

ISSN 0136-4545

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

**Журнал
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ
МЕХАНИКИ**

№ 4 (73)

2020

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: В.И. Сторожев

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА: С.А. Калоеров

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ: Пачева М.Н.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Анциферов А.В.

Белоусов В.В.

Болнокин В.Е.

Болонов Н.И.

Ватульян А.О.

Вовк Л.П.

Глазунов В.А.

Глухов А.А.

Гольцев А.С.

Горр Г.В.

Губанов В.В.

Дрибан В.А.

Ковалев А.М.

Коносевиц Б.И.

Левин В.М.

Муцанов В.Ф.

Недопекин Ф.В.

Петраков А.А.

Судаков С.Н.

Улитин Г.М.

Шалдырван В.А.

Адрес редакции:

83001 Донецк, ул. Университетская, 24
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
Тел. 302 92 71
E-mail: jtam_donnu@mail.ru

Технический редактор: Пачева М.Н.

Утверждено к печати ученым советом
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016г.

№ 4 (73) / 2020

Основан в 1970г.

ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Механика деформируемого твердого тела

- Глушанков Е.С.* Решение задачи об изгибе защемленной по краю эллиптической пьезоэлектрической плиты..... 5
- Бондаренко Н.С., Гольцев А.С.* Влияние теплопроницаемости разреза на коэффициенты интенсивности напряжений в пластине при одностороннем теплообмене..... 16
- Нескородев Р.Н.* Изгиб ортотропных вязкоупругих плит в уточненной постановке..... 24

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

- Павлыш В.Н., Сторожев С.В., Номбре С.Б.* Нечеткие оценки в модели распространения магнитоупругих волн..... 33

Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика

- Глухов А.А., Анциферов В.А., Ребенок Е.В., Кутепов Д.В.* Об алгоритме сейсмической томографии углепородного массива..... 49
- Глухова Ж.Л.* Система уравнений водородоупругости..... 56
- Голубев Ф.М.* Особенности параметров сдвижения многократно обработанной очистными выработками земной поверхности при ликвидации угледобывающих предприятий..... 62

№ 4 (73) / 2020

Founded in 1970.

JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

CONTENTS

Solid Mechanics

- Glushankov E.S.* The solution of the problem of bending of clamped elliptic piezoelectric plate..... 5
- Bondarenko N.S., Goltsev A.S.* Influence of the heat permeability of the cut on the stress intensity factors in the plate with one-sided heat exchange..... 16
- Neskorodev R.N.* Bending of orthotropic viscoelastic plates in the improved theory..... 24

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes

- Pavlysh V.N., Storozhev S.V., Nombre S.B.* Fuzzy estimates in the model of propagation of magnetoelastic waves..... 33

Geomechanics, Rock Damage, Mining Aerogas dynamics and Thermal Physics

- Glukhov A.A., Antsiferov V.A., Rebenok Y.V., Kutepov D.V.* On the algorithm of seismic tomography of coal-bearing solid mass..... 49
- Glukhova Zh.L.* System of equations for hydrogen-elasticity..... 56
- Golubev Ph.M.* Features of the parameters of the displacement of the earth's surface, repeatedly undermined by mine workings, during the liquidation of coal mines..... 62

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

©2020. Е.С. Глушанков

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО КРАЮ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛИТЫ

Решена задача об изгибе защемленной по краю тонкой эллиптической пьезоэлектрической плиты, нагруженной равномерно распределенным давлением по верхнему основанию. При этом рассмотрены случаи, когда боковая поверхность плиты электродирована либо неэлектродирована. Для обоих случаев получены точные решения в виде полиномов. На основе полученных решений проведены численные исследования влияния свойств материала плиты и электрического граничного условия на электроупругое состояние плиты.

Ключевые слова: теория изгиба тонких плит, пьезоэлектрический материал, эллиптическая плита, полиномиальные решения, функция прогиба, изгибающие моменты

Введение. В настоящее время в инженерной практике как элементы конструкций широко применяются тонкие плиты. Все большее распространение при этом получают плиты из пьезоэлектрических материалов. В процессе эксплуатации эти плиты подвергаются механическому либо электрическому воздействию по основаниям либо по краям, что может приводить к их изгибу. Это следует учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. При решении задач теории изгиба плит из материалов, не обладающих пьезоэлектрическими свойствами, зачастую принимаются гипотезы Кирхгофа-Лява [1, 2]: *гипотеза прямой нормали*, в соответствии с которой прямолинейные отрезки, нормальные к срединной плоскости до деформации, при изгибе плиты остаются прямолинейными и нормальными к изогнутой срединной поверхности и не меняют своей длины; *гипотеза о нерастяжимости срединной плоскости*; *гипотеза о ненадавливании слоев*, в соответствии с которой влияние взаимодействия (давления) продольных слоев плиты на удлинения и сдвиги материальных волокон, лежащих в этих слоях, является достаточно малым и им можно пренебречь. К настоящему времени разработаны различные методы и решены многие задачи теории изгиба плит из изотропных и анизотропных материалов [3, 4].

Если же плита изготовлена из пьезоэлектрического материала, то следует учитывать пьезоэффект и гипотезы Кирхгофа-Лява следует дополнить гипотезой для компонентов электрического поля. В работе [5] предложено расширить гипотезу о ненадавливании слоев на индукции электрического поля: *поток индукции по толщине плиты можно пренебречь*. Данная гипотеза имеет право на существование, если основания пластинки не покрыты электродами.

В данной работе получено точное аналитическое решение в виде полиномов для задачи об изгибе тонкой эллиптической плиты, изготовленной из пьезоэлектрического материала. Основания плиты не электродированы, по верхнему основанию действует равномерно распределенное давление. Край плиты жестко защемлен, он электродирован либо лишен электродного покрытия. Проведены численные исследования влияния свойств материала плиты и электрического граничного условия на значения моментов и прогиба плиты.

В качестве дополнения, из полученных решений предельным переходом получено решение задачи изгиба для жестко защемленной пьезоэлектрической бесконечной полосы.

1. Постановка задачи теории изгиба тонких пьезоэлектрических плит.

Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат $Oxyz$ тонкую плиту толщины $2h$ (рис. 1), изготовленную из пьезоэлектрического материала. Срединная плоскость плиты лежит в плоскости Oxy и занимает двумерную область S . Пусть для каждой точки плиты имеется плоскость упругой симметрии, параллельная срединной плоскости. Основания плиты лишены электродного покрытия, по верхнему основанию распределены нормальные усилия $q(x, y)$. По краю плиты распределены механические и электрические воздействия.

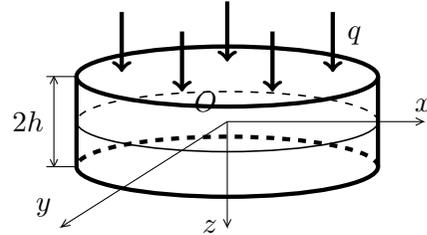


Рис. 1

Определение электроупругого состояния плиты [6] сводится к интегрированию следующей системы дифференциальных уравнений относительно функции прогиба плиты $w(x, y)$ и функции плотности потенциала электрического поля $\varphi_0(x, y)$:

$$\begin{aligned} L_{4S}w(x, y) + L_{3G}\varphi_0(x, y) &= -q(x, y), \\ L_{3G}w(x, y) + L_{2B}\varphi_0(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где L_{4S} , L_{3G} , L_{2B} — дифференциальные операторы, определяемые следующими выражениями:

$$\begin{aligned} L_{4S} &= - \left(\tilde{S}_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4\tilde{S}_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2 \left(\tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{66} \right) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4\tilde{S}_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \tilde{S}_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right), \\ L_{3G} &= \tilde{G}_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \left(\tilde{G}_{12} + \tilde{G}_{26} \right) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \tilde{G}_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\ L_{2B} &= \tilde{B}_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\tilde{B}_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \tilde{B}_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \end{aligned}$$

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{2h^3}{3} S_{ij}, \quad \tilde{G}_{ij} = \frac{2h^3}{3} G_{ij}, \quad \tilde{B}_{ij} = \frac{2h^3}{3} B_{ij};$$

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} & G_{11} & G_{21} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} & G_{12} & G_{22} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} & G_{16} & G_{26} \\ -G_{11} & -G_{12} & -G_{16} & B_{11} & B_{12} \\ -G_{21} & -G_{22} & -G_{26} & B_{12} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix}^{-1};$$

\tilde{S}_{ij} — коэффициенты деформации материала плиты, \tilde{G}_{ij} — пьезоэлектрические модули, β_{ij} — коэффициенты диэлектрической проницаемости.

Систему уравнений (1) следует интегрировать при соответствующих граничных условиях. После этого прогиб плиты и плотность потенциала электрического поля становятся известными и по ним в любой точке плиты можно находить значения изгибающих моментов M_x , M_y (порождаемых распределенными по толщине напряжениями σ_x , σ_y), крутящего момента H_{xy} (порождаемого напряжением τ_{xy}), моментов электрической индукции M_{Dx} , M_{Dy} (порождаемых индукциями D_x , D_y) [6]:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h}^h z \sigma_x dz = - \left(\tilde{S}_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{S}_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{S}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \tilde{G}_{11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \tilde{G}_{21} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right), \\ M_y &= \int_{-h}^h z \sigma_y dz = - \left(\tilde{S}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{S}_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{S}_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \tilde{G}_{12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \tilde{G}_{22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right), \\ H_{xy} &= \int_{-h}^h z \tau_{xy} dz = - \left(\tilde{S}_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{S}_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{S}_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \tilde{G}_{16} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \tilde{G}_{26} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right), \\ M_{Dx} &= \int_{-h}^h z D_x dz = \tilde{G}_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{G}_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{G}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \tilde{B}_{11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \tilde{B}_{12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \\ M_{Dy} &= \int_{-h}^h z D_y dz = \tilde{G}_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{G}_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{G}_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \tilde{B}_{12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \tilde{B}_{22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда становится возможным определение моментов и перерезывающих сил на произвольной площадке с нормалью n и касательной s [5, 6]:

$$\begin{aligned} M_n &= M_x \cos^2(nx) + M_y \cos^2(ny) - 2H_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ M_s &= M_x \cos^2(ny) + M_y \cos^2(nx) + 2H_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ H_{ns} &= (M_y - M_x) \cos(nx) \cos(ny) + H_{xy} (\cos^2(nx) - \cos^2(ny)), \\ N_n &= N_x \cos(nx) + N_y \cos(ny), \\ N_s &= N_x \cos(ny) - N_y \cos(nx), \end{aligned} \quad (3)$$

$$M_{Dn} = M_{Dx} \cos(nx) + M_{Dy} \cos(ny),$$

$$M_{Ds} = M_{Dx} \cos(ny) - M_{Dy} \cos(nx).$$

2. Вид граничных условий для случая жестко заземленного края плиты. Если край плиты жестко заземлен, то механические граничные условия имеют вид [2]

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0,$$

что эквивалентно

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

Вид электрического граничного условия зависит от того, присутствует ли по краю плиты электродное покрытие. Если электродное покрытие по краю плиты отсутствует, то в этом случае момент электрической индукции по направлению нормали равен нулю [5, 7]:

$$M_{Dn} = 0. \quad (5a)$$

Если же электродное покрытие присутствует, то в этом случае по краю задано распределение потенциала электрического поля [7]:

$$\varphi_0 = \varphi_0^*. \quad (5б)$$

3. Постановка и решение задачи об изгибе эллиптической плиты. Рассмотрим тонкую эллиптическую пьезоэлектрическую плиту с полуосями, равными a и b (рис. 2). Основания плиты лишены электродного покрытия, по верхнему основанию равномерно распределены нормальные усилия $q = const$. Край плиты жестко заземлен.

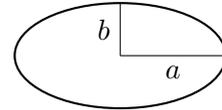


Рис. 2

Рассмотрим случаи, когда электродное покрытие по краю отсутствует и когда оно присутствует.

Электродное покрытие отсутствует. Пусть край плиты не покрыт электродами и момент электрической индукции по нормали равен нулю:

$$M_{Dn} = M_{Dx} \cos(nx) + M_{Dy} \cos(ny) = 0. \quad (6)$$

В этом случае функцию прогиба следует выбрать в виде [3]

$$w(x, y) = K (b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)^2, \quad (7)$$

где K – неизвестная постоянная. Функция прогиба w тождественно удовлетворяет механических граничным условиям (4).

Поскольку функция прогиба выбрана в виде полинома четвёртой степени и содержит слагаемые с четными степенями, то на основании вида (1) целесообразно искать функцию плотности потенциала электрического поля в виде полинома третьей степени, содержащего слагаемые с нечетными степенями:

$$\varphi_0(x, y) = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex + Fy. \quad (8)$$

где A, B, C, D, E, F – неизвестные постоянные.

Тогда для моментов электрической индукции M_{Dx}, M_{Dy} из (2) получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} M_{Dx} = & (8Kb^4\tilde{G}_{11} + 3A\tilde{B}_{11} + B\tilde{B}_{12})x^2 + \\ & + (16Ka^2b^2\tilde{G}_{16} + 2B\tilde{B}_{11} + 2C\tilde{B}_{12})xy + \\ & + (8Ka^4\tilde{G}_{12} + C\tilde{B}_{11} + 3D\tilde{B}_{12})y^2 + E\tilde{B}_{11} + F\tilde{B}_{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{Dy} = & (8Kb^4\tilde{G}_{21} + 3A\tilde{B}_{12} + B\tilde{B}_{22})x^2 + \\ & + (16Ka^2b^2\tilde{G}_{26} + 2B\tilde{B}_{12} + 2C\tilde{B}_{22})xy + \\ & + (8Ka^4\tilde{G}_{22} + C\tilde{B}_{12} + 3D\tilde{B}_{22})y^2 + E\tilde{B}_{12} + F\tilde{B}_{22}. \end{aligned}$$

Для $\cos(nx), \cos(ny)$ в случае эллиптического контура имеем

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= \cos \operatorname{arctg} \frac{a^2x}{b^2y} \cdot \operatorname{sgn} y = \frac{b^2x}{\sqrt{a^4x^2 + b^4y^2}}, \\ \cos(ny) &= \sin \operatorname{arctg} \frac{a^2x}{b^2y} \cdot \operatorname{sgn} y = \frac{a^2y}{\sqrt{a^4x^2 + b^4y^2}}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (6) и произведя элементарные преобразования, получим такое уравнение:

$$\begin{aligned} & (8Kb^4\tilde{G}_{21} + 3A\tilde{B}_{12} + B\tilde{B}_{22})a^2x^3 + (16Ka^4b^2\tilde{G}_{26} + (2B\tilde{B}_{12} + 2C\tilde{B}_{22}))a^2 + \\ & + (8Kb^4\tilde{G}_{11} + 3A\tilde{B}_{11} + B\tilde{B}_{12})b^2)x^2y + ((8Ka^6\tilde{G}_{22} + \\ & + (16Kb^4\tilde{G}_{16} + C\tilde{B}_{12} + 3D\tilde{B}_{22}))a^2 + 2(B\tilde{B}_{11} + C\tilde{B}_{12})b^2)xy^2 + \\ & + (8Ka^4\tilde{G}_{12} + C\tilde{B}_{11} + 3D\tilde{B}_{12})b^2y^3 + (E\tilde{B}_{12} + F\tilde{B}_{22})a^2x + \\ & + (E\tilde{B}_{11} + F\tilde{B}_{12})b^2y = 0. \end{aligned}$$

Данное уравнение справедливо при значениях x, y , удовлетворяющих уравнению контура плиты $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, следовательно, справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned} & (8Kb^4\tilde{G}_{21} + 3A\tilde{B}_{12} + B\tilde{B}_{22})a^2x^3 + (16Ka^4b^2\tilde{G}_{26} + (2B\tilde{B}_{12} + 2C\tilde{B}_{22}))a^2 + \\ & + (8Kb^4\tilde{G}_{11} + 3A\tilde{B}_{11} + B\tilde{B}_{12})b^2)x^2y + ((8Ka^6\tilde{G}_{22} + \\ & + (16Kb^4\tilde{G}_{16} + C\tilde{B}_{12} + 3D\tilde{B}_{22}))a^2 + 2b^2(B\tilde{B}_{11} + C\tilde{B}_{12}))xy^2 + \\ & + (8Ka^4\tilde{G}_{12} + C\tilde{B}_{11} + 3D\tilde{B}_{12})b^2y^3 + (E\tilde{B}_{12} + F\tilde{B}_{22})a^2x + \\ & + (E\tilde{B}_{11} + F\tilde{B}_{12})b^2y = (Qx + Ry)(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где Q, R – неизвестные постоянные.

Тогда из подстановки функций (7), (8) в систему дифференциальных уравнений (1) и из представления (9) получим систему 9 линейных алгебраических уравнений относительно 9 неизвестных $K, A, B, C, D, E, F, Q, R$:

$$\begin{aligned}
 & K \cdot \left(-24\tilde{S}_{11}b^4 - 16 \left(\tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{66} \right) a^2b^2 - 24\tilde{S}_{22}a^4 \right) + A \cdot 6\tilde{G}_{11} + \\
 & \quad + B \cdot 2 \left(\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16} \right) + C \cdot 2 \left(\tilde{G}_{12} + \tilde{G}_{26} \right) + D \cdot 6\tilde{G}_{22} = q, \\
 & K \cdot \left(12\tilde{G}_{11}b^4 + 4 \left(\tilde{G}_{12} + \tilde{G}_{26} \right) a^2b^2 \right) + A \cdot 3\tilde{B}_{11} + B \cdot 2\tilde{B}_{12} + C \cdot \tilde{B}_{22} = 0, \\
 & K \cdot \left(4 \left(\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16} \right) a^2b^2 + 12\tilde{G}_{22}a^4 \right) + B \cdot \tilde{B}_{11} + C \cdot 2\tilde{B}_{12} + D \cdot 3\tilde{B}_{22} = 0, \\
 & \quad K \cdot 8b^4\tilde{G}_{11} + A \cdot 3\tilde{B}_{11} + B \cdot \tilde{B}_{12} - Q = 0, \\
 & K \cdot a^2b^4 \left(8\tilde{G}_{21} + 16\tilde{G}_{16} \right) + A \cdot 3a^2\tilde{B}_{12} + B \cdot \left(a^2\tilde{B}_{22} + 2b^2\tilde{B}_{11} \right) + \\
 & \quad + C \cdot 2b^2\tilde{B}_{12} - R \cdot b^2 = 0, \\
 & K \cdot a^4b^2 \left(8\tilde{G}_{12} + 16\tilde{G}_{26} \right) + B \cdot 2b^2\tilde{B}_{12} + C \cdot \left(2a^2\tilde{B}_{22} + b^2\tilde{B}_{11} \right) + \\
 & \quad + D \cdot 3b^2\tilde{B}_{12} - Q \cdot a^2 = 0, \\
 & K \cdot 8a^4\tilde{G}_{22} + C \cdot 3\tilde{B}_{12} + D \cdot \tilde{B}_{22} - R = 0, \\
 & \quad E \cdot \tilde{B}_{11} + F \cdot \tilde{B}_{12} + Q \cdot a^2 = 0, \\
 & \quad E \cdot \tilde{B}_{12} + F \cdot \tilde{B}_{22} + R \cdot b^2 = 0.
 \end{aligned} \tag{10}$$

После решения этой системы станут известными значения неизвестных постоянных, а следовательно, и функции w, φ_0 . После этого становится возможным определять значения моментов в любой точке плиты по формулам (2).

Электродное покрытие присутствует. Пусть край плиты имеет электродное покрытие, которое обеспечивает по краю распределение плотности потенциала электрического поля

$$\varphi_0 = V = const. \tag{11}$$

В этом случае функции прогиба и плотности потенциала электрического поля можно выбрать в виде

$$w(x, y) = K \left(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 \right)^2, \tag{12}$$

$$\varphi_0(x, y) = (Ax + By) \left(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 \right) + V. \tag{13}$$

Очевидно, граничные условия удовлетворяются тождественно. Неизвестные постоянные K, A, B определяются из системы линейных алгебраических уравнений, получаемой при подстановке (12), (13) в систему дифференциальных уравнений (1):

$$\begin{aligned}
 & K \cdot \left(-24\tilde{S}_{11}b^4 - 16 \left(\tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{66} \right) a^2b^2 - 24\tilde{S}_{22}a^4 \right) + \\
 & \quad + A \cdot \left(6\tilde{G}_{11}b^2 + 2 \left(\tilde{G}_{12} + \tilde{G}_{26} \right) a^2 \right) + \\
 & \quad + B \cdot \left(2 \left(\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16} \right) b^2 + 6\tilde{G}_{22}a^2 \right) = q, \\
 & K \cdot \left(24\tilde{G}_{11}b^4 + 8 \left(\tilde{G}_{12} + \tilde{G}_{26} \right) a^2b^2 \right) + \\
 & \quad + A \cdot \left(2\tilde{B}_{22}a^2 + 6\tilde{B}_{11}b^2 \right) + B \cdot 4\tilde{B}_{12}b^2 = 0, \\
 & K \cdot \left(8 \left(\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16} \right) a^2b^2 + 24\tilde{G}_{22}a^4 \right) + \\
 & \quad + A \cdot 4\tilde{B}_{12}a^2 + B \cdot \left(6\tilde{B}_{22}a^2 + 2\tilde{B}_{11}b^2 \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{14}$$

После решения этой системы станут известными значения неизвестных постоянных, а следовательно, и функции w , φ_0 . После этого становится возможным определять значения моментов в любой точке плиты по формулам (2).

4. Численные исследования. Были проведены численные исследования для пластинки из таких материалов: 1) селенид кадмия $CdSe$ [8, 9] (материал ЭМ1); 2) титанат бария $BaTiO_3$ [8, 10] (материал ЭМ4); 3) пьезокерамика $PZT - 4$ [8, 10] (материал ЭМ5); 4) пьезокерамика $PZT - 5A$ [8, 10] (материал ЭМ6). Физико-механические постоянные этих материалов приведены в таблице 1.

Таблица 1. Физические постоянные материалов

Величина	Значение			
	ЭМ1	ЭМ4	ЭМ5	ЭМ6
s_{11}/s_0	23, 21	8, 70	10, 90	14, 40
s_{22}/s_0	16, 68	7, 10	7, 90	9, 46
s_{66}/s_0	74, 46	17, 50	19, 30	25, 20
s_{12}/s_0	-5, 38	-1, 90	-2, 10	-2, 98
g_{16}/g_0	-124, 40	20, 20	39, 40	38, 20
g_{21}/g_0	-41, 61	-5, 20	-11, 10	-11, 40
g_{22}/g_0	81, 15	12, 60	26, 10	24, 80
β_{11}/β_0	118987, 10	77, 93	76, 61	65, 31
β_{22}/β_0	106071, 50	66, 47	86, 92	66, 46

Здесь приняты следующие обозначения:

$$s_0 = 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad g_0 = 10^{-3} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м}^2, \quad \beta_0 = 1 \text{ МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}.$$

В таблице 2 для круговой плиты ($b = a$), по краю которой электродное покрытие отсутствует ($M_{Dn} = 0$), с точностью до множителя qa^2 приведены значения моментов M_n , M_s , H_{ns} , M_{Ds} в некоторых точках контура плиты с центральным углом θ , отсчитываемым от положительного направления оси Ox . При этом решались задачи теории электроупругости (ТЭУ), когда учитывались

все свойства материала плиты, и теории упругости (ТУ), когда не учитывались электрические свойства материала.

Таблица 2. Значения моментов
в точках неэлектродированного края круговой плиты

θ , рад.	Величина						
	$M_n \cdot 10^{-2}$		$M_s \cdot 10^{-2}$		$H_{ns} \cdot 10^{-2}$		$M_{D_s} \cdot 10^{-5}$
	ТЭУ	ТУ	ТЭУ	ТУ	ТЭУ	ТУ	ТЭУ
	Материал ЭМ1						
0	11,149	11,144	3,576	3,595	0,000	0,000	-0,041
$\pi/12$	11,026	11,024	3,992	4,007	-0,177	-0,170	-0,040
$\pi/6$	10,993	10,996	4,826	4,833	0,221	0,229	-0,036
$\pi/4$	11,668	11,674	5,246	5,246	1,085	1,091	-0,029
$\pi/3$	13,174	13,178	4,836	4,833	1,659	1,660	-0,021
$5\pi/12$	14,802	14,802	4,009	4,007	1,262	1,260	-0,011
$\pi/2$	15,510	15,507	3,595	3,595	0,000	0,000	0,000
	Материал ЭМ4						
0	11,334	11,009	4,063	2,946	0,000	0,000	5,804
$\pi/12$	11,633	11,300	3,879	2,821	0,666	0,527	5,607
$\pi/6$	12,364	12,005	3,463	2,570	1,006	0,754	5,027
$\pi/4$	13,159	12,751	3,097	2,445	0,927	0,620	4,104
$\pi/3$	13,720	13,246	2,965	2,570	0,600	0,320	2,902
$5\pi/12$	13,982	13,449	3,017	2,821	0,261	0,093	1,502
$\pi/2$	14,047	13,490	3,068	2,946	0,000	0,000	0,000
	Материал ЭМ5						
0	10,953	10,189	5,375	2,709	0,000	0,000	7,456
$\pi/12$	11,445	10,636	5,030	2,520	1,190	0,809	7,202
$\pi/6$	12,652	11,721	4,224	2,144	1,827	1,163	6,457
$\pi/4$	13,981	12,876	3,443	1,956	1,739	0,967	5,272
$\pi/3$	14,939	13,655	3,032	2,144	1,186	0,512	3,728
$5\pi/12$	15,406	13,987	2,966	2,520	0,549	0,158	1,930
$\pi/2$	15,527	14,059	2,991	2,709	0,000	0,000	0,000
	Материал ЭМ6						
0	10,345	9,677	5,351	3,048	0,000	0,000	7,981
$\pi/12$	10,878	10,164	5,065	2,901	1,229	0,888	7,709
$\pi/6$	12,226	11,385	4,395	2,605	1,938	1,350	6,911
$\pi/4$	13,808	12,796	3,738	2,457	1,938	1,263	5,643
$\pi/3$	15,089	13,911	3,382	2,605	1,418	0,838	3,990
$5\pi/12$	15,837	14,540	3,311	2,901	0,709	0,376	2,066
$\pi/2$	16,071	14,731	3,326	3,048	0,000	0,000	0,000

В таблице 3 для круговой плиты, по краю которой электродное покрытие присутствует и потенциал электрического поля равен нулю ($\varphi_0 = 0$), с точностью до множителя qa^2 приведены значения моментов M_n , M_s , H_{ns} , M_{D_n} , M_{D_s} в некоторых точках контура плиты.

Из полученных результатов следует, что значения механических моментов M_n , M_s , H_{ns} являются сопоставимыми для всех материалов. По всей видимости, этому способствуют механические граничные условия (край плиты жестко

Таблица 3. Значения моментов в точках электродированного края круговой плиты

θ , рад.	Величина							
	$M_n \cdot 10^{-2}$		$M_s \cdot 10^{-2}$		$H_{ns} \cdot 10^{-2}$		$M_{Dn} \cdot 10^{-5}$	$M_{Ds} \cdot 10^{-5}$
	ТЭУ	ТУ	ТЭУ	ТУ	ТЭУ	ТУ	ТЭУ	ТЭУ
	Материал ЭМ1							
0	11,152	11,144	3,605	3,595	0,000	0,000	0,000	0,015
$\pi/12$	11,029	11,024	4,019	4,007	-0,173	-0,170	-0,034	0,003
$\pi/6$	10,997	10,996	4,846	4,833	0,225	0,229	-0,050	-0,026
$\pi/4$	11,670	11,674	5,259	5,246	1,089	1,091	-0,038	-0,053
$\pi/3$	13,172	13,178	4,843	4,833	1,660	1,660	-0,007	-0,061
$5\pi/12$	14,796	14,802	4,014	4,007	1,262	1,260	0,024	-0,040
$\pi/2$	15,502	15,507	3,600	3,595	0,000	0,000	0,037	0,000
	Материал ЭМ4							
0	11,398	11,009	3,467	2,946	0,000	0,000	0,000	2,346
$\pi/12$	11,630	11,300	3,364	2,821	0,468	0,527	1,209	2,455
$\pi/6$	12,208	12,005	3,142	2,570	0,711	0,754	2,068	2,664
$\pi/4$	12,861	12,751	2,974	2,445	0,665	0,620	2,407	2,692
$\pi/3$	13,358	13,246	2,962	2,570	0,440	0,320	2,315	2,269
$5\pi/12$	13,622	13,449	3,053	2,821	0,197	0,093	2,065	1,313
$\pi/2$	13,698	13,490	3,108	2,946	0,000	0,000	1,943	0,000
	Материал ЭМ5							
0	11,109	10,189	3,835	2,709	0,000	0,000	0,000	2,670
$\pi/12$	11,427	10,636	3,702	2,520	0,675	0,809	1,715	2,850
$\pi/6$	12,235	11,721	3,397	2,144	1,063	1,163	2,931	3,218
$\pi/4$	13,193	12,876	3,128	1,956	1,060	0,967	3,405	3,367
$\pi/3$	13,983	13,655	3,025	2,144	0,773	0,512	3,265	2,904
$5\pi/12$	14,455	13,987	3,057	2,520	0,385	0,158	2,902	1,701
$\pi/2$	14,605	14,059	3,091	2,709	0,000	0,000	2,724	0,000
	Материал ЭМ6							
0	10,460	9,677	4,043	3,048	0,000	0,000	0,000	2,854
$\pi/12$	10,866	10,164	3,908	2,901	0,823	0,888	1,677	2,958
$\pi/6$	11,907	11,385	3,607	2,605	1,308	1,350	2,957	3,144
$\pi/4$	13,167	12,796	3,357	2,457	1,324	1,263	3,633	3,115
$\pi/3$	14,241	13,911	3,293	2,605	0,986	0,838	3,778	2,590
$5\pi/12$	14,909	14,540	3,364	2,901	0,501	0,376	3,665	1,488
$\pi/2$	15,128	14,731	3,415	3,048	0,000	0,000	3,587	0,000

защемлен). Следовательно, при жестко защемленном крае упругие свойства материала (значения коэффициентов деформации) слабо влияют на значения моментов. Влияние же пьезоэлектрических свойств является более выраженным. Так, для плиты из материала ЭМ4 учет этих свойств привел к росту максимальных значений моментов M_s и H_{ns} до 30%, а для плит из материалов ЭМ5, ЭМ6 – до 70%. А в плите из материала ЭМ1, обладающего наибольшими пьезоэлектрическими модулями, изменения значений моментов оказались незначительными. При этом, изменение значений момента M_n для плит из всех материалов оказалось незначительным.

В плите из материала ЭМ1 возникают самые слабые моменты электрической индукции M_{Dn} , M_{Ds} . Для плит из материалов ЭМ4, ЭМ5, ЭМ6 значения этих моментов оказались сопоставимыми и на 2 порядка выше, чем в плите из материала ЭМ1; в плите из материала ЭМ6 – незначительно больше, чем в плитах из материалов ЭМ4 и ЭМ5. Это связано с тем, что у материала ЭМ6 значения коэффициентов диэлектрической проницаемости несколько меньше, чем у материалов ЭМ4, ЭМ5, а материал ЭМ1 обладает значительно большими значениями пьезоэлектрических модулей и коэффициентов диэлектрической проницаемости, чем у остальных материалов. Для всех материалов значения момента M_{Dn} в точке $\theta = 0$ и момента M_{Ds} в точке $\theta = \pi/2$ (равных M_{Dx} в этих точках) получались равными нулю, поскольку рассмотренные материалы обладают поляризацией вдоль оси Oy .

Наличие или отсутствие электродного покрытия заметно влияет на значения моментов M_s , H_{ns} . Так, сравнение максимальных значений показало, что в случае неэлектродированного края плиты значения моментов до 60% больше, чем в случае электродированного края. Однако значения момента M_n слабо зависят от электрического граничного условия. При этом вблизи точки $\theta = 0$ значения момента M_n получались больше при электродированном крае плиты, а вблизи точки $\theta = \pi/2$ – при неэлектродированном. Влияние электродированности на значения моментов индукции M_{Dn} , M_{Ds} достаточно велико – существенно различается распределение потоков индукции, при этом для случая неэлектродированного края суммарные их значения оказываются выше.

В таблице 4 для круговых плит ($b = a$) из различных материалов с точностью до множителя $q/a^4 h^3$ приведены значения постоянной K , характеризующей величину прогиба, в зависимости от типа задачи и электрического граничного условия.

Таблица 4.

Значения постоянной K для круговой плиты

Материал	Тип задачи		
	ТЭУ		ТУ
	$M_{Dn} = 0$	$\varphi_0 = 0$	–
ЭМ1	$4,4880 \cdot 10^{-7}$	$4,4908 \cdot 10^{-7}$	$4,4873 \cdot 10^{-7}$
ЭМ4	$1,7607 \cdot 10^{-7}$	$1,7587 \cdot 10^{-7}$	$1,6909 \cdot 10^{-7}$
ЭМ5	$2,1821 \cdot 10^{-7}$	$2,1750 \cdot 10^{-7}$	$1,9758 \cdot 10^{-7}$
ЭМ6	$2,6647 \cdot 10^{-7}$	$2,6594 \cdot 10^{-7}$	$2,4426 \cdot 10^{-7}$

Видно, что наибольший прогиб возникает в плите из материала ЭМ1, обладающего наибольшими значениями коэффициентов деформации. Таким образом, упругие свойства материала значительно влияют на значения прогиба. Влияние же электрических свойств материала и электрического граничного условия на прогиб плиты является незначительным.

5. Решение задачи об изгибе бесконечной полосы. Если в полученных выше решениях произвести предельный переход при $b \rightarrow \infty$, то получатся решения задач изгиба для жестко заземленной бесконечной полосы.

И для случая неэлектродированного края полосы, и для случая электроди-

рованного края решение задачи обретает вид

$$w(x) = \frac{q}{24} \cdot \frac{(a^2 - x^2)^2 \tilde{B}_{11}}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2},$$

$$\varphi_0(x) = \frac{q}{6} \cdot \frac{x(a^2 - x^2) \tilde{G}_{11}}{\tilde{B}_{11} \tilde{S}_{11} + \tilde{G}_{11}^2}.$$

Таким образом, в случае жестко защемленной полосы электрические граничные условия не оказывают влияния на прогиб плиты, распределение в ней электрического потенциала, распределение моментов.

1. *Love A.E.H.* On the small free vibrations and deformations of elastic shells / A.E.H. Love // Philosophical trans. of the Royal Society. – 1888. – Vol. serie A, No. 17. – P. 491–549.
2. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
3. *Тимошенко С.П.* Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
4. *Mansfield E.H.* The bending and stretching of plates / E.H. Mansfield. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 228 p.
5. *Калоеров С.А.* Краевые задачи прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2019. – № 1. – С. 42–58.
6. *Калоеров С.А.* Задачи электроупругого, магнитоупругого и упругого изгиба тонких плит как частные задачи электромагнитоупругого изгиба / С.А. Калоеров // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2019. – № 3-4. – С. 58–79.
7. *Гринченко В.Т.* Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – К.: Наук. думка. – 1989. – 280 с.
8. *Калоеров С.А.* Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей / С.А. Калоеров, А.И. Баева, О.И. Бороненко. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 268 с.
9. *Liu J.X.* Anisotropic thermopiezoelectric solids with an elliptic inclusion or a hole under uniform heat flow / J.X. Liu, X.S. Zhang, X.L. Liu, J. Zheng // Acta Mech. Sinica. – 2000. – Vol. 16. – P. 148–163.
10. *Dunn M.L.* Micromechanics of coupled electroelastic composites effective thermal expansion and pyroelectric coefficients / M.L. Dunn // J. Appl. Phys. – 1993. – Vol. 73. – P. 5131–5140.

E.S. Glushankov

The solution of the problem of bending of clamped elliptic piezoelectric plate.

A bending problem is solved for clamped thin elliptic piezoelectric plate loaded with uniformly distributed pressure along the upper base. The cases are considered whether a side surface of plate is electroded or is not electroded. In both cases the exact solutions are obtained in polynomials. The influence of material's properties and electric boundary condition on the electro-elastic state of the plate is obtained with the numerical studies based on the obtained solutions.

Keywords: *bending theory of thin plates, piezoelectric material, elliptic plate, polynomial solutions, deflection function, moments in bending theory, bending moments.*

УДК 539.3

©2020. Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОПРОНИЦАЕМОСТИ РАЗРЕЗА НА КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛАСТИНЕ ПРИ ОДНОСТОРОННЕМ ТЕПЛООБМЕНЕ

Решена задача термоупругости для изотропной пластины с теплопроницаемым разрезом в случае произвольного теплообмена. Использована обобщённая теория в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации, основанная на методе И. Н. Векуа разложения искоемых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра от толщинной координаты. Исследовано влияние геометрических и теплофизических параметров разреза на величину коэффициентов интенсивности напряжений.

Ключевые слова: *изотропная пластина, теплопроницаемый разрез, обобщённая теория, полиномы Лежандра, коэффициенты интенсивности напряжений.*

Введение. Тонкостенные элементы конструкций применяются во многих областях современной техники. Из них состоят обшивки крыльев и фюзеляжей самолётов, корпусов кораблей и подводных лодок, перекрытия инженерных сооружений и т. д. Исследования напряжённо-деформированного состояния (НДС) тонких пластин, основанные на гипотезах Кирхгоффа-Лява, достаточно полно проведены в многочисленных монографиях и научных публикациях. Классическая теория корректна для тонких изотропных и слабоизотропных пластин с медленно изменяющимся НДС.

В остальных случаях использование классической теории может привести к значительным погрешностям в определении НДС. Например, классическая теория неприменима при расчётах толстых пластин, а также в случаях, когда материал пластины или оболочки характеризуется существенной анизотропией упругих свойств. Неточность результатов, получаемых на базе классической теории, вызвала необходимость разработки обобщённых теорий пластин и оболочек. Об актуальности построения таких теорий свидетельствуют публикации последних лет [1–3].

Дополнительные сложности в проведение прочностных расчётов тонкостенных элементов конструкций вносит наличие концентраторов напряжений, например, дефектов типа трещин. Элементы конструкций могут подвергаться не только силовому, но и тепловому воздействию. Наличие трещиноподобных дефектов, на берегах которых заданы тепловые потоки, вызывает локальное возрастание в их окрестности температурных градиентов и напряжений, что может привести к разрушению всей конструкции.

Целью статьи является определение коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) в изотропной пластине, обусловленных наличием теплопроницаемого разреза, а также выявление влияния геометрических и теплофизических параметров разреза на величину КИН. При этом используется обобщённая теория

рия в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации, основанная на методе И.Н. Векуа разложения искоемых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра от поперечной координаты [4].

Настоящая статья продолжает исследования, приведённые в публикациях [5, 6]. В работе [5] решена задача теплопроводности для изотропной пластины, содержащей теплопроницаемый разрез при произвольном теплообмене с внешней средой. В статье [6] построено решение задачи термоупругости для изотропной пластины с теплоизолированным разрезом; проведены исследования влияния параметров разреза на КИН для поперечного и продольного сдвига.

1. Постановка задачи термоупругости. Рассмотрим изотропную пластину толщины $2h$ в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z . Пластина содержит теплопроницаемый разрез L . На лицевых поверхностях пластины осуществляется конвективный теплообмен по закону Ньютона с внешней средой нулевой температуры.

Используется обобщённая теория в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации, в рамках которой компоненты термоупругого состояния представляются в виде рядов Фурье по полиномам Лежандра от толщинной координаты $P_k = P_k(z/h)$ [4].

Система уравнений термоупругости $\{1,0\}$ -аппроксимации, записанная в безразмерной системе координат x_1, x_2 , с нормирующим параметром в виде полутолщины пластины h , включает в себя:

- первое приближение трёхмерного уравнения теплопроводности [5]

$$\Delta T_k + A_{k0}T_0 + A_{k1}T_1 = 0 \quad (k = 0, 1), \quad (1)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; \quad A_{km} = A_{km}(Bi^\pm) \quad (k, m = 0, 1);$$

Bi^+ и Bi^- – критерий Био на верхней и нижней лицевых поверхностях пластины; T_0 и T_1 – коэффициенты разложения температуры в ряд по полиномам Лежандра (средняя температура и температурный момент);

- уравнения Дюамеля–Неймана в перемещениях

$$\begin{aligned} N_1 &= B_0 \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial v}{\partial x_2} - \alpha(1 + \nu)T_0 \right\}; \quad N_2 = B_0 \left\{ \frac{\partial v}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u}{\partial x_1} - \alpha(1 + \nu)T_0 \right\}; \\ S &= \frac{1 - \nu}{2} B_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right); \quad M_1 = D_0 \left\{ \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} - \alpha(1 + \nu)T_1 \right\}; \\ M_2 &= D_0 \left\{ \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} - \alpha(1 + \nu)T_1 \right\}; \quad H = \frac{1 - \nu}{2} D_0 \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right); \\ Q_{i0} &= \Lambda_0 \left(\gamma_i + \frac{\partial w_0}{\partial x_i} \right) \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$B_0 = 3D_0 = \frac{2}{1-\nu^2}; \quad \Lambda_0 = \frac{5}{6(1+\nu)};$$

$u, v, w_0, \gamma_1, \gamma_2$ – обобщённые перемещения пластины, из которых u, v, w_0 являются аналогами перемещений точек срединной поверхности, а γ_1, γ_2 – аналогами углов поворота нормали; $N_1, N_2, S, Q_{10}, Q_{20}, M_1, M_2, H$ – обобщённые усилия и моменты, из которых N_1, N_2, S являются аналогами мембранных усилий; M_1, M_2, H – аналогами изгибающих и крутящего моментов; Q_{10}, Q_{20} – аналогами перерезывающих сил; ν – коэффициент Пуассона; α – температурный коэффициент линейного расширения;

- уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} - Q_{10} = 0; \\ \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_{20} = 0; \quad \frac{\partial Q_{10}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{20}}{\partial x_2} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Мембранные усилия и перерезывающие силы в соотношениях (2), (3) записаны с точностью до множителя Eh (E – модуль Юнга), а моменты – с точностью до множителя Eh^2 .

Компоненты термоупругого состояния в пластине с разрезом (G^*) представим в виде суммы:

$$G^* = G^o + G,$$

где G^o – компоненты термоупругого состояния в сплошной пластине (основного термоупругого состояния), которое будем считать известным; G – компоненты возмущённого термоупругого состояния.

Для определения возмущённого термоупругого состояния используем систему уравнений термоупругости (1)–(3) с граничными условиями, сформулированными для случая свободных берегов разреза и отсутствия контакта между ними.

Для модели теплопроницаемого разреза предполагается, что тепло распространяется только поперёк линии разреза. Граничные условия на линии разреза L с нормалью $\vec{n} = (n_1, n_2)$ имеют вид [7]:

$$\lambda \left(\frac{\partial T_k}{\partial n} \right)^\pm - \lambda_n (T_k^+ - T_k^-) = 0 \quad (k = 0, 1), \quad (4)$$

где знаками «+» и «-» обозначены граничные значения компонент температуры в соответствии с выбранным направлением нормали \vec{n} ; $\lambda_n = \lambda_c/\delta$ – коэффициент теплопроницаемости разреза, характеризующий его теплопроводность в поперечном направлении; λ_c – теплопроводность материала промежуточного слоя, расположенного между берегами разреза; δ – раскрытие разреза.

Граничные условия для задачи термоупругости (2), (3) имеют вид [7]:

$$\begin{aligned} N_n|_L &= -N_n^o|_L; & S_{nt}|_L &= -S_{nt}^o|_L; \\ M_n|_L &= -M_n^o|_L; & H_{nt}|_L &= -H_{nt}^o|_L; & Q_n|_L &= -Q_n^o|_L, \end{aligned} \quad (5)$$

где N_n , S_{nt} , M_n , H_{nt} , Q_n – усилия и моменты на элементе длины разреза с нормалью \vec{n} и касательной \vec{t} .

Предполагаем, что разрез удалён от линии внешней границы пластины на расстояние, значительно превышающее длину разреза. Поэтому возмущённое термоупругое состояние носит локальный характер и его компоненты равны нулю на внешнем граничном контуре. Достоверность такого предположения проверяется после решения задачи.

2. Методика решения задачи. Решение задачи теплопроводности (1), (4) для изотропной пластины с теплопроницаемым разрезом в случае произвольного теплообмена с внешней средой получено в работе [5].

Методика решения задачи основана на применении двумерного интегрального преобразования Фурье, учитывающего разрывный характер искомых функций на линии разреза L [8]:

$$F \left[\frac{\partial G}{\partial x_j} \right] = (-i\xi_j)\tilde{G} + \frac{1}{2\pi} \int_L n_j[G] \exp \left\{ i(\vec{\xi}, \vec{x}') \right\} dL \quad (j = 1, 2), \quad (6)$$

где $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ – координаты текущей точки в пространстве трансформант; $[G] = G^+ - G^-$ – скачок функции G при переходе через линию разреза L , причём G^+ и G^- – это граничные значения функции G в соответствии с выбранным направлением нормали \vec{n} ; $\vec{x}' = (x'_1, x'_2)$ – координаты точки на линии L . Направление интегрирования образует прямой угол с нормалью \vec{n} при вращении против часовой стрелки.

Рассмотрим прямолинейный теплопроницаемый разрез длиной $2l$, расположенный вдоль оси абсцисс симметрично начала координат. В результате применения к разрешающей системе уравнений термоупругости (2), (3) двумерного интегрального преобразования Фурье (6) и решения полученной системы линейных алгебраических уравнений найдены интегральные представления трансформант внутренних силовых факторов. После применения формулы обращения для двумерного интегрального преобразования Фурье к трансформантам искомых функций получены интегральные представления компонент возмущённого термоупругого состояния в пространстве оригиналов. Они имеют такой вид:

$$P_j^q(x_1, x_2) = -\frac{l}{2\pi} \sum_{k=1-\kappa}^{\kappa} \int_0^1 K_{jk}^q(x_1 - ls, x_2) \psi_k^q(s) ds \quad (q = 0, 1; j = \overline{1, 5}), \quad (7)$$

где $P_j^0 = N_j$, $P_j^1 = M_j$, $P_{j+3}^0 = Q_{j0}$ ($j = 1, 2$); $P_3^0 = S$; $P_3^1 = H$; $\kappa = 4$ для P_1^0 – P_3^0 ; $\kappa = 7$ для P_1^1 – P_3^1 ; $\kappa = 5$ для P_4^0 , P_5^0 .

В интегральных представлениях (7) неизвестные функции $\psi_k^q = \psi_k^q(s)$, где s – координата точки на линии разреза L , определяются через скачки обобщённых перемещений и компонент разложения температуры T_0 и T_1 таким образом:

$$\begin{aligned} \psi_1^0 &= \frac{d[u]}{ds}; & \psi_2^0 &= \frac{d[v]}{ds}; & \psi_1^1 &= \frac{d[\gamma_1]}{ds}; & \psi_2^1 &= \frac{d[\gamma_2]}{ds}; & \psi_3^1 &= \frac{d[w_0]}{ds}; \\ \psi_4^1 &= [\gamma_1]; & \psi_5^1 &= [\gamma_2]; & \psi_3^0 &= \psi_6^1 = [T_0]; & \psi_4^0 &= \psi_7^1 = [T_1]. \end{aligned}$$

При этом функции $\psi_3^0, \psi_4^0, \psi_6^1, \psi_7^1$ находятся при решении задачи теплопроводности (1), (4).

Ядра интегральных представлений (7) представляют собой линейные комбинации специальной G -функции, например,

$$K_{51}^1(x_1 - ls, x_2) = \frac{\Lambda_0}{2} \left\{ G_{0,0}(\sqrt{2,5}r) + \cos 2\varphi G_{1,1}(\sqrt{2,5}r) \right\},$$

где

$$r = \sqrt{(x_1 - ls)^2 + x_2^2}; \quad \cos \varphi = \frac{x_1 - ls}{r}; \quad \sin \varphi = \frac{x_2}{r};$$

$G_{n,\nu}(z)$ – специальная G -функция, которая выражается через функцию Макдональда $K_\nu(z)$ таким образом [9]:

$$\begin{aligned} G_{n,\nu}(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-n} K_{n+\nu}(z) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{\Gamma(\nu+k)}{(n-k)!} \left(\frac{2}{z}\right)^{2k} \\ &(n > 0, \operatorname{Re} \nu > -1), \end{aligned}$$

где $\Gamma(\nu)$ – гамма-функция.

После подстановки интегральных представлений искомым функций (7) в граничные условия (5) получены две независимых системы сингулярных интегральных уравнений (СИУ) типа Коши, описывающие

- безмоментное термоупругое состояние:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^0(s)}{s - \zeta} ds = F_j^0(\zeta) \quad (j = 1, 2; |\zeta| \leq 1); \quad (8)$$

- состояние термоупругого изгиба:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^1(s)}{s - \zeta} ds + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^3 \int_{-1}^1 E_{jk}^1(\zeta - s) \psi_k^1(s) ds = F_j^1(\zeta) \quad (9)$$

$$(j = \overline{1, 3}; |\zeta| \leq 1).$$

Разностные ядра системы (9) представляют собой линейные комбинации специальной G -функции и её первообразной, например,

$$E_{22}^1(\zeta - s) = -1,5\Lambda_0 l^2(\zeta - s)G_{2,0}\left(\sqrt{2,5}l|\zeta - s|\right) + 0,3\sqrt{2,5}\Lambda_0 \operatorname{sign}(\zeta - s) \times \\ \times \left\{ IG_{2,2}\left(\sqrt{2,5}l|\zeta - s|\right) - IG_{0,0}\left(\sqrt{2,5}l|\zeta - s|\right) \right\}; \quad IG_{n,\nu}(s) = \int_0^s G_{n,\nu}(t)dt.$$

Правые части систем СИУ (8), (9) содержат суммы значений обобщённых усилий и моментов основного термоупругого состояния на линии разреза и интегралов от скачков компонент температуры с разностными ядрами, представляющими собой линейные комбинации G -функции.

После численного решения систем СИУ (8), (9) находятся скачки обобщённых перемещений и углов поворота нормали на линии разреза L . С использованием интегральных представлений искомых функций (7) определяются компоненты возмущённого термоупругого состояния в любой точке пластины. Аналитические формулы КИН для поперечного (K_{II}) и продольного (K_{III}) сдвига получены путём сравнения коэффициентов при особенности $r^{-1/2}$ в ненулевых компонентах тензора напряжений с известными асимптотическими представлениями напряжений. Максимальные по модулю значения КИН определены с учётом свойств полиномов Лежандра:

$$K_{II}^{\max} = 0,25\sqrt{\pi lh}E \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ \sum_{q=0}^1 |\psi_1^q(s)| \sqrt{1-s^2} \right\}; \quad (10) \\ K_{III}^{\max} = 0,375\sqrt{\pi lh}E\Lambda_0 \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ |\psi_3^1(s)| \sqrt{1-s^2} \right\}.$$

3. Анализ результатов численных исследований. Расчёты проведены для прямолинейного разреза длиной $2l$, расположенного вдоль оси Ox_1 , с центром в начале координат. Целью численных исследований являлось определение зависимости максимальных по модулю значений КИН (10) в изотропной пластине ($\nu = 0,3$) от геометрических параметров разреза (полудлины l) и параметра теплопроводности разреза $\beta = l\lambda_n/\lambda$. Рассмотрен случай верхнего одностороннего теплообмена ($Bi^+ = 0,1$; $Bi^- = 0$) с окружающей средой.

Основное температурное поле предполагалось таким, что на линии разреза ($|x_1| \leq l$) действует поток средней температуры:

$$\left. \frac{\partial T_0^o}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = q; \quad \left. \frac{\partial T_1^o}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0.$$

Графики зависимостей максимальных значений КИН для поперечного ($K_2^* = K_{II}^{\max}/K^*$) и продольного сдвига ($K_3^* = K_{III}^{\max}/K^*$) от полудлины разреза l представлены на рисунке 1. КИН даны с точностью до множителя $K^* = \alpha q E \sqrt{lh}/4$,

который соответствует значению КИН в пластине без теплообмена при действии однородного потока тепла интенсивности q перпендикулярно линии разреза [10]. Цифрами 1, 2, 3, 4, 5 обозначены графики, отвечающие таким значениям параметра теплопроницаемости разреза β : 0 (теплоизолированный разрез); 0,01; 0,1; 1; 10 соответственно.

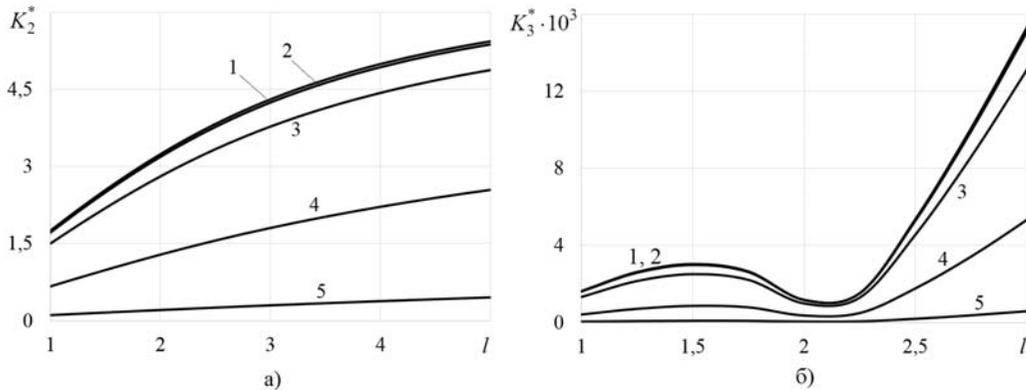


Рис. 1. КИН: а – для поперечного сдвига; б – для продольного сдвига.

Выводы. Анализ графиков, представленных на рисунке 1, показывает, что с увеличением параметра теплопроницаемости разреза β значения коэффициентов интенсивности для поперечного и продольного сдвига уменьшаются. Такое влияние теплопроницаемости разреза полностью согласуется с общими закономерностями механики разрушения. Значение параметра теплопроницаемости прямо пропорционально коэффициенту теплопроводности материала промежуточного слоя и обратно пропорционально раскрытию разреза. Увеличение первого фактора и стремление к нулю второго фактора приводит к уменьшению возмущения температурного поля и, следовательно, к уменьшению температурных КИН. В пределе, когда раскрытие разреза будет равно нулю, то есть трещина исчезнет, не будет и температурных КИН.

Увеличение длины теплопроницаемого разреза также, как и в случае теплоизолированного разреза, приводит к увеличению температурных КИН.

Необходимо отметить, что абсолютные значения КИН для продольного сдвига (K_{III}) на три порядка меньше, чем для поперечного сдвига (K_{II}).

Исходя из проведённого анализа можно сделать вывод, что учёт теплофизических свойств трещин в поперечном направлении не приводит к увеличению температурных КИН.

1. Тучапський Р.І. Рівняння тонких анізотропних пружних оболонок обертання методу $\{m, n\}$ -апроксимації / Р.І. Тучапський // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, № 3. – С. 43–56.
2. Zelensky A. Analytical and practical development of variant of mathematical theory of shells of small curvature of arbitrary thickness / A. Zelensky // Publishing House «Baltija Publishing». – 2019. – P. 308–328.

3. Zelensky A.G. Mathematical theory of transversally isotropic shells of arbitrary thickness at static load / A.G. Zelensky // Materials Science Forum. – 2019. – P. 496–510.
4. Пелех Б.Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б.Л. Пелех, В.А. Лазько. – Киев: Наукова думка, 1982. – 296 с.
5. Бондаренко Н.С. Исследование температурного поля в изотропной пластине с теплопроницаемым разрезом на базе обобщённой теории / Н.С. Бондаренко // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. – 2014. – № 2. – С. 41–48.
6. Бондаренко Н.С. Исследование влияния длины разреза на коэффициенты интенсивности напряжений в изотропной пластине на базе обобщённой теории / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // Труды института прикладной математики и механики. – 2015. – Т. 29. – С. 20–28.
7. Кит Г.С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г.С. Кит, М.Г. Кривцун. – Киев: Наукова думка, 1984. – 280 с.
8. Шевченко В.П. Задачи термоупругости тонких оболочек с разрезами: учебное пособие / В.П. Шевченко, А.С. Гольцев. – Киев: УМК ВО, 1988. – 84 с.
9. Хижняк В.К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек : учебное пособие / В.К. Хижняк, В.П. Шевченко. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.
10. Панасюк В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацьшин. – Киев: Наукова думка, 1976. – 444 с.

N.S. Bondarenko, A.S. Goltsev

Influence of the heat permeability of the cut on the stress intensity factors in the plate with one-sided heat exchange.

The thermoelastic problem for an isotropic plate with a heat-permeable cut in the case of one-sided heat exchange is solved. The generalized theory in the version of the $\{1,0\}$ -approximation, based on the method of I. N. Vekua of expansion the required functions in Fourier series by Legendre polynomials in the thickness coordinate, is used. The influence of the geometrical and thermophysical parameters of the cut on the value of the stress intensity factors is investigated.

Keywords: *isotropic plate, heat-permeable cut, generalized theory, Legendre polynomials, stress intensity factors.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
Bondarenko.Natalya.Sergeevna@gmail.com
a.goltsev@donnu.ru

Получено 16.12.2020

УДК 539.3

©2020. Р.Н. Нескороев

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБА ОРТОТРОПНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛИТ В УТОЧНЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

В работе предложена методика численно-аналитического решения задачи изгиба вязкоупругих ортотропных плит в уточненной постановке. Учет эффектов вязкоупругости осуществлен при помощи приема преобразования интегральных уравнений состояния к уравнениям закона Гука с параметрическими зависимостями деформативных характеристик материалов от времени. В качестве примера рассмотрено напряженное состояние бесконечной плиты, ослабленной круговой полостью.

Ключевые слова: изгиб, ортотропная плита, вязкоупругость, уточненная теория, эллиптическая полость.

Введение. Изгиб вязкоупругих плит изучался только в рамках прикладной теории на основе использования метода малого параметра с привлечением комплексных потенциалов [1, 2]. В работе [3] рассмотрен изгиб треугольной плиты с круговым отверстием. В работах [4–6] разработан метод решения задач линейной вязкоупругости, позволяющий решать задачи изгиба для многосвязных анизотропных плит с контурами произвольной конфигурации и вариантами их взаимного расположения.

При помощи преобразования интегральных уравнений состояния задач вязкоупругости к уравнениям закона Гука с параметрическими зависимостями деформативных характеристик материалов от времени в работах [7, 8] построены решения задач изгиба вязкоупругих изотропных и трансверсально-изотропных плит в уточненной постановке. Для нахождения решения в произвольный момент времени использована методика получения решений бигармонического и метагармонического уравнений уточненной теории изгиба пластин, учитывающей деформации поперечного сдвига.

В работе [9] предложен один из способов получения дифференциального уравнения шестого порядка теории изгиба упругих ортотропных плит. Это уравнение не разделяется на два независимых уравнения четвертого и второго порядков. Однако, это уравнение включает в себя два типа решения – медленно изменяющееся, которое определяет основное состояние пластины, и быстро изменяющееся решение, соответствующее краевому эффекту. При помощи метода малого параметра показана методика разделения уравнения шестого порядка на два уравнения четвертого и второго порядков. Решение полученных уравнений основано на использовании функций обобщенных комплексных переменных, удовлетворяет однородным граничным условиям на плоских гранях плиты и заданным внешним усилиям по толщине плиты.

В данной статье указанную выше методику решения задач вязкоупругости предлагается использовать для решения задач уточненной теории изгиба орто-

тропной плиты с полостью при длительном воздействии внешних усилий.

1. Основные соотношения уточненной теории изгиба ортотропных плит. Рассматривается ортотропная плита, имеющая толщину $2h$ и отнесенная к декартовой системе координат $Oxyz$. Оси Ox и Oy расположены в срединной плоскости плиты, а Oz - нормальна к этой плоскости. Представления для перемещений, напряжений, а также система дифференциальных уравнений теории изгиба плит, построенная по предложенным в работе [10] предположениям, формируются следующим образом. Представления для перемещений выбираются в виде [9]

$$u_1 = p_1(z)\partial_1\varphi_1(x, y), \quad u_2 = p_1(z)\partial_2\varphi_2(x, y), \quad u_3 = w_0(x, y) + p_2(z)w(x, y), \quad (1)$$

где $p_1(z)$ – нечетная по переменной z функция, характеризующая распределение усилий по толщине плиты; $p_2(z) = \int p_1(z)dz$; $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, $w_0(x, y)$, $w(x, y)$ – подлежащие определению функции.

Выражения для напряжений находятся из уравнений закона Гука. С учетом соотношений (1)

$$\sigma_1 = p_1S_1, \quad \sigma_2 = p_1S_2, \quad \sigma_3 = p_1S_3, \quad \sigma_6 = p_1S_6; \quad (2)$$

$$\sigma_4 = A_{44}(\partial_2w_0 + p_2\partial_2w + p_0\partial_2\varphi_2), \quad \sigma_5 = A_{55}(\partial_1w_0 + p_2\partial_1w + p_0\partial_1\varphi_1), \quad (3)$$

где приняты обозначения

$$S_i = A_{i1}\partial_1^2\varphi_1 + A_{i2}\partial_2^2\varphi_2 + A_{i3}w \quad (i = \overline{1, 3}), \quad S_6 = A_{66}\partial_1\partial_2(\varphi_1 + \varphi_2), \quad p_0(z) = p_1'(z).$$

Выражения для напряжений σ_3 , σ_4 и σ_5 можно также найти, удовлетворяя уравнениям равновесия

$$\sigma_3 = [p_3(z) - p_2(h)z]S_3^*, \quad \sigma_4 = P_2(z)S_4, \quad \sigma_5 = P_2(z)S_5, \quad (4)$$

где

$$S_5 = \partial_1S_1 + \partial_2S_6, \quad S_4 = \partial_1S_6 + \partial_2S_2, \quad S_3^* = \partial_1S_5 + \partial_2S_4,$$

$$P_2(z) = p_2(h) - p_2(z), \quad p_3 = \int p_2(z)dz.$$

Представления для напряжений σ_4 и σ_5 в представлениях (4) удовлетворяют однородным граничным условиям на плоских гранях плиты: $\sigma_4 = \sigma_5 = 0$ при $z = \pm h$. Однако, эти представления противоречат соотношениям (3). Корректный результат можно получить, введя следующие предположения:

1. Поперечное нормальное напряжение σ_3 равно нулю (как в теории Кирхгофа).

2. Поперечные усилия, полученные интегрированием соотношений (3) для напряжений σ_4 и σ_5 и соотношений (4) для одноименных напряжений, равны между собой [10].

Реализация этих предположений приводит к дифференциальным уравнениям, описывающим изгиб плит:

$$S_3 = A_{31}\partial_1^2\varphi_1 + A_{32}\partial_2^2\varphi_2 + A_{33}w = 0; \quad (5)$$

$$S_3^* = [A_{11}\partial_1^4 + c_{12}\partial_1^2\partial_2^2]\varphi_1 + [c_{12}\partial_1^2\partial_2^2 + A_{22}\partial_2^4]\varphi_2 + D_2w = 0; \quad (6)$$

$$Q_5 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_5 dz = A_{55} (\partial_1 w_0 + k_0 \partial_1 \varphi_1 + k_1 \partial_1 w) = k_2 S_5,$$

$$Q_4 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_4 dz = A_{44} (\partial_2 w_0 + k_0 \partial_2 \varphi_2 + k_1 \partial_2 w) = k_2 S_4; \quad (7)$$

$$k_0 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h p_0 dz, \quad k_1 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h p_2 dz, \quad k_2 = p_2(h) - k_1,$$

$$D_2 = A_{31}\partial_1^2 + A_{32}\partial_2^2, \quad c_{12} = A_{12} + 2A_{66}.$$

Таким образом, для определения функций φ_1 , φ_2 , w_0 и w имеется система уравнений (5) - (7). Для обеспечения удовлетворения уравнениям (5) и (6) вводятся представления

$$\varphi_1 = G_2 \partial_2^2 F, \quad \varphi_2 = R_2 \partial_1^2 F, \quad w = -\frac{1}{A_{33}} (A_{31} G_2 + A_{32} R_2) \partial_1^2 \partial_2^2 F,$$

где

$$G_2 = - (D_{12} \partial_1^2 + B_{22} \partial_2^2), \quad R_2 = (B_{11} \partial_1^2 + D_{12} \partial_2^2), \quad D_{12} = B_{12} + 2A_{66},$$

$$B_{ik} = A_{ik} - \frac{A_{i3} A_{3k}}{A_{33}} \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad F(x, y) - \text{произвольная функция.}$$

Из уравнений (7) получается дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $F(x, y)$, и представление для функции w_0 :

$$(D_4 L_2 - \lambda^2 P_4) F = 0,$$

$$w_0 = k_0 [B_{22} (\partial_2^2 + q_1 \partial_1^2) \partial_2^2] F - k_2 \frac{B_{22} A_{66} D_4}{A_{55}} \partial_2^2 F + k_1 B_{22} A_{66} (q_3 \partial_2^2 + q_4 \partial_1^2) \partial_1^2 \partial_2^2 F,$$

где

$$D_4 = \partial_2^4 + 2q_0 \partial_2^2 \partial_1^2 + q_2 \partial_1^4, \quad P_4 = \partial_2^4 + 2q_1 \partial_2^2 \partial_1^2 + q_2 \partial_1^4, \quad L_2 = \partial_2^2 + q_5 \partial_1^2,$$

$$\lambda^2 = A_{55} k_0 / (A_{66} k_2), \quad q_0 = (B_{11} - B_{12} q_1) / (2A_{66}), \quad q_1 = D_{12} / B_{22}, \quad q_2 = B_{11} / B_{22},$$

$$q_3 = (A_{32}q_1 - A_{31})/(A_{33}A_{66}), \quad q_4 = (A_{32}q_2 - A_{31}q_1)/(A_{33}A_{66}), \quad q_5 = A_{55}/A_{44}.$$

Представления для перемещений и напряжений можно записать через произвольную функцию $\Phi(x, y) = B_{22}A_{66}\partial_1\partial_2 F$

$$u_1 = -\frac{p_1}{A_{66}} (\partial_2^2 + q_1\partial_1^2) \partial_2\Phi, \quad u_2 = \frac{p_1}{A_{66}} (q_1\partial_2^2 + q_2\partial_1^2) \partial_1\Phi,$$

$$u_3 = \frac{k_0}{A_{66}} (\partial_2^2 + q_1\partial_1^2) \frac{\partial_2}{\partial_1}\Phi - \frac{k_2D_4}{A_{55}} \frac{\partial_2}{\partial_1}\Phi + (k_1 - p_2) (q_3\partial_2^2 + q_4\partial_1^2) \partial_1\partial_2\Phi; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -2p_1 (q_0\partial_2^2 + q_2\partial_1^2) \partial_1\partial_2\Phi, & \sigma_2 &= 2p_1 (\partial_2^2 + q_0\partial_1^2) \partial_1\partial_2\Phi, \\ \sigma_6 &= p_1 (-\partial_2^4 + q_2\partial_1^4) \Phi, & \sigma_5 &= -P_2(z)D_4\partial_2\Phi, & \sigma_4 &= P_2(z)D_4\partial_1\Phi; \end{aligned} \quad (9)$$

$$(D_4L_2 - \lambda^2P_4) \Phi = 0. \quad (10)$$

Решение задачи изгиба приведено к нахождению функции $\Phi(x, y)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению шестого порядка (10) и граничным условиям на боковой поверхности плиты. Методика разделения уравнения шестого порядка (10) на два уравнения четвертого и второго порядков, а также решение полученных уравнений с использованием функций обобщенных комплексных переменных, подробно изложено в статье [9]. Там же приводятся граничные условия на боковой поверхности полости для определения функции Φ . Численные исследования проведены для случая цилиндрического изгиба бесконечной плиты, ослабленной эллиптической полостью.

2. Уравнения состояния. Функции ползучести и релаксации. Для определения перемещений, напряжений и деформаций, возникающих в теле при его длительном нагружении внешними усилиями, используются интегральные уравнения состояния, учитывающие свойства материала деформироваться во времени. Эти уравнения можно преобразовать к виду [11]

$$s_m(t) = \bar{A}_{mn}e_n(t) = A_{mn}(1 - r_{mn}^*)e_n, \quad r_{mn}^*e_n = -\int_0^t \frac{dr_{mn}(t-\tau)}{d(t-\tau)} e_n(\tau) d\tau, \quad (11)$$

$$e_m(t) = \bar{a}_{mn}s_n(t) = a_{mn}(1 + p_{mn}^*)s_n, \quad p_{mn}^*s_n = \int_0^t \frac{dp_{mn}(t-\tau)}{d(t-\tau)} s_n(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Здесь $s_m = [s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6] = \mathbf{s}(t)$, $e_n = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6] = \mathbf{e}(t)$ – векторы напряжений и деформаций в произвольный момент времени t ; $A_{mn}r_{mn}(t) = R_{mn}(t) = \mathbf{R}(t)$ и $a_{mn}p_{mn}(t) = P_{mn}(t) = \mathbf{P}(t)$ ($m, n = \overline{1, 6}$) – регулярные части матриц функций релаксации и ползучести. Они характеризуют вязкоупругий материал так же, как их упругие аналоги, матрицы модулей упругости $\mathbf{R}(0) =$

$= \mathbf{A} = A_{mn}$ и коэффициентов деформации $\mathbf{P}(0) = \mathbf{a} = a_{mn}$ – характеризуют свойства упругого материала.

Уравнения состояния (11) и (12) имеют вид уравнений закона Гука с заменой матриц упругих постоянных A_{mn} и a_{mn} операторами \bar{A}_{mn} и \bar{a}_{mn} , которые зависят от времени.

Функции $\mathbf{P}(t) = a_{mn}p_{mn}(t)$ и $\mathbf{R}(t) = A_{mn}r_{mn}(t)$ определяются из эксперимента. Опыты на ползучесть и релаксацию осуществляются при одноосном растяжении, сжатии, изгибе или сдвиге. Они являются базовыми экспериментами, которые необходимы для определения ядер ползучести и релаксации. В одномерном случае при одноосном усилии матричное уравнение распадается на отдельные уравнения для $p_{mn}(t)$ и $r_{mn}(t)$. В задачу эксперимента входит определение этих элементов.

Как правило, экспериментально найденные данные задаются таблично, дискретным набором значений, соответствующим некоторым фиксированным моментам времени. При использовании таких данных в вычислениях, для обеспечения точности расчетов необходимо осуществить математическую обработку табличных данных. Такая обработка включает в себя сглаживание кривых ползучести или релаксации путем увеличения числа точек разбиения временного отрезка $[0, t]$. Эти вопросы рассмотрены в работе [12].

Связь между матрицами $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{R}(t)$ установлена в работах [13, 14]. Имеют место соотношения

$$\mathbf{R}_k = \left(\mathbf{I} - \sum_{i=1}^k \mathbf{R}_{k-i} (\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}) \right) \mathbf{A} \quad (k = 0, 1, \dots, N); \quad (13)$$

$$\mathbf{P}_k = \left(\mathbf{I} - \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_{k-i} (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i-1}) \right) \mathbf{a} \quad (k = 0, 1, \dots, N). \quad (14)$$

В представлениях (13) и (14) принято: \mathbf{I} – единичная матрица, $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}(t_i)$, $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}(t_i)$, $\mathbf{P}_{k-i} = \mathbf{P}(t_k - t_i)$, $\mathbf{R}_{k-i} = \mathbf{R}(t_k - t_i)$ – значения функций ползучести и релаксации в соответствующие моменты времени.

С помощью представлений (13) по экспериментально полученным значениям функции ползучести в точках сетки находятся функции релаксации, а с помощью (14) – функции ползучести.

Опытные данные по ползучести и релаксации, которые позволили бы определить все элементы матриц, входящие в соотношения для $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{R}(t)$, в литературе отсутствуют. Поэтому, для уменьшения числа параметров, определяемых из экспериментов, при решении конкретных задач применяются различные допущения относительно реологического поведения материала. Симметрия матриц $\mathbf{P}_k(t)$ и $\mathbf{R}_k(t)$ показывает, что должны выполняться равенства $P_{ij} = P_{ji}$, $R_{ij} = R_{ji}$.

Исходя из общепринятой гипотезы об упруго сжимаемом материале, считается, что неизменяющимся во времени является модуль объемной деформации

тела K , определяемый равенством

$$\frac{1}{K} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + 2a_{12} + 2a_{13} + 2a_{23},$$

или

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{2\nu_{23}}{E_2} - \frac{2\nu_{31}}{E_3}. \quad (15)$$

Определение значений результатов воздействия интегральных операторов \bar{a}_{mn} или \bar{A}_{mn} , входящих в уравнения состояния для случая изгиба ортотропной плиты, целесообразно реализовать с использованием элементов матрицы a_{mn} для ортотропного материала с отличными от нуля элементами

$$\begin{aligned} a_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad a_{33} = \frac{1}{E_3}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad a_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}, \\ a_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}, \quad a_{44} = \frac{1}{G_{23}}, \quad a_{55} = \frac{1}{G_{13}}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_{12}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Как правило, из экспериментов на ползучесть или релаксацию определяются операторы для технических упругих постоянных. С использованием элементов матрицы упругих постоянных a_{mn} формируется матрица интегральных операторов \bar{a}_{mn} . Для этого осуществляется замена модулей Юнга E_i , коэффициентов Пуассона ν_{ij} , модулей сдвига G_{ij} , входящих в соотношения (16), линейными интегральными операторами $\bar{E}_i, \bar{\nu}_{ij}, \bar{G}_{ij}$.

Элементы обратной матрицы \bar{A}_{ij} более сложным образом зависят от технических упругих постоянных. Поэтому для определения элементов матрицы можно воспользоваться соотношениями (13).

В работе [15] приведены результаты экспериментов на ползучесть ортотропного вязкоупругого полимерного композита с эпоксидным связующим. Элементы вязкоупругой матрицы $1/\bar{E}_1, 1/\bar{E}_2$ и $1/\bar{G}_{12}$ аппроксимировались с помощью операторов

$$\frac{1}{\bar{E}_i} = \frac{1}{E_i} [1 + \lambda_i \mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta_i)], \quad \frac{1}{\bar{G}_{12}} = \frac{1}{G_{12}} [1 + \lambda_6 \mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta_6)]. \quad (17)$$

где интегральные операторы $\mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta_i)$ содержат ядро Ю.Н. Работнова.

Упругие и реологические характеристики указанного материала следующие

$$\begin{aligned} E_1 = 23,0 \text{ ГПа}, \quad \lambda_1 = 0.0323 c^{-(1+\alpha)}, \\ \beta_1 = 0.1570 c^{-(1+\alpha)}, \quad \nu_{12} = 0.11, \\ E_2 = 16,0 \text{ ГПа}, \quad \lambda_2 = 0.1275 c^{-(1+\alpha)}, \\ \beta_2 = 0.2745 c^{-(1+\alpha)}, \quad \nu_{21} = 0.0756, \\ G_{12} = 3,08 \text{ ГПа}, \quad \lambda_6 = 0.0717 c^{-(1+\alpha)}, \\ \beta_6 = 0.0276 c^{-(1+\alpha)}, \quad \alpha = -0.846. \end{aligned} \quad (18)$$

В связи с отсутствием в справочной литературе для данного материала значений модуля Юнга E_3 , коэффициентов Пуассона ν_{31} и ν_{32} , модулей сдвига G_{13} и G_{23} , а также их реологических констант, можно считать их постоянными величинами и положить равными

$$E_3 = (E_1 + E_2)/2, \quad \nu_{31}/E_3 = \nu_{32}/E_3, \quad G_{13} = G_{23} = G_{12}. \quad (19)$$

Из принятых допущений, равенства $1/\bar{K} = 1/K$ и с учетом формул (15), (17) записывается формула для вычисления $\bar{\nu}_{12}/\bar{E}_1$

$$\frac{\bar{\nu}_{12}}{\bar{E}_1} = \frac{\nu_{12}}{E_1} \left[1 + \frac{\lambda_1}{2\nu_{12}} \Theta_\alpha^* (-\beta_1) + \frac{E_1 \lambda_2}{2\nu_{12} E_2} \Theta_\alpha^* (-\beta_2) \right].$$

3. Численные исследования. Исследования напряженного состояния были проведены для случаев нагружения бесконечной плиты усилиями $\sigma_1^0 = pz/h$, $\sigma_6^0 = 0$ или $\sigma_2^0 = qz/h$, $\sigma_6^0 = 0$. Круговая полость радиуса a свободна от усилий. В табл. 1 для различных моментов времени приведены значения напряжений $S_\theta = |\sigma_\theta/\sigma_i^0|$ в точках $A(a; 0)$ и $B(0; a)$ при $z = \pm h$. Результаты даны для случая $2h = 0.01a$.

Таблица 1

Нагрузка	Точки	S_θ				
		$t = 0$	$t = 100$ ч	$t = 200$ ч	$t = 300$ ч	$t = 600$ ч
$p = 1, q = 0$	A	0.478	0.426	0.428	0.430	0.433
	B	2.120	2.299	2.310	2.316	2.327
$p = 0, q = 1$	A	1.934	1.994	2.001	2.005	2.012
	B	0.687	0.727	0.734	0.738	0.746

Из таблицы 1 видно, что для изгиба плиты усилиями $\sigma_1^0 = pz/h$ максимальные значения напряжений S_θ возникают в точке B , растут с течением времени и при переходе в стационарное состояние ($t = 600$ ч) увеличиваются на 9.8%. Напряжения в точке A уменьшаются на 9.4%.

Для изгиба усилиями $\sigma_2^0 qz/h$ максимальные напряжения возникают в точке A и при переходе в стационарное состояние увеличиваются на 4%. Напряжения в точке B также увеличиваются на 8.6%. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами, полученными по прикладной теории [4]. Однако, прикладная теория не позволяет сделать выводы о поведении касательных напряжений $\tau_{z\theta}$, которые в некоторых случаях составляют около 40% от максимальных напряжений σ_θ .

В таблице 2 приводятся значения максимальных и минимальных касательных напряжений $S_{z\theta} = |\tau_{z\theta}/P_2|$, возникающих в срединной плоскости плиты.

Как видно, максимальные по модулю касательные напряжения $S_{z\theta}$ для обеих случаев нагружения плиты растут с течением времени и при переходе в стационарное состояние увеличиваются более чем на 20%.

Таблица 2

Нагрузка	Точки	$S_{z\theta}$				
		$t = 0$	$t = 100$ ч	$t = 200$ ч	$t = 300$ ч	$t = 600$ ч
$p = 1, q = 0$	58^0	-0.638	-0.733	-0.746	-0.753	-0.767
	122^0	0.638	0.733	0.746	0.753	0.767
$p = 0, q = 1$	37^0	0.680	0.804	0.817	0.826	0.841
	143^0	-0.680	-0.804	-0.817	-0.826	-0.841

Заключение. При помощи преобразования интегральных уравнений состояния задач вязкоупругости к уравнениям закона Гука с параметрическими зависимостями деформативных характеристик материалов от времени в работе получено решение задачи изгиба вязкоупругих ортотропных плит в уточненной постановке. Для нахождения решения в произвольный момент использована методика разделения уравнения шестого порядка на два уравнения четвертого и второго порядков. Решение полученных уравнений основано на использовании функций обобщенных комплексных переменных, удовлетворяет однородным граничным условиям на плоских гранях плиты и условиям распределения внешних усилий по толщине плиты. Численные исследования проведены для бесконечной плиты, ослабленной круговой полостью.

1. Иванов Г.М. Напряженное состояние изотропной вязкоупругой плиты с отверстиями, подкрепленными жесткими кольцами / Г.М. Иванов, Л.Н. Шкодина // Прикладная механика. – 1975. – Т. 11, № 8. – С. 26–32.
2. Иванов Г.М. Напряженное состояние вязкоупругой плиты с двумя круговыми отверстиями, подкрепленными жесткими кольцами / Г.М. Иванов, Л.Н. Шкодина // Механика твердого тела. – 1975. – Вып. 7. – С. 161–165.
3. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
4. Калоеров С.А. Эффективный метод определения напряженного состояния пластинки с криволинейными отверстиями / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Прикладная механика. – 2017. – Т. 53, № 1. – С. 108–120.
5. Калоеров С.А. Решение задачи линейной вязкоупругости для многосвязных анизотропных плит / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Прикладная механика и техническая физика. – 2017. – Т. 58, № 2. – С. 141–151.
6. Калоеров С.А. Решение задачи линейной вязкоупругости для кусочно-однородных анизотропных плит / С.А. Калоеров, А.А. Кошкин // Прикладная механика. – 2017. – Т. 53, № 6. – С. 92–107.
7. Нескородев Р.Н. Метод переменных коэффициентов упругости решения задач изгиба вязкоупругих изотропных плит в уточненной постановке / Р.Н. Нескородев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017. – № 1 (58). – С. 42–56.
8. Нескородев Р.Н. Изгиб трансверсально-изотропных вязкоупругих плит в уточненной постановке / Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2017. – № 1. – С. 26–35.
9. Нескородев Р.Н. Решение задачи изгиба ортотропной плиты в уточненной постановке / Р.Н. Нескородев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017. – № 3-4 (60-61). – С. 60–68.
10. Васильев В.В. Классическая теория пластин - история и современный анализ / В.В. Васильев // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 3. – С. 46–58.

11. Нескородев Р.Н. Метод переменных коэффициентов упругости решения задач вязкоупругости / Р.Н. Нескородев // Труды ИПММ МОН ДНР. – 2015. – Том 29. – С. 114–126.
12. Шевченко В.П. Численно-аналитический метод решения задач линейной вязкоупругости / Шевченко В.П., Нескородев Р.Н. // Прикладная механика. – 2014. – Т. 50, № 3. – С. 42–53.
13. Нескородев Р.Н. О новом численно-аналитическом методе решения задач теории вязкоупругости анизотропных сред / Р.Н. Нескородев // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А, Природ. науки. – 2009. – Вип. 2. – С. 7–15.
14. Шевченко В.П. Новый метод решения задач теории вязкоупругости анизотропных сред / В.П. Шевченко, Р.Н. Нескородев // Доповіді НАН України. – 2010, № 11. – С. 52–58.
15. Каминский А.А. Неклассические проблемы механики разрушения (в 4 т.). Т. 3. Длительное разрушение полимерных и композиционных материалов с трещинами / А.А. Каминский, Д.А. Гаврилов. – К.: Наук. думка, 1992. – 248 с.

R.N. Neskoro dev

Investigation of bending problems for orthotropic viscoelastic plates in the improved theory.

The paper proposes a technique for the numerical-analytical solution of the problem of bending of viscoelastic orthotropic plates in the improved theory. The effects of viscoelasticity are taken into account using the method of transforming the integral equations of state to the equations of Hooke's law with parametric dependences of the deformative characteristics of materials on time. As an example, the stress state of an infinite plate weakened by an circular cavity is considered.

Keywords: *bending, orthotropic plate, viscoelasticity, improved theory, elliptical cavity.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
r.neskorodiev@donnu.ru

Получено 20.12.2020

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 519:539.3:534.1

©2020. В.Н. Павлыш, С.В. Сторожев, С.Б. Номбре

НЕЧЕТКИЕ ОЦЕНКИ В МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАГНИТОУПРУГИХ ВОЛН

Излагается численно-аналитическая нечетко-множественная методика учета факторов неопределенности экзогенных физико-механических характеристик при исследовании модели распространения связанных объемных магнитоупругих волн с плоским фронтом в изотропной среде, обладающей конечной электрической проводимостью. Представляемый подход основывается на задании исходных параметров с разбросами экспериментальных значений в виде величин нечетко-множественного типа и последующем применении процедуры перехода на базе применения альфа-уровневой модифицированной формы эвристического принципа расширения к нечетко-множественным аргументам в аналитических соотношениях детерминистической версии рассматриваемой линеаризованной модели динамического деформирования магнитоупругой среды в начальном магнитном поле с учетом сил Лоренца. Описываются результаты вычислительных экспериментов по реализации построенной методики, в частности расчетов нечетко-множественных оценок неопределенности для параметров фазовых скоростей магнитоупругих волн при различных вариантах задания составляющих начального магнитного поля.

Ключевые слова: изотропные электропроводящие среды, объемные магнитоупругие волны, начальное магнитное поле, линеаризованная модель, анализ фазовых скоростей, разбросы исходных параметров, учет факторов неопределенности, нечетко-множественный подход, эвристический принцип расширения.

Введение и цели исследования. Анализ эффектов волнового магнитоупругого деформирования является элементом предпроектного расчетного моделирования для целого ряда технических устройств и приборов широкого спектра назначения, компонентов радиотехнической аппаратуры [1 – 5]. При этом практическая значимость получаемых результатов моделирования в самой существенной мере зависит от возможностей учета в расчетных алгоритмах реальных факторов неопределенности при задании исходных параметров, в первую очередь разбросов в экспериментальных данных об их возможных значениях [6, 7], а также величин технологических допусков в предлагаемых конструктивных схемах. Наряду с применением для решения этой задачи методов вероятностного стохастического анализа [8, 9], учет факторов неопределенности экзогенных физико-механических характеристик при исследовании модели распространения связанных магнитоупругих волн может быть осуществлен на базе

методов теории нечетких множеств [10 – 15], опыт использования которых применительно к моделям распространения электроупругих волн в пьезоэлектрических материалах представлен в работах [16 – 19]. Особое значение применение нечетко-множественного подхода имеет в случаях, когда исходная информация о подлежащих учету разбросах не носит строго обоснованного статистического характера, в том числе, получена на базе экспертных заключений [20].

Таким образом, целью настоящей работы является синтез методики формирования нечетко-множественных оценок для фазовых скоростей распространения связанных объемных магнитоупругих волн с плоским фронтом в обладающей конечной электрической проводимостью изотропной среде, получаемых с использованием линеаризованной модели динамического деформирования рассматриваемой среды в начальном магнитном поле с учетом сил Лоренца в рамках гипотезы об учете факторов неопределенности в виде разбросов значений исходных физико-механических параметров.

Основой разрабатываемого подхода является использование модифицированной α – уровневой версии эвристического принципа расширения [10 – 20] в процессе перехода к нечетко-множественным аргументам в получаемых в рамках детерминистической версии соответствующей модели функциональных представлений для исследуемых фазовых скоростей и параметров энергетического рассеяния исследуемых волн.

1. Соотношения детерминистической версии модели распространения объемных магнитоупругих волн в изотропной среде с конечной электрической проводимостью. Соотношения рассматриваемой модели [2] формулируются для случая занимающей неограниченный объем в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$ электропроводящей изотропной деформируемой среды с описываемым вектором напряженности $\vec{H}_0 = (H_{01}, H_{02}, H_{03})$ наведенным начальным магнитным полем. Характеристиками связанного стационарного динамического деформирования с циклической частотой ω в рассматриваемом случае являются векторные функции волновых упругих перемещений

$$\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t) = (u_1(x_1, x_2, x_3), u_2(x_1, x_2, x_3), u_3(x_1, x_2, x_3)) \exp(-i\omega t); \quad (1)$$

векторные функции напряженности электрического $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ и магнитного $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3)$ полей

$$\begin{aligned} \vec{E}(x_1, x_2, x_3, t) &= (E_1(x_1, x_2, x_3), E_2(x_1, x_2, x_3), E_3(x_1, x_2, x_3)) \exp(-i\omega t), \\ \vec{H}(x_1, x_2, x_3, t) &= (H_1(x_1, x_2, x_3), H_2(x_1, x_2, x_3), H_3(x_1, x_2, x_3)) \exp(-i\omega t); \end{aligned} \quad (2)$$

векторные функции индукции электрического $\vec{D} = (D_1, D_2, D_3)$ и магнитного $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ полей

$$\begin{aligned} \vec{D}(x_1, x_2, x_3, t) &= (D_1(x_1, x_2, x_3), D_2(x_1, x_2, x_3), D_3(x_1, x_2, x_3)) \exp(-i\omega t), \\ \vec{B}(x_1, x_2, x_3, t) &= (B_1(x_1, x_2, x_3), B_2(x_1, x_2, x_3), B_3(x_1, x_2, x_3)) \exp(-i\omega t); \end{aligned} \quad (3)$$

векторная функция электрического тока проводимости $\vec{j} = (j_1, j_2, j_3)$

$$\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t) = (u_1(x_1, x_2, x_3), u_2(x_1, x_2, x_3), u_3(x_1, x_2, x_3)) \exp(-i\omega t), \quad (4)$$

удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} G\Delta\vec{u} + (\lambda + G)\text{grad div } \vec{u} + (\vec{j} \times \vec{B}) = \rho(\partial^2 u / \partial t^2) = 0, \\ \text{rot } \vec{E} = -(\partial B / \partial t), \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j}, \quad \text{div } \vec{D} = 0, \quad \text{div } \vec{B} = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

уравнениям состояния

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}; \quad (6)$$

и уравнению закона Ома

$$\vec{j} = \sigma[\vec{E} + \partial\vec{u}/\partial t \times \vec{B}]. \quad (7)$$

Физико-механическими параметрами рассматриваемого волнового процесса являются постоянная Ламе λ , модуль сдвига G и плотность ρ рассматриваемой изотропной среды; магнитная μ_0 и диэлектрическая ε_0 проницаемости, а также удельная электрическая проводимость σ материала.

Анализ соотношений представленной модели для случая распространения объемных магнитоупругих волн с плоским фронтом вдоль координатного направления Ox_1 реализован в работе [2] и приводит к нелинейной системе дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{1}{2} \mu_0 (H_2^2 + H_3^2) \right] = 0, \\ G \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \mu_0 H_{10} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} = 0, \\ G \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \mu_0 H_{10} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_2}{\partial t} = \nu_H \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(H_2 \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + H_{10} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial t}, \\ \frac{\partial H_3}{\partial t} = \nu_H \frac{\partial^2 H_3}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(H_3 \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + H_{10} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial t}, \end{aligned}$$

где $\nu_H = \mu_0 / \sigma$ – параметр магнитной вязкости.

Дальнейшее исследование реализуется с использованием приема линеаризации (8), в рамках которого вводятся функции h_q малых возмущений начального магнитного поля

$$H_2 = H_{20} + h_2, \quad H_3 = H_{30} + h_3,$$

и (8) приводится к виду [2]

$$\begin{aligned}
 (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \mu_0 H_{20} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \mu_0 H_{30} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} &= 0, \\
 G \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \mu_0 H_{10} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} &= 0, \\
 G \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \mu_0 H_{10} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} &= 0, \\
 \frac{\partial h_2}{\partial t} = \nu_H \frac{\partial^2 h_2}{\partial x_1^2} - H_{20} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial t} + H_{10} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial t}, \\
 \frac{\partial h_3}{\partial t} = \nu_H \frac{\partial^2 h_3}{\partial x_1^2} - H_{30} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial t} + H_{10} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial t}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

С введением представлений

$$\vec{j} = \sigma [\vec{E} + \partial \vec{u} / \partial t \times \vec{B}]. \tag{10}$$

для комплексных амплитудных функций исследуемых волновых движений из соотношений (9) следует система однородных алгебраических уравнений, равенство нулю определителя которой является дисперсионным уравнением для исследуемых магнитоупругих волн.

Рассматриваемые далее представления для фазовых скоростей параметров дисперсионного рассеяния относятся к анализируемым частным случаям задания параметров наведенного начального магнитного поля и электрической проводимости среды.

Так, в случае нулевого значения составляющей начального поля H_{10} анализируемые волны с компонентами смещений u_2, u_3 являются несвязанными сдвиговыми упругими волнами в изотропной среде; связанные волны с характеристиками u_1, h_2, h_3 характеризуются фазовыми скоростями $V_{f1}^{(p)}$ и параметрами рассеяния $D_{f1}^{(p)}$. Выражения для $V_{f1}^{(p)}, D_{f1}^{(p)}$ имеют форму

$$\begin{aligned}
 V_{f1}^{(p)} &= \omega / F_{1p}^{(R)}(\omega, \lambda, G, \rho, \mu_0, \sigma, H_{20}, H_{30}), \\
 D_{f1}^{(p)} &= F_{1p}^{(I)}(\omega, \lambda, G, \rho, \mu_0, \sigma, H_{20}, H_{30}),
 \end{aligned} \tag{11}$$

где $F_{1p}^{(R)} = \text{Re } k_{1p}(\omega, \lambda, G, \rho, \mu_0, \sigma, H_{20}, H_{30})$, $F_{1p}^{(I)} = \text{Im } k_{1p}(\omega, \lambda, G, \rho, \mu_0, \sigma, H_{20}, H_{30})$; величины k_{1p} ($\text{Re } k_{1p} > 0$) описываются представлениями

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= (i\omega / \nu_H)^{1/2}, \\
 k_{1p} &= ((-\Delta_{12} + (-1)^p (\Delta_{12}^2 - 4\Delta_{11}\Delta_{13})) / (2\Delta_{11}))^{1/2} \quad (p = \overline{2, 3}), \\
 \Delta_{11} &= (\lambda + 2G)\nu_H, \\
 \Delta_{12} &= -(\rho\omega^2\nu_H + i\omega((\lambda + 2G) + \mu_0(H_{20}^2 + H_{30}^2))), \quad \Delta_{13} = i\rho\omega^3.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Во втором частном случае при условии $H_{20} = H_{30} = 0$ волна с колебательными смещениями u_1 является несвязанной, а волны со связанными характеристиками u_2, u_3, h_2, h_3 имеют фазовые скорости $V_{f2}^{(p)}$ и параметры рассеяния $D_{f2}^{(p)}$, описываемые выражениями

$$\begin{aligned} V_{f2}^{(p)} &= \omega / F_{2p}^{(R)}(\omega, \lambda, G, \rho, \mu_0, \sigma, H_{10}), & D_{f2}^{(p)} &= F_{2p}^{(I)}(\omega, \lambda, G, \rho, \mu_0, \sigma, H_{10}), \\ F_{2p}^{(R)} &= \text{Re } k_{2p}(\omega, \lambda, G, \rho, \mu_0, \sigma, H_{10}), & F_{2p}^{(I)} &= \text{Im } k_{2p}(\omega, \lambda, G, \rho, \mu_0, \sigma, H_{10}), \end{aligned} \quad (13)$$

в которых k_{2p} ($\text{Re}k_{2p} > 0$) – корни полиномиального уравнения

$$\begin{aligned} \Delta_{21}k_2^8 + \Delta_{22}k_2^6 + \Delta_{23}k_2^4 + \Delta_{24}k_2^2 + \Delta_{25} &= 0, \\ \Delta_{21} &= G^2v_H^2, & \Delta_{22} &= -2\omega v_H(iG^2 + \rho\omega v_H), \\ \Delta_{23} &= \mu_0^2\omega^2H_{01}^4 + \rho^2\omega^4v_H^2 - G^2\omega^2 + 4i\rho\omega^3v_HG, \\ \Delta_{24} &= 2\rho\omega^4(G - i\rho\omega v_H), & \Delta_{25} &= -\rho^2\omega^6. \end{aligned} \quad (14)$$

Еще два анализируемых варианта описания фазовых скоростей и параметров рассеяния отвечают случаю среды с идеальной проводимостью $\sigma \rightarrow \infty$, для которой, соответственно, $v_H = 0$. Для такой среды в случае $H_{10} = 0$ волны с характеристиками u_2, u_3 являются несвязанными упругими волнами сдвигового типа, а волна с колебательными смещениями u_1 является связанной незатухающей и имеет фазовую скорость вида

$$V_{f3} = ((\lambda + 2G + \mu_0(H_{20}^2 + H_{30}^2))/\rho)^{1/2}. \quad (15)$$

В случае $H_{20} = H_{30} = 0$ волна с колебательными смещениями u_1 является продольной несвязанной и незатухающей, а волны с характеристиками u_2, u_3 являются связанными незатухающими и имеют фазовые скорости вида

$$V_{f4} = ((G + \mu_0H_{10}^2)/\rho)^{1/2}. \quad (16)$$

При условии $H_{10} \neq 0, H_{20} \neq 0, H_{30} \neq 0$ исследуемые волны являются связанными трехпарциальными незатухающими волнами, а их фазовые скорости $V_{f5}^{(p)}$ имеют представления

$$V_{f5}^{(p)} = k_{5p}^{-1}(\lambda, G, \rho, \mu_0, H_{10}, H_{20}, H_{30}), \quad (17)$$

в которых k_{5p} ($\text{Re}k_{5p} > 0$) описываются соотношениями вида

$$\begin{aligned} k_{51} &= (\rho/(G + \mu_0H_{10}^2))^{1/2}, \\ k_{5p} &= ((-\Delta_{52} + (-1)^p(\Delta_{52}^2 - 4\Delta_{51}\Delta_{53}))/(\Delta_{51}))^{1/2} \quad (p = \overline{2, 3}), \\ \Delta_{51} &= (\lambda + 2G + \mu_0(H_{20}^2 + H_{30}^2))(G + \mu_0H_{10}^2) + \mu_0^2H_{10}^2(H_{20}^2 + H_{30}^2), \\ \Delta_{52} &= -\rho(\lambda + 3G + \mu_0(H_{10}^2 + H_{20}^2 + H_{30}^2)), & \Delta_{53} &= \rho^2. \end{aligned} \quad (18)$$

2. Нечетко-множественные оценки для параметрических частотных распределений фазовых скоростей и параметров затухания магнитоупругих волн. Получение нечетко-множественных описаний для параметрических частотных распределений фазовых скоростей и показателей затухания объемных магнитоупругих волн рассматриваемого типа в изотропной электропроводной деформируемой среде реализуется путем фазсификации исходных физико-механических параметров с оговоренными разбросами экспериментальных значений и технологическими допусками и последующего применения алгоритмов перехода к нечетко-множественным аргументам в аналитических соотношениях детерминистической версии рассматриваемой линеаризованной модели динамического деформирования магнитоупругой среды в начальном магнитном поле на базе применения модифицированной альфа-уровневой формы эвристического принципа расширения.

В рамках гипотезы об эффективном описании неопределенных обладающих разбросами экзогенных параметров $\lambda, G, \rho, \mu_0, \sigma, H_{10}, H_{20}, H_{30}$ нормальными трапецеидальными нечеткими интервалами $\tilde{\lambda}, \tilde{G}, \tilde{\rho}, \tilde{\mu}_0, \tilde{\sigma}, \tilde{H}_{10}, \tilde{H}_{20}, \tilde{H}_{30}$ водятся их представления кортежами значений границ носителей и модальных значений [21, 22]

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda} &= (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), & \tilde{G} &= (G_1, G_2, G_3, G_4), \\ \tilde{\rho} &= (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4), \\ \tilde{\mu}_0 &= (\mu_{01}, \mu_{02}, \mu_{03}, \mu_{04}), & \tilde{\sigma} &= (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4), \\ \tilde{H}_{10} &= (H_{101}, H_{102}, H_{103}, H_{104}), \\ \tilde{H}_{20} &= (H_{201}, H_{202}, H_{203}, H_{204}), & \tilde{H}_{30} &= (H_{301}, H_{302}, H_{303}, H_{304}).\end{aligned}\tag{19}$$

В свою очередь, введенные интервалы представляются в форме суперпозиций по альфа-срезам

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha], & \tilde{G} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{G}_\alpha, \overline{G}_\alpha], \\ \tilde{\rho} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_\alpha, \overline{\rho}_\alpha], & \tilde{\mu}_0 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mu}_{0\alpha}, \overline{\mu}_{0\alpha}], \\ \tilde{\sigma} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_\alpha, \overline{\sigma}_\alpha], & \tilde{H}_{10} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{H}_{10\alpha}, \overline{H}_{10\alpha}], \\ \tilde{H}_{20} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{H}_{20\alpha}, \overline{H}_{20\alpha}], & \tilde{H}_{30} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{H}_{30\alpha}, \overline{H}_{30\alpha}].\end{aligned}\tag{20}$$

где

$$\begin{aligned}
 \underline{\lambda}_\alpha &= (1 - \alpha)\lambda_1 + \alpha\lambda_2, & \bar{\lambda}_\alpha &= \alpha\lambda_3 + (1 - \alpha)\lambda_4; \\
 \underline{G}_\alpha &= (1 - \alpha)G_1 + \alpha G_2, & \bar{G}_\alpha &= \alpha G_3 + (1 - \alpha)G_4; \\
 \underline{\rho}_\alpha &= (1 - \alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2, & \bar{\rho}_\alpha &= \alpha\rho_3 + (1 - \alpha)\rho_4; \\
 \underline{\mu}_{0\alpha} &= (1 - \alpha)\mu_{01} + \alpha\mu_{02}, & \bar{\mu}_{0\alpha} &= \alpha\mu_{03} + (1 - \alpha)\mu_{04}; \\
 \underline{\sigma}_\alpha &= (1 - \alpha)\sigma_1 + \alpha\sigma_2, & \bar{\sigma}_\alpha &= \alpha\sigma_3 + (1 - \alpha)\sigma_4; \\
 \underline{H}_{10\alpha} &= (1 - \alpha)H_{101} + \alpha H_{102}, & \bar{H}_{10\alpha} &= \alpha H_{103} + (1 - \alpha)H_{104}; \\
 \underline{H}_{20\alpha} &= (1 - \alpha)H_{201} + \alpha H_{202}, & \bar{H}_{20\alpha} &= \alpha H_{203} + (1 - \alpha)H_{204}; \\
 \underline{H}_{30\alpha} &= (1 - \alpha)H_{301} + \alpha H_{302}, & \bar{H}_{30\alpha} &= \alpha H_{303} + (1 - \alpha)H_{304}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

С учетом представлений (19) – (21) получаемые на основе применения α – уровневой формы эвристического принципа расширения [10 – 20] нечетко-множественные описания для задаваемых соотношениями (11), (13) эндогенных параметров рассматриваемых версий модели распространения объемных магнитоупругих волн могут быть соответственно записаны в виде:

$$\tilde{V}_{f1}^{(p)}(\omega) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [V_{f1\alpha}^{(p)}(\omega), \bar{V}_{f1\alpha}^{(p)}(\omega)], \tag{22}$$

$$\tilde{D}_{f1}^{(p)}(\omega) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [D_{f1\alpha}^{(p)}(\omega), \bar{D}_{f1\alpha}^{(p)}(\omega)], \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned}
 \underline{V}_{f1\alpha}^{(p)}(\omega) &= \inf_{\substack{\lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha] \\ G \in [\underline{G}_\alpha, \bar{G}_\alpha] \\ \rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha] \\ \mu_0 \in [\underline{\mu}_{0\alpha}, \bar{\mu}_{0\alpha}] \\ \sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \bar{\sigma}_\alpha] \\ H_{20} \in [\underline{H}_{20\alpha}, \bar{H}_{20\alpha}] \\ H_{30} \in [\underline{H}_{30\alpha}, \bar{H}_{30\alpha}]} \{\omega / F_{1p}^{(R)}(\omega, \lambda, G, \rho, \mu_0, \sigma, H_{20}, H_{30})\}, \\
 \bar{V}_{f1\alpha}^{(p)}(\omega) &= \sup_{\substack{\lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha] \\ G \in [\underline{G}_\alpha, \bar{G}_\alpha] \\ \rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha] \\ \mu_0 \in [\underline{\mu}_{0\alpha}, \bar{\mu}_{0\alpha}] \\ \sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \bar{\sigma}_\alpha] \\ H_{20} \in [\underline{H}_{20\alpha}, \bar{H}_{20\alpha}] \\ H_{30} \in [\underline{H}_{30\alpha}, \bar{H}_{30\alpha}]} \{\omega / F_{1p}^{(R)}(\omega, \lambda, G, \rho, \mu_0, \sigma, H_{20}, H_{30})\},
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\underline{D}_{f1\alpha}^{(p)}(\omega) = \inf_{\substack{\lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha] \\ G \in [\underline{G}_\alpha, \bar{G}_\alpha] \\ \rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha] \\ \mu_0 \in [\underline{\mu}_{0\alpha}, \bar{\mu}_{0\alpha}] \\ \sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \bar{\sigma}_\alpha] \\ H_{20} \in [\underline{H}_{20\alpha}, \bar{H}_{20\alpha}] \\ H_{30} \in [\underline{H}_{30\alpha}, \bar{H}_{30\alpha}]}} \{F_{1p}^{(I)}(\omega, \lambda, G, \rho, \mu_0, \sigma, H_{20}, H_{30})\}, \quad (25)$$

$$\overline{D}_{f1\alpha}^{(p)}(\omega) = \sup_{\substack{\lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha] \\ G \in [\underline{G}_\alpha, \bar{G}_\alpha] \\ \rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha] \\ \mu_0 \in [\underline{\mu}_{0\alpha}, \bar{\mu}_{0\alpha}] \\ \sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \bar{\sigma}_\alpha] \\ H_{20} \in [\underline{H}_{20\alpha}, \bar{H}_{20\alpha}] \\ H_{30} \in [\underline{H}_{30\alpha}, \bar{H}_{30\alpha}]}} \{F_{1p}^{(I)}(\omega, \lambda, G, \rho, \mu_0, \sigma, H_{20}, H_{30})\};$$

$$\tilde{V}_{f2}^{(p)}(\omega) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [V_{f2\alpha}^{(p)}(\omega), \bar{V}_{f2\alpha}^{(p)}(\omega)], \quad (26)$$

$$\tilde{D}_{f2}^{(p)}(\omega) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [D_{f2\alpha}^{(p)}(\omega), \bar{D}_{f2\alpha}^{(p)}(\omega)], \quad (27)$$

где

$$\underline{V}_{f2\alpha}^{(p)}(\omega) = \inf_{\substack{\lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha] \\ G \in [\underline{G}_\alpha, \bar{G}_\alpha] \\ \rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha] \\ \mu_0 \in [\underline{\mu}_{0\alpha}, \bar{\mu}_{0\alpha}] \\ \sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \bar{\sigma}_\alpha] \\ H_{10} \in [\underline{H}_{10\alpha}, \bar{H}_{10\alpha}]}} \{\omega / F_{2p}^{(R)}(\omega, \lambda, G, \rho, \mu_0, \sigma, H_{10})\}, \quad (28)$$

$$\overline{V}_{f2\alpha}^{(p)}(\omega) = \sup_{\substack{\lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha] \\ G \in [\underline{G}_\alpha, \bar{G}_\alpha] \\ \rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha] \\ \mu_0 \in [\underline{\mu}_{0\alpha}, \bar{\mu}_{0\alpha}] \\ \sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \bar{\sigma}_\alpha] \\ H_{10} \in [\underline{H}_{10\alpha}, \bar{H}_{10\alpha}]}} \{\omega / F_{2p}^{(R)}(\omega, \lambda, G, \rho, \mu_0, \sigma, H_{10})\},$$

$$\begin{aligned}
 \underline{D}_{f2\alpha}^{(p)}(\omega) &= \inf_{\substack{\lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha] \\ G \in [\underline{G}_\alpha, \bar{G}_\alpha] \\ \rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha] \\ \mu_0 \in [\underline{\mu}_{0\alpha}, \bar{\mu}_{0\alpha}] \\ \sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \bar{\sigma}_\alpha] \\ H_{10} \in [\underline{H}_{10\alpha}, \bar{H}_{10\alpha}]}} \{F_{2p}^{(I)}(\omega, \lambda, G, \rho, \mu_0, \sigma, H_{10})\}, \\
 \overline{D}_{f2\alpha}^{(p)}(\omega) &= \sup_{\substack{\lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha] \\ G \in [\underline{G}_\alpha, \bar{G}_\alpha] \\ \rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha] \\ \mu_0 \in [\underline{\mu}_{0\alpha}, \bar{\mu}_{0\alpha}] \\ \sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \bar{\sigma}_\alpha] \\ H_{10} \in [\underline{H}_{10\alpha}, \bar{H}_{10\alpha}]}} \{F_{2p}^{(I)}(\omega, \lambda, G, \rho, \mu_0, \sigma, H_{10})\}.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Нечетко-множественные описания для эндогенных параметров рассматриваемых моделей, задаваемых соотношениями (15), (16), с учетом свойств

$$\begin{aligned}
 \partial V_{f3}/\partial \lambda > 0, \quad \partial V_{f3}/\partial G > 0, \quad \partial V_{f3}/\partial \mu_0 > 0, \\
 \partial V_{f3}/\partial H_{20} > 0, \quad \partial V_{f3}/\partial H_{30} > 0, \quad \partial V_{f3}/\partial \rho < 0;
 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\partial V_{f3}/\partial G > 0, \quad \partial V_{f3}/\partial \mu_0 > 0, \quad \partial V_{f3}/\partial H_{10} > 0, \quad \partial V_{f3}/\partial \rho < 0; \tag{31}$$

соответственно могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}_{f3} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{V}_{f3\alpha}, \overline{V}_{f3\alpha}], \\
 \underline{V}_{f3\alpha} &= ((\underline{\lambda}_\alpha + 2\underline{G}_\alpha + \underline{\mu}_{0\alpha}(\underline{H}_{20\alpha}^2 + \underline{H}_{30\alpha}^2))/\bar{\rho}_\alpha)^{1/2}, \\
 \overline{V}_{f3\alpha} &= ((\bar{\lambda}_\alpha + 2\bar{G}_\alpha + \bar{\mu}_{0\alpha}(\bar{H}_{20\alpha}^2 + \bar{H}_{30\alpha}^2))/\underline{\rho}_\alpha)^{1/2};
 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}_{f4} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{V}_{f4\alpha}, \overline{V}_{f4\alpha}], \\
 \underline{V}_{f4\alpha} &= ((\underline{G}_\alpha + \underline{\mu}_{0\alpha}\underline{H}_{10\alpha}^2)/\bar{\rho}_\alpha)^{1/2}, \\
 \overline{V}_{f4\alpha} &= ((\bar{G}_\alpha + \bar{\mu}_{0\alpha}\bar{H}_{10\alpha}^2)/\underline{\rho}_\alpha)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Наконец, для эндогенных параметров $V_{f5}^{(p)}$ ($p = \overline{2,3}$), описываемых соотношениями (17), могут быть записаны нечетко-множественные представления

вида

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}_{f5}^{(p)} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [V_{f5\alpha}^{(p)}, \bar{V}_{f5\alpha}^{(p)}] \quad (p = \overline{2,3}), \\
 \underline{V}_{f5\alpha}^{(p)} &= \inf_{\substack{\lambda \in [\underline{\Delta}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha] \\ G \in [\underline{G}_\alpha, \bar{G}_\alpha] \\ \rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha] \\ \mu_0 \in [\underline{\mu}_{0\alpha}, \bar{\mu}_{0\alpha}] \\ H_{10} \in [\underline{H}_{10\alpha}, \bar{H}_{10\alpha}] \\ H_{20} \in [\underline{H}_{20\alpha}, \bar{H}_{20\alpha}] \\ H_{30} \in [\underline{H}_{30\alpha}, \bar{H}_{30\alpha}]} \{k_{5p}^{-1}(\lambda, G, \rho, \mu_0, H_{10}, H_{20}, H_{30})\}, \\
 \bar{V}_{f5\alpha}^{(p)} &= \sup_{\substack{\lambda \in [\underline{\Delta}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha] \\ G \in [\underline{G}_\alpha, \bar{G}_\alpha] \\ \rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha] \\ \mu_0 \in [\underline{\mu}_{0\alpha}, \bar{\mu}_{0\alpha}] \\ H_{10} \in [\underline{H}_{10\alpha}, \bar{H}_{10\alpha}] \\ H_{20} \in [\underline{H}_{20\alpha}, \bar{H}_{20\alpha}] \\ H_{30} \in [\underline{H}_{30\alpha}, \bar{H}_{30\alpha}]} \{k_{5p}^{-1}(\lambda, G, \rho, \mu_0, H_{10}, H_{20}, H_{30})\},
 \end{aligned} \tag{34}$$

а представление $V_{f5}^{(1)}$ совпадает с выражением для V_{f4} и описывается формулой (34).

3. Результаты численных исследований. Разработанная численно-аналитическая нечетко-множественная методика учета разбросов в значениях неконтрастных экзогенных характеристик при исследовании моделей распространения плоских связанных магнитоупругих волн в изотропной среде с конечной либо идеальной электрической проводимостью реализована применительно к следующему варианту задания кортежей реперных значений для нечетко-интервальных исходных параметров, отвечающему параметрам магнитомягкого сплава 50Н [6, 7]:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\lambda} &= (91.0 c_*, 92.3 c_*, 92.6 c_*, 93.5 c_*), \\
 \tilde{G} &= (60.5 c_*, 61.5 c_*, 62.6 c_*, 63.2 c_*), \\
 \tilde{\rho} &= (8.18 \rho_*, 8.19 \rho_*, 8.20 \rho_*, 8.22 \rho_*), \\
 \tilde{\mu}_0 &= (1790 \mu_*, 1800 \mu_*, 2050 \mu_*, 2300 \mu_*), \\
 \tilde{\sigma} &= (2.08 \sigma_*, 2.17 \sigma_*, 2.22 \sigma_*, 2.34 \sigma_*), \\
 \tilde{H}_{10} &= (15200 H_*, 15800 H_*, 16000 H_*, 16600 H_*), \\
 \tilde{H}_{20} &= (19400 H_*, 19700 H_*, 20000 H_*, 20600 H_*), \\
 \tilde{H}_{30} &= (17100 H_*, 17300 H_*, 17500 H_*, 17800 H_*), \\
 c_* &= 10^9 [\text{Па}], \quad \rho_* = 10^3 [\text{кг/м}^3], \quad \sigma_* = 10^6 [\text{М/Ом}],
 \end{aligned} \tag{35}$$

$$\mu_* = 4\pi 10^7 [\text{Г/М}], \quad H_* = 1 [\text{А/М}].$$

Некоторые результаты расчетов для данного варианта описания неконтрастных физико-механических параметров проводящей магнитоупругой среды представлены на рисунках 1 – 8.

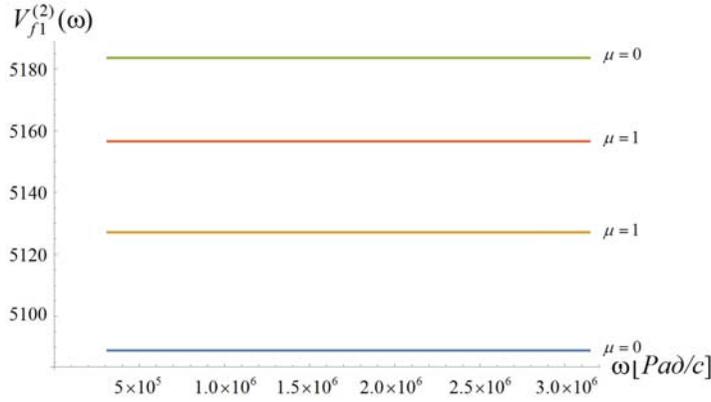


Рис.1. Параметрические частотные распределения значений $\mu_{\tilde{V}_{f1}^{(2)}(\omega)}(V_{f1}^{(2)}(\omega))$

Так, на рисунке 1 дано описание параметрических частотных зависимостей для задаваемых соотношением (22) характеристик нечетко-множественной величины $\tilde{V}_{f1}^{(2)}(\omega)$ – границ интервалов носителей, отвечающих значениям функции принадлежности $\mu = 0$ и границ интервалов модальных значений ($\mu = 1$) в частотном диапазоне от 50 КГц до 500 КГц. Согласно представляемым описаниям параметрические зависимости для такого диапазона частот являются крайне незначительными, а изображенные на рисунках 2 и 3 профили функций принадлежности $\mu_{\tilde{V}_{f1}^{(2)}(10^5\pi)}(V_{f1}^{(2)}(10^5\pi))$ и $\mu_{\tilde{V}_{f1}^{(2)}(10^6\pi)}(V_{f1}^{(2)}(10^6\pi))$ имеют лишь незначительные различия в модальной зоне.

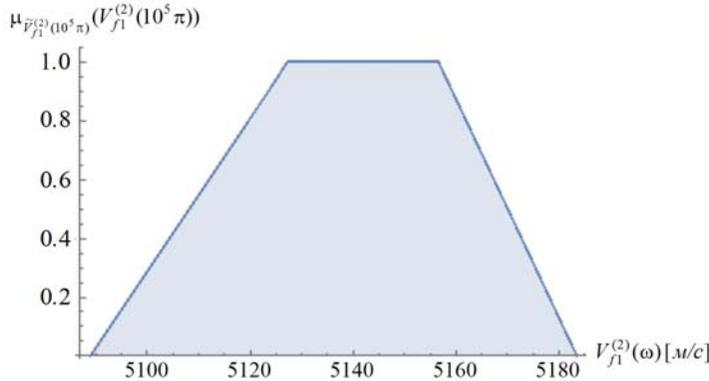


Рис.2. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{V}_{f1}^{(2)}(10^5\pi)}(V_{f1}^{(2)}(10^5\pi))$

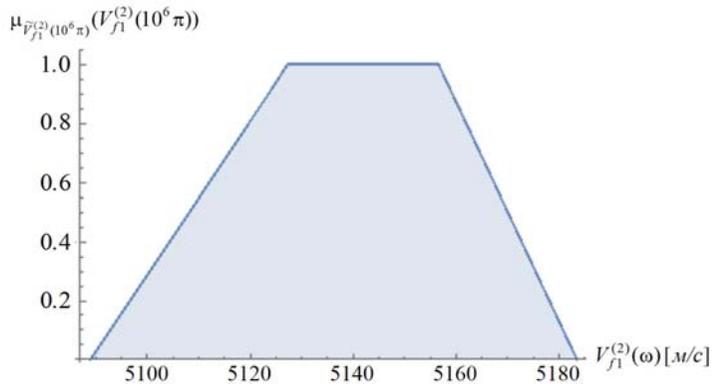


Рис.3. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{V}_{f1}^{(2)}(10^6 \pi)}(V_{f1}^{(2)}(10^6 \pi))$.

На рисунках 4 и 5 соответственно представлены результаты расчетов профилей функций принадлежности для нечетко-множественных характеристик \tilde{V}_{f3}

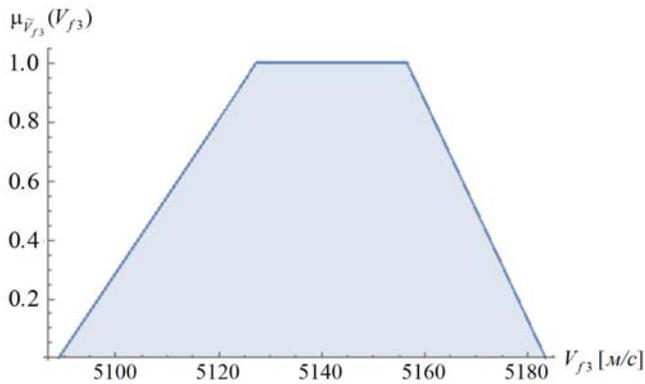


Рис.4. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{V}_{f3}}(V_{f3})$.

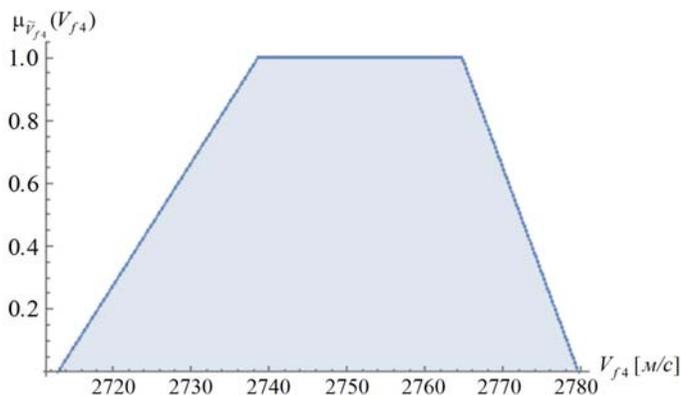


Рис.5. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{V}_{f4}}(V_{f4})$.

и \tilde{V}_{f4} фазовых скоростей распространения бездисперсных магнитоупругих волн в среде с идеальной проводимостью, параметры которой за исключением удельного электрического сопротивления соответствуют неконтрастным параметрам (35) для сплава 50Н. Расчеты базируются на использовании соотношений (32), (33).

Сопоставление рисунков 2, 3 и 4 указывает на низкую степень влияния на исследуемые скорости фактора частоты и учета эффектов конечной проводимости для рассматриваемой магнитоупругой среды. Разброс величин скоростей из интервала их возможных значений по отношению к медианной величине в охарактеризованных случаях не превышает 1.3%.

На рисунках 6 – 8 соответственно представлены результаты расчетов профилей функций принадлежности для нечетко-множественных оценок $\tilde{V}_{f5}^{(2)}$ фазо-

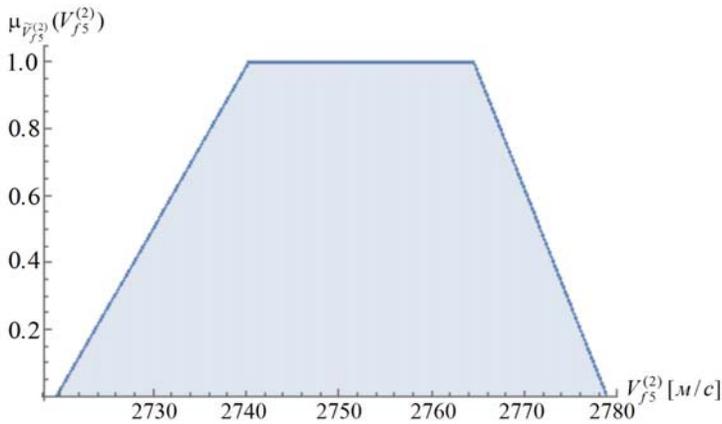


Рис.6. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{V}_{f5}^{(2)}}(V_{f5}^{(2)})$, рассчитанный без учета разбросов для H_{10}, H_{20}, H_{30} .

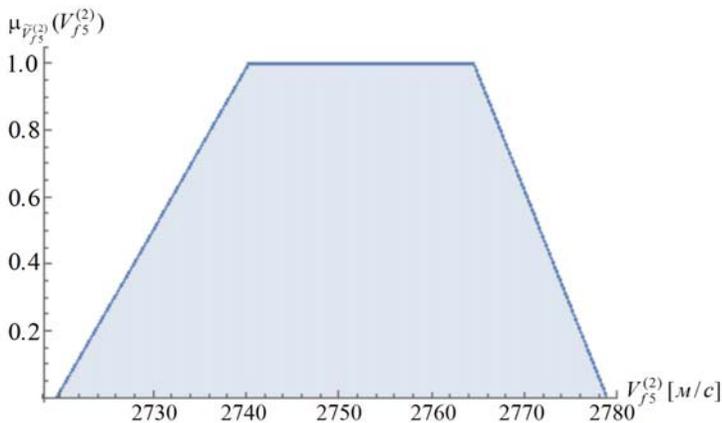


Рис.7. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{V}_{f5}^{(2)}}(V_{f5}^{(2)})$, рассчитанный без учета разбросов для H_{20}, H_{30} .

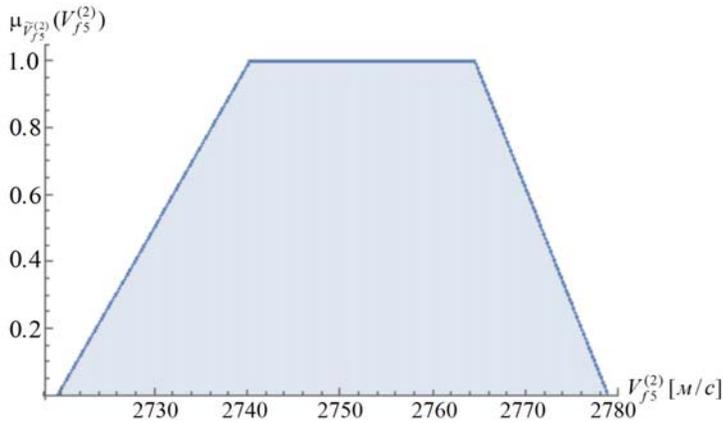


Рис.8. Профиль функции принадлежности $\mu_{V_{f5}^{(2)}}(V_{f5}^{(2)})$, рассчитанный без учета разбросов для H_{30} .

вых скоростей бездисперсных связанных сдвиговых магнитоупругих волн, при расчетах которых с применением соотношения (34) не учитываются разбросы значений всех трех значений компонентов напряженности начального магнитного поля H_{10}, H_{20}, H_{30} и задаются их величины $H_{10} = 16000H_*$, $H_{20} = 20000H_*$, $H_{30} = 17500H_*$ (рис. 6); не учитываются разбросы значений компонентов напряженности начального магнитного поля H_{20}, H_{30} и задаются их величины $H_{20} = 20000H_*$, $H_{30} = 17500H_*$ (рис. 7); не учитываются разбросы значений компоненты напряженности начального магнитного поля H_{30} и задается ее величина $H_{30} = 17500H_*$ (рис. 8). Как свидетельствует анализ этих расчетов, учет разбросов характеристик H_{10}, H_{20}, H_{30} в крайне малой степени отражается на картинах распределения значений $\mu_{V_{f5}^{(2)}}(V_{f5}^{(2)})$.

Выводы. Результатом изложенных в работе исследований является распространение численно-аналитической нечетко-множественной методики анализа эффектов влияния разбросов в значениях экзогенных физико-механических параметров на линеаризованную модель динамического деформирования магнитоупругой среды в начальном магнитном поле с учетом сил Лоренца, применяемую для описания процесса распространения связанных объемных магнитоупругих волн с плоским фронтом в изотропной среде с конечной электрической проводимостью. Разрабатываемый подход базируется на представлении исходных параметров с ошибками разбросов в экспериментальных значениях в виде величин нечетко-множественной природы и переходе к нечетко-множественным аргументам в аналитических расчетных соотношениях детерминистической версии анализируемой модели в рамках альфа-уровневой модифицированной формы эвристического принципа расширения. Представлены также результаты вычислительных экспериментов по реализации построенной методики, в частности расчетов нечетко-множественных оценок неопределенности для фазовых скоростей магнитоупругих волн при различных вариантах задания составляющих на-

чального магнитного поля и схемах учета разбросов для различных исходных параметров. Получаемые в рамках разработанной методики оценки позволяют описать диапазоны отклонений в значениях анализируемых фазовых скоростей на различных уровнях уверенности при заданных разбросах исходных физико-механических параметров. Методика дает возможность учитывать в осуществляемых исследованиях неопределённую исходную информацию экспертного характера о параметрах анализируемых волновых процессов.

1. Дьелесан Э. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов / Э. Дьелесан, Д. Руайе. – М.: Наука. – 1982. – 424 с.
2. Бардзокас Д.И. Распространение волн в электромагнитоупругих средах / Д.И. Бардзокас, Б.А. Кудрявцев, Н.А. Сеник. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 336 с.
3. Ерофеев В.И. Влияние ориентации магнитного поля на распространение квазиплоской магнитоупругой волны в пластине / В.И. Ерофеев, А.О. Мальханов // Прикладная механика и технологии машиностроения: сборник научных трудов. – Нижний Новгород: Изд-во общества "Интелсервис". – 2010. – №2 (17). – С. 147 – 157.
4. Herrero-Gomez C. Bias free magnetomechanical coupling on magnetic microwires for sensing applications / C. Herrero-Gomez, P. Marin, A. Hernando // Appl. Phys. Lett. – 2013. – V. 103, No 14. – P. 142414.
5. Perov N.S. Magnetoelastic waves in amorphous ribbons excited by local AC magnetic fields: Effect of stresses and DC magnetic field / N.S. Perov, E.V. Pan'kova, G.S. Kuznetsov, V.V. Rodionov, M. Inoue // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2007. – V. 310. – P. 2633–2635.
6. Стародубцев Ю.Н. Магнитные свойства аморфных и нанокристаллических сплавов / Ю.Н. Стародубцев, В.Я. Белозеров. – Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2002. – 384 с.
7. Глезер А.М. Механическое поведение аморфных сплавов / А.М. Глезер, И.Е. Пермякова, В.Е. Громов, В.В. Коваленко. – Новокузнецк: Изд-во СибГИУ, 2006. – 414 с.
8. Rokhlin S.I. Elastic wave scattering in random anisotropic solids / S.I. Rokhlin, J. Li // International Journal of Solids and Structures. – 2016. – V. 78 – 79, N 1. – P. 110 – 124.
9. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел / В.А. Ломакин. – М.: Наука, 1970. – 139 с.
10. Дилигенский Н.В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Дилигенский Н.В., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В. – М.: Изд-во Машиностроение – 1, 2004. – 397 с.
11. Ротштейн А.П. Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов / А.П. Ротштейн, С.Д. Штовба, А.Н. Козачко. – Винница: УНІВЕРСУМ, 2007. – 215 с.
12. Алтунин А.Е. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях / А.Е. Алтунин, М.В. Семухин. – Тюмень: Изд-во Тюменского государственного университета, 2002. – 352 с.
13. Anastassiou G.A. Fuzzy Mathematics: Approximation Theory / G.A. Anastassiou. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. – 444 p.
14. Sonbol A.H. TSK Fuzzy Function Approximators: Design and Accuracy Analysis/ A.H. Sonbol, M.S. Fadali // IEEE Trans. Syst. Man and Cybern. – 2012. – Vol. 42. – P. 702–712.
15. Bede B. Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic / B. Bede. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. – 276 p.
16. Сторожев В.И. Нечетко-множественные оценки в моделях теории объемных волн деформаций / В.И. Сторожев, С.В. Сторожев // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 103–111.

17. *Сторожев С.В.* Моделирование факторов неопределенности в процессах взаимодействия электроупругих волн с плоской границей контакта пьезокерамических тел / С.В. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2016. – № 1 (56). – С. 46–59.
18. *Сторожев С.В.* Алгоритмы применения аппарата нечетких вычислений для учета факторов неопределенности в задачах волновой механики электроупругих сред / С.В. Сторожев, С.Б. Номбре, С.А. Прийменко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017. – № 2 (59). – С. 44–47.
19. *Болнокин В.Е.* Нечетко-множественная методика учета неопределенности исходных данных в моделях расчетах скоростей ультразвуковых волн в пьезоэлектрических материалах / В.Е. Болнокин, С.А. Прийменко, С.Б. Номбре, С.В. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2019. – № 1(66). – С. 54–65.
20. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
21. *Grzegorzewski P.* Trapezoidal approximations of fuzzy numbers / P. Grzegorzewski, E. Mrrowka // Fuzzy Sets Syst. – 2005. – Vol. 153. – P. 115–135.
22. *Ban A.I.* Trapezoidal approximation and Aggregation / A.I. Ban, L.C. Coroianu, P. Grzegorzewski // Fuzzy Sets Syst. – 2011. – Vol. 177. – P. 45–59.

V.N. Pavlysh, S.V. Storozhev, S.B. Nombre

Fuzzy estimates in the model of propagation of magnetoelastic waves.

A numerical-analytical fuzzy-set method of taking into account the uncertainty factors of exogenous physical and mechanical characteristics in the study of the model of propagation of coupled bulk magnetoelastic waves with a plane front in an isotropic medium with finite electrical conductivity is presented. The presented approach is based on setting the initial parameters with scatter errors of experimental values in the form arguments of fuzzy-set type and on the subsequent application of the transition procedure to fuzzy-set arguments in analytical relations of the deterministic versions of the considered linearized model of dynamic deformation of magnetoelastic medium in the initial magnetic field taking into account the Lorentz forces. This procedure is based on the application of the modified alpha-level form of the heuristic principle of generalization. The results of computational experiments on the implementation of the constructed method are described, in particular the calculation of fuzzy-set estimates for the parameters of the phase velocities of magnetoelastic waves for various options for specifying the components of the initial magnetic field.

Keywords: *isotropic electrically conductive media, bulk magnetoelastic waves, initial magnetic field, linearized model, analysis of phase velocities, scatter errors of initial parameters, accounting for uncertainty factors, fuzzy-set approach, heuristic principle of generalization..*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный технический университет”,
Донецк

Получено 19.11.2020

ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры”, Макеевка
s.storozhev@donmasa.ru

ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

УДК 550.834:622.12

©2020. А.А. Глухов, В.А. Анциферов, Е.В. Ребенок, Д.В. Кутепов

ОБ АЛГОРИТМЕ СЕЙСМИЧЕСКОЙ ТОМОГРАФИИ УГЛЕПОРОДНОГО МАССИВА

В данной статье представлен разработанный и реализованный в программном обеспечении алгоритм сейсмической томографии угленородного массива, позволяющий оценивать тип и параметры геологических нарушений. Определение типа и характеристик нарушений при использовании метода сейсмического просвечивания производится на основе анализа распределения отклонений кинематических, динамических и спектральных параметров волнового поля от их фоновых значений в плоскости исследуемого участка выемочного столба.

Ключевые слова: шахтная сейсморазведка, метод сейсмического просвечивания, сейсмическая томография.

Введение. Сейсмоакустический прогноз геологических нарушений является одним из самых эффективных методов средств обеспечения эффективности и безопасности горных работ [1]. В ряде публикаций дан анализ критериев выявления геологических нарушений [2–4, 9–11], теоретических и методических аспектов выполнения сейсмических работ [2–4, 12–15]. Современные методы сейсморазведки позволяют выявлять аномалию с надежностью до 80% и больше [1], однако определение ее типа и параметров по-прежнему представляет собой отдельную сложную задачу. Метод сейсмического просвечивания (МСП), несмотря на применимость только в случае оконтуренного выработками участка угленородного массива, остается актуальным, поскольку только он дает представление о типе аномалии и позволяет оценить ее параметры. В качестве примера такого использования МСП можно привести методику прогноза распределения мощности угольного пласта в плане лавы [16–18], основанную на анализе дисперсионных зависимостей регистрируемого сигнала.

В данной статье кратко представлен разработанный в РАНИМИ и реализованный в программном обеспечении алгоритм сейсмической томографии угленородного массива, позволяющий оценивать тип и параметры геологических нарушений. Определение типа и характеристик нарушений при использовании МСП производится на основе анализа распределения отклонений кинематических, динамических и спектральных параметров волнового поля от их фоновых значений в плоскости исследуемого участка выемочного столба.

1. Разработка алгоритма сейсмической томографии. Рассмотрим математические соотношения, связывающие параметры среды и регистрируемые характеристики волновых пакетов.

Для построения сейсмических изображений участок углепородного массива условно разбивается на регулярную решетку элементарных ячеек e_{ij} с размерами сторон равными h и номерами i и j вдоль координатных осей X и Z , соответственно.

Допустим, к обработке принято M сейсмотрасс $s_m (m = 1..M)$, для которых колебания, составляющие каждую из них, проходят расстояние R^m . В результате их обработки получены исследуемые характеристики A^m . Тогда мы можем оценить среднее значение характеристики A :

$$\bar{A} = \frac{\sum_{m=1}^M A^m R^m}{\sum_{m=1}^M R^m} \quad (1)$$

Пусть через зону e_{ij} проходят лучи N сейсмотрасс $s_n (n = 1..N)$ длиной R^n каждый. Каждый из этих лучей проходит по e_{ij} расстояние L_{ij}^n . В результате их обработки получены исследуемые характеристики A^n . Тогда величину

$$\bar{A}_{ij} = \frac{\sum_{n=1}^N A^n L_{ij}^n}{\sum_{n=1}^N L_{ij}^n} \quad (2)$$

можно условно рассматривать как среднее значение A в том случае, если бы вся среда имела бы характеристики e_{ij} . Вычисление величин $\Delta A_{ij} = \bar{A} - \bar{A}_{ij}$ является результатом одного из наиболее распространенных вариантов томографии. Чрезвычайно важен тот факт, что при этом неявно предполагается, что значение \bar{A} можно трактовать не только как характеристику сейсмотрассы, но и как характеристику среды в соответствующей зоне.

В качестве информативных параметров волнового поля в соотношениях (1) и (2) чаще всего выступают: амплитуда волнового пакета, его характерная частота, ширина частотной характеристики, а также энергия волнового пакета.

Амплитуды волновых пакетов получаются непосредственно из сейсмограмм. Расчет амплитудно-частотных характеристик производится на основе использования процедуры быстрого преобразования Фурье (БПФ). Рассчитывается и анализируется как обобщенный частотный спектр всего набора сейсмограмм в целом (для получения средних значений соответствующих параметров), так и потрассно, а также в выделенных скоростных окнах. По спектру определяются частоты максимумов амплитудно-частотной характеристики, амплитуды максимумов амплитудно-частотной характеристики, ширина максимумов (строгого правила нет, обычно принято определение ширины по уровню 0.5 от максимального значения, рис. 1)

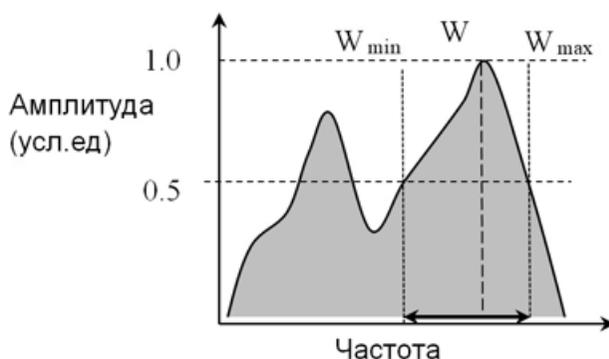


Рис. 1. Правило расчета ширины максимумов амплитудно-частотной характеристик

Как правило, пики частотной характеристики можно сопоставить с определенными волновыми пакетами. Однако такое соответствие неоднозначно. Возможен вариант, когда различные волновые пакеты формируют один и тот же видимый максимум. При расчете частотной характеристики в выделенном скоростном окне соответствие однозначно.

Скоростные параметры волновых пакетов вычисляются по времени первых вступлений, либо по времени прихода максимума волнового пакета.

В разработанном в РАНИМИ программном обеспечении [2] реализация метода сейсмической томографии выполняется в несколько этапов:

- на основе приведенного выше алгоритма для каждого из выделенных на сейсмограммах информативных волновых пакетов и для каждого из параметров строятся томографические картины исследуемого участка;
- на каждой томографической картине выделяются локальные зоны отклонений от фоновых значений;
- путем сравнения томографических картин производится сравнения локальных зон и выделение совпадающих зон, которые будут рассматриваться как участки проявления аномалий;
- по совокупности параметров для каждого из выделенных участков производится геологическая интерпретация.

В таблице 1 в обобщенном виде представлена информация о том, как типичные для Донбасса геологические нарушения влияют на кинематические и динамические параметры информативных волновых пакетов.

На представленной на рисунке 2 схеме выделяются несколько зон. Зона №1 располагается вдоль выработки. Она характеризуется как ослаблением амплитуды информативных волновых пакетов, так и уменьшением скорости распространения колебаний. Причем это проявляется в тем большей степени, чем ближе к выработке располагается точка, для которой производится расчет. Максимальная степень отклонения амплитуды и скорости волнового пакета составляет около 15% и 10% от средних по области расчета значений, соответственно.

Таблица 1.

Характер отклонения информативных параметров волновых пакетов в зонах геологических аномалий.

Информативный параметр волнового пакета	Тип нарушения	
	Дизъюнктив, зона трещиноватости	Утонение, размыв
Изменение амплитуды	↓	⇩
Изменение частоты	↓	↑
Изменение скорости первого вступления либо максимума амплитуды	↓	⇩

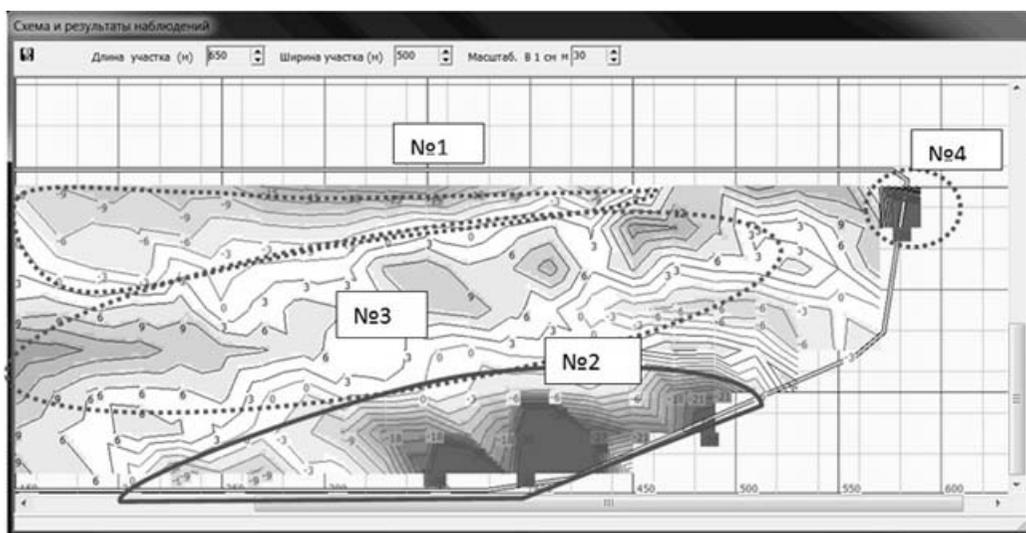
Подобное сочетание отклонений характерно для зоны трещиноватости. В данном случае образовавшейся в примыкающей к выработке породе в результате проходки. Подтверждением это служит отчетливо проявляющийся градиентный характер изменения параметров по нормали к направлению выработки.

В качестве примера использования метода сейсмической томографии на рисунке 2 представлен пример расчета томографических картин распределения параметров волновых полей на реальном участке проведения сейсмических наблюдений.

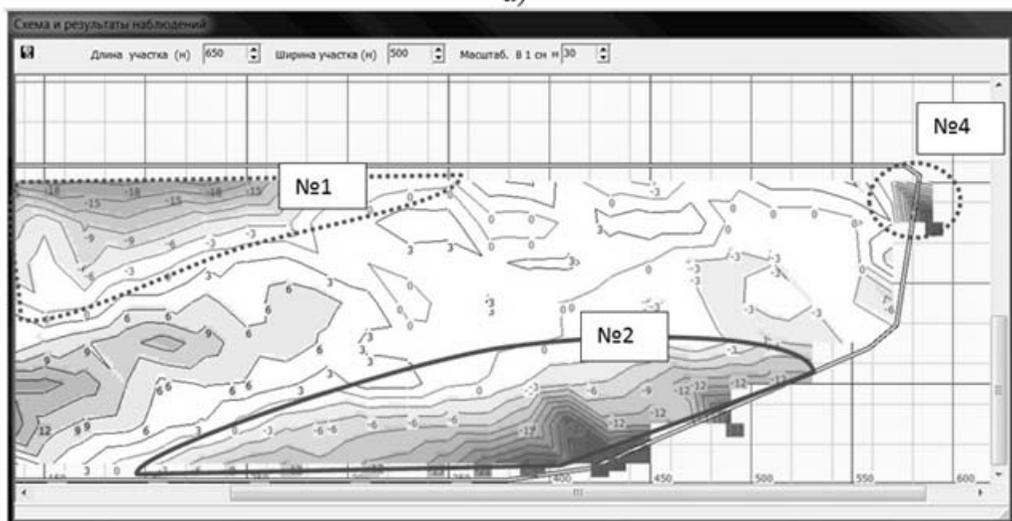
Зона №2 располагается у выработки по другую сторону области исследований имеет такой же характер отклонения параметров от фоновых значений. Максимальная степень понижения скорости распространения информативной волны и ее амплитуда (в качестве информативной в данном случае выступает классическая каналовая волна) от фонового значения достигает более 20%, что однозначно свидетельствует о наличии геологического нарушения. Существенное уменьшение скорости и амплитуды волны в первую очередь позволяет говорить о наличии дизъюнктива, сопровождающегося зоной повышенной трещиноватости. В качестве подтверждения отметим, что по результатам добычных работ было подтверждено наличие в границах зоны №2 нескольких дизъюнктивов с амплитудой от 0.2, до 0.5 м.

При анализе зоны №3 следует учесть, что фоновое значение рассчитываемых параметров представляет собой некое промежуточное значение между минимальным и максимальным по участку наблюдений. За счет того, что на нем существенную роль играют зона со значительным отрицательным отклонением

скорости и амплитуды, уровень фона слегка отклонен в ту же сторону. Поэтому ненарушенные участки угольного пласта проявляются как область, где данные параметры смещены в сторону высоких значений.



а)



б)

Рис. 2. Распределение отклонений а) скорости максимума амплитуды; б) максимальной амплитуды информативных волновых пакетов от фоновых значений на участке лавы 37К10 В ш. Кузембаева (Казахстан)

Ложные аномальные зоны (причем с разным знаком отклонений параметров) могут формироваться по краям расчетной сетки (рис. 1, зона № 4). Во-первых, в краевых зонах сейсмические лучи часто приходят с одного направления, что не отвечает оптимальным условиям применения алгоритма томогра-

фии. Во-вторых, количество сейсмических лучей пересекающих участки может быть недостаточным.

Заключение. Представленный выше алгоритм обработки и разработанное в рамках предлагаемого подхода программное обеспечение могут быть использованы геофизическими службами и специализированными геологоразведочными организациями для обработки и анализа результатов сейсмических исследований при прогнозе структуры углепородного массива.

1. *Dresen L.* Seismic Coal Exploration, Part B, Seismics: Handbook of Geophysical Exploration, Section I. Seismic Exploration / L. Dresen, H. Ruter. – Pergamon, 1994. – 486 p.
2. *Анциферов А.В.* Теория и практика шахтной сейсморазведки / А.В. Анциферов. – Донецк: ООО «Алан», 2002. – 312 с.
3. *Анциферов А.В.* Математическое моделирование в шахтной сейсморазведке / А.В. Анциферов, А.А. Глухов. – Киев: Наукова думка, 2012. – 255 с.
4. *Захаров В.Н.* Сейсмоакустическое прогнозирование и контроль состояния и свойств горных пород при разработке угольных месторождений / В.Н. Захаров. – М.: ФГУП ННЦ ГП ИГД им. А.А. Сковинского, 2002. – 172 с.
5. *Захаров В.Н.* Углепородные массивы: прогноз устойчивости, риски, безопасность / В.Н. Захаров, В.С. Забурдяев, В.Б. Артемьев. – М.: Горное дело, 2013. – 277 с.
6. *Antsiferov A. V.* Review of seismograms typical for an in-seam seismic technique in conditions of different coal basins / A.V. Antsiferov, A.A. Glukhov // Progressive Technologies of Coal, Coalbed Methane, and Ores Mining. Taylor & Francis Group. – 2014. – P. 61–64.
7. *Соколов С.В.* Комплексные геофизические исследования состояния углепородного массива в условиях Кузбасса / С.В. Соколов, Е.А. Салтымаков, А.Н. Кормин // Вестник Кузбасского государственного технического университета. – 2017. – № 2. – С. 66–70.
8. *Lu Jun* Prediction of Coal Seam Details and Mining Safety Using Multicomponent Seismic Data: A case History from China / Lu Jun, Meng Xinghun, Wang Yun // Geophysics. – 2016. – Vol. 81. – P. 149–165.
9. *Mason I.* Fault location by underground seismic survey / I. Mason, D. Buchanan, A. Booer // Institution of Electrical Engineers. – 1980. – Vol. 127. – P. 322–336.
10. *Шене Ф.* Исследование геологического строения пластов каменного угля сейсмическим методом с помощью аппаратуры SUMMIT II EX / Ф. Шене // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2012. – № 10. – С. 145–154.
11. *Gochioco Lawrence M.* Advances in seismic reflection profiling for US coal exploration / Lawrence M. Gochioco. // The leading edge. – 1991. – Vol. 10. – P. 24–29.
12. *Friedel Michael J.* Mining applications of seismic tomography / Michael J. Friedel, Darel R. Tweeton, M.J. Jackson et al. // 62nd Annu. Int. SEG Meet. – 1992. – Vol. 4. – P. 58–62.
13. *Hongliang W.* Seismic Wave Propagation in Coal Seams: Finite Element Modeling and Field Tests / W. Hongliang, G. Maochen // International Journal of Mining and Mineral Engineering. – 2014. – Vol. 5, no. 3. – P. 229–385.
14. *Рубан А.Д.* Программный комплекс итерационного линейного восстановления строения и нарушения угольного пласта на основе информативных параметров при сейсмопросвечивании / А.Д. Рубан, В.Н. Захаров, А.П. Аверин, С.А. Варганов // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2010. – № 3. – С. 177–182.
15. *Захаров В.Н.* Анализ алгоритмов лучевой томографии для прогноза нарушения выемочного столба / В.Н. Захаров, А.П. Аверин, С.А. Варганов // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2010. – № 3. – С. 183–190.
16. *Waclawik P.* Utilization of innovation of the ISS method – in seam seismics at the CSM Mine / P. Waclawik, W. Schott // Gornicze zagrozenia naturalne. – 2011. – Vol. 2. – P. 517–524.
17. *Schott W.* On the quantitative determination of coal seam thickness by means of in-seam seismic surveys / W. Schott, W. Waclawik // Canadian Geotechnical Journal. – 2015. – Vol. 52. –

Р. 1–9.

18. Schott W., Brandt K. Investigation of seam thickness and seam splitting within a longwall panel by an in-seam seismic survey / W. Schott, K. Brandt // 22nd International Conference on Ground Control in Mining. – 2003. – Vol. 2. – P. 152–156.

A.A. Glukhov, V.A. Antsiferov, Y.V. Rebenok, D.V. Kutepov

On the algorithm of seismic tomography of coal-bearing solid mass.

In this paper we present the self-developed and embodied in the software algorithm for seismic tomography of coal-bearing solid mass, which allows evaluating the type and parameters of geological disturbances. Determination of the type and characteristics of the disturbances employing in-seam seismics is made based on the analysis of the distribution of deviations of kinematic, dynamic and spectral parameters of the wave field from their background values in the plane of the extraction panel area of interest.

Keywords: *mine seismic survey, in-seam seismics, seismic tomography.*

Республиканский академический научно-исследовательский и
проектно-конструкторский институт горной геологии,
геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ),
Донецк
glukhov1964@yandex.ru

Получено 21.12.2020

УДК 669.788:539.37

©2020. Ж.Л. Глухова

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ВОДОРОДОУПРУГОСТИ

В настоящей работе рассмотрено взаимодействие механической, диффузионной и термодинамической составляющих явления водородоупругости. Сформулирована система связанных нелинейных уравнений, описывающих взаимосвязь концентрационных водородных полей, температурных полей и полей деформаций/напряжений.

Ключевые слова: водородоупругость, диффузия водорода в металлах, определяющие уравнения модели.

Введение. Внедренные атомы водорода вызывают расширение кристаллической решетки металла. Вследствие этого в неравновесных условиях в системах металл-водород имеет место явление водородоупругости [1,2]. Данное явление проявляется различными эффектами, и, соответственно, изучается с отдельных сторон. В одних случаях фиксируются механические проявления явления (эффект обратимого формоизменения образца, эффект Горского [3]). В других случаях фиксируются его диффузионные и термодинамические проявления (замедление классической диффузии согласно закону Фика, эффект «восходящей» диффузии, эффект Льюиса [4], эффект термо-баро-упруго-диффузионного равновесия [1]).

Для понимания различных сторон явления как единого целого необходимо рассмотреть во взаимосвязи механическую, диффузионную и термодинамическую составляющие явления водородоупругости. Этому вопросу посвящена данная статья.

1. Термодинамический потенциал Гиббса системы Ме-Н. Пусть система Ме-Н характеризуется следующим набором независимых параметров:

- абсолютной температурой $T(x, y, z, t)$;
- компонентами тензора напряжений $\sigma_{ij}(x, y, z, t)$;

- концентрацией растворенного водорода $C_H(x, y, z, t) = \frac{N_H(x, y, z, t)}{N_{Me}(x, y, z, t)}$, где N_H и N_{Me} – количество атомов водорода и металла в выделенном объеме, соответственно.

Тогда состояние системы Ме-Н, как термодинамической системы, представимо потенциалом Гиббса $G = G(T, \sigma_{ij}, C_H)$, полный дифференциал которого можно записать в виде:

$$dG = n\mu dC_H - \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} - SdT \quad (1)$$

где

$\mu = \frac{1}{n} \frac{\partial G}{\partial C_H}$ – химический потенциал в расчете на один атом растворенного водорода;

$\varepsilon_{ij} = -\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}$ – компоненты тензора деформаций;

$S = -\frac{\partial G}{\partial T}$ – энтропия единицы объема системы Ме-Н;

$n = \frac{\rho N_A}{A}$ – объемная концентрация атомов металла, ρ – плотность металла, N_A – число Авогадро, A – молярная масса.

Пусть естественное состояние системы характеризуется следующими параметрами:

$$C_H = 0, \quad \sigma_{ij} = 0, \quad T = T_0.$$

Разложим потенциал $G(T, \sigma_{ij}, C_H)$ в ряд Тейлора в окрестности естественного состояния. Ограничиваясь при этом двумя первыми порядками членов разложения, получаем:

$$\begin{aligned} G = G(T, \sigma_{ij}, C_H) &= G^0 + G_T \tau + G_\sigma \sigma_{ij} + G_C C_H + \\ &+ \frac{1}{2} (G_{TT} \tau^2 + G_{\sigma\sigma} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + G_{CC} C_H^2) + \\ &+ G_{T\sigma} \tau \sigma_{ij} + G_{\sigma C} \sigma_{ij} C_H + G_{CT} C_H \tau, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\tau = T - T_0$, $\tau \ll T_0$, $G^0 = G(T_0, 0, 0)$, а производные от G обозначаются нижней индексацией по следующей схеме:

$$G_T = \frac{\partial G}{\partial T}, \quad G_{TT} = \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \text{ и т. д.}$$

С учетом (2) верны следующие соотношения:

$$n\mu = G_C + G_{CC} C_H + G_{\sigma C} \sigma_{ij} + G_{CT} \tau, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{ij} = -(G_\sigma + G_{\sigma\sigma} \sigma_{ij} + G_{T\sigma} \tau + G_{\sigma C} C_H), \quad (4)$$

$$S = -(G_T + G_{TT} \tau + G_{T\sigma} \sigma_{ij} + G_{CT} C_H). \quad (5)$$

Соотношения (3)–(5) отражают взаимосвязь механических и термодинамических характеристик системы Ме-Н.

2. Уравнение состояния системы Ме-Н. Нетрудно убедиться, что в естественном состоянии выражение (4) преобразуется в уравнение Гука для изотропной среды [5]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij}], \quad (6)$$

где δ_{ij} – тензор Кронекера, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона. С учетом изменения линейных размеров при изменении температуры и концентрации растворенного водорода в условиях свободного расширения ($\sigma_{ij} \equiv 0$), получаем:

$$G_{\sigma C} = -\alpha_H \delta_{ij}, \quad G_{T\sigma} = -\alpha_T \delta_{ij}, \quad (7)$$

где α_H – коэффициент линейного расширения металла при растворении водорода. α_T – температурный коэффициент линейного расширения металла. Тогда с учетом соотношений (6-7) уравнение состояния системы Ме-Н можно записать в виде:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} + \left(\alpha_H C_H + \alpha_T \tau - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \right) \delta_{ij}, \quad (8)$$

либо в виде :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) - \frac{E}{1 - 2\nu} (\alpha_H C_H + \alpha_T \tau) \delta_{ij}, \quad (9)$$

где ε_{kk} – след тензора деформаций.

3. Уравнение диффузионного переноса водорода. Согласно уравнению непрерывности для диффузионного потока водорода справедливо соотношение

$$\vec{J}_H = -C_H B \text{ grad } \mu, \quad (10)$$

где \vec{J}_H – поток водорода, $\text{grad } \mu$ – обобщенная движущая сила, B – величина, называемая подвижностью и имеющая смысл средней скорости направленного движения атомов водорода. Подставляя в (10) соотношение (3) с учетом (7), получим уравнение потока для массопереноса водорода в условиях неизотермической водородоупругости:

$$\vec{J}_H = -\frac{C_H B}{n} (G_{CC} \nabla C_H - \alpha_H \nabla \sigma_{kk} + G_{CT} \nabla \tau). \quad (11)$$

Коэффициент диффузии D и подвижность B связаны соотношением Эйнштейна:

$$B = \frac{D}{kT}. \quad (12)$$

Выражение (12) записано для случая классической диффузии, вызванной разностью концентраций водорода, однако оно верно и для общего случая, когда в процесс формирования потока водорода включаются градиент напряжений, градиент температуры и другие факторы [6]. Тогда под B и D понимают соответствующие «эффективные» величины, которые могут быть рассчитаны различными способами [7, 8].

С учетом (12) выражение (11) можно записать:

$$\vec{J}_H = -\frac{C_H D}{nkT} (G_{CC} \nabla C_H - \alpha_H \nabla \sigma_{kk} + G_{CT} \nabla \tau). \quad (13)$$

Согласно (13) поток водорода в системе определяется тремя движущими термодинамическими силами: градиентом концентрации водорода, градиентом внутренних напряжений и градиентом температуры.

Рассмотрим далее физический смысл отдельных слагаемых в уравнении (13). Для изотермической системы в отсутствие неоднородностей напряжений ($\nabla \tau =$

$0, \nabla \sigma_{kk} = 0$) для потока \vec{J}_F , вызванного разностью концентраций водорода, справедливо уравнение Фика:

$$\vec{J}_F = -D\nabla C_H. \quad (14)$$

Сопоставляя (13) и (14), G_{CC} можно выразить в виде:

$$G_{CC} = \frac{Dn}{C_H B} = \frac{nkT}{C_H}. \quad (15)$$

Из уравнения термодиффузии для потока \vec{J}_{TD} , вызванного разностью температур:

$$\vec{J}_{TD} = -D\nabla C_H - \frac{DC_H}{RT^2} Q \nabla \tau, \quad (16)$$

аналогичным образом получаем

$$G_{CT} = \frac{DnQ}{BRT^2}, \quad (17)$$

где R – универсальная газовая постоянная, Q – теплота переноса. Тогда (13) можно переписать в виде:

$$\vec{J}_H = -D\nabla C_H - D \frac{C_H A \alpha_H}{\rho RT} \nabla \sigma_{kk} + D \frac{C_H Q}{RT^2} \nabla \tau. \quad (18)$$

И, наконец, используя уравнение непрерывности, получаем временное уравнение диффузии:

$$\frac{\partial C_H}{\partial t} = \text{div} \left[-D \text{grad } C_H - D \frac{C_H A \alpha_H}{\rho RT} \text{grad } \sigma_{kk} + D \frac{C_H Q}{RT^2} \text{grad } T \right]. \quad (19)$$

4. Обобщенное уравнение теплопроводности. Как известно, поток тепла связан с неоднородностью температурного поля уравнением Фурье:

$$\vec{J}_q = -\lambda_q \nabla T, \quad (20)$$

где λ_q – коэффициент теплопроводности металла. При отсутствии источников тепла из I и II начал термодинамики следует:

$$\text{div} \vec{J}_q = -T \frac{dS}{dT}. \quad (21)$$

Учитывая соотношения (3), (7), (17), (20) выражение (21) можно преобразовать к виду:

$$\text{div} (\lambda_q \text{grad } T) = -T \left(G_{TT} \dot{\tau} - \alpha_T \dot{\sigma}_{kk} + \frac{DnQ}{BRT^2} \dot{C}_H \right), \quad (22)$$

где точками сверху обозначены производные по времени. Поскольку теплоемкость металла c_σ без учета напряжений определяется соотношением

$$c_\sigma = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_\sigma = -T \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_\sigma,$$

то

$$G_{TT} \equiv \frac{\partial^2 G(T_0, 0, 0)}{\partial T^2} = -\frac{c_\sigma}{T_0}, \quad (23)$$

где c_σ – теплоемкость 1 м³ металла при неизменном напряжении в естественном состоянии. Учитывая (19), можно получить уравнение теплопроводности в виде

$$\operatorname{div} (\lambda_q \operatorname{grad} T) = -\frac{T}{T_0} c_\sigma \dot{\tau} + \alpha_T T \dot{\sigma}_{kk} - \frac{\rho Q}{A} \dot{C}_H. \quad (24)$$

Это уравнение описывает перенос тепла, вызываемый как градиентами температуры, так и градиентами напряжений, а также диффузией водорода в системе Ме-Н в неизотермических условиях.

5. Система уравнений водородоупругости. Таким образом, состояние системы Ме-Н описывается следующими величинами: 6-ю компонентами симметричного тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(\vec{r}, t)$, 6-ю компонентами симметричного тензора напряжений $\sigma_{ij}(\vec{r}, t)$, 3-мя компонентами вектора перемещения $\vec{u}(\vec{r}, t)$, температурой $T(\vec{r}, t)$, концентрацией водорода $C_H(\vec{r}, t)$. Для описания состояния системы Ме-Н к обобщенным уравнениям состояния (8), диффузионного переноса водорода (19) и теплопроводности (24) следует добавить уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \ddot{u}_i, \quad (25)$$

а также уравнения, связывающие компоненты тензора деформации ε_{ij} и составляющие вектора перемещения u_i :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (26)$$

В изотермическом случае из описания состояния системы Ме-Н исключается уравнение теплопроводности (24), а уравнение (19) следует записать в виде

$$\frac{\partial C_H}{\partial t} = \operatorname{div} \left[-D \operatorname{grad} C_H - D \frac{C_H A \alpha_H}{\rho R T} \operatorname{grad} \sigma_{kk} \right]. \quad (27)$$

Выводы. В настоящей работе рассмотрено взаимодействие механической, диффузионной и термодинамической составляющих явления водородоупругости. Сформулирована система связанных нелинейных уравнений, описывающих взаимосвязь концентрационных водородных полей, температурных полей и полей деформаций/напряжений. Полученные системы уравнений при заданных

начальных и граничных условиях могут быть использованы для математического моделирования механических и диффузионных эффектов, обусловленных явлением водородоупругости.

1. *Goltsov V.A.* Fundamentals of Hydrogen Treatment of Materials / V.A. Goltsov // Progress in Hydrogen Treatment of Materials. Edited by V.A. Goltsov. – Donetsk: Kassiopeya Ltd, 2001. – P. 3–37.
2. *Goltsov V.A.* Theory of Hydrogen Elasticity Phenomenon / V.A. Goltsov, T.A. Rumshina, L.I. Smirnov, Zh.L. Glukhova, R.V. Kotelva // Progress in Hydrogen Treatment of Materials, Edited by V.A. Goltsov. – Donetsk: Kassiopeya Ltd, 2001. – P. 95–107.
3. Водород в металлах Т. 1. / Под ред. Г. Алефельда и И. Фелькля. – М.: Мир, 1981. – 475 с.
4. *Lewis F.A.* The “Uphill” Diffusion of Hydrogen. Strain-gradient Induced Effects in Palladium Alloy Membranes / F.A. Lewis, K. Kandasamy, B. Baranowski // Platinum Metals Rev. – 1988. – V. 32, no 1. – P. 22–26.
5. *Ландау Л.Д.* Механика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. – М.: Гос. Изд-во технико-теоретической литературы, 1954. – 754 с.
6. *Вагнер Х.* Упругое взаимодействие и фазовые переходы в когерентных сплавах металл-водород / Х. Вагнер // Водород в металлах. Под ред. Г. Алефельда и И. Фелькля. – М.: Мир, 1981. – Т.1. – С. 16–68.
7. *Зайт В.* Диффузия в металлах / В. Зайт. – М.: Изд-во ИИ, 1958. – 381 с.
8. *Smirnov L.I.* Diffusion And Diffusive Phenomena In Interstitial Subsystems / L.I. Smirnov, V.A. Goltsov // Progress in Hydrogen Treatment of Materials. Edited by V.A. Goltsov. – Donetsk: Kassiopeya Ltd, 2001. – P. 65–93.

Zh.L. Glukhova

System of equations for hydrogen-elasticity.

Interaction of mechanical, diffusive and thermodynamic constituents of hydrogen-elasticity phenomenon is considered. A system of connected nonlinear equations describing the relationship of concentration hydrogen fields, temperature fields, and strain/stress fields is developed.

Keywords: *Hydrogen elasticity, diffusion behavior of hydrogen in metals, the governing equations of the model.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный технический университет”,
Донецк
glukhov1964@yandex.ru

Получено 23.12.2020

УДК 622.831, 622.23.02

©2020. Ф.М. Голубев

ОСОБЕННОСТИ ПАРАМЕТРОВ СДВИЖЕНИЯ МНОГОКРАТНО ПОДРАБОТАННОЙ ОЧИСТНЫМИ ВЫРАБОТКАМИ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ЛИКВИДАЦИИ УГЛЕДОБЫВАЮЩИХ ПРЕДПРИЯТИЙ

В рассматриваемой статье проведен анализ влияния многократной подработки на характер сдвижения земной поверхности при затоплении горных выработок ликвидируемых угольных шахт. Определены основные закономерности изменения параметров сдвижения в зависимости от количества угольных пластов отработанных шахтой. Разработан метод прогноза деформаций земной поверхности, вызванных активизацией процесса сдвижений при затоплении горных выработок закрывающихся шахт, учитывающий литологический состав, физико-механические свойства горных пород, условия залегания пластов и горнотехнические условия отработки.

Ключевые слова: сдвижения земной поверхности, затопление горных выработок, ликвидация шахт, МКЭ модели.

Введение. Активизация геомеханических процессов может происходить не только при подработке земной поверхности, но и при ликвидации угольных предприятий в результате затопления массива. Существующие способы прогнозирования деформаций, вызванных активизацией геомеханических процессов при затоплении ликвидируемых шахт, требуют уточнения, так как они не учитывают влияние литологического состава горного массива, а это способно серьёзно сказаться на точности прогноза деформаций земной поверхности при затоплении ликвидируемых горных выработок. Кроме того, существующие методики прогноза деформаций земной поверхности, вызванных активизацией геомеханических процессов, которые описаны в источниках [1, 2], обладают целым рядом недостатков. Как показывают расчёты [3], значения деформаций, полученные по таким методикам, могут различаться в несколько раз. Кроме того, указанные методики имеют собственные ограничения.

Основной ошибкой существующей практики защиты территорий в зонах влияния ликвидируемых шахт является то, что на стадии составления проектов ликвидации шахт не предусматривается обследование объектов поверхности и инструментальные измерения высотных отметок земной поверхности до начала процесса затопления горных выработок. В результате, инструментальные измерения, полученные на момент окончания процесса сдвижения, не дают возможности объективно оценивать ни размеры деформаций, вызванных затоплением горных выработок, ни их продолжительность.

Существующие исследования [4] показали, что затопление горных выработок и вторичное изменение водонасыщенности породной толщи способно вызвать ее деформирование в результате активизации геомеханических процессов с формированием новой фильтрационной структуры и изменением гидродинамических

характеристик. Накопление частного и общего эффектов способно провоцировать переход породы в другое «качественное состояние» на различных глубинах.

В результате анализа существующих в данной области исследований [5, 6, 7] были выявлены четыре основных фактора, влияющих на характер деформаций:

- изменение глубины расположения затапливаемых горных выработок;
- степень подработки;
- высота распространения зоны водопроводящих трещин;
- угол падения.

Для определения того, каким образом каждый из указанных факторов воздействует на массив горных пород, проводилось исследование на конечно-элементных моделях.

1. Методика исследования. Практика расчетов конечно-элементных моделей горного массива показывает, что модель изотропной среды не способна в полной мере описать углепородный массив, так как физико-механические свойства горного массива в различных направлениях могут отличаться в несколько раз. Поэтому при описании горных пород предпочтительней использовать модели ортотропных сред. В модели ортотропных сред через каждую точку проходит три взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии. Согласно исследованиям [8], уравнение обобщенного закона Гука для ортотропной среды можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= E_1 \frac{R_{x4}}{R_{x5}} \varepsilon_x + E_1 \frac{R_{x2}}{R_{x5}} \varepsilon_y + E_1 \frac{R_{x6}}{R_{x5}} \varepsilon_z; & \tau_{yz} &= G_{23} \gamma_{yz}; \\
 \sigma_y &= E_2 \frac{R_{y1}}{R_{y2}} \varepsilon_x + E_2 \frac{R_{y3}}{R_{y2}} \varepsilon_y + E_2 \frac{R_{y4}}{R_{y2}} \varepsilon_z; & \tau_{xz} &= G_{13} \gamma_{xz}; \\
 \sigma_z &= E_3 \frac{R_{z1}}{R_{z2}} \varepsilon_x + E_3 \frac{R_{z3}}{R_{z2}} \varepsilon_y + E_3 \frac{R_{z4}}{R_{z2}} \varepsilon_z; & \tau_{xy} &= G_{12} \gamma_{xy},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где E_1, E_2, E_3 – модули упругости для растяжения-сжатия вдоль главных направлений упругости X, Y, Z соответственно; G_{23}, G_{13}, G_{12} – модули сдвига для главных плоскостей YOZ, XOZ, XOY ; ε – вектор деформаций.

Коэффициенты R , используемые в уравнении (1), имеют следующий вид:

$$R_{x1} = 1 - \nu_{13}\nu_{31}, \tag{2}$$

$$R_{x2} = \nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}, \tag{3}$$

$$R_{x3} = \nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}, \tag{4}$$

$$R_{x4} = 1 - \nu_{23}\nu_{32}, \tag{5}$$

$$R_{x5} = R_{x1}R_{x4} - R_{x2}R_{x3}, \tag{6}$$

$$R_{x6} = \nu_{31}R_{x4} + \nu_{32}R_{x2}, \tag{7}$$

$$R_{y1} = R_{x1}R_{x4} - R_{x5}, \tag{8}$$

Ф.М. Голубев

$$R_{y2} = R_{x2}R_{x5}, \quad (9)$$

$$R_{y3} = R_{x1}R_{x2}, \quad (10)$$

$$R_{y4} = R_{x1}R_{x6} - \nu_{31}R_{x5}, \quad (11)$$

$$R_{z1} = \nu_{13}R_{x4}R_{y2} + \nu_{23}R_{y1}R_{x5}, \quad (12)$$

$$R_{z2} = R_{x5}R_{y2}, \quad (13)$$

$$R_{z3} = \nu_{13}R_{x2}R_{y2} + \nu_{23}R_{y3}R_{x5}, \quad (14)$$

$$R_{z4} = R_{z2} + \nu_{13}R_{x6}R_{y2} + \nu_{23}R_{y4}R_{x5}. \quad (15)$$

Здесь ν_{ij} – коэффициенты Пуассона, характеризующие сокращение в одном главном направлении (2-й индекс) при растяжении в другом главном направлении (1-й индекс).

Компоненты векторов напряжений и деформаций для ортотропной среды можно связать согласно [9] при помощи матрицы D уравнением следующего вида:

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\}, \quad (16)$$

где $\{\varepsilon\}$ – вектор деформаций.

При этом, согласно [8], матрица D будет иметь следующий вид:

$$[D] = \begin{bmatrix} E_1 \frac{R_{x4}}{R_{x5}} & E_1 \frac{R_{x2}}{R_{x5}} & E_1 \frac{R_{x6}}{R_{x5}} & 0 & 0 & 0 \\ E_1 \frac{R_{y2}}{R_{y5}} & E_2 \frac{R_{y3}}{R_{y2}} & E_2 \frac{R_{y4}}{R_{y2}} & 0 & 0 & 0 \\ E_1 \frac{R_{z6}}{R_{z5}} & E_2 \frac{R_{z4}}{R_{z2}} & E_3 \frac{R_{z4}}{R_{z2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

где E_1, E_2, E_3 – модули упругости для растяжения-сжатия вдоль главных направлений упругости X, Y, Z соответственно; G_{23}, G_{13}, G_{12} – модули сдвига для главных плоскостей YOZ, XOZ, XOY .

Каждый пласт модели формировался как отдельный объем с свойствами, характерными для конкретной горной породы. Физико-механические характеристики основных горных пород в рассматриваемых моделях указаны в таблице 1.

Таблица 1.

Принятые в базовой модели физико-механические характеристики горных пород

Тип породы	Объемный вес (T/m^3)	f	E (МПа)	коэффициент Пуассона
Известняк	2.45	7	46000	0.2
Песчаник	2.45	7	26000	0.18
Глинистый сланец	2.45	5	23900	0.37

Для калибровки и моделирования затопления горных пород над лавой, согласно классическим схемам деформаций горного массива, в конечно-элементной модели было выделено три зоны:

- зона беспорядочных обрушений;
- зона упорядоченного обрушения;
- зона прогибов с разрывом сплошности.

Так как за счет влияния масштабного эффекта, наблюдаемого в массиве, точно определить характеристики горных пород в лабораторных условиях практически невозможно, каждая модель проходила калибровку, которая включала в себя изменение в допустимых пределах физико-механических свойств горных пород таким образом, чтобы оседания, рассчитанные в МКЭ модели подработки земной поверхности, совпадали с оседаниями, полученными в результате натурных измерений и рассчитанными по существующему отраслевому стандарту, в чем и заключается уникальность используемого исследовательского подхода.

Калибровка модели производилась в пределах всего купола сдвижений. Результаты калибровки подробно описаны в статье [10]. Изменение физико-механических свойств горных пород в модели при влагонасыщении производилось на основании исследований [4]. Стоит отметить, что в модели имитировалось физико-механические свойства песчаников, имеющих глинисто-сланцевый цемент, так как они наиболее интенсивно теряют свои прочностные качества при их увлажнении. Модель разбивалась тетраэдрами с размером ребра 20 м (рис. 1).

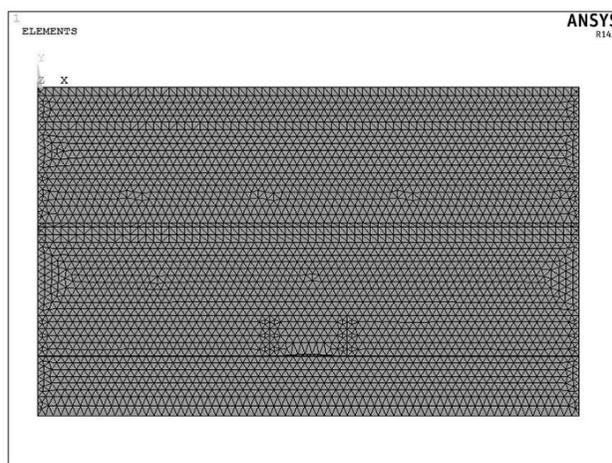


Рис. 1. Схема разбивки модели конечными элементами

2. Анализ модели подработки. На основании описанного подхода была создана модель подработки, со следующими условиями выемки пластов:

- глубина отработки лав 800 м;
- длина лавы на пласте 200 м;
- суммарная длина ранее отработанных лав рассматриваемого горизонта 2200 метров;

– угол залегания пласта — 0 градусов;

Размеры модели – ширина 4000 метров, глубина 1100.

Моделировался ряд случаев затопления угольного массива:

- пошаговое затопление горного массива на 50 метров над лавой с различным количеством лав, по пласту глубиной 700 метров, затопления горного массива на 300 метров над лавой с глубины -700, до глубины -400 метров (вариант объединения системы водопродящих трещин) при условии полной подработки поверхности как по падению, так и по простиранию;

- затопление горного массива при расположении лав не непосредственно друг над другом, а при частичном пересечении плоскостей лав на разных пластах.

В результате проведенных расчетов, моделирующих затопление одного пласта, было установлено, что характер оседаний, вызванных затоплением горного массива, соответствует характеру оседаний при подработке, однако его величина существенно меньше (рис. 2). Наибольшие деформации регистрировались

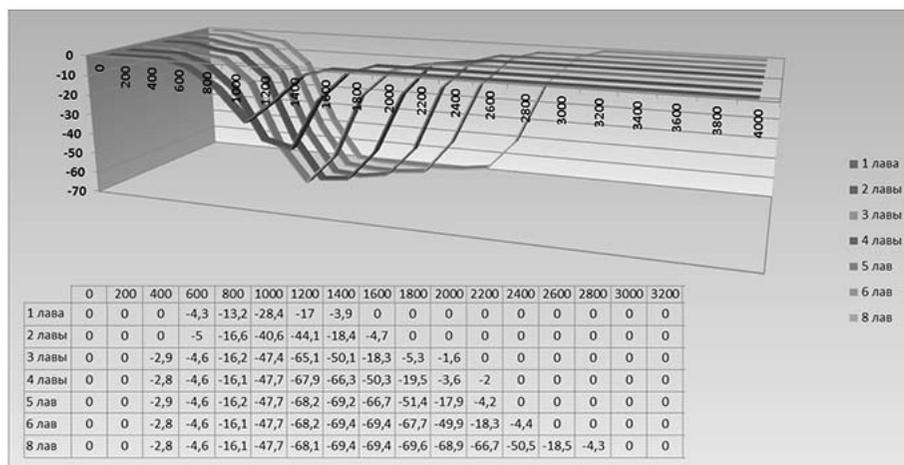


Рис. 2. Результаты моделирования деформаций земной поверхности

при повышении уровня воды до 300 метров над лавой при полной подработке поверхности, регистрировались сдвигения земной поверхности до 40 процентов от начальных, вызванных подработкой.

При этом, увеличение зоны распространения водопродящих трещин приводит к нелинейному приросту оседаний и вызывает незначительное увеличение

зоны влияния сдвижений горного массива, вызванных активизацией геомеханических процессов на объекты поверхности.

Моделирование затопления горного массива при расположении лав не непосредственно друг над другом, а при частичном пересечении плоскостей лав на разных пластах показало, что максимальные оседания смещаются относительно оседаний, характерных для подработки, в сторону максимальных объемов извлеченной горной массы (рис. 3).

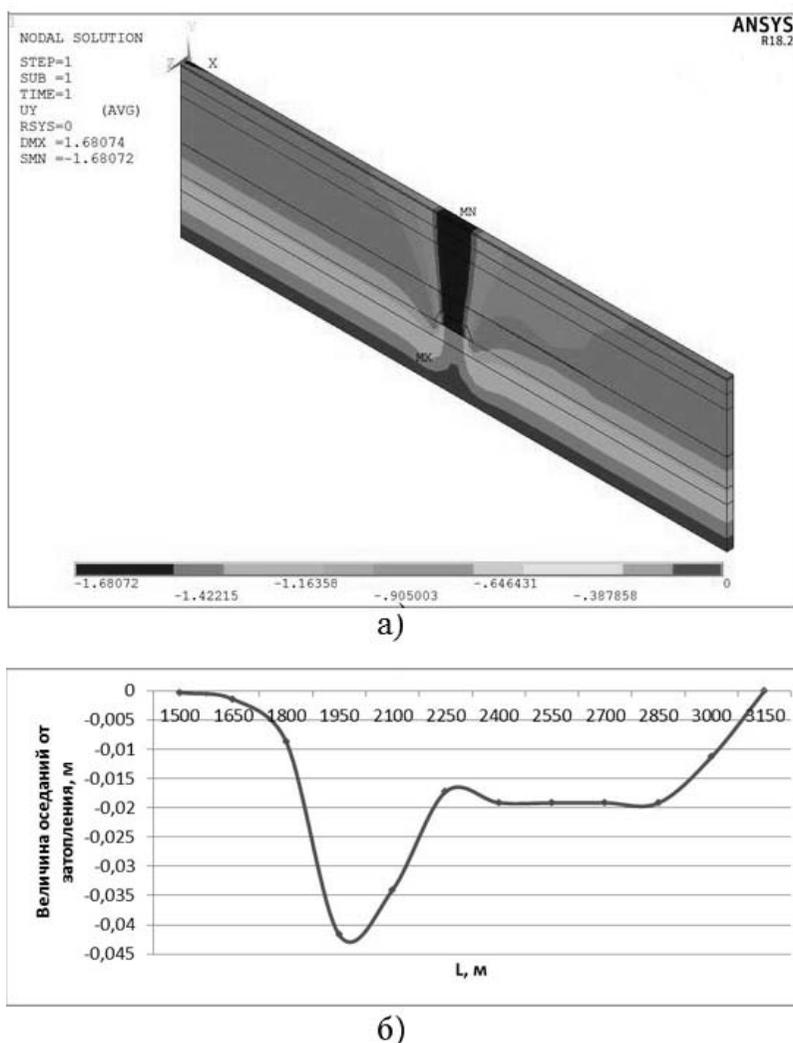


Рис. 3. Результаты моделирования деформаций земной поверхности при многократной подработке земной поверхности несколькими пластами

При затоплении нижележащих пластов, наблюдается незначительная активизация геомеханических процессов в вышележащих отработанных пластах, что указывает на необходимость учета всех горных выработок, расположенных в

пределах мульд сдвижения затопливаемых лав.

Разработанный метод прогноза деформаций земной поверхности, вызванных активизацией процесса сдвижений при затоплении горных выработок закрывающихся шахт, основанный на использовании конечно-элементной модели горного массива, учитывает его литологический состав, физико-механические свойства горных пород, условия залегания пластов и горнотехнические условия отработки и отличается наличием механизма калибровки параметров модели по результатам шахтных исследований позволяет прогнозировать деформации земной поверхности как при первичной, так и при многократной подработке.

Заключение. По результатам данного исследования можно сделать следующие выводы: при прогнозе сдвижений земной поверхности в результате затопления горных выработок, отрабатываемых по нескольким пластам, необходимо учитывать все отработанные горизонты, независимо от того, подвергаются они затоплению или нет. Максимальные оседания при затоплении горных выработок, многократно подработавших земную поверхность, смещаются относительно максимальных оседаний при подработке, что подчеркивает важность учета всего комплекса горных выработок на рассматриваемом участке. В случаях же когда шахтой отрабатывался один пласт, характер деформаций земной поверхности при ее затоплении будет аналогичен характеру деформаций при подработке.

1. Ликвидация угольных шахт. Защита земной поверхности от затопления горных выработок. Рекомендации: КД 12.12.004-98: Утв. Министерством угольной промышленности Украины 20.12.98. – Донецк, 1998. – 46 с.
2. *Гавриленко Ю.Н.* Техногенные последствия закрытия угольных шахт Украины: моногр. / Ю.Н. Гавриленко, В.Н. Ермаков, Ю.Ф. Кренида, О.А. Улицкий, В.А. Дрибан. – Донецк: Норд-Пресс, 2004. – 631 с.
3. *Грищенко Н.Н.* Анализ методик расчета активизации сдвижений земной поверхности при затоплении массива горных пород на ликвидируемых угольных шахтах / Н.Н. Грищенко, Ф.М. Голубев // Инновационные перспективы Донбасса: материалы 3-й Международной научно-практической конференции (Донецк, 24–25 мая 2017 г.) – Донецк: ДонНТУ, 2017. – С. 99–108.
4. *Питаленко Е.И.* Влияние увлажнения горного массива на активизацию геомеханических процессов при закрытии угольных шахт / Е.И. Питаленко, В.В. Васютина, В.Н. Ревва // Научные труды УкрНИИМИ НАН Украины. – 2011. – № 8. – С. 117–128.
5. *Ильяхин Д.А.* Прогноз развития зоны водопродящих трещин при разработке Яковлевского месторождения богатых железных руд: диссертация ... кандидата технических наук / Д.А. Ильяхин. – Нац. минерально-сырьевой ун-т "Горный СПб, 2014. – 125 с.
6. Решение геозкологических и социальных проблем при эксплуатации и закрытии угольных шахт / В.Ф. Янукович, Н.Я. Азаров, А.Д. Алексеев и др. – Донецк: ООО «Алан», 2002. – 480 с.
7. *Феофанов А.Н.* Переоценка влияния факторов на процесс активизации провалообразований / А.Н. Феофанов // Наук. пр. УкрНДМІ НАН України. – 2009. – № 5. – С. 18–32.
8. *Корнев Е.С.* Разработка комплекса программ и численное моделирование геомеханических процессов в углепородном массиве: автореферат диссертации ... кандидата технических наук / Е.С. Корнев. – ФГБОУ ВПО «Сибирский гос. инду-стриальный ун-т», Новокузнецк, 2013. – 19 с.
9. *Фадеев А.Б.* Метод конечных элементов в геомеханике / А.Б. Фадеев. – М.: Недра, 1987. – 221 с.

10. Грищенко Н.Н. Конечно-элементное моделирование как новый способ прогноза геомеханических процессов при подработке земной поверхности / Н.Н. Грищенко, Ф.М. Голубев, С.С. Стельмах // Инновационные перспективы Донбасса: сб. науч. тр. – Донецк, 2016. – № 7. – С. 62–66.

Ph.M. Golubev

Features of the parameters of the displacement of the earth's surface, repeatedly undermined by mine workings, during the liquidation of coal mines.

This article describes the mechanism of deformation processes occurring in a rock mass when it gets wet using experimental and laboratory research. The drawbacks of the existing method are identified and solutions for their elimination are proposed. An innovative approach to modeling geomechanical processes associated with the liquidation of coal mining enterprises is described. Based on the models, the dependencies of the subsidences on the level of mine water above the longwall and the depth of flooded mine workings are constructed. The general formula for calculating the subsidence of the earth's surface is given. In this article under consideration analyzes the influence of repeated undermined by mine workings on the nature of the earth's surface displacement during flooding of mine workings of liquidated coal mines. The main regularities of changes in the parameters of displacement are determined depending on the number of coal seams worked out by the mine. A method has been developed for predicting deformations of the earth's surface caused by the activation of the displacement process during flooding of mine workings of closed mines, taking into account the lithological composition, physical and mechanical properties of rocks, bedding conditions and mining technical conditions.

Keywords: *ground movement, flooding mine workings with water, mine abandonment, FEM models.*

Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ),
Донецк
ranimi@ranimi.org

Получено 25.12.2020