

ISSN 0136-4545

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

**Журнал
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ
МЕХАНИКИ**

№ 4 (81)

2022

№ 4 (81) / 2022

Основан в 1970г.

ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Механика твердого тела

Мазнев А.В. Аналитические методы исследования уравнений движения гиригостата с неподвижной точкой 5

Механика деформируемого твердого тела

Глухов А.А., Сторожев В.И., Шалдырван В.А. Интегрирование системы уравнений распространения произвольно ориентированных трехпарциальных поверхностных волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве..... 15

Глушанков Е.С., Мироненко А.Б. Решение задачи об изгибе свободно опертой прямоугольной пьезоэлектрической плиты. I..... 23

Карасев Д.С., Сторожев С.В. Интегрирование уравнений распространения связанных электроупругих сдвиговых волн в полупространстве функционально-градиентной пьезокерамики..... 47

Бондаренко Н.С., Гольцев А.С. Коэффициенты интенсивности напряжений при термоупругом изгибе изотропных пластин с теплопроницаемым разрезом в случае симметричного теплообмена..... 53

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Номбре С.Б., Полянский Д.Д., Сторожев С.В., Чан Ба Ле Хоанг Анализ неконтрастной модели осесимметричного термонапряженного состояния полого цилиндра..... 63

Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика

Голубев Ф.М., Бардакова Е.А. Геомеханические последствия затопления верхних горизонтов ликвидируемых шахт..... 77

Новгородцева Л.А., Ялута Е.А., Шалованов О.Л., Бородин Д.С. Пред-
посылки применения микросейсмических наблюдений для изучения
опасных скоплений метана в приразломных зонах.....

86

№ 4 (81) / 2022

Founded in 1970.

JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

CONTENTS

Rigid Body Dynamics

- Mazniev A.V.* Analytical methods for investigating equations of motion of a gyrostat with a fixed point 5

Solid Mechanics

- Glukhov A.A., Storozhev V.I., Shaldyrvan V.A.* Integration of a system of equations arbitrary oriented three-partial surface waves propagation in a functional-gradient orthotropic half-space..... 15
- Glushankov E.S., Mironenko A.B.* The solution of the problem of bending of simply supported rectangular piezoelectric plate. I..... 23
- Karasev D.S., Storozhev S.V.* Integration of equations a coupled electroelastic shear waves propagation in the half-space of functional-gradient piezoceramics..... 47
- Bondarenko N.S., Goltsev A.S.* Stress intensity factors for thermoelastic bending of isotropic plates with a heat-permeable cut in the case of symmetric heat exchange..... 53

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes

- Nombre S.B., Polyansky D.D., Storozhev S.V., Tran Ba Le Hoang* Analysis of a non-contrast model of axisymmetric thermal stressed state for hollow cylinder..... 63

Geomechanics, Rock Damage, Mining Aerogasdynamics and Thermal Physics

- Golubev P.M., Bardakova* Geomechanical consequences of flooding of the upper horizons of liquidated mines..... 77

Novgorotseva L.A., Yalputa E.A., Shalovanov O.L., Borodin D.S. Prerequisites for the application of microseismic observations for the exploration of dangerous methane concentrations in fault zones.....

86

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 531.38; 531.39
 doi:10.24412/0136-4545-2022-4-5-14
 EDN:DYGKKS



©2022. А.В. Мазнев

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

В статье развиты некоторые аналитические методы исследования решений уравнений динамики гиростата. В задаче об интегрировании уравнений движения гиростата на инвариантных соотношениях класса Чаплыгина установлено новое достаточное условие существования интегрирующего множителя приведенных уравнений.

Ключевые слова: первые интегралы, инвариантные соотношения, гиростат.

Введение. Согласно методике исследования уравнений динамики гиростата с постоянным и переменным гиростатическим моментом, необходимо последовательно решить следующие задачи: найти условия существования инвариантных соотношений, описывающих программные движения; провести редукцию уравнений движения на заданных инвариантных соотношениях к системе меньшей размерности; осуществить поиск новых первых интегралов редуцированных уравнений и провести с их помощью интегрирование уравнений движения; построить решения редуцированных уравнений или в замкнутом виде, или в виде рядов Ляпунова.

1. Интегрирование уравнений динамики на инвариантных соотношениях. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которые, как правило, рассматриваются в динамике твердого тела

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0, \quad (i = \overline{1, n}). \quad (1)$$

Правые части уравнений (1) предполагаются непрерывно-дифференцируемыми до порядка k в области $E_n \subset R_n$.

Для интегрирования системы (1) в квадратурах, согласно теории Якоби, достаточно знать $n - 2$ первых независимых интеграла.

Найдем условия интегрируемости уравнений (1) в квадратурах в случае, когда они допускают k первых интегралов

$$\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_j \quad (j = \overline{1, k}), \quad (2)$$

и l инвариантных соотношений класса Чаплыгина ($k + l = n - 2$)

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, g_l(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (3)$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 &= g_1^{m_{11}} \lambda_{11} + g_2^{m_{12}} \lambda_{12} + \dots + g_l^{m_{1l}} \lambda_{1l}, \\ \dot{g}_2 &= g_1^{m_{21}} \lambda_{21} + g_2^{m_{22}} \lambda_{212} + \dots + g_l^{m_{2l}} \lambda_{2l}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dot{g}_l &= g_1^{m_{l1}} \lambda_{l1} + g_2^{m_{l2}} \lambda_{l2} + \dots + g_l^{m_{ll}} \lambda_{ll}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $m_{ij} > 0$, $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, c_j ($j = \overline{1, k}$) – произвольные постоянные.

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Введем в точке $x^{(0)} \in E_n$ и её окрестности новые координаты y_1, y_2, \dots, y_n

$$x_i = q_i(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad D(y_1, y_2, \dots, y_n) = \left| \frac{\partial q_i}{\partial y_j} \right| \neq 0 \quad (i, j = \overline{1, n}), \quad (5)$$

где $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in E_n^* \subset R_n$. Так как якобиан замены переменных в (5) отличен от нуля, то замена обратима

$$y_i = Q_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (i = \overline{1, n}). \quad (6)$$

Для якобиана замены из (6) выполняются условия

$$\begin{aligned} D^*(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \left| \frac{\partial Q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} \right| \neq 0 \quad (i, j = \overline{1, n}), \\ D^*(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{1}{\langle D(y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle}, \quad \langle D(y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = \\ &= D(Q_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, Q_n(x_1, x_2, \dots, x_n)). \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения (1) с помощью замены (5) преобразуются к виду

$$\dot{y}_i = Y_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = \overline{1, n}). \quad (8)$$

Преобразуем систему (1) к системе (6) с учетом k первых интегралов (2) и l инвариантных соотношений (3)

$$\begin{aligned} y_j &= \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (j = \overline{1, k}), \\ y_{k+1} &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, y_{k+l} = g_l(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_{n-1} &= x_{n-1}, \quad y_n = x_n. \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда, с учетом равенств (4), получим

$$\dot{y}_1 = 0, \dots, \dot{y}_k = 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_{k+1} &= y_{k+1}^{m_{11}} \Lambda_{11} + y_{k+2}^{m_{12}} \Lambda_{12} + \dots + y_{k+l}^{m_{1l}} \Lambda_{1l}, \\
 \dot{y}_{k+2} &= y_{k+1}^{m_{21}} \Lambda_{21} + y_{k+2}^{m_{22}} \Lambda_{22} + \dots + y_{k+l}^{m_{2l}} \Lambda_{2l}, \\
 &\dots \\
 \dot{y}_{k+l} &= y_{k+1}^{m_{l1}} \Lambda_{l1} + y_{k+2}^{m_{l2}} \Lambda_{l2} + \dots + y_{k+l}^{m_{ll}} \Lambda_{ll}, \\
 \dot{y}_{n-1} &= Y_{n-1}(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad \dot{y}_n = Y_n(y_1, y_2, \dots, y_n).
 \end{aligned} \tag{11}$$

В системе (11) $\Lambda_{ij} = \Lambda_{ij}(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Предположим, что у системы (10)-(12) имеются $n - 2$ первых интеграла и отсутствуют инвариантные соотношения. Тогда из системы (10)-(12) следует

$$\begin{aligned}
 y_1 &= c_1, \dots, y_{n-2} = c_{n-2}, \\
 \dot{y}_{n-1} &= Y_{n-1}(c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, y_{n-1}, y_n), \\
 \dot{y}_n &= Y_n(c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, y_{n-1}, y_n).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Известно, что для систем уравнений (1), (8) имеет место тождество Якоби

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \\
 &= \left\langle \frac{1}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} \sum_{j=1}^n \frac{\partial D(y_1, y_2, \dots, y_n) Y_j(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_j} \right\rangle.
 \end{aligned} \tag{14}$$

При наших предположениях тождество (14) примет вид

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial D(c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, y_{n-1}, y_n) Y_{n-1}(c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, y_{n-1}, y_n)}{\partial y_{n-1}} + \\
 &+ \frac{\partial D(c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, y_{n-1}, y_n) Y_n(c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, y_{n-1}, y_n)}{\partial y_n} = 0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Равенство (15) означает, что функция $D(c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, y_{n-1}, y_n)$ является интегрирующим множителем последних двух уравнений системы (13). Таким образом, система (13) допускает дополнительный первый интеграл $f(c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, y_{n-1}, y_n) = c_{n-1}$, где c_{n-1} – произвольная постоянная. Выражая из него, например, параметр y_{n-1} , получим $y_{n-1} = y_{n-1}(c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, c_{n-1}, y_n)$. Подстановка этой функции в уравнение для y_n системы (13) приводит к уравнению, из которого путем обращения интеграла можно определить функцию

$$y_n = y_n(c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, c_{n-1}, c_n, t), \tag{16}$$

где c_n – произвольная постоянная, возникшая из операции обращения интеграла. Таким образом, система (13) интегрируется в квадратурах. Это означает, что интегрируется и система (1).

Предположим, что в системе (10)-(12) имеют место соотношения $m_{ii} = 1$ и $\Lambda_{ii}(y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+i-1}, 0, y_{k+i+1}, \dots, y_n) \neq 0$. Тогда эта система на первых

интегралах $y_1 = c_1, \dots, y_k = c_k$ и инвариантных соотношениях $y_{k+1} = 0, \dots, y_{k+l} = 0$ примет вид

$$\begin{aligned} y_1 = c_1, \dots, y_k = c_k, \quad y_{k+1} = 0, \dots, y_{k+l} = 0, \\ \dot{y}_{n-1} = Y_{n-1}(c_1, c_2, \dots, c_k, \underbrace{0, \dots, 0}_l, y_{n-1}, y_n), \\ \dot{y}_n = Y_n(c_1, c_2, \dots, c_k, \underbrace{0, \dots, 0}_l, y_{n-1}, y_n). \end{aligned} \quad (17)$$

Якобиан обратной замены, согласно формулам (7), примет вид

$$D(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{\langle D^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle} \neq 0. \quad (18)$$

Тождество Якоби (14) на первых интегралах и инвариантных соотношениях (17) примет вид

$$\begin{aligned} \Lambda_{11}(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0, y_{n-1}, y_n) + \Lambda_{22}(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0, y_{n-1}, y_n) + \\ + \Lambda_{33}(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0, y_{n-1}, y_n) + \dots + \Lambda_{ll}(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0, y_{n-1}, y_n) + \\ + \frac{\partial D(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0, y_{n-1}, y_n) Y_{n-1}(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0, y_{n-1}, y_n)}{\partial y_{n-1}} + \\ + \frac{\partial D(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0, y_{n-1}, y_n) Y_n(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0, y_{n-1}, y_n)}{\partial y_n} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\begin{aligned} \Lambda_{11}(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0, y_{n-1}, y_n) + \Lambda_{22}(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0, y_{n-1}, y_n) + \\ + \dots + \Lambda_{ll}(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0, y_{n-1}, y_n) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Из равенства (19), в силу (20), следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial D(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0, y_{n-1}, y_n) Y_{n-1}(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0, y_{n-1}, y_n)}{\partial y_{n-1}} + \\ + \frac{\partial D(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0, y_{n-1}, y_n) Y_n(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0, y_{n-1}, y_n)}{\partial y_n} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Соотношение (21) позволяет утверждать, что последние два уравнения из системы (17) интегрируются в квадратурах, а их интегрирующим множителем является функция

$$\tilde{D}(y_{n-1}, y_n) = D(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0, y_{n-1}, y_n). \quad (22)$$

Таким образом, получено достаточное условие (20) интегрируемости системы (1), которая допускает k первых интегралов и l инвариантных соотношений класса С.А. Чаплыгина при $m_{ii} = 1$ ($i = \overline{1, l}$).

Рассмотрим теперь систему (10)–(12) не вводя ограничений на числа m_{ij} . Левая часть тождества Якоби (14) в силу ограничений на правые части уравнений (1) равна нулю, а правая часть (14), с учетом соотношений (10), примет вид

$$\sum_{j=k+1}^n \frac{\partial D(y_1, y_2, \dots, y_n) Y_j(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_j} = 0. \quad (23)$$

Равенство (23) на первых интегралах $y_m = c_m$ ($m = \overline{1, k}$) и инвариантных соотношениях $y_{k+1} = 0, \dots, y_{k+l} = 0$ примет вид

$$D(M_*) \left[m_{11} y_{k+1}^{m_{11}-1} \Lambda_{11}(M_*) + \dots + m_{ll} y_{k+l}^{m_{ll}-1} \Lambda_{ll}(M_*) \right] + \frac{\partial D(M_*) Y_{n-1}(M_*)}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial D(M_*) Y_n(M_*)}{\partial y_n} = 0, \quad (24)$$

где $(M_*) = (c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0, y_{n-1}, y_n)$.

Ранее был изучен случай [1] $m_{ii} > 1$ ($i = \overline{1, l}$). На инвариантных соотношениях $y_{k+1} = 0, \dots, y_{k+l} = 0$ из равенства (24) получим соотношение (21), при выполнении которого последние два уравнения из системы (17) интегрируются в квадратурах. Интегрирующий множитель уравнений (17) имеет вид: $D(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0, y_{n-1}, y_n)$.

Таким образом, случаи $m_{ii} = 1$ ($i = \overline{1, l}$) и $m_{ii} > 1$ ($i = \overline{1, l}$) рассмотрены. Рассмотрим случай, когда часть величин m_{ii} равна единице, а часть m_{ii} больше единицы. Положим $m_{11} > 1, \dots, m_{\sigma\sigma} > 1, m_{\sigma+1\sigma+1} = 1, \dots, m_{ll} = 1$. Так как $D(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0, y_{n-1}, y_n) \neq 0$, то для обобщения указанных выше результатов положим

$$\Lambda_{\sigma+1\sigma+1}(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0, y_{n-1}, y_n) + \dots + \Lambda_{ll}(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0, y_{n-1}, y_n) = 0. \quad (25)$$

Равенство (25) есть достаточное условие существования интегрирующего множителя уравнений (17), и поэтому система (10)–(12) интегрируема, а значит система (1) интегрируется в квадратурах.

2. Методы нахождения первых интегралов на инвариантных множествах. Рассмотрим уравнения Кирхгофа-Пуассона, которые описывают движения гиростата с постоянным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + \omega \times B\nu + s \times \nu + \nu \times C\nu, \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega. \quad (26)$$

Здесь A – тензор инерции гиростата; ω – вектор угловой скорости тела-носителя; ν – единичный вектор оси симметрии силовых полей; λ – гиростатический момент; s – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс; B и C – постоянные симметричные матрицы третьего порядка.

Уравнения (26) допускают три первых интеграла

$$\begin{aligned} A\omega \cdot \omega - 2(s \cdot \nu) + C\nu \cdot \nu &= 2E, \quad \nu \cdot \nu = 1, \\ (A\omega + \lambda) \cdot \nu - \frac{1}{2}(B\nu \cdot \nu) &= k. \end{aligned} \quad (27)$$

Движения гиростата рассмотрим в главной системе координат. Тогда компоненты вектора $x = A\omega$ таковы: $A_1\omega_1, A_2\omega_2, A_3\omega_3$, где ω_i – компоненты вектора угловой скорости, а A_i – главные моменты инерции гиростата.

Запишем уравнения (26), (27) в форме уравнений (1), но с учетом размерности фазового пространства

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_6), \quad \frac{\partial X_i(x_1, x_2, \dots, x_6)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = \overline{1, 6}), \quad (28)$$

где $X_i(x_1, x_2, \dots, x_6)$ – многочлены относительно переменных $x_1 = \omega_1, x_2 = \omega_2, x_3 = \omega_3, x_4 = \nu_1, x_5 = \nu_2, x_6 = \nu_3$. В силу геометрического интеграла из (27), все функции x_4, x_5, x_6 ограничены по t . Функции $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), x_3 = x_3(t)$, в силу интегралов (27), также ограничены. Таким образом, все решения уравнений (26), (27) существуют при заданных начальных данных на бесконечном промежутке по t .

Запишем интегралы (27) в виде

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_6) &= c_1, \\ f_2(x_4, x_5, x_6) &= x_4^2(t) + x_5^2(t) + x_6^2(t) = c_2 = 1, \\ f_3(x_1, x_2, \dots, x_6) &= c_3. \end{aligned} \quad (29)$$

Согласно теории Якоби существование у системы (29) дополнительного первого интеграла позволило бы получить остальные три интеграла

$$\begin{aligned} f_4(x_1, x_2, \dots, x_6) &= c_4, \quad f_5(x_1, x_2, \dots, x_6) = c_5, \\ f_6(x_1, x_2, \dots, x_6, t) &= c_6. \end{aligned} \quad (30)$$

В.В. Козловым и Д.А. Онищенко [2] была доказана неинтегрируемость уравнений (28), (29) в общем случае. Поэтому представляет большой интерес построение интегрального многообразия (29), (30) при фиксированных значениях произвольных постоянных c_i ($i = \overline{4, 6}$).

Пусть $x = x(t; x^{(0)})$ – решение уравнений (28). Начальное значение вектора x таково: $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_6^{(0)})^T \neq 0$. Будем предполагать, что $x^{(0)}$ не принадлежит особому инвариантному множеству уравнений (28), то есть $X_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_6^{(0)}) \neq 0$ и $i = \overline{1, 6}$.

Множество $M \subset E_6$ называется неособым инвариантным множеством системы (28), в случае $x(t; x^{(0)}) \in M$ для $t \geq 0$ и произвольной неособой точки $x^{(0)} \in M$. Величина E_6 задается соотношениями (29), (30). Известно, что в

окрестности каждой неособой точки уравнений (28) существуют первые интегралы $f_j(x_1, x_2, \dots, x_6) = c_j$, ($j = \overline{1, 5}$). Для того, чтобы функция $f(x_1, x_2, \dots, x_6)$ была первым интегралом, должно выполняться равенство

$$L_x f = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_6)}{\partial x_i} X_i(x_1, x_2, \dots, x_6) = 0, \quad (31)$$

где $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_6}\right) \neq 0$.

Рассмотрим инвариантное множество

$$M : \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_6) = 0 \quad (j = \overline{1, k}; \quad k < 6), \quad (32)$$

и функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_6)$, которая принимает постоянное значение на множестве (32). Тогда условие того, что $f(x_1, x_2, \dots, x_6)$ – первый интеграл на множестве M , можно записать так

$$f(x_1, x_2, \dots, x_6) \Big|_{\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_6)=0} = c \quad (j = \overline{1, k}), \quad (33)$$

где c – произвольная постоянная.

Предполагаем, что функции (32) непрерывно дифференцируемы и $\text{rang} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}\right) = k$.

3. Способ нахождения первого интеграла в случае, когда инвариантное множество M построено. Пусть известны инвариантные соотношения (32), из которых можно определить переменные x_i

$$x_i = x_i(u_1, u_2, \dots, u_m), \quad (34)$$

где u_1, u_2, \dots, u_m ($m = \dim M = 6 - k$). Тогда с помощью (34) можно получить редуцированную систему уравнений

$$\dot{u}_j = U_j(u_1, u_2, \dots, u_m) \quad (j = \overline{1, m}). \quad (35)$$

Для нахождения первого интеграла на инвариантном множестве M необходимо решить задачу о существовании первого интеграла уравнений (35) $F(u_1, u_2, \dots, u_m) = c$, где c – произвольная постоянная. Тогда должно выполняться тождество, аналогичное условию (31)

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial F(u_1, u_2, \dots, u_m)}{\partial u_j} U_j(u_1, u_2, \dots, u_m) \equiv 0 \quad (\forall u_1, u_2, \dots, u_m).$$

Примером может служить система трех уравнений, которая появляется в результате редукции уравнений движения на трех ИС [3]

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= \nu_3^{-1}(a\nu_2 + b\nu_2\nu_3 + c\nu_2\nu_3^2 - d\nu_3^3), \\ \dot{\nu}_2 &= \nu_3^{-1}(-a\nu_1 - b\nu_1\nu_3 - c\nu_1\nu_3^2 + e\nu_3^3), \\ \dot{\nu}_3 &= \nu_3(d\nu_1 - e\nu_2). \end{aligned} \quad (36)$$

Система (36) является аналогом системы (35). Можно показать, что она имеет первые интегралы

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad e\nu_1 + d\nu_2 + c\nu_3 + b \ln |\nu_3| - a\nu_3^{-1} = const,$$

которые позволяют свести интегрирование системы к квадратурам.

4. Второй способ нахождения первого интеграла. Отличительной чертой второго способа является использование первых интегралов исходных уравнений, то есть функций (29).

Обозначим через $x^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t), \dots, x_n^*(t))$ – решения уравнений (28), для которого соотношение

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c \quad (37)$$

является первым интегралом. Это означает, что для всех решений $x^*(t)$ выполняется условие $f(x_1^*(t), x_2^*(t), \dots, x_n^*(t)) = c$, где c – постоянная. В силу метода инвариантных соотношений П.В. Харламова, для всех этих решений выполняются равенства

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_6) = c, \quad f^{(1)}(x_1, x_2, \dots, x_6) = L_x f(x_1, x_2, \dots, x_6) = 0, \\ f^{(2)}(x_1, x_2, \dots, x_6) = L_x f^{(1)}(x_1, x_2, \dots, x_6) = 0, \quad f_1(x_1, x_2, \dots, x_6) = c_1, \\ f_2(x_4, x_5, x_6) = x_4^2(t) + x_5^2(t) + x_6^2(t) = c_2 = 1, \\ f_3(x_1, x_2, \dots, x_6) = c_3, \end{aligned} \quad (38)$$

где $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ – первая и вторая производные от $f(x_1, x_2, \dots, x_6)$.

Множество значений x_1, x_2, \dots, x_6 , для которого равенства (38) зависимы, и составляет инвариантное множество M . При этом должно выполняться условие, что величина c – произвольная постоянная.

Практический способ в нахождении условий существования множества M состоит в последовательном решении двух задач. Первая задача заключается в том, что исследуются условия, при выполнении которых равенство $f^{(1)}(x_1, x_2, \dots, x_6) = 0$ было бы тождеством на первом интеграле (37) и интегралах $f_1(x_1, x_2, \dots, x_6) = c_1$, $f_2(x_1, x_2, \dots, x_6) = c_2$, $f_3(x_1, x_2, \dots, x_6) = c_3$. При ее решении уравнение $f^{(1)}(x_1, x_2, \dots, x_6) = 0$ может быть преобразовано к виду $\Phi(u, v, c, c_1, c_3) = 0$, где u, v – новые независимые переменные. Требование того, чтобы уравнение $\Phi(u, v, c, c_1, c_3) = 0$ было тождеством для любых значений u, v и параметра c , дает условия на постоянные c_1, c_3 и параметры уравнений (26). Множество M в этом случае описывается уравнениями $f(x_1, x_2, \dots, x_6) = c$, $f_1(x_1, x_2, \dots, x_6) = c_1$, $f_2(x_4, x_5, x_6) = x_4^2(t) + x_5^2(t) + x_6^2(t) = 1$, $f_3(x_1, x_2, \dots, x_6) = c_3$. Здесь c_1, c_3 могут быть как произвольными постоянными, так и функциями параметра c .

Вторая задача состоит в том, что в системе (38) требуется, чтобы равенство $f^{(2)}(x_1, x_2, \dots, x_6) = 0$ становилось тождеством на оставшихся соотношениях из системы (38). То есть, во второй задаче исследуется система (38) в предположении, что функции $f(x_1, x_2, \dots, x_6) = c$, $f^{(1)}(x_1, x_2, \dots, x_6) = 0$, $f_1(x_1, x_2, \dots, x_6) =$

$c_1, f_2(x_1, x_2, \dots, x_6) = c_2, f_3(x_1, x_2, \dots, x_6) = c_3$. независимы. При указанном подходе в общем случае приходим к уравнению вида $F(u, c, c_1, c_3) = 0$, где u – некоторая переменная. Требование того, чтобы это уравнение было тождеством по u и параметру c , приводит к условиям существования инвариантного множества M .

5. Примеры существования первого интеграла на инвариантных многообразиях. Рассмотрим классическую задачу о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, то есть в (26), (27) положим $B = 0, C = 0, \lambda = 0$,

$$A\dot{\omega} = A\omega \times \omega + s \times \nu, \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega, \quad (39)$$

$$A\omega \cdot \omega - 2(s \cdot \nu) = 2E, \quad \nu \cdot \nu = 1, \quad A\omega \cdot \nu = k. \quad (40)$$

Обозначим $\omega = (p, q, r)$ и потребуем, чтобы в (39), (40) выполнялись условия на параметры: $A_1 = 2A_2, s = (s, 0, 0)$. Здесь A_1, A_2 – главные моменты инерции. Тогда уравнения (39) допускают решение Бобылева–Стеклова

$$\begin{aligned} p = \kappa, \quad r = 0, \quad s\nu_1 = 2^{-1}A_2q^2 + c, \quad s\nu_2 = -\kappa A_2q, \quad s\nu_3 = \sqrt{f(q)}, \\ \int_{q_0}^q \frac{dq}{\sqrt{f(q)}} = -\frac{t - t_0}{A_2}, \quad f(q) = -\frac{A_2^2}{4}q^4 - A_2(c + A_2\kappa^2)q^2 + s^2 - c^2, \end{aligned} \quad (41)$$

где κ – произвольная постоянная.

Постоянные первых интегралов из (50) принимают значения $E = \frac{A_1\kappa^2}{2} - c, k = \frac{2\kappa A_2 c}{s}$. В решении Бобылева–Стеклова (41) три произвольных постоянных κ, c, q_0 . Важно, что данное решение можно охарактеризовать линейным первым интегралом $p = \kappa = const$, который не является следствием классических интегралов.

Рассмотрим для уравнений (26), (27) решение Е.К. Щетининой [4], полученное при обобщении решения В.Н. Рубановского [5]. Пусть выполняются условия

$$\begin{aligned} A_{12} = A_{23} = 0, \quad A_{13}^2 = (A_{22} - A_{11})(A_{22} - A_{33}), \quad B_{11} = B_{22} = -B_{33}, \\ B_{12} = B_{23} = 0, \quad B_{13}^2 = (A_{22} - A_{11})(C_{33} - C_{11}), \\ A_{13}B_{13} = B_{11}(A_{22} - A_{11}), \quad C_{11} = C_{22}, \quad C_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \\ \lambda_1 = -B_{11} \sin \kappa_0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\frac{A_{33}B_{13} \sin \kappa_0}{A_{22} - A_{11}}, \quad s_1 = s_2 = 0, \\ s_3 = -\frac{A_{13}B_{13}^2 \sin \kappa_0}{(A_{22} - A_{11})^2}, \quad tg\kappa_0 = \frac{A_{22} - A_{11}}{A_{13}}, \quad n = \frac{B_{13} \sin \kappa_0}{A_{22} - A_{11}}. \end{aligned} \quad (42)$$

При условиях (42) уравнения (26) допускают решение

$$\begin{aligned} \omega_1 = a'_0 n \sin nt, \quad \omega_2 = a'_0 n \cos nt, \quad \omega_3 = n(a_0 + 1), \\ \nu_1 = \frac{1}{2}d_1(a_0 + 1) \cos 2nt + a'_0 c_1 \sin nt + \frac{1}{2}d_1(a_0 - 1), \\ \nu_2 = a'_0 c_1 \cos nt + \frac{1}{2}d_1(a_0 + 1) \sin 2nt, \quad \nu_3 = a_0 c_1 - a'_0 d_1 \sin nt, \end{aligned} \quad (43)$$

где $a_0 = \cos \theta_0$, $a'_0 = \sin \theta_0$, $c_1 = \cos \kappa_0$, $d_1 = \sin \kappa_0$.

В соотношениях (43) a_0 – постоянная со значениями из интервала $(-1, 1)$.

Решение (43) представим в виде

$$\begin{aligned} \omega_1^2 + \omega_2^2 &= n^2(1 - c_0^2), \quad \omega_3 = n(1 + c_0), \\ \nu_1 &= \frac{\omega_1^2 d_1}{n^2(1 - c_0)} + \frac{c_1}{n} \omega_1 - d_1, \quad \nu_2 = \frac{\omega_2}{n} \left(c_1 + \frac{\omega_1 d_1}{n(1 - c_0)} \right), \\ \nu_3 &= c_0 c_1 - \frac{d_1}{n} \omega_1, \end{aligned} \quad (44)$$

где c_0 – произвольная постоянная ($c_0 = \cos \theta_0$, $|c_0| < 1$). Решение (44) может быть охарактеризовано либо линейным первым интегралом, либо квадратичным первым интегралом.

Заключение. Развита некоторые аналитические методы исследования решений уравнений динамики гиростата. Рассмотрена задача о нахождении первого интеграла на инвариантном множестве уравнений Кирхгофа–Пуассона. Разработана методика нахождения первого интеграла и инвариантного множества уравнений Кирхгофа–Пуассона.

1. Чаплыгин С.А. О принципе последнего множителя / С.А. Чаплыгин // Математический сборник. – 1900. – Т. 21. – С. 479–489.
2. Козлов В.В. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа / В.В. Козлов, Д.А. Онищенко // Докл. АН СССР. – 1982. – 266, № 6. – С. 1298–1300.
3. Горр Г.В. Об интегрировании уравнений динамики твердого тела на инвариантных многообразиях / Г.В. Горр, А.В. Мазнев // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 25–36.
4. Щетинина Е.К. Об асимптотически–прецессионных движениях сферического гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / Е.К. Щетинина // Докл. НАН Украины. – 2005. – № 12. – С. 63–70.
5. Рубановский В.Н. О бифуркации и устойчивости стационарных движений в некоторых задачах динамики твердого тела / В.Н. Рубановский // Прикл. математика и механика. – 1974. – Т. 38, вып. 4. – С. 616–627.

A.V. Maznev

Analytical methods for investigating equations of motion of a gyrostat with a fixed point.

The paper develops some analytical methods for investigating solutions of the equations of dynamics of a gyrostat. In the problem of integration of the equations of motion of the gyrostat on the invariant relations of Chaplygin class a new sufficient condition for the existence of the integrating multiplier of the given equations.

Keywords: *first integrals, invariant relations, gyrostat.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк

Получено 24.11.2022

Donetsk National University, Donetsk

a.maznev@donnu.ru

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2022-4-15-22

EDN:JBNEKR



©2022. А.А. Глухов, В.И. Сторожев, В.А. Шалдырван

ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ ТРЕХПАРЦИАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОМ ОРТОТРОПНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается новая модификация модели распространения произвольно ориентированных трехпарциальных поверхностных волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве, в которой применяется отличный от ранее использовавшихся вариант экспоненциального закона изменения физико-механических характеристик полубесконечного ортотропного функционально-градиентного тела при отходе от границы вглубь полупространства вдоль одного из упруго-эквивалентных направлений. Вводимая функция непрерывной неоднородности характеризует локализацию области интенсивных изменений физико-механических параметров материала в приграничной зоне полупространства и асимптотическое сглаживание закона изменения свойств в глубине массива.

Для рассматриваемой модели предложен и реализован итерационный численно-аналитический алгоритм интегрирования системы дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами, описывающей распространение гармонических произвольно ориентированных в граничной плоскости трехпарциальных поверхностных волн.

Ключевые слова: упругое ортотропное полупространство, поперечная непрерывная неоднородность, распространение локализованных волн, системы волновых уравнений, аналитическое интегрирование, векторные ряды.

Введение. Проблемы волнового деформирования неоднородных функционально-градиентных упругих сред относятся к числу крайне актуальных фундаментальных и прикладных задач математического моделирования для целого ряда научно-технических отраслей. В частности, исследование закономерностей распространения поверхностных волн напряжений вдоль плоских граничных поверхностей при одновременном учете анизотропии и неоднородности физико-механических свойств полубесконечных тел представляет интерес для проектно-конструкторских разработок области акустоэлектронных радиокомпонентов на поверхностных ультразвуковых волнах. Эти же проблемы имеют важное значение для горной сейсмоакустики.

Ввиду значимости исследований по данной проблематике, методы исследования моделей локализованных поверхностных волн у границ непрерывно-

неоднородных сред рассматривались в работах [1–6] на основе ряда подходов к описанию свойства локализацию области интенсивных изменений физико-механических параметров материала в приграничной зоне полупространства и асимптотическое сглаживание закона изменения свойств в глубине массива. Так, для описания данных свойств в работах [3–5] применялся прием выделения в полубесконечном теле приграничного слоя с непрерывной экспоненциальной толщинной неоднородностью физико-механических параметров и находящейся под ним, сопрягаемой с неоднородным приграничным слоем полубесконечной области, занимаемой однородной средой. Вариант приближенного решения уравнений для поверхностных волн релеевского типа в изотропной среде с указанной неоднородностью физико-механических свойств приведен в [2].

С учетом вышеизложенного, целью данной работы является разработка аналитического алгоритма интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами третьего порядка, описывающей распространение произвольно ориентированных трехпарциальных поверхностных волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве в рамках нового варианта модели локализованной у его поверхности зоны выраженной непрерывной неоднородности физико-механических свойств. Результаты представляемого исследования обобщают подход, рассматриваемый в работе [1].

1. Общая характеристика и основные соотношения модели.

Рассматривается ортотропное функционально-градиентное полубесконечное упругое тело, занимающее в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$ область

$$V = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 \geq 0\}, \quad (1)$$

и имеющее ориентированные вдоль координатных осей Ox_j упруго-эквивалентные направления. Вдоль координатного направления Ox_3 физико-механические характеристики материала являются переменными непрерывными величинами.

Для описания эффектов существования локализованной у граничной поверхности тела $x_3 = 0$ зоны существенной непрерывной неоднородности его свойств со снижающимися при отходе от границы вглубь полупространства (при неограниченном росте $|x_3|$) темпами изменения соответствующих величин, используется функциональный закон изменения плотности и упругих постоянных

$$\rho(x_3) = \rho_0 \cdot \varphi(\lambda, \beta, x_3), \quad c_{ij}(x_3) = c_{ij0} \cdot \varphi(\lambda, \beta, x_3) \quad (2)$$

$$(ij = 11, 12, 13, 22, 23, 33, 44, 55, 66), \quad \varphi(\lambda, \beta, x_3) = \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)),$$

где λ, β – действительные значения параметров неоднородности; $\beta > 0$ при $x_3 > 0$ и $\beta < 0$ при $x_3 < 0$.

При таком варианте описания закона неоднородности материала полупространства, в его глубине

$$c_{ij} \rightarrow c_{ij0}, \quad \rho \rightarrow \rho_0,$$

а при малых значениях толщинной формируется приграничная зона неоднородности, характеризующая совокупностью параметров λ, β .

Для материала рассматриваемого типа система уравнений пространственного динамического деформирования относительно функций волновых упругих перемещений $U_j(x_1, x_2, x_3, t)$ принимает вид

$$\begin{aligned}
 & \left(c_{11}(x_3) \partial_1^2 + c_{66}(x_3) \partial_2^2 + c_{55}(x_3) \partial_3^2 + c'_{55}(x_3) \partial_3 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U_{10} + \\
 & \quad + (c_{12}(x_3) \partial_1 \partial_2 + c_{66}(x_3) \partial_1 \partial_2) U_{20} + \\
 & \quad + (c_{13}(x_3) \partial_1 \partial_3 + c_{55}(x_3) \partial_1 \partial_3 + c'_{55}(x_3) \partial_1) U_{30} = 0, \\
 & \quad (c_{12}(x_3) \partial_1 \partial_2 + c_{66}(x_3) \partial_1 \partial_2) U_{10} + \\
 & + \left(c_{66}(x_3) \partial_1^2 + c_{12}(x_3) \partial_2^2 + c_{44}(x_3) \partial_3^2 + c'_{44}(x_3) \partial_3 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U_{20} + \quad (3) \\
 & \quad + (c_{23}(x_3) \partial_2 \partial_3 + c_{44}(x_3) \partial_2 \partial_3 + c'_{44}(x_3) \partial_1) U_{30} = 0, \\
 & \quad (c_{55}(x_3) \partial_1 \partial_3 + c_{13}(x_3) \partial_1 \partial_3 + c'_{13}(x_3) \partial_1) U_{10} + \\
 & \quad + (c_{44}(x_3) \partial_2 \partial_3 + c_{23}(x_3) \partial_2 \partial_3 + c'_{23}(x_3) \partial_2) U_{20} + \\
 & + \left(c_{55}(x_3) \partial_1^2 + c_{44}(x_3) \partial_2^2 + c_{33}(x_3) \partial_3^2 + c'_{33}(x_3) \partial_3 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U_{30} = 0,
 \end{aligned}$$

где

$$\partial_j = \partial / \partial x_j.$$

Для комплексных функций колебательных перемещений в стационарных упругих волнах, распространяющихся вдоль произвольного направления в плоскости Ox_1x_2 , характеризуемого компонентами n_1, n_2 вектора волновой нормали, вводится представление:

$$U_j(x_1, x_2, x_3, t) = U_{j0}(x_3) e^{-i(\omega t - k(n_1 x_1 + n_2 x_2))}. \quad (4)$$

В результате подстановки представлений (4) в уравнения (3) относительно амплитудных составляющих $U_{j0}(x_3)$ комплексных функций волновых перемещений может быть получена система обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, имеющая в матрично-векторной форме вид

$$(\underline{A}_1 \partial_3^2 + \underline{A}_2 \partial_3 + \underline{A}_3) F = 0, \quad (5)$$

где

$$\underline{F} = (U_{10}, U_{20}, U_{30})^T, \quad (6)$$

$$\underline{A}_1 = \begin{pmatrix} c_{55} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix},$$

$$\underline{A}_2 = \begin{pmatrix} c'_{55} & 0 & i k n_1 (c_{13} + c_{55}) \\ 0 & c'_{44} & i k n_2 (c_{23} + c_{44}) \\ i k n_1 (c_{13} + c_{55}) & i k n_2 (c_{23} + c_{44}) & c'_{33} \end{pmatrix},$$

$$\underline{A}_3 = \begin{pmatrix} \Omega^2 - (c_{11}k^2n_1^2 + c_{66}k^2n_2^2) & -(c_{12} + c_{66})k^2n_1n_2 & ikn_1c'_{55} \\ -(c_{12} + c_{66})k^2n_1n_2 & \Omega^2 - (c_{66}k^2n_1^2 + c_{12}k^2n_2^2) & ikn_2c'_{44} \\ ikn_1c'_{13} & ikn_2c'_{23} & \Omega^2 - (c_{55}k^2n_1^2 + c_{44}k^2n_2^2) \end{pmatrix}.$$

Далее, с учетом выражений

$$c'_{ij}(x_3) = c_{ij}^{(0)} \gamma e^{-\beta x_3} e^{\lambda e^{-\beta x_3}} \quad \gamma = \beta \lambda; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_1 &= \underline{A}_1^{(0)} + \underline{A}_1^{(1)} \gamma e^{-\beta x_3}, \\ \underline{A}_2 &= \underline{A}_2^{(0)} + \underline{A}_2^{(1)} \gamma e^{-\beta x_3}, \\ \underline{A}_3 &= \underline{A}_3^{(0)} + \underline{A}_3^{(1)} \gamma e^{-\beta x_3}, \end{aligned} \quad (8)$$

систему (5) можно записать в виде

$$\left(\underline{A}_1^{(0)} \partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(0)} \right) \underline{F} = -\gamma e^{-\beta x_3} \left(\underline{A}_2^{(1)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(1)} \right) \underline{F}, \quad (9)$$

где $A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, A_3^{(0)}$ – матрицы левой части уравнения (9), имеющие вид

$$\begin{aligned} \underline{A}_1^{(0)} &= \begin{pmatrix} c_{55}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}^{(0)} \end{pmatrix}, \\ \underline{A}_2^{(0)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & ikn_1 \left(c_{13}^{(0)} + c_{55}^{(0)} \right) \\ 0 & 0 & ikn_2 \left(c_{23}^{(0)} + c_{44}^{(0)} \right) \\ ikn_1 \left(c_{13}^{(0)} + c_{55}^{(0)} \right) & ikn_2 \left(c_{23}^{(0)} + c_{44}^{(0)} \right) & 0 \end{pmatrix}, \\ \underline{A}_3^{(0)} &= \begin{pmatrix} \Omega^2 - (c_{11}^{(0)}k^2n_1^2 + c_{66}^{(0)}k^2n_2^2) & -(c_{12}^{(0)} + c_{66}^{(0)})k^2n_1n_2 & 0 \\ -(c_{12}^{(0)} + c_{66}^{(0)})k^2n_1n_2 & \Omega^2 - (c_{11}^{(0)}k^2n_1^2 + c_{66}^{(0)}k^2n_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & \Omega^2 - (c_{11}^{(0)}k^2n_1^2 + c_{66}^{(0)}k^2n_2^2) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (10)$$

а $A_2^{(1)}, A_3^{(1)}$ – матрицы правой части уравнения (9):

$$\underline{A}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} c_{55}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ikn_1c'_{55} \\ 0 & 0 & ikn_2c'_{44} \\ ikn_1c'_{13} & ikn_2c'_{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Для интегрирования системы (9) применяется метод последовательных приближений, представляемый алгоритмом

$$\begin{aligned} \underline{F} &= \underline{F}_0 + \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \dots + \underline{F}_n + \dots, \\ \left(\underline{A}_1^{(0)} \partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(0)} \right) \underline{F}_0 &= 0, \\ \left(\underline{A}_1^{(0)} \partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(0)} \right) \underline{F}_1 &= -\gamma e^{-\beta x_3} \left(\underline{A}_2^{(1)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(1)} \right) \underline{F}_0, \dots, \\ \left(\underline{A}_1^{(0)} \partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(0)} \right) \underline{F}_n &= -\gamma e^{-\beta x_3} \left(\underline{A}_2^{(1)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(1)} \right) \underline{F}_{n-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

В качестве исходного этапа реализации этого алгоритма на основе интегрирования методом Эйлера однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left(\underline{A}_1^{(0)} \partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(0)} \right) \underline{F} = 0, \quad (13)$$

имеющей в развернутой форме вид

$$\begin{aligned} c_{55}^{(0)} U''_{01} + i k n_1 \left(c_{13}^{(0)} + c_{55}^{(0)} \right) U'_{30} + \left(\Omega^2 - \left(c_{11}^{(0)} k^2 n_1^2 + c_{66}^{(0)} k^2 n_1 n_2 \right) \right) U_{01} - \\ - \left(c_{12}^{(0)} + c_{66}^{(0)} \right) k^2 n_1 n_2 U_{20} = 0, \\ c_{44}^{(0)} U''_{02} + i k n_2 \left(c_{23}^{(0)} + c_{44}^{(0)} \right) U'_{30} - \left(c_{12}^{(0)} + c_{66}^{(0)} \right) k^2 n_1 n_2 U_{10} + \\ + \left(\Omega^2 - \left(c_{11}^{(0)} k^2 n_1^2 + c_{66}^{(0)} k^2 n_1 n_2 \right) \right) U_{02} = 0, \\ c_{33}^{(0)} U''_{03} + i k n_1 \left(c_{13}^{(0)} + c_{55}^{(0)} \right) U'_{10} + i k n_2 \left(c_{23}^{(0)} + c_{44}^{(0)} \right) U'_{20} + \\ + \left(\Omega^2 - \left(c_{11}^{(0)} k^2 n_1^2 + c_{66}^{(0)} k^2 n_1 n_2 \right) \right) U_{03} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

В процессе интегрирования система (14) преобразуется к форме

$$\begin{aligned} a_1 U''_{01} + b_1 U'_{30} + c_1 U_{01} + d_1 U_{20} &= 0, \\ a_2 U''_{02} + b_2 U'_{30} + c_2 U_{01} + d_2 U_{02} &= 0, \\ a_3 U''_{03} + b_3 U'_{10} + c_3 U'_{02} + d_3 U_{30} &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

и после подстановки $U_{01} = Q_1 e^{\delta x_3}$, $U_{02} = Q_2 e^{\delta x_3}$, $U_{03} = Q_3 e^{\delta x_3}$ трансформируется в однородную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных Q_1, Q_2, Q_3 :

$$\begin{aligned} (a_1 \delta^2 + c_1) Q_1 + d_1 Q_2 + b_1 \delta Q_3 &= 0, \\ (c_2 Q_1 + (a_2 \delta^2 + d_2) Q_2 + b_2 \delta Q_3 &= 0, \\ b_3 \delta Q_1 + c_3 \delta Q_2 + (a_3 \delta^2 + d_3) Q_3 &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (16) следует полиномиальное характеристическое уравнение для δ и соотношения связи Q_1, Q_2, Q_3 при каждом δ_j :

$$\begin{vmatrix} (a_1 \delta^2 + c_1) & d_1 & b_1 \delta \\ c_2 & (a_2 \delta^2 + d_2) & b_2 \delta \\ b_3 \delta & c_3 \delta & (a_3 \delta^2 + d_3) \end{vmatrix} = \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 &= a_1 a_2 a_3 \delta^6 + (a_1 a_3 c_2 + a_2 a_3 c_1 + a_1 a_2 d_3 - a_2 b_1 b_3 - a_1 b_2 c_3) \delta^4 + \\
 &+ (c_1 c_2 a_3 + a_1 c_2 d_3 + c_1 a_2 d_3 + d_1 b_2 b_3 + b_1 c_2 c_3 - b_1 b_3 c_2 - d_1 c_2 a_3 - b_2 c_1 c_3) \delta^2 + \\
 &+ c_1 c_2 d_3 - c_2 d_1 d_3 = 0.
 \end{aligned}$$

Преобразуя (17) к виду

$$A\delta^6 + B\delta^4 + C\delta^2 + D = 0, \quad (18)$$

можно найти явные аналитические выражения для величин δ_j с применением формул Кардано.

Отвечающие данному множеству значений δ_j решения системы дифференциальных уравнений (16) выбираются в виде:

$$\begin{aligned}
 U_{01} &= Q_1^{(1)} e^{\delta_1 x_3} + Q_1^{(2)} e^{\delta_2 x_3} + Q_1^{(3)} e^{\delta_3 x_3} + Q_1^{(4)} e^{\delta_4 x_3} + Q_1^{(5)} e^{\delta_5 x_3} + Q_1^{(6)} e^{\delta_6 x_3}, \\
 U_{02} &= Q_2^{(1)} e^{\delta_1 x_3} + Q_2^{(2)} e^{\delta_2 x_3} + Q_2^{(3)} e^{\delta_3 x_3} + Q_2^{(4)} e^{\delta_4 x_3} + Q_2^{(5)} e^{\delta_5 x_3} + Q_2^{(6)} e^{\delta_6 x_3}, \\
 U_{03} &= Q_3^{(1)} e^{\delta_1 x_3} + Q_3^{(2)} e^{\delta_2 x_3} + Q_3^{(3)} e^{\delta_3 x_3} + Q_3^{(4)} e^{\delta_4 x_3} + Q_3^{(5)} e^{\delta_5 x_3} + Q_3^{(6)} e^{\delta_6 x_3},
 \end{aligned} \quad (19)$$

а для связывания коэффициентов $Q_1^{(j)}$, $Q_2^{(j)}$, $Q_3^{(j)}$ соответственно записываются системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
 (a_1 \delta^2 + c_1) Q_1^{(j)} + d_1 Q_2^{(j)} + b_1 \delta Q_3^{(j)} &= 0, \\
 (c_2 Q_1^{(j)} + (a_2 \delta^2 + d_2) Q_2^{(j)} + b_2 \delta Q_3^{(j)} &= 0, \\
 b_3 \delta Q_1^{(j)} + c_3 \delta Q_2^{(j)} + (a_3 \delta^2 + d_3) Q_3^{(j)} &= 0,
 \end{aligned} \quad (20)$$

и их решения находятся в форме

$$Q_1^{(j)} = Q^{(j)}, \quad Q_2^{(j)} = \Delta_2^{(j)} Q^{(j)}, \quad Q_3^{(j)} = \Delta_3^{(j)} Q^{(j)}; \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_2^{(j)} &= (b_2 b_3 - c_2 a_3) \delta_j^2 - c_2 d_3 \chi^{-1}, \\
 \Delta_3^{(j)} &= (-a_2 b_3 \delta_j^2 + c_2 c_3 - d_2 b_3) \delta_j \chi^{-1}.
 \end{aligned} \quad (22)$$

В итоге, записывается представление \underline{F}_0 в виде линейной комбинации базисных частных решений \underline{F}_{0j} с произвольными коэффициентами c_j

$$\underline{F}_0 = c_1 \underline{F}_{01} + c_2 \underline{F}_{02} + c_3 \underline{F}_{03} + c_4 \underline{F}_{04} + c_5 \underline{F}_{05} + c_6 \underline{F}_{06}, \quad (23)$$

где

$$\underline{F}_{0j} = \underline{f}_{0j} e^{\delta_j x_3}, \quad \underline{f}_{0j} = (1, \Delta_2^{(j)}, \Delta_3^{(j)})^T. \quad (24)$$

Далее, в рамках алгоритма (12) соответственно строятся шесть векторных базисных частных решений \underline{F}_j системы (9), отвечающих последовательному выбору

$$\underline{F}_0 = \underline{F}_{0j}, \quad \underline{F}_{0j} = \underline{f}_{0j} e^{\delta_j x_3}, \quad \underline{F}_{1j} = \underline{f}_{1j} e^{(\delta_j - \beta) x_3}, \dots, \quad \underline{F}_{nj} = \underline{f}_{nj} e^{(\delta_j - n\beta) x_3}, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \underline{f}_{nj} &= -\gamma \underline{M}_{1n,j}^{-1} \underline{M}_{2n,j} \underline{f}_{n-1,j}, \\ \underline{M}_{1n,j} &= (\delta_j - n\beta)^2 \underline{A}_1^0 + (\delta_j - n\beta) \underline{A}_2^0 + \underline{A}_3^0, \quad \underline{M}_{2n,j} = ((\delta_j - \beta) \underline{A}_2^1 + \underline{A}_3^1), \end{aligned} \quad (26)$$

и, следовательно,

$$\underline{f}_{nj} = (-\gamma)^n \underline{M}_{1n,j}^{-1} \underline{M}_{2n,j} \underline{M}_{1n-1,j}^{-1} \underline{M}_{2n-1,j} \dots \underline{M}_{11,j}^{-1} \underline{M}_{21,j} f_{01}. \quad (27)$$

В итоге, с введением обозначения

$$\underline{Q}_{nj} = \underline{M}_{1n,j}^{-1} \underline{M}_{2n,j}, \quad (28)$$

представление для соответствующего базисного частного решения (9) может быть записано в следующем явном виде

$$\begin{aligned} \underline{F}_j(x_3) &= f_{0j} e^{\delta_j x_3} - \gamma \underline{M}_{11,j}^{-1} \underline{M}_{21,j} \underline{f}_{0j} e^{(\delta_j - \beta) x_3} + \\ &+ \gamma^2 \underline{M}_{12,j}^{-1} \underline{M}_{22,j} \underline{M}_{11,j}^{-1} \underline{M}_{21,j} \underline{f}_{0j} e^{(\delta_j - 2\beta) x_3} - \dots + \\ &+ (-\gamma)^n \underline{M}_{1n,j}^{-1} \underline{M}_{2n,j} \underline{M}_{1n-1,j}^{-1} \underline{M}_{2n-1,j} \dots \underline{M}_{11,j}^{-1} \underline{M}_{21,j} f_{01} e^{(\delta_j - n\beta) x_3} + \dots = \\ &= f_{0j} e^{\delta_j x_3} - \gamma \underline{Q}_{1j} \underline{f}_{0j} e^{(\delta_j - \beta) x_3} + \gamma^2 \underline{Q}_{2j} \underline{Q}_{1j} \underline{f}_{0j} e^{(\delta_j - 2\beta) x_3} - \dots + \\ &+ (-\gamma)^n \underline{Q}_{nj} \underline{Q}_{n-1j} \dots \underline{Q}_{1j} f_{01} e^{(\delta_j - n\beta) x_3} + \dots \end{aligned} \quad (29)$$

Заключение. Найденные с применением изложенной методологии векторно-матричные аналитические представления (29) для амплитудных векторных функций колебательных упругих смещений в трехпарциальных локализованных гармонических волнах, распространяющихся вдоль граничной поверхности полубесконечного ортотропного тела с локализованной у граничной поверхности непрерывной экспоненциальной толщинной неоднородностью физико-механических параметров, являются базовыми элементами для получения решений задач о гармонических произвольно ориентированных в граничной плоскости трехпарциальных поверхностных волнах. Построенные решения применимы также для исследования волновых деформационных процессов в геомассивах с пластами полезных ископаемых, заключенными между упругими неоднородными полупространствами горных пород, в том числе для теоретического анализа строения и свойств массивов геоакустическими методами.

1. Болнокин В.Е. Анализ модели распространения сдвиговых упругих волн в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном геомассиве / В.Е. Болнокин, А.А. Глухов, В.И. Сторожев. // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2022. – № 3(80). – С. 14–19.
2. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах / И.А. Викторов. – М.: Наука, 1981. – 142 с.
3. Birman V. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures / V. Birman, L.W. Byrd // Appl. Mech. Rev. – 2007. – Vol. 60, N 5. – P. 195–216.

4. FGM: Design, processing and applications / Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin et al. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 434 p.
5. Yang Y.-H. Non-destructive detection of a circular cavity in a finite functionally graded material layer using anti-plane shear waves / Y.-H. Yang, L.-Z. Wu, X.-Q. Fang // J. Nondestructive Eval. – 2010. – Vol. 29. – P. 233–240.
6. Бирюков С.В. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах / С.В. Бирюков, Ю.В. Гуляев, В.В. Крылов, В.П. Плесский. – М.: Наука, 1991. – 414 с.

A.A. Glukhov, V.I. Storozhev, V.A. Shaldyrvan

Integration of a system of equations arbitrary oriented three-partial surface waves propagation in a functional-gradient orthotropic half-space.

A new modification of the model of arbitrarily oriented three-partial surface waves propagation in a functionally gradient orthotropic half-space is considered. The introduced function of continuous inhomogeneity characterizes the localization of the area of intense changes in the physical and mechanical parameters of the material in the boundary zone of the half-space and the asymptotic smoothing of the law of change in properties in the depth of the massive. For the model under consideration, an iterative numerical-analytical algorithm for integrating a system of differential equations in partial derivatives with variable coefficients is proposed and implemented, which describes the propagation of harmonic three-partial surface waves arbitrarily oriented in the boundary plane.

Keywords: *elastic orthotropic half-space, transverse continuous inhomogeneity, propagation of localized waves, systems of wave equations, analytic integration, vector series.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», Донецк
Donetsk National University
stvi@donnu.ru

Получено 17.11.2022

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2022-4-23-46

EDN:KOHPOU



©2022. Е.С. Глушанков, А.Б. Мироненко

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ СВОБОДНО ОПЕРТОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛИТЫ. I

Решена задача об изгибе свободно опертой по краю прямоугольной плиты из пьезоэлектрического материала, находящейся под давлением по верхнему основанию. При этом рассмотрены случаи, когда различные стороны прямоугольного контура плиты электродированы либо лишены электродного покрытия. Решения получены в виде двойных тригонометрических рядов. На основе полученных решений проведены численные исследования влияния свойств материала плиты и электрических граничных условий на электроупругое состояние плиты.

Ключевые слова: теория изгиба тонких плит, пьезоэлектрический материал, прямоугольная плита, свободно опертый край, функция прогиба, изгибающие моменты, двойные тригонометрические ряды

Введение. В современной технике широкое применение в качестве элементов конструкций получили тонкие плиты из пьезоматериалов. В процессе эксплуатации эти плиты подвергаются механическому и электрическому воздействиям, которые могут приводить к изгибным деформациям, что следует учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций [1–7]. При решении задач изгиба плит в рамках прикладной теории зачастую используются гипотезы Кирхгофа-Лява [8, 9]: *гипотеза прямой нормали*, в соответствии с которой прямолинейные отрезки, нормальные к срединной плоскости до деформации, при изгибе плиты остаются прямолинейными и нормальными к изогнутой срединной поверхности и не меняют своей длины; *гипотеза о нерастяжимости срединной плоскости*; *гипотеза о ненадавливании слоев*, в соответствии с которой влияние взаимодействия (давления) продольных слоев плиты на удлинения и сдвиги материальных волокон, лежащих в этих слоях, является достаточно малым и им можно пренебречь. Эти гипотезы механического характера дополним гипотезой на индукции электрического поля [10, 11]: *поток индукции по толщине плиты можно пренебречь*.

В монографиях [12, 13] приведены решения множества задач об изгибе изотропных прямоугольных плит при различных механических граничных условиях, об изгибе ортотропных прямоугольных плит в случае свободного опирания по краям.

В данной работе получено решение задачи об изгибе свободно опертой по краю прямоугольной плиты из пьезоэлектрического материала кристаллографического класса *6mm*. Основания плиты не электродированы, по верхнему основанию действует распределенное давление. Края плиты свободно оперты.

Различные края плиты могут быть электродированы либо лишены электродного покрытия. Решения задач получены в виде двойного тригонометрического ряда. Проведены численные исследования влияния свойств материала плиты и электрических граничных условий на значения моментов и прогиба плиты.

1. Постановка задачи об изгибе тонких пьезоэлектрических плит.

Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат $Oxyz$ тонкую плиту толщины $2h$ (рис. 1), изготовленную из пьезоэлектрического материала. Срединная плоскость плиты лежит в плоскости Oxy и занимает двумерную область S . Пусть для каждой точки плиты имеется плоскость упругой симметрии, параллельная срединной плоскости. Основания плиты лишены электродного покрытия, по верхнему основанию распределены нормальные усилия $q(x, y)$. Край плиты свободно оперт, по нему некоторым образом распределены электрические воздействия.

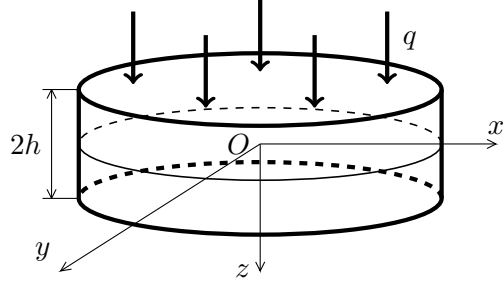


Рис. 1

Задача определения электроупругого состояния плиты сводится к интегрированию следующей системы дифференциальных уравнений относительно функции прогиба плиты $w(x, y)$ и функции плотности потенциала электрического поля $\varphi_0(x, y)$ [11, 14]:

$$\begin{aligned} L_{4S}w(x, y) + L_{3G}\varphi_0(x, y) &= -q(x, y), \\ L_{3G}w(x, y) + L_{2B}\varphi_0(x, y) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь L_{4S} , L_{3G} , L_{2B} — дифференциальные операторы, определяемые следующими выражениями:

$$\begin{aligned} L_{4S} &= - \left(\tilde{S}_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4\tilde{S}_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2 \left(\tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{66} \right) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4\tilde{S}_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \tilde{S}_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right), \\ L_{3G} &= \tilde{G}_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \left(\tilde{G}_{12} + \tilde{G}_{26} \right) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \tilde{G}_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\ L_{2B} &= \tilde{B}_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\tilde{B}_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \tilde{B}_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{ij} &= \frac{2h^3}{3} S_{ij}, \quad \tilde{G}_{ij} = \frac{2h^3}{3} G_{ij}, \quad \tilde{B}_{ij} = \frac{2h^3}{3} B_{ij}; \\ \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} & G_{11} & G_{21} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} & G_{12} & G_{22} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} & G_{16} & G_{26} \\ -G_{11} & -G_{12} & -G_{16} & B_{11} & B_{12} \\ -G_{21} & -G_{22} & -G_{26} & B_{12} & B_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix}^{-1}; \end{aligned}$$

s_{ij} — коэффициенты деформации материала плиты, g_{ij} — пьезоэлектрические модули, β_{ij} — коэффициенты диэлектрической проницаемости.

Систему уравнений (1) следует интегрировать при соответствующих граничных условиях. После этого прогиб плиты и плотность потенциала электрического поля становятся известными, и по ним в любой точке плиты можно находить значения изгибающих моментов M_x , M_y , крутящего момента H_{xy} , моментов электрической индукции M_{Dx} , M_{Dy} [11, 14]:

$$\begin{aligned} M_x &= - \left(\tilde{S}_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{S}_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{S}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \tilde{G}_{11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \tilde{G}_{21} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right), \\ M_y &= - \left(\tilde{S}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{S}_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{S}_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \tilde{G}_{12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \tilde{G}_{22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right), \\ H_{xy} &= - \left(\tilde{S}_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{S}_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{S}_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \tilde{G}_{16} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \tilde{G}_{26} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right), \\ M_{Dx} &= \tilde{G}_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{G}_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{G}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \tilde{B}_{11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \tilde{B}_{12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \\ M_{Dy} &= \tilde{G}_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tilde{G}_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{G}_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \tilde{B}_{12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \tilde{B}_{22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2)$$

Если материал плиты принадлежит к кристаллографическому классу $6mm$ и поляризован вдоль оси Oy , то

$$\begin{aligned} s_{16} &= s_{26} = 0, \\ g_{11} &= g_{12} = g_{26} = 0, \\ \beta_{12} &= 0, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{16} &= \tilde{S}_{26} = 0, \\ \tilde{G}_{11} &= \tilde{G}_{12} = \tilde{G}_{26} = 0, \\ \tilde{B}_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Тогда дифференциальные операторы L_{4S} , L_{3G} , L_{2B} примут вид

$$\begin{aligned} L_{4S} &= - \left(\tilde{S}_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \left(\tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{66} \right) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \tilde{S}_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right), \\ L_{3G} &= \left(\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \tilde{G}_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\ L_{2B} &= \tilde{B}_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \tilde{B}_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

а значения моментов можно определять по формулам

$$\begin{aligned}
 M_x &= - \left(\tilde{S}_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tilde{S}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \tilde{G}_{21} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right), \\
 M_y &= - \left(\tilde{S}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tilde{S}_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \tilde{G}_{22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right), \\
 H_{xy} &= - \left(2\tilde{S}_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \tilde{G}_{16} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right), \\
 M_{Dx} &= 2\tilde{G}_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \tilde{B}_{11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \\
 M_{Dy} &= \tilde{G}_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tilde{G}_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \tilde{B}_{22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда становится возможным определение моментов на произвольной площадке с нормалью n и касательной s [10, 11]:

$$\begin{aligned}
 M_n &= M_x \cos^2(nx) + M_y \cos^2(ny) - 2H_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\
 M_s &= M_x \cos^2(ny) + M_y \cos^2(nx) + 2H_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\
 H_{ns} &= (M_y - M_x) \cos(nx) \cos(ny) + H_{xy} (\cos^2(nx) - \cos^2(ny)), \\
 M_{Dn} &= M_{Dx} \cos(nx) + M_{Dy} \cos(ny), \quad M_{Ds} = M_{Dx} \cos(ny) - M_{Dy} \cos(nx).
 \end{aligned} \tag{4}$$

2. Вид граничных условий для случая свободного опертого края плиты. Механические граничные условия имеют вид [9]

$$w = 0, \quad M_n = 0. \tag{5}$$

Если по краю плиты отсутствует электродное покрытие, то электрическое граничное условие имеет вид [10, 15]

$$M_{Dn} = 0, \tag{6a}$$

а если электродное покрытие присутствует и задано распределение φ_0^* потенциала электрического поля [15] —

$$\varphi_0 = \varphi_0^*. \tag{6b}$$

3. Постановка и решение задачи об изгибе прямоугольной плиты. Рассмотрим тонкую прямоугольную пьезоэлектрическую плиту со сторонами, равными a и b (рис. 2). Основания плиты лишены электродного покрытия, по верхнему основанию $x_3 = -h$ распределены нормальные усилия $q(x, y)$. Край плиты свободно оперт.

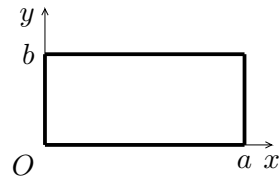


Рис. 2

В этом случае механические граничные условия принимают вид:

- на краях плиты $x = 0, x = a$:

$$w\Big|_{x=0} = w\Big|_{x=a} = 0, \quad M_x\Big|_{x=0} = M_x\Big|_{x=a} = 0; \quad (7)$$

- на краях плиты $y = 0, y = b$:

$$w\Big|_{y=0} = w\Big|_{y=b} = 0, \quad M_y\Big|_{y=0} = M_y\Big|_{y=b} = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим некоторые случаи электрических граничных условий.

Края плиты $y = 0, y = b$ неэлектродированы, на краях плиты $x = 0, x = a$ потенциал электрического поля равен нулю. В этом случае электрические граничные условия принимают вид:

- на краях плиты $x = 0, x = a$:

$$\varphi_0\Big|_{x=0} = \varphi_0\Big|_{x=a} = 0; \quad (9)$$

- на краях плиты $y = 0, y = b$:

$$M_{Dy}\Big|_{y=0} = M_{Dy}\Big|_{y=b} = 0. \quad (10)$$

Функцию прогиба $w(x, y)$ выберем в виде, известном из решения задачи об изгибе изотропной или ортотропной свободно опертой плиты [12]:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}, \quad (11)$$

где A_{mn} – неизвестные постоянные. В этом виде функция прогиба удовлетворяет первым условиям (7), (8). Для того, чтобы тождественно удовлетворить вторым условиям (7), (8) и условиям (9), (10), функцию плотности электрического потенциала $\varphi_0(x, y)$ выберем в виде

$$\varphi_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b}, \quad (12)$$

где B_{mn} – неизвестные постоянные.

Аналогично решению задачи об изгибе изотропной или ортотропной свободно опертой плиты, неизвестные постоянные A_{mn}, B_{mn} будем определять из подстановки функций (11), (12) в систему дифференциальных уравнений (1).

Тогда после функций (11), (12) в систему уравнений (1) получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{mn} \left(\tilde{S}_{11} \frac{\pi^4 m^4}{a^4} + 2 \left(\tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{66} \right) \frac{\pi^4 m^2 n^2}{a^2 b^2} + \tilde{S}_{22} \frac{\pi^4 n^4}{b^4} \right) \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} - \right.$$

$$-B_{mn} \left(\left(\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16} \right) \frac{\pi^3 m^2 n}{a^2 b} + \tilde{G}_{22} \frac{\pi^3 n^3}{b^3} \right) \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} \Big] = q(x, y),$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Big[& A_{mn} \left(\left(\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16} \right) \frac{\pi^3 m^2 n}{a^2 b} + \tilde{G}_{22} \frac{\pi^3 n^3}{b^3} \right) \sin \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b} + \\ & + B_{mn} \left(\tilde{B}_{11} \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \tilde{B}_{22} \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \right) \sin \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b} \Big] = 0. \end{aligned}$$

Представим функцию $q(x, y)$ в виде

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}, \quad (13)$$

где

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \sin \frac{\pi m x}{a} dx \int_0^b q(x, y) \sin \frac{\pi n y}{b} dy.$$

Тогда для определения неизвестных постоянных A_{mn} , B_{mn} получим системы уравнений вида

$$\begin{aligned} & A_{mn} \left(\tilde{S}_{11} \frac{\pi^4 m^4}{a^4} + 2 \left(\tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{66} \right) \frac{\pi^4 m^2 n^2}{a^2 b^2} + \tilde{S}_{22} \frac{\pi^4 n^4}{b^4} \right) - \\ & - B_{mn} \left(\left(\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16} \right) \frac{\pi^3 m^2 n}{a^2 b} + \tilde{G}_{22} \frac{\pi^3 n^3}{b^3} \right) = Q_{mn}, \\ & A_{mn} \left(\left(\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16} \right) \frac{\pi^3 m^2 n}{a^2 b} + \tilde{G}_{22} \frac{\pi^3 n^3}{b^3} \right) + \\ & + B_{mn} \left(\tilde{B}_{11} \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \tilde{B}_{22} \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{Q_{mn}}{\Delta_{mn}} \left(\tilde{B}_{11} \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \tilde{B}_{22} \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \right), \\ B_{mn} &= -\frac{Q_{mn}}{\Delta_{mn}} \left(\left(\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16} \right) \frac{\pi^3 m^2 n}{a^2 b} + \tilde{G}_{22} \frac{\pi^3 n^3}{b^3} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{mn} &= \left(\tilde{S}_{11} \frac{\pi^4 m^4}{a^4} + 2 \left(\tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{66} \right) \frac{\pi^4 m^2 n^2}{a^2 b^2} + \tilde{S}_{22} \frac{\pi^4 n^4}{b^4} \right) \left(\tilde{B}_{11} \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \tilde{B}_{22} \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \right) + \\ & + \left(\left(\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16} \right) \frac{\pi^3 m^2 n}{a^2 b} + \tilde{G}_{22} \frac{\pi^3 n^3}{b^3} \right)^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи нагрузок $q(x, y)$ по верхнему основанию.

Если $q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi Mx}{a} \sin \frac{\pi Ny}{b}$, где $q_0 = const$, а M, N – натуральные числа, то [12]:

$$Q_{mn} = \begin{cases} q_0, & m = M \text{ и } n = N, \\ 0, & m \neq M \text{ или } n \neq N, \end{cases}$$

тогда

$$A_{mn} = \begin{cases} \frac{\pi^2 q_0}{\Delta_{MN}} \left(\tilde{B}_{11} \frac{M^2}{a^2} + \tilde{B}_{22} \frac{N^2}{b^2} \right), & m = M \text{ и } n = N, \\ 0, & m \neq M \text{ или } n \neq N, \end{cases}$$

$$B_{mn} = \begin{cases} -\frac{\pi^3 q_0}{\Delta_{MN}} \left((\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16}) \frac{M^2 N}{a^2 b} + \tilde{G}_{22} \frac{N^3}{b^3} \right), & m = M \text{ и } n = N, \\ 0, & m \neq M \text{ или } n \neq N, \end{cases}$$

а функции прогиба и плотности потенциала электрического поля примут вид

$$w(x, y) = \frac{\pi^2 q_0}{\Delta_{MN}} \left(\tilde{B}_{11} \frac{M^2}{a^2} + \tilde{B}_{22} \frac{N^2}{b^2} \right) \sin \frac{\pi Mx}{a} \sin \frac{\pi Ny}{b},$$

$$\varphi_0(x, y) = -\frac{\pi^3 q_0}{\Delta_{MN}} \left((\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16}) \frac{M^2 N}{a^2 b} + \tilde{G}_{22} \frac{N^3}{b^3} \right) \sin \frac{\pi Mx}{a} \cos \frac{\pi Ny}{b}.$$

Если $q(x, y) = q_0 = const$, то [12]:

$$Q_{mn} = \begin{cases} \frac{16q_0}{\pi^2 mn}, & m \text{ и } n - \text{нечетные}, \\ 0, & m \text{ или } n - \text{четное}, \end{cases}$$

тогда

$$A_{mn} = \begin{cases} \frac{16q_0}{mn\Delta_{mn}} \left(\tilde{B}_{11} \frac{m^2}{a^2} + \tilde{B}_{22} \frac{n^2}{b^2} \right), & m \text{ и } n - \text{нечетные}, \\ 0, & m \text{ или } n - \text{четное}, \end{cases}$$

$$B_{mn} = \begin{cases} -\frac{16\pi q_0}{m\Delta_{mn}} \left((\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16}) \frac{m^2}{a^2 b} + \tilde{G}_{22} \frac{n^2}{b^3} \right), & m \text{ и } n - \text{нечетные}, \\ 0, & m \text{ или } n - \text{четное}, \end{cases}$$

а функции прогиба и плотности потенциала электрического поля примут вид

$$w(x, y) = \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{16q_0}{mn\Delta_{mn}} \left(\tilde{B}_{11} \frac{m^2}{a^2} + \tilde{B}_{22} \frac{n^2}{b^2} \right) \times$$

$$\varphi_0(x, y) = - \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{16\pi q_0}{m\Delta_{mn}} \left((\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16}) \frac{m^2}{a^2b} + \tilde{G}_{22} \frac{n^2}{b^3} \right) \times \\ \times \sin \frac{\pi mx}{a} \sin \frac{\pi ny}{b}, \\ \times \sin \frac{\pi mx}{a} \cos \frac{\pi ny}{b}.$$

Край плиты $y = b$ неэлектродирован, на остальных краях потенциал электрического поля равен нулю. В этом случае электрические граничные условия принимают вид:

- на крае плиты $y = b$:

$$M_{Dy} \Big|_{y=b} = 0; \quad (15)$$

- на остальных краях плиты:

$$\varphi_0 \Big|_{x=0} = \varphi_0 \Big|_{x=a} = \varphi_0 \Big|_{y=0} = 0. \quad (16)$$

Функцию прогиба $w(x, y)$ выберем в виде

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{\pi mx}{a} \sin \frac{\pi ny}{b}, \quad (17)$$

где A_{mn} – неизвестные постоянные. В этом виде функция прогиба удовлетворяет первым условиям (7), (8). Тогда для того, чтобы тождественно удовлетворить вторым условиям (7), (8) и условиям (16), (15), функцию плотности электрического потенциала $\varphi_0(x, y)$ выберем в виде

$$\varphi_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{\pi mx}{a} \left(\cos \frac{\pi ny}{b} - 1 \right), \quad (18)$$

где B_{mn} – неизвестные постоянные.

Неизвестные постоянные A_{mn} , B_{mn} будем определять из подстановки функций (17), (18) в систему дифференциальных уравнений (1).

Тогда после подстановки функций (17), (18) в систему уравнений (1) получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{mn} \left(\tilde{S}_{11} \frac{\pi^4 m^4}{a^4} + 2 \left(\tilde{S}_{12} + 2\tilde{S}_{66} \right) \frac{\pi^4 m^2 n^2}{a^2 b^2} + \tilde{S}_{22} \frac{\pi^4 n^4}{b^4} \right) \sin \frac{\pi mx}{a} \sin \frac{\pi ny}{b} - \right. \\ \left. - B_{mn} \left((\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16}) \frac{\pi^3 m^2 n}{a^2 b} + \tilde{G}_{22} \frac{\pi^3 n^3}{b^3} \right) \sin \frac{\pi mx}{a} \sin \frac{\pi ny}{b} \right] = q(x, y),$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{mn} \left((\tilde{G}_{21} + \tilde{G}_{16}) \frac{\pi^3 m^2 n}{a^2 b} + \tilde{G}_{22} \frac{\pi^3 n^3}{b^3} \right) \sin \frac{\pi mx}{a} \cos \frac{\pi ny}{b} + \right.$$

$$+B_{mn} \left(\tilde{B}_{11} \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \tilde{B}_{22} \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \right) \sin \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b} \Big] = 0.$$

Эта система уравнений совпадает с системой из предыдущего подпункта, поэтому все остальные выкладки остаются справедливыми, и неизвестные коэффициенты A_{mn} , B_{mn} в общем случае определяются по формулам (14).

Край плиты $y = 0$ неэлектропроводен, на остальных краях потенциал электрического поля равен нулю. В этом случае электрические граничные условия принимают вид:

- на крае плиты $y = 0$:

$$M_{Dy} \Big|_{y=0} = 0; \quad (19)$$

- на остальных краях плиты:

$$\varphi_0 \Big|_{x=0} = \varphi_0 \Big|_{x=a} = \varphi_0 \Big|_{y=b} = 0. \quad (20)$$

Пользуясь аналогией с предыдущим подпунктом, функции прогиба $w(x, y)$ и плотности потенциала $\phi_0(x, y)$ будем искать в виде

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}, \quad (21)$$

$$\varphi_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{\pi m x}{a} \left(\cos \frac{\pi n y}{b} + 1 \right), \quad (22)$$

где A_{mn} , B_{mn} – неизвестные постоянные, в общем случае определяемые по формулам (14).

После определения коэффициентов A_{mn} , B_{mn} становится возможным определение значений прогиба $w(x, y)$ и плотности потенциала электрического поля $\varphi_0(x, y)$ в любой точке плиты. По известным функциям $w(x, y)$ и $\varphi_0(x, y)$ также можно вычислять значения изгибающих моментов, крутящего момента, момента электрической индукции в точках плиты по формулам (3), а затем – значения моментов на произвольных площадках по формулам (4).

При этом, из построенных решений следует, что при вышеописанных комбинациях электрических граничных условий распределения моментов в плите будет одинаковыми. Поэтому, в дальнейшем, при проведении численных исследований не будем характеризовать влияние электрических граничных условий.

4. Численные исследования. При проведении численных исследований количество сохраняемых членов в рядах увеличивалось до тех пор, пока погрешность значений моментов не становилась достаточно малой. Для этого, как показали исследования, необходимо сохранять от 20 до 50 членов в одинарных рядах.

Были проведены численные исследования для прямоугольных плит из следующих материалов:

- селенид кадмия $CdSe$ [16, 17] (материал ЭМ1):

$$\begin{aligned} s_{11} &= 23,31s_*, s_{22} = 16,68s_*, s_{66} = 74,46s_*, s_{12} = -5,38s_*, \\ g_{16} &= -124,40g_*, g_{21} = -41,61g_*, g_{22} = 81,15g_*, \\ \beta_{11} &= 118987,1\beta_*, \beta_{22} = 106071,5\beta_*; \end{aligned}$$

- титанат бария $BaTiO_3$ [16, 18] (материал ЭМ4):

$$\begin{aligned} s_{11} &= 8,7s_*, s_{22} = 7,1s_*, s_{66} = 17,5s_*, s_{12} = -1,9s_*, \\ g_{16} &= 20,2g_*, g_{21} = -5,2g_*, g_{22} = 12,6g_*, \\ \beta_{11} &= 77,93\beta_*, \beta_{22} = 66,47\beta_*; \end{aligned}$$

- пьезокерамика $PZT - 4$ [16, 18] (материал ЭМ5):

$$\begin{aligned} s_{11} &= 10,9s_*, s_{22} = 7,9s_*, s_{66} = 19,3s_*, s_{12} = -2,1s_*, \\ g_{16} &= 39,4g_*, g_{21} = -11,1g_*, g_{22} = 26,1g_*, \\ \beta_{11} &= 76,61\beta_*, \beta_{22} = 86,92\beta_*; \end{aligned}$$

- пьезокерамика $PZT - 5A$ [16, 18] (материал ЭМ6):

$$\begin{aligned} s_{11} &= 14,40s_*, s_{22} = 9,46s_*, s_{66} = 25,20s_*, s_{12} = -2,98s_*, \\ g_{16} &= 38,2g_*, g_{21} = -11,4g_*, g_{22} = 24,8g_*, \\ \beta_{11} &= 65,31\beta_*, \beta_{22} = 66,46\beta_*. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения: $s_* = 10^{-6}$ МПа $^{-1}$, $g_* = 10^{-3}$ МКл $^{-1}$ ·м 2 , $\beta_* = 1$ МН·м 2 ·МКл $^{-2}$.

Для случая равномерного давления по верхнему основанию плиты на рисунке 3 приведены распределения измеренных в 10^6 МН·м моментов M_x (рис. 3а), M_y (рис. 3б), H_{xy} (рис. 3в) в квадратной плите из материала ЭМ1 для случаев задач электроупругости (ЗЭУ), когда учитываются все свойства материала, и упругости (ЗУ), когда не учитываются электрические свойства материала. На рисунке 4 приведены распределения этих же моментов в квадратной плите из материала ЭМ5. На рисунках 5 и 6 приведены аналогичные распределения моментов для случая прямоугольной плиты с соотношением сторон $a/b = 2$, на рисунках 7 и 8 — с соотношением сторон $a/b = 3$, на рисунках 9 и 10 — с соотношением сторон $b/a = 2$, на рисунках 11 и 12 — с соотношением сторон $b/a = 3$.

Решение задачи об изгибе прямоугольной плиты

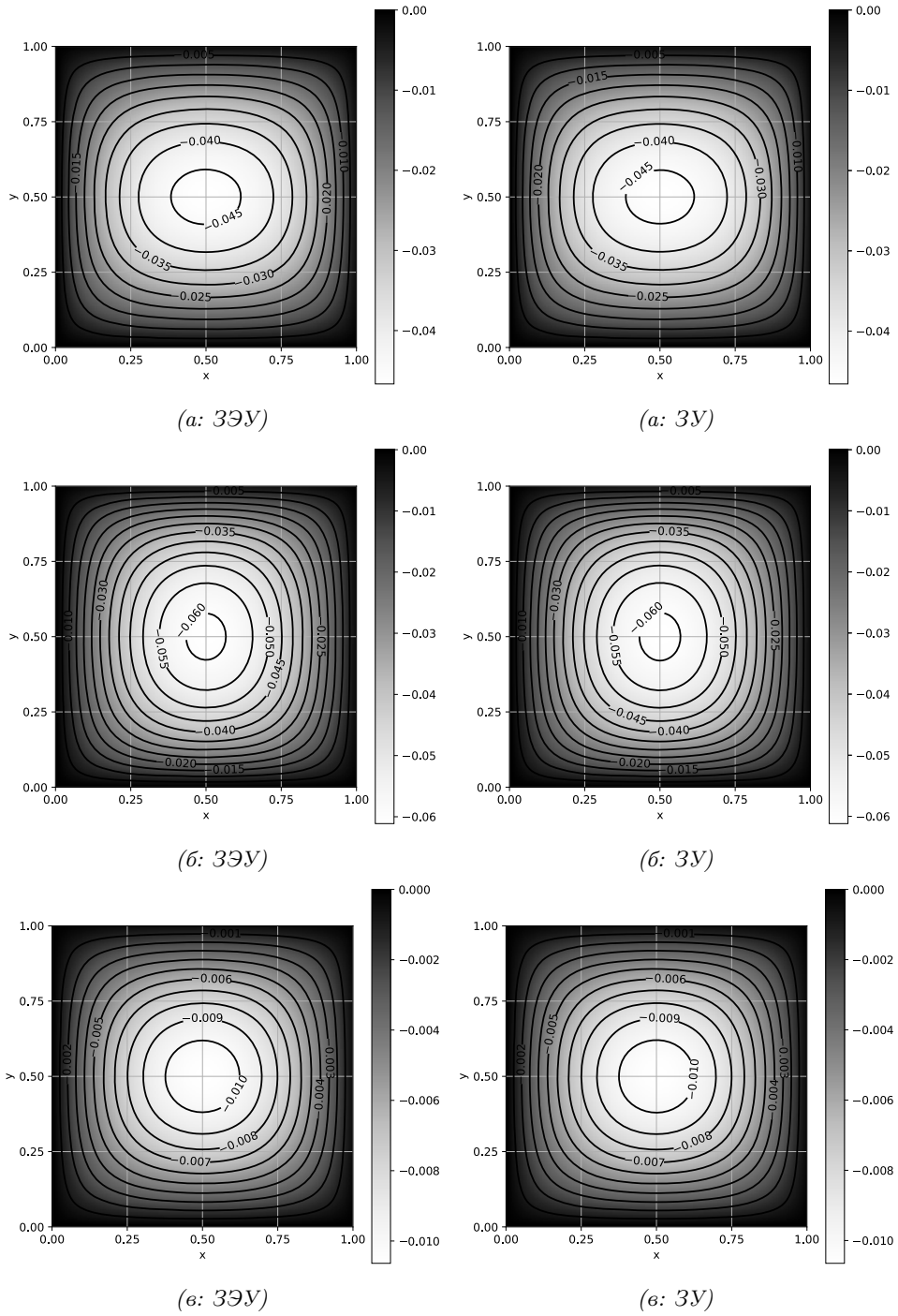


Рис. 3. Распределение моментов M_x (рис. а), M_y (рис. б), H_{xy} (рис. в) в квадратной плите из материала ЭМ1 для случаев 3ЭУ и 3У

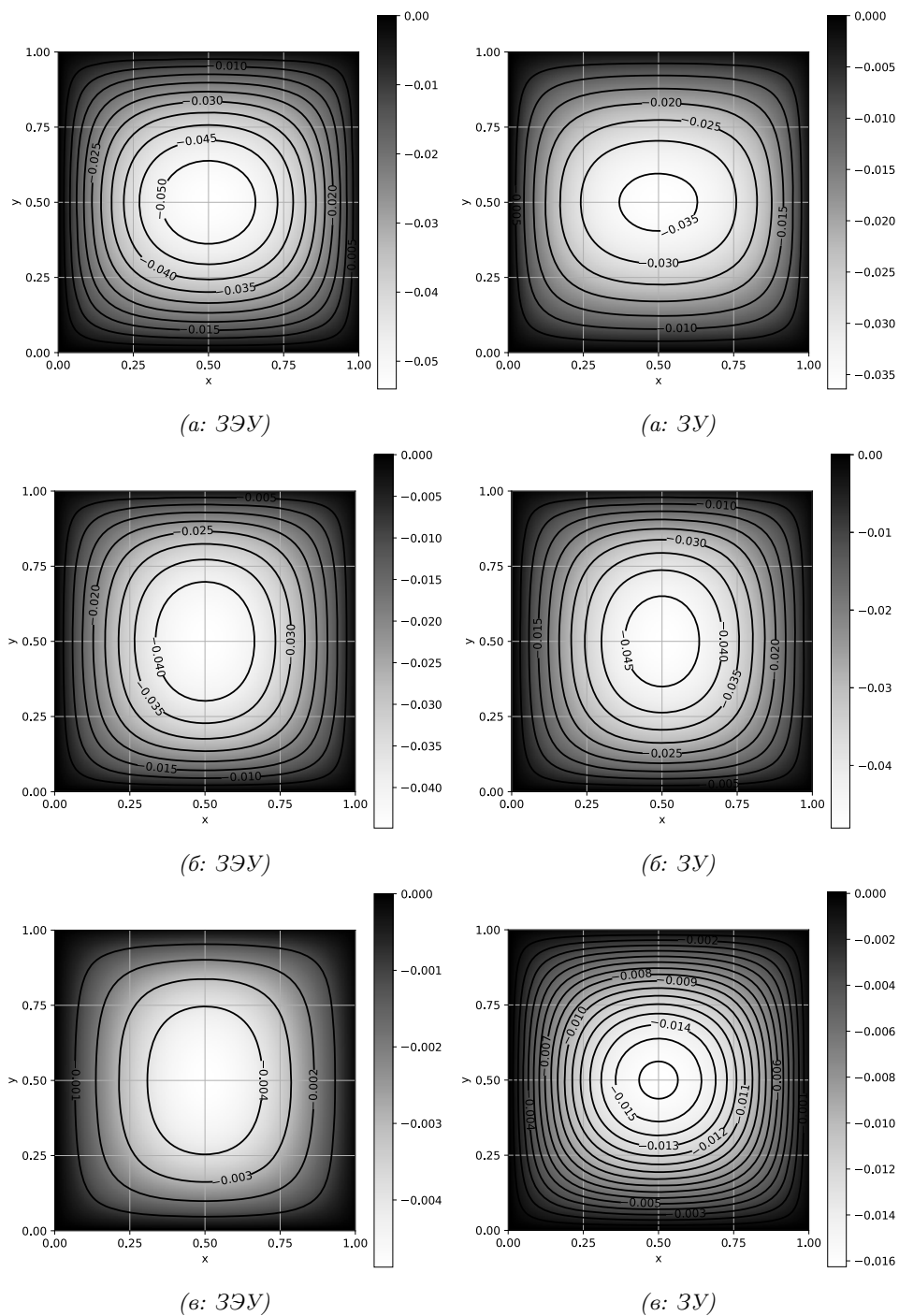
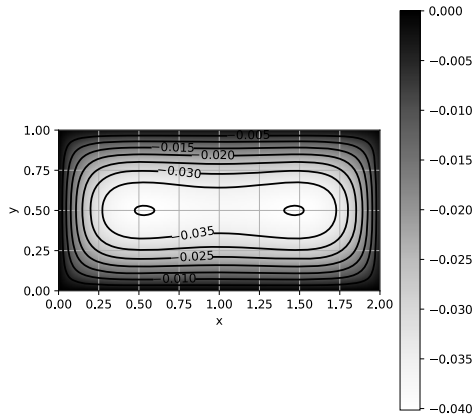
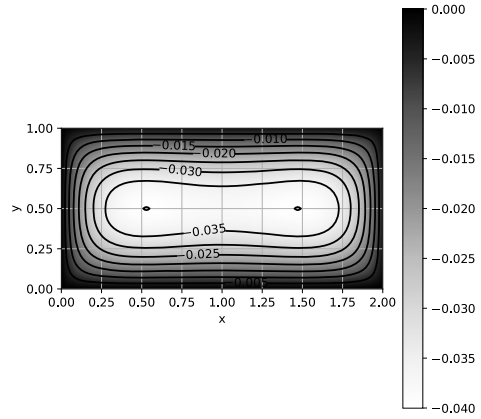


Рис. 4. Распределение моментов M_x (рис. а), M_y (рис. б), H_{xy} (рис. в) в квадратной плите из материала ЭМ5 для случаев 3ЭУ и 3У

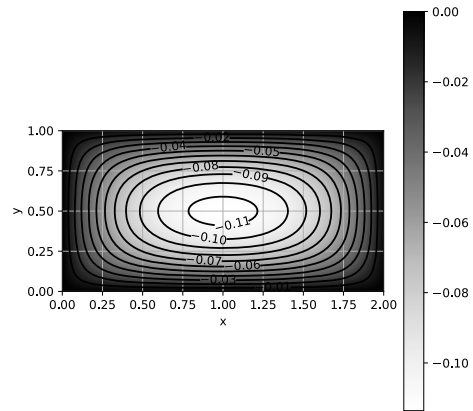
Решение задачи об изгибе прямоугольной плиты



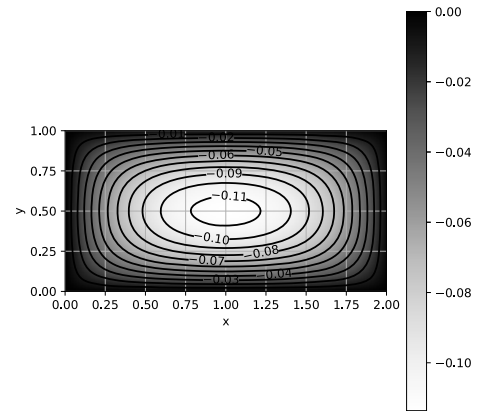
(а: 3DU)



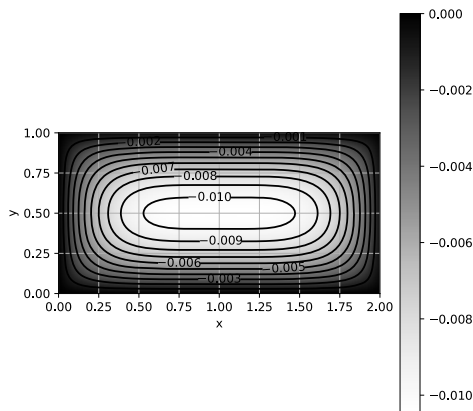
(а: 2D)



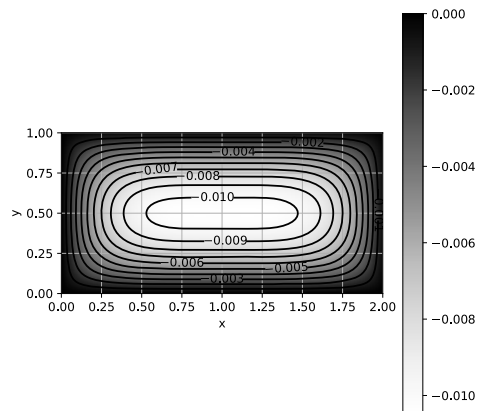
(б: 3DU)



(б: 2D)

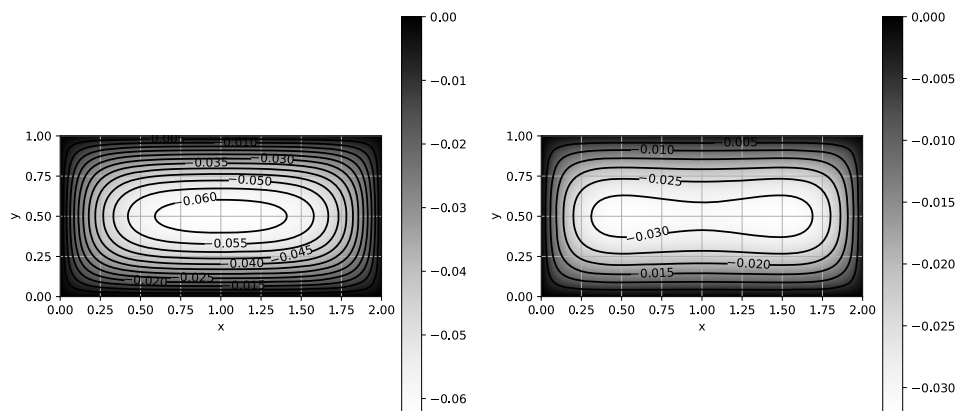


(в: 3DU)



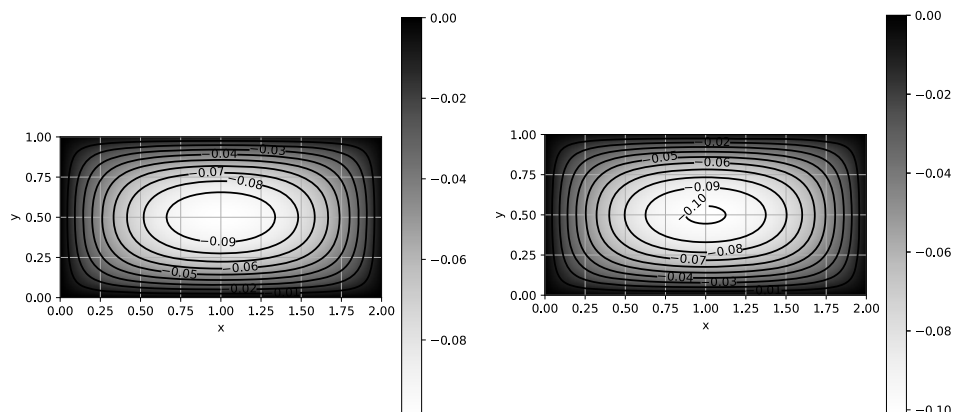
(в: 2D)

Рис. 5. Распределение моментов M_x (рис. а), M_y (рис. б), H_{xy} (рис. в) в прямоугольной плите со сторонами $a/b = 2$ из материала ЭМ1 для случаев 3DU и 2D



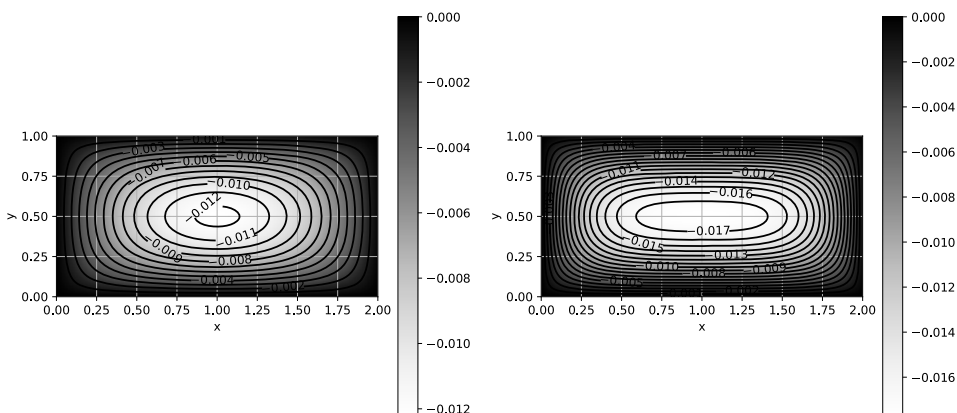
(а: 3Y)

(а: 3Y)



(б: 3Y)

(б: 3Y)

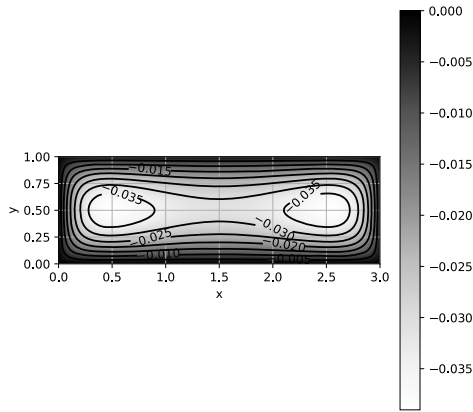


(в: 3Y)

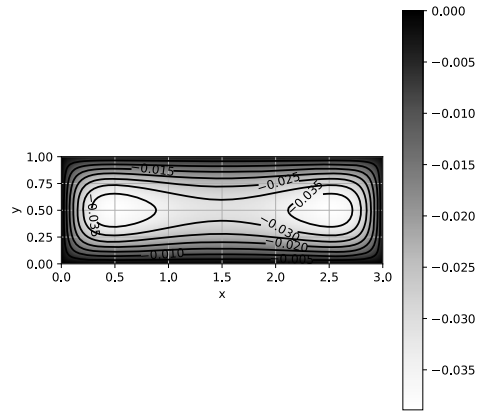
(в: 3Y)

Рис. 6. Распределение моментов M_x (рис. а), M_y (рис. б), H_{xy} (рис. в) в прямоугольной плите со сторонами $a/b = 2$ из материала ЭМ5 для случаев 3Y и 3Y

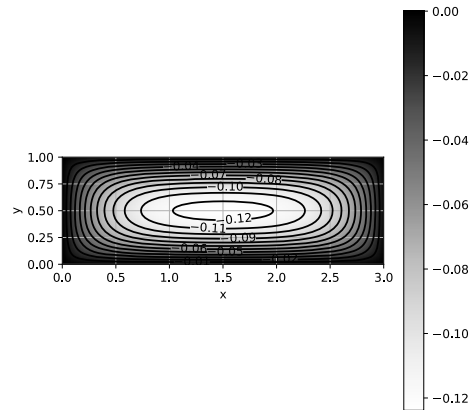
Решение задачи об изгибе прямоугольной плиты



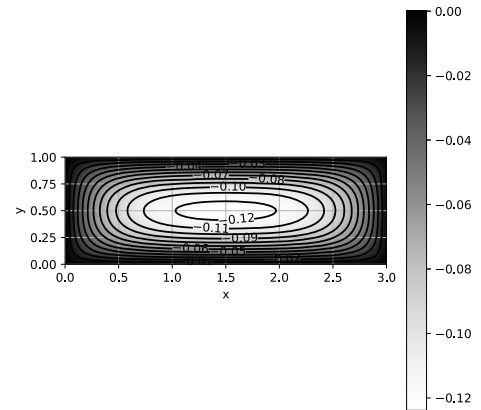
(а: ЗЭУ)



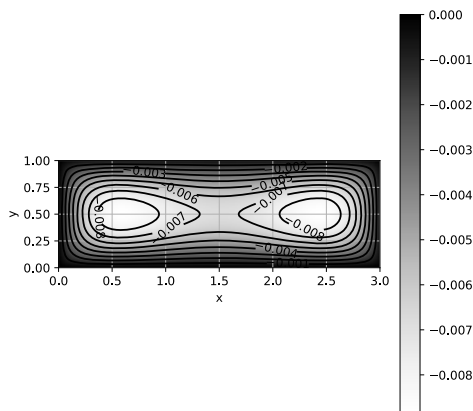
(а: ЗУ)



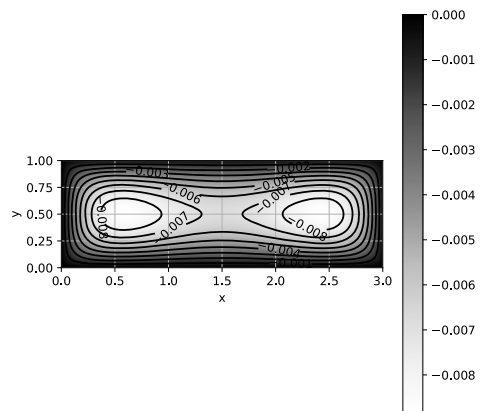
(б: ЗЭУ)



(б: ЗУ)

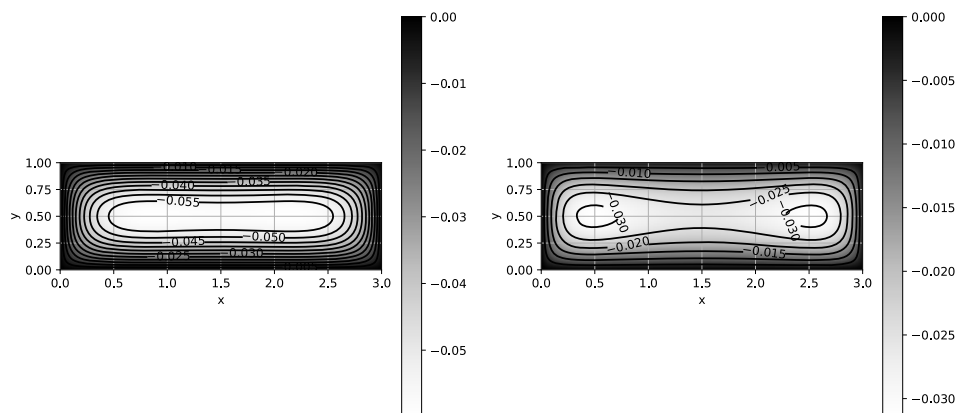


(в: ЗЭУ)



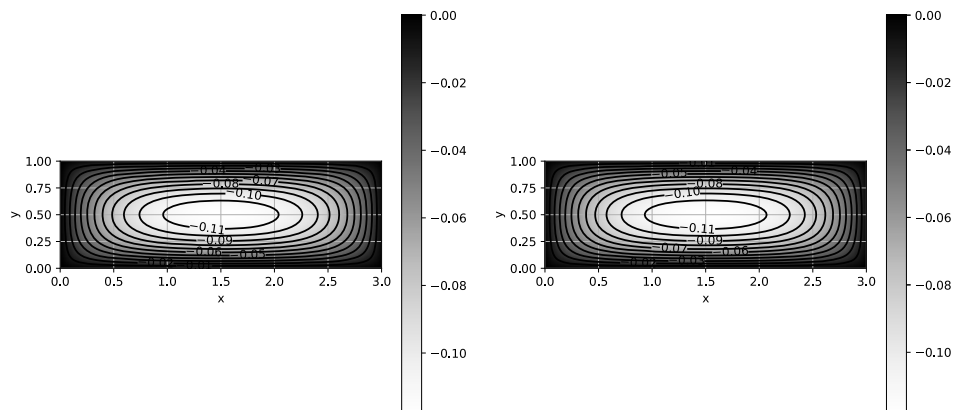
(в: ЗУ)

Рис. 7. Распределение моментов M_x (рис. а), M_y (рис. б), H_{xy} (рис. в) в прямоугольной плите со сторонами $a/b = 3$ из материала ЭМІ для случаев ЗЭУ и ЗУ



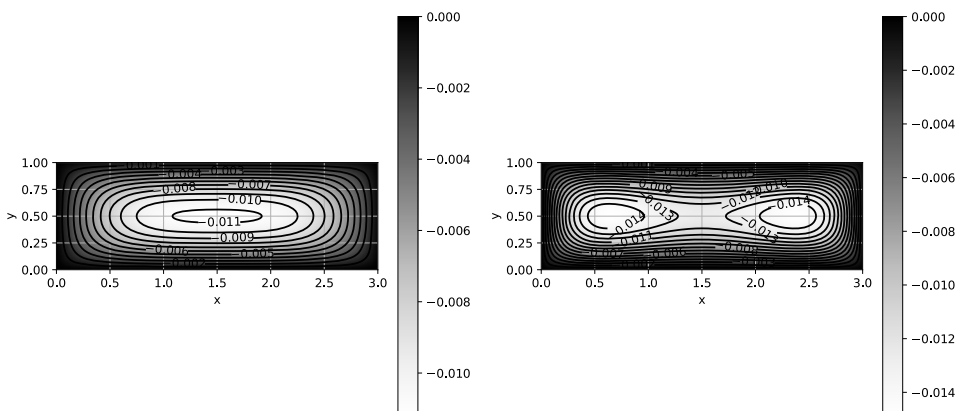
(а: ЗЭУ)

(а: ЗУ)



(б: ЗЭУ)

(б: ЗУ)



(в: ЗЭУ)

(в: ЗУ)

Рис. 8. Распределение моментов M_x (рис. а), M_y (рис. б), N_{xy} (рис. в) в прямоугольной плите со сторонами $a/b = 3$ из материала ЭМ5 для случаев ЗЭУ и ЗУ

Решение задачи об изгибе прямоугольной плиты

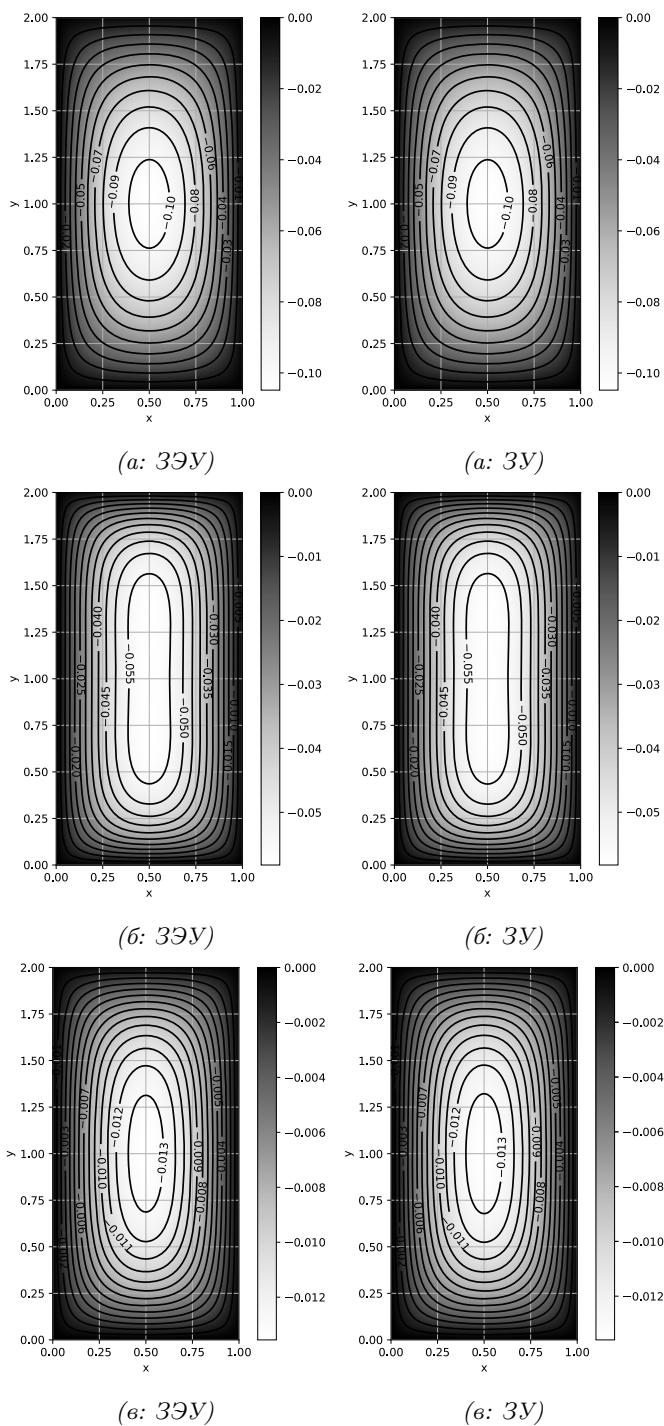


Рис. 9. Распределение моментов M_x (рис. а), M_y (рис. б), H_{xy} (рис. в) в прямоугольной плите со сторонами $b/a = 2$ из материала ЭМ1 для случаев 3ЭУ и 3У

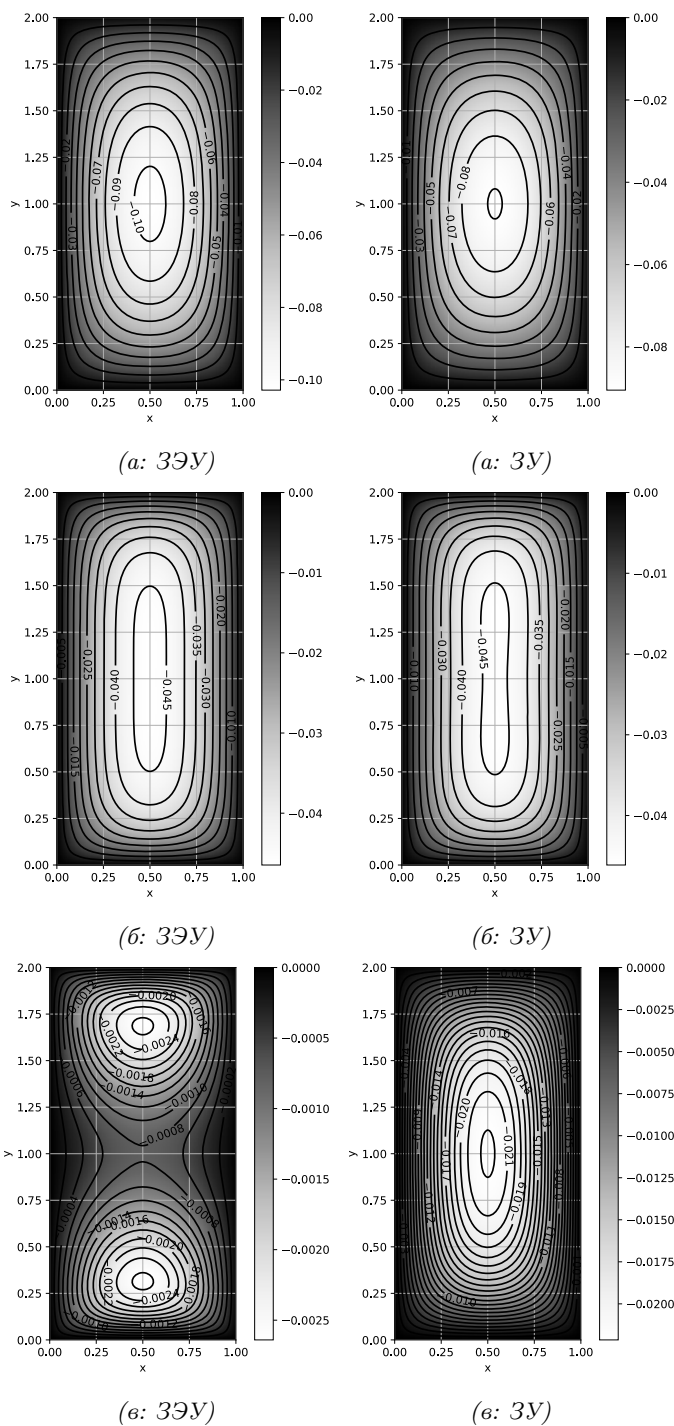


Рис. 10. Распределение моментов M_x (рис. а), M_y (рис. б), H_{xy} (рис. в) в прямоугольной плите со сторонами $b/a = 2$ из материала ЭМ5 для случаев 3ЭУ и 3У

Решение задачи об изгибе прямоугольной плиты

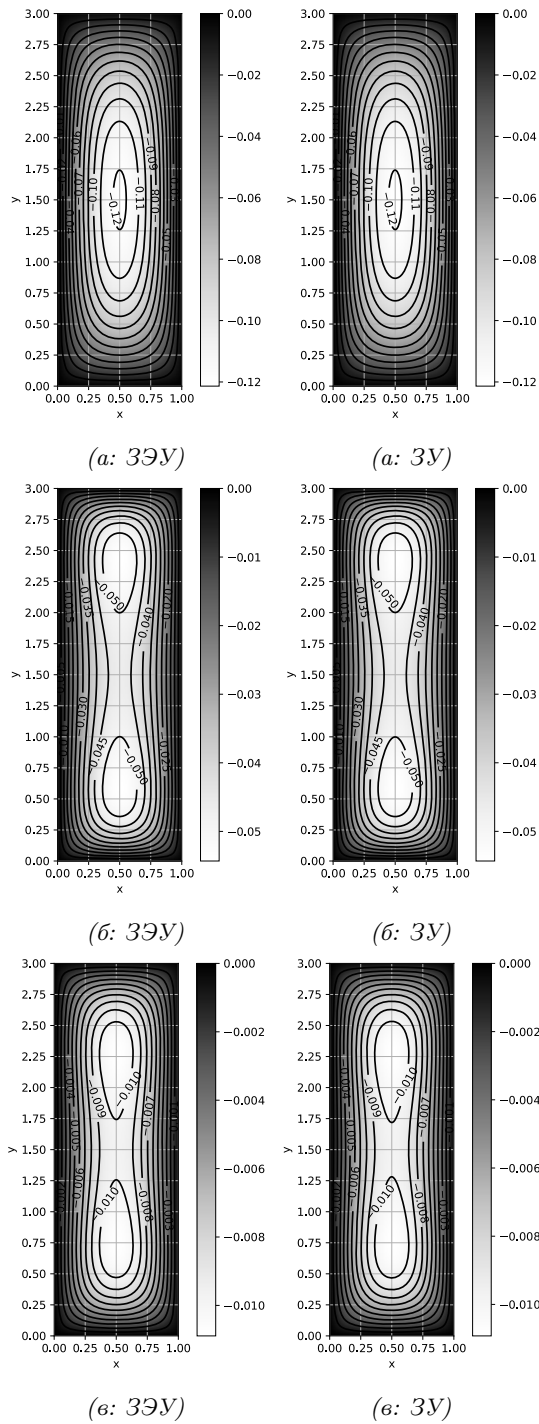


Рис. 11. Распределение моментов M_x (рис. а), M_y (рис. б), H_{xy} (рис. в) в прямоугольной плите со сторонами $b/a = 3$ из материала ЭМ1 для случаев 3ЭУ и 3У

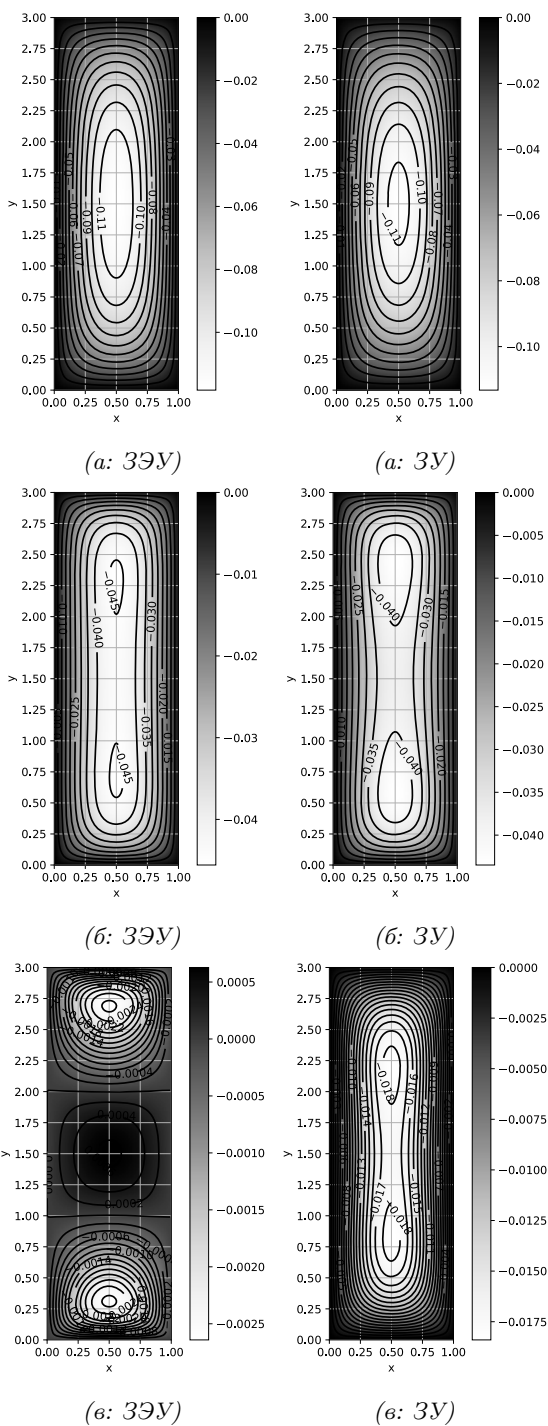


Рис. 12. Распределение моментов M_x (рис. а), M_y (рис. б), H_{xy} (рис. в) в прямоугольной плите со сторонами $b/a = 3$ из материала ЭМ5 для случаев 3ЭУ и 3У

Решение задачи об изгибе прямоугольной плиты

В таблице 1 для прямоугольных плит из материалов ЭМ1, ЭМ4, ЭМ5, ЭМ6 с различными отношениями сторон приведены максимальные по модулю значения возникающих моментов M_x , M_y , H_{xy} для случаев ЗЭУ и ЗУ.

Таблица 1.

Максимальные по модулю значения моментов M_x , M_y , H_{xy}

Тип задачи	Величина	Материал	Отношение сторон прямоугольника				
			$a/b = 1$	$a/b = 2$	$a/b = 3$	$b/a = 2$	$b/a = 3$
ЗЭУ	$-M_x$	ЭМ1	0,0467	0,0401	0,0390	0,1048	0,1214
		ЭМ4	0,0472	0,0478	0,0457	0,0995	0,1174
		ЭМ5	0,0540	0,0627	0,0598	0,1028	0,1184
		ЭМ6	0,0521	0,0608	0,0587	0,1011	0,1176
	$-M_y$	ЭМ1	0,0611	0,1136	0,1238	0,0582	0,0543
		ЭМ4	0,0456	0,0994	0,1178	0,0451	0,0435
		ЭМ5	0,0449	0,0991	0,1181	0,0465	0,0456
		ЭМ6	0,0471	0,1002	0,1183	0,0511	0,0501
	$-H_{xy}$	ЭМ1	0,0106	0,0105	0,0089	0,0136	0,0109
		ЭМ4	0,0118	0,0162	0,0133	0,0120	0,0102
		ЭМ5	0,0049	0,0122	0,0112	0,0026	0,0026
		ЭМ6	0,0060	0,0124	0,0109	0,0039	0,0037
ЗУ	$-M_x$	ЭМ1	0,0466	0,0400	0,0389	0,1048	0,1214
		ЭМ4	0,0400	0,0361	0,0349	0,0945	0,1154
		ЭМ5	0,0364	0,0323	0,0314	0,0905	0,1132
		ЭМ6	0,0361	0,0327	0,0319	0,0899	0,1129
	$-M_y$	ЭМ1	0,0612	0,1136	0,1238	0,0583	0,0543
		ЭМ4	0,0475	0,1011	0,1184	0,0453	0,0429
		ЭМ5	0,0481	0,1012	0,1184	0,0461	0,0435
		ЭМ6	0,0514	0,1035	0,1193	0,0520	0,0488
	$-H_{xy}$	ЭМ1	0,0106	0,0105	0,0089	0,0136	0,0109
		ЭМ4	0,0155	0,0174	0,0145	0,0201	0,0166
		ЭМ5	0,0163	0,0177	0,0149	0,0221	0,0184
		ЭМ6	0,0155	0,0163	0,0137	0,0218	0,0181

В таблице 2 для прямоугольных плит из материалов ЭМ1, ЭМ4, ЭМ5, ЭМ6 с различными отношениями сторон приведены достигаемые в центрах плит максимальные значения возникающего прогиба w , измеренного в 10^{-7} м, для случаев ЗЭУ и ЗУ.

Таблица 2. Максимальные значения прогиба w

Тип задачи	Материал	Отношение сторон прямоугольника				
		$a/b = 1$	$a/b = 2$	$a/b = 3$	$b/a = 2$	$b/a = 3$
ЗЭУ	ЭМ1	0,9590	2,1042	2,4697	2,6066	3,2653
	ЭМ4	0,3781	0,9947	1,2655	0,9608	1,2145
	ЭМ5	0,5309	1,5009	1,9475	1,2600	1,5621
	ЭМ6	0,6465	1,7691	2,2759	1,5931	2,0027
ЗУ	ЭМ1	0,9579	2,0989	2,4624	2,6058	3,2649
	ЭМ4	0,3304	0,8069	1,0036	0,9095	1,1815
	ЭМ5	0,3823	0,9115	1,1280	1,0985	1,4570
	ЭМ6	0,4755	1,0999	1,3453	1,4047	1,8806

В таблице 3 для прямоугольных плит из материалов ЭМ1, ЭМ4, ЭМ5, ЭМ6 с различными отношениями сторон приведены максимальные по модулю значения моментов M_{Dx} , M_{Dy} , измеренных в 10^{-3} МКл.

Таблица 3.
Максимальные по модулю значения моментов M_{Dx} , M_{Dy}

Величина	Материал	Отношение сторон прямоугольника				
		$a/b = 1$	$a/b = 2$	$a/b = 3$	$b/a = 2$	$b/a = 3$
M_{Dx} ,	ЭМ1	0,0047	0,0079	0,0068	0,0025	0,0007
	ЭМ4	-1,4981	-3,0533	-2,8550	-0,7305	-0,2102
	ЭМ5	-2,1313	-5,0170	-4,9123	-0,8773	-0,2014
	ЭМ6	-2,5032	-5,6387	-5,4497	-1,0929	-0,2748
M_{Dy} ,	ЭМ1	-0,0047	-0,0039	-0,0020	-0,0052	-0,0031
	ЭМ4	1,5059	1,5037	0,8793	1,5700	0,9426
	ЭМ5	2,1463	2,4820	1,5440	1,9366	1,0882
	ЭМ6	2,5193	2,7858	1,7032	2,3895	1,3777

Из представленных результатов следует, что на значения механических моментов M_x , M_y , H_{xy} существенно влияет соотношение сторон прямоугольной плиты. Так, увеличение одной из сторон приводит к заметному росту значений изгибающих моментов, действующих вдоль короткой стороны, и куда менее выраженным изменениям значений изгибающих моментов, действующих вдоль длинной стороны. При этом максимальные значения крутящего момента при увеличении одной из сторон прямоугольника сперва несколько возрастают, а затем убывают. Для квадратных плит наибольшая концентрация моментов имеет место в центре плиты. Для прямоугольных плит изгибающие моменты, действующие вдоль короткой стороны, достигают наибольшей концентрации в центре плиты, тогда как концентрация изгибающих моментов, действующих вдоль длинной стороны, не является максимальной в центре. Она возрастает от центра в направлении коротких сторон и достигает максимума на расстоянии около половины короткой стороны. При этом, концентрация моментов остается сопоставимой для всех материалов, несмотря на существенные отличия в значениях коэффициентов деформации. По всей видимости, этому способствуют эквивалентные механические граничные условия (края плиты свободно оперты). Следовательно, при свободном опирании края плиты упругие свойства материала (значения коэффициентов деформации) незначительно влияют на значения моментов. Влияние же пьезоэлектрических свойств является более выраженным. Так, для квадратной плиты из материала ЭМ4 учет этих свойств привел к росту максимальных значений моментов M_x на 18%, а для плит из материалов ЭМ5, ЭМ6 – до 66%, тогда как максимальные значения момента M_y , наоборот, незначительно уменьшились. При удлинении плиты в направлении оси Ox (перпендикулярно направлению поляризации) учет пьезоэлектрических свойств приводил к еще большему росту значений моментов M_x , а на значениях моментов M_y сказывался слабо. При удлинении плиты в направлении оси Oy (в направлении поляризации) вклад пьезоэффекта в концентрацию моментов являл-

ся менее значительным. В плите же из материала ЭМ1, обладающего наиболее слабыми пьезоэлектрическими свойствами, концентрация моментов для любых конфигураций изменялась очень слабо относительно учета пьезосвойств.

Наибольший прогиб возникает в плите из материала ЭМ1, обладающего наибольшими значениями коэффициентов деформации. Таким образом, упругие свойства материала значительно влияют на значения прогиба. Учет же электрических свойств материала на прогиб плиты из материала ЭМ1 приводил к очень слабому увеличению прогиба. Для плит же из материалов ЭМ4, ЭМ5, ЭМ6 учет электрических свойств материала приводил к значительному росту значений прогиба. Так, для квадратной плиты из материала ЭМ4 увеличение прогиба составило около 12%, а для плит из материалов ЭМ5, ЭМ6 — более 35%. При удлинении плиты в направлении оси Ox (перпендикулярно направлению поляризации) увеличение становится ещё более значительным. Однако при удлинении плиты в направлении оси Oy (в направлении поляризации) увеличение влияния пьезосвойств на значения прогиба становится менее выраженным.

В плите из материала ЭМ1 возникают наименьшее по величине моменты электрической индукции M_{Dx} , M_{Dy} , а в плитах из материалов ЭМ4, ЭМ5, ЭМ6 концентрация этих моментов оказалась на 2 порядка выше. При этом, в плите из материала ЭМ6 значения этих моментов превышают аналогичные значения в плитах из материалов ЭМ4 и ЭМ5. Это связано с тем, что материал ЭМ6 имеет несколько меньшие значения коэффициентов диэлектрической проницаемости, чем материалы ЭМ4, ЭМ5. Материал ЭМ1 обладает существенно большими значениями пьезоэлектрических модулей и коэффициентов диэлектрической проницаемости среди представленных материалов.

1. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
2. Tiersten H.F. Linear piezoelectric plate vibrations: elements of the linear theory of piezoelectricity and the vibrations piezoelectric plates / H.F. Tiersten. – New York: Plenum, 1969. – 212 p.
3. Mindlin R.D. Forced thickness-shear and flexural vibrations of piezoelectric crystal plates / R.D. Mindlin // J. Appl. Phys. – 1952. – Vol. 23. – P. 83–88.
4. Mindlin R.D. High frequency vibrations of piezoelectric crystal plates / R.D. Mindlin // Int. J. Solids Struct. – 1972. – Vol. 8. – P. 895–906.
5. Bugdayci N. A two-dimensional theory for piezoelectric layers used in electro-mechanical transducers I: Derivation / N. Bugdayci, D.B. Bogy // Int. J. Solids Struct. – 1981. – Vol. 17. – P. 1159–1178.
6. Krommer M. A Reissner–Mindlin-type plate theory including the direct piezoelectric and the pyroelectric effect / M. Krommer, H. Irschik // Acta Mech. – 2000. – Vol. 141. – P. 51–69.
7. Bisegna P. Evaluation of higher-order theories of piezoelectric plates in bending and in stretching / P. Bisegna, G. Caruso // Int. J. Solids Struct. – 2001. – Vol. 38. – P. 8805–8830.
8. Love A.E.H. On the small free vibrations and deformations of elastic shells / A.E.H. Love // Philosophical trans. of the Royal Society. – 1888. – Vol. serie A, No. 17. – P. 491–549.
9. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
10. Калоеров С.А. Краевые задачи прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих

- плит / С.А. Калоеров // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2019. – № 1. – С. 42–58.
11. Калоеров С.А. Задачи электроупругого, магнитоупругого и упругого изгиба тонких плит как частные задачи электромагнитоупругого изгиба / С.А. Калоеров // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2019. – № 3-4. – С. 58–79.
 12. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
 13. Mansfield E.H. The bending and stretching of plates / E.H. Mansfield. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 228 p.
 14. Глушанков Е.С. Решение задачи об изгибе защемленной по краю эллиптической пьезоэлектрической плиты / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2020. – № 4. – С. 5–15.
 15. Гринченко В.Т. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – К.: Наук. думка. – 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 5).
 16. Калоеров С.А. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей / С.А. Калоеров, А.И. Баева, О.И. Бороненко. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 268 с.
 17. Liu J.X. Anisotropic thermopiezoelectric solids with an elliptic inclusion or a hole under uniform heat flow / J.X. Liu, X.S. Zhang, X.L. Liu, J. Zheng // Acta Mech. Sinica. – 2000. – Vol. 16. – P. 148–163.
 18. Dunn M.L. Micromechanics of coupled electroelastic composites effective thermal expansion and pyroelectric coefficients / Dunn M.L. // J. Appl. Phys. – 1993. – Vol. 73. – P. 5131–5140.

E.S. Glushankov, A.B. Mironenko

The solution of the problem of bending of simply supported rectangular piezoelectric plate. I.

A bending problem is solved for simply supported thin rectangular piezoelectric plate loaded along the upper base. The cases are considered whether different side surfaces of plate are electroded or are not electroded. The solutions of the problems are obtained in double trigonometric series. The influence of material's properties and electric boundary condition on the electro-elastic state of the plate is obtained with the numerical studies based on the obtained solutions.

Keywords: *bending theory of thin plates, piezoelectric material, rectangular plate, polynomial solutions, deflection function, bending moments, double trigonometric series.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк

Получено 01.12.2022

Donetsk National University, Donetsk

evgenij.glushankov@gmail.com

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2022-4-47-52

EDN:RAPMHU



©2022. Д.С. Карасев, С.В. Сторожев

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ СДВИГОВЫХ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИКИ

Представлен аналитический векторно-матричный алгоритм получения решений системы уравнений стационарной волновой динамики для полубесконечной функционально-градиентной пьезокерамической среды класса bpm с горизонтальной осью электрической поляризации, описывающей распространение локализованных связанных сдвиговых электроупругих волн SH-типа вдоль перпендикулярного оси поляризации горизонтального направления в граничной плоскости. Приповерхностная непрерывная неоднородность физико-механических параметров рассматриваемой среды описывается экспоненциальными функциями. Искомые решения получены в форме сходящихся по норме векторных экспоненциальных рядов и могут быть использованы для анализа закономерностей распространения электромеханических поверхностных волн Гуляева-Блюстейна в среде рассматриваемого типа.

Ключевые слова: функционально-градиентное пьезокерамическое полупространство, экспоненциальная физико-механическая неоднородность, сдвиговые электроупругие волны, интегрирование волновых уравнений, аналитический итерационный алгоритм, векторные экспоненциальные ряды.

Введение и цель исследования. Локализованные сдвиговые волны Гуляева-Блюстейна [1–7] являются одним из важнейших типов связанных электроупругих поверхностных волн, получивших самое широкое применение в акустоэлектронике [8–10]. При этом для волн данного типа в полубесконечных пьезокерамических телах основные характеристики процессов распространения, востребованные в предпроектном моделировании, с высокой степенью полноты исследованы для случая однородных линейно-поляризованных пьезокерамических материалов. Однако исходя из возможностей создания новых модификаций неоднородных пьезокерамических сред для специальных практических применений [11–19], в том числе функционально-градиентных пьезокерамических волноводов данного типа на основе применения аддитивных технологий, соответствующие варианты проблемы распространения локализованных сдвиговых электроупругих волн SH-типа являются в высокой мере актуальными открытиями по многим аспектам задачами волновой динамики пьезоактивных сред, представляющими интерес для поиска новых конструктивных решений в разработках акустоэлектронных радиокомпонентов. В особой мере данное заключение касается разработки высокоточных численно-аналитических методов получения и исследования дисперсионных соотношений для подобных волноводных струк-

тур.

В этом контексте, целью представляемого в данной статье исследования является разработка аналитического итерационного алгоритма интегрирования системы уравнений распространения связанных электроупругих сдвиговых волн в полупространстве функционально-градиентной пьезокерамики с экспоненциальными законами поперечной физико-механической неоднородности.

1. Основные соотношения рассматриваемой модели. Рассматривается занимающая область $x_1 \leq \chi < 0$ в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$ полубесконечная непрерывно-неоднородная гексагональная пьезокерамическая упругая среда класса *btt* с осью поляризации Ox_3 , имеющая переменные вдоль оси Ox_1 физико-механические свойства.

Система уравнений стационарного динамического деформирования, описывающая распространение локализованных связанных сдвиговых электроупругих волн Гуляева-Блюстейна вдоль координатного направления Ox_2 в рассматриваемом полупространстве из неоднородного пьезоэлектрического материала с физико-механическими характеристиками вида

$$c_{ij} = c_{ij0} + \beta_c \exp(\lambda x_1), \quad e_{ij} = e_{ij0} + \beta_e \exp(\lambda x_1), \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij0} + \beta_\varepsilon \exp(\lambda x_1), \quad \rho = \rho_0 + \beta_\rho \exp(\lambda x_1),$$

в рамках модели квазистатического приближения для характеристик электрического поля включает соотношения

$$\partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} - \rho \ddot{u}_3 = 0, \quad \partial_1 D_1 + \partial_2 D_2 = 0, \quad \partial_j = \partial / \partial x_j \quad (j = \overline{1, 2}); \quad (2)$$

$$\sigma_{13} = c_{44} \partial_1 u_3 + e_{15} \partial_1 \varphi, \quad \sigma_{23} = c_{44} \partial_2 u_3 + e_{15} \partial_2 \varphi, \quad (3)$$

$$D_1 = -\varepsilon_{11} \partial_1 \varphi + e_{15} \partial_1 u_3, \quad D_2 = -\varepsilon_{11} \partial_2 \varphi + e_{15} \partial_2 u_3.$$

В соотношениях (1)–(3) $u_3(x_1, x_2, t)$, $\varphi(x_1, x_2, t)$ – соответственно искомые комплексные функции волнового упругого смещения и потенциала квазистатического электрического поля в SH-волне; σ_{13} , σ_{23} – комплексные функции касательных механических напряжений в исследуемых волнах; D_1 , D_2 – комплексные функции индукции квазистатического электрического поля; $c_{ij}(x_1)$, $e_{ij}(x_1)$, $\varepsilon_{ij}(x_1)$, $\rho(x_1)$ – соответственно переменные характеристики модулей упругости, пьезоэлектрических, диэлектрических параметров и плотности функционально-градиентного пьезокерамического материала с асимптотически достигаемыми значениями c_{ij0} , e_{ij0} , ε_{ij0} , ρ_0 в глубине полупространства при $x_1 \rightarrow -\infty$; λ – положительно определенный параметр экспоненциальной неоднородности.

С учетом выражений (1), (3), система уравнений (2), после введения представлений

$$\begin{aligned} u_3(x_1, x_2, t) &= u_{30}(x_1) \exp(-i(\omega t - kx_2)), \\ \varphi(x_1, x_2, t) &= \varphi_0(x_1) \exp(-i(\omega t - kx_2)), \end{aligned} \quad (4)$$

отвечающих волнам рассматриваемого типа с циклической частотой ω и волновым числом k , может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned}
 c_{440}u_{30}''(x_1) + e_{150}\varphi_0''(x_1) + (\rho_0\omega^2 - c_{440}k^2)u_{30}(x_1) - e_{150}k^2\varphi_0(x_1) = \\
 = -(\beta_c u_{30}''(x_1) + \beta_c \lambda u_{30}'(x_1) + \beta_e \varphi_0''(x_1) + \beta_e \lambda \varphi_0'(x_1) + \\
 + (\beta_\rho \omega^2 - \beta_c k^2)u_{30}(x_1) - \beta_e k^2 \varphi_0(x_1)) \exp(\lambda x_1), \\
 (5) \\
 e_{150}u_{30}''(x_1) - \varepsilon_{110}\varphi_0''(x_1) - e_{150}k^2u_{30}(x_1) + \varepsilon_{110}k^2\varphi_0(x_1) = \\
 = -(\beta_e u_{30}''(x_1) + \beta_e \lambda u_{30}'(x_1) - \beta_e k^2 u_{30}(x_1) - \\
 - \beta_\varepsilon \varphi_0''(x_1) - \beta_\varepsilon \lambda \varphi_0'(x_1) + \beta_\varepsilon k^2 \varphi_0(x_1)) \exp(\lambda x_1).
 \end{aligned}$$

Интегрирование (5) является первичным этапом процедуры получения дисперсионного соотношения для локализованных электроупругих волн рассматриваемого типа.

2. Аналитический векторно-матричный итерационный алгоритм интегрирования уравнений стационарной волновой динамики. Для реализации предлагаемого алгоритма система уравнений (5) записывается в следующей матричной форме

$$(\underline{A}_1^{(0)} \partial_1^2 + \underline{A}_2^{(0)}) \underline{F} = \exp(\lambda x_1) (\underline{A}_1^{(1)} \partial_1^2 + \underline{A}_2^{(1)} \partial_1 + \underline{A}_3^{(1)}) \underline{F}. \quad (6)$$

В выражении (6): $\underline{F}(x_1) = (u_{30}(x_1), \varphi_0(x_1))^T$ – вектор решения; $A_1^{(0)}$, $A_2^{(0)}$ и $A_1^{(1)}$, $A_2^{(1)}$, $A_3^{(1)}$ – матричные коэффициенты вида

$$\underline{A}_1^{(0)} = \begin{pmatrix} c_{440} & e_{150} \\ e_{150} & -\varepsilon_{110} \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_2^{(0)} = \begin{pmatrix} \rho_0\omega^2 - c_{440}k^2 & -e_{150}k^2 \\ -e_{150}k^2 & \varepsilon_{110}k^2 \end{pmatrix}; \quad (7)$$

$$\underline{A}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -\beta_c & -\beta_e \\ -\beta_e & \beta_\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} -\lambda\beta_c & -\lambda\beta_e \\ -\lambda\beta_e & \lambda\beta_\varepsilon \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\underline{A}_3^{(1)} = \begin{pmatrix} -(\beta_\rho \omega^2 - \beta_c k^2) & -\beta_e k^2 \\ \beta_e k^2 & -\beta_\varepsilon k^2 \end{pmatrix}.$$

Для интегрирования системы (6) применяется метод последовательных приближений, описываемый соотношениями

$$\underline{F} = \underline{F}_0 + \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \dots + \underline{F}_p + \dots \quad (9)$$

$$(\underline{A}_1^{(0)} \partial_1^2 + \underline{A}_2^{(0)}) \underline{F}_0 = 0, \quad (10)$$

$$(\underline{A}_1^{(0)} \partial_1^2 + \underline{A}_2^{(0)}) \underline{F}_1 = \exp(\lambda x_1) (\underline{A}_1^{(1)} \partial_1^2 + \underline{A}_2^{(1)} \partial_1 + \underline{A}_3^{(1)}) \underline{F}_0, \quad (11)$$

$$(\underline{A}_1^{(0)} \partial_1^2 + \underline{A}_2^{(0)}) \underline{F}_2 = \exp(\lambda x_1) (\underline{A}_1^{(1)} \partial_1^2 + \underline{A}_2^{(1)} \partial_1 + \underline{A}_3^{(1)}) \underline{F}_1, \dots,$$

$$(\underline{A}_1^{(0)} \partial_1^2 + \underline{A}_2^{(0)}) \underline{F}_p = \exp(\lambda x_1) (\underline{A}_1^{(1)} \partial_1^2 + \underline{A}_2^{(1)} \partial_1 + \underline{A}_3^{(1)}) \underline{F}_{p-1} \dots$$

Представление \underline{F}_0 определяется в результате интегрирования однородной системы (9) методом Эйлера и задается суммой двух базисных векторных решений $\underline{F}_0^{(j)}$ с произвольными постоянными коэффициентами a_j

$$\underline{F}_0 = a_1 \underline{F}_0^{(1)} + a_2 \underline{F}_0^{(2)}, \quad (12)$$

где

$$\underline{F}_0^{(j)} = \underline{Q}_j^{(0)} \exp(\delta_j x_1); \quad (13)$$

δ_j ($\text{Re} \delta_j > 0$) – корни биквадратного характеристического уравнения

$$\begin{aligned} \delta^4 + [\varepsilon_{110}(\rho_0 \omega^2 - c_{440} k^2) - 2e_{150}^2 k^2 - \varepsilon_{110} c_{440}] \delta^2 + \\ + [(c_{440} k^2 - \rho_0 \omega^2) \varepsilon_{110} k^2 + e_{150}^2 k^4] = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$\underline{Q}_j^{(0)}$ – векторные коэффициенты вида

$$\underline{Q}_j^{(0)} = (1, e_{150}/\varepsilon_{110})^T. \quad (15)$$

Составляющие $\underline{F}_p^{(j)}$ ($j = \overline{1, 2}$; $p \geq 1$) определяются как частные решения последовательностей неоднородных уравнений (11) в виде

$$\underline{F}_p^{(j)} = \underline{Q}_j^{(p)} \exp((p\lambda + \delta_j)x_1), \quad (16)$$

где

$$\underline{Q}_j^{(p)} = \underline{M}_{0pj}^{-1} \underline{M}_{1pj} \underline{Q}_j^{(p-1)}, \quad (17)$$

$$\underline{M}_{0pj} = (p\lambda + \delta_j)^2 \underline{A}_1^{(0)} + \underline{A}_2^{(0)}, \quad (18)$$

$$\underline{M}_{1pj} = ((p-1)\lambda + \delta_j)^2 \underline{A}_1^{(1)} + ((p-1)\lambda + \delta_j) \underline{A}_2^{(1)} + \underline{A}_3^{(1)}, \quad (19)$$

или

$$\underline{Q}_j^{(p)} = \underline{M}_{0pj}^{-1} \underline{M}_{1pj} \underline{M}_{0,p-1,j}^{-1} \underline{M}_{1,p-1,j} \dots \underline{M}_{01j}^{-1} \underline{M}_{11j} \underline{Q}_j^{(0)}. \quad (20)$$

В итоге, для двух базисных решений системы уравнений (5) получены записываемые в форме экспоненциальных рядов с явно определяемыми векторными коэффициентами представления

$$\underline{F}^{(j)} = \sum_{p=0}^{\infty} \underline{Q}_j^{(p)} \exp((p\lambda + \delta_j)x_1) \quad (j = \overline{1, 2}). \quad (21)$$

По признаку Даламбера функциональный ряд (21) является сходящимся по норме в области $x_1 \leq \chi < 0$ ввиду свойства

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \left| \left(\left\| \underline{Q}_j^{(p+1)} \right\| \exp(((p+1)\lambda + \delta_j)x_1) \right) / \left(\left\| \underline{Q}_j^{(p)} \right\| \exp((p\lambda + \delta_j)x_1) \right) \right| = \\ = \exp(\lambda x_1) < 1. \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, для полубесконечной пьезоактивной функционально-градиентной гексагонально-анизотропной среды получены аналитические решения уравнений распространения сдвиговых электроупругих волн, являющиеся основой для исследования закономерностей распространения в рассматриваемых средах локализованных волн Гуляева-Блюстейна.

Выводы. В результате представленных исследований разработан базовый аппарат для получения и численно-аналитического исследования дисперсионных соотношений, описывающих распространение поверхностных волн Гуляева-Блюстейна в рамках модели квазистатического приближения связанного электромагнитного поля при динамическом электроупругом деформировании непрерывно-неоднородной гексагональной пьезокерамической упругой среды класса *бтм*.

Использован вариант экспоненциального описания закона неоднородности для физико-механических характеристик пьезокерамического материала, согласно которому в глубине полупространства эти характеристики асимптотически стремятся к постоянным значениям, а при малых значениях поперечной координаты реализуется описание локализованной приповерхностной неоднородности свойств материала.

1. *Liu H.* Propagation of Bleustein-Gulyaev Waves in a Pre-Stressed Layered Piezoelectric Structure / H. Liu, Z.B. Kuang, Z.M. Cai // *Ultrasonics*. – 2003. – Vol. 41. – P. 397–405.
2. *Jin F.* The Propagation Behavior of Bleustein-Gulyaev Waves in a Pre-Stressed Piezoelectric Layered Structure / F. Jin, Z. Wang, K. Kishimoto // *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. – 2003. – Vol. 4. – P. 125–138.
3. *Kaplunov J.* An Explicit Asymptotic Model for the Bleustein-Gulyaev Wave / J. Kaplunov, L. Kossovich, A. Zakharov // *Comptes Rendus Mecanique*. – 2004. – Vol. 332(7). – P. 487–492.
4. *Приказчиков Д.А.* Общее представление для волны Блюштейна-Гуляева / Д.А. Приказчиков, Б. Эрбаш // *Инженерный журнал: наука и инновации*. – 2013. – Вып. 7. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/848.html>
5. *Желнорович В.А.* Поверхностные волны Релея и Блюстейна-Гуляева в упругих пьезоэлектриках при наличии релаксации диэлектрической поляризации / В.А. Желнорович // *ПММ*. – 2015. – Т. 79, Вып. 2. – С. 273–285.
6. *Кулак Г.В.* Акустооптическая диагностика поверхностных волн Гуляева-Блюстейна беселевыми световыми пучками в кубических кристаллах / Г.В. Кулак, Г.В. Крох, Т.В. Николаенко, О.В. Шакин // *Квантовая электроника: материалы XII Междунар. науч.-техн. конф.*(Минск, 18–22 нояб. 2019 г.) / редкол.: М.М. Кугейко (отв. ред.) [и др.]. – Минск: РИВШ, 2019. – С. 48–49.
7. *Белубекян В.М.* Условия появления волны Гуляева-Блюстейна с учетом нестационарности электрического поля / В.М. Белубекян, М.В. Белубекян, В.Г. Гараков // *Доклады Национальной академии наук Армении. Механика*. – 2020. – Т. 120, № 3. – С. 174–180.
8. *Кузнецова И.Е.* Влияние электрических граничных условий на существование аномального резисто-акустического эффекта / И.Е. Кузнецова, Б.Д. Зайцев // *Ученые записки физического факультета Московского университета*. – 2014. – № 5, 145331.
9. *Аветисян А.С.* О постановке задач бесконтактного поверхностного управления распространением электроакустической волны / А.С. Аветисян // *Акустический журнал*. – 2022. – Т. 68, № 3. – С. 261–269.
10. *Акустические волны в материалах и элементах конструкций с дефектами, неоднородностями и микроструктурой: монография* / М.С. Аносов [и др.]; отв. ред. В.И. Ерофеев, А.О. Мальханов. – Нижний Новгород: Нижегород. гос. техн. ун-т им. Р.Е. Алексеева, 2021. –

311 с.

11. *Setter N.* Piezoelectric material and devices / N. Setter. – Lausanne, Switzerland: Swiss Federal Institute of Technology, 2002. – 518 p.
12. *Hudai K.* Porous PZT ceramics for receiving transducers / K. Hudai, R. Rajamami, R. Stevens, C.R. Bowen // IEEE Trans. UFFC. – 2003. – V. 50. – N 3. – P. 280–296.
13. *Saito Y.* Lead-free piezoceramics / Y. Saito, H. Takao, T. Tani, T. Nonoyama, K. Takatori, T. Homma, T. Nagaya, M. Nakamura // Nature. – 2004. – V. 432. – P. 84–87.
14. *Heywang W.* Piezoelectricity, evolution and future of a technology / W. Heywang, K. Lubitz, W. Wersing. – Berlin: Springer, 2008. – 581 p.
15. *Рыбьянец А.Н.* Свойства керамических пьезокомпозиов ЦТС/ЦТС / А.Н. Рыбьянец // Известия РАН. Серия физическая. – 2010. – Т. 74. – № 8. – С. 1150–1153.
16. *Yoon H.* Macroporous alumina ceramics with aligned microporous walls by unidirectionally freezing foamed aqueous ceramic suspensions / H. Yoon, U. Kim, J. Kim, Y. Koh, W. Choi, H. Kim // J. Am. Ceram. Soc. – 2010. – V. 93. – P. 1580–1582.
17. *Lugovaya M.A.* Complex material properties of porous piezoelectric ceramics / M.A. Lugovaya, A.A. Naumenko, A.N. Rybyanets, S.A. Shcherbinin // Ferroelectrics. – 2015. – V. 484, Issue. 1. – P. 87–94.
18. *Рыбьянец А.Н.* Упругие диэлектрические и пьезоэлектрические свойства керамоматричных композиов ЦТС/а-АОs / А.Н. Рыбьянец, Г.М. Константинов, А.А. Науменко, Н.А. Швецова, Д.И. Макарьев, М.А. Луговая // ФТТ. – 2015. – Т. 57., Вып. 3. – С. 515518.
19. *Bowen C.R.* The piezoelectric medium and its characteristics / C.R. Bowen, V.Y. Topolov, H.A. Kim // Springer Series in Materials Science. – 2016. – V. 238. – P. 1–22.

D.S. Karasev, S.V. Storozhev

Integration of equations a coupled electroelastic shear waves propagation in the half-space of functional-gradient piezoceramics.

Is presented an analytical vector-matrix algorithm for obtaining solutions to the system of equations of stationary wave dynamics which describes the propagation of localized coupled SH-type electroelastic shear waves along perpendicular to polarization axes horizontal direction in the boundary plane in a semi-infinite functionally-gradient piezoceramics medium of class 6mm with a horizontal axis of electric polarization. The near-surface inhomogeneity of the physical and mechanical parameters of the considered medium is described by exponential functions. The desired solutions in the form of vector exponential series converging in the norm and can be used to analyze the patterns of propagation of Gulyaev-Bluestein electromechanical surface waves in a medium of the type under consideration are obtained.

Keywords: *functionally-graded piezoceramic half-space, exponential physical and mechanical inhomogeneity, shear electroelastic waves, integration of wave equations, analytical iterative algorithm, vector exponential series.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк
ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства и архитектуры”, Макеевка

Получено 03.12.2022

Donetsk National University, Donetsk
Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture,
Makeevka

s.v.storozhev@donnasa.ru

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2022-4-53-62

EDN:SKFHUL



©2022. Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев

КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ТЕРМОУПРУГОМ ИЗГИБЕ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С ТЕПЛОПРОНИЦАЕМЫМ РАЗРЕЗОМ В СЛУЧАЕ СИММЕТРИЧНОГО ТЕПЛООБМЕНА

В рамках обобщённой теории $\{1,0\}$ -аппроксимации построены аналитические выражения для максимальных по модулю значений коэффициентов интенсивности напряжений в изотропной пластине с теплопроницаемым разрезом. Численные исследования выявили влияние величины симметричного теплообмена и теплофизических свойств разреза на коэффициенты интенсивности температурных напряжений для поперечного и продольного сдвига при действии градиента температурного момента.

Ключевые слова: $\{1,0\}$ -аппроксимация, полиномы Лежандра, изотропная пластина, теплопроницаемый разрез, коэффициент интенсивности напряжений.

Введение. Тонкостенные элементы конструкций широко используются в различных отраслях современной техники и промышленности – в авиационной, ракетно-космической, автомобильной и др. В процессе эксплуатации таких элементов конструкций в них могут появляться повреждения в виде трещин и другие трещиноподобные дефекты. Расчёты элементов с трещинами целесообразно проводить с использованием линейной механики разрушения, в рамках которой определяются коэффициенты интенсивности напряжений (КИН). Об актуальности решения задач механики разрушения свидетельствует ряд публикаций последних лет [1, 2].

Тонкостенные элементы конструкций с целью улучшения их прочностных и жесткостных характеристик часто изготавливаются из новых композиционных материалов, что обуславливает необходимость учёта явлений, связанных с поперечными сдвигами и обжатием. В связи с этим построение обобщённых теорий пластин является весьма актуальным [3, 4].

Необходимость учёта температурных полей вносит дополнительные трудности в расчёт КИН. В ряде современных публикаций [5–8] рассмотрены различные аспекты решений задач термоупругости и теплопроводности.

Целью работы является выявление влияния теплообмена с внешней средой на лицевых поверхностях пластины (при его симметричном характере) и параметра теплопроницаемости разреза на КИН в изотропной пластине с трещиной, подверженной воздействию градиента температурного момента. Настоящая статья продолжает исследования, начатые в публикации [9], в которой аналогичные исследования проводились для изотропной пластины с теплоизолирован-

ным разрезом.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропную пластину толщины $2h$ с теплопроницаемым разрезом L в безразмерной системе координат $Ox_1x_2x_3$ с нормирующим параметром в виде полутолщины пластины h . На лицевых поверхностях пластины осуществляется конвективный теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой нулевой температуры. Предполагаем, что теплообмен имеет симметричный характер: $Bi^+ = Bi^- = Bi$, где Bi^\pm – параметры теплообмена на лицевых поверхностях (критерии Био).

Исследование термоупругого состояния пластины с разрезом будем осуществлять на базе обобщённой теории пластин в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации. В рамках данного приближения компоненты термоупругого состояния представляются в виде рядов Фурье по полиномам Лежандра P_k от толщинной координаты x_3 таким образом [10, 11]:

- температура

$$T(x_1, x_2, x_3) = T_0(x_1, x_2)P_0(x_3) + T_1(x_1, x_2)P_1(x_3),$$

где $T_0(x_1, x_2)$ – средняя температура; $T_1(x_1, x_2)$ – температурный момент;

- компоненты вектора перемещений

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_2)P_0(x_3) + \gamma_1(x_1, x_2)P_1(x_3);$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = v(x_1, x_2)P_0(x_3) + \gamma_2(x_1, x_2)P_1(x_3);$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = w_0(x_1, x_2)P_0(x_3),$$

где $u(x_1, x_2)$, $v(x_1, x_2)$, $w_0(x_1, x_2)$, $\gamma_k(x_1, x_2)$ – обобщённые перемещения, из которых $u(x_1, x_2)$, $v(x_1, x_2)$ являются аналогами перемещений точек срединной поверхности, $w_0(x_1, x_2)$ – аналог прогиба пластины, $\gamma_1(x_1, x_2)$, $\gamma_2(x_1, x_2)$ – аналоги углов поворота нормали;

- компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{kk}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}N_k(x_1, x_2)P_0(x_3) + \frac{3}{2}M_k(x_1, x_2)P_1(x_3) \quad (k = 1, 2);$$

$$\sigma_{12}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}S(x_1, x_2)P_0(x_3) + \frac{3}{2}H(x_1, x_2)P_1(x_3);$$

$$\sigma_{k3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}Q_{k0}(x_1, x_2)(P_0(x_3) - P_2(x_3)) \quad (k = 1, 2);$$

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

где $N_k(x_1, x_2)$, $S(x_1, x_2)$, $M_k(x_1, x_2)$, $H(x_1, x_2)$, $Q_{k0}(x_1, x_2)$ – обобщённые внутренние силовые факторы, из которых $N_1(x_1, x_2)$, $N_2(x_1, x_2)$, $S(x_1, x_2)$ являются аналогами мембранных усилий, $M_1(x_1, x_2)$, $M_2(x_1, x_2)$ – аналоги изгибающих моментов, $H(x_1, x_2)$ – аналог крутящего момента, $Q_{10}(x_1, x_2)$, $Q_{20}(x_1, x_2)$ – аналоги перерезывающих сил.

Мембранные усилия и перерезывающие силы определены с точностью до множителя Eh (E – модуль Юнга), а моменты – с точностью до Eh^2 .

Уравнения обобщённой теории пластин в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации включают в себя [10, 11]:

- первое приближение трёхмерного уравнения теплопроводности, записанное для случая симметричного теплообмена с внешней средой:

$$\Delta T_k - \rho_k^2 T_k = 0 \quad (k = 0, 1), \quad (1)$$

где

$$\rho_0^2 = \frac{3Bi}{Bi+3}; \quad \rho_1^2 = \frac{15(Bi+1)}{Bi+6}; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2};$$

- уравнения Дюамеля–Неймана в перемещениях

$$\begin{aligned} N_1 &= B_0 \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial v}{\partial x_2} - \alpha(1+\nu)T_0 \right\}; \\ N_2 &= B_0 \left\{ \frac{\partial v}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u}{\partial x_1} - \alpha(1+\nu)T_0 \right\}; \\ S &= \frac{1-\nu}{2} B_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right); \quad M_1 = D_0 \left\{ \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} - \alpha(1+\nu)T_1 \right\}; \\ M_2 &= D_0 \left\{ \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} - \alpha(1+\nu)T_1 \right\}; \quad H = \frac{1-\nu}{2} D_0 \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right); \\ Q_{i0} &= \Lambda_0 \left(\gamma_i + \frac{\partial w_0}{\partial x_i} \right) \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (2)$$

где ν – коэффициент Пуассона; α – температурный коэффициент линейного расширения;

$$B_0 = 3D_0 = \frac{2}{1-\nu^2}; \quad \Lambda_0 = \frac{5}{6(1+\nu)};$$

- уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} - Q_{10} = 0; \\ \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_{20} = 0; \quad \frac{\partial Q_{10}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{20}}{\partial x_2} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Компоненты термоупругого состояния в пластине с разрезом G^* представим в виде суммы:

$$G^* = G^o + G,$$

где G^o – компоненты термоупругого состояния в сплошной пластине (основного термоупругого состояния), которое считаем известным; G – компоненты возмущённого термоупругого состояния, обусловленные наличием теплопроницаемого разреза.

Граничные условия на линии разреза L с нормалью $\vec{n} = (n_1, n_2)$ формулируются для задачи теплопроводности (1) с учётом теплопроницаемости разреза [12], а для задачи термоупругости (2), (3) – соответствующие случаю свободных берегов разреза и отсутствия контакта между ними [13]. Помимо этого, для задачи (2), (3) предполагается, что компоненты основного термоупругого состояния G^o на линии разреза равны нулю. Таким образом, с учётом вышесказанного, граничные условия имеют вид:

- для компонент температуры [12]:

$$\left. \frac{\partial T_k}{\partial n} \right|_L - \beta_n [T_k] = - \left. \frac{\partial T_k^o}{\partial n} \right|_L \quad (k = 0, 1), \quad (4)$$

где $[G]$ – скачок функции G при переходе через линию разреза L ;

$$\beta_n = \frac{\lambda^*}{\delta^*}; \quad \lambda^* = \frac{\lambda_c}{\lambda}; \quad \delta^* = \frac{\delta}{l};$$

λ^* – относительная теплопроводность промежуточного слоя; λ_c – теплопроводность материала промежуточного слоя, расположенного между берегами трещины; λ – теплопроводность материала пластины; δ^* – относительное раскрытие разреза; l – половина длины разреза; δ – раскрытие трещины;

- для коэффициентов разложений компонент тензора напряжений [13]:

$$\begin{aligned} N_n|_L &= 0; & S_{nt}|_L &= 0; \\ M_n|_L &= 0; & H_{nt}|_L &= 0; & Q_n|_L &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где N_n , S_{nt} , M_n , H_{nt} , Q_n – обобщённые усилия и моменты на элементе длины разреза с нормалью \vec{n} и касательной \vec{t} :

$$\begin{aligned} N_n &= n_1^2 N_1 + 2n_1 n_2 S + n_2^2 N_2; & S_{nt} &= n_1 n_2 (N_1 - N_2) + (n_2^2 - n_1^2) S; \\ M_n &= n_1^2 M_1 + 2n_1 n_2 H + n_2^2 M_2; & H_{nt} &= n_1 n_2 (M_1 - M_2) + (n_2^2 - n_1^2) H; \\ Q_{n0} &= n_1 Q_{10} + n_2 Q_{20}. \end{aligned}$$

Первые два граничных условия (5) задаются для компонент безмоментного термоупругого состояния, а последние три – для компонент состояния термоупругого изгиба пластины.

Будем рассматривать только такие пластины, в которых разрез L удалён от линии внешней границы на расстояние, значительно превышающее длину разреза. В этом случае компоненты возмущённого термоупругого состояния G пренебрежимо малы у линии внешнего граничного контура и определяются лишь условиями (4), (5), заданными на линии разреза.

2. Методика решения задачи. В статье [14] было построено решение приближения порядка N трёхмерного уравнения теплопроводности для изотропной пластины с теплопроницаемым разрезом для случая произвольного теплообмена. Полагая в полученных в [14] соотношениях

$$N = 1; \quad Bi^+ = Bi^- = Bi,$$

получим решение задачи теплопроводности (1), (4).

Рассмотрим прямолинейный теплопроницаемый разрез длины $2l$, расположенный вдоль оси абсцисс симметрично относительно начала координат:

$$L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq l, x_2 = 0\}. \quad (6)$$

Применим к соотношениям термоупругости (2), (3), (5) двумерное интегральное преобразование Фурье, учитывающее разрывный характер искомых функций на линии разреза L . Используя методику обращения, основанную на применении специальной G-функции [13], запишем интегральные представления компонент возмущённого термоупругого состояния для разреза (6) (s – координата точки на линии разреза):

$$P_j^q(x_1, x_2) = -\frac{l}{2\pi} \sum_{k=1}^{\kappa} \int_{-1}^1 K_{jk}^q(x_1 - ls, x_2) \psi_k^q(s) ds, \quad (7)$$

где P_j^q – обобщённые внутренние силовые факторы:

$$P_1^0 = N_1; \quad P_2^0 = N_2; \quad P_3^0 = S; \quad P_1^1 = M_1; \quad P_2^1 = M_2; \quad P_3^1 = H; \quad P_k^1 = Q_{k-3,0};$$

$$\kappa = \begin{cases} 4 & \text{для } P_1^0 - P_3^0; \\ 5 & \text{для } P_4^1, P_5^1; \\ 7 & \text{для } P_1^1 - P_3^1; \end{cases}$$

$\psi_k^q = \psi_k^q(s)$ – искомые функции:

$$\psi_1^0 = \frac{d[u]}{ds}; \quad \psi_2^0 = \frac{d[v]}{ds}; \quad \psi_1^1 = \frac{d[\gamma_1]}{ds}; \quad \psi_2^1 = \frac{d[\gamma_2]}{ds}; \quad \psi_3^1 = \frac{d[w_0]}{ds};$$

$$\psi_4^1 = [\gamma_1]; \quad \psi_5^1 = [\gamma_2]; \quad \psi_3^0 = \psi_6^1 = [T_0]; \quad \psi_4^0 = \psi_7^1 = [T_1].$$

Ядра в формулах (7) представляют собой линейные комбинации специальных G-функций, например:

$$K_{14}^0(x_1 - ls, x_2) = \frac{\alpha r}{4} \{3 \sin \varphi g_{10}^0(r) - \sin 3\varphi g_{21}^0(r)\},$$

где r, φ – координаты точки в полярной системе координат:

$$r = \sqrt{(x_1 - ls)^2 + x_2^2}; \quad \cos \varphi = \frac{x_1 - ls}{r}; \quad \sin \varphi = \frac{x_2}{r};$$

$$g_{jk}^0(r) = C_0 G_{j,k}(\rho_0 r) + C_1 G_{j,k}(\rho_1 r);$$

C_0, C_1 – коэффициенты, зависящие от критерия Био; $G_{n,\nu}(z)$ – специальная G-функция, выражающаяся через функцию Макдональда $K_\nu(z)$ [15].

В результате подстановки интегральных представлений (7) в граничные условия (5) задача термоупругости сведена к двум системам сингулярных интегральных уравнений (СИУ), описывающих при $|\zeta| \leq 1$

- безмоментное термоупругое состояние:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^0(s)}{s - \zeta} ds = F_j^0(\zeta) \quad (j = 1, 2); \quad (8)$$

- состояние термоупругого изгиба:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^1(s)}{s - \zeta} ds + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^3 \int_{-1}^1 E_{jk}^1(\zeta - s) \psi_k^1(s) ds = F_j^1(\zeta) \quad (j = \overline{1, 3}), \quad (9)$$

где разностные ядра зависят от специальной G-функции и её первообразной $IG_{n,\nu}(z)$, например:

$$E_{11}^1(\zeta - s) = -1,5\Lambda_0 l^2 (\zeta - s) G_{2,0}(\sqrt{2,5}l|\zeta - s|) + \\ + 0,3\Lambda_0 \text{sign}(\zeta - s) \left\{ IG_{2,2}(\sqrt{2,5}l|\zeta - s|) - IG_{0,0}(\sqrt{2,5}l|\zeta - s|) \right\}.$$

Правые части систем СИУ (8), (9) содержат интегралы от скачков компонент температуры $[T_k]$ с разностными ядрами, представляющими собой линейные комбинации специальных G-функций.

В результате решения систем СИУ (8), (9) находятся все искомые функции ψ_k^q , за исключением функций $\psi_3^0, \psi_4^0, \psi_6^1, \psi_7^1$, являющихся решением задачи теплопроводности (1), (4). После определения искомых функций ψ_k^q значения компонент возмущённого термоупругого состояния в любой точке пластины могут быть найдены с использованием интегральных представлений (7).

Максимальные по модулю значения КИН для поперечного и продольного сдвига найдены путём сравнения коэффициентов при особенности $r^{-1/2}$ в ненулевых компонентах тензора напряжений с известными асимптотическими представлениями напряжений [16]. На основании свойств полиномов Лежандра определено, что КИН K_{II} достигает максимального по модулю значения на одной из лицевых поверхностей пластины ($x_3 = \pm 1$), а K_{III} – в срединной плоскости пластины ($x_3 = 0$), причём:

$$K_{II}^{\max} = 0,25\sqrt{\pi lh}E \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ \sum_{q=0}^1 |\psi_1^q(s)| \sqrt{1-s^2} \right\};$$

$$K_{III}^{\max} = 0,375\sqrt{\pi lh}E\Lambda_0 \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ |\psi_3^1(s)| \sqrt{1-s^2} \right\}. \quad (10)$$

3. Анализ результатов численных исследований. Численные исследования посвящены оценке влияния величины теплообмена Bi при его симметричном характере ($Bi^+ = Bi^- = Bi$) и теплофизических свойств теплопроницаемого разреза β_n на КИН температурных напряжений для поперечного и продольного сдвига (10). Расчёты проведены для разреза средней длины ($l = 3$) при значении коэффициента Пуассона $\nu = 0,3$. Предполагалось, что основное температурное поле в пластине изменяется по линейному закону. Тогда внутренние силовые факторы основного термоупругого состояния не возникают [17]. Поэтому оценивалась только составляющая КИН, обусловленная возмущённым температурным полем, вызванным наличием разреза.

На линии разреза ($|x_1| \leq l$) предполагалось наличие лишь градиента температурного момента:

$$\left. \frac{\partial T_0^o}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial T_1^o}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = q_1 = \text{const} \neq 0.$$

Результаты численных исследований представлены на рисунке 1 и рисунке 2 в виде графиков зависимостей максимальных относительных значений КИН от уровня теплообмена, представленного в логарифмической шкале ($\lg Bi$), при различных значениях параметра теплопроницаемости разреза β_n .

На рисунке 1 представлены графики максимальных относительных значений КИН для поперечного сдвига K_{II}^{\max} , а на рисунке 2 – для продольного сдвига K_{III}^{\max} . Значения КИН даны с точностью до величины $K^* = \alpha q_1 E \sqrt{lh}/4$, которая соответствует значению КИН в пластине без теплообмена при действии однородного потока тепла интенсивности q_1 перпендикулярно линии разреза [16]. Кривые 1 – 5 на рисунке 1 и рисунке 2 отвечают следующим значениям параметра теплопроницаемости разреза β_n : 0 (теплоизолированный разрез); 0,01; 0,1; 1; 10 соответственно.

Из графиков на рисунке 1, 2 следует, что с увеличением теплообмена максимальные относительные значения КИН как поперечного, так и продольного

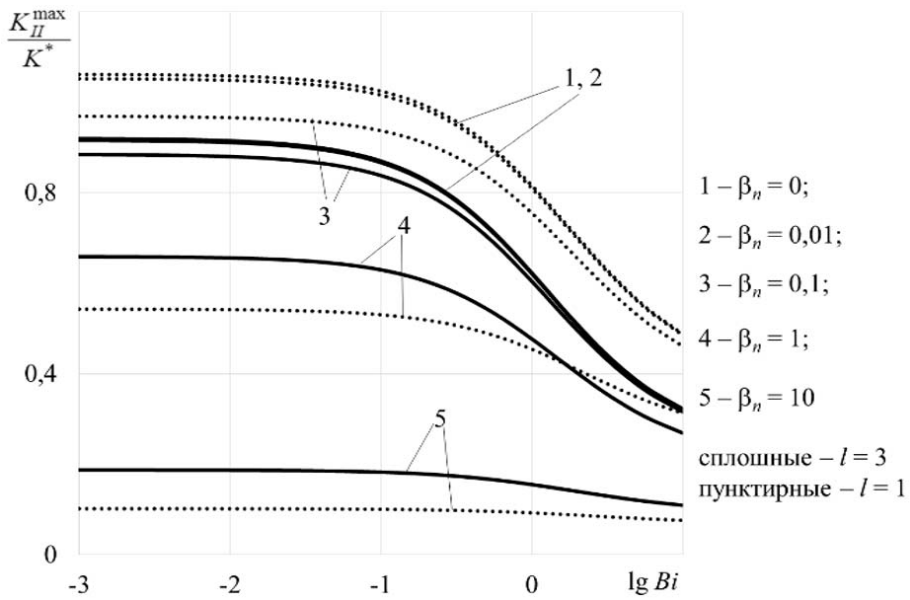


Рис. 1. КИН для поперечного сдвига

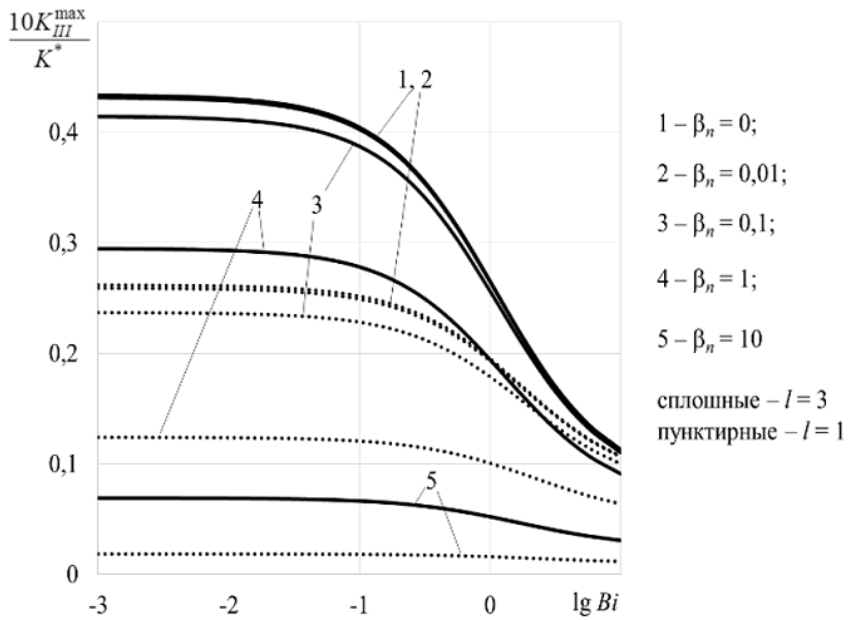


Рис. 2. КИН для продольного сдвига

сдвига уменьшаются. Такой характер зависимости этих КИН подобен их поведению в случае теплоизолированного разреза при комплексной нагрузке, т. е. при наличии градиента средней температуры и температурного момента на линии разреза [18].

Из графиков следует также, что с увеличением параметра теплопроницаемости разреза β_n происходит уменьшение максимальных относительных значений КИН. Такой характер зависимости вполне объясним и соответствует общим представлениям механики разрушения. Поскольку параметр теплопроницаемости разреза β_n обратно пропорционален раскрытию разреза δ , то увеличение β_n соответствует уменьшению раскрытия моделируемой трещины и в пределе приведёт к её отсутствию. Соответственно, температурные КИН при этом уменьшаются.

Необходимо также отметить, что температурные КИН продольного сдвига на порядок меньше температурных КИН поперечного сдвига. Поэтому основным параметром с позиции механики разрушения будет КИН поперечного сдвига K_{II}^{\max} .

Выводы. При обосновании надёжности работы тонкостенных элементов конструкций при температурных нагрузках, приводящих к изгибу, определяющим является КИН для поперечного сдвига. При этом достаточно использовать модель теплоизолированного разреза, поскольку учёт теплофизических свойств трещин не приводит к увеличению температурных КИН.

1. Саврук М.П. Концентрация напряжений вблизи криволинейных отверстий и вырезов с негладкими контурами / М.П. Саврук // *Материаловедение*. – 2021. – Т. 57, № 3. – С. 331–343.
2. Kuliyeв S.A. Solution for bending of a polygonal plate with cracks by then linear conjugate method / S.A. Kuliyeв, A.F. Gasimov // *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)*. – 2019. – Vol. 89, No. 10. – P. 2005–2018.
3. Васильев В.В. Новое решение задачи о трещине в растягиваемой ортотропной пластине / В.В. Васильев, С.А. Лурье, В. А. Салов // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. – 2021. – № 6. – С. 23–32.
4. Трещев А.А. Деформирование ортотропных пластин с учетом поперечных сдвигов и нелинейной зависимости механических свойств композитного материала от вида напряженного состояния / А.А. Трещев, Н.С. Ющенко, И.А. Захарова, И.А. Судакова // *Строительная механика и конструкции*. – 2022. – № 3 (34). – С. 49–70.
5. Мацевитый Ю.М. К решению обратных задач теплопроводности и термоупругости / Ю.М. Мацевитый, Е.А. Стрельникова, В.О. Повгородний, Н.А. Сафонов, В.В. Ганчин // *Инженерно-физический журнал*. – 2022. – Т. 95, № 2. – С. 381–386.
6. Matsevityi Y.M. Methodology of solving inverse heat conduction and thermoelectricity problems for identification of thermal processes / Y.M. Matsevityi, E.A. Strel'nikova, N.A. Safonov, V.V. Ganchin, V.O. Povgorodnii // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. – 2021. – Vol. 94, No. 5. – P. 1110–1116.
7. Matsevityi Y.M. Toward the solution of inverse thermal conductivity and thermal elasticity problems / Y.M. Matsevityi, E.A. Strel'nikova, N.A. Safonov, V.V. Ganchin, V.O. Povgorodnii // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. – 2022. – Vol. 95, No. 2. – P. 374–379.
8. Solyar T.Ya. Nonstationary temperature fields in piecewise homogeneous strips with regard for the frictional heat generation / T.Ya. Solyar, O.M. Vovk // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2022. – Vol. 265, No. 3. – P. 539–550.
9. Бондаренко Н.С. Коэффициенты интенсивности напряжений при термоупругом изгибе изотропных пластин с теплоизолированным разрезом в случае симметричного теплообмена / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // *Вестн. Донец. ун-та. Сер. А*. – 2013. – Вып. 2. – С. 20–26.
10. Пелех Б.Л. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек / Б.Л. Пелех,

- М.А. Сухорольский. – Киев: Наукова думка, 1980. – 216 с.
11. Пелех Б.Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б.Л. Пелех, В.А. Лазько. – Киев: Наукова думка, 1982. – 296 с.
 12. Кит Г.С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г.С. Кит, М.Г. Кривцун. – Киев: Наукова думка, 1984. – 280 с.
 13. Шевченко В.П. Задачи термоупругости тонких оболочек с разрезами: учебное пособие / В.П. Шевченко, А.С. Гольцев. – Киев: УМК ВО, 1988. – 84 с.
 14. Бондаренко Н.С. Исследование температурного поля в изотропной пластине с теплопроницаемым разрезом на базе обобщённой теории / Н.С. Бондаренко // Вестн. Донец. ун-та. Сер. А. – 2014. – № 2. – С. 41–48.
 15. Хижняк В.К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учебное пособие / В.К. Хижняк, В.П. Шевченко. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.
 16. Панасюк В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацьшин. – Киев: Наукова думка, 1976. – 444 с.
 17. Коваленко А.Д. Основы термоупругости / А.Д. Коваленко. – Киев: Наукова думка, 1970. – 308 с.
 18. Бондаренко Н.С. Анализ термоупругого состояния изотропных пластин с теплоизолированным разрезом на базе обобщённой теории / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2020. – № 2 (71). – С. 15–25.

N.S. Bondarenko, A.S. Goltsev

Stress intensity factors for thermoelastic bending of isotropic plates with a heat-permeable cut in the case of symmetric heat exchange.

In the framework of the generalized theory of $\{1,0\}$ -approximation analytical expressions for the maximum modulo values of stress intensity factors in an isotropic plate with a heat-permeable cut are constructed. Numerical studies have revealed the influence of the value of symmetrical heat exchange and the thermophysical properties of the cut on the intensity factors of thermal stresses for transverse and longitudinal shear under the action of a temperature moment gradient.

Keywords: *$\{1,0\}$ -approximation, Legendre polynomials, isotropic plate, heat-permeable cut, stress intensity factor.*

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”, Донецк

Получено 06.12.2022

Donetsk National University, Donetsk

n.bondarenko@donnu.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 51-74:510.22:519.6:539.3
doi:10.24412/0136-4545-2022-4-63-76
EDN:TOGBNE



©2022. С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хонг

АНАЛИЗ НЕКОНТРАСТНОЙ МОДЕЛИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Представлены разработка и отдельные результаты применения нечетко-множественного численно-аналитического алгоритма учета факторов параметрической неопределенности в задании значений исходных физико-механических и геометрических характеристик для модели двумерного осесимметричного напряженно-деформированного состояния протяженного полого толстостенного изотропного цилиндра при отсутствии силовых воздействий и поддержании разности температур на его внешней и внутренней граничных поверхностях. Излагаемый подход базируется на использовании аналитических соотношений, описывающих решение рассматриваемой задачи в детерминистической версии без учета параметрической неопределенности, и переходе в этих соотношениях к нечетко-множественным аргументам с применением модифицированного альфа-уровневого варианта эвристического принципа расширения. Рассматриваются и анализируются результаты отдельных вычислительных экспериментов по применению разработанного алгоритма.

Ключевые слова: *протяженный полый цилиндр, линейно-упругий изотропный материал, двумерное осесимметричное деформирование, термомеханическое напряженное состояние, теоретический численно-аналитический алгоритм, учет неконтрастности параметров, метод нечетких множеств, эвристический принцип обобщения.*

Введение и цель исследования. Разработка и апробация новых усовершенствованных алгоритмизированных методов численно-аналитического исследования моделей термоупругого деформирования материалов, конструкций и сооружений представляет собой одну из современных актуальных задач в области фундаментальных исследований по проблемам механико-математического моделирования с широким кругом важных приложений в современных высокотехнологичных научно-промышленных отраслях – высокопотенциальной энергетике, электронике, аэрокосмической индустрии [1–5]. Применительно ко многим сферам приложений важными для анализа являются модели термонапряженного состояния цилиндрических тел [1, 6–8]. При этом, степень эффективности практического применения создаваемых методов в проектных расчетах параметров конструкций, сооружений и технологических процессов, в самой вы-

сокой мере обусловлена возможностями учета этими методами факторов существенной параметрической неопределенности в рассматриваемых моделях термоупругости, в том числе данных о разбросах экспериментальных замеров и технологических допусках для значений неконтрастных исходных физико-механических и геометрических параметров моделирования. С учетом необходимости использования в соответствующих расчетных алгоритмах нечеткой информации, не имеющей во многих случаях строгой статистической природы, включая данные, получаемые на основе субъективных экспертных оценок, одним из возможных подходов к учету параметрической неопределенности в моделях термоупругого деформирования, наряду с методами вероятностно-стохастического анализа, является применение методов теории нечетких множеств [1, 9–14].

В этом контексте, целью представляемого в данной работе исследования является разработка и апробация специализированного численно-аналитического алгоритма нечетко-множественного расчетного анализа модели осесимметричного статического термонапряженного состояния протяженного полого цилиндра. Концептуальная схема реализуемого подхода включает фазсификацию неконтрастной информации об имеющих разбросы значений исходных параметрах [1, 9, 10] с введением их описаний в виде нормальных нечетких чисел треугольного или гауссова типа, либо в виде нормальных трапециевидальных нечетких интервалов [1, 9], а также последующий переход к нечетко-множественным аргументам в расчетных соотношениях детерминистического варианта соответствующей модели температурного деформирования [5]. Получение нечетко-множественных расчетных соотношений для анализируемых характеристик деформационных процессов осуществляется путем поэтапного фрагментированного использования аппарата арифметики нечетких чисел [1, 9, 10] и модифицированной альфа-уровневой версии эвристического принципа расширения [1, 9–14].

1. Соотношения детерминистической версии рассматриваемой модели. Вариант постановки и решения детерминистической версии рассматриваемой задачи представлен, в частности, в работе [5]. Рассматриваемым объектом является протяженный полый изотропный цилиндр, находящийся в состоянии осесимметричной плоской температурной деформации и занимающий в цилиндрической координатной системе $Or\theta z$ область

$$V = \{a \leq r \leq b, \theta \in [0, 2\pi], -\infty < z < \infty\}. \quad (1)$$

Внутренняя и внешняя поверхности цилиндра $r = a$ и $r = b$ свободны от внешних силовых воздействий

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(a, \theta, z) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(a, \theta, z) = 0, \quad \sigma_{rz}(a, \theta, z) = 0, \\ \sigma_{rr}(b, \theta, z) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(b, \theta, z) = 0, \quad \sigma_{rz}(b, \theta, z) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

и на них поддерживаются заданные постоянные значения температуры $\vartheta(r, \theta, z)$

$$\vartheta(a, \theta, z) = \vartheta_0, \quad \vartheta(b, \theta, z) = 0. \quad (3)$$

Решение задачи об осесимметричном температурном напряженном состоянии рассматриваемого цилиндра в детерминистической постановке описывается соотношениями [5]

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}(r, \theta, z) &= F_{rr}(r, a, b, \lambda, \mu, \vartheta_0, \alpha_\vartheta) = \\
 &= -m\mu\vartheta_0[\ln(b/r)/\ln(b/a) - (b^2/r^2 - 1)/(b^2/a^2 - 1)], \\
 \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, z) &= F_{\theta\theta}(r, a, b, \lambda, \mu, \vartheta_0, \alpha_\vartheta) = \\
 &= -m\mu\vartheta_0[\ln(b/r)/\ln(b/a) + (b^2/r^2 + 1)/(b^2/a^2 - 1)], \\
 \sigma_{zz}(r, \theta, z) &= F_{zz}(r, a, b, \lambda, \mu, \vartheta_0, \alpha_\vartheta) = \\
 &= -m\mu\vartheta_0[(2\ln(b/r) - \lambda/(2(\lambda + \mu)))/\ln(b/a) + (\lambda/(\lambda + \mu))/(b^2/a^2 - 1)], \\
 \vartheta(r, \theta, z) &= F_\vartheta(r, a, b, \vartheta_0) = \vartheta_0(\ln(b/r)/\ln(b/a)),
 \end{aligned} \tag{4}$$

в которых

$$m = \gamma/(\lambda + 2\mu), \quad \gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_\vartheta, \tag{5}$$

λ и μ – параметры Ламе материала цилиндра, α_ϑ – коэффициент его линейного температурного расширения.

2. Получение расчетных соотношений нечетко-множественного алгоритма учета неконтрастности параметров. В рамках реализации процедуры перехода к нечетко-множественным аргументам в функциональных расчетных соотношениях (3)–(5), для неконтрастных исходных физико-механических и геометрических параметров цилиндра \tilde{a} , \tilde{b} , $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\vartheta}_0$, $\tilde{\alpha}_\vartheta$, а также для описываемых нормальными нечеткими множествами эндогенных параметров исследуемой модели $\tilde{\sigma}_{rr}$, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$, $\tilde{\sigma}_{zz}$, $\tilde{\vartheta}$, вводятся представления в виде разложений по множествам α -уровней

$$\begin{aligned}
 \tilde{a} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha], & \tilde{b} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha], \\
 \tilde{\lambda} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha], & \tilde{\mu} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha], \\
 \tilde{\vartheta}_0 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\vartheta}_{0\alpha}, \bar{\vartheta}_{0\alpha}], & \tilde{\alpha}_\vartheta &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\alpha}_{\vartheta\alpha}, \bar{\alpha}_{\vartheta\alpha}];
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}_{rr} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{rr\alpha}, \bar{\sigma}_{rr\alpha}], & \tilde{\sigma}_{\theta\theta} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{\theta\theta\alpha}, \bar{\sigma}_{\theta\theta\alpha}], \\
 \tilde{\sigma}_{zz} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{zz\alpha}, \bar{\sigma}_{zz\alpha}], & \tilde{\vartheta} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\vartheta}_\alpha, \bar{\vartheta}_\alpha].
 \end{aligned} \tag{7}$$

В представлениях (6) в случае описания исходных параметров \tilde{a} , \tilde{b} , $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\vartheta}_0$, $\tilde{\alpha}_\vartheta$ нормальными треугольными нечеткими числами с кортежами реперных значений (a_1, a_2, a_3) , (b_1, b_2, b_3) , \dots , $(\alpha_{\vartheta 1}, \alpha_{\vartheta 2}, \alpha_{\vartheta 3})$ границы интервалов α -уровней

имеют выражения

$$\begin{aligned}\underline{a}_\alpha &= (1 - \alpha)a_1 + \alpha a_2, & \bar{a}_\alpha &= (1 - \alpha)a_3 + \alpha a_2; \\ \underline{b}_\alpha &= (1 - \alpha)b_1 + \alpha b_2, & \bar{b}_\alpha &= (1 - \alpha)b_3 + \alpha b_2; \dots; \\ \underline{\alpha}_{\vartheta\alpha} &= (1 - \alpha)\alpha_{\vartheta 1} + \alpha\alpha_{\vartheta 2}, & \bar{\alpha}_{\vartheta\alpha} &= (1 - \alpha)\alpha_{\vartheta 3} + \alpha\alpha_{\vartheta 2};\end{aligned}\tag{8}$$

в случае описания \tilde{a} , \tilde{b} , $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\vartheta}_0$, $\tilde{\alpha}_\vartheta$ нормальными трапецеидальными нечеткими интервалами с кортежами (a_1, a_2, a_3, a_4) , (b_1, b_2, b_3, b_4) , \dots , $(\alpha_{\vartheta 1}, \alpha_{\vartheta 2}, \alpha_{\vartheta 3}, \alpha_{\vartheta 4})$ реперных значений

$$\begin{aligned}\underline{a}_\alpha &= (1 - \alpha)a_1 + \alpha a_2, & \bar{a}_\alpha &= (1 - \alpha)a_4 + \alpha a_3; \\ \underline{b}_\alpha &= (1 - \alpha)b_1 + \alpha b_2, & \bar{b}_\alpha &= (1 - \alpha)b_4 + \alpha b_3; \dots; \\ \underline{\alpha}_{\vartheta\alpha} &= (1 - \alpha)\alpha_{\vartheta 1} + \alpha\alpha_{\vartheta 2}, & \bar{\alpha}_{\vartheta\alpha} &= (1 - \alpha)\alpha_{\vartheta 4} + \alpha\alpha_{\vartheta 3};\end{aligned}\tag{9}$$

а в случае описания \tilde{a} , \tilde{b} , $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\vartheta}_0$, $\tilde{\alpha}_\vartheta$ несимметричными нормальными нечеткими гауссовыми числами с параметрами $(m_{*a}, \sigma_{*la}, \sigma_{*ra})$, $(m_{*b}, \sigma_{*lb}, \sigma_{*rb})$, \dots , $(m_{*\vartheta}, \sigma_{*l\vartheta}, \sigma_{*r\vartheta})$

$$\begin{aligned}\underline{a}_\alpha &= m_{*a} - \sigma_{*la}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \bar{a}_\alpha &= m_{*a} + \sigma_{*ra}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\ \underline{b}_\alpha &= m_{*b} - \sigma_{*lb}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \bar{b}_\alpha &= m_{*b} + \sigma_{*rb}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \dots; \\ \underline{\alpha}_{\vartheta\alpha} &= m_{*\alpha\vartheta} - \sigma_{*l\alpha\vartheta}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, & \bar{\alpha}_{\vartheta\alpha} &= m_{*\alpha\vartheta} + \sigma_{*r\alpha\vartheta}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}.\end{aligned}\tag{10}$$

В процессе применения модифицированного принципа обобщения для получения компонентов представлений (7) реализуется исследование свойств знакоопределенности частных производных от функций $F_{rr}(r, a, b, \lambda, \mu, \alpha_\vartheta, \vartheta_0)$, $F_{\theta\theta}(r, a, b, \lambda, \mu, \alpha_\vartheta, \vartheta_0)$, $F_{zz}(r, a, b, \lambda, \mu, \alpha_\vartheta, \vartheta_0)$, $F_\vartheta(r, a, b, \vartheta_0)$ по переменным, отвечающим исходным параметрам модели в их областях определения, в результате которого получены оценки

$$\begin{aligned}\partial F_{rr}/\partial \lambda &< 0, & \partial F_{rr}/\partial \mu &< 0, & \partial F_{rr}/\partial \alpha_\vartheta &< 0, & \partial F_{rr}/\partial \vartheta_0 &< 0; \\ \partial F_{\theta\theta r}/\partial \lambda &< 0, & \partial F_{\theta\theta}/\partial \mu &< 0, & \partial F_{\theta\theta}/\partial \alpha_\vartheta &< 0, & \partial F_{\theta\theta}/\partial \vartheta_0 &< 0; \\ \partial F_{zz}/\partial \alpha_\vartheta &< 0, & \partial F_{zz}/\partial \vartheta_0 &< 0; \\ \partial F_\vartheta/\partial a &> 0, & \partial F_\vartheta/\partial b &> 0, & \partial F_\vartheta/\partial \vartheta_0 &> 0.\end{aligned}\tag{11}$$

В результате параметрические расчетные соотношения для результирующих нечетко-множественных характеристик $\tilde{\sigma}_{rr}$, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$, $\tilde{\sigma}_{zz}$, $\tilde{\vartheta}$ рассматриваемой модели имеют вид (7), где

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}_{rr\alpha}(r) &= \inf_{\substack{a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha]}} F_{rr}(r, a, b, \bar{\lambda}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha, \bar{\vartheta}_{0\alpha}, \bar{\alpha}_{\vartheta\alpha}), \\ \bar{\sigma}_{rr\alpha}(r) &= \sup_{\substack{a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha]}} F_{rr}(r, a, b, \underline{\lambda}_\alpha, \underline{\mu}_\alpha, \underline{\vartheta}_{0\alpha}, \underline{\alpha}_{\vartheta\alpha});\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}_{\theta\theta\alpha}(r) &= \inf_{\substack{a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha]}} F_{\theta\theta}(r, a, b, \bar{\lambda}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha, \bar{\vartheta}_{0\alpha}, \bar{\alpha}_{\vartheta\alpha}), \\ \bar{\sigma}_{\theta\theta\alpha}(r) &= \sup_{\substack{a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha]}} F_{\theta\theta}(r, a, b, \underline{\lambda}_\alpha, \underline{\mu}_\alpha, \underline{\vartheta}_{0\alpha}, \underline{\alpha}_{\vartheta\alpha});\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}_{zz\alpha}(r) &= \inf_{\substack{a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha] \\ \lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha] \\ \mu \in [\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha]}} F_{zz}(r, a, b, \lambda, \mu, \bar{\vartheta}_{0\alpha}, \bar{\alpha}_{\vartheta\alpha}), \\ \bar{\sigma}_{zz\alpha}(r) &= \sup_{\substack{a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha] \\ \lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha] \\ \mu \in [\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha]}} F_{zz}(r, a, b, \lambda, \mu, \underline{\vartheta}_{0\alpha}, \underline{\alpha}_{\vartheta\alpha});\end{aligned}\tag{14}$$

$$\underline{\vartheta}_\alpha(r) = F_\vartheta(r, \underline{a}_\alpha, \underline{b}_\alpha, \underline{\vartheta}_{0\alpha}), \quad \bar{\vartheta}_\alpha(r) = F_\vartheta(r, \bar{a}_\alpha, \bar{b}_\alpha, \bar{\vartheta}_{0\alpha}).\tag{15}$$

Соотношения (7), (12)–(15) и определяют расчетный алгоритм описания разбросов оценок для характеристик термоупругого деформирования полого цилиндра с заданными температурами на граничных поверхностях при учете неконтрастности в задании исходных параметров.

3. Результаты вычислительных экспериментов. В рамках вычислительных экспериментов по применению представленной методики рассматривался вариант задачи о термонапряженном состоянии трубки из алюминия при следующем варианте задания неконтрастных нечетко-интервальных значений

исходных параметров термомеханических и геометрических свойств:

$$\begin{aligned}
 \tilde{a} &= (0.97s_*, 0.99s_*, 1.01s_*, 1.02s_*), \\
 \tilde{b} &= (1.48s_*, 1.49s_*, 1.51s_*, 1.53s_*), \\
 \tilde{\lambda} &= (5.110e_*, 5.385e_*, 5.662e_*, 5.825e_*), \\
 \tilde{\mu} &= (2.444e_*, 2.548e_*, 2.678e_*, 2.704e_*), \\
 \tilde{\vartheta}_0 &= (290\vartheta_*, 297\vartheta_*, 304\vartheta_*, 314\vartheta_*), \\
 \tilde{\alpha}_{\vartheta} &= (1.512\tau_*, 1.584\tau_*, 1.722\tau_*, 1.763\tau_*), \\
 s_* &= 10^{-2} \text{ м}, \quad e_* = 10^{10} \text{ Па}, \quad \vartheta_* = 1 \text{ C}^\circ, \quad \tau_* = 10^{-5} \text{ K}^\circ.
 \end{aligned} \tag{16}$$

При этом максимальные отклонения неопределенных величин от их значений

$$\begin{aligned}
 a &= 1.0s_*, \quad b = 1.5s_*, \quad \lambda = 5.55e_*, \quad \mu = 2.6e_*, \\
 \vartheta_0 &= 300\vartheta_*, \quad \alpha_{\vartheta} = 1.66\tau_*,
 \end{aligned} \tag{17}$$

рассматриваемых как в наибольшей степени возможные, составляют для a – 3%, для b – 3%, для λ – 8% для μ – 6%, для α_{ϑ} – 8%, для ϑ_0 – 6%.

Рассчитанные на основе описанного алгоритма функции принадлежности для нечетко-множественных характеристик $\tilde{\sigma}_{rr}((a+b)/2)$, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}((a+b)/2)$, $\tilde{\sigma}_{zz}((a+b)/2)$, $\tilde{\vartheta}((a+b)/2)$ представлены на рисунках 1–4.

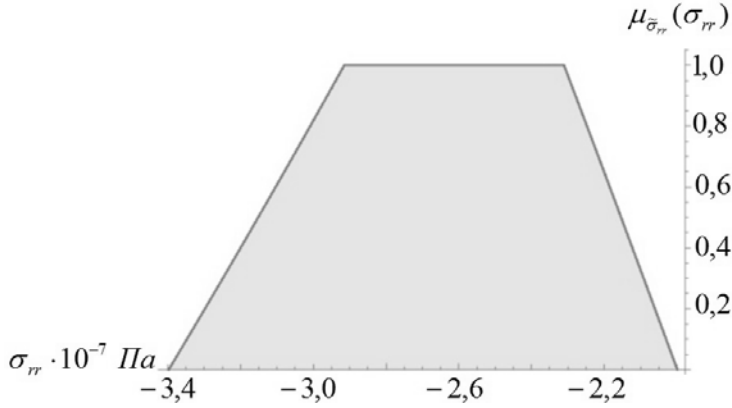


Рис. 1. Вид функции принадлежности для $\tilde{\sigma}_{rr}((a+b)/2)$

При задании неконтрастных значений исходных параметров нормальными треугольными нечеткими числами

$$\begin{aligned}
 \tilde{a} &= (0.97s_*, 1.00s_*, 1.02s_*), \quad \tilde{b} = (1.48s_*, 1.50s_*, 1.53s_*), \\
 \tilde{\lambda} &= (5.110e_*, 5.550e_*, 5.825e_*), \quad \tilde{\mu} = (2.444e_*, 2.6e_*, 2.704e_*), \\
 \tilde{\vartheta}_0 &= (290\vartheta_*, 300\vartheta_*, 314\vartheta_*), \quad \tilde{\alpha}_{\vartheta} = (1.512\tau_*, 1.66\tau_*, 1.763\tau_*),
 \end{aligned} \tag{18}$$

функции принадлежности для $\tilde{\sigma}_{rr}((a+b)/2)$, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}((a+b)/2)$, $\tilde{\sigma}_{zz}((a+b)/2)$, $\tilde{\vartheta}((a+b)/2)$ представлены на рисунках 5–8.

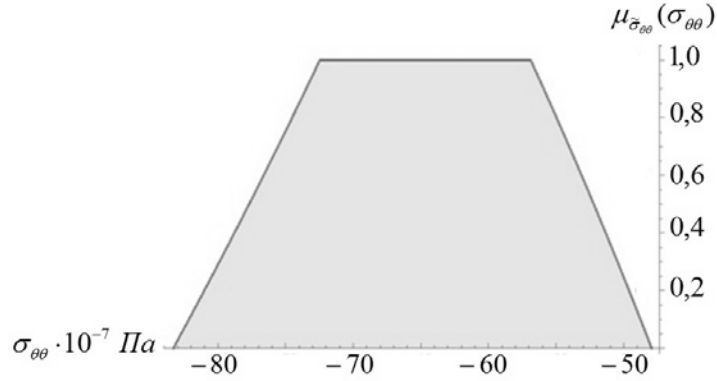


Рис. 2. Вид функции принадлежности для $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}((a+b)/2)$

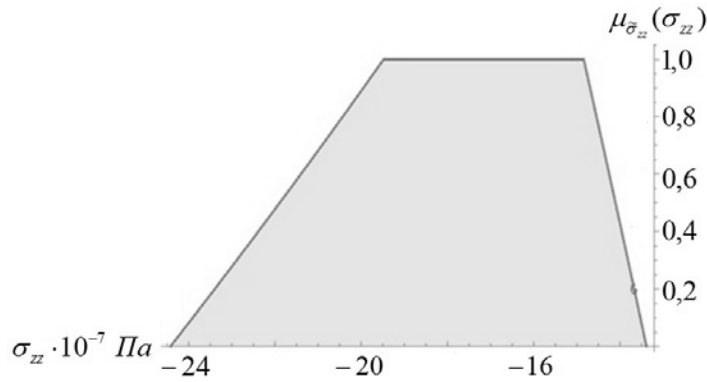


Рис. 3. Вид функции принадлежности для $\tilde{\sigma}_{zz}((a+b)/2)$

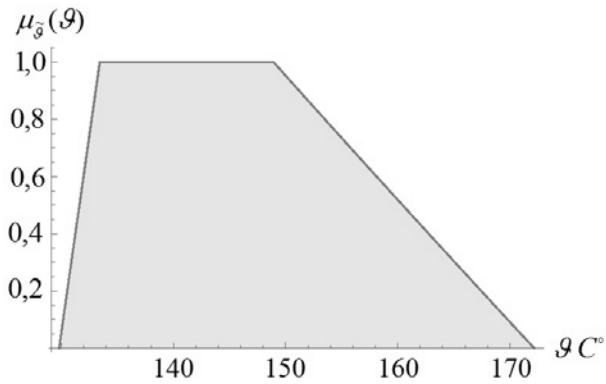


Рис. 4. Вид функции принадлежности для $\tilde{\vartheta}((a+b)/2)$

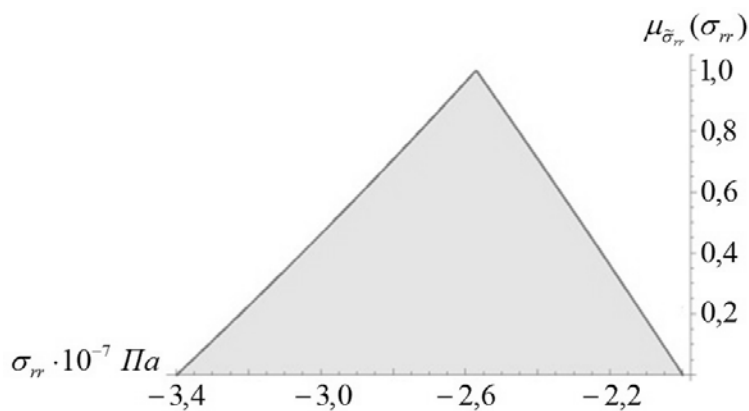


Рис. 5. Вид функции принадлежности для $\tilde{\sigma}_{rr}((a + b)/2)$

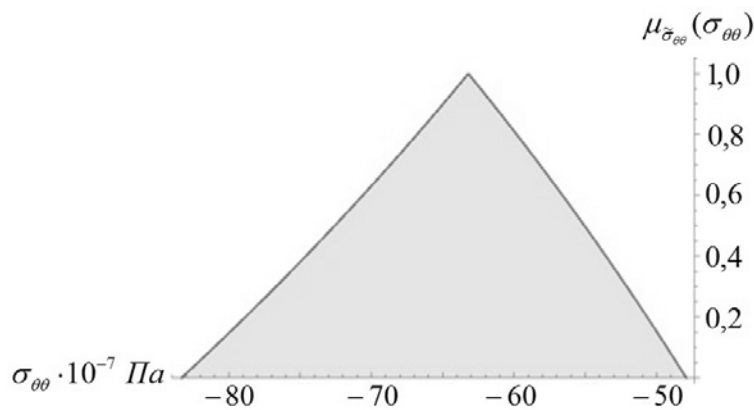


Рис. 6. Вид функции принадлежности для $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}((a + b)/2)$

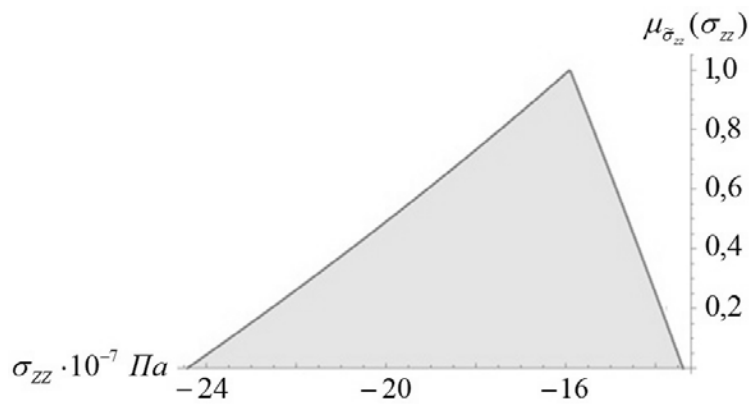


Рис. 7. Вид функции принадлежности для $\tilde{\sigma}_{zz}((a + b)/2)$

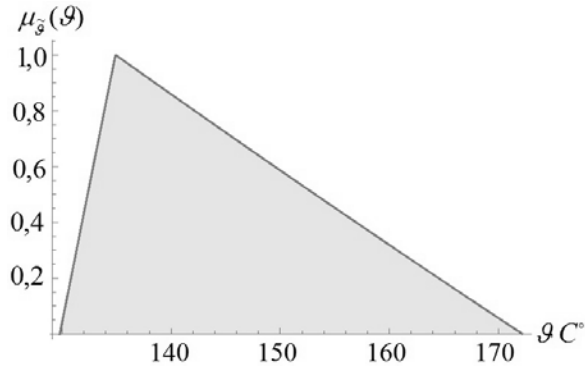


Рис. 8. Вид функции принадлежности для $\tilde{\delta}((a+b)/2)$

Распределения по радиальной координате на интервале $r \in [a, b]$ для исследуемых характеристик термонапряженного состояния цилиндра даны на рисунках 9–16.

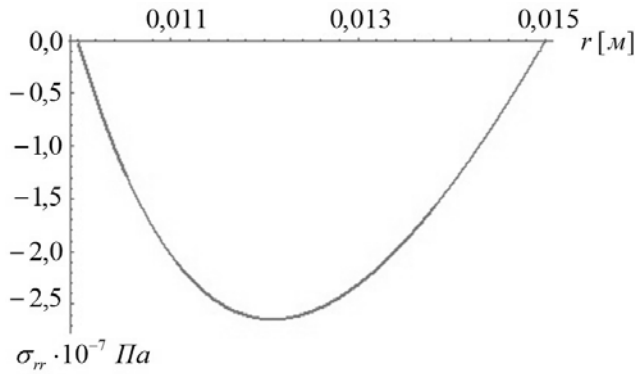


Рис. 9. Распределение $\sigma_{rr}(r)$ для детерминистического варианта модели

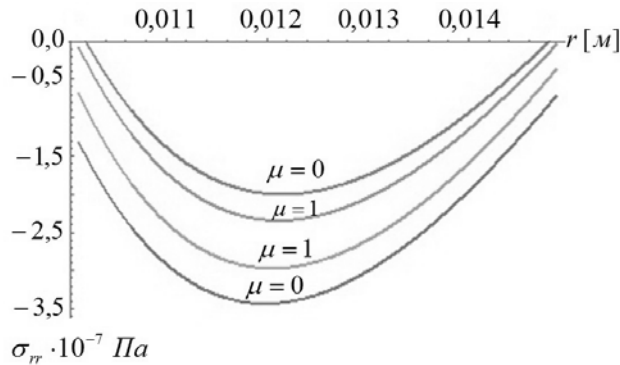


Рис. 10. Радиальные зависимости для границ интервалов носителей и модальных интервалов нечетко-множественного описания $\tilde{\sigma}_{rr}(r)$

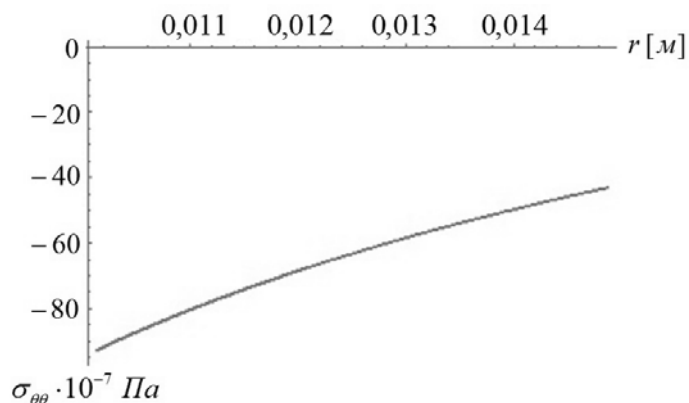


Рис. 11. Распределение $\sigma_{\theta\theta}(r)$ для детерминистического варианта модели

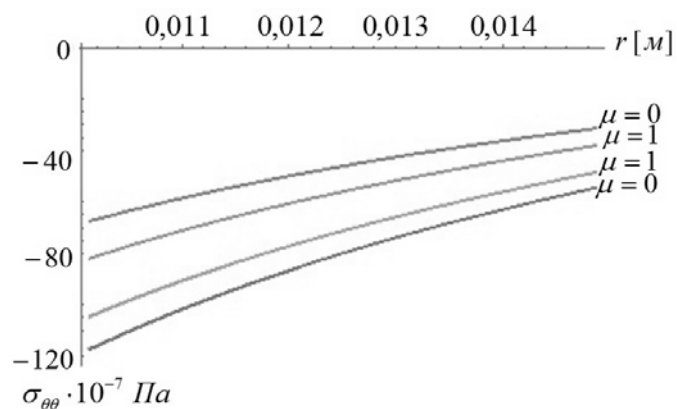


Рис. 12. Радиальные зависимости для границ интервалов носителей и модальных интервалов нечетко-множественного описания $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(r)$

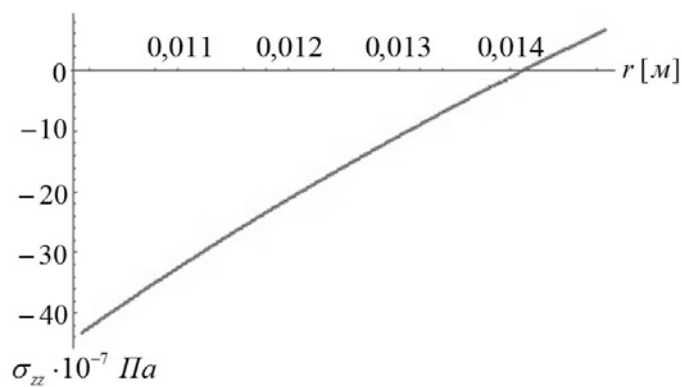


Рис. 13. Распределение $\sigma_{zz}(r)$ для детерминистического варианта модели

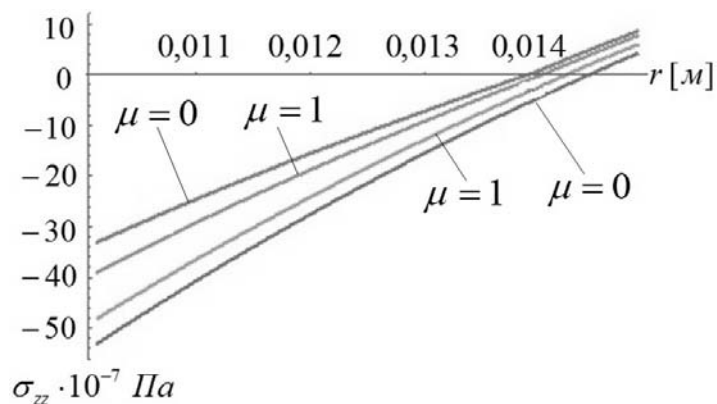


Рис. 14. Радиальные зависимости для границ интервалов носителей и модальных интервалов нечетко-множественного описания $\tilde{\sigma}_{zz}(r)$

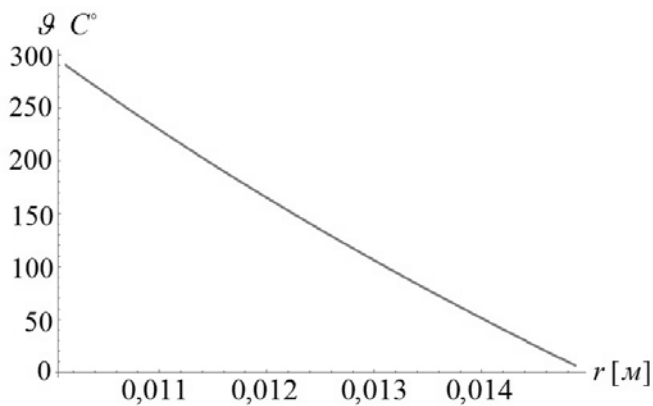


Рис. 15. Распределение $\vartheta(r)$ для детерминистического варианта модели

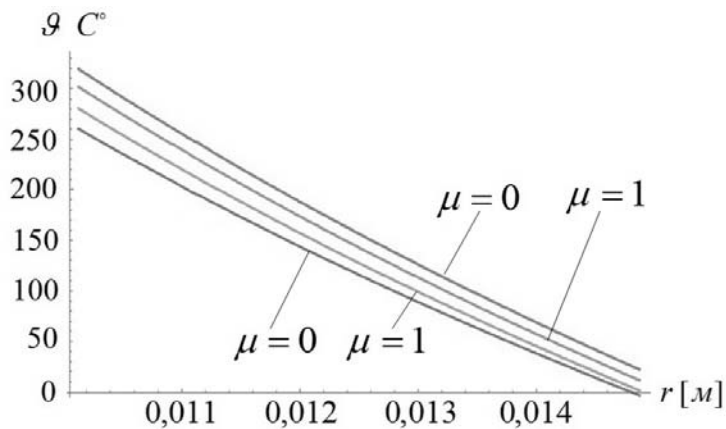


Рис. 16. Радиальные зависимости для границ интервалов носителей и модальных интервалов нечетко-множественного описания $\tilde{\vartheta}(r)$

При этом рисунки 9, 11, 13 и 15 описывают формы соответствующих распределений для детерминистического варианта модели с параметрами (17), а на рисунках 10, 12, 14 и 16 представлены зависимости от радиальной координаты для границ интервалов носителей $\mu = 0$ и модальных интервалов $\mu = 1$ в случае нечетко-множественных описания характеристик термонапряженного состояния при задании исходных неконтрастных параметров с разбросами в нечетко-интервальной форме (16).

Анализ полученных нечетко-множественных представлений для параметров механических напряжений и температуры в равноудаленных от внутреннего и внешнего контуров сечения цилиндра точках $r_* = (a + b)/2$ при нечетко-интервальных описаниях неконтрастных параметров (16) иллюстрирует таблица 1. Нормировки для значений представляемых в этой таблице характеристик термонапряженного состояния отвечают принятым на рисунках 1–16.

Таблица 1. Характеристики разбросов нормированных значений неконтрастных результирующих параметров в их нечетко-множественных описаниях

Характеристика	Среднее значение σ_m, ϑ_m на модальном интервале	Результаты дефазсификации σ_D, ϑ_D по методу медиан	Величина отклонения σ_m и σ_D ϑ_m и ϑ_D (%)	Предельное отклонение от σ_m, ϑ_m на модальном интервале (%)	Предельное отклонение левой границы интервала носителя от σ_m, ϑ_m (%)	Предельное отклонение правой границы интервала носителя от σ_m, ϑ_m (%)
$\sigma_{rr}(r_*)$	-2.604	-2.651	1.77	11.94	30.45	23.23
$\sigma_{\theta\theta}(r_*)$	-6.467	-6.514	0.72	12.06	28.79	25.88
$\sigma_{zz}(r_*)$	-1.716	-1.804	5.15	13.52	42.24	21.62
$\vartheta(r_*)$	141.742	146.364	3.45	5.68	8.25	21.46

Таким образом, расчеты в представленном численном эксперименте указывают, что разбросы значений неконтрастных результирующих характеристик $\sigma_{rr}(r_*)$, $\sigma_{\theta\theta}(r_*)$, $\sigma_{zz}(r_*)$, $\vartheta(r_*)$ на модальных интервалах нечетких множеств $\tilde{\sigma}_{rr}(r_*)$, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(r_*)$, $\tilde{\sigma}_{zz}(r_*)$, $\tilde{\vartheta}(r_*)$ имеют процентные уровни, сопоставимые с максимальными показателями разбросов значений исходных параметров в их нечетко-интервальных описаниях (16). На интервалах носителей нечетко-множественных величин $\tilde{\sigma}_{rr}(r_*)$, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(r_*)$, $\tilde{\sigma}_{zz}(r_*)$, $\tilde{\vartheta}(r_*)$, граничные значения которых отвечают предельно малым ненулевым показателям возможности того, что соответствующие характеристики термонапряженного состояния будут иметь данную величину, максимальные предельные разбросы для рассматриваемой модели от 2.3 до 3.7 раз превышают уровни разбросов на модальных интервалах.

Распределения на рисунках 10, 12, 14, 16 позволяют также заключить, что величины прогнозируемых разбросов для результирующих параметров уменьшаются с ростом значения радиальной координаты от внутреннего к внешнему контуру.

Выводы. Результатом изложенных в статье исследований является получение и применение в численных экспериментах нечетко-множественных аналити-

ческих расчетных соотношений для анализа модели двумерного осесимметричного напряженно-деформированного состояния протяженного полого толсто-стенного изотропного цилиндра с имеющими разбросы значений неконтрастными исходными физико-механическим и геометрическими параметрами при отсутствии силовых воздействий и поддержании разности температур на его внешней и внутренней граничных поверхностях. Представляемый подход базируется на использовании аналитических соотношений, описывающих решение рассматриваемой задачи в детерминистической версии без учета параметрической неопределенности, и переходе в этих соотношениях к нечетко-множественным аргументам с применением модифицированного альфа-уровневого варианта эвристического принципа расширения, а также на описании фазсифицируемых неконтрастных исходных параметров в виде нормальных нечетких чисел треугольного или гауссова типа, либо в виде нормальных трапецеидальных нечетких интервалов. Рассмотрены и проанализированы отдельные результаты вычислительных экспериментов по применению разработанного алгоритма и даны оценки уровней нечеткости результирующих параметров по отношению к величинам разбросов для исходных характеристик исследуемой модели.

1. *Jabbari M.* An exact solution for classic coupled thermoelasticity in cylindrical coordinates / M. Jabbari, H. Dehbani, M. Eslami // Journal of Pressure Vessel Technology. – 2011. – V. 133(5):051204.
2. *Ieean D.* Thermoelastic Models of Continua / D. Ieean. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004. – 304 p.
3. *Нгуен Куок Ши* Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.
4. *Коваленко А.Д.* Введение в термоупругость / А.Д. Коваленко. – К.: Наукова думка, 1965. – 204 с.
5. *Новацкий В.* Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
6. *Vedeld K.* Stresses in heated pressurized multi-layer cylinders in generalized plane strain conditions / K. Vedeld, H.A. Sollund // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2014. – V. 120. – P. 27–35.
7. *Каур И.* Двухтемпературный подход к анализу свойств полупроводящего термоупругого сплошного цилиндра, основанный на модифицированной теории теплопередачи Мура-Гибсона-Томпсона / И. Каур, К. Сингх // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2022. – Т. 16, № 1. – С. 65–81. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16106>
8. *Shanghvi J.Y.* Thermo-elasto-plastic finite element analysis of quasi-state processes in Eulerian reference frames / J.Y. Shanghvi, P. Michaleris // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 2002. – V. 53. – P. 1533–1556. DOI: 10.1002/nme.345
9. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
10. *Bede B.* Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic / B. Bede. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. – 276 p.
11. *Дремов В.В.* Нечетко-множественные модификации расчетных соотношений для усредненных термомеханических характеристик пакета слоистого углепластика: теоретический алгоритм / В.В. Дремов, Н.И. Захаров, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 3(80). – С. 77–88.
12. *Павлыш В.Н.* Учет неконтрастности параметров в модели неразрушающих режимов ла-

зерного отжига диэлектрических и полупроводниковых пластин / В.Н. Павлыш, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев // Донецкие чтения 2022: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы VII Международной научной конференции, посвящённой 85-летию Донецкого национального университета (Донецк, 27–28 октября 2022 г.). – Том 1: Механико-математические, компьютерные науки, управление. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2022. – С. 68–70.

13. *Storozhev S. V.* Fuzzy-set analysis of models of temperature deformation of thin-walled elements with elliptic boundaries in industrial and aerospace structures / S.V. Storozhev, V.I. Storozhev, V.E. Bolnokin, Duong Minh Hai, D.I. Mutin // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering . – 2020, V. 862, 022005. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/862/2/022005>
14. *Сторожев С.В.* Методика учета факторов неопределенности в моделях термоупругого деформирования тонких пластин с эллиптическими граничными контурами / С.В. Сторожев, В.Е. Болнокин, В.Г. Выскуб, Д.И. Мутин, Е.И. Мутина, С.Б. Номбре // Системы управления и информационные технологии. – 2020. – № 2(80). – С. 4–8.

S.B. Nombre, D.D. Polyansky, S.V. Storozhev, Tran Ba Le Hoang

Analysis of a non-contrast model of axisymmetric thermal stressed state for hollow cylinder.

The development and results of applying a fuzzy-set numerical-analytical algorithm for taking into account parametric uncertainty factors in setting the values of the initial physical, mechanical and geometric characteristics for a model of a two-dimensional axisymmetric stress-strain state of an extended hollow thick-walled isotropic cylinder in the absence of force effects and maintaining the temperature difference on its outer and inner boundary surfaces are given. The presented approach is based on the use of analytical relations that describe the solution of the problem under consideration in a deterministic version without taking into account parametric uncertainty, and the transition in these relations to fuzzy set arguments using a heuristic extension principle in modified alpha-level form. The results of individual computational experiments on the application of the developed algorithm are considered and analyzed.

Keywords: *extended hollow cylinder, linearly elastic isotropic material, two-dimensional axisymmetric deformation, thermomechanical stress state, theoretical numerical-analytical algorithm, non-contrast parameters, fuzzy set method, heuristical generalization principle.*

ГОУ ВПО “Донбасская национальная академия строительства
и архитектуры”, Макеевка
Университет природных ресурсов и окружающей среды, Хоши-
мин, Вьетнам

Получено 05.12.2022

Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture,
Makeevka
University of Natural Resources and Environment, Ho Chi Minh
City, Vietnam

s.v.storozhev@donnasa.ru

ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА

УДК 622.831, 622.23.02
doi:10.24412/0136-4545-2022-4-77-85
EDN:UUHVU



©2022. Ф.М. Голубев, Е.А. Бардакова

ГЕОМЕХАНИЧЕСКИЕ ПОСЛЕДСТВИЯ ЗАТОПЛЕНИЯ ВЕРХНИХ ГОРИЗОНТОВ ЛИКВИДИРУЕМЫХ ШАХТ

В настоящей статье описан механизм деформационных процессов, происходящих в горном массиве при его намокании с применением экспериментальных и лабораторных исследований. Установлена возможность активизации процесса сдвижения от верхних горных выработок, обрабатываемых камерным способом и не учитываемых при расчете по классическим методикам. Описан принципиальный подход к моделированию геомеханических процессов, связанных с многократной подработкой целиков и ликвидацией угледобывающих предприятий.

Ключевые слова: сдвижения земной поверхности, затопление горных выработок, камерная система обработки, целики, ликвидация шахт, МКЭ модели.

Введение. Масштаб геомеханических, и как следствие, экологических последствий ликвидации угольных шахт сложно прогнозировать. Помимо загрязнения подземных вод и сокращения количества пригодных для земледелия земель, вред наносится в результате активизации геомеханических процессов, и как следствие, длительного процесса сдвижения, несущего опасность для зданий, сооружений и коммуникаций. Характер деформаций горного массива при активизации геомеханических процессов в результате затопления напрямую связан с особенностями разрушения горного массива при подработке.

Процесс сдвижения горных пород при подработке изучается уже долгие годы. Существующие исследования детально описывают основные процессы, происходящие в массиве горных пород в процессе добычи угля лавами, при этом абсолютно не учитывая их влияние на устойчивость выработок (камер) в приповерхностной зоне. При затоплении же горных выработок анализ базовых зависимостей сдвижения, даже от лав, проводился существенно меньшим количеством ученых, а полученные по существующим методикам расчета результаты могут отличаться в несколько раз.

Стоит отметить, что большинство существующих исследований влияния затопления горных выработок на характер сдвижения проводилось для средних глубин 300-500 метров, где расположен основной объем горных работ. Между

тем, снижение количества рабочих водоотливов и переход на мощные водоотливы для ряда гидравлически связанных шахт сделал актуальным вопрос уточнения прогноза затопления очистных выработок верхних горизонтов шахт, а также определения особенностей процесса сдвижения земной поверхности при затоплении очистных горных выработок с глубинами менее 100 метров и влияния этих выработок на объекты поверхности.

Высокая плотность застройки в сложных горно-геологических условиях Донбасса приводит к повсеместному разрушительному влиянию на здания и сооружения различных факторов, таких как мезорельеф, просадочные грунты и др. В таких условиях существенное влияние на устойчивость объектов поверхности оказывает насыщение горных пород под ними водой в результате затопления угледобывающих предприятий. По данным исследований [1], насыщение аргиллитов и алевролитов водой приводит к резкой потере их прочности на одноосное сжатие. Для сланцев этот показатель может снижаться в 2-2,5 раза, для углей – до 3-х раз. При этом, с ростом степени метаморфизма снижение прочностных свойств углей при затоплении происходит менее интенсивно. Стоит отметить, что песчаники, глинистые и песчаные сланцы составляют от 90 до 96 % горного массива в условиях Донбасса. Характер распределения горных пород в различных районах Донбасса представлен на рисунке 1. Данные по маркам углей, содержащимся в различных районах Донбасса, приведены на рисунке 2.



Рис. 1. Процентный состав основных типов горных пород в различных районах Донбасса

Стоит отметить, что существующие методики прогноза деформаций земной поверхности при затоплении горных выработок, приведенные в [1–2], обладают рядом существенных ограничений и практически не связаны с гидрогеологическими параметрами процесса затопления.

Более того, существующие подходы полностью или частично игнорируют влияние на сдвижение таких факторов, как многократная подработка и воз-

действие на поверхность старых очистных горных выработок, обрабатываемых камерным способом (рис. 3).



Рис. 2. Распределение марок угля в различных районах Донбасса

Между тем, в процессе добычи угля некоторые шахты Донбасса отрабатывали более 25 пластов (например, шахта им. Ю.А. Гагарина, «Кочегарка», ряд других угледобывающих предприятий Центрального района Донбасса). У целого ряда шахт Донбасса на малых глубинах присутствуют выработки отработанные в начале и середине XX века камерным способом.

Многokратная подработка сопровождается постоянными воздействиями на массив деформаций сжатия и растяжения, что ведет к разрушению горных пород, в том числе и целиков. Для определения степени воздействия деформаций горного массива на разрушения межкамерных целиков была разработана конечно-элементная модель.

Создание конечно-элементной модели производилось в программном комплексе ANSYS.

Рассматриваемая модель имеет плоскости симметрии – вдоль лавы (учитывая, что длина столба превышает глубину работ), и по средней оси лавы (допуская, что лава одиночная в пределах каждого пласта, следовательно, жесткость заделки одинакова и нагрузки симметричны).

Стоит отметить, что горный массив является анизотропной средой и применение для его описания моделей изотропных геоматериалов не позволяет объективно оценивать характер протекания процессов в нем, так как физико-механические свойства горного массива в различных направлениях могут отличаться в несколько раз. Поэтому при описании горных пород предпочтительней использовать модели ортотропных геоматериалов. У материалов этого класса анизотропии через каждую точку проходит три взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии. Согласно исследованиям [3], уравнение обобщенного закона Гука для ортотропной среды можно представить в следующем виде:

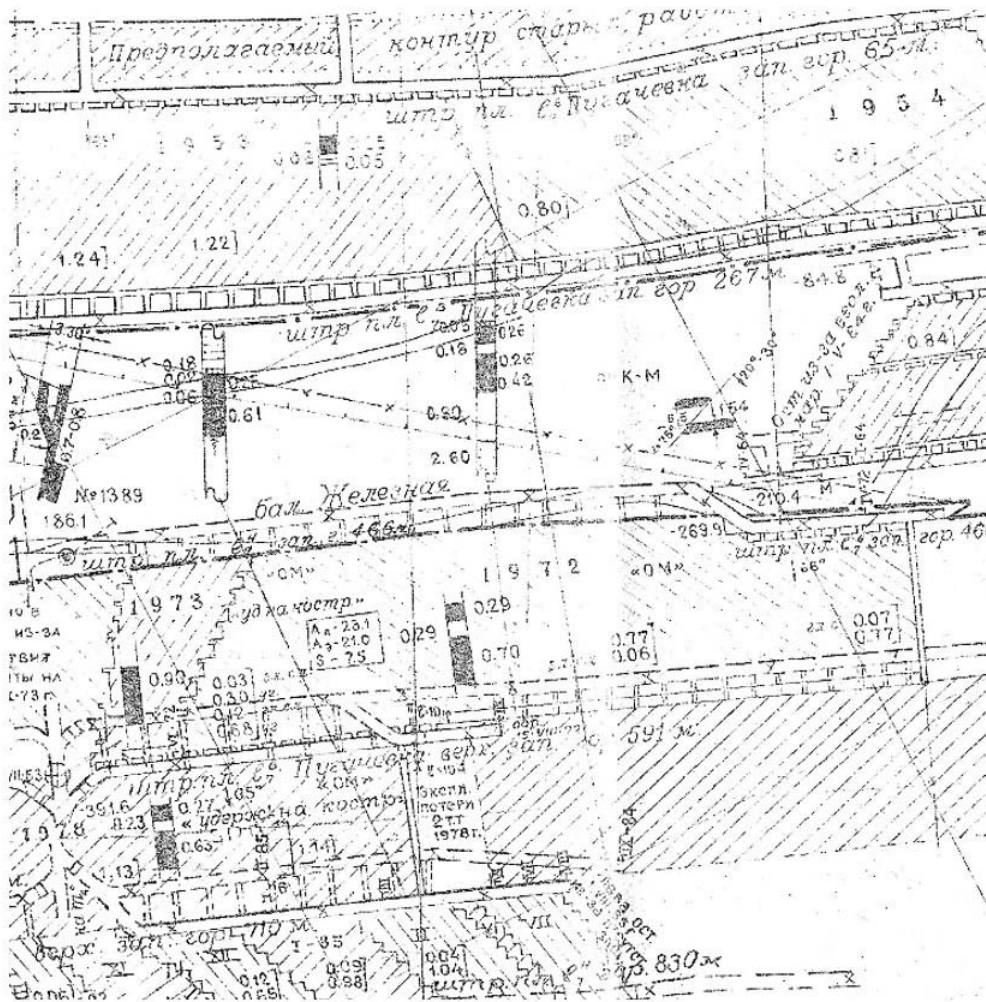


Рис. 3. Расположение старых горных выработок верхних горизонтов шахты им. Ю.А. Гагарина

$$\begin{cases} \sigma_x = E_1 \cdot \frac{R_{x4}}{R_{x5}} \cdot \varepsilon_x + E_1 \cdot \frac{R_{x2}}{R_{x5}} \cdot \varepsilon_y + E_1 \cdot \frac{R_{x6}}{R_{x5}} \cdot \varepsilon_z; \tau_{yz} = G_{23} \cdot \gamma_{yz}; \\ \sigma_y = E_2 \cdot \frac{R_{y1}}{R_{y2}} \cdot \varepsilon_x + E_2 \cdot \frac{R_{y3}}{R_{y2}} \cdot \varepsilon_y + E_2 \cdot \frac{R_{y4}}{R_{y2}} \cdot \varepsilon_z; \tau_{xz} = G_{13} \cdot \gamma_{xz}; \\ \sigma_z = E_3 \cdot \frac{R_{z1}}{R_{z2}} \cdot \varepsilon_x + E_3 \cdot \frac{R_{z3}}{R_{z2}} \cdot \varepsilon_y + E_3 \cdot \frac{R_{z4}}{R_{z2}} \cdot \varepsilon_z; \tau_{xz} = G_{12} \cdot \gamma_{xy}; \end{cases}$$

где E_1, E_2, E_3 – модули упругости для растяжения-сжатия вдоль главных направлений упругости X, Y, Z соответственно; G_{23}, G_{13}, G_{12} – модули сдвига для главных плоскостей YOZ, XOZ, XOY .

Для описания модели использовался ряд следующих параметров: модуль Юнга (E), коэффициент Пуассона; модуль сдвига, плотность, коэффициент сцепления, коэффициент сцепления.

Граничные условия подразумевали, согласно принципу суперпозиций сил,

закрепление по осям крайних площадок модели в направлении простирания пластов.

Моделировалась последовательная подработка земной поверхности и горного массива камерами на глубине 100 метров и далее лавами на глубинах 200 и 300 метров.

Распределение вызванных подработкой деформаций в модели горного массива можно видеть на рисунках 4, 5.

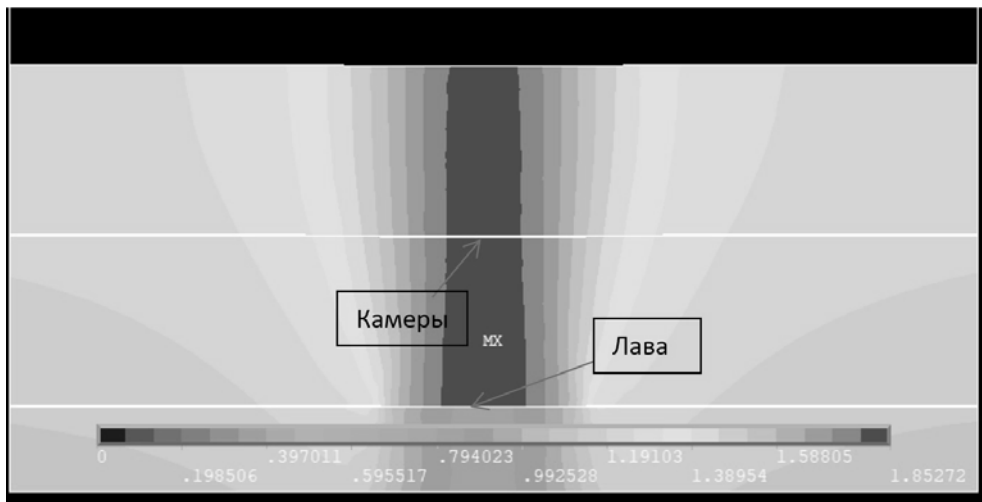


Рис. 4. Распределение оседаний от одиночной горной выработки

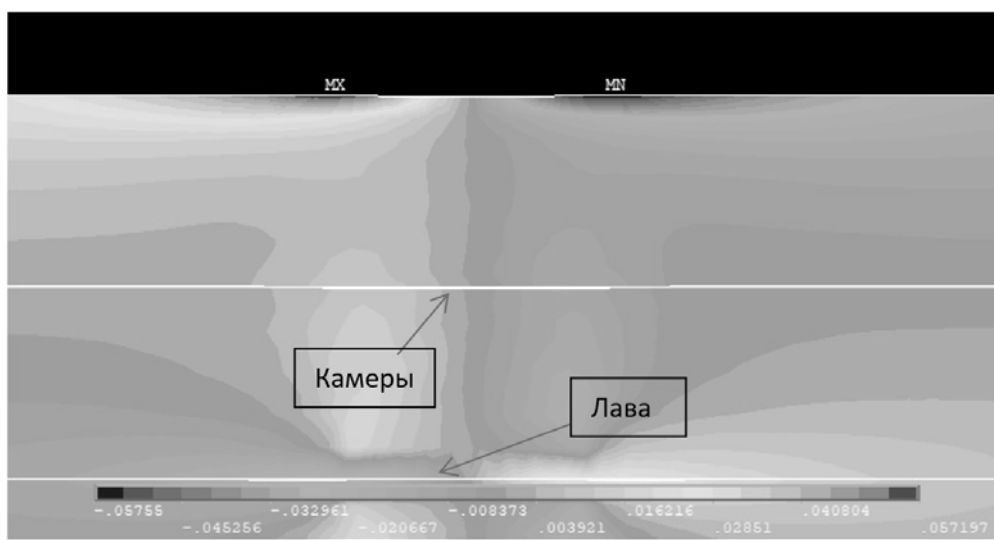


Рис. 5. Распределение горизонтальных сдвижений от одиночной горной выработки

Указанные схемы распределения деформаций горного массива соответствую-

ют классическим представлениям о деформациях, приведенным в работах [4–5].

При повторной обработке деформации в модели распределяются согласно рисунку 6.

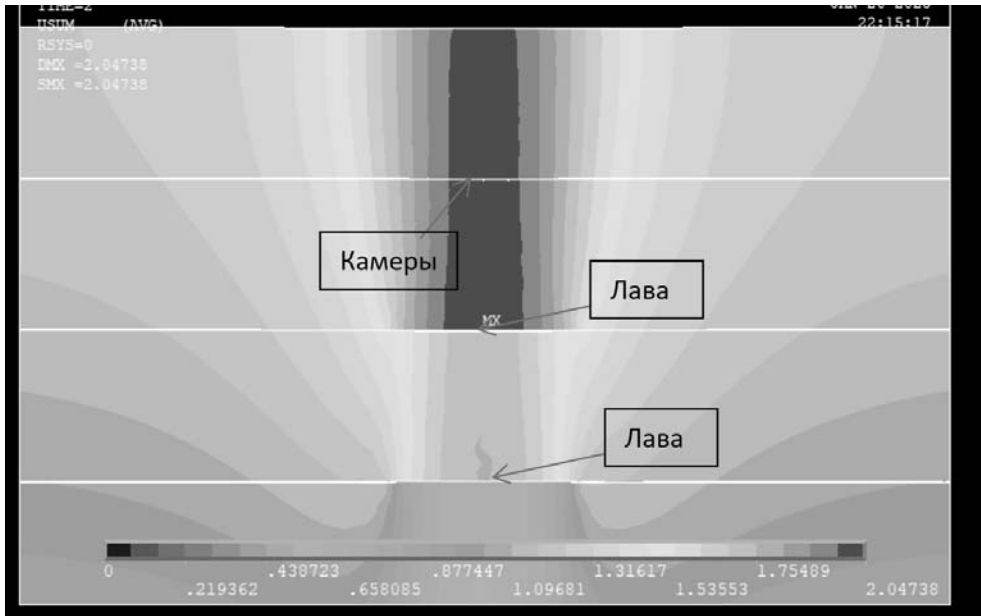


Рис. 6. Распределение оседаний при повторной обработке горной выработкой межкамерных целиков

Данный подход последовательного моделирования сдвижений горного массива и земной поверхности при их многократной обработке позволяет определять момент предельного деформирования целика. Стоит отметить, что в зависимости от глубины расположения очистной горной выработки, предельные показатели деформаций, согласно моделированию (2 мм/м и более), могут быть достигнуты уже после отработки второго или третьего пласта, о чем свидетельствует резкий всплеск величины сдвижения после моделирования последовательной отработки второй лавы на глубине 300 метров (рис. 7).

Опасность данного явления лежит в непрогнозируемом процессе сдвижения, который может проявиться как в процессе отработки выемочных мощностей шахты, так и при затоплении горных выработок.

Подобные процессы неоднократно фиксировались над старыми очистными выработками (камерами), сопряжёнными с протяжёнными выработками. Например, локальное оседание в виде стакана размером 3 × 5 м и глубиной 1,5 м было зафиксировано, согласно [6], на шахте № 173 ПО «Краснодунголь» над сопряжением старой лавы и западной сбойки. Ввиду резкой перемены знака деформаций такие мульды, представляют существенную опасность для поверхностных сооружений, попадающих в зону их влияния. Например, при зафиксированном минимальном оседании в 280 мм (наблюдательная станция № 172



Рис. 7. Прирост горизонтальных сдвижений при повторной подработке горной выработкой межкамерных целиков

шахты № 6 Капитальная ПО «Донецкуголь») измеренные максимальные деформации в мульде составили 4,0 мм/м [6].

Согласно нормативному документу [4], каждая последующая отработка очистной горной выработки приводит к активизации сдвижений земной поверхности от ранее отработанной лавы. Таким образом, величина оседаний в месте расположения межкамерных целиков может составлять при многократной подработке от нескольких метров до нескольких десятков метров и будет определяться такими параметрами, как количество отработанных пластов, их мощность, угол падения и глубина расположения горных выработок. Пример изменения величины оседаний при различных глубинах отработки одиночной лавы показан на рисунке 8.

Стоит отметить, что непосредственное влияние на характер деформаций оказывает не столько глубина расположения горной выработки, сколько отношение технических параметров лавы к глубине, характеризующее степень подработанности горного массива. Зависимость влияния отношения размеров лавы (D1) к глубине (H) на размеры оседаний приведена на рисунке 9.

При таких величинах оседаний величины относительных деформаций будут являться разрушительными для угольных целиков. Особую опасность данное явление несет при затоплении верхних горизонтов шахт, когда агрессивные шахтные воды заполняют пространство между угольными целиками, и происходит их увлажнение до полного влагонасыщения, а, как следствие, снижение несущей способности.

Снижение несущей способности угольных целиков, ранее разрушенных подработкой, способствует непрогнозируемым процессам сдвижения земной поверх-

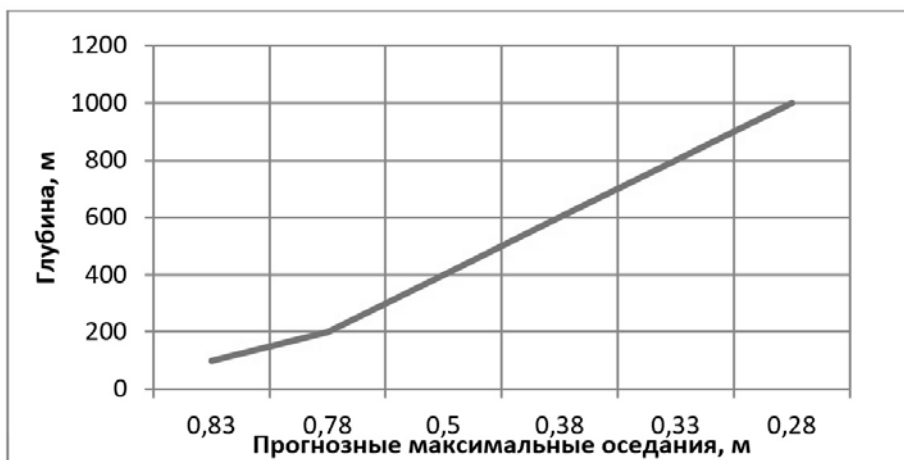


Рис. 8. Распределение оседаний при подработке межкамерных целиков горной выработкой на различных глубинах

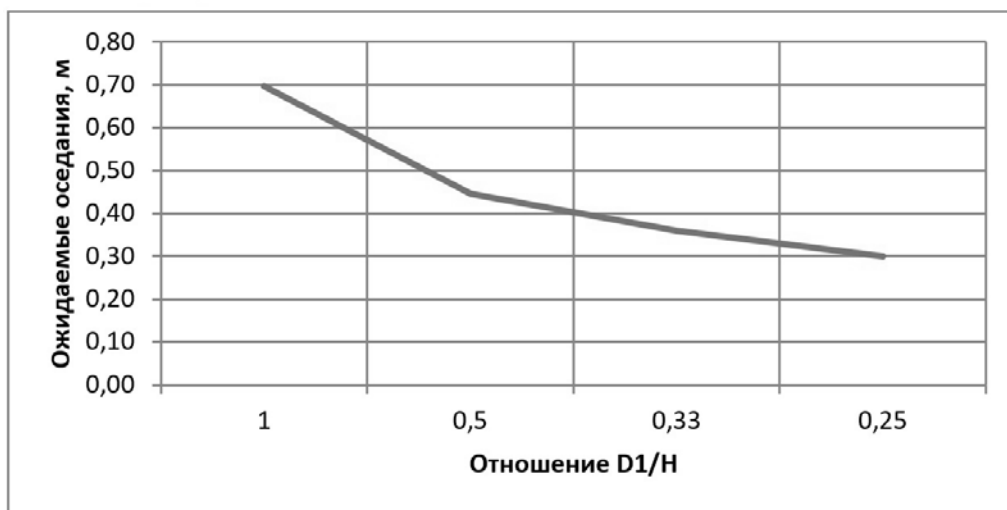


Рис. 9. Распределение оседаний при подработке земной поверхности горной выработкой различной ширины на различных глубинах

ности, что несет непосредственную опасность для жилого фонда и других инфраструктурных объектов Донбасса.

Выводы. Полученная в результате проведенной работы модель позволяет осуществлять расчет максимальных оседаний с учетом влияния верхних горизонтов, отработанных камерно-столбовым способом, а также может использоваться для учета влияния затопления на характер деформаций земной поверхности и горного массива. При этом определяющими параметрами в процессе дальнейшего развития модели должны стать такие факторы, как высота зоны водопроницаемых трещин; тип горных пород, залегающих в кровле пласта; глу-

бина отработки ликвидируемых горных выработок; угол падения и мощность пласта. Полученные результаты позволяют с большей объективностью определять показатели деформаций и учитывать влияние старых горных выработок, расположенных в приповерхностной зоне.

1. *Гавриленко Ю.Н.* Техногенные последствия закрытия угольных шахт: Монография / Ю.Н. Гавриленко, В.Н. Ермакова. – Донецк, 2004. – 631 с.
2. Ликвидация угольных шахт. Защита земной поверхности от затопления горных выработок. Рекомендации: КД 12.12.004 – 98: Утв. Министерством угольной промышленности Украины 20.12.98. – Донецк, 1998. – 46 с.
3. *Корнев Е.С.* Разработка комплекса программ и численное моделирование геомеханических процессов в угленосном массиве: Автореф. дис. на соискание уч. степени канд. техн. наук по специальности 05.13.18 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. – Новокузнецк, 2013. – 19 с.
4. ГСТУ 101.00159226.001–2003. Правила подработки зданий, сооружений и природных объектов при добыче угля подземным способом. – Введ. 01–01–2004. – К.: Мінпаливенерго України, 2004. – 127 с.
5. *Иконников М.Ю.* Математическое моделирование в задачах оценки эффективности и безопасности горных работ / М.Ю. Иконников, Ю.Р. Иконников, Е.А. Слащева, И.Н. Слащев, А.А. Яланский. – Днепрпетровск: НГУ, 2015. – 215 с.
6. *Феофанов А.Н.* О параметрах повреждения земной поверхности над заброшенными горными выработками / А.Н. Феофанов // Наукові праці УкрНДМІ НАН України: сб. науч. тр. – Донецк: УкрНДМІ НАНУ, 2013. – №12 – С. 62–81.

P.M. Golubev, E.A. Bardakova

Geomechanical consequences of flooding of the upper horizons of liquidated mines.

This article describes the mechanism of deformation processes occurring in a mountain massif when it gets wet using experimental and laboratory studies. The possibility of activating the process of displacement from the upper mine workings worked out by the chamber method and not taken into account when calculating according to classical methods is established. A principled approach to modeling geomechanical processes associated with multiple part-time work of tselikov and liquidation of coal mining enterprises is described.

Keywords: *displacement of the earth's surface, flooding of mine workings, liquidation of mines, chamber system of working out, FEM models.*

Республіканський академічний науково-дослідницький і проектно-конструкторський інститут горної геології, геомеханіки, геофізики і маркшейдерського дела (РАНІМІ), г. Донецьк

Получено 29.11.2022

Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying (RANIMI), Donetsk

ranimi@ranimi.org

УДК 550.34
doi:10.24412/0136-4545-2022-4-86-96
EDN:VBSJCU



©2022. Л.А. Новгородцева, Е.А. Ялпуга, О.Л. Шалованов, Д.С. Бородин

ПРЕДПОСЫЛКИ ПРИМЕНЕНИЯ МИКРОСЕЙСМИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ОПАСНЫХ СКОПЛЕНИЙ МЕТАНА В ПРИРАЗЛОМНЫХ ЗОНАХ

В данной статье изучены различные приемы микросейсмических наблюдений в рамках работ по изучению скоплений углеводородов в приразломных зонах.

Ключевые слова: микросейсмизм, углеводороды, волна Рэлея, амплитуда, энергия, метод Накamura.

Введение. Микросейсмические наблюдения над геологическими объектами, в том числе в зонах геодинамической активности, в России и за рубежом приобретают характер нового и перспективного направления в сейсморазведке.

Особый интерес в рамках проводимых в РАНМИ научных исследований представляет использование микросейсм методом пассивного низкочастотного сейсмического зондирования для изучения коллекторов углеводородов (УВ), то есть скоплений метана на угольных месторождениях. Следует заметить, что за последние 15-20 лет этот метод получил определенное распространение в нефтегазовой геологии, главным образом в Бразилии и на Ближнем востоке [1]. При этом основная предпосылка успешного применения метода заключается в том, что модификации спектра сейсмического фона в частотном диапазоне 0, 5–20 Гц уверенно отличаются при его взаимодействии с геологическими структурами, содержащими заполненные УВ поры, в сравнении с аналогичными структурами, содержащими только воду. Другими словами, микродрожание углеводородосодержащих структур можно зафиксировать на сейсмическом регистраторе как частотно-зависимое «рассеяние» входящих фоновых сейсмических волн. В угольной геологии данный метод пока не нашел применения, но вполне и с успехом может быть использован для выполнения задач, связанных с прогнозом зон опасного скопления метана на шахтных полях.

Важная роль при микросейсмических наблюдениях отводится проблеме выделения эндогенной составляющей из сложного цуга приходящих волн различной частоты $f =$ от 0,01 до 20 Гц. Уровень интенсивности для амплитуд полезного сигнала оценивается в нанометрах, что соответствует уровню шумов, произведенных на поверхности Земли источниками естественной и искусственной природы [2–4.]

К естественным колебаниям с периодом T до 1-2 сек относятся поверхност-

ные волны Рэлея, Лява, и приходящие отовсюду объемные продольные и поперечные волны, образовавшиеся при разгрузке тектонических напряжений внутри Земли.

К искусственным колебаниям относятся волны на частотах $f =$ от 5 до 10 Гц и периодами T от 0,1 сек и ниже, образуемые работой электрогенераторов, движением транспорта, бурением скважин и т.д.

Исследованиями Горбатикова А.В. [3, 4] и других авторов установлено, что наиболее информативной для решения геологических задач является волна Рэлея. В этой статье рассмотрены результаты микросейсмических наблюдений, приемы методики полевых измерений, обработки и интерпретации при использовании поверхностной волны Рэлея.

1. Анализ методических приемов микросейсмических измерений при выявлении сверхслабых сигналов.

При проведении исследований необходимо понимать, что вне зависимости от того, какой конкретно источник микросейсмических колебаний предстоит изучить: образование и расширение зон трещиноватости, технические микроземлетрясения при проведении горных работ, движение флюидов над нефтяными залежами, напряженное состояние горных пород и иные – полезный сигнал находится внутри сложного волнового поля, всегда присутствующего на поверхности. Для того, чтобы выделить параметры отдельного сейсмического события – форму импульса, частоту колебаний, выделяющуюся сейсмическую энергию, сейсмический момент и координаты очага, необходимо использовать множество предварительных процедур, начиная от методики измерений и заканчивая обработкой и интерпретацией сейсмической информации.

Основными приемами измерений, используемыми в настоящее время для улучшения отношений сигнал/шум, являются [3–9]:

- для определения степени доминирования волн Рэлея в общей интерференционной картине проводится поляризационный анализ движения частиц, заключающийся в расчете отношений горизонтальной и вертикальной составляющей сигнала;

- проведение прямой оценки кажущихся скоростей V_p , V_s и фундаментальной моды Рэлея V_R (так как V_R зависит от частоты f , на которой она измеряется) для дальнейшего использования доказанного соотношения $H = 0.5V_R(f)/f$, где H – выделяемая глубина залегания границы неоднородности;

- создание опорной станции с изучением нормального фона микросейсмических измерений и использование этих измерений для внесения корректирующих поправок на полевые наблюдения;

- проведение измерений в интервалах времени не менее 1500 сек для получения стабильных спектров микросейсм;

- использование трехкомпонентных датчиков с измерением 2-х горизонтальных и одной вертикальной составляющей волнового поля;

- создание каталога волновых форм для отбраковки записей, связанных со случайными событиями;

- использование малоапертурных групп сейсмоприемников, расположенных на специально рассчитанной схеме с целью подавления различных помех.

Кроме того, как и при работе с другими геофизическими методами, точность исследований напрямую зависит от полноты геологической информации по участку измерений. Такие сопутствующие данные, как изученные коллекторские свойства горных пород по вертикальному разрезу участка из нескольких опорных скважин на участке работ или определение изменений по картам геофизических наблюдений с поверхности в электрических, гравитационных, магнитных и газовых параметров, значительно способствуют нахождению ключевых аномалий для решения конкретных геологических задач.

Выбор измерительных приборов обусловлен амплитудно-частотными характеристиками изучаемого сигнала, поэтому большинство исследователей арендуют или разрабатывают системы, позволяющие регистрировать с высокой детальностью частоты сигналов не превышающие 10-20 Гц. Примеры типичных спектров, ожидаемых при полевых экспериментах приведены на рисунке 1.

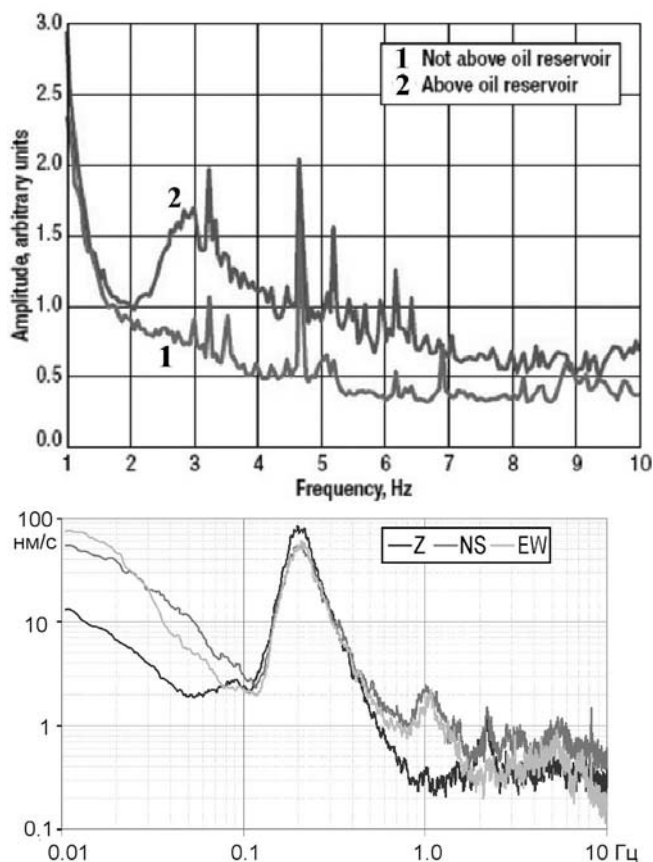


Рис. 1. Типичные амплитудно-частотные спектры микросейсмического шума, по данным [1, 6].

Установлено, что:

- возникающие в диапазоне частот $f = 0,01-0,1$ Гц колебания земной поверхности происходят от подземных толчков, возникающих на расстоянии более 1000 км от места измерения;

- характерный пик амплитуд $A \geq 5$ мкм, измеренный на частотах $f = 0.1-0.3$ Гц (периоды 1-3 сек), связан с частичным преобразованием суммарной энергии штормов в океанах вначале в колебания морских волн, а затем в вибрационную энергию поверхности Земли;

- область спектра на частотах $f = 0.7-1.4$ Гц является переходной от низкочастотных к высокочастотным колебаниям и является очень удобной для вычисления отношений горизонтальной и вертикальной составляющих по методу Накамуры [10];

- в области высокочастотного спектра f от 1.5 Гц и выше (период от 0,6 сек и ниже) значительный вклад в состав колебаний вносят техногенные помехи.

После выбора диапазона частот и получения трасс сигналов на сейсмоприемниках, переходят к специальной обработке, приемы которой разнообразны и зависят как от количества использованных датчиков, так и от расположения на профиле наблюдений. Рассмотрим основные из этих приемов.

2. Способы выделения полезного сигнала при микросейсмических наблюдениях.

Аникеевым Д.В. [11] предложен способ выпрямления амплитуд сейсмических сигналов, заключающийся в обращении отрицательных значений в положительные и последующим суммировании этих амплитуд.

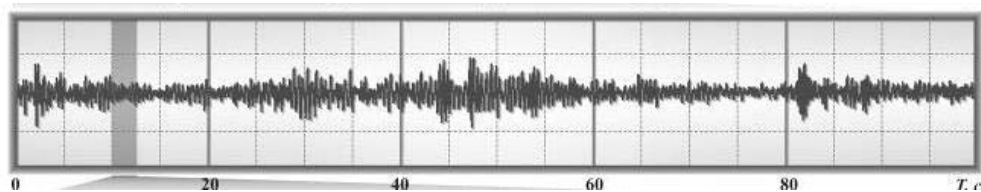
При одномоментном измерении на 911 датчиках и использовании 6-ти компонентного сигнала вычисляется тензор сейсмического момента M_0 для каждого датчика, и впоследствии составляется матрица из 911 уравнений для вычисления виртуального дифракционного значения амплитуды заданных 911 точек полупространства. Его метод показал хороший результат при изучении образования зон трещиноватости в момент гидроразрыва пласта.

Большинство исследователей применяют стандартные процедуры, состоящие из предварительного расчета ожидаемого частотно-амплитудного спектра и дальнейшем сравнении рассчитанного и фактически наблюдаемого спектров. При этом применяют следующие пакеты программ:

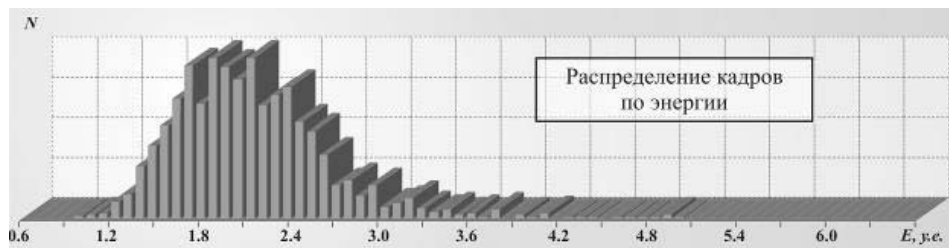
- Petrel, Geo Frame, ISIS [12];
- DAK (Data Analysis Kit) [5];
- NERA [14];
- Технология АНЧАР [16] и др.

На рисунке 2 показан типичный микросейсмический сигнал в выбранных интервалах времени и примеры его обработки с расчетом распределения энергии по кадрам длительностью 5,12 сек [9].

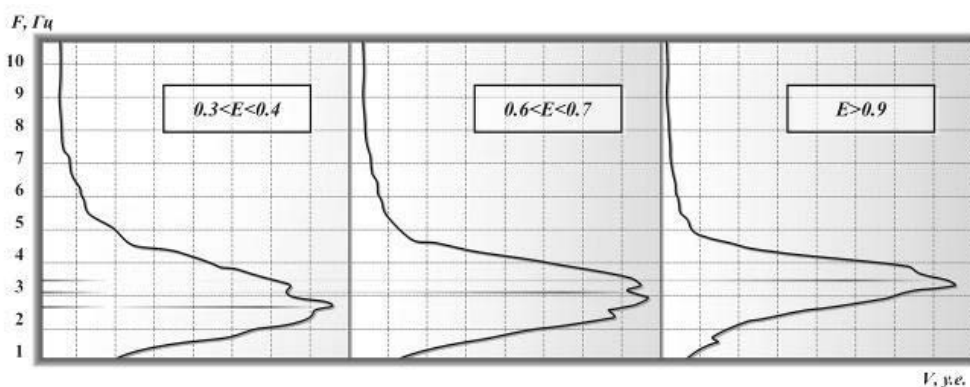
По мнению Бережного Д.В. понятия мощности и энергии в теории сигналов не относятся к характеристикам каких-либо физических величин сигналов, а являются их количественными характеристиками, отражающими определенные



а)



б)



в)

Рис. 2. Пример обработки микросейсмических записей.
а – типичный микросейсмический сигнал во временной области;
б – расчет энергии с помощью преобразования Фурье на одном из кадров;
в – типичная зависимость усредненных спектров микросейсм от энергии.

свойства сигналов и динамику изменения их значений во времени, в пространстве или по любым другим аргументам.

Согласно известным работам исследователей всегда важно рассматривать следующие характеристики:

- средние амплитуды;
- максимумы спектров;
- ширину спектров;
- верхняя и нижняя границы частот;
- изменение скорости и понижение частоты на разных крыльях тектонического нарушения;

- отношение горизонтальной и вертикальной составляющей сигнала [10];
- скорости продольных и поперечных волн.

После выбора наиболее устойчивых параметров наблюдаемых сигналов приступают к интерпретации, которая заключается в геологическом, сейсмологическом и техническом истолковании полученных данных.

3. Интерпретация результатов микросейсмических наблюдений.

Вообще говоря, применение пассивной сейсморазведки развивается, в основном, в трех направлениях:

- в геологическом – картирование и определение глубины залегания активных разломов, обнаружение грязевых вулканов, залежей нефти, зон трещиноватости в массиве горных пород при гидроразрыве пласта и др;
- в сейсмологическом – локация очагов землетрясений и установление природы макросейсмических событий;
- в техническом – исследование характеристик грунтов при строительстве крупных объектов (АЭС, ГЭС, ТЭС и т.д.).

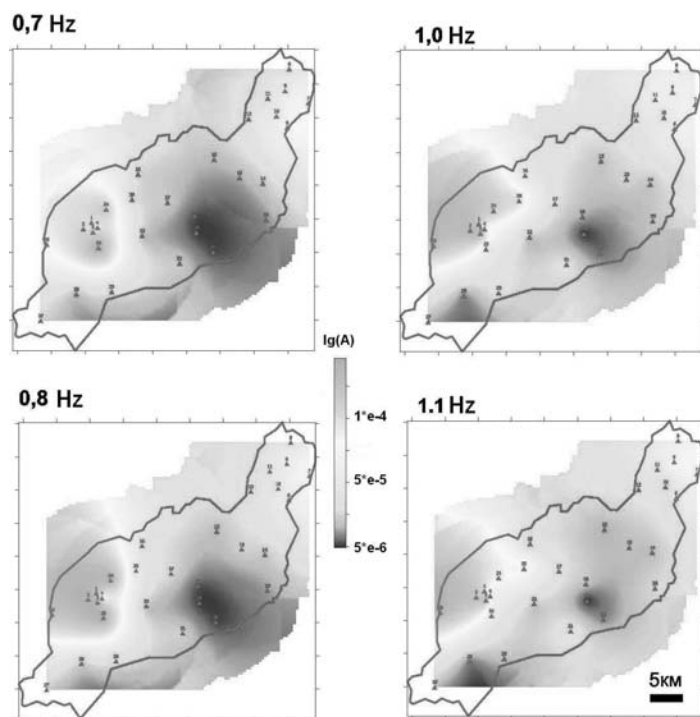
Однако, с точки зрения проводимых исследований, интерес представляют первые два из указанных направлений, которые рассмотрим более подробно.

Геологические исследования. Экспериментально установлено и подтверждено численным и физическим моделированием, что геологические объекты со сравнительно высокими сейсмическими скоростями проявляются в микросейсмическом поле как зоны с пониженными амплитудами, в то время как структуры с более низкими скоростями – области с повышенными амплитудами [3, 4].

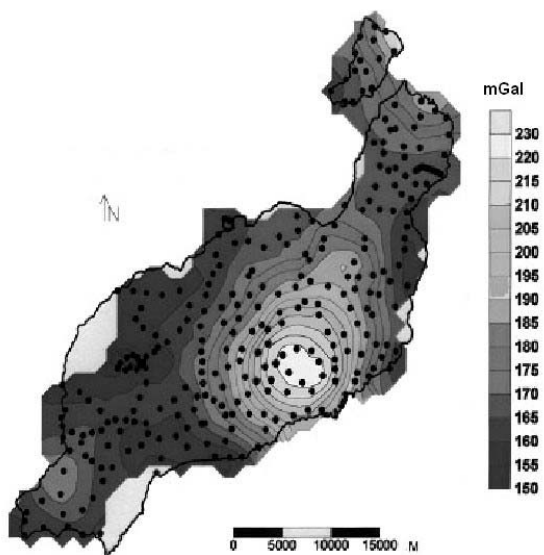
На рисунке 3 приведены результаты микросейсмического зондирования района с глубокозалегающей вулканической интрузией. На горизонтальных срезах четырех разных глубин, соответствующих частотам $f = 0.7, 0.8, 1.0$ и 1.12 , обнаружена устойчивая аномалия пониженных значений параметра $\lg A$ (рис. 3а). Местоположение этой аномалии совпадает с зоной повышенных значений гравитационного поля (рис. 3б), что интерпретируется как наличие высокоскоростного тела значительной плотности, залегающего под толщей наносов.

Интересными и результативными с точки зрения выявления коллекторов УВ в приразломных зонах в регионах с низкой природной сейсмической активностью являются микросейсмические исследования Геофизической службы РАН в пределах неотектонических зон Воронежского кристаллического массива [6]. Авторами было установлено, что:

- фоновыми значениями микросейсмического шума в относительных к нормирующему показателю единицах отмечаются штамповые структуры;
- линейные прогибы характеризуются повышением горизонтальной и вертикальной составляющих в 1.5–2 раза относительно нормального фона;
- по характеру спектра микросейсмических колебаний в диапазоне частот $f = 0.15$ –6 Гц наиболее отчетливо различаются два геоблока – КМА и Хоперский;
- как правило, высокие значения нормированных амплитуд коррелируются с низкими значениями плотности по гравиметрическим данным.



а)



б)

Рис. 3. Сопоставление аномалий микросейсмического и гравитационного поля при измерениях на острове Лансароте Канарского архипелага; а – микросейсмические измерения ($\lg A$); б – гравитационное поле (mGal) [4].

На рисунке 4 приведены результаты микросейсмического зондирования при исследованиях Курского метеоритного кратера, образованного в результате падения небесного тела диаметром в несколько сотен метров. Зоны разуплотненных и дислоцированных пород архейского фундамента картируются повышенными значениями приведенных амплитуд и совпадают данными бурения и низкими значениями производной силы тяжести.

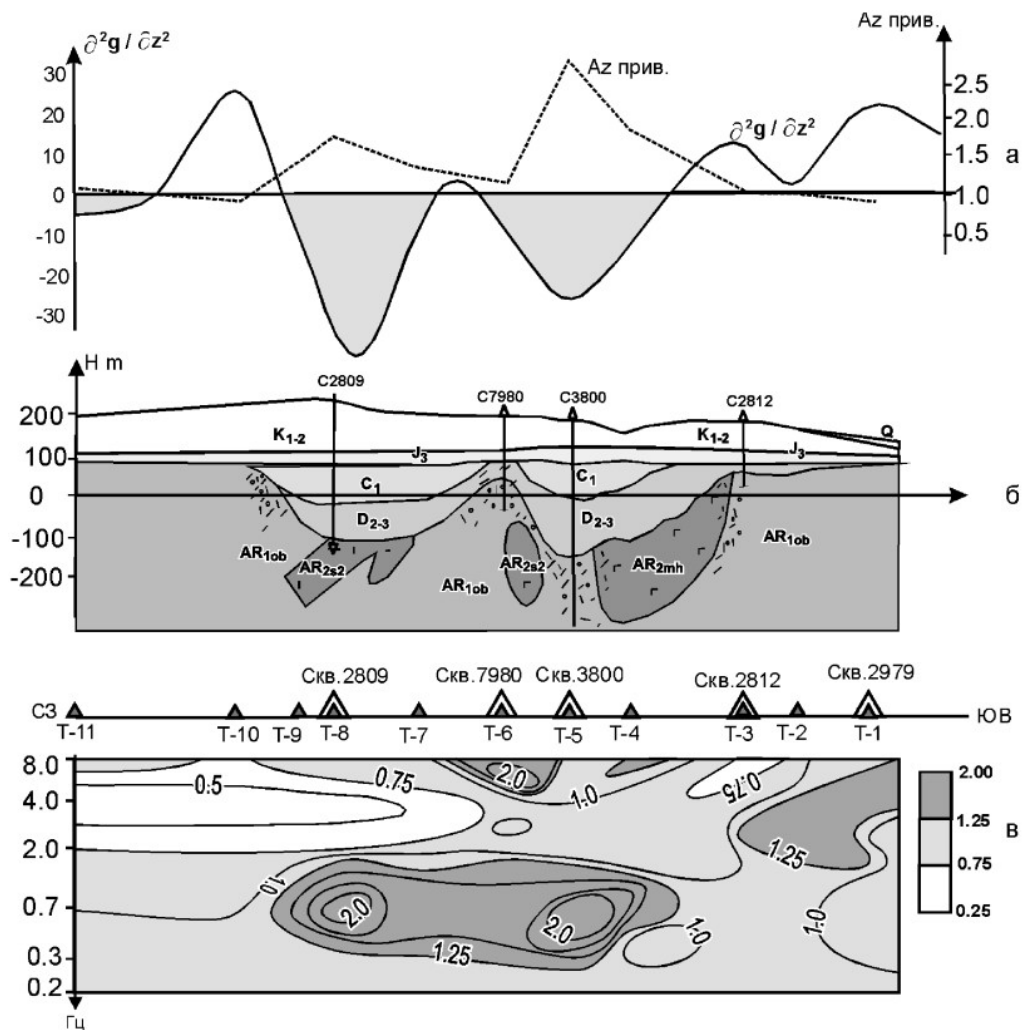


Рис. 4. Результаты геолого-геофизических работ по профилю I-I:
 а – графики d^2g/dz^2 вдоль профиля и интенсивности микросейсмического шума на частоте 0.7–1.0 Гц;
 б – геологический разрез по данным глубинного бурения (Кучеренко В.И., 2009);
 в – результаты микросейсмического зондирования в диапазоне частот 8–0.2 Гц [6].

Следует отметить, что положительные результаты исследований методом микросейсмического зондирования по этому объекту также подчёркивают теоретическую оправданность применения метода для изучения зон тектонических

разломов.

Сейсмологические микросейсмические исследования. Научное направление обнаружения сверхслабых сигналов при мониторинговых наблюдениях в значительной мере развивается благодаря работам Института динамики геосфер РАН и Югорскому научно-исследовательскому институту информационных технологий [7, 8, 13].

Специальная методика расположения сейсмоприемников (малоапертурная сейсмическая антенна «Михнево») и применяемый комплекс обработки с помощью кросс-корреляции волновых форм позволили повысить отношение сигнал/шум в 3,5 раза и фиксировать далекие микроземлетрясения и взрывы. В ИДГ РАН создается также каталог волновых форм, помогающий исключить случайные технические помехи.

Шмаковым Ф.Д. [13] предложен комплекс программ, базирующийся на решении обратной кинематической задачи сейморазведки для локации источников сейсмического излучения. Эти научные достижения могут быть использованы при микросейсмическом мониторинге углеводородов и позволяют исследовать следующие геологические задачи:

- выявлять зоны трещиноватости и области активных разломов;
- выделять пространственные зоны микросейсмической активности;
- анализировать изменение интенсивности излучения энергии в процессе разработки месторождений углеводородов.

Заключение. В результате анализа литературных источников было установлено, что микросейсмические сигналы содержат обширную информацию о структурно-геологических неоднородностях и напряженном состоянии горного массива. Также подтверждается тот факт, что их можно рассматривать как постоянно действующий информационный элемент сейсмического поля, позволяющий изучать геодинамическое состояние геологической среды.

Было проанализировано успешное применение результатов микросейсмических измерений в разных отраслях науки и производства, что позволяет надеяться на новый этап развития метода, содержанием которого будет более глубокое проникновение в физику взаимодействия волны Рэлея с такими геологическими объектами, как зоны скоплений метана на шахтных полях угольных месторождений.

1. Graf R. Passive low frequency spectral analysis: Exploring a new field in geophysics / R. Graf, S.M. Schmalholz, Y. Podladchikov, E.H. Saenger // World Oil. – 2007. – P. 47–52.
2. Кузнецов И.А. Сейсмоакустика пористых и трещиноватых геологических сред. Экспериментальные исследования / И.А. Кузнецов [и др.]. – М., 2004. – Т. 2. – 320 с.
3. Горбатилов А.В. Технология глубинного зондирования земной коры с использованием естественного низкочастотного микросейсмического поля / А.В. Горбатилов [и др.] // Изменение окружающей среды и климата: монография. – М.: ИФЗ РАН, 2008. – Т. 1, ч. 2. – С. 223–236.
4. Горбатилов А.В. Возможность оценки параметров геологических объектов на основе использования фонового микросейсмического поля. Результаты экспериментальных исследований и моделирования / А.В. Горбатилов // Современные методы обработки и интер-

- претации сейсмологических данных: матер. междунар. сейсмологической школы. – 2006. – С. 66–71.
- Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=23287245&ysclid=1985lhhiv944835622>
5. Данилов К.Б. Выявление геологических неоднородностей в верхней части земной коры на основе анализа низкочастотных микросейсм (на примере Архангельской области): дис. канд. физ.-мат. наук: 25.00.10 / Данилов Константин Борисович. – Архангельск, 2017. – 181 с.
 6. Орлов Р.А. Опыт использования микросейсмического шума для решения геологических задач в условиях платформы (на примере воронежского кристаллического массива / Р.А. Орлов. // Вестник ВГУ, Серия: Геология – 2011. – № 1. – С. 184–192.
 7. Адушкин В.В. Обнаружение сверхслабых сигналов на малоапертурной сейсмической антенне «Михнево» с помощью кросскорреляции волновых форм / В.В. Адушкин [и др.] // Геофизика: журн. / ДАН. – 2015. – Т. 460, № 6. – С. 707–709.
 8. Сергеев С.И. Развитие малоапертурной сейсмической антенны «Михнево» для решения новых сейсмологических задач / С.И. Сергеев, С.А. Королев, С.Г. Волосов, О.П. Кузнецов // Научное приобретение: работы с конференции. – 2017. – Т. 27, № 1 – С. 35–39.
 9. Бережной Д.В. Анализ спектральных характеристик микросейсм как метод изучения структуры геологической среды [Электронный ресурс] / Д. В. Бережной [и др.]. – Режим доступа: https://modernseismic.com/images/Analiz_spektralnyh_harakteristik_mikroseism_kak_metod_izucheniya_struktury_geologicheskoi_sredy.pdf
 10. Nakamura Y. A method for dynamic characteristics estimation of subsurface using microtremor on the ground surface / Y. Nakamura // Quarterly Report of Railway Technical Research Institute. – 1989. – Vol. 30, № 1. – P. 25–33. – Режим доступа: www.sdr.co.jp
 11. Anikiev D.V. Joint Detection, Location and Source Mechanism Determination of Microseismic Events / D.V. Anikiev // Saint Petersburg state university studies in physics. – Saint Petersburg, 2015. – Vol. 4. – 85 p.
 12. Блехман В. Методика моделирования терциноватых терригенных коллекторов в Западной Сибири / В. Блехман [и др.] // Технология ТЭК. – 2007. – № 6. – С. 7–11. Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9908095&ysclid=l9grqp6fts161744708>
 13. Шмаков Ф.Д. Программный комплекс решения обратных кинематических задач микросейсмического мониторинга / Ф.Д. Шмаков // Югорский НИИ ИТ. – 2010. – 9 с. – Режим доступа: <https://lib.nsu.ru/xmlui/bitstream/handle/nsu/288/05.pdf?sequence=1&isAllowed=y> – Загл. с экрана.
 14. Рогачев М. Статья-ответ доктору А.С. Алешину. Еще раз о сейсмическом микрорайонировании. Часть 2 / М. Рогачев // ГеоИнфо. – 2016. Режим доступа: <https://asp-g.ru/wp-content/uploads/2016/06/Еще-раз-о-сейсмическом-микрорайонировании.Часть-2.pdf>.
 15. Аносов Г.И. Метод Накамуры: современные технологии сейсмического микрорайонирования стройплощадок на урбанизированных территориях / Г.И. Аносов. – ООО ЦИ-ИЗ ИМПУЛЬС-М. – Калининград. Режим доступа <https://www.geoygservis.ru/publishing/metod-nakamury-sovremennye-tehnologii-seysmicheskogo-mikrorayonirovaniya>.
 16. Кузнецов О.Л. Сейсмические исследования неравномерности открытой трещиноватости и неоднородности флюидонасыщения геологической среды для оптимального освоения месторождений нефти и газа / О.Л. Кузнецов, И.А. Чиркин, С.И. Арутюнов, Е.Г. Ризанов и др. // Георесурсы. – 2018. – № 20(3), Ч.2. – С. 206–216. DOI: <https://doi.org/10.18599/grs.2018.3.206-215>.

L.A. Novgorotseva, E.A. Yalputa, O.L. Shalovanov, D.S. Borodin

Prerequisites for the application of microseismic observations for the exploration of dangerous methane concentrations in fault zones.

In this article, various techniques of microseismic observations had studied in the framework of

Л.А. Новгородцева, Е.А. Ялпуга, О.Л. Шалованов, Д.С. Бородин

studies of hydrocarbon accumulations in fault zones.

Keywords: *microseisms, hydrocarbons, Rayleigh wave, amplitude, energy, Nakamura method.*

Республиканский академический научно-исследовательский
и проектно-конструкторский институт горной геологии, гео-
механики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ),
г. Донецк

Получено 02.12.2022

Republican Academic Research and Design Institute of
Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying
(RANIMI), Donetsk

ranimi@ranimi.org