функции принадлежности  $\mu_{\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\rho_3)}(\sigma_{\theta\theta})$

Как свидетельствуют результаты расчетов, максимальные уровни разбросов для эндогенных расчетных характеристик исследуемой модели имеют нечетко-множественные оценки термомеханических напряжений  $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\rho)$ .

**Заключение.** В результате проведенных исследований применение нечетко-множественной методики учета параметрической неопределенности экзогенных характеристик, реализованное ранее в задаче о центрально-симметричном термонапряженном состоянии изотропного тела в форме полой сферы при тепловых воздействиях на его внутреннюю граничную поверхность, распространено на задачу анализа общего случая комбинированных силовых и температурных равномерно распределенных воздействий на внутренней и внешней граничных поверхностях. Получены расчетные соотношения для неконтрастных выходных параметров рассматриваемой модели при описании обладающих разбросами значений исходных физико-механических и геометрических характеристик нормальными нечеткими гауссовыми числами, треугольными нечеткими числами либо нормальными нечеткими трапецидальными интервалами. Методика базируется на использовании расчетных соотношений детерминистического варианта рассматриваемой модели с дальнейшим поэтапным фрагментированным применением операций нечетко-множественных вычислений и альфа-уровневой модификации эвристического принципа обобщения в процессе перехода к неконтрастным аргументам в указанных расчетных формулах. Представлены отдельные результаты численной реализации предложенной методики.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 1023030100040-4- 1.1.2;2.3.1).

1. *Бажанов В.А.* Расчет конструкций на тепловые воздействия / В.А. Бажанов, И.И. Гольденблат, Н.А. Николаенко, А.М. Синюков. – Москва: Машиностроение, 1969. – 599 с.
2. *Коваленко А.Д.* Термоупругость / А.Д. Коваленко. – К.: Вища школа, 1975. – 215 с.
3. *Подстригач Я.С.* Термоупругость тонких оболочек / Я.С. Подстригач. – К.: Наукова думка, 1978. – 343 с.

4. *Миронов Д.Н.* Решение стационарной задачи термоупругости и термопластичности в приближении эффективной модели для тела сферической формы / Д.Н. Миронов, В.П. Гончаренко, Ю.А. Чигарева, В.А. Чигарев // Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник. – 2016. – Вып. 31. – С. 185–195.
5. *Дац Е.П.* Термоупругопластическое деформирование многослойного шара / Е.П. Дац, Е.В. Мурашкин // Изв. РАН. МТТ. – 2017. – № 5. – С. 30–36.
6. *Сёмка Э.В.* Упругопластическое состояние полого шара / Э.В. Сёмка // Вестник инженерной школы ДВФУ. – 2020. – № 3(44). – С. 3–12. doi: <http://www.dx.doi.org/10.24866/2227-6858/2020-3-1>
7. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел / В.А. Ломакин – М.: ЛЕНАНД, 2014. – 144 с.
8. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
9. *Нгуен Куок Ши* Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.
10. *Номбре С.Б.* Анализ неконтрастной модели осесимметричного термонапряженного состояния полого цилиндра / С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 4 (81). – С. 63–76. С. 63–76. – doi: 10.24412/0136-4545-2022-4-63-76. – EDN: TOGBNE.
11. *Номбре С.Б.* Нечетко-множественный анализ параметрической неопределенности в расчетных моделях термоупругого деформирования балок / С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 1(82). – С. 81–92. – doi: 10.24412/0136-4545-2023-1-81-92. – EDN: PQQQXY.
12. *Номбре С.Б.* Учет параметрической неопределенности в модели температурных воздействий на внутреннюю поверхность упругого полого шара / С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 2 (83). – С. 56–66. – doi: 10.24412/0136-4545-2023-2-56-66. – EDN: TVWFZT.

**A.S. Goltsev, S.B. Nombbre, D.D. Polyansky, S.V. Storozhev**

**Fuzzy-set accounting of parameters scatter errors in the model of thermomechanical loads impact on the surfaces of an elastic hollow ball.**

The development of a fuzzy-set methodology for taking into account scatter errors in the values of the initial physical-mechanical and geometric parameters for a model of polar-symmetric deformation of an isotropic elastic hollow ball under complex force and temperature influences on its internal and external boundary surfaces is given. The described methodology is based on the use of calculated relationships of the deterministic version of the model under consideration with further stage-by-stage fragmented application of fuzzy set calculation operations and alpha-level modification of the heuristic principle of generalization in the process of transition to non-contrasting arguments in the specified calculation formulas. Some results of the numerical implementation of the proposed method are presented.

**Keywords:** *isotropic hollow ball, polar-symmetric deformation, internal and external pressure, thermal surface effects, scatter errors of initial parameters, fuzzy-set methodic of accounting, heuristic generalization principle.*

*Получено 14.09.2023*

ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД,  
РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ  
ТЕПЛОФИЗИКА

---

УДК 622.837:622.838

doi:10.24412/0136-4545-2023-3-115-122

EDN:WODRIS



©2023. Л.А. Иванова<sup>1</sup>, Ф.М. Голубев<sup>2</sup>

ПОСЛЕДСТВИЯ ПОДРАБОТКИ В СЛОЖНЫХ  
ГОРНО-ГЕОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ И НАЗНАЧЕНИЕ  
МЕР ЗАЩИТЫ НА ПРИМЕРЕ ДОМА  
ДЕТСКОГО ТВОРЧЕСТВА В ГОРОДЕ КИРОВСКОЕ

На основании анализа конструктивных особенностей и результатов обследования здания дома детского творчества в г. Кировское, анализа последствий многократной подработки здания горными работами шахты «Комсомолец Донбасса», установлены характерные повреждения конструкций от влияния горных работ, мезорельефа земной поверхности и недостатков конструктивной схемы здания. Для обеспечения нормальных условий эксплуатации здания разработаны мероприятия, включающие усиление конструкций здания и проведение ремонтных работ.

**Ключевые слова:** сдвигения земной поверхности, здания, деформации, меры защиты, подработка.

**Введение.** Разработка мероприятий, связанных с обеспечением эксплуатационной пригодности многократно подрабатываемых зданий, производится с учетом характера и величины воздействий, обусловленных влиянием горных

---

<sup>1</sup>Иванова Лариса Александровна – канд. техн. наук, ст. науч. сотр. отд. сдвигения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНМИ, Донецк, e-mail: ivlarisa213@yandex.ru.

Ivanova Larisa Aleksandrovna – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

<sup>2</sup>Голубев Филипп Максимович – канд. техн. наук, вед. науч. сотр. отд. сдвигения земной поверхности и защиты подрабатываемых объектов РАНМИ, Донецк, e-mail: f\_golubev@list.ru.

Golubev Philipp Maksimovich – Candidate of Technical Sciences, Leading Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Earth Surface Displacement and Protection Objects Above Mining.

выработок, а также с учетом необходимости устранения деформаций и повреждений конструкций от влияния горных работ в процессе эксплуатации шахты [1, 2]. Требования [1] должны обеспечивать безопасность эксплуатации подработанных зданий при влиянии горных работ.

Анализ влияния многократной подработки ГУП ДНР «Шахта «Комсомолец Донбасса» на техническое состояние здания муниципального общеобразовательного учреждения «Дом детского творчества города Кировское», анализ результатов обследования, установление причин деформирования конструкций здания, разработка технических решений по усилению здания, представляет научный и практический интерес. Актуальность работы обусловлена необходимостью обеспечения безопасной эксплуатации зданий такого типа в условиях последствий многократного влияния деформаций земной поверхности от подработки.

**1. Характеристика объекта исследования.** Здание дома детского творчества по улице Пионерская, 5 в городе Кировское Донецкой Народной Республики построено в 1963 году. Здание дома детского творчества трехэтажное, с подвалом под средней частью здания, имеет простую форму с общими размерами в плане 70,35 м x 12,70 м и высотой 10,3 м. Здание разделено двумя деформационными швами на три отсека. Высота подвальных помещений 2,4 м. Высота помещений первого, второго и третьего этажей 3,0 м. Конструктивная схема здания бескаркасная с продольными несущими стенами. Фундаменты здания ленточные из бутовой кладки толщиной 600 мм. Стены подвала и цоколя из бутовой кладки толщиной 600 мм. Стены наружные кирпичные толщиной 510 мм, стены внутренние толщиной 380 мм. Перекрытия над подвалом и междуэтажные с первого по третий этаж из сборных железобетонных плит с круглыми пустотами диаметром 220 мм. Лестницы – сборные железобетонные. Крыша – чердачная с деревянными стропилами, четырехскатная. Кровля – из волнистых асбестоцементных листов по деревянной обрешетке.

**2. Горно-геологические условия подработки объекта исследования.** Здание дома детского творчества расположено на горном отводе ГУП ДНР «Шахта «Комсомолец Донбасса». Горный отвод шахты занимает центральную и западную части Чистяково-Снежнянской синклинали, представляющей собой симметричную складку с крутым северным крылом и пологим южным.

В пределах горного отвода шахты толща горных пород сложена отложениями верхнего и среднего карбона, представленными свитами  $C_3^1$ ,  $C_2^7$  и  $C_2^6$ , перекрытыми сверху четвертичными отложениями – наносами, мощностью до 5 м. Карбоновые отложения представлены песчаниками, глинистыми и песчаными сланцами, пластами известняков и угольными пластами. Преобладающими породами являются сланцы. Существенную долю составляют также песчаники, которые иногда образуют значительные толщи. Мощные толщи песчаников нередко создают условия зависания пород. Шахта отрабатывает пласты  $l_3$ ,  $l_4$ ,  $l_6$ ,  $l_7$ .

Пласт  $l_3$  имеет сложное строение и состоит из трех угольных пачек, реже

из двух и четырех пачек. Полезная мощность пласта достигает 1,8 м и общая 2,0 м. Пласт характеризуется, как относительно выдержанный.

Пласт  $l_4$  имеет простое строение, наиболее характерная мощность 0,96–1,24 м. В западном и юго-западном направлении мощность уменьшается до 0,7–0,88 м. Пласт характеризуется, как относительно выдержанный.

Пласт  $l_6$  имеет мощность 1,5–1,8 м, строение сложное двух-трех пачечное, с маломощными прослоями, наблюдаются многочисленные размывы пласта, имеющие вытянутую форму. Угольный пласт  $l_6$  по мощности относится к относительно выдержанным пластам, преобладает сложное строение пласта с маломощными разделяющими прослоями. Характерная полезная мощность – 1.20 м.

Пласт  $l_7$  – Давыдовский имеет простую структуру. Мощность пласта 0,9–1,1 м.

Муниципальное общеобразовательное учреждение «Дом детского творчества города Кировское» подрабатывался: в 1997–2000 гг. 2-й и 3-й южными лавами пласта  $l_7$ ; в 2007–2010 гг. 6-й, 7-й, 8-й западными лавами пласта  $l_4$ ; в 2018–2021 гг. 6-й и 7-й западными лавами пласта  $l_3$ .

Расчет сдвижений и деформаций земной поверхности выполнялся для каждой лавы в отдельности. Максимальные расчетные деформации в основании здания от влияния каждой влияющей лавы приведены в таблице 1.

Таблица 1. Максимальные расчетные деформации земной поверхности

Лавы, пласт, год отработки	Оседания от подработки мм	Наклоны $i$ , $10^{-3}$		Горизонтальн. деформации $\epsilon$ , $10^{-3}$	
		в продольном направлении	в поперечном направлении	в продольном направлении	в поперечном направлении
1	2	3	4	5	6
2 южная лава $l_7$ , 1997 г.	212	–2,96	–0,90	0,99	–0,75
3 южная лава $l_7$ , 2000 г.	60	–0,29	1,28	0,38	0,60
6 западная лава $l_4$ , 2007 г.	114	–1,47	–1,31	0,42	0,60
7 западная лава $l_4$ , 2009 г.	568	–1,20	1,65	–1,43	–2,06
8 западная лава $l_4$ , 2010 г.	127	1,15	1,96	0,17	0,96
6 западная лава $l_3$ , 2018 г.	215	–2,16	0,78	0,98	–0,47
7 западная лава $l_3$ , 2019 г.	70	2,31	–1,56	0,22	0,61

Анализ горно-геологических условий и прогноз деформаций земной поверхности показали, что здание находилось в зоне влияния от семи горных выработок и было многократно подработано. Кроме того здание дома детского творчества расположено на участке застройки между выходами на поверхность известняков  $M_8$  и  $M_{10}$ . Также недалеко от здания отмечается мезорельеф поверхности с понижением уровня поверхности от главного фасада здания.

**3. Анализ влияния подработки на деформации здания.** Анализ влияния деформаций на здание дома детского творчества показывает что, максимальные горизонтальные деформации сжатия вдоль продольной оси составили  $1.43 \times 10^{-3}$  и вдоль поперечной оси  $2.06 \times 10^{-3}$  при отработке 7 западной лавы пласта  $l_4$  в 2007 г. (рис.1). Максимальные горизонтальные деформации растяжения вдоль продольной оси здания составили  $0.99 \times 10^{-3}$  при отработке 2 южной лавы пласта  $l_7$  в 1997 году и вдоль поперечной оси  $0.96 \times 10^{-3}$  при отработке 8 западной лавы пласта  $l_3$  в 2021 г.

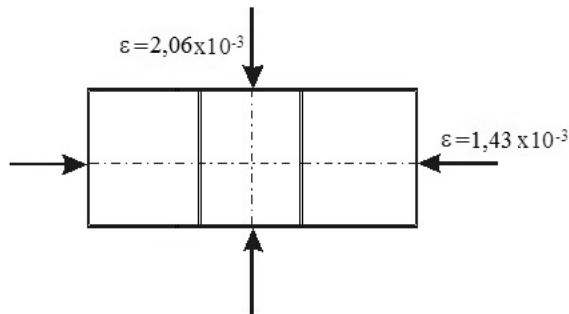


Рис. 1. Схема деформирования здания дома детского творчества по ул. Пионерская, 5 в г. Кировское

Визуальное обследование здания дома детского творчества проведено в декабре 2022 г. с фиксацией имеющихся дефектов и повреждений конструкций здания. При обследовании фасадов здания дома детского творчества установлено:

- в стене главного фасада трещины под и над окнами раскрытием 1-5 мм, максимальные в уровне карниза до 10–15 мм (рис. 2), раскрытие деформационных швов до 80 мм;

- в стене дворового фасада трещины под и над окнами и в простенках раскрытием 1–5 мм, в средней части вертикальная трещина на высоту здания раскрытием 10–15 мм, в уровне карниза до 30 мм заделана монтажной пеной (рис. 3);

- в стене левого фасада трещины под и над окнами, в простенках и под оконными перемычками раскрытием до 7–8 мм, максимальные трещины до 10–15 мм, над окном третьего этажа до 15–20 мм, трещины заделаны монтажной пеной (рис. 4);

- в стене правого фасада трещины под и над окнами, в простенках, под оконными перемычками раскрытием до 10–30 мм, в уровне карниза до 40 мм заделаны монтажной пеной (рис. 5).

Подвал расположен в среднем отсеке здания и ранее эксплуатировался как цокольный этаж. При обследовании подвальных помещений установлено, что бывшие оконные проемы заложены кирпичом, частично на полную толщину стен, частично на толщину 120 мм. Имеются трещины в стенах подвала раскрытием до 5–7 мм. Во внутренних помещениях имеются трещины в стенах



1–3 мм, максимальные до 5–7 мм.



*Рис. 2. Рисунок 2 – Трещины в стене главного фасада*



*Рис. 3. Вертикальная трещина в средней части дворового фасада*

**4. Определение причин повреждений и назначение мер защиты.** Анализ результатов обследования строительных конструкций здания показал, что дефекты и повреждения, имеющиеся в здании, характерны для многократного влияния горных работ. Однако величины прогнозных деформаций земной поверхности невелики и не соответствуют величине раскрытия трещин в стенах



*Рис. 4. Трещины в стене левого фасада*



*Рис. 5. Трещины в стене правого фасада*

здания. Поэтому можно предположить наличие в основании здания выхода под наносы пропластков известняков или пород с различными прочностными характеристиками. Кроме того, возможно влияние мезорельефа земной поверхности. Имеющиеся дефекты и повреждения строительных конструкций здания также могут быть вызваны недостатками его конструктивной схемы (недостаточное количество поперечных стен и отсутствие цокольного и поэтажных железобетонных поясов), а также нарушением строительных норм и правил реконструкции здания при переустройстве цокольного этажа в подвал. Для обеспечения нормальных условий эксплуатации здания дома детского творчества разработаны меры защиты здания включающие:

- закладку окон подвала кирпичом в местах, где толщина закладки окон меньше толщины стены;
- усиление цоколя левого и правого отсеков железобетонной обоймой, усиление цоколя и стен подвала в среднем отсеке железобетонной обоймой, обойма должна быть завязана по контуру отсека;
- усиление оконных проемов металлическими рамами и простенков между оконными проемами первого, второго и третьего этажей на левом и правом фасадах, оконных проемов и простенков в районе вертикальной трещины в средней части дворового фасада и оконных проемов, где имеются трещины под оконными перемычками;
- расшивку имеющихся трещин в стенах и заделку их полимерцементным раствором;
- ремонт поврежденной кирпичной кладки наружных стен и карнизов с выполнением облицовки и утеплением фасадов;
- закрытие деформационных швов в наружных стенах нащельниками, во внутренних стенах и на потолках с фиксированием плит облицовки с одной стороны для создания возможности перемещения при работе деформационных швов;
- замену деревянных окон и дверей, ремонт внутренних помещений и полов;
- установку на крыше ограждения и выполнение организованного водоотведения атмосферных осадков с крыши здания;
- ремонт отмостки и асфальтового покрытия прилегающей территории.

**Выводы.** На основании анализа конструктивных особенностей здания дома детского творчества, влияния подработки ГУП ДНР «Шахта «Комсомолец Донбасса», результатов обследования и определения технического состояния здания дома детского творчества установлено следующее:

1. Анализ горно-геологических условий показал, что здание дома детского творчества находилось в зоне влияния горных работ шахты «Комсомолец Донбасса» с 1997 по 2021 г. Здание дома детского творчества было многократно подработано семью горными выработками на трех пластах. Максимальные горизонтальные деформации сжатия вдоль продольной оси составили  $1.43 \times 10^{-3}$  и вдоль поперечной оси  $2.06 \times 10^{-3}$  при отработке 7 западной лавы пласта  $l_4$  в 2007 г. Максимальные горизонтальные деформации растяжения вдоль продольной оси здания составили  $0.99 \times 10^{-3}$  при отработке 2 южной лавы пласта  $l_7$  в 1997 году и вдоль поперечной оси  $0.96 \times 10^{-3}$  при отработке 8 западной лавы пласта  $l_3$  в 2021 г.
2. Анализ результатов обследования конструкций здания дома детского творчества показал, что дефекты и повреждения в здании вызваны многократным влиянием горных работ, наличием в основании выходов под наносы пропластков известняков и влиянием мезорельефа земной поверхности. Имеющиеся дефекты и повреждения здания также могут быть вызваны недостатками конструктивной схемы здания и нарушением строительных норм и правил при реконструкции здания.

3. Для обеспечения нормальных условий эксплуатации здания дома детского творчества разработан комплекс технических мероприятий.

4. Полученные результаты обследования свидетельствуют о том, что в сложных горно-геологических условиях при многократной подработке, воздействие деформаций на объекты земной поверхности существенно возрастает, что может носить разрушительный характер для кирпичных зданий. В целях обеспечения безопасности таких зданий следует предусматривать их мониторинг на всех этапах отработки, начиная с момента проектирования очистных горных выработок.

Исследования проведены в ФГБНУ «РАНИМИ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 1023020600011-0-2.7.5).

1. ГСТУ 101.00159226.001 – 2003. Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом – Введ. 01.01.2004. – К., 2004. – 128 с.
2. СНиП II-A. 14-71. Здания и сооружения на подрабатываемых территориях / Госстрой УССР. – Введ. 01.02.1972. – М., 1972. – 14 с.

**L.A. Ivanova, Ph.M. Golubev**

**The consequences of part-time work in difficult mining and geological conditions and the appointment of protective measures on the example of the children's creativity house in the city of Kirovskoye.**

Based on the analysis of the design features and the results of the survey of the building of the house of children's creativity in Kirovskoye, the analysis of the consequences of multiple side-work of the building by mining operations of the Komsomolets Donbass mine, characteristic structural damage from the influence of mining operations, mesorelief of the Earth's surface and shortcomings of the structural scheme of the building were established. To ensure the normal operating conditions of the building, measures have been developed including strengthening the building structures and carrying out repair work.

**Keywords:** *movements of the earth's surface, buildings, deformations, protection measures, part-time work.*

*Получено 03.07.2023*

УДК 550.834:622.12  
doi:10.24412/0136-4545-2023-3-123-131  
EDN:BRWAHE



©2023. А.А. Глухов<sup>1</sup>

## О ВОЗМОЖНОСТИ ПРОГНОЗА РАСПОЛОЖЕНИЯ ЗОН ВЕРОЯТНОГО СКОПЛЕНИЯ МЕТАНА СЕЙСМИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

На основе использования методов математического моделирования рассмотрена возможность использования дифрагированных волн для прогноза потенциально опасных в плане выбросов метана зон дробления и зон повышенной трещиноватости пород. Показано, что в случае малоразмерной зоны аномалии, ее детектирование возможно с применением стандартных сейсмических экспериментов, выполненных методом отраженных волн. Обработку результатов следует проводить на основе использования информативных дифрагированных волн по соответствующим методикам. При этом возможно получить изображение ближней к профилю наблюдений зоны аномалии. В то же время, не представляется возможным точно определить ее размеры и степень изменения физико-механических параметров пород.

**Ключевые слова:** сейсморазведка, метод дифрагированных волн, метод эллипсов, зоны скопления метана, математическое моделирование.

**Введение и постановка задачи.** Выбросоопасность угольных пластов является одним из основных факторов, которые негативно влияют на безопасность труда и снижают эффективность добычи угля [1]. В частности, выделение метана в горные выработки может привести к взрывам метановоздушных смесей и угольной пыли. Места скопления метана, как правило, приурочены к областям дробления пород, либо к зонам повышенной трещиноватости. В первую очередь, это зоны влияния дизъюнктивных нарушений, которые сравнительно легко могут быть выделены геофизическими методами [1]. Как правило, разрывные тектонические нарушения для сейсмических волн представляют собой протяженные отражающие границы, методики обнаружения и оконтуривания которых достаточно хорошо проработаны. Однако протяженность мелкоамплитудных дизъюнктивов может быть мала, а отражающая поверхность по размерам сравнима с длиной информативной волны. Подобные ситуации возникают и в случаях, если зоны трещиноватости образованы иными причинами, например, приурочены к участкам мульды. Зону трещиноватости, в этих случаях, можно рассматривать, как область произвольной формы, не образующую прямолинейную отражающую границу.

<sup>1</sup>Глухов Александр Александрович – доктор техн. наук, зам. директора по науч. работе РАНМИ, Донецк, e-mail: glukhov1964@yandex.ru.

Glukhov Aleksandr Aleksandrovich – Doctor of Technical Sciences, Deputy Director for Science, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk.

Для всех подобных случаев использование отраженных волн в методическом плане затруднено. В данной статье на основе использования методов математического моделирования [2, 3] рассмотрена возможность использования дифрагированных волн для прогноза потенциально опасных в плане выбросов метана зон дробления и повышенной трещиноватости пород.

**1. Методика моделирования.** Методика моделирования подробно описана в монографии [2]. В рамках упругой модели, систему уравнений, описывающих движение частиц среды, можно записать в виде

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1)$$

где  $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$  представляет собой градиент тензора напряжений,  $\rho$  – плотность,  $\ddot{u}_i$  – ускорение,  $\sigma_{ik} = \lambda u_{ll} \delta_{ik} + 2\mu u_{ik}$  – тензор напряжения,  $u_{ik}$  – компоненты тензора смещения,  $\lambda$  и  $\mu$  – коэффициенты Ламе.

Тогда выражение (1) можно записать в виде

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} u_{ll} \delta_{ik} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x_k} u_{ik} + \lambda \delta_{ik} \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_k} + 2\mu \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k}. \quad (2)$$

В специализированном программном комплексе [3, 4] реализована конечно-разностная схема решения волновых уравнений (2). Решается плоская задача. Моделируется распространение колебаний в заданной плоскости, проходящей через прямолинейный профиль наблюдений и аномальную зону круглой формы.

С методической точки зрения представляют интерес следующие вопросы. Во-первых, каковы критерии наличия локальных зон трещиноватости при обработке результатов сейсморазведки различными методами? Во-вторых, зоны с какими параметрами могут быть обнаружены? Под параметрами понимаются размеры зоны и степень изменения физико-механических свойств пород в ней. Поэтому, моделировались зоны диаметром от 10 до 60 м со степенью изменения плотности и скоростей распространения волн сжатия и волн сдвига от 10%. При больших диаметрах аномалии отдельные участки ее границ можно рассматривать в качестве прямолинейных. Они будут генерировать классические отраженные волны. Указанная степень изменения физико-механических параметров среды характерна для зон трещиноватости.

В качестве вмещающей породы выбран алевролит со скоростями распространения продольных и поперечных волн  $V_p = 3500$  м/с и  $V_s = 2400$  м/с соответственно.

При моделировании имитировались сейсмические наблюдения по стандартной схеме (рис. 1) на профиле с одной расстановкой приемников, которая не перемещается в процессе съемки [1].

Профиль наблюдений расположен на расстоянии 135 м от центра аномалии. Сейсмоприемники (СП) расположены с шагом 5 м вдоль профиля наблюдений (всего их 24). СП №1 находится напротив центра зоны аномалии. Первый пункт возбуждения (ПВ) сейсмических колебаний расположен вне зоны расстановки

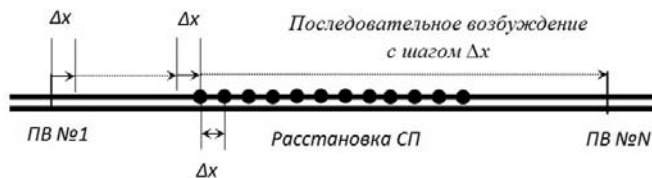


Рис. 1. Стандартная система наблюдений для одной расстановки приемников с минимальным интервалом съемки [1]

СП на расстоянии (с выносом) 50 м от первого СП. Последующие ПВ моделировались с интервалом 15 м в направлении расстановки СП (всего 13 ПВ).

Выполняется последовательный расчет сейсмограмм для каждого ПВ. Каждая сейсмограмма состоит из 24 сейсмотрасс (по числу СП). Затем сейсмограммы загружаются в программный модуль обработки результатов сейсморазведки [5], и выполняется обработка по методу эллипсов [6] и методу дифрагированных волн [7, 8]. В результате обработки генерировались зоны вероятного расположения нарушений, которые затем сравнивались с модельными данными.

**2. Результаты моделирования и их анализ.** На рисунке 2 для примера представлены сейсмограммы для ПВ №2, иллюстрирующие регистрацию SH (рис. 2, а) и P-SV (рис. 2, б) колебаний (в виде копии рабочего окна программного модуля). Для каждой сеймотрассы слева выведен номер сейсмограммы

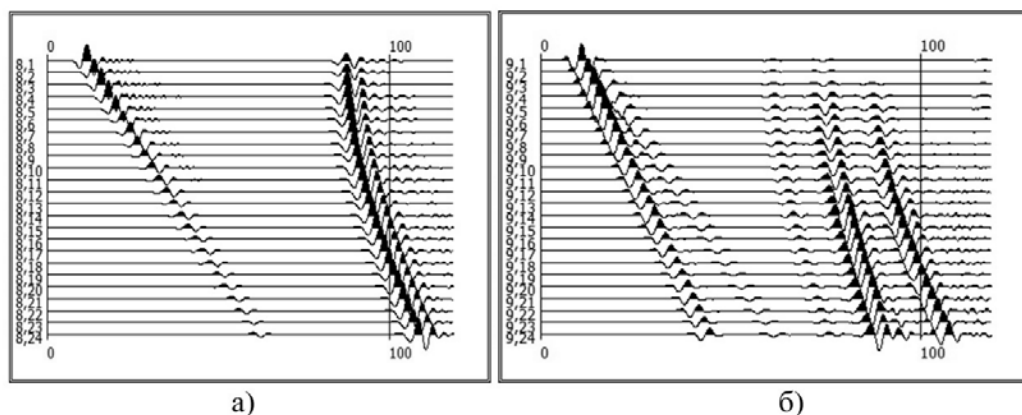


Рис. 2. Наборы теоретических сейсмотрасс для SH (а) и P-SV (б) волн для ПВ №2.

и номер СП. Шкала времени представлена в миллисекундах. В каждом наборе присутствуют прямые волны, распространяющиеся вдоль профиля от ПВ к СП. Они имеют прямолинейный годограф. На сейсмограмме SH колебаний такая волна одна (SH). На сейсмограмме P-SV колебаний таких волн две (P и SV). На сейсмограммах SH колебаний прослеживается одна рассеянная волна. На сей-

смограмме P-SV колебаний прослеживается набор рассеянных волн. Во-первых, это P волны и SV волны, образованные колебаниями таких же типов (первый и третий волновые пакеты). Во-вторых, это P волны и SV волны, трансформированные при рассеянии SV и P колебаний, соответственно. Обычно такие волны называют «обменными». Годографы трансформированных волн располагаются близко (из геометрических соображений) и колебания в итоге образуют один пакет.

На рисунке 3 представлены последовательные картины рассеяния SH волны областью трещиноватости радиусом 30 м со степенью изменения плотности и скоростей распространения сейсмических волн на 20%. В области аномалии (контур схематически отображен) формируются рассеянная и проходящая волна. Рассеянная будет регистрироваться на профиле наблюдений и может быть использована в качестве информативной при обработке и получении сейсмических изображений. Подобная, но более сложная картина, наблюдается для P-SV волн (рис. 4). Прослеживается процесс формирования как рассеянных волн, так обменных рассеянных волн.

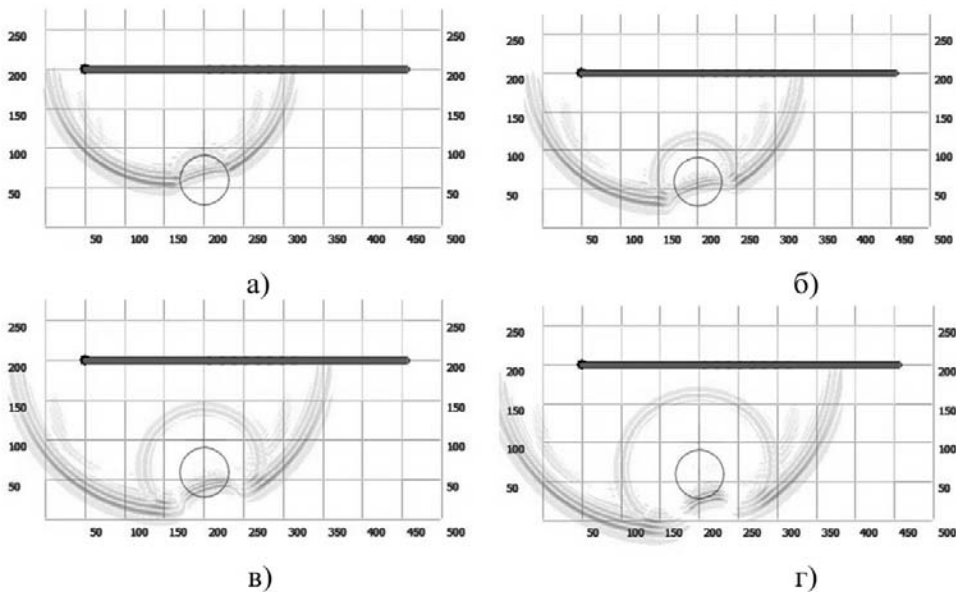


Рис. 3. Последовательные картины рассеяния SH волны областью трещиноватости радиусом 30 м и степенью изменения плотности и скоростей распространения сейсмических волн на 20% для моментов времени: а) 70 мс, б) 80 мс, в) 90 мс, г) 100 мс

В левой части картин наблюдаются волны, «отраженные» от границы расчетной решетки (моделируется как свободная граница). Это волны-помехи. Конфигурация модели такова, что модельными СП они за время расчета не регистрируются и, как следствие, не влияют на результат последующего анализа.

Получение сейсмических изображений по методу диффрагированных волн



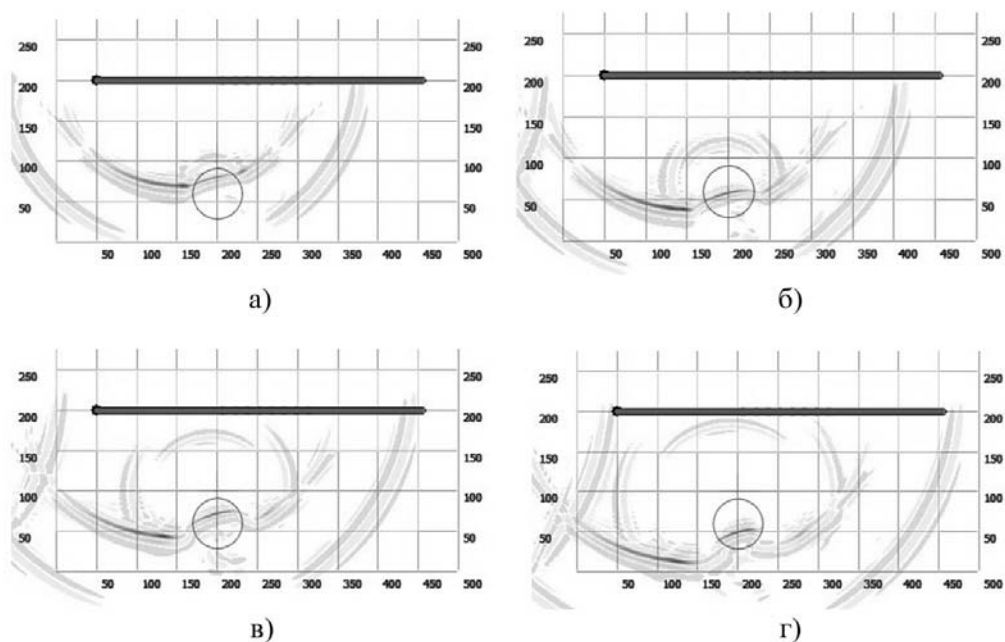


Рис. 4. Последовательные картины рассеяния P-SV волн областью трещиноватости радиусом 30 м со степенью изменения плотности и скоростей распространения сейсмических волн на 20% для моментов времени: а) 70 мс, б) 80 мс, в) 90 мс, г) 100 мс

базируется на следующем алгоритме. Решается задача в заданной плоскости. Для построения сейсмических изображений участок массива горных разбивается на регулярную решетку элементарных ячеек. Согласно принципу Гюйгенса-Френеля, каждая ячейка рассматривается как источник вторичных колебаний. Исходя из этого, частичный образ каждой ячейки на отдельной сеймотрассе соответствует отсчету, время регистрации которого равно сумме времен хода лучей от источника до ячейки и от ячейки до приемника. Для расчета времени хода лучей используется базовое значение скорости, соответствующее скорости распространения информативной волны. Для получения изображения среды следует для каждой ее ячейки просуммировать все частичные образы по имеющемуся набору сеймотрасс [8]. Предполагается, что рассеянные либо отраженные на неоднородностях среды волны формируют характерные зоны на сейсмических изображениях, являющиеся критерием наличия аномалий [8].

Получение сейсмических изображений по методу эллипсов выполняется выделением на сейсмосаписях осей синфазности по точкам первых вступлений предполагаемой информативной волны и вычислением эллипсов, исходя из положения данных точек таким образом, чтобы фокусы располагались в местах ПВ и СП, а значение удвоенных полуосей было бы равно произведению скорости распространения информативной волны на время ее первого вступления [6]. Критерием наличия аномалии является сближение либо пересечение эллипсов в локальной зоне предполагаемой отражающей границы, либо зоны рассеяния

[6].

На рисунке 5 представлены результаты построения изображения аномалии методом дифрагированных волн и методом эллипсов при использовании SH волн. Легко убедиться, что оба метода детектируют аномалию, однако не дают правильного представления о ее форме. Первый из методов генерирует в ближайшей к профилю области зоны трещиноватости высокоамплитудное пятно, образованное сложением синфазных колебаний соответствующих участков рассеянных волн. Второй метод в той же области генерирует зону пересечения эллипсов, построенных на основе годографов дифрагированных волн.

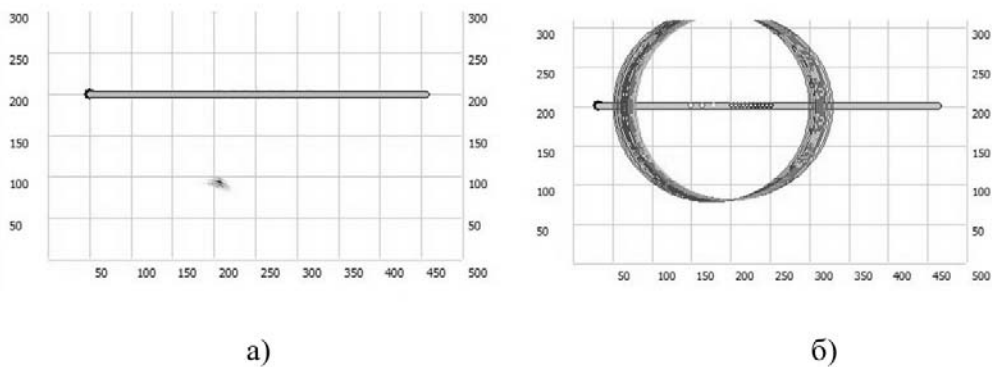


Рис. 5. Результаты построения изображения аномалии методом дифрагированных волн (а) и методом эллипсов (б) путем использования SH волн со скоростью распространения 2400 м/с.

На рисунке 6 представлены результаты построения изображения аномалии методом дифрагированных волн путем использования P-SV волн при использовании в качестве базового значения скорости 2400 м/с (рис. 6, а) 3500 м/с (рис. 6, б). Первое из значений соответствует скорости распространения SV волн.

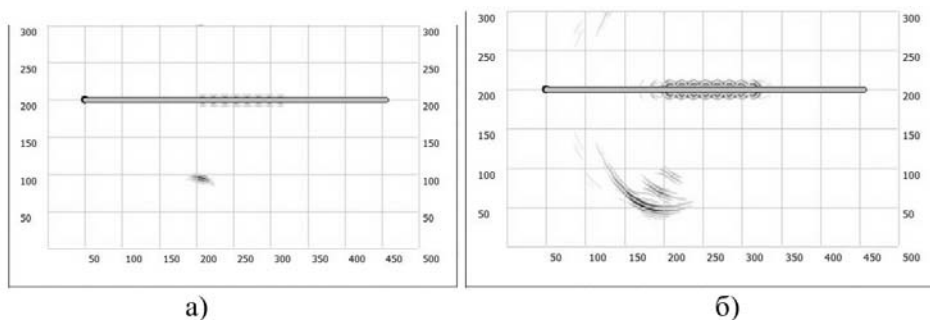


Рис. 6. Результаты построения изображения аномалии методом дифрагированных волн путем использования P-SV волн при использовании в качестве базового значения скорости 2400 м/с (а) 3500 м/с (б)

Его использование приводит к результату, аналогичному тому, который приведен на рисунке 5, а. Второе значение соответствует скорости распространения волн сжатия. Кроме пятна, соответствующего реальному положению края аномалии генерируются два ложных. Это объясняется тем, что в формировании изображения кроме Р волн участвуют SV и обменные волны. Их скорость распространения меньше скорости Р волн. Регистрируются такие волны на профиле наблюдений позже. Соответственно, синфазное суммирование, при использовании большего значения базовой скорости, генерирует положение аномалии, дальше реального. При этом, чем больше отклонение базового значения скорости от скорости информативного волнового пакета, тем более размытым получается изображение аномалии. Этот результат хорошо согласуется с полученными ранее при использовании дифрагированных волн для прогноза дизъюнктивов. В методическом плане чрезвычайно важной является задача правильного выбора значения базовой скорости.

Подобные результаты прослеживаются для всех моделей при изменении радиуса аномалии. Радиус аномалии в пределах моделируемого диапазона не влияет на форму её изображения. Подобная картина наблюдалась ранее [8] при оценке возможности детектирования разрывных тектонических нарушений, располагающихся таким образом, что на профиле наблюдений невозможно получить отраженную волну. Точки пересечения наборов эллипсов, построенные как для рассеянных поперечных, так и для продольных волн, располагаются в зоне ближайшего к профилю наблюдений краю дизъюнктива. Метод эллипсов в этом случае не позволяет оценить ориентацию дизъюнктива. Метод дифрагированных волн также малоинформативен. Это означает, что хотя использование метода дифрагированных волн и метода эллипсов позволит определить наличие аномалии, но вопрос об определении ее типа потребует дальнейших исследований.

Для полноты рассмотрения вопроса на рисунке 7 представлены последовательные картины рассеяния SH волны пустотелой областью радиусом 30 м (модель карста).

В области аномалии формируются высокоамплитудная рассеянная волна, которая будет регистрироваться на профиле наблюдений. Её использование позволяет получить изображения аномалии. Они не приводятся, поскольку практически не отличаются от представленных на рисунке 5 и рисунке 6.

Данный результат говорит о том, что предлагаемые методы обработки сейсмических данных не дадут представления о степени изменения физико-механических свойств среды в зоне разуплотнения. Для решения этого вопроса необходимо привлекать инструменты амплитудного анализа рассеянного сигнала.

**Выводы.** Таким образом, в настоящей статье на основе применения методов математического моделирования рассмотрена возможность использования дифрагированных волн для прогноза потенциально опасных в плане выбросов метана зон дробления и повышенной трещиноватости пород. Показано, что в случае малоразмерной зоны аномалии, ее детектирование возможно с приме-

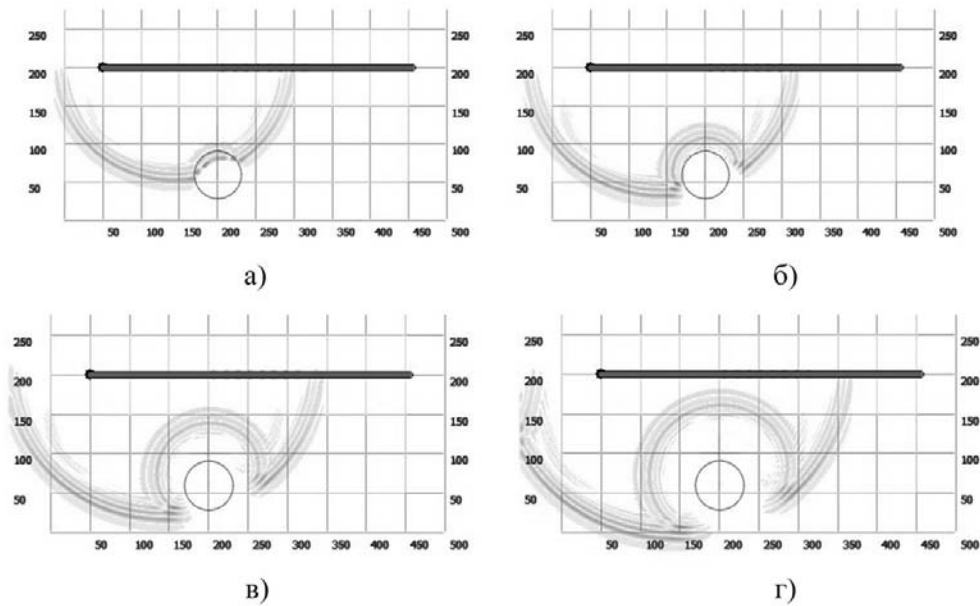


Рис. 7. Последовательные картины рассеяния SH волны пустотелой областью радиусом 30 м

нением стандартных сейсмических экспериментов, выполненных методом отраженных волн. Обработку результатов следует проводить на основе использования информативных дифрагированных волн по соответствующим методикам. При этом возможно получить изображение ближней к профилю наблюдений зоны аномалии. В то же время, не представляется возможным точно определить ее размеры и степень изменения физико-механических параметров пород.

Исследования проводились в ФГБНУ «РАНИМИ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 1023020700022-3-2.7.5)

1. Анциферов А.В. Теория и практика шахтной сейсморазведки / А.В. Анциферов. – Донецк: ООО Алан, 2002. – 312 с.
2. Анциферов А.В. Математическое моделирование в шахтной сейсморазведке / А.В. Анциферов, А.А. Глухов. – Киев: Наукова думка, 2012. – 255 с.
3. Глухов А.А. 2.5D Моделирование сейсмических волн в массиве горных пород / А.А. Глухов // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2019. – № 4(69). – С. 57–64.
4. Глухов А.А. Автоматизация расчета поля сейсмических колебаний в угленосной толще при решении задач шахтной сейсморазведки / А.А. Глухов // Наук. пр. Національного технічного університету. – 2006. – Вип. 106 – С. 131–139.
5. Анциферов А.В. Об автоматизации обработки сейсмических данных при прогнозе геологических нарушений угольных пластов методами отраженных волн и сейсмической локации / А.В. Анциферов, А.А. Глухов // Сб. научн. тр. РАНИМИ. – 2018. – Т. 1, № 21. – С. 99–106.
6. Глухов А.А. Алгоритм прогноза геологических нарушений угольных пластов на основе использования метода эллипсов / А.А. Глухов // Сб. научн. тр. РАНИМИ. – 2018. – № 5(20). – С. 213–220.
7. Глухов А.А. О перспективных методах прогноза геологических аномалий методами шахтной пластовой сейсморазведки / А.А. Глухов, Д.С. Бородин // Наукові праці УкрНДМІ

НАН України. – 2012. – № 11. – С. 210–218.

8. *Глухов А.А.* Об использовании миграции до суммирования при построении сейсмических изображений углепородных массивов методами пластовой сейсморазведки / А.А. Глухов // Наукові праці УкрНДМІ НАН України. – 2012. – № 14. – С. 209–216.

**A.A. Glukhov**

**On the possibility of predicting the location of zones of probable methane accumulation by seismic methods.**

Based on the use of mathematical modeling methods, the possibility of using diffracted waves to predict zones of crushing and increased fracturing that are potentially dangerous in terms of methane emissions is considered. It is shown that in the case of a small-sized anomaly zone, its detection is possible using standard seismic experiments performed by the reflected wave method. Processing of the results should be carried out on the basis of the use of informative diffracted waves according to appropriate techniques. It is possible to obtain an image of the anomaly zone closest to the observation profile. At the same time, it is not possible to accurately determine its size and the degree of change in its physical and mechanical parameters.

**Keywords:** *mine seismic survey, diffraction wave method, fault prediction, mathematical/numerical modeling.*

*Получено 06.07.2023*

УДК 622.831. 27

doi:10.24412/0136-4545-2023-3-132-139

EDN:ZJFAUG



©2023. Н.И. Лобков<sup>1</sup>, А.Г. Радченко<sup>2</sup>

## ГЕОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ ОПОРНОГО ДАВЛЕНИЯ В РЕЗУЛЬТАТЕ ПОДВИГАНИЯ ОЧИСТНЫХ ЗАБОЕВ

Рассмотрен характер сдвижения вмещающего породного массива над выработанным пространством и разрушения слоев в процессе ведения очистных работ. Определены причины изменения величины опорного давления при подвигании лавы.

**Ключевые слова:** *очистной забой, лава, выработанное пространство, опорное давление, породные слои кровли, непосредственная кровля, основная кровля, изгиб кровли, обрушение кровли.*

**Введение и постановка задачи.** Процессы, происходящие во вмещающем горном массиве при ведении очистных работ, до настоящего времени трактуются неоднозначно. Вмещающий угольные пласты массив в земной коре представлен слоями осадочных пород. Каждый породный слой представляют собой твердое тело, находящееся в естественном напряженном состоянии. Это состояние формируется весом вышележащих пород.

Несмотря на слоистость породного массива и, как следствие, его неоднородность, для упрощения расчета изгиба, разрушения и обрушения породных слоев, массив принимается сплошным и однородным от разрабатываемого пласта до поверхности. Результаты расчетов при таких исходных данных дают большую ошибку, не позволяющую рассчитывать параметры формирования давления на призабойную крепь и реализовывать выбор способа управления кровлей.

Целью работы является установление геодинамических основ формирования опорного давления.

**1. Механизм формирования опорного давления.** В последнее время, при аналитических расчетах, все больше внимания уделяется слоистости осадочных пород. Каждый породный слой в массиве рассматривается как сплош-

---

<sup>1</sup>Лобков Николай Иванович – доктор техн. наук, зав. отд. управления геомеханическими и технологическими процессами РАНИМИ, Донецк, e-mail: nilobkov@mail.ru.

Lobkov Nikolay Ivanovich – Doctor of Technical Sciences, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Geomechanical and Technological Processes Management.

<sup>2</sup>Радченко Александр Григорьевич – вед. инженер отд. геологии РАНИМИ, Донецк, e-mail: ranimi@ranimi.org.

Radchenko Aleksandr Grigor'evich – Lead Engineer, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Geology Department.

ной однородный массив. Тем не менее, при проведении аналитических расчетов сдвига породных слоев над выработанным пространством при различных его размерах, считается, что в сдвиге участвуют все породные слои (рис. 1) от разрабатываемого пласта до поверхности [1]. Результаты расчетов получают с большой ошибкой.

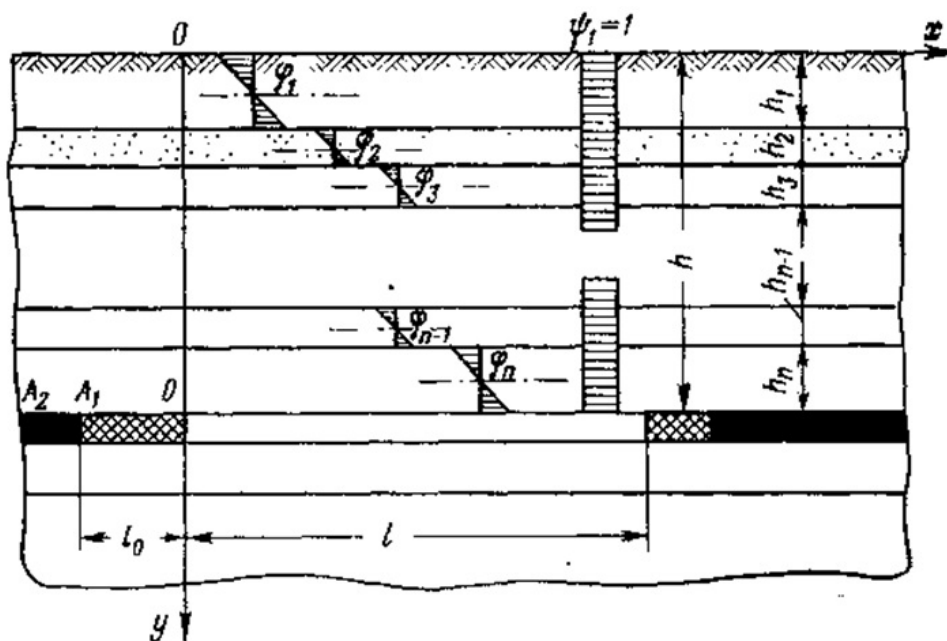


Рис. 1. Расчетная схема к определению опорного давления с использованием вариационного метода Лагранжа [1]

Величина опорного давления получается недопустимо увеличенной. Одной из причин ошибки в расчетах является недостаточная изученность механизма сдвига породного массива в результате выемки угля.

Для уменьшения неточностей в расчетах и прогнозирования сдвига породного массива необходимо четко представлять механизм сдвига пород в процессе выемки угольного пласта на базе установленных закономерностей взаимодействия породных слоев над выработанным пространством.

На процесс сдвига породных слоев существенное влияние оказывают условия работы лав.

#### **Положение лавы в выемочном поле шахты.**

Проведенные в конце XX века и в настоящее время исследования закономерностей сдвига породного массива при ведении очистных работ позволяют устранить отмеченные выше недостатки. Установлено, что при отходе лавы от разрезной печи над выработанным пространством, в зоне интенсивного сдвига кровли формируется область полных сдвигов породных слоев [2]. При работе одиночной лавы в массиве угля изгиб каждого породного слоя можно

представить в виде изгиба упругой сплошной и однородной балки, защемленной на двух опорах [3]. При изгибе балки в пределах упругости (до обрушения) линия изгиба (АВ) наклонена к плоскости пласта под углом  $45^{\circ}$ – $50^{\circ}$  (рис. 2), а при обрушении слоя линия обрушения (ВС) наклонена к плоскости пласта под углом  $76^{\circ}$ – $80^{\circ}$  [3].

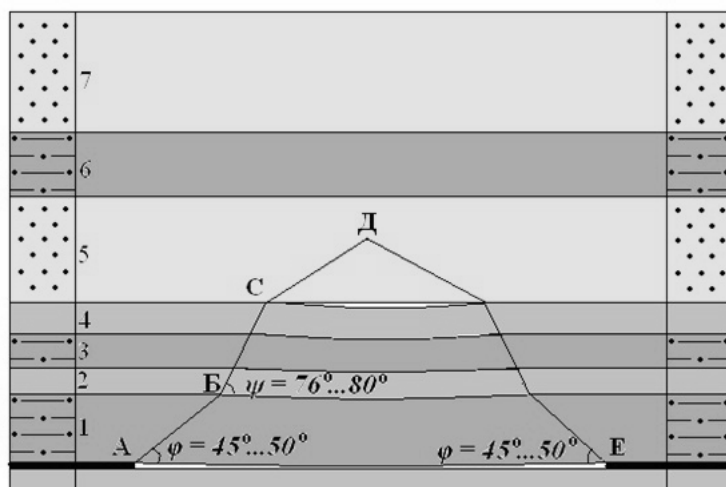


Рис. 2. Область полных сдвижений кровли одиночной лавы, работающей в массиве угля [3]:  
1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 – породные слои в кровле пласта

С учетом линий изгиба и обрушения породных слоев ограничивается высота области полных сдвижений АВСДЕ. Из рисунка 2 видно, что маломощные и менее устойчивые породные слои 2, 3, 4 обрушились и изгибаются вместе со слоем алевролита 1. Над ними залегает мощный несущий слой песчаника 5, сдерживающий пригрузку от вышележащих, ограничивающий высоту области полных сдвижений.

В области полных сдвижений пород массив делится на группы сдвижения слоев. Каждая группа состоит из прочного несущего и вышележающих, менее прочных породных слоев. Изгиб и обрушение всех слоев в группе происходит практически одновременно. По строению вмещающий массив может быть представлен тремя группами (рис. 3).

В первой группе (рис.3, а) непосредственно над пластом залегает мощный породный слой песчаника или алевролита, выше которого залегают слои различной мощности и прочности.

Во второй группе (рис. 3, б) непосредственно над пластом залегает маломощный слой алевролита или аргиллита, а выше него (основная кровля) – мощный слой песчаника или алевролита. Остальная кровля представлена породными слоями различной мощности и прочности. В третьей группе (рис. 3, в) над пластом залегают маломощные породные слои различной прочности. То есть, в кровле нет мощных и прочных слоев.



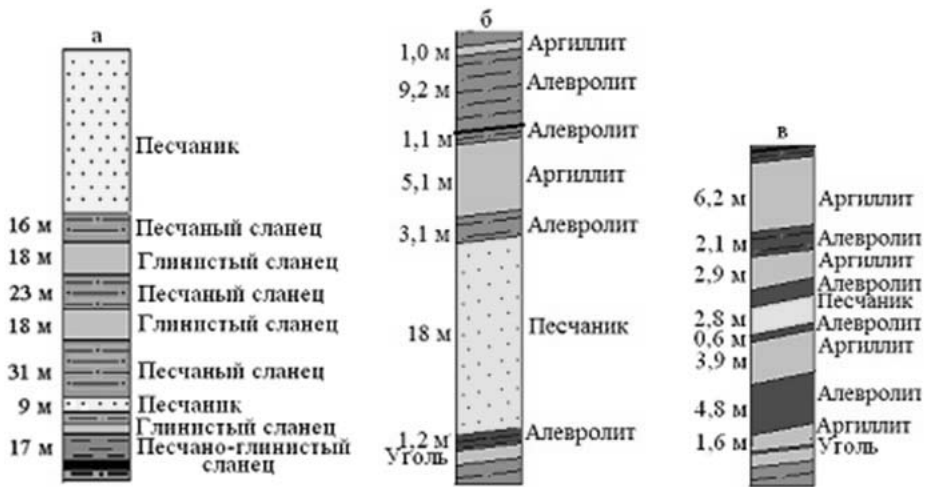


Рис. 3. Группы строения пород кровли

На рисунке 4 приведена схема развития области сдвижения пород над выработанным пространством лавы ABCDEF при ее отходе от разрезной печи на 96 м, 134 м, 180 м [4].

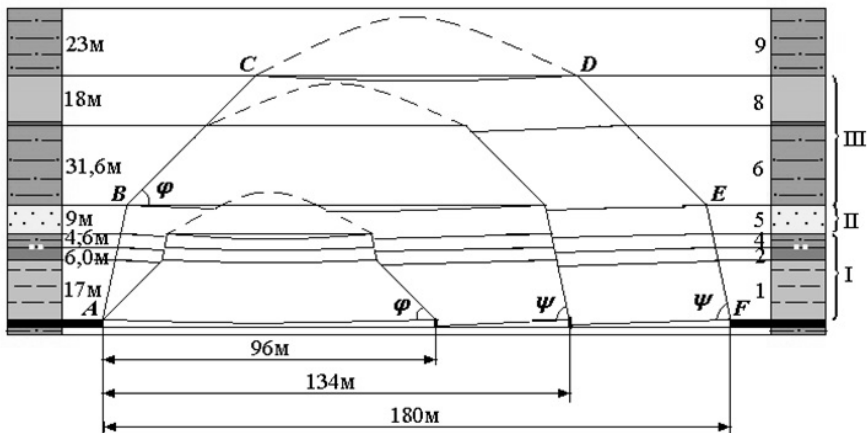


Рис. 4. Схема развития области сдвижения пород над выработанным пространством одиночной лавы: 1...7 – номера слоев; I, II, III – группы слоев

Линии обрушения слоев АВ и ЕF наклонены к плоскости залегания пласта под углом обрушения  $\psi$ , а линии изгиба слоев ВС и DE – под углом изгиба  $\phi$ . При отходе лавы на 96 м происходит обрушение слоя № 1 со слоями пригрузки № 2 и № 3 (группа слоев I). Слой 5 не имеет слоев пригрузки и составляет вторую группу слоев. Его обрушение происходит при отходе лавы на 134 метра. При этом слои 6, 7, 8, составляющие третью группу слоев, зависают и не обрушаются при отходе лавы от разрезной печи на 180 метров (на свою длину).

Вышележащий слой 9 слабо деформируется в пределах упругости и ограничивает по высоте область сдвижения пород кровли одиночной лавы. Обнажение слоя 9 от изгиба третьей группы слоев составляет 55 метров (линия CD), а его предельный пролет составляет 120 метров.

Следовательно, слой 9 ограничивает высоту области сдвижения пород кровли пласта при отходе лавы от разрезной печи на расстояние, равное длине лавы (так называемый квадрат). Породные слои, зависающие над выработанным пространством, можно представить как плиты, защемленные с четырех сторон. Можно утверждать, что при дальнейшем подвигании лавы короткая сторона плиты кровли будет оставаться постоянной величиной ( $l_L = 180$  м), а размер длинной стороны плиты  $l_{OS}$  будет увеличиваться вплоть до длины выемочного поля лавы [5].

При развитии горных работ и увеличении ширины выработанного пространства до  $2l_L$ , величина зоны полных сдвижений будет возрастать [6] за счет вовлечения в процесс сдвижения большего числа породных слоев кровли.

На рисунке 5 приведена схема развития области полных сдвижений при последовательной отработке трех лав. Число породных слоев или групп слоев,

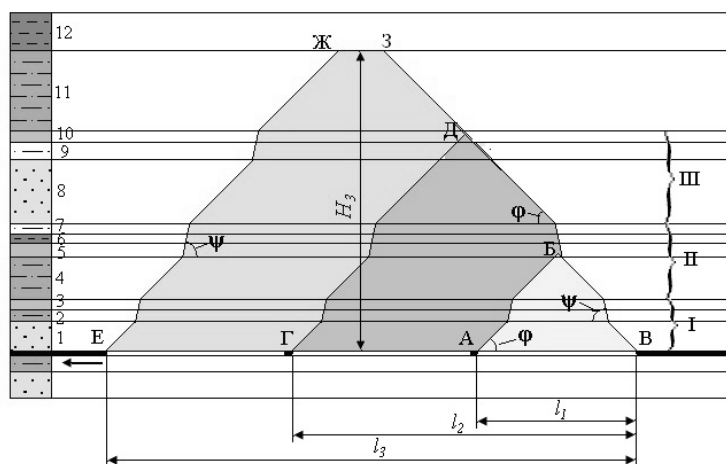


Рис. 5. Формирование области сдвижения пород при развитии горных работ: БВ, ГДВ, ЕЖЗВ – области сдвижения породных слоев при работе трех лав 11, 12, 13 – соответственно; 1–12 – порядковые номера породных слоев кровли;  $\phi = 45-50^\circ$  – угол изгиба породных слоев;  $\psi = 78-80^\circ$  – угол обрушения породных слоев кровли; I, II, III – группы сдвигающихся породных слоев

приходящих в сдвижение над выработанным пространством, увеличивается с увеличением его ширины [7]. Породные слои с достижением предельного пролета обрушаются, а те, которые не достигли, – зависают. Ориентировочно, высота области сдвижения может быть определена из соотношения  $H_3 = (2/3) l_3$ .

#### **Предельный пролет несущего слоя в группе перед обрушением.**

Предельным ( $l_{np}$ ) будем называть пролет несущего слоя перед разрушением и обрушением (рис. 6) с распределенной нагрузкой от веса породных слоев в группе [8].

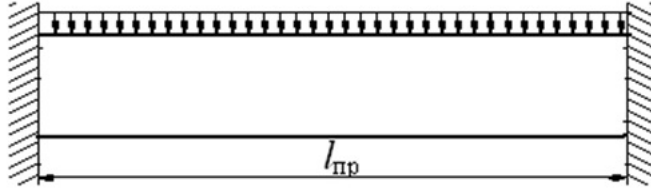


Рис. 6. Предельный пролет кровли с распределенной нагрузкой

**2. Основные математические соотношения.** Как показали исследования, при изгибе толстой балки, защемленной с двух сторон, разрушающими являются горизонтальные растягивающие напряжения. Разрушающие напряжения формируются у верхней кромки балки [9]. Величину горизонтальных разрушающих напряжений можно определить из выражения:

$$\sigma_p = \frac{ql_{np}^2}{2h^2}, \text{ МПа} \quad (1)$$

где  $q$  – распределенная нагрузка на породный слой, Мн/м<sup>2</sup>;  $l_{np}$  – предельный пролет слоя перед обрушением, м;  $h$  – мощность несущего породного слоя, м.

Величина распределенной нагрузки, создаваемой весом группы слоев, определяется соотношением

$$q = \sum_{i=1}^n \gamma_i h_i, \text{ Мн/м}^2 \quad (2)$$

где  $q$  – суммарная нагрузка группы слоев, Мн/м<sup>2</sup>;  $n$  – количество слоев в группе.

Условие для образования трещины [10] имеет вид

$$\sigma = \sqrt{\frac{2EG}{\pi \ell_T}}, \text{ МПа} \quad (3)$$

где  $\sigma$  – действующее напряжение, МПа;  $\ell_T$  – критическая длина трещины, м;  $E$  – модуль упругости, МПа;  $G$  – поверхностная энергия тела, Дж/м<sup>2</sup>.

Разрушение породного слоя при изгибе начнется с роста существующей природной трещины, критическая длина которой определится из выражения

$$\ell_{kr} = \frac{2EG_c}{\pi \sigma_p^2}, \text{ м.} \quad (4)$$

Подставляя значения действующих напряжений (1) в (4), получим выражение для определения предельного пролета кровли над выработанным пространством.

При первичном обрушении группы слоев реализуется условие

$$\ell_{np}^2 = \frac{h_c^2}{3 \sum_{i=1}^n \gamma_c h_c} \sqrt{\frac{2EG_c}{\pi \ell_{kr}}}, \text{ м}^2 \quad (5)$$

где  $\sum_{i=1}^n \gamma_c h_c$  – распределенная нагрузка группы слоев, Мн/м<sup>2</sup>.

При вторичном обрушении группы слоев

$$l_{np}^2 = \frac{h_c^2}{3 \sum_{i=1}^n \gamma_c h_c} \sqrt{\frac{2EG_c}{\pi l_{kr}}}, \text{ м}^2. \quad (6)$$

Величину опорного давления можно определить как давление изгибающейся жестко защемленной балки на опору

$$P_i = \frac{1}{2} \gamma h l_{np}, \text{ Мн} \quad (7)$$

где  $P_i$  – давление, передаваемое слоем на опору, Мн;  $\gamma$  – объёмный вес породы, Мн/м<sup>3</sup>;  $h$  – мощность слоя, м;  $l_{np}$  – пролет слоя, м.

С изменением длины предельного пролета кровли будет изменяться и величина опорного давления. Общая величина высоты области полных сдвижений пород над выработанным пространством ориентировочно может быть определена как

$$H_0 = \sum_i^n H_i, \quad (8)$$

где  $H_0$  – общая высота области полных сдвижений пород над выработанным пространством;  $\sum_i^n H_i$  – сумма высот областей сдвижения пород кровли, последовательно отработанных лав, м.

### Выводы.

1. Давление породных слоев на опору (призабойную часть пласта) каждой последовательно отработанной лавы формирует величину опорного давления.

2. В процессе подвигания лавы изменяется длина пролета изгибающихся над выработанным пространством породных слоев, что ведет к изменению величины опорного давления.

Исследования проводились в ФГБНУ «РАНИМИ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 1023020600011-0-2.7.5)

1. Борисов А.А. Основы геомеханики горных массивов / А.А. Борисов – Л.: ЛГИ, 1989. – 294 с.
2. Лобков Н.И. Особенности формирования области полных сдвижений кровли при работе лавы в массиве угля / Н.И. Лобков // Физико-технические проблемы горного производства. – 2012. – Вып. 15. – С. 92–98.
3. Носач В.К. Процессы подземных горных работ в очистных забоях. Учебное пособие / В.К. Носач, Н.И. Лобков. – Донецк: РВА ДонНТУ, 2001. – 180 с.
4. Лобков Н.И. Развитие представлений о сдвижении породного массива вслед за подвиганием лавы / Н.И. Лобков // Наукові праці УКРНДМІ. – 2001. – Вип. 15. – С. 296–308.
5. Дубов Е.Д. Формирование области сдвижения пород кровли при работе одиночной лавы в массиве угля / Е.Д. Дубов, Н.И. Лобков // Сб. научных трудов ГУ «ДОНУГИ». – 2020. – Вып. 110. – С. 102–108.

6. Лобков Н.И. Алгоритм прогнозирования максимального опорного давления в процессе работы лавы / Н.И. Лобков, В.С. Маевский, А.А. Лобков // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2020. – № 1(70). – С. 67–75.
7. Лобков Н.И. Особенности деформирования и разрушения породных слоев кровли пласта в процессе выемки угля / Н.И. Лобков // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. – 2017. – Т 4, № 3. – С. 73–78.
8. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. Учебник / под ред. Г.С. Варданяна. – М.: Издательство АСВ, 1995. – 568 с.
9. Лобков Н.И. Определение разрушающих напряжений в изгибающихся породных слоях / Н.И. Лобков, И.В. Антипов // Геотехническая механика. – 2011. – Вып. 96. – С. 172–176.
10. Griffiths A. The phenomenon of rupture and flow in solids / A. Griffiths // Phil. Trans, Roy. Soc. – 1920. – V. 220. – P. 150–160.

**N.I. Lobkov, A.G. Radchenko**

**Geodynamic basis of forvation of reference pressure as a result of driving of clian-up faces.**

The nature of the movement of the containing rock mass over the worked space and the destruction of layers during cleaning operations is considered. The reasons for the change in the value of the reference pressure during longwall displacement are determined.

**Keywords:** *breakage face, longwall, pressure, rock layers of roof, direct roof, basic roof, roof bending, roof collapse.*

*Получено 10.07.2023*