

ISSN 0136-4545

ФГБОУ ВО «ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

---

---

**Журнал  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ  
МЕХАНИКИ**

---

---

**№ 4 (85)**

**2023**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:** д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**  
**ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:** д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**  
**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:** канд. физ.-мат. наук **М.Н. Пачева**

#### **РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

д-р техн. наук, проф. **А.В. Анциферов**, д-р техн. наук, проф. **В.Е. Болнокин**, д-р техн. наук, проф. **Н.И. Болонов**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.О. Ватульян**, д-р техн. наук, проф. **Л.П. Вовк**, д-р техн. наук, проф. **В.А. Глазунов**, д-р техн. наук, с.н.с. **А.А. Глухов**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.С. Гольцев**, д-р физ.-мат. наук, проф. **Г.В. Горр**, д-р техн. наук, проф. **В.В. Губанов**, д-р техн. наук, с.н.с. **В.А. Дрибан**, д-р физ.-мат. наук, проф. **А.М. Ковалев**, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. **Б.И. Коносевиц**, д-р физ.-мат. наук, проф. **И.А. Моисеенко**, д-р техн. наук, проф. **В.Ф. Мущанов**, д-р техн. наук, проф. **В.Н. Павлыш**, д-р техн. наук, проф. **А.А. Петраков**, д-р техн. наук, доц. **С.В. Сторожев**, д-р физ.-мат. наук, с.н.с. **С.Н. Судаков**, д-р техн. наук, проф. **Г.М. Улитин**, д-р физ.-мат. наук, проф. **В.А. Шалдырван**, д-р техн. наук, проф. **В.П. Шамота**

**EDITOR-IN-CHIEF:** Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**

**DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF:** Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**

**EXECUTIVE SECRETARY:** Cand. of phys. and math. **M.N. Pacheva**

#### **EDITORIAL BOARD:**

Dr. of tech., prof. **A.V. Antsiferov**, Dr. of tech., prof. **V.E. Bolnokin**, Dr. of tech., prof. **N.I. Bolonov**, Dr. of phys. and math., prof. **A.O. Vatulyan**, Dr. of tech., prof. **L.P. Vovk**, Dr. of tech., prof. **V.A. Glazunov**, Dr. of tech., senior researcher **A.A. Glukhov**, Dr. of phys. and math., prof. **A.S. Goltsev**, Dr. of phys. and math., prof. **G.V. Gorr**, Dr. of tech., prof. **V.V. Gubanov**, Dr. of tech., senior researcher **V.A. Driban**, Dr. of phys. and math., prof. **A.M. Kovalev**, Dr. of phys. and math., senior researcher **B.I. Konosevich**, Dr. of phys. and math., prof. **I.A. Moiseyenko**, Dr. of tech., prof. **V.F. Mushchanov**, Dr. of tech., prof. **V.N. Pavlysh**, Dr. of tech., prof. **A.A. Petrakov**, Dr. of tech., doc. **S.V. Storozhev**, Dr. of phys. and math., senior researcher **S.N. Sudakov**, Dr. of tech., prof. **G.M. Ulitin**, Dr. of phys. and math., prof. **V.A. Shaldyrvan**, Dr. of tech., prof. **V.P. Shamota**.

Адрес редакции: 83001 Донецк, ул. Университетская, 24  
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»  
Тел. 302 92 71, E-mail: jtam\_donnu@mail.ru

Технический редактор: Пачева М.Н.

Научный журнал «Журнал теоретической и прикладной механики» включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (приказ МОН ДНР № 616 от 14.07.2021 г) по следующим научным специальностям: 1.1.7 — Теоретическая механика, динамика машин (физико-математические науки); 1.1.8 — Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки); 1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки); 2.1.9 — Строительная механика (технические науки); 2.8.6 — Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика (технические науки).

Журнал включен в перечень РИНЦ (Лицензионный договор № 27-01/2020 от 23.01.2020 г.).

Утверждено к печати ученым советом  
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»  
Свидетельство о регистрации: серия ААА № 0078 от 21.11.2016 г.

© Федеральное государственное бюджетное  
учреждение высшего образования  
«Донецкий государственный университет», 2023

№ 4 (85) / 2023

Основан в 1970г.

# ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

## СОДЕРЖАНИЕ

### Механика деформируемого твердого тела

- Моисеенко И.А., Вовк Л.П., Кисель Е.С.* Трехмерный частотный анализ кусочно-неоднородной призмы ..... 5
- Глуценко А.В., Пачева М.Н., Сторожев В.И.* Волны обобщенной плоской деформации в окружном направлении тонкой кольцевой пластины.. 14
- Карасев Д.С., Сторожев С.В., Шалдырван В.А.* Сдвиговые электроупругие волны в функционально-градиентном пьезокерамическом слое с разнотипной экспоненциальной неоднородностью механических и электрических свойств..... 23
- Нескородев Р.Н.* Численно-аналитическая методика расчета напряженно-деформированного состояния анизотропного горного массива с вертикальной выработкой..... 31
- Моисеенко И.А., Пачева М.Н., Сторожев В.И.* Методика анализа модели распространения изгибных волн по тонкому пластинчатому меандровому волноводу на упругой подложке..... 39
- Глушанков Е.С., Гольцев А.С., Мироненко А.Б.* Термоэлектромагнитоупругое состояние многосвязной бесконечной пьезопластины с жестко подкрепленными отверстиями, находящейся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой..... 48
- Глухов А.А.* Волны продольно-сдвигового типа в анизотропном слое между неоднородными полупространствами..... 61

### Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

- Гольцев А.С., Номбре С.Б., Полянский Д.Д., Сторожев С.В.* Учет параметрической неопределенности при расчете скоростей термоупругих волн..... 72

**Геомеханика, разрушение горных пород,  
рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика**

<i>Канин В.А., Пивень Ю.А., Васютина В.В.</i> Совершенствование инженерного метода построения зон повышенного горного давления при разработке свиты угольных пластов.....	81
<i>Новгородцева Л.А., Туманов В.В., Шалованов О.Л., Бородин Д.С., Ялутта Е.А.</i> Изучение предпосылок применения микросейсмических методов для выявления газоносных структур в условиях шахтного поля ш. Калиновская-Восточная».....	89

№ 4 (85) / 2023

*Founded in 1970.*

# JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

## CONTENTS

### Solid Mechanics

- Moiseyenko I.A., Vovk L.P., Kisel E.S.* Three-dimensional frequency analysis of a piecete-inhomogeneous prism..... 5
- Glushchenko A.V., Pacheva M.N., Storozhev V.I.* Waves of generalized plane strain in the circular direction of a thin ring plate..... 14
- Karasev D.S., Storozhev S.V., Shaldyrvan V.A.* Shear electroelastic waves in a functionally-gradient piezoceramic layer with different exponential heterogeneity of mechanical and electrical properties..... 23
- Neskorodev R.N.* Numerical and analytical method for calculating the stress-strain state of an anisotropic rock mass with a vertical excavation..... 31
- Moiseyenko I.A., Pacheva M.N., Storozhev V.I.* Method for analysis of the model of propagation of flexural waves over a thin plate meander waveguide on an elastic substrate..... 39
- Glushankov E.S., Goltsev A.S., Mironenko A.B.* The thermo-electromagneto-elastic state of multiply connected piezoelectric plate with reinforced holes under the convective heat transfer..... 48
- Glukhov A.A.* Waves of longitudinal shear type in an anisotropic layer between inhomogeneous half-spaces..... 61

### Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes

- Goltsev A.S., Nombre S.B., Polyansky D.D., Storozhev S.V.* Accounting of parametric uncertainty when calculating thermoelastic waves speed..... 72

**Geomechanics, Rock Damage,  
Mining Aerogas dynamics and Thermal Physics**

<i>Kanin V.A., Piven Y.A., Vasyutina V.V.</i> Improving the engineering method for constructing zones of high rock pressure when developing a suite of coal seams.....	81
<i>Novgorodtseva L.A., Tumanov V.V., Shalovanov O.L., Borodin D.S., Yalputa E.A.</i> Investigation of the requirements for the use of microseismic methods to identify gas-bearing structures in the circumstances of the mine field coal mine “Kalinovskaya-Vostochnaya”.....	89

## МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

---

УДК УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2023-4-5-13

EDN:ZNIAZB



©2023. И.А. Моисеенко<sup>1</sup>, Л.П. Вовк<sup>2</sup>, Е.С. Кисель<sup>3</sup>

### ТРЕХМЕРНЫЙ ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОЙ ПРИЗМЫ

В статье рассмотрен численно-аналитический алгоритм решения пространственной задачи об установившихся колебаниях кусочно-неоднородной упругой области. В рамках модального анализа проведено исследование спектра резонансных частот и собственных форм колебаний в зависимости от упругих и геометрических параметров области.

**Ключевые слова:** волновое поле, локальные напряжения, частотный спектр, краевой резонанс, прямоугольная призма, модальный анализ.

**Введение.** Эксплуатация элементов конструкций и деталей машин на частотах, близких к резонансным, обычно имеет катастрофические последствия. Предупреждение вредных последствий резонансных явлений является важной научно-технической задачей. При этом усложненные физико-механические характеристики не дают возможность провести расчет собственных частот аналитически. Анализ спектра частот существенно усложняется в случае неоднородности материала области. Возникающая локальная концентрация напряжений

---

<sup>1</sup>Моисеенко Игорь Алексеевич – доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: miamia733@mail.ru.

Moiseyenko Igor Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>2</sup>Вовк Леонид Петрович – доктор техн. наук, проф. каф. математического моделирования ф-та транспорт. и информ. технологий АДИ ДонНТУ, Горловка, e-mail: leonidvovk166@gmail.com.

Vovk Leonid Petrovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Automobile and Highway Institute, Gorlovka, Faculty of Transport and Information Technologies, Chair of Mathematical Modeling.

<sup>3</sup>Кисель Екатерина Сергеевна – кандидат физ.-мат. наук, доц. каф. математического моделирования ф-та транспорт. и информ. технологий АДИ ДонНТУ, Горловка, e-mail: e.s.kisel@gmail.com.

Kisel Ekaterina Sergeevna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Automobile and Highway Institute, Gorlovka, Faculty of Transport and Information Technologies, Chair of Mathematical Modeling.

в сингулярных зонах неоднородной области на границах раздела сред с различными упругими характеристиками требует разработки уточнённой методики расчета, что позволит избежать резонансных явлений при виброэксплуатации неоднородных ограниченных тел и правильно подобрать рабочие режимы вибронагружения. Актуальным является и вопрос выбора геометрических и конструктивных параметров деформируемой области. Решение этих проблем существенно повысит сроки эксплуатации и надежность элементов конструкций. В современных практических приложениях наблюдается повсеместное использование функционально-градиентных неоднородных и кусочно-неоднородных материалов. Спектр собственных частот таких материалов существенно отличается от соответствующих спектров частот для однородных материалов. Уже на уровне анализа спектра частот однородной области можно сделать некоторые выводы о наличии краевых динамических эффектов в окрестности резонансных частот, важнейшим из которых является краевой резонанс [1, 2]. Картина распределения локальных зон концентрации напряжений в неоднородном и, особенно, – в кусочно-неоднородном теле, существенно усложняется и зависит от частотного параметра вибронагружения [2]. В данной работе в качестве объекта исследования выбрана трехмерная упругая кусочно-неоднородная призма с особыми зонами концентрации напряжений в угловых точках области и на внутренних поверхностях раздела сред с различными механическими характеристиками. Это обусловлено, во-первых, независимостью характера локальной концентрации напряжений от геометрии стыкуемых областей [3] и, во-вторых, повсеместным использованием подобных элементов с высокими прочностными характеристиками в технике [4]. Исследование спектра собственных частот для однородных балок с прямоугольным поперечным сечением не представляет особых затруднений и может быть выполнено по различным методикам [3–5]. Однако, не представляется возможности использовать эти результаты ни для прогнозирования времени работы таких элементов, ни, тем более, для уточненного анализа динамических характеристик волнового поля при режимах работы, близких к резонансным. Вычисление собственных частот и анализ собственных форм колебаний в зависимости от различных усложненных разрывных физико-механических характеристик объекта представляет несомненный практический и научный интерес. При этом необходим анализ зависимости механических характеристик волнового поля в пределах изменения упругих и геометрических параметров исследуемой области.

Цель данной работы – качественный и количественный пространственный анализ математических и механических характеристик волнового поля. Объект исследования – ограниченная призматическая кусочно-неоднородная область с характерными зонами локальной концентрации напряжений. Основной задачей является исследование спектра собственных частот и собственных форм колебаний в окрестности нерегулярных точек границы области и на внутренней границе раздела областей в зависимости от геометрии и упругих параметров стыкуемых областей. В статье поставлены и решены следующие задачи:



1. Создание геометрических и расчетных моделей пространственных изотропных упругих областей с различным характером разрыва механических характеристик и, соответственно, с различной геометрией неоднородности.

2. Создание методики численного расчета спектра резонансных частот в программном комплексе ANSYS. Численное исследование проводится для модели, не имеющей начальных напряжений.

3. Определение динамических характеристик напряженно-деформированного состояния при установившихся колебаниях исследуемой составной области

4. Численный сравнительный анализ локальных характеристик волнового поля на различных резонансных частотах с целью определения наиболее опасных, с точки зрения прочности, собственных частот.

5. Исследование влияния геометрии стыкуемых областей на характер локальной концентрации напряжений.

6. Формулировка выводов проведенного анализа и перспектив дальнейших исследований.

**1. Постановка задачи и численное исследование.** Первым этапом исследования является определение и анализ спектра резонансных частот тела, состоящего из трех состыкованных однородных призматических трехмерных областей с различными упругими параметрами (рис.1).

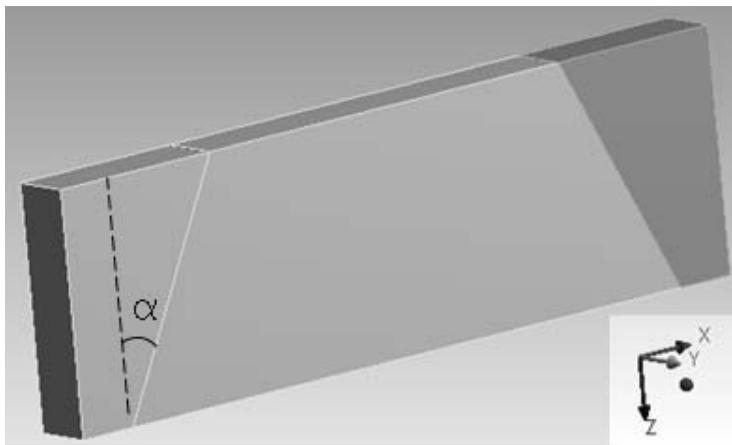


Рис. 1. Геометрия области

Численный анализ спектра частот основан на компьютерном моделировании и последующем модальном анализе в конечно-элементном комплексе ANSYS Mechanical 2019 R2. В данной работе приведен расчет свободных колебаний без учета предварительных напряжений.

Материал внешних наплавов областей – магний, материал внутренней области – конструкционная сталь (Structural Steel). Они, соответственно, представлены в библиотеке материалов программного комплекса. Тестовая модель внутренней области представляет собой прямоугольную пластину, линейный размер которой по оси  $x$  равен 0.22 м, по оси  $z$  – 0.08 м. Ширина внешних областей при

$\alpha=0^\circ - 0.02$  м, и в численном анализе  $\alpha$  может варьироваться, в связи с чем форма наплавков будет трапецией. Толщина призмы  $h$  изменяется в пределах от 0.001 м до 0.03 м.

При численном анализе определялись первые 14 собственных частот и собственных форм колебаний. Вид стыковки внутренней области и наплавков – жесткое сцепление. Граница контакта по предположению является гладкой для гладкой границы раздела областей. При исследовании волновых характеристик никакие условия закрепления на призматическую область не накладывалось. Поскольку при таких условиях данная область имеет шесть степеней свободы (три линейные и три угловые), то первые шесть собственных («твердотельных») форм игнорировались. Данные формы не имеют физического смысла при установившихся колебаниях.

На рисунке 2 представлена зависимость значений найденных резонансных частот от толщины призмы при  $\alpha=0$ . Если увеличивать толщину призматической области от 0.001 м до 0.03 м, то масса всего тела увеличивается и значения собственных частот растут. На рисунке 2 отчетливо видно, что скорость увеличения значения резонансной частоты растет в зависимости от её номера. Начиная от значения толщины  $h \approx 9 \cdot 10^{-3}$  м появляется постоянная частота  $\omega_r \approx 3100$  Гц, не изменяющаяся с дальнейшим увеличением толщины, которую можно считать частотой толщинного краевого резонанса и которая не зависит от толщины [6, 7]. Порядковый номер частоты  $\omega_r$  уменьшается с ростом значения  $h$  (линия 1 на рис. 2). При дальнейшем росте толщины появляется еще одна такая более высокая частота (линия 2 на рис. 2). Как показали дальнейшие расчеты, краевые эффекты на этой частоте выражены гораздо слабее.

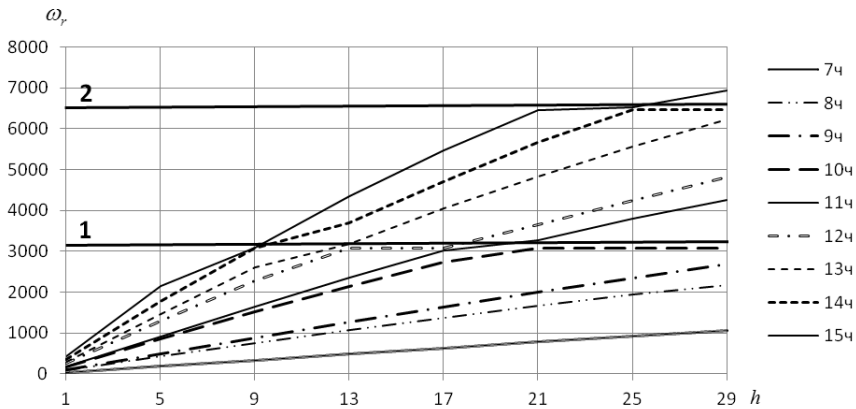


Рис. 2. Зависимость спектра собственных частот от толщины призмы

Наиболее действенным способом предотвращения разрушения конструкций при резонансе является выбор режима вибрационной нагрузки и геометрии тела, при которой собственная частота колебаний отличается от ее рабочей частоты. Наиболее актуален этот вывод для первых собственных форм и, особенно, для собственной формы колебаний на частоте краевого резонанса. Поэтому, пред-

### Трехмерный частотный анализ кусочно-неоднородной призмы

ставляется интересным качественным и количественным анализ распределения характеристик волнового поля в сингулярных зонах границы тела и в окрестности внутренних поверхностей раздела. Результаты численного анализа для кусочно-неоднородной трехмерной призмы представлены на рисунках 3–6, где изображены эпюры изменения собственных напряжений  $\sigma_x$  на внешней границе тела на различных частотах при  $\alpha=20^\circ$ .

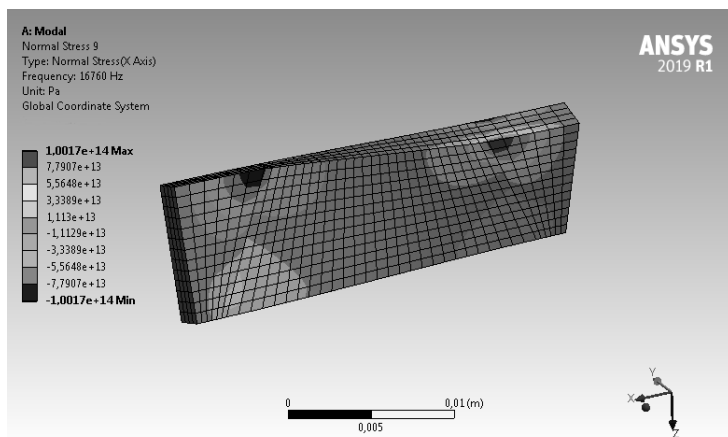


Рис. 3. Распределение напряжений  $\sigma_x$  на 3-й собственной частоте

Распределение напряжений существенно зависит от номера собственной частоты. Если на третьей собственной частоте практически отсутствуют зоны локальной концентрации напряжений, то уже на шестой эти зоны ярко выражены (локальные напряжения увеличиваются в 2,5 раза). Прочностный расчет на этой частоте обязательно должен учитывать максимальные значения растягивающих и сжимающих напряжений в зоне концентраторов напряжений.

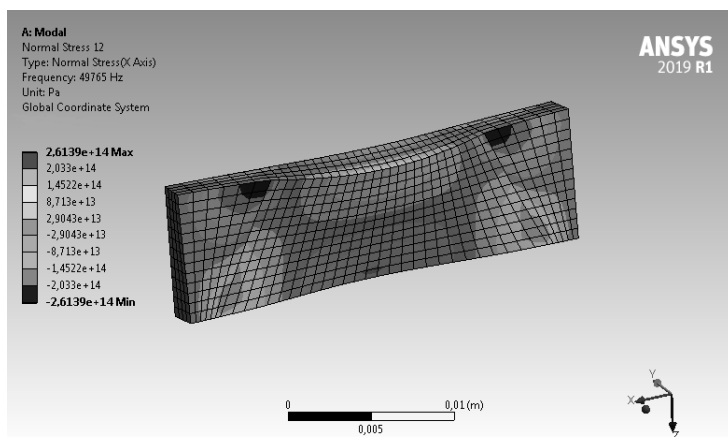


Рис. 4. Распределение напряжений  $\sigma_x$  на 6-й собственной частоте

Практически на всех частотах имеем несколько зон концентрации напряже-

ний, для которых обычные теории прочности не применимы. На основе анализа данных представленных рисунков, можно сделать вывод, что, если не учитывать локальную концентрацию напряжений, ошибка может достигать 800%.

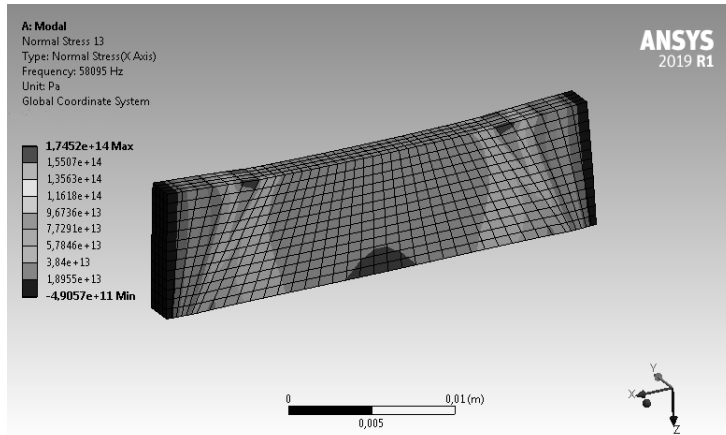


Рис. 5. Распределение напряжений  $\sigma_x$  на 7-й собственной частоте

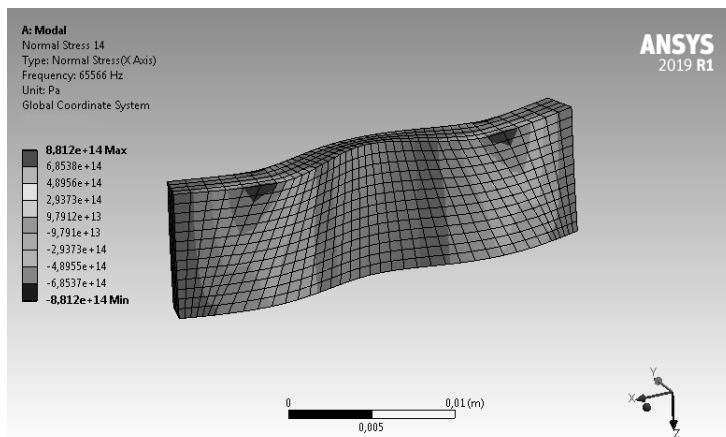


Рис. 6. Распределение напряжений  $\sigma_x$  на 8-й собственной частоте

Следует отметить, что с увеличением толщины призмы локальные и краевые динамические эффекты затухают. Это можно объяснить следствием общего увеличения массы тела. Однако, даже при большой массе тела, локальные динамические эффекты сохраняют выраженный характер. Особенно явно это прослеживается на частотах краевого резонанса.

Следующий этап численного анализа связан с изучением влияния геометрии стыкуемых областей, а именно угла асимметрии  $\alpha$  на величину и характер распределения локальных напряжений. На рисунках 7–8 представлено распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  на 7-й собственной частоте при  $\alpha=20^\circ$  и  $\alpha=50^\circ$ . При увеличении значения угла  $\alpha$  на некоторых частотах наблюдается

### Трехмерный частотный анализ кусочно-неоднородной призмы

ярко выраженная концентрация напряжений на внешней границе наплавки и у внешних вершин области, что так же следует рассматривать, как повод для конструктивных изменений подобных неоднородных элементов конструкций.

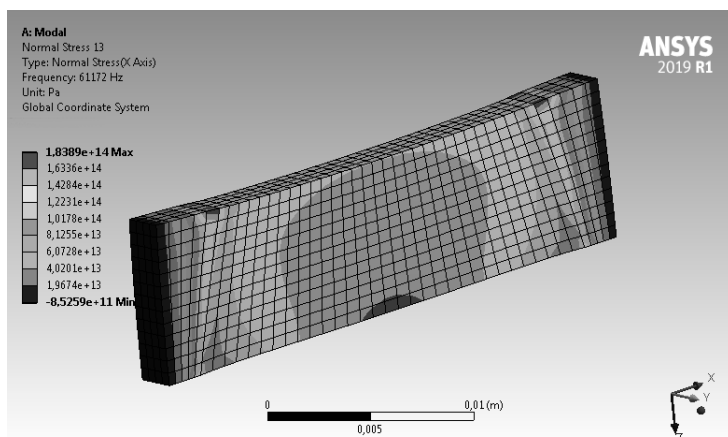


Рис. 7. Распределение напряжений  $\sigma_x$  на 7-й собственной частоте при  $\alpha=20^\circ$

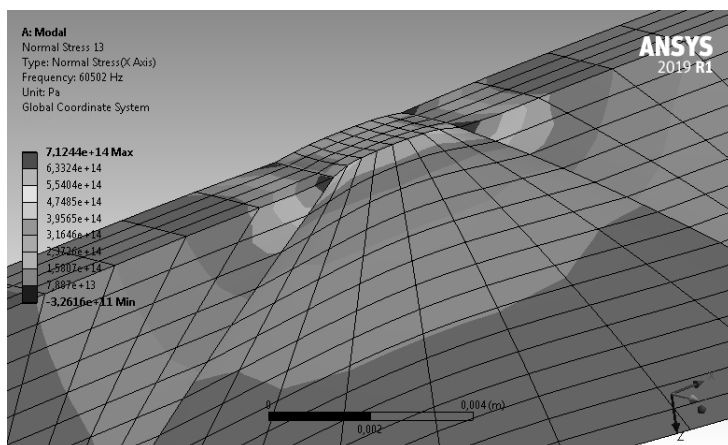


Рис. 8. Распределение напряжений  $\sigma_x$  на 7-й собственной частоте при  $\alpha=50^\circ$

Из данных на представленных рисунках следует, что с увеличением значения  $\alpha$  и, соответственно, с увеличением массы наплавки, интенсивность локальной концентрации напряжений существенно увеличивается. Наблюдается рост максимальных напряжений в 7 раз. Это нужно обязательно учитывать при проектировании неоднородных элементов конструкций.

При больших значениях  $\alpha$  наблюдается существенная концентрация напряжений по толщине области. На рисунке 9 представлено распределение поля напряжений  $\sigma_x$  на торце трехмерной области при  $\alpha=60^\circ$  и на частоте краевого резонанса  $\omega=66041$  Гц. Сжимающие напряжения достигают на этой частоте своей максимальной величины, значительно превышающие соответствующие значе-

ния на всем рассматриваемом частотном диапазоне. При малых значениях  $\alpha$  и на других резонансных частотах этот эффект отсутствует.

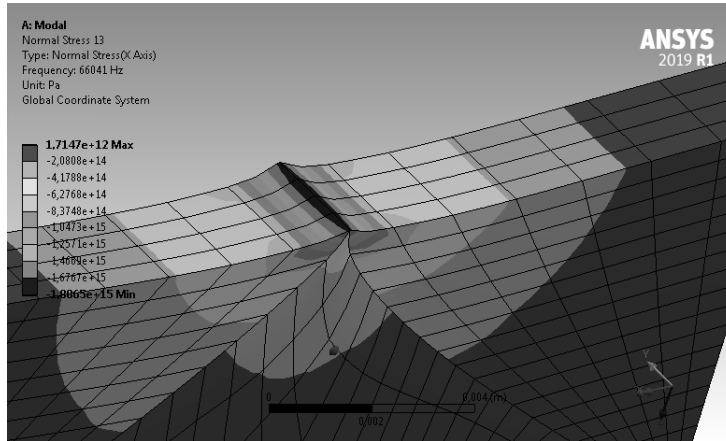


Рис. 9. Распределение напряжений  $\sigma_x$  на 7-й собственной частоте при  $\alpha=60^\circ$

**Выводы.** По данному исследованию справедливы следующие выводы.

1. С ростом толщины призматического тела наблюдается рост значений резонансных частот. Скорость роста значений частот возрастает с увеличением номера собственной частоты.

2. На спектре частот, начиная с некоторого значения толщины, появляются частоты краевого резонанса, характеризующиеся появлением плато в спектральной области. Это является причиной появления пограничных эффектов при установившихся колебаниях области.

3. Характер динамического напряженно-деформированного состояния при резонансных колебаниях существенно зависит от номера собственной частоты. С увеличением номера собственной частоты интенсивность локальной концентрации напряжений увеличивается. Но на высоких частотах локальные динамические эффекты затухают.

4. При увеличении массы наплавов и угла асимметрии области растет интенсивность локальной концентрации напряжений и появляются зоны интенсивности на торце области. Представленный модальный анализ свободных колебаний кусочно-неоднородной упругой призматической области является первым этапом динамического анализа, т.к. на его основе можно проводить анализ вынужденных колебаний и нестационарных задач.

В качестве перспектив дальнейших исследований можно предложить следующие направления исследования.

1. Изменение геометрии стыкуемых областей. Переход к анализу свободных колебаний несимметричных кусочно-неоднородных областей.

2. Рассмотрение различных сочетаний упругих параметров наплавов и внутренней области, что, конечно, скажется на величине интенсивности локальной концентрации напряжений. Возможно рассмотрение колебаний области, состо-

ящей из трех состыкованных призматических тел, каждое из которых имеет разные упругие характеристики.

3. Одним из направлений исследования может стать рассмотрение наплавков или внутренней области, выполненных из функционально-градиентных материалов.

4. Анализ собственных форм при таком значении угла асимметрии, при котором наплавки сойдутся. В этом случае возникнет стык трех областей. Анализ напряженного состояния в такой сингулярной точке несомненно представляет интерес.

1. *Ватульян А.О.* Об оценке законов радиальной неоднородности в цилиндрическом волноводе / А.О. Ватульян, В.О. Юров // Акуст. журн. – 2020. – Т. 66. – № 2. – С. 119–127.
2. *Вовк Л.П.* Особенности локальной концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред / Л.П. Вовк. – Донецк: Норд-Пресс, 2004. – 267 с.
3. *Вовк Л.П.* Анализ спектра резонансных частот неоднородной упругой призматической детали с учетом ее толщины / Л.П. Вовк, И.В. Даниленко, Е.С. Кисель // Вести автомобильно-дорожного института. – Горловка: АДИ ГОУ ВПО «ДОННТУ». – 2020. – № 3(34). – С. 20–26.
4. *Евдокимов А.А.* Гибридная численно-аналитическая схема для расчета дифракции упругих волн в локально неоднородных волноводах / А.А. Евдокимов, Н.В. Глушкова, Е.В. Глушков // Акуст. журн. – 2018. – Т. 64, – № 1. – С. 3–12.
5. *Вильде М.В.* Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах / М.В. Вильде, Ю.Д. Каплунов, Л.Ю. Коссович. – М.: Физматлит, 2010. – 279 с.
6. *Chuanyong Wang* Laser-generated Rayleigh wave for width gauging of subsurface lateral rectangular defects / Chuanyong Wang, Anyu Sun, Xiaoyu Yang, Bing-Feng Ju, Yongdong Pan // Journal of Applied Physics. – 2018. – No. 124(6) – P. 124–130.
7. *Sinclair G.B.* Stress Singularities in Classical Elasticity / G.B. Sinclair // I: Removal, Interpretation and Analysis. Applied Mechanics Reviews. – 2004. – V. 57, no. 4. – P. 251–297.

**I.A. Moiseyenko, L.P. Vovk, E.S. Kisel**

### **Three-dimensional frequency analysis of a piecewise-inhomogeneous prism.**

The article discusses a numerical-analytical algorithm for solving a spatial problem about steady-state oscillations of a piecewise inhomogeneous elastic region. Within the framework of modal analysis, a study was carried out of the spectrum of resonant frequencies and natural vibration modes depending on the elastic and geometric parameters of the region.

**Keywords:** *wave field, local stresses, frequency spectrum, edge resonance, rectangular prism, modal analysis.*

*Получено 06.10.2023*

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2023-4-14-22

EDN:GCWUEA

©2023. А.В. Глущенко<sup>1</sup>, М.Н. Пачева<sup>2</sup>, В.И. Сторожев<sup>3</sup>

## ВОЛНЫ ОБОБЩЕННОЙ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ОКРУЖНОМ НАПРАВЛЕНИИ ТОНКОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ

Осуществлено построение дисперсионных уравнений для продольно-сдвиговых нормальных волн обобщенного плоского напряженного состояния вдоль углового окружного направления в тонкой изотропной концентрической кольцевой пластине в замкнутой аналитической форме. Рассмотрены случаи задания на граничных контурах рассматриваемых пластин однотипных условий отсутствия механических напряжений либо жесткой заделки, а также сочетаний различных условий указанного типа на противоположных контурах. Спецификой полученных уравнений является одновременное вхождение искомого параметра волнового числа в выражения коэффициентных алгебраических множителей и в индексные выражения специальных цилиндрических функций. Приведены отдельные результаты численного анализа полученных дисперсионных соотношений.

**Ключевые слова:** *изотропные кольцевые пластины, динамическое обобщенное плоское напряженное состояние, окружные продольно-сдвиговые волны, свободные и жестко закрепленные границы, дисперсионные уравнения.*

**Введение и цели работы.** Закономерности процессов распространения волн деформаций в волноводах замкнутой кольцевой геометрии представляют теоретический интерес и востребованы многими научно-техническими областями.

<sup>1</sup>*Глущенко Андрей Викторович* – аспирант каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: andreyglushenko1@gmail.com.

*Glushchenko Andrey Viktorovich* – Postgraduate, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>2</sup>*Пачева Марина Николаевна* – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: pacheva.m.n@mail.ru.

*Pacheva Marina Nikolaevna* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>3</sup>*Сторожев Валерий Иванович* – доктор техн. наук, проф., зав. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: stvistvi@mail.ru.

*Storozhev Valeriy Ivanovich* – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.



ми прикладных проектных расчетов в механике машин и механизмов, строительной механике, ультразвуковой диагностике, акустоэлектронике [1–6]. В работах [7–10] представлены результаты теоретических исследований по проблемам распространения круговых и спирально-винтовых нормальных волн в протяженном полом изотропном цилиндрическом волноводе, а также получены отдельные результаты расчета мод нормальных волн кругового типа в полом упругом цилиндре со свободными граничными поверхностями. Исследования по данной проблематике, относящиеся к анализу эффектов распространения волн изгиба в тонких изотропных и трансверсально-изотропных однородных и составных кольцевых пластинах при различных краевых условиях на граничных контурах на основе прикладной теории, представлены в публикациях [11–16]. Они являются основой для дальнейшего расширения круга рассматриваемых актуальных аспектов в изучении дисперсионных, кинематических и энергетических свойств нормальных окружных волн деформаций в тонких пластинах.

В этой связи, целью излагаемых в настоящей работе исследований является получение дисперсионных соотношений для продольно-сдвиговых нормальных волн вдоль окружного углового направления в тонких изотропных кольцевых пластинах в рамках модели их динамического обобщенного плоского напряженного состояния [17].

**1. Основные соотношений рассматриваемой модели.** Рассматриваются волноводы замкнутой геометрии в виде тонких концентрических кольцевых пластин, занимающих в отнесенных к нормирующему параметру  $R_*$  полярных координатах  $Or\theta$  области  $S = \{R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ . В рамках модели динамического обобщенного плоского напряженного состояния пластин, анализ процессов их волнового деформирования может быть сведен к определению пары волновых потенциалов  $\tilde{\Phi}(r, \theta, t)$ ,  $\tilde{\Psi}(r, \theta, t)$  из уравнений

$$\begin{aligned} (D^2 - \rho R_*^2(\lambda + \mu)(4\mu(\lambda + \mu))^{-1} \partial_t^2) \tilde{\Phi}(r, \theta, t) &= 0, \\ (D^2 - \rho R_*^2 \mu^{-1} \partial_t^2) \tilde{\Psi}(r, \theta, t) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $D^2$  – двумерный оператор Лапласа в полярных координатах  $Or\theta$ ;  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  – параметры Ламе и плотность материала пластины;  $R_*$  – нормирующий параметр для величин с линейной размерностью расстояний, в данном случае – для радиусов граничных контуров  $R_j$ ;  $\partial_t = \partial/\partial t$ . При описании потенциалами гармонических нормальных волн с циклической частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$  вдоль кружного углового направления  $\theta$  в рассматриваемых пластинах

$$\tilde{\Phi}(r, \theta, t) = \Phi(r) \exp(-i(\omega t - k\theta)), \quad \tilde{\Psi}(r, \theta, t) = \Psi(r) \exp(-i(\omega t - k\theta)), \quad (2)$$

функции  $\Phi(r), \Psi(r)$ , в свою очередь, определяются из уравнений

$$(D^2 + \alpha^2)\Phi(r) = 0, \quad (D^2 + \beta^2)\Psi(r) = 0, \quad (3)$$

$$\alpha^2 = \rho R_*^2 \omega^2 (\lambda + 2\mu)(4\mu(\lambda + \mu))^{-1}, \quad \beta^2 = \rho R_*^2 \omega^2 \mu^{-1}, \quad (4)$$

и выражаются через специальные цилиндрические функции [18]

$$\Phi(r) = a_1 J_k(\alpha r) + a_2 Y_k(\alpha r), \quad \Psi(r) = b_1 J_k(\beta r) + b_2 Y_k(\beta r). \quad (5)$$

При этом совокупность характеристик динамического напряженно-деформированного состояния описывается соотношениями

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, t) &= (\partial_r \Phi(r) + r^{-1} i k \Psi(r)) \exp(-i(\omega t - k\theta)) = \\ &= (a_1((\alpha/2)(J_{k-1}(\alpha r) - J_{k+1}(\alpha r)) + a_2((\alpha/2)(Y_{k-1}(\alpha r) - Y_{k+1}(\alpha r)) + \\ &\quad + b_1 i k r^{-1} J_k(\beta r) + b_2 i k r^{-1} Y_k(\beta r)) \exp(-i(\omega t - k\theta)); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} u_\theta(r, \theta, t) &= (i k r^{-1} \Phi(r) - \partial_r \Psi(r)) \exp(-i(\omega t - k\theta)) = \\ &= (a_1 i k r^{-1} J_k(\alpha r) + a_2 i k r^{-1} Y_k(\alpha r) - b_1((\beta/2)(J_{k-1}(\beta r) - J_{k+1}(\beta r)) - \\ &\quad - b_2((\beta/2)(Y_{k-1}(\beta r) - Y_{k+1}(\beta r))) \exp(-i(\omega t - k\theta)); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta, t) &= \\ &= -2\mu((a\alpha^2 + r^{-1} \partial_r - r^{-2} k^2) \Phi(r) + i k (r^{-2} - r^{-1} \partial_r) \Psi(r)) \exp(-i(\omega t - k\theta)) = \\ &= -2\mu(a_1(r^{-1}(\alpha/2)(J_{k-1}(\alpha r) - J_{k+1}(\alpha r)) + (a\alpha^2 - r^{-2} k^2) J_k(\alpha r)) + \\ &\quad + a_2(r^{-1}(\alpha/2)(Y_{k-1}(\alpha r) - Y_{k+1}(\alpha r)) + (a\alpha^2 - r^{-2} k^2) Y_k(\alpha r)) + \\ &\quad + b_1(i k r^{-2} J_k(\beta r) - i k r^{-1}(\beta/2)(J_{k-1}(\beta r) - J_{k+1}(\beta r)) + \\ &\quad + b_2(i k r^{-2} Y_k(\beta r) - i k r^{-1}(\beta/2)(Y_{k-1}(\beta r) - Y_{k+1}(\beta r))) \exp(-i(\omega t - k\theta)); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, t) &= \\ &= 2\mu(((1-a)\alpha^2 + r^{-1} \partial_r - r^{-2} k^2) \Phi(r) + i k (r^{-2} - r^{-1} \partial_r) \Psi(r)) \exp(-i(\omega t - k\theta)) = \\ &= 2\mu(a_1(r^{-1}(\alpha/2)(J_{k-1}(\alpha r) - J_{k+1}(\alpha r)) + ((1-a)\alpha^2 - r^{-2} k^2) J_k(\alpha r)) + \\ &\quad + a_2(r^{-1}(\alpha/2)(Y_{k-1}(\alpha r) - Y_{k+1}(\alpha r)) + ((1-a)\alpha^2 - r^{-2} k^2) Y_k(\alpha r)) + \\ &\quad + b_1(i k r^{-2} J_k(\beta r) - i k r^{-1}(\beta/2)(J_{k-1}(\beta r) - J_{k+1}(\beta r)) + \\ &\quad + b_2(i k r^{-2} Y_k(\beta r) - i k r^{-1}(\beta/2)(Y_{k-1}(\beta r) - Y_{k+1}(\beta r))) \exp(-i(\omega t - k\theta)); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}(r, \theta, t) &= \\ &= 2\mu((i k r^{-1} \partial_r - i k r^{-2}) \Phi(r) + (\beta^2/2 - r^{-2} k^2 + r^{-1} \partial_r) \Psi(r)) \exp(-i(\omega t - k\theta)) = \\ &= 2\mu(a_1(i k r^{-1}(\alpha/2)(J_{k-1}(\alpha r) - J_{k+1}(\alpha r)) - r^{-2} i k J_k(\alpha r)) + \\ &\quad + a_2(i k r^{-1}(\alpha/2)(Y_{k-1}(\alpha r) - Y_{k+1}(\alpha r)) - r^{-2} i k Y_k(\alpha r)) + \\ &\quad + b_1(i k r^{-1}(\beta/2)(J_{k-1}(\beta r) - J_{k+1}(\beta r)) - r^{-2} i k J_k(\beta r)) + \\ &\quad + b_2(i k r^{-1}(\beta/2)(Y_{k-1}(\beta r) - Y_{k+1}(\beta r)) - r^{-2} i k Y_k(\beta r)) \exp(-i(\omega t - k\theta)). \end{aligned} \quad (10)$$

**2. Формулировки дисперсионных соотношений.** Получаемые дисперсионные уравнения являются следствиями оговариваемых однородных краевых условий на граничных контурах рассматриваемых пластин при подстановке в них выражений (6)–(10). Рассматриваемыми комбинированными вариантами

краевых условий являются задаваемые в различных сочетаниях на внутреннем и внешнем краях пластины условия свободного от напряжений контура

$$(\sigma_{rr}(r, \theta, t))_{r=R_j} = 0, \quad (\sigma_{r\theta}(r, \theta, t))_{r=R_j} = 0, \quad (11)$$

жестко закрепленного контура

$$(u_r(r, \theta, t))_{r=R_j} = 0, \quad (u_\theta(r, \theta, t))_{r=R_j} = 0, \quad (12)$$

либо контура с тонким абсолютно гибким нерастяжимым покрытием

$$(\sigma_{rr}(r, \theta, t))_{r=R_j} = 0, \quad (u_\theta(r, \theta, t))_{r=R_j} = 0. \quad (13)$$

Во всех указанных случаях дисперсионное соотношение представляет собой равенство нулю функционального определителя матрицы однородной системы линейных алгебраических уравнений четвертого порядка относительно неопределенных постоянных  $a_1, a_2, b_1, b_2$

$$F(\omega, k) = \det \|\vartheta_{pq}(\omega, k)\| = 0 \quad (p, q = \overline{1, 4}). \quad (14)$$

В частности, в случае волновода с закрепленными внутренним и внешним контурами

$$\begin{aligned} \vartheta_{11} &= (\alpha/2)(J_{k-1}(\alpha R_1) - J_{k+1}(\alpha R_1)), \\ \vartheta_{12} &= (\alpha/2)(Y_{k-1}(\alpha R_1) - Y_{k+1}(\alpha R_1)), \\ \vartheta_{13} &= ikR_1^{-1}J_k(\beta R_1), \quad \vartheta_{14} = ikR_1^{-1}Y_k(\beta R_1); \\ \vartheta_{21} &= ikR_1^{-1}J_k(\alpha R_1), \quad \vartheta_{22} = ikR_1^{-1}Y_k(\alpha R_1), \\ \vartheta_{23} &= -(\beta/2)(J_{k-1}(\beta R_1) - J_{k+1}(\beta R_1)), \\ \vartheta_{24} &= -(\beta/2)(Y_{k-1}(\beta R_1) - Y_{k+1}(\beta R_1)); \\ \vartheta_{31} &= (\alpha/2)(J_{k-1}(\alpha R_2) - J_{k+1}(\alpha R_2)), \\ \vartheta_{32} &= (\alpha/2)(Y_{k-1}(\alpha R_2) - Y_{k+1}(\alpha R_2)), \\ \vartheta_{33} &= ikR_2^{-1}J_k(\beta R_2), \quad \vartheta_{34} = ikR_2^{-1}Y_k(\beta R_2); \\ \vartheta_{41} &= ikR_2^{-1}J_k(\alpha R_2), \quad \vartheta_{42} = ikR_2^{-1}Y_k(\alpha R_2), \\ \vartheta_{43} &= -(\beta/2)(J_{k-1}(\beta R_2) - J_{k+1}(\beta R_2)), \\ \vartheta_{44} &= -(\beta/2)(Y_{k-1}(\beta R_2) - Y_{k+1}(\beta R_2)). \end{aligned} \quad (15)$$

В случае волновода в виде кольцевой пластины со свободным внутренним и закрепленным внешним контурами

$$\begin{aligned}
\vartheta_{11} &= R_1^{-1}(\alpha/2)(J_{k-1}(\alpha R_1) - J_{k+1}(\alpha R_1)) + (a\alpha^2 - R_1^{-2}k^2)J_k(\alpha R_1), \\
\vartheta_{12} &= R_1^{-1}(\alpha/2)(Y_{k-1}(\alpha R_1) - Y_{k+1}(\alpha R_1)) + (a\alpha^2 - R_1^{-2}k^2)Y_k(\alpha R_1), \\
\vartheta_{13} &= ikR_1^{-2}J_k(\beta R_1) - ikR_1^{-1}(\beta/2)(J_{k-1}(\beta R_1) - J_{k+1}(\beta R_1)), \\
\vartheta_{14} &= ikR_1^{-2}Y_k(\beta R_1) - ikR_1^{-1}(\beta/2)(Y_{k-1}(\beta R_1) - Y_{k+1}(\beta R_1)); \\
\vartheta_{21} &= ikR_1^{-1}(\alpha/2)(J_{k-1}(\alpha R_1) - J_{k+1}(\alpha R_1)) - R_1^{-2}ikJ_k(\alpha R_1), \\
\vartheta_{22} &= ikR_1^{-1}(\alpha/2)(Y_{k-1}(\alpha R_1) - Y_{k+1}(\alpha R_1)) - R_1^{-2}ikY_k(\alpha R_1), \\
\vartheta_{23} &= ikR_1^{-1}(\beta/2)(J_{k-1}(\beta R_1) - J_{k+1}(\beta R_1)) - R_1^{-2}ikJ_k(\beta R_1), \\
\vartheta_{24} &= ikR_1^{-1}(\beta/2)(Y_{k-1}(\beta R_1) - Y_{k+1}(\beta R_1)) - R_1^{-2}ikY_k(\beta R_1); \\
\vartheta_{31} &= (\alpha/2)(J_{k-1}(\alpha R_2) - J_{k+1}(\alpha R_2)), \quad \vartheta_{32} = (\alpha/2)(Y_{k-1}(\alpha R_2) - Y_{k+1}(\alpha R_2)), \\
\vartheta_{33} &= ikR_2^{-1}J_k(\beta R_2), \quad \vartheta_{34} = ikR_2^{-1}Y_k(\beta R_2); \\
\vartheta_{41} &= ikR_2^{-1}J_k(\alpha R_2), \quad \vartheta_{42} = ikR_2^{-1}Y_k(\alpha R_2), \\
\vartheta_{43} &= -(\beta/2)(J_{k-1}(\beta R_2) - J_{k+1}(\beta R_2)), \quad \vartheta_{44} = -(\beta/2)(Y_{k-1}(\beta R_2) - Y_{k+1}(\beta R_2)).
\end{aligned} \tag{16}$$

В случае волновода в виде кольцевой пластины с закрепленным внутренним и свободным внешним контурами

$$\begin{aligned}
\vartheta_{11} &= (\alpha/2)(J_{k-1}(\alpha R_1) - J_{k+1}(\alpha R_1)), \\
\vartheta_{12} &= (\alpha/2)(Y_{k-1}(\alpha R_1) - Y_{k+1}(\alpha R_1)), \\
\vartheta_{13} &= ikR_1^{-1}J_k(\beta R_1), \quad \vartheta_{14} = ikR_1^{-1}Y_k(\beta R_1); \\
\vartheta_{21} &= ikR_1^{-1}J_k(\alpha R_1), \quad \vartheta_{22} = ikR_1^{-1}Y_k(\alpha R_1), \\
\vartheta_{23} &= -(\beta/2)(J_{k-1}(\beta R_1) - J_{k+1}(\beta R_1)), \\
\vartheta_{24} &= -(\beta/2)(Y_{k-1}(\beta R_1) - Y_{k+1}(\beta R_1)); \\
\vartheta_{31} &= R_2^{-1}(\alpha/2)(J_{k-1}(\alpha R_2) - J_{k+1}(\alpha R_2)) + (a\alpha^2 - R_2^{-2}k^2)J_k(\alpha R_2), \\
\vartheta_{32} &= R_2^{-1}(\alpha/2)(Y_{k-1}(\alpha R_2) - Y_{k+1}(\alpha R_2)) + (a\alpha^2 - R_2^{-2}k^2)Y_k(\alpha R_2), \\
\vartheta_{33} &= ikR_2^{-2}J_k(\beta R_2) - ikR_2^{-1}(\beta/2)(J_{k-1}(\beta R_2) - J_{k+1}(\beta R_2)), \\
\vartheta_{34} &= ikR_2^{-2}Y_k(\beta R_2) - ikR_2^{-1}(\beta/2)(Y_{k-1}(\beta R_2) - Y_{k+1}(\beta R_2)); \\
\vartheta_{41} &= ikR_2^{-1}(\alpha/2)(J_{k-1}(\alpha R_2) - J_{k+1}(\alpha R_2)) - R_2^{-2}ikJ_k(\alpha R_2), \\
\vartheta_{42} &= ikR_2^{-1}(\alpha/2)(Y_{k-1}(\alpha R_2) - Y_{k+1}(\alpha R_2)) - R_2^{-2}ikY_k(\alpha R_2), \\
\vartheta_{43} &= ikR_2^{-1}(\beta/2)(J_{k-1}(\beta R_2) - J_{k+1}(\beta R_2)) - R_2^{-2}ikJ_k(\beta R_2), \\
\vartheta_{44} &= ikR_2^{-1}(\beta/2)(Y_{k-1}(\beta R_2) - Y_{k+1}(\beta R_2)) - R_2^{-2}ikY_k(\beta R_2).
\end{aligned} \tag{17}$$

В случае волновода с закрепленным внутренним и имеющим тонкое гибкое нерастяжимое покрытие внешним контурами

$$\begin{aligned}
\vartheta_{11} &= (\alpha/2)(J_{k-1}(\alpha R_1) - J_{k+1}(\alpha R_1)), \quad \vartheta_{12} = (\alpha/2)(Y_{k-1}(\alpha R_1) - Y_{k+1}(\alpha R_1)), \\
\vartheta_{13} &= ikR_1^{-1}J_k(\beta R_1), \quad \vartheta_{14} = ikR_1^{-1}Y_k(\beta R_1); \\
\vartheta_{21} &= ikR_1^{-1}J_k(\alpha R_1), \quad \vartheta_{22} = ikR_1^{-1}Y_k(\alpha R_1), \\
\vartheta_{23} &= -(\beta/2)(J_{k-1}(\beta R_1) - J_{k+1}(\beta R_1)), \quad \vartheta_{24} = -(\beta/2)(Y_{k-1}(\beta R_1) - Y_{k+1}(\beta R_1));
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 \vartheta_{31} &= R_2^{-1}(\alpha/2)(J_{k-1}(\alpha R_2) - J_{k+1}(\alpha R_2)) + (a\alpha^2 - R_2^{-2}k^2)J_k(\alpha R_2), \\
 \vartheta_{32} &= R_2^{-1}(\alpha/2)(Y_{k-1}(\alpha R_2) - Y_{k+1}(\alpha R_2)) + (a\alpha^2 - R_2^{-2}k^2)Y_k(\alpha R_2), \\
 \vartheta_{33} &= ikR_2^{-2}J_k(\beta R_2) - ikR_2^{-1}(\beta/2)(J_{k-1}(\beta R_2) - J_{k+1}(\beta R_2)), \\
 \vartheta_{34} &= ikR_2^{-2}Y_k(\beta R_2) - ikR_2^{-1}(\beta/2)(Y_{k-1}(\beta R_2) - Y_{k+1}(\beta R_2)); \\
 \vartheta_{41} &= ikR_2^{-1}J_k(\alpha R_2), \quad \vartheta_{42} = ikR_2^{-1}Y_k(\alpha R_2), \\
 \vartheta_{43} &= -(\beta/2)(J_{k-1}(\beta R_2) - J_{k+1}(\beta R_2)), \quad \vartheta_{44} = -(\beta/2)(Y_{k-1}(\beta R_2) - Y_{k+1}(\beta R_2)).
 \end{aligned}$$

Параметр  $a$  в формулах (15)–(17) имеет вид

$$a = 2(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu).$$

Соотношения (4), (14)–(17) являются базовыми для проведения численных исследований дисперсионных свойств волн рассматриваемого типа. Расчет кинематических и силовых характеристик волн изучаемого типа для точки  $(\omega_m, k_m)$  из некоторой рассчитанной моды дисперсионного спектра может быть реализован с использованием соотношений (6)–(10) при значениях вышеуказанных параметров круговой частоты и волнового числа, в которых

$$\begin{aligned}
 a_{1m} &= \det \|\vartheta_{pq}(\omega_m, k_m)\| \quad (p, q = \overline{2, 4}), \\
 a_{2m} &= -\det \|\vartheta_{pq}(\omega_m, k_m)\| \quad (p = \overline{2, 4}; q = 1, q = 3, 4), \\
 b_{1m} &= \det \|\vartheta_{pq}(\omega_m, k_m)\| \quad (p = \overline{2, 4}; q = 1, 2; q = 4), \\
 b_{2m} &= -\det \|\vartheta_{pq}(\omega_m, k_m)\| \quad (p = \overline{2, 4}; q = \overline{1, 3}).
 \end{aligned} \tag{19}$$

**3. Результаты вычислительных экспериментов.** Вычислительные эксперименты по расчету действительных корней дисперсионного уравнения (13) реализованы на базе разработки специализированного программного приложения применительно к варианту тонкой кольцевой пластины с закрепленными внутренним и внешним контурами из меди с параметрами Ламе  $\lambda = 9.12 \cdot 10^{10}$  Па,  $\mu = 4.70 \cdot 10^{10}$  Па и плотностью  $\rho = 8.96 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> при задании элементов дисперсионного определителя в виде (14). Для расчетов выбирались значения параметров размеров пластины  $\tilde{R}_1 = 0.4$  м,  $\tilde{R}_2 = 0.8$  м и  $\tilde{R}_1 = 0.2$  м,  $\tilde{R}_2 = 0.8$  м.

В случае выбора значения нормирующего параметра  $R_* = 1$  м, величины параметров  $a$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  для волн циклической частоты  $\omega$  [рад/с] в рассматриваемой пластине составляют

$$a = 1.49, \quad \alpha = 2.53 \cdot 10^{-4}\omega, \quad \beta = 4.37 \cdot 10^{-4}\omega.$$

На рисунке 1 представлены результаты расчета низшей действительной моды исследуемого спектра для пластины с закрепленными внутренним и внешним контурами при  $\tilde{R}_1 = 0.4$  м,  $\tilde{R}_2 = 0.8$  м, а на рисунке 2 – для пластины с  $\tilde{R}_1 = 0.2$  м,  $\tilde{R}_2 = 0.8$  м. Найденные значения ненулевых частот записаны данной

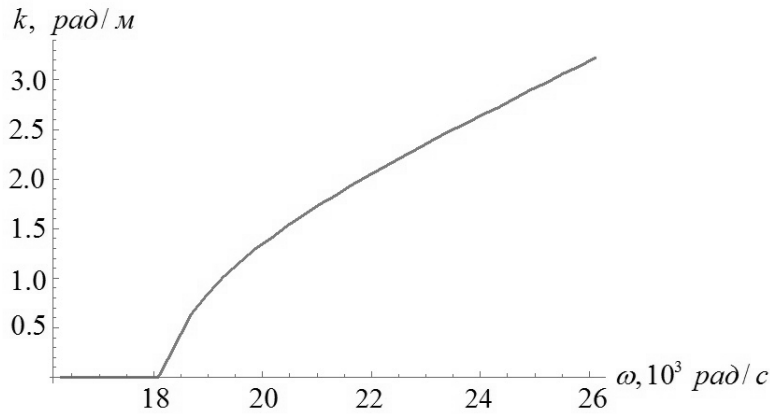


Рис. 1. Низшая действительная мода дисперсионного спектра окружных нормальных волн обобщенной плоской деформации для кольцевой пластины с закрепленными граничными контурами  $\tilde{R}_1 = 0.4$  м,  $\tilde{R}_2 = 0.8$  м

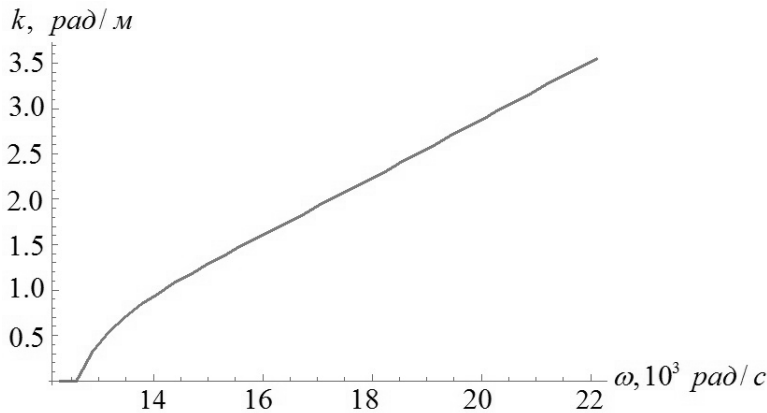


Рис. 2. Низшая действительная мода дисперсионного спектра окружных нормальных волн обобщенной плоской деформации для кольцевой пластины с закрепленными граничными контурами  $\tilde{R}_1 = 0.2$  м,  $\tilde{R}_2 = 0.8$  м.

моды соответственно составляют 18110 рад/с в первом случае и 12680 рад/с во втором случае задания размеров пластины.

Как следует из рисунков, рассчитанные ветви характеризуются существенной мерой дисперсии в достаточно компактных окрестностях частот запираия, и при дальнейшем наращивании частотного параметра траектории приобретают выраженный асимптотический характер.

**Выводы.** В результате проведенных исследований получены дисперсионные соотношения для продольно-сдвиговых нормальных волн, распространяющихся вдоль окружного углового направления в тонких изотропных кольцевых пластинах. Исследуемые волновые процессы описываются в рамках модели их динамического обобщенного плоского напряженного состояния. Представле-

ны аналитические выражения для элементов функциональных дисперсионных определителей четвертого порядка применительно к случаям пластин с закрепленными внутренним и внешним контурами, пластин со свободным внутренним и закрепленным внешним контурами, с закрепленным внутренним и свободным внешним контурами, с закрепленным внутренним и имеющим тонкое гибкое нерастяжимое покрытие внешним контурами. Представляемая методика апробирована применительно к тонкой кольцевой пластине из меди с закрепленными внутренним и внешним контурами; для различных сочетаний внутреннего и внешнего радиусов рассчитаны низшие действительные ветви дисперсионных спектров с найденными ненулевыми частотами запертия.

Полученные результаты являются основой для дальнейшего исследования дисперсионных, кинематических и энергетических характеристик окружных нормальных волн обобщенного плоского напряженного состояния в кольцевых и составных кольцевых пластинах.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 1023030100040-4- 1.1.2;2.3.1).

1. *Мелешко В.В.* Упругие волноводы: история и современность / В.В. Мелешко, А.А. Бондаренко, С.А. Довгий, А.Н. Трофимчук, Г.Я. Ванн Хейст // Математические методы и физико-механические поля. – 2008. – Т.51, № 2. – С. 86–104.
2. *Ватульян А.О.* Исследование волновых процессов в упругих топографических волноводах / А.О. Ватульян, Л.И. Паринаова // Акуст. журн. – 2021. – Т. 67, № 2. – С. 119–125.
3. Неразрушающий контроль и диагностика. Справочник / под ред. В.В. Клюева. – М.: Машиностроение, 2005. – 656 с.
4. *Шутилов В.А.* Основы физики ультразвука / В.А. Шутилов – Л.: Изд.-во Ленинградского университета, 1980. – 280 с.
5. *Joseph L.R.* Ultrasonic waves in Solid Media / L.R. Joseph. – Cambridge: University Press, 1999. – 121 p.
6. *Речицкий В.И.* Акустоэлектронные радиокомпоненты. Схемы, топология, конструкции / В.И. Речицкий. – М.: Радио и связь, 1987. – 192 с.
7. *Бреховских Л.М.* О поверхностных волнах в твердом теле, удерживаемых кривизной границы / Л.М. Бреховских // Акуст. журн. – 1960. – Т. 13, № 4. – С. 541–554.
8. *Голубева Е.В.* О винтовых поверхностных волнах на упругом цилиндре / Е.В. Голубева // Акуст. журн. – 1986. – Т. 22, № 3. – С. 385–386.
9. *Тютекин В.В.* Нормальные волны кругового типа в полом упругом цилиндре / В.В. Тютекин // Акуст. журн. – 2004. – Т. 50, № 6 – С. 855–864.
10. *Тютекин В.В.* Круговые и спирально-винтовые нормальные волны цилиндрического волновода. Спиральные волны в свободном пространстве / В.В. Тютекин // Акуст. журн. – 2006. – Т. 52, № 4 – С. 549–555.
11. *Тютекин В.В.* Волноводные свойства плоской кольцевой пластины. I. Изгибные волны / В.В. Тютекин // Акуст. журн. – 2003. – Т. 49, № 6 – С. 843–851.
12. *Болнокин В.Е.* Изгибные волны в окружном направлении кольцевой трансверсально-изотропной пластины с закрепленными краями / В.Е. Болнокин, А.В. Глущенко, Л.В. Дубяго, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2021. – №4 (77). – С. 35–43.
13. *Болнокин В.Е.* Изгибные волны в окружном направлении кольцевой трансверсально-изотропной пластины с шарнирно опертыми граничными контурами / В.Е. Болнокин, А.В. Глущенко, Л.В. Дубяго, В.И. Сторожев // Механика твердого тела. – 2021. – Вып. 51. – С. 114–121.

14. Дубяго Л.В. Дисперсионный спектр упругих волн изгиба вдоль окружного направления в тонкой изотропной кольцевой пластине с жестко закрепленными либо шарнирно опертыми краями / Л.В. Дубяго, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2019. – № 4 (69). – С. 48–56.
15. Болнокин В.Е. Моды изгибных упругих волн в окружном направлении изотропной кольцевой пластины на упругом основании / В.Е. Болнокин, В.И. Сторожев, Л.В. Дубяго // Донецкие чтения 2020: Материалы V Международной научной конференции (Донецк, 17-18 ноября 2020 г.). – Том 1: Физико-математические и технические науки. Часть 1. – Донецк: ДонНУ, 2020. – С. 35–38.
16. Глущенко А.В. Окружные нормальные изгибные волны в кольцевой пластине с двумя разнородными концентрическими составляющими / А.В. Глущенко, Л.В. Дубяго, С.В. Сторожев, В.А. Шалдырван // Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки. – 2023. – № 1. – С. 12–20. – EDN QXXDZO.
17. Гузь А.Н. Дифракция упругих волн / А.Н. Гузь, В.Д. Кубенко, М.А. Черевко. – К.: Наукова думка, 1978. – 308 с.
18. Корнев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций / Б.Г. Корнев – М.: Наука, 1971. – 288 с.

**A.V. Glushchenko, M.N. Pacheva, V.I. Storozhev**

**Waves of generalized plane strain in the circular direction of a thin ring plate.**

The construction of dispersion equations for longitudinal-shear normal waves of a generalized plane stress state along the angular circumferential direction in a thin isotropic concentric annular plate in a closed analytical form has been carried out. Cases of setting the same type of conditions for the absence of mechanical stresses or rigid embedding on the boundary contours of the plates under consideration, as well as combinations of various conditions of the specified type on opposite contours, are considered. The specificity of the resulting equations is the simultaneous inclusion of the desired wave number parameter in the expressions of coefficient algebraic factors and in the index expressions of special cylindrical functions. Separate results of numerical analysis of the obtained dispersion relations are presented.

**Keywords:** *isotropic annular plates, dynamic generalized plane stress state, circumferential longitudinal shear waves, free and rigid boundaries, dispersion equations.*

*Получено 19.10.2023*



УДК 539.3:534.1  
doi:10.24412/0136-4545-2023-4-23-30  
EDN:YFWFOO



©2023. Д.С. Карасев<sup>1</sup>, С.В. Сторожев<sup>2</sup>, В.А. Шалдырван<sup>3</sup>

## СДВИГОВЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОМ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОМ СЛОЕ С РАЗНОТИПНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ МЕХАНИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

Предложен итерационный алгоритм численно-аналитического интегрирования системы уравнений в частных производных, описывающей распространение связанных нормальных электроупругих волн сдвигового типа в слое функционально-градиентной пьезокерамики с переменными по толщине разнотипными экспоненциальными зависимостями для параметра плотности и для параметров деформационных и электрических свойств материала. Базисные решения волновых уравнений получены в форме векторных экспоненциальных рядов. Сформулированы дисперсионные уравнения для исследуемых нормальных волн при отдельных вариантах электромеханических краевых условий на гранях слоя.

**Ключевые слова:** слой функционально-градиентной пьезокерамики, поперечная экспоненциальная неоднородность, различие изменяемостей плотности и электромеханических свойств, нормальные сдвиговые электроупругие волны, динамические уравнения электромеханического деформирования, базисные частные решения, алгоритм последовательных приближений, экспоненциальные ряды с векторными коэффициентами, дисперсионные уравнения.

**Введение и цели исследования.** Исследование вопросов о спектрах нормальных электроупругих волн в волноводах из новых поколений создаваемых

<sup>1</sup>Карасев Дмитрий Сергеевич – аспирант каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: vektor8899@ya.ru.

Карасев Дмитрий Сергеевич – Postgraduate, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>2</sup>Сторожев Сергей Валериевич – доктор техн. наук, проф. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.v.storozhev@donnasa.ru.

Storozhev Sergey Valerievich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

<sup>3</sup>Шалдырван Валерий Анатольевич – доктор физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: shaldyrvan.v.a@mail.ru.

Shaldyrvan Valery Anatolievich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

с применением аддитивных технологий функционально-градиентных пьезокерамических материалов является актуальной задачей в связи с прикладными конструкторскими расчетами при проектировании акустоэлектронных радиокомпонентов [1–5]. Здесь можно констатировать, что наряду с применением в этих целях универсальных стандартизированных приложений для конечно-элементного расчетного анализа соответствующих расчетных моделей, большой интерес представляет дальнейшее развитие численно-аналитических методов анализа математических моделей волновых процессов в непрерывно-неоднородных пьезоактивных средах [6–10], в том числе разработка все более эффективных алгоритмов исследования волновых процессов в функционально-градиентных пьезоэлектрических волноводах с расширенными возможностями верификации получаемых результатов. В свою очередь, важным элементом в развитии методик расчетного анализа моделей распространения электроупругих волн в неоднородных пьезоэлектрических средах является учет различий в значениях параметров достаточно широко используемых в современных исследованиях экспоненциальных функциональных [11–13] зависимостей, описывающих поперечную неоднородность деформационных и электрических свойств пьезоактивных материалов и их неоднородную по толщине плотность.

В контексте данных соображений, цель реализуемых в настоящей работе исследований заключается в разработке численно-аналитического итерационного алгоритма построения базисных векторных частных решений систем дифференциальных уравнений, описывающих распространение связанных стационарных нормальных электроупругих волн сдвигового типа в слое функционально-градиентной пьезокерамики с переменными по толщине и задаваемыми разнотипными экспоненциальными зависимостями для параметра плотности и параметров деформационных и электрических свойств материала.

**1. Система основных соотношений рассматриваемой модели.** Рассматривается занимающий область  $V = \{x_1 \in [-h, h], (x_2, x_3) \in R^2\}$  в координатном пространстве  $Ox_1x_2x_3$  слой функционально-градиентного линейно-поляризованного пьезокерамического материала класса *btt* гексагональной системы с осью поляризации  $Ox_3$ , обладающего переменными вдоль координаты по толщине слоя физико-механическими свойствами. Система уравнений связанного динамического деформирования пьезоэлектриков, описывающая распространение вдоль оси  $Ox_2$  в рассматриваемом слое нормальных сдвиговых поляризованных вдоль координатного направления  $Ox_3$  в плоскости слоя электроупругих *SH*-волн, может быть записана в форме

$$\partial_1\sigma_{13} + \partial_2\sigma_{23} - \rho(x_1)\ddot{u}_3 = 0, \quad \partial_1D_1 + \partial_2D_2 = 0, \quad \partial_j = \partial/\partial x_j \quad (j = \overline{1,2}); \quad (1)$$

$$\sigma_{13} = c_{44}(x_1)\partial_1u_3 + e_{15}(x_1)\partial_1\phi, \quad \sigma_{23} = c_{44}(x_1)\partial_2u_3 + e_{15}(x_1)\partial_2\phi, \quad (2)$$

$$D_1 = -\varepsilon_{11}(x_1)\partial_1\phi + e_{15}(x_1)\partial_1u_3, \quad D_2 = -\varepsilon_{11}(x_1)\partial_2\phi + e_{15}(x_1)\partial_2u_3, \quad (3)$$

где  $u_3(x_1, x_2, t)$ ,  $\phi(x_1, x_2, t)$  – соответственно комплексные функции динамических упругих смещений и потенциала квазистатического электрического поля в

SH-волне;  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$  – комплексные функции сдвиговых механических напряжений в исследуемых волнах;  $D_1$ ,  $D_2$  – комплексные функции индукции квазистатического электрического поля;  $c_{ij}(x_1)$ ,  $e_{ij}(x_1)$ ,  $\varepsilon_{ij}(x_1)$ ,  $\rho(x_1)$  – соответственно экспоненциальные функциональные характеристики распределений модулей упругости, параметра плотности, пьезоэлектрических и диэлектрических параметров поперечно-неоднородного пьезокерамического материала по толщине слоя, описываемые соотношениями вида

$$c_{ij}(x_1) = c_{ij0} \exp(\lambda x_1), \quad e_{ij}(x_1) = e_{ij0} \exp(\lambda x_1), \quad \varepsilon_{ij}(x_1) = \varepsilon_{ij0} \exp(\lambda x_1); \quad (4)$$

$$\rho(x_1) = \rho_{0\lambda} \exp(\lambda x_1) + \rho_{0\mu} \exp(\mu x_1). \quad (5)$$

Система соотношений (1)–(3) дополняется следующими частными вариантами однородных электромеханических краевых условий на плоских гранях слоя:

– грани свободны от механических усилий и имеют нанесенные тонкие короткозамкнутые электроды

$$(\sigma_{13}(x_1, x_2, t))_{x_1=\pm h} = 0, \quad (\phi(x_1, x_2, t))_{x_1=\pm h} = 0; \quad (6)$$

– грани закреплены и имеют нанесенные тонкие короткозамкнутые электроды

$$(u_3(x_1, x_2, t))_{x_1=\pm h} = 0, \quad (\phi(x_1, x_2, t))_{x_1=\pm h} = 0; \quad (7)$$

– грани закреплены и контактируют с вакуумом (разреженным газом)

$$(u_3(x_1, x_2, t))_{x_1=\pm h} = 0, \quad (D_1(x_1, x_2, t))_{x_1=\pm h} = 0. \quad (8)$$

При подстановке соотношений (2), (3) в (1), получаемые в качестве следствия в рассматриваемом случае уравнения относительно  $u_3(x_1, x_2, t)$ ,  $\phi(x_1, x_2, t)$ , первоначально принимают вид

$$\begin{aligned} \partial_1(c_{44}\partial_1 u_3) + c_{44}\partial_2^2 u_3 + \partial_1(e_{15}\partial_1 \phi) + e_{15}\partial_2^2 \phi - \rho \ddot{u}_3 &= 0, \\ \partial_1(e_{15}\partial_1 u_3) + e_{15}\partial_2^2 u_3 - \partial_1(\varepsilon_{11}\partial_1 \phi) - \varepsilon_{11}\partial_2^2 \phi &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

а затем, с введением для характеристик исследуемых волн с круговой частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$  представлений

$$\begin{aligned} u_3(x_1, x_2, t) &= u_{30}(x_1) \exp(-i(\omega t - kx_2)), \\ \phi(x_1, x_2, t) &= \phi_0(x_1) \exp(-i(\omega t - kx_2)), \end{aligned} \quad (10)$$

могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} c_{440}u_{30}''(x_1) + e_{150}\phi_0''(x_1) + (\rho_{0\lambda}\omega^2 - c_{440}k^2)u_{30}(x_1) - e_{150}k^2\phi_0(x_1) + \\ + \lambda(c_{440}u_{30}'(x_1) + e_{150}\phi_0'(x_1)) &= -\rho_{0\mu}\omega^2 \exp(\gamma x_1)u_{30}(x_1), \\ e_{150}u_{30}''(x_1) - \varepsilon_{110}\phi_0''(x_1) - c_{440}k^2u_{30}(x_1) + \varepsilon_{110}k^2\phi_0(x_1) + \\ + \lambda(e_{150}u_{30}'(x_1) - \varepsilon_{110}\phi_0'(x_1)) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\gamma = \mu - \lambda$ .

Далее система обыкновенных дифференциальных уравнений (11) преобразуется к следующему матричному виду

$$(\underline{A}_1 \partial_1^2 + \underline{A}_2 \partial_1 + \underline{A}_3) \underline{\Phi}(x_1) = \underline{B} \exp(\gamma x_1) \underline{\Phi}(x_1). \quad (12)$$

Здесь

$$\underline{\Phi}(x_1) = \begin{pmatrix} u_{30}(x_1) \\ \phi_0(x_1) \end{pmatrix}; \quad (13)$$

$\underline{A}_1, \underline{A}_2, \underline{A}_3, \underline{B}$  – матрицы второго порядка с постоянными элементами вида:

$$\begin{aligned} \underline{A}_1 &= \begin{pmatrix} c_{440} & e_{150} \\ e_{150} & -\varepsilon_{110} \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_2 = \begin{pmatrix} \lambda c_{440} & \lambda e_{150} \\ \lambda e_{150} & -\lambda \varepsilon_{110} \end{pmatrix}, \\ \underline{A}_3 &= \begin{pmatrix} \rho_{0\lambda} \omega^2 - c_{440} k^2 & -e_{150} k^2 \\ -e_{150} k^2 & \varepsilon_{110} k^2 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} \rho_{0\mu} \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

К системе вида (12), на первом этапе получения дисперсионных соотношений для рассматриваемых типов нормальных волн, применяется итерационный алгоритм аналитического интегрирования [14–19].

**2. Итерационный векторно-матричный алгоритм интегрирования дифференциального уравнения модели.** В применяемом итерационном алгоритме для искомой вектор-функции  $\underline{\Phi}(x_1)$  вводится исходное представление

$$\underline{\Phi}(x_1) = \underline{\Phi}_0(x_1) + \underline{\Phi}_1(x_1) + \underline{\Phi}_2(x_1) + \dots + \underline{\Phi}_n(x_1) + \dots \quad (15)$$

в котором

$$(\underline{A}_1 \partial_1^2 + \underline{A}_2 \partial_1 + \underline{A}_3) \underline{\Phi}_0(x_1) = 0, \quad (16)$$

$$(\underline{A}_1 \partial_1^2 + \underline{A}_2 \partial_1 + \underline{A}_3) \underline{\Phi}_1(x_1) = e^{\gamma x_1} \underline{B} \underline{\Phi}_0(x_1), \dots, \quad (17)$$

$$(\underline{A}_1 \partial_1^2 + \underline{A}_2 \partial_1 + \underline{A}_3) \underline{\Phi}_n(x_1) = e^{\gamma x_3} \underline{B} \underline{\Phi}_{n-1}(x_3) \quad (18)$$

На этапе анализа задачи начального приближения по определению базисных решений системы однородных дифференциальных уравнений (16) (12) с постоянными коэффициентами, применение метода Эйлера с введением функции

$$\vartheta(\delta) = \delta^2 + \lambda \delta - k^2, \quad (19)$$

приводит к полиномиальному характеристическому уравнению относительно параметра  $\delta$  четвертой степени

$$\vartheta(\delta)((c_{440} \varepsilon_{110} + e_{150}^2) \vartheta(\delta) + \rho_{0\lambda} \varepsilon_{110} \omega^2) = 0$$

с корнями

$$\begin{aligned} \delta_j &= (-\lambda + (-1)^j (\lambda^2 + 4k^2)^{1/2}) / 2 \quad (j = \overline{1, 2}); \\ \delta_j &= (-\lambda + (-1)^j (\lambda^2 - 4((\rho_{0\lambda} \varepsilon_{110} \omega^2)(c_{440} \varepsilon_{110} + e_{150}^2)^{-1} - k^2)^{1/2}) / 2 \\ &\quad (j = \overline{3, 4}); \end{aligned} \quad (20)$$

в результате чего базисные частные решения (16) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}\underline{\Phi}_{0j}(x_1) &= \underline{\zeta}_{0j} \exp(\delta_j x_1), \\ \underline{\zeta}_{0j} &= (0, e_{150})^T \quad (j = \overline{1, 2}), \\ \underline{\zeta}_{0j} &= (\varepsilon_{110}, e_{150})^T \quad (j = \overline{3, 4}).\end{aligned}\quad (21)$$

После нахождения в форме (21) четырех базисных решений (16) построение отвечающих им базисных решений (12) осуществляется с применением итерационного алгоритма (16)–(17) при выборе последовательных приближений  $\underline{\Phi}_{nj}(x_1)$  в виде

$$\begin{aligned}\underline{\Phi}_{1j}(x_1) &= \underline{\zeta}_{1j} \exp((\delta_j + \gamma)x_1), \\ \underline{\Phi}_{2j}(x_1) &= \underline{\zeta}_{2j} \exp((\delta_j + 2\gamma)x_1), \dots, \\ \underline{\Phi}_{nj}(x_1) &= \underline{\zeta}_{nj} \exp((\delta_j + n\gamma)x_1),\end{aligned}\quad (22)$$

где

$$\underline{\zeta}_{nj} = \underline{Q}_{nj}^{-1} \underline{B} \underline{\zeta}_{n-1,j}^{\pm}, \quad \underline{Q}_{nj} = \underline{A}_1(\delta_j + n\gamma)^2 + \underline{A}_2(\delta_j + n\gamma) + \underline{A}_3.$$

В итоге, базисные решения (5) имеют следующие явные аналитические представления

$$\begin{aligned}\underline{\Phi}_j(x_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \underline{\zeta}_{nj} \exp((\delta_j + n\gamma)x_3) \quad (j = \overline{1, 4}), \\ \underline{\zeta}_{nj} &= \underline{Q}_{nj}^{-1} \underline{B} \underline{Q}_{n-1,j}^{-1} \underline{B} \cdot \dots \cdot \underline{Q}_{1j}^{-1} \underline{B} \underline{\zeta}_{0j}.\end{aligned}\quad (23)$$

На базе применения критерия Даламбера может быть сделано заключение относительно абсолютной сходимости по норме векторных экспоненциальных рядов в представлениях (23) с учетом выполняющегося свойства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left\| \underline{\zeta}_{n+1,j} \right\| \exp((\delta_j + (n+1)\gamma)x_3)}{\left\| \underline{\zeta}_{nj} \right\| \exp((\delta_j + n\gamma)x_3)} \right| < 1. \quad (24)$$

**3. Дисперсионные соотношения для волноводов рассматриваемого типа.** На базе соотношений (2)–(4), (13), (23), применительно к волновым процессам исследуемого типа можно записать следующие представления для их комплексных амплитудных характеристик

$$\begin{aligned}\underline{\Phi}(x_1) &= d_1 \underline{\Phi}_1(x_1) + d_2 \underline{\Phi}_2(x_1) + d_3 \underline{\Phi}_3(x_1) + d_4 \underline{\Phi}_4(x_1), \\ \underline{\Phi}_j(x_1) &= \begin{pmatrix} \Phi_j^{(1)}(x_1) \\ \Phi_j^{(2)}(x_1) \end{pmatrix};\end{aligned}\quad (25)$$

$$\begin{aligned}u_{30}(x_1) &= d_1 \Phi_1^{(1)}(x_1) + d_2 \Phi_2^{(1)}(x_1) + d_3 \Phi_3^{(1)}(x_1) + d_4 \Phi_4^{(1)}(x_1), \\ \phi_0(x_1) &= d_1 \Phi_1^{(2)}(x_1) + d_2 \Phi_2^{(2)}(x_1) + d_3 \Phi_3^{(2)}(x_1) + d_4 \Phi_4^{(2)}(x_1);\end{aligned}\quad (26)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{130}(x_1) = & \exp(\lambda x_1)(d_1(c_{440}\partial_1\Phi_1^{(1)}(x_1) + e_{150}\partial_1\Phi_1^{(2)}(x_1)) + \\ & + d_2(c_{440}\partial_1\Phi_2^{(1)}(x_1) + e_{150}\partial_1\Phi_2^{(2)}(x_1)) + d_3(c_{440}\partial_1\Phi_3^{(1)}(x_1) + e_{150}\partial_1\Phi_3^{(2)}(x_1)) + \\ & + d_4(c_{440}\partial_1\Phi_4^{(1)}(x_1) + e_{150}\partial_1\Phi_4^{(2)}(x_1)), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{230}(x_1) = & \exp(\lambda x_1)(d_1(c_{440}ik\Phi_1^{(1)}(x_1) + e_{150}ik\Phi_1^{(2)}(x_1)) + \\ & + d_2(c_{440}ik\Phi_2^{(1)}(x_1) + e_{150}ik\Phi_2^{(2)}(x_1)) + d_3(c_{440}ik\Phi_3^{(1)}(x_1) + e_{150}ik\Phi_3^{(2)}(x_1)) + \\ & + d_4(c_{440}ik\Phi_4^{(1)}(x_1) + e_{150}ik\Phi_4^{(2)}(x_1)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{10}(x_1) = & \exp(\lambda x_1)(d_1(e_{150}\partial_1\Phi_1^{(1)}(x_1) - \varepsilon_{110}\partial_1\Phi_1^{(2)}(x_1)) + \\ & + d_2(e_{150}\partial_1\Phi_2^{(1)}(x_1) - \varepsilon_{110}\partial_1\Phi_2^{(2)}(x_1)) + d_3(e_{150}\partial_1\Phi_3^{(1)}(x_1) - \varepsilon_{110}\partial_1\Phi_3^{(2)}(x_1)) + \\ & + d_4(e_{150}\partial_1\Phi_4^{(1)}(x_1) - \varepsilon_{110}\partial_1\Phi_4^{(2)}(x_1)), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} D_{20}(x_1) = & \exp(\lambda x_1)(d_1(e_{150}ik\Phi_1^{(1)}(x_1) - \varepsilon_{110}k\Phi_1^{(2)}(x_1)) + d_2(e_{150}ik\Phi_2^{(1)}(x_1) - \\ & - \varepsilon_{110}ik\Phi_2^{(2)}(x_1)) + d_3(e_{150}ik\Phi_3^{(1)}(x_1) - \varepsilon_{110}ik\Phi_3^{(2)}(x_1)) + \\ & + d_4(e_{150}ik\Phi_4^{(1)}(x_1) - \varepsilon_{110}ik\Phi_4^{(2)}(x_1)). \end{aligned}$$

Получение соотношений (26)–(28) позволяет, в частности, записать искомые дисперсионные уравнения для краевых условий (6)–(8) в форме равенств нулю функциональных определителей для матриц следующих из краевых условий систем однородных алгебраических уравнений относительно неопределенных постоянных коэффициентов  $d_q$

$$F(\omega, k) = \det \|\tau_{pq}\| = 0 \quad (p, q = \overline{1, 4}),$$

где для случая (6)

$$\begin{aligned} \tau_{1q} = c_{440}\partial_1\Phi_q^{(1)}(h) + e_{150}\partial_1\Phi_q^{(2)}(h), \quad \tau_{2q} = c_{440}\partial_1\Phi_q^{(1)}(-h) + e_{150}\partial_1\Phi_q^{(2)}(-h), \\ \tau_{3q} = \Phi_q^{(2)}(h), \quad \tau_{4q} = \Phi_q^{(2)}(-h); \end{aligned} \quad (29)$$

для случая (7)

$$\tau_{1q} = \Phi_q^{(1)}(h), \quad \tau_{2q} = \Phi_q^{(1)}(-h), \quad \tau_{3q} = \Phi_q^{(2)}(h), \quad \tau_{4q} = \Phi_q^{(2)}(-h); \quad (30)$$

для случая (8)

$$\begin{aligned} \tau_{1q} = \Phi_q^{(1)}(h), \quad \tau_{2q} = \Phi_q^{(1)}(-h), \\ \tau_{3q} = e_{150}\partial_1\Phi_q^{(1)}(h) - \varepsilon_{11}\partial_1\Phi_q^{(2)}(h), \quad \tau_{4q} = e_{150}\partial_1\Phi_q^{(1)}(-h) - \varepsilon_{11}\partial_1\Phi_q^{(2)}(-h). \end{aligned} \quad (31)$$

**Заключение.** Итогом проведенных исследований является разработка численно-аналитического итерационного алгоритма построения базисных векторных частных решений систем дифференциальных уравнений, описывающих распространение сдвиговых нормальных электроупругих волн слое функционально-градиентной пьезокерамики с переменными по толщине свойствами, задаваемыми разнотипными экспоненциальными зависимостями для параметра плотности

и параметров деформационных и электрических свойств. Базисные решения получены в форме векторных экспоненциальных рядов, коэффициенты которых определяются векторно-матричными рекуррентными соотношениями. Реализовано также получение аналитической формы дисперсионных соотношений для исследуемых электроупругих сдвиговых волн в некоторых отдельных случаях задания однородных краевых электромеханических условий на гранях слоя.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 1023030100040-4- 1.1.2;2.3.1).

1. *Setter N.* Piezoelectric material and devices / N. Setter. – Lausanne, Switzerland: Swiss Federal Institute of Technology, 2002. – 518 p.
2. *Yang J.* Dynamic anti-plane problems of piezoceramics and applications in ultrasonics – a review / Jiashi Yang, Ji Wang // *Acta Mechanica Sinica*. – 2008. – Volume 21, Issue 3. – P. 207–220 <https://doi.org/10.1007/s10338-008-0824-3>.
3. *Heywang W.* Piezoelectricity, evolution and future of a technology / W. Heywang, K. Lubitz, W. Wersing. – Berlin: Springer, 2008. – 581 p.
4. *Tanaka S.* Piezoelectric acoustic wave devices based on heterogeneous integration technology / S. Tanaka // *Proceedings 2014 IEEE International Frequency Control Symposium (FCS) (Taipei, Taiwan)*. – 2014. – P. 1–4. doi: 10.1109/FCS.2014.6859994.
5. *Washim R.A.* Piezoelectric MEMS based acoustic sensors: A review / Reza Ali Washim, Prasad Mahanth // *Sensors and Actuators A: Physical*. – 2020. – Vol. 301, 111756. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2019.111756>
6. *Yoon H.* Macroporous alumina ceramics with aligned microporous walls by unidirectionally freezing foamed aqueous ceramic suspensions / H. Yoon, U. Kim, J. Kim, Y. Koh, W. Choi, H. Kim // *J. Am. Ceram. Soc.* – 2010. – V. 93. – P. 1580–1582.
7. *Uchino K.* *Advanced Piezoelectric Materials*. – Cambridge: Woodhead Publishing, 2011. – 696 p.
8. *Lugovaya M.A.* Complex material properties of porous piezoelectric ceramics / M.A. Lugovaya, A.A. Naumenko, AN. Rybyanets, S.A. Shcherbinin // *Ferroelectrics*. – 2015. – V. 484, Issue. 1. – P. 87–94.
9. *Рыбьянец А.Н.* Упругие диэлектрические и пьезоэлектрические свойства керамоматричных композитов ЦТС/а-АОС / А.Н. Рыбьянец, Г.М. Константинов, А.А. Науменко, Н.А. Швецова, Д.И. Макарьев, М.А. Луговая // *ФТТ*. – 2015. – Т. 57., Вып. 3. – С. 515518.
10. *Bowen C.R.* The piezoelectric medium and its characteristics / C.R. Bowen, V.Y. Topolov, H.A. Kim // *Springer Series in Materials Science*. – 2016. – V. 238. – P. 1–22.
11. FGM: Design, processing and applications / Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin et al. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 434 p.
12. *Birman V., Byrd L.W.* Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures // *Appl. Mech. Rev.* – 2007. – Vol. 60, N 5. – P. 195–216.
13. *Yang Y.-H., L.-Z. Wu, X.-Q. Fang* Non-destructive detection of a circular cavity in a finite functionally graded material layer using anti-plane shear waves // *J. Nondestructive Eval.* – 2010. – Vol. 29. – P. 233–240.
14. *Болнокин В.Е.* Анализ модели распространения сдвиговых упругих волн в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном геомассиве / В.Е. Болнокин, А.А. Глухов, В.И. Сторожев // *Журнал теоретической и прикладной механики*. – 2022 – № 3 (80). – С. 14–19. – doi: 10.24412/0136-4545-2022-3-14-19. – EDN BOBABC.
15. *Глухов А.А.* Интегрирование системы уравнений распространения произвольно ориентированных трехпарциальных поверхностных волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, В.А. Шалдырван // *Журнал теоретической и прикладной механики*. – 2022 – № 4 (81). – С. 15–22. – doi: 10.24412/0136-4545-2022-4-15-22. – EDN JBHEKR.

16. Карасев Д.С. Интегрирование уравнений распространения связанных электроупругих сдвиговых волн в полупространстве функционально-градиентной пьезокерамики / Д.С. Карасев, С.В. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022 – № 4 (81). – С. 47–52. – doi: 10.24412/0136-4545-2022-4-47-52. – EDN RAPMHU.
17. Глухов А.А. Волны Лява в структуре «однородный изотропный слой на трансверсально-изотропном полупространстве с двойной экспоненциальной неоднородностью» / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 1 (82). – С. 32–39. – doi: 10.24412/0136-4545-2023-1-32-39. – EDN ENGOVX.
18. Глухов А.А. Анализ модели распространения поверхностных релеевских волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве с приграничной локализованной зоной неоднородности / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 2 (83). – С. 26–38. – doi: 10.24412/0136-4545-2023-2-26-38. – EDN ETYFCH.
19. Карасев Д.С. Интегрирование уравнений распространения локализованных сдвиговых электроупругих волн в функционально-градиентной пьезокерамике с двойной экспоненциальной неоднородностью / Д.С. Карасев, С.В. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – №2 (83). – С. 48–55. – doi: 10.24412/0136-4545-2023-2-48-55. – EDN SPYOBС.

**D.S. Karasev, S.V. Storozhev, V.A. Shaldyrvan**

**Shear electroelastic waves in a functionally-gradient piezoceramic layer with different exponential heterogeneity of mechanical and electrical properties.**

An iterative algorithm for the numerical-analytical integration of a system of partial differential equations, which describes the propagation of coupled normal electroelastic shear-type waves in a layer of functional-gradient piezoceramics with different types of exponential dependences varying in thickness for the density parameters, as well as for the parameters of the deformation and electrical properties of the material is proposed. Basic solutions of the wave equations are obtained in the form of vector exponential series. Dispersion equations are formulated for the normal waves under study under certain variants of electromechanical boundary conditions on the edges of the layer.

**Keywords:** *layer of functional-gradient piezoceramics, transverse exponential heterogeneity, difference in density variability and electromechanical properties, normal shear electroelastic waves, dynamic equations of electromechanical deformation, basic partial solutions, successive approximation algorithm, exponential series with vector coefficients, dispersion equations.*

*Получено 26.10.2023*



УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2023-4-31-38

EDN:YLXDQM

©2023. Р.Н. Нескородев<sup>1</sup>

## ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕТОДИКА РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНОГО ГОРНОГО МАССИВА С ВЕРТИКАЛЬНОЙ ВЫРАБОТКОЙ

В работе предложена методика построения решения трехмерных уравнений теории упругости анизотропной среды, являющейся материалом массива горных пород с вертикальной выработкой. Массив моделируется полупространством, находящимся под действием сил собственного веса. Полученное общее представление для функций перемещений выражено через три аналитические функции обобщенных комплексных переменных. Полученное решение удовлетворяет граничным условиям на границе полупространства и содержит произвол для удовлетворения условиям на боковой поверхности выработки. Приведены результаты численных исследований.

**Ключевые слова:** анизотропный горный массив, вертикальная выработка, обобщенные комплексные переменные, напряженное состояние.

**Введение.** Для идеально упругого изотропного тяжелого массива в работе [1] были определены напряжения вблизи вертикальной цилиндрической выработки кругового сечения. Аналогичные результаты для трансверсально-изотропного массива были получены в работе [2]. В статье [3] рассматривается слоистый массив, состоящий из попарно чередующихся изотропных упругих слоев. В результате усреднения упругих модулей данный массив с горизонтальным напластованием пород моделируется однородным трансверсально-изотропным полупространством с плоскостью изотропии, перпендикулярной к вертикальной оси. Полученные решения являются точными и выписаны в явном виде. Для случая массива из материала без горизонтальной плоскости изотропии получить аналитическое решение не удастся. В данной статье строится численно-аналитическое решение задачи о напряженно-деформированном состоянии вблизи вертикальной полости в анизотропном массиве, обладающем плоскостью упругой симметрии.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается массив горных пород, ограничен-

---

<sup>1</sup>Нескородев Роман Николаевич – док. физ.-мат. наук, профессор каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: rromn72@mail.ru.

*Neskorodev Roman Nikolaevich* – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

ный горизонтальной плоскостью (дневная поверхность), который отнесен к прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$ , где плоскость  $Oxy$  совпадает с дневной поверхностью. От плоскости  $Oxy$  вглубь массива вдоль оси  $Oz$  проведена вертикальная выработка в виде цилиндрической полости эллиптического сечения. Требуется определить напряженно-деформированное состояние массива около полости от действия сил собственного веса.

Считается, что свойства горных пород в разных направлениях различны и для описания их поведения используется модель упругого анизотропного тела. Линейная связь между напряжениями и деформациями, выраженная обобщенным законом Гука, имеет вид [2]

$$\varepsilon_i = \sum_{k=1}^6 a_{ik} \sigma_k \quad (1)$$

или

$$\sigma_i = \sum_{k=1}^6 A_{ik} \varepsilon_k, \quad (2)$$

где  $a_{ik}$  – коэффициенты деформации, а  $A_{ik}$  – модули упругости ( $i = \overline{1,6}$ ).

Для компактной записи уравнений (1) и (2) введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6 & \text{ для } \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}; \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6, & \text{ для } \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}. \end{aligned}$$

Уравнения (1) или (2) вместе с уравнениями равновесия

$$\begin{aligned} \partial_1 \sigma_1 + \partial_2 \sigma_6 + \partial_3 \sigma_5 + X = 0, \quad \partial_1 \sigma_6 + \partial_2 \sigma_2 + \partial_3 \sigma_4 + Y = 0, \\ \partial_1 \sigma_5 + \partial_2 \sigma_4 + \partial_3 \sigma_3 + Z = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

и уравнениями связи между деформациями и проекциями перемещения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \partial_1 u_1, \quad \varepsilon_2 = \partial_2 u_2, \quad \varepsilon_3 = \partial_3 u_3, \quad \varepsilon_4 = \partial_2 u_3 + \partial_3 u_2, \\ \varepsilon_5 = \partial_1 u_3 + \partial_3 u_1, \quad \varepsilon_6 = \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1 \end{aligned} \quad (4)$$

образуют полную систему дифференциально-алгебраических соотношений, описывающих упругие процессы в анизотропных средах. В уравнениях (3) и (4) введены обозначения:  $\partial_1 = \partial/\partial x$ ,  $\partial_2 = \partial/\partial y$ ,  $\partial_3 = \partial/\partial z$ .

Массив рассматривается как тяжелое упругое полупространство, свободное от напряжений на дневной поверхности, т.е. имеют место граничные условия

$$\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (5)$$

Для определения компонент напряжений и перемещений необходимо проинтегрировать уравнения (1)–(4) при условиях (5). Проекция вектора перемещений  $u_k(x, y, z)$  и напряжения  $\sigma_i(x, y, z)$  представляются в виде сумм

$$u_k = u_k^0 + u_k^* \quad (k = 1, 2, 3), \quad \sigma_i = \sigma_i^0 + \sigma_i^* \quad (i = \overline{1, 6}), \quad (6)$$

где функции  $u_k^0$  и  $\sigma_i^0$  определяют решение в нетронутом массиве, а  $u_k^*$  и  $\sigma_i^*$  – отражают влияние выработок.

**2. Перемещения и напряжения в сплошном анизотропном массиве от действия сил собственного веса.** Для определения компонент напряженно-деформированного состояния в нетронутом массиве под действием сил тяжести полагается, что толща пород представлена однородной по плотности породой, т.е. плотность  $\rho = const$ . Отсутствие границ в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$  накладывает ограничения на компоненты напряжений и перемещений. Они не должны зависеть от этих координат. Поэтому

$$u_k^0 = u_k^0(z) \quad (k = 1, 2, 3), \quad \sigma_i^0 = \sigma_i^0(z) \quad (i = \overline{1, 6}).$$

Для определения величин  $u_k^0$  и  $\sigma_i^0$  в нетронутом массиве необходимо проинтегрировать уравнения равновесия (3) и уравнения закона Гука (1) при условиях (5) на границе полупространства. В принятой системе координат объемные силы имеют вид

$$X = Y = 0, \quad Z = \rho g = \gamma,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

В результате можно получить

$$\sigma_i^0 = \tau \sigma_3^0 = -\tau_i \gamma z \quad (i = \overline{1, 6}), \quad (7)$$

$$u_k^0 = -\alpha_k \gamma z^2 / 2 + c_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (8)$$

Здесь введены обозначения  $\tau_3 = 1$ ,  $\tau_4 = \tau_5 = 0$ , а величины  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_6$  и  $\alpha_k$  определяются из системы уравнений

$$a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + a_{i6}\tau_6 = -a_{i3}\tau_3 \quad (i = 1, 2, 6),$$

и соотношений

$$\alpha_1 = \sum_{n=1}^6 a_{5n}\tau_n, \quad \alpha_2 = \sum_{n=1}^6 a_{4n}\tau_n, \quad \alpha_3 = \sum_{n=1}^6 a_{3n}\tau_n.$$

Выражения для напряжений (7) и перемещений (8) получены для случая общей анизотропии. Они содержат в частных случаях решения для изотропной и трансверсально-изотропной сред, которые были предложены в работах [1, 2].

**3. Перемещения и напряжения в массиве с вертикальными выработками.** Поле перемещений и напряжений, которое формируется за счет появления в массиве вертикальных выработок, описывается функциями  $u_k^*(x, y, z)$ , которые являются результатом интегрирования однородных уравнений равновесия (3), с учетом условий (5).

Проекции вектора перемещений представляются в виде двух слагаемых

$$u_k^* = zv_k(x, y) + V_k(x, y, z) \quad (k = 1, 2),$$

$$u_3^* = v_3(x, y) + V_3(x, y, z).$$

Функции  $v_1$ ,  $v_2$  и  $v_3$  здесь определяют основное поле перемещений, возникающее в массиве с выработками. Малые слагаемые  $V_k$  описывают дополнительное поле перемещений, которое вводится для удовлетворения условиям (5):

$$V_k = zpw_{k1} + \frac{z^3}{3!}pw_{k3} + \dots \quad \text{для} \quad (k = 1, 2); \quad V_3 = \frac{z^2}{2}pw_{32} + \frac{z^4}{4!}pw_{34} + \dots \quad (9)$$

Функция  $p(z) = \exp(-\alpha z)$  здесь введена для обеспечения сходимости рядов (9) в области  $\Omega = (z \geq 0)$  изменения переменной  $z$ . Подбором величины  $\alpha$  функции (9) можно сделать сколь угодно малыми и не учитывать при проведении численных исследований. Функция  $p(z)$  аппроксимируется в области  $\Omega$  кусочно-постоянной функцией. Для этого в области изменения переменной  $z$  вводится сетка  $z_k = kl$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) и подобласти  $\Omega_q = [z_{q-1}, z_{q+1}]$  ( $q = 1, 2, \dots$ ). Каждой подобласти  $\Omega_q$  ставится в соответствие постоянная по переменной  $z$  функция  $p_q = \exp(-\alpha z_{q-1})$ . Эти функции аппроксимируют функцию  $p(z) = \exp(-\alpha z)$  в подобласти  $\Omega_q$ . Точность аппроксимации повышается за счет более мелкого разбиения области с сохранением тех же кусочно-постоянных функций.

Напряжения находятся из уравнений закона Гука (2). Удовлетворяя граничным условиям (5) и однородным уравнениям равновесия (3) можно получить:

– представления для напряжений

$$\sigma_i^* = z [(A_{i1}\partial_1 + A_{i6}\partial_2) v_1 + (A_{i6}\partial_1 + A_{i2}\partial_2) v_2] \quad (i = 1, 2, 6),$$

$$\sigma_i^* = (1 - p) [A_{i4}(v_2 + \partial_2 v_3) + A_{i5}(v_1 + \partial_1 v_3)] \quad (i = 4, 5), \quad (10)$$

$$\sigma_3^* = (z - zp) [(A_{31}\partial_1 + A_{36}\partial_2) v_1 + (A_{36}\partial_1 + A_{32}\partial_2) v_2];$$

– систему дифференциальных уравнений относительно функций  $v_k$

$$L_{11}v_1 + L_{12}v_2 = 0, \quad L_{12}v_1 + L_{22}v_2 = 0, \quad L_{31}v_1 + L_{32}v_2 + L_{33}v_3 = 0, \quad (11)$$

где

$$L_{11} = A_{11}\partial_1^2 + 2A_{16}\partial_1\partial_2 + A_{66}\partial_2^2, \quad L_{12} = A_{16}\partial_1^2 + (A_{12} + A_{66})\partial_1\partial_2 + A_{26}\partial_2^2,$$

$$L_{22} = A_{66}\partial_1^2 + 2A_{26}\partial_1\partial_2 + A_{22}\partial_2^2, \quad L_{33} = A_{55}\partial_1^2 + 2A_{45}\partial_1\partial_2 + A_{44}\partial_2^2,$$

$$L_{31} = (A_{31} + A_{55})\partial_1 + (A_{45} + A_{36})\partial_2, \quad L_{32} = (A_{54} + A_{36})\partial_1 + (A_{32} + A_{44})\partial_2;$$

– функции  $w_{kn}$ , входящие в разложения (9).

Функции  $w_{kn}$  и напряжения выражаются через функции  $v_k$  и их производные. Общее решение системы уравнений (11) выражается через три аналитические функции обобщенных комплексных переменных  $z_j = x + \mu_j y$ :

$$v_k = 2Re \sum_{j=1}^2 d_{kj} \varphi'_j(z_j) \quad (k = 1, 2), \quad v_3 = 2Re \sum_{j=1}^3 d_{3j} \varphi_j(z_j).$$

Полные напряжения и перемещения (6), возникающие в весоном полупространстве с вертикальными выработками для материала, имеющего плоскость упругой симметрии, с учетом соотношений (10) через комплексные функции принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_i &= 2Re [r_{i1} \varphi_1'' + r_{i2} \varphi_2''] z - \tau_i \gamma z \quad (i = 1, 2, 6), \\ \sigma_3 &= 2Re [r_{31} \varphi_1'' + r_{32} \varphi_2''] (z - zp) - \tau_3 \gamma z, \\ \sigma_i &= 2Re [r_{i1} \varphi_1' + r_{i2} \varphi_2' + r_{i3} \varphi_3'] (1 - p) \quad (i = 4, 5); \\ u_k &= 2Re [d_{k1} \varphi_1' + d_{k2} \varphi_2'] z \quad (k = 1, 2), \\ u_3 &= 2Re [d_{31} \varphi_1 + d_{32} \varphi_2 + d_{33} \varphi_3] z - \alpha_3 \gamma z^2 / 2 + c_3. \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} r_{ik} &= A_{i1} d_{1k} + A_{i2} d_{2k} \mu_k + A_{i6} (d_{2k} + d_{1k} \mu_k) \quad (i = 1, 2, 3, 6; k = 1, 2), \\ r_{ik} &= A_{i4} (d_{2k} + d_{3k} \mu_k) + A_{i5} (d_{1k} + d_{3k}) \quad (i = 4, 5; k = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Представления для напряжений (12) точно удовлетворяют уравнениям равновесия (3) и условиям (5).

**4. Граничные условия для незакрепленной эллиптической выработки.** Первые два граничных условия

$$n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_6 = 0, \quad n_1 \sigma_6 + n_2 \sigma_2 = 0,$$

на свободных контурах выработок с учетом представлений (12) и выражений для направляющих косинусов  $n_1 = \cos(nx) = dy/ds$ ,  $n_2 = \cos(ny) = -dx/ds$ , приводятся к виду

$$2Re (\mu_1 \varphi_1' + \mu_2 \varphi_2') = \gamma (\tau_1 y - \tau_6 x), \quad 2Re (\varphi_1' + \varphi_2') = \gamma (\tau_2 x - \tau_6 y). \quad (13)$$

Эти условия позволяют независимо от третьего граничного условия определить функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Напряжения  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3, 6$ ) вычисляются по соответствующим формулам (12). Для вычисления напряжений  $\sigma_4$  и  $\sigma_5$  необходимо определить функцию  $\varphi_3$ . Она находится из третьего граничного условия

$$n_1 \sigma_5 + n_2 \sigma_4 = 0. \quad (14)$$

Для эллиптического контура, уравнение которого задано в параметрической форме  $x = a \cos(\theta)$ ,  $y = b \sin(\theta)$ , условия (14) можно записать так

$$y' \sum_{i=1}^3 (r_{5i} \varphi_i' + \bar{r}_{5i} \bar{\varphi}_i') - x' \sum_{i=1}^3 (r_{4i} \varphi_i' + \bar{r}_{4i} \bar{\varphi}_i') = 0. \quad (15)$$

Функции, отображающие внешность единичного круга на внешности эллиптических контуров в областях определения потенциалов  $\varphi_k(z_k)$ , имеют вид [4]

$$z_k = R_k \varsigma_k + m_k / \varsigma_k, \quad R_k = (a - i\mu_k b) / 2, \quad m_k = (a + i\mu_k b) / 2.$$

Представления для функций  $\varphi'_1$  и  $\varphi'_2$  выбираются в виде

$$\varphi'_k = \alpha_k / \varsigma_k \quad (k = 1, 2). \quad (16)$$

Для  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  из условий (13) получаются уравнения

$$\mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2 = \gamma(\tau_1 b i - \tau_6 a) / 2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \gamma(\tau_2 a - \tau_6 b i) / 2.$$

Функция  $\varphi'_3$  представляется в виде разложения в ряд

$$\varphi'_3 = \beta_1 / \varsigma_3 + \beta_2 / \varsigma_3^3 + \beta_3 / \varsigma_3^5 + \dots \quad (17)$$

После подставки представлений (16) и (17) в условия (15), методом рядов можно получить систему уравнений относительно коэффициентов разложения (17)

$$\beta_1 \delta_3 + \bar{\beta}_1 \bar{\delta}_3 = -2Re(\alpha_1 \delta_1 + \alpha_2 \delta_2); \quad (18)$$

$$\beta_2 = -(\beta_1 \gamma_3 + \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2) / \delta_3, \quad \beta_{n+1} = -\beta_n \gamma_3 / \delta_3 \quad (n = 2, 3, 4, \dots),$$

$$\delta_k = br_{5k} - air_{4k}, \quad \gamma_k = br_{5k} + air_{4k} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (19)$$

Для нахождения коэффициентов  $\beta_1$  и  $\bar{\beta}_1$  к уравнению (18) необходимо добавить условие однозначности функции  $u_3$ . Это условие получается из представления (12) после интегрирование функций (16) и (17)

$$\beta_1 d_{33} R_3 - \bar{\beta}_1 \bar{d}_{33} \bar{R}_3 = -(\alpha_1 d_{31} R_1 - \bar{\alpha}_1 \bar{d}_{31} \bar{R}_1 + \alpha_2 d_{32} R_2 - \bar{\alpha}_2 \bar{d}_{32} \bar{R}_2). \quad (20)$$

**5. Численные исследования.** Численные исследования проведены для случаев, когда варьировались геометрия эллиптического сечения выработки и материал, из которого сложены горные породы. В качестве материала выбирался алевролит 1, алевролит 2 и гранит изотропный, которые соответственно обозначаются А1, А2 и ГИ. Упругие постоянные этих материалов при совпадении плоскости изотропии с плоскостью  $Oxy$  приведены в таблице 1 [5], где  $E = 9.81 \cdot 10^3$  МПа.

Таблица 1. Упругие постоянные геоматериалов

Материал	$E_1/E$	$E_2/E$	$G_2/E$	$\nu_1$	$\nu_2$	$\rho$
А1	6.210	5.680	2.290	0.215	0.260	2700
А2	1.074	0.523	0.120	0.413	0.198	2700
ГИ	4.200	4.200	1.720	0.220	0.220	2500

В исследованиях рассматривался массив, ослабленный выработкой эллиптического сечения с полуосями  $a$  и  $b$ , направленными соответственно вдоль осей  $Ox$

и  $Oy$ . Полуось  $a$  принималась равной двум метрам, а  $b$  - варьировалась. Расчеты проведены для случаев когда  $b = 1$ ,  $b = 2$  или  $b = 3$  метрам. Соответствующие случаи будем обозначать через Э1, К(круговое) и Э2.

В таблице 2 приведены результаты расчетов для круговой выработки. Значения напряжений  $\sigma_1/\gamma z$  и  $\sigma_2/\gamma z$  для обозначенных выше горных пород, даны в точках массива, расположенных вне контура выработки вдоль оси  $Ox$ . Напряжения при  $x = \infty$  соответствует случаю нетронутого массива.

Таблица 2. Напряжения для круговой выработки вдоль оси  $Ox$

Напряжения	Породы	2	4	6	8	10	$\infty$
$\sigma_1/\gamma H$	A1	0	-0.272	-0.322	-0.340	-0.348	-0.362
	A2	0	-0.520	-0.616	-0.649	-0.665	-0.693
	ГИ	0	-0.212	-0.251	-0.264	-0.271	-0.282
$\sigma_2/\gamma H$	A1	-0.724	-0.453	-0.402	-0.385	-0.377	-0.362
	A2	-1.386	-0.866	-0.770	-0.736	-0.720	-0.693
	ГИ	-0.564	-0.353	-0.313	-0.300	-0.293	-0.282

Следует отметить, что напряжения  $\sigma_1/\gamma z$  и  $\sigma_2/\gamma z$ , вычисленные по формулам (12), полностью совпадают с напряжениями  $\sigma_r/\gamma z$  и  $\sigma_\theta/\gamma z$ , вычисленными в работе [2]. Из результатов, данных в таблице, следует, что напряжения  $\sigma_2/\gamma z = \sigma_\theta/\gamma z$  на контуре круговой выработки будут максимальными по абсолютной величине. Они вдвое превышают напряжения в тех же точках нетронутого массива, которые даны в колонке  $x = \infty$ . При удалении от выработки напряжения, учитывающие ее влияние, быстро затухают, и на расстоянии двух диаметров от выработки для приведенных материалов составляют не более четырех процентов от напряжений в нетронутом массиве.

В таблице 3 приведены результаты расчетов для выработок, пройденных в массиве из материала A2. Напряжения для различных конфигураций эллиптического контура даны в тех же точках, что и в таблице 2.

Таблица 3. Напряжения для породы A2 вдоль оси  $Ox$

Напряжения	Контур	2	4	6	8	10	$\infty$
$\sigma_1/\gamma H$	Э1	0	-0.709	-0.702	-0.698	-0.696	-0.693
	К	0	-0.520	-0.616	-0.649	-0.665	-0.693
	Э2	0	-0.346	-0.507	-0.580	-0.618	-0.693
$\sigma_2/\gamma H$	Э1	-2.771	-0.828	-0.745	-0.721	-0.711	-0.693
	К	-1.386	-0.866	-0.770	-0.736	-0.720	-0.693
	Э2	-0.929	-0.864	-0.792	-0.745	-0.734	-0.693

Если для круговой выработки значения напряжений  $\sigma_\theta/\gamma z$  на контуре есть величина постоянная для конкретного материала, то для эллиптических контуров они меняются от точки к точке. Так, для Э1 величина  $\sigma_\theta/\gamma z$  меняется от  $-2.771$  в точке пересечения контура с осью  $Ox$  до  $-1.154$  в точке пересечения с осью  $Oy$ ; для Э2 она лежит в пределах от  $-0.929$  до  $-2.078$  в тех же точках контура; для кругового контура она равна  $-1.386$  и вдвое превышает значение в нетронутом массиве. При удалении от контура на расстояние до двух  $2a$  влия-

ние выработки составляет для рассмотренных случаев около десяти процентов от напряжений в нетронутом массиве.

Проведены также исследования для случаев, когда плоскость изотропии повернута по отношению к горизонту на  $90^0$ , а полуось  $a$  – на произвольный угол к оси  $Ox$ . Значения напряжений при этом качественно не отличаются от приведенных в таблице 3.

**Выводы.** По итогам исследований установлено, что во всех рассмотренных случаях напряжения являются сжимающими. Наиболее равнопрочной выработкой, в случае, когда плоскость изотропии совпадает с плоскостью  $Oxy$ , является выработка кругового сечения, так как вокруг нее образуется равномерно распределенное поле напряжений. Если же плоскость изотропии наклонена к горизонту, то возможен поиск подходящей конфигурации выработки с точки зрения более равномерного распределения вокруг нее напряжений.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 1023030100040-4- 1.1.2;2.3.1).

1. Динник А.Н. Распределение напряжений вокруг подземных выработок / А.Н. Динник, А.Б. Моргаевский, Г.Н. Савин // Тр. совещ. по управл. горным давлением. – М., Л.: Изд-во АН СССР, 1938. – С. 7–55.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
3. Бобылева Т.Н. Распределение напряжений в слоистом массиве с вертикальной цилиндрической полостью / Т.Н. Бобылева // Вестник МГСУ. – 2017. – Т. 12, вып. 8 (107). – С. 863–868.
4. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями / А.С. Космодамианский. – Киев-Донецк: Вища школа, 1976. – 200 с.
5. Ержанов Ж.С. Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном слоистом массиве / Ж.С. Ержанов, Ш.М. Айталиев, Ж.К. Масанов. – Алма-Ата: Наука, 1980. – 212 с.

R.N. Neskorojev

#### **Numerical and analytical method for calculating the stress-strain state of an anisotropic rock mass with a vertical excavation.**

The paper proposes a method for constructing a solution of three-dimensional equations of the theory of elasticity of an anisotropic body, which is an mass of rocks with vertical excavation. The array is modeled by a half-space under the action of its own weight forces. The general representation of the solution for displacement functions is expressed in terms of three analytical functions of generalized complex variables. The resulting solution satisfies the boundary conditions on the boundary of the half-space and contains an arbitrary one to satisfy the conditions on the side surface. The results of numerical studies are presented.

**Keywords:** *anisotropic rock mass, vertical excavation, generalized complex variables, stress state.*

Получено 14.11.2023



УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2023-4-39-47

EDN:RAQLMF

©2023. И.А. Моисеенко<sup>1</sup>, М.Н. Пачева<sup>2</sup>, В.И. Сторожев<sup>3</sup>

## МЕТОДИКА АНАЛИЗА МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗГИБНЫХ ВОЛН ПО ТОНКОМУ ПЛАСТИНЧАТОМУ МЕАНДРОВОМУ ВОЛНОВОДУ НА УПРУГОЙ ПОДЛОЖКЕ

Предложена численно-аналитическая методика анализа эффектов прохождения гармонической волны изгиба вдоль лежащей на подложке в виде линейного упругого основания тонкой изотропной пластины-волновода меандровой геометрической формы с чередующимися однотипными контактирующими разновыпуклыми полукольцевыми участками. Методика базируется на использовании точных аналитических представлений для полей колебательных смещений в полукольцевых фрагментах волновода в виде разложений по базисным системам бегущих и стоячих краевых окружных нормальных волн изгиба в кольцевых пластинах на упругом основании, и на применении концепции частичных областей с последовательным «сшиванием» волновых полей на границах смежных полукольцевых элементов волновода. Анализируемые волновые процессы описываются прикладной теорией динамического изгибного деформирования тонких пластин.

**Ключевые слова:** тонкие изотропные пластины, волновое изгибное деформирование, линейные упругие основания, меандровая геометрическая форма, распространение гармонических изгибных волн, метод частичных областей, разложения по базисным нормальным волнам.

**Введение и цели работы.** Проблемы исследования эффектов распростра-

---

<sup>1</sup> Моисеенко Игорь Алексеевич – доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: miamia733@mail.ru.

Moiseyenko Igor Alekseevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>2</sup> Пачева Марина Николаевна – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: pacheva.m.n@mail.ru.

Pacheva Marina Nikolaevna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>3</sup> Сторожев Валерий Иванович – доктор техн. наук, проф., зав. каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: stvistvi@mail.ru.

Storozhev Valeriy Ivanovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

нения упругих волн по волноводам усложненной криволинейной геометрии [1–6] относятся к ряду современных актуальных фундаментальных и прикладных исследовательских заданий в динамике деформируемых тел и элементов конструкций. К числу наиболее важных в прикладном отношении типов таких задач можно отнести проблему анализа закономерностей распространения упругих волн анализируемых типов по волноводам меандровой (змеевидной) геометрии [7–11] с чередующимися рядами однотипных зигзагообразных участков различного профиля. В частности, такие волноводы являются перспективными элементами акустоэлектронных устройств [12–14], и в практике определения их проектных параметров продолжают оставаться востребованными новые усовершенствованные эффективные численно-аналитические расчетные методы.

В контексте представленных соображений, целью данного исследования является разработка эффективно алгоритмизируемой теоретической численно-аналитической методики анализа модели распространения гармонических изгибных упругих волн по тонкому пластинчатому меандровому волноводу, размещаемому на упругой подложке – линейном упругом основании.

**1. Описание геометрии волновода и основные соотношения модели волновых процессов.** В рамках реализуемого исследования рассматривается геометрическая и физико-механическая модель волновода, который интерпретируется как объект в виде тонкой пластины «змеевидной» геометрии, составленной из  $2N$  сочленяемых между собой с идеальным механическим контактом однотипных по физико-механическим свойствам полукольцевых фрагментов  $S_j$  ( $j = \overline{1, 2N}$ ) с одинаковыми внутренними и внешними радиусами (рис. 1). Рассматриваемая пластина меандровой геометрической структуры размещена на линейном упругом основании – подложке и является волноводом для распространяющихся вдоль него от фрагмента  $S_1$  до фрагмента  $S_{2N}$  волн изгибных деформаций в тонких пластинах, описываемых прикладной кирхгоффовской теорией.

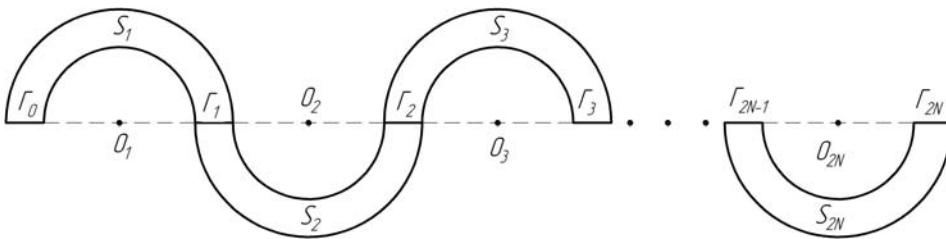


Рис. 1. Описание геометрии рассматриваемого волновода.

В рамках развиваемого подхода с каждым из звеньев  $S_j$  волновода связываются локальные полярные координатные системы  $O_j r_j \theta_j$ , в которых фрагменты  $S_j$  с нечетными занимают области  $S_j = \{r_j \in [R_1, R_2], 0 \leq \theta_j \leq \pi\}$ , а фрагменты  $S_j$  четными номерами – области  $S_j = \{r_j \in [R_1, R_2], \pi \leq \theta_j \leq 2\pi\}$ .

Принципиальная схема разрабатываемой методики базируется на сочетании приемов использования точных исходных аналитических представлений для по-

лей гармонических колебательных смещений  $W_j$  в областях  $S_j$  в виде рядов с неопределенными коэффициентами по соответствующим базисным системам бегущих и стоячих краевых изгибных нормальных волн вдоль окружных угловых направлений кольцевых волноводов [15–19], и последующего применения концепции частичных областей с реализацией процедуры поэтапного «сшивания» волновых полей  $W_j$  и  $W_{j+1}$  на границах контакта смежных элементов волновода.

Полагается, что полукольцевые пластинчатые элементы со срединными плоскостями  $S_j$  идентичны по физико-механическим свойствам (имеют одинаковые параметры толщины  $h$ , коэффициента пастели линейного упругого основания  $\varsigma$ , плотности  $\rho$ , изгибной жесткости  $D = Eh^3/((12(1 - \nu^2)))$ , модуля Юнга  $E$  и коэффициента Пуассона  $\nu$ ). На крайнем прямолинейном участке  $\Gamma_0$  границы волновода задаются кинематические условия возбуждения изгибных колебаний

$$(W_1)_{\Gamma_0} = W_*(r_1, t), \quad (\partial W_1/\partial \theta_1)_{\Gamma_0} = W_{**}(r_1, t), \quad (1)$$

в которых функции  $W_*(r_1, t)$ ,  $W_{**}(r_1, t)$ , описывают внешние воздействия. На граничном участке  $\Gamma_{2N}$  формулируются условия отсутствия внешних изгибающих усилий

$$\begin{aligned} & (M_{\theta\theta}(r_{2N}, 2\pi, t))_{\Gamma_{2N}} = \\ & = (-D[(\nu\partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r + r^{-2}\partial^2/\partial\theta^2)W_{2N}(r_{2N}, 2\pi, t)])_{\Gamma_{2N}} = 0, \\ & (N_{\theta}(r_{2N}, 2\pi, t))_{\Gamma_{2N}} = \\ & = (-D[(r^{-3}\partial^3/\partial\theta^3 + r^{-2}\partial^2/\partial r\partial\theta + r^{-1}\partial^3/\partial r^2\partial\theta)W_{2N}(r_{2N}, \theta, t)])_{\Gamma_{2N}} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

На внутренних поверхностях  $\Gamma_j$  контакта областей  $S_j$  и  $S_{j+1}$  задаются условия идеального механического сопряжения в прикладной теории изгиба тонких пластин:

– для нечетных  $j$

$$\begin{aligned} & (W_j(r, 0, t))_{\Gamma_j} = (W_{j+1}(r, \pi, t))_{\Gamma_j}, \quad (\partial_{\theta}W_j(r, 0, t))_{\Gamma_j} = (\partial_{\theta}W_{j+1}(r, \pi, t))_{\Gamma_j}, \\ & (M_{\theta\theta}^{(j)}(r, 0, t))_{\Gamma_j} = (M_{\theta\theta}^{(j+1)}(r, \pi, t))_{\Gamma_j}, \quad (N_{\theta}^{(j)}(r, 0, t))_{\Gamma_j} = (N_{\theta}^{(j+1)}(r, \pi, t))_{\Gamma_j}; \end{aligned} \quad (3)$$

– для четных  $j$

$$\begin{aligned} & (W_j(r, 2\pi, t))_{\Gamma_j} = (W_{j+1}(r, \pi, t))_{\Gamma_j}, \quad (\partial_{\theta}W_j(r, 2\pi, t))_{\Gamma_j} = (\partial_{\theta}W_{j+1}(r, \pi, t))_{\Gamma_j}, \\ & (M_{\theta\theta}^{(j)}(r, 2\pi, t))_{\Gamma_j} = (M_{\theta\theta}^{(j+1)}(r, \pi, t))_{\Gamma_j}, \quad (N_{\theta}^{(j)}(r, 2\pi, t))_{\Gamma_j} = (N_{\theta}^{(j+1)}(r, \pi, t))_{\Gamma_j}. \end{aligned} \quad (4)$$

Дисперсионные уравнения, определяющие полные спектры бегущих и краевых стоячих нормальных волн изгиба в соответствующих кольцевых пластинах, для ряда моделей распространения окружных изгибных волн в тонких изотропных пластинах этого типа, в том числе соотношения, определяющие полные спектры нормальных изгибных волн в тонкой изотропной кольцевой пластине,

лежащей на упругом винклеровском основании, для случаев задания на ее круговых контурах в различных сочетаниях граничных условий отсутствия внешних усилий, условий шарнирного опирания либо жесткого закрепления контура, а также соответствующие представления для комплексных функций динамического прогиба в базисных нормальных волнах, получены в работах [15–19]. Множества волновых чисел  $\{k_m\}_{m=1}^M$  круговых бегущих и краевых стоячих нормальных изгибных волн циклической частоты  $\omega$  в волноводах данного типа определяются из соотношений, записываемых как равенства нулю функциональных определителей

$$F(k, \omega) = \det \|\vartheta_{qp}(k, \omega)\| = 0 \quad (q, p = \overline{1, 4}). \quad (5)$$

В частности, в случае отсутствия на внутреннем и внешнем контурах внешних усилий, элементы дисперсионного определителя имеют вид

$$\begin{aligned} \vartheta_{j1}(k, \omega) &= (J_{k-2}(\lambda R_j) - 2J_k(\lambda R_j) + J_{k+2}(\lambda R_j))/4 + \\ &+ (\nu/(2R_j))(J_{k-1}(\lambda R_j) - J_{k+1}(\lambda R_j)) - (\nu k^2/R_j^2)J_k(\lambda R_j), \\ \vartheta_{j2}(k, \omega) &= (N_{k-2}(\lambda R_j) - 2N_k(\lambda R_j) + N_{k+2}(\lambda R_j))/4 + \\ &+ (\nu/(2R_j))(N_{k-1}(\lambda R_j) - N_{k+1}(\lambda R_j)) - (\nu k^2/R_j^2)N_k(\lambda R_j), \\ \vartheta_{j3}(k, \omega) &= (I_{k-2}(\lambda R_j) + 2I_k(\lambda R_j) + I_{k+2}(\lambda R_j))/4 + \\ &+ (\nu/(2R_j))(I_{k-1}(\lambda R_j) + I_{k+1}(\lambda R_j)) - (\nu k^2/R_j^2)I_k(\lambda R_j), \\ \vartheta_{j4}(k, \omega) &= -(K_{k-2}(\lambda R_j) + 2K_k(\lambda R_j) + K_{k+2}(\lambda R_j))/4 - \\ &- (\nu/(2R_j))(K_{k-1}(\lambda R_j) + K_{k+1}(\lambda R_j)) - (\nu k^2/R_j^2)K_k(\lambda R_j), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{j+2,1}(k, \omega) &= (k^2/R_j^3)J_k(\lambda R_j) + ((\nu - 1)k^2/R_j^2 - \lambda^2)(J_{k-1}(\lambda R_j) - J_{k+1}(\lambda R_j))/2, \\ \vartheta_{j+2,2}(k, \omega) &= (k^2/R_j^3)N_k(\lambda R_j) + ((\nu - 1)k^2/R_j^2 - \lambda^2)(N_{k-1}(\lambda R_j) - N_{k+1}(\lambda R_j))/2, \\ \vartheta_{j+2,3}(k, \omega) &= (k^2/R_j^3)I_k(\lambda R_j) + ((\nu - 1)k^2/R_j^2 + \lambda^2)(I_{k-1}(\lambda R_j) + I_{k+1}(\lambda R_j))/2, \\ \vartheta_{j+2,3}(k, \omega) &= (k^2/R_j^3)I_k(\lambda R_j) + ((\nu - 1)k^2/R_j^2 + \lambda^2)(I_{k-1}(\lambda R_j) + I_{k+1}(\lambda R_j))/2, \\ \vartheta_{j+2,4}(k, \omega) &= (k^2/R_j^3)K_k(\lambda R_j) + ((1 - \nu)k^2/R_j^2 - \lambda^2)(K_{k-1}(\lambda R_j) + K_{k+1}(\lambda R_j))/2 \\ &(j = \overline{1, 2}), \quad \lambda = ((\varsigma - \rho h \omega^2)/D)^{1/4}, \end{aligned}$$

а радиальные составляющие  $W_{m0}(r)$  комплексных амплитудных функций в представлениях базисных нормальных волн с волновыми числами  $k_m$

$$W_m(r, \theta, t) = W_{0m}(r) \exp(-i(\omega t - k_m \theta)), \quad (7)$$

могут быть записаны в форме

$$W_{m0}(r) = a_{1m}J_{k_m}(\lambda r) + a_{2m}N_{k_m}(\lambda r) + a_{3m}I_{k_m}(\lambda r) + a_{4m}K_{k_m}(\lambda r), \quad (8)$$

где  $a_{lm}$  ( $l = \overline{1, 4}$ ) – алгебраические дополнения элементов  $\vartheta_{1l}(k_m, \omega)$  матрицы  $\|\vartheta_{qp}(k_m, \omega)\|$ ;  $J_{k_m}(\lambda r)$ ,  $N_{k_m}(\lambda r)$ ,  $I_{k_m}(\lambda r)$ ,  $K_{k_m}(\lambda r)$  – специальные цилиндрические функции первого и второго рода.

**2. Схема решения задачи в рамках принятой концепции.** В соответствии с избранным способом решения рассматриваемой задачи, комплексные амплитудные составляющие в представлениях волновых полей  $W_j(r_j, \theta_j, t) = W_{aj}(r_j, \theta_j) \exp(-i\omega t)$  для каждого из полукольцевых фрагментов со срединными плоскостями  $S_j$  аппроксимируются разложениями по базисным функциям  $W_{0mj}(r_j) \exp(ik_{mj}\theta_j)$ , где

$$W_{0mj}(r) = a_{1mj}J_{k_{mj}}(\lambda r_j) + a_{2mj}N_{k_{mj}}(\lambda r_j) + a_{3mj}I_{k_{mj}}(\lambda r_j) + a_{4mj}K_{k_{mj}}(\lambda r_j), \quad (9)$$

и записываются для анализируемого в данной работе случая в форме

$$W_{0j}(r_j, \theta_j) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{mj}W_{0mj}(r_j) \exp(ik_{mj}\theta_j) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{mj}W_{amj}(r_j, \theta_j). \quad (10)$$

Используемые в расчетах редуцируемые разложения (10) при  $m = \overline{1, 2M}$  представляются в векторно-матричной форме

$$\begin{aligned} W_{0j}(r_j, \theta_j) &= \vec{b}_j \vec{W}_{aj}^T(r_j, \theta_j), \\ \vec{b}_j &= (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{mj}, \dots, b_{2M,j}), \\ \vec{W}_{aj}(r_j, \theta_j) &= (W_{a1j}(r_j, \theta_j), W_{a2j}(r_j, \theta_j), \dots, W_{amj}(r_j, \theta_j), \dots, W_{a,2M,j}(r_j, \theta_j)). \end{aligned} \quad (11)$$

На основе (10), (11), с учетом соотношений (2), соответственно записываются выражения

$$M_{0\theta\theta j}(r_j, \theta_j) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{mj}M_{0\theta\theta mj}(r_j) \exp(ik_{mj}\theta_j) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{mj}M_{a\theta\theta mj}(r_j, \theta_j), \quad (12)$$

$$N_{0\theta j}(r_j, \theta_j) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{mj}N_{0\theta mj}(r_j) \exp(ik_{mj}\theta_j) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{mj}N_{a\theta mj}(r_j, \theta_j), \quad (13)$$

а также их редуцируемые векторные аналоги

$$\begin{aligned} M_{0\theta\theta j}(r_j, \theta_j) &= \vec{b}_j \vec{M}_{a\theta\theta j}^T(r_j, \theta_j), \\ \vec{M}_{a\theta\theta j}(r_j, \theta_j) &= \\ &= (M_{a\theta\theta 1j}(r_j, \theta_j), M_{a\theta\theta 2j}(r_j, \theta_j), \dots, M_{a\theta\theta mj}(r_j, \theta_j), \dots, M_{a,\theta,2M,j}(r_j, \theta_j)); \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} N_{0\theta j}(r_j, \theta_j) &= \vec{b}_j \vec{N}_{a\theta j}^T(r_j, \theta_j), \\ \vec{N}_{a\theta j}(r_j, \theta_j) &= (N_{a\theta 1j}(r_j, \theta_j), N_{a\theta 2j}(r_j, \theta_j), \dots, N_{a\theta mj}(r_j, \theta_j), \dots, N_{a,\theta,2M,j}(r_j, \theta_j)). \end{aligned} \quad (15)$$

При учете идентичности физико-механических свойств материалов фрагментов  $S_j$  и периодичности геометрической формы рассматриваемой меандровой пластины, а также исходя из предположения о постоянстве параметра редукции  $2M$  для всех ее фрагментов и полной однотипности применяемой методики алгебраизации функциональных краевых условий (1), (3), (4) на всех поверхностях  $\Gamma_j$  ( $j = \overline{0, 2N}$ ) на основе соотношений (2), (7)–(15) рассматриваемая краевая задача может быть сведена к последовательности следующих из этих условий матрично-векторных равенств

$$\begin{aligned}
 Q_1^{(-)} \vec{b}_1 &= \vec{q}_0, \\
 Q_1^{(+)} \vec{b}_1 &= Q_2^{(-)} \vec{b}_2, \\
 Q_2^{(+)} \vec{b}_2 &= Q_3^{(-)} \vec{b}_3, \\
 Q_3^{(+)} \vec{b}_3 &= Q_4^{(-)} \vec{b}_4, \\
 &\dots\dots\dots \\
 Q_{2N-1}^{(+)} \vec{b}_{2N-1} &= Q_{2N}^{(-)} \vec{b}_{2N}, \\
 Q_{2N}^{(+)} \vec{b}_{2N} &= \vec{q}_{2N},
 \end{aligned} \tag{16}$$

в которых

$$\begin{aligned}
 Q_1^{(+)} &= Q_3^{(+)} = Q_5^{(+)} = \dots = Q_{2N-1}^{(+)}, \\
 Q_2^{(-)} &= Q_4^{(-)} = Q_6^{(-)} = \dots = Q_{2N}^{(-)};
 \end{aligned}$$

$Q_j^{(-)}$ ,  $Q_j^{(+)}$  – соответственно матрицы-следствия применения алгоритмов алгебраизации краевых условий на поверхностях  $\Gamma_{j-1}$  и  $\Gamma_j$  ( $j = \overline{1, 2N}$ ) с размерностями  $M \times 2M$ . Эффективными приемами алгебраизации функциональных граничных условий (1), (3), (4) со сведением их к системам линейных алгебраических уравнений в рассматриваемой задаче являются применение дискретного метода наименьших квадратов, комбинированного метода коллокаций и квадратичной минимизации.

При интерпретации (16) как системы линейных алгебраических уравнений порядка  $4NM$  с разреженной блочно-ленточной матрицей относительно компонент вектора  $\vec{b}_\Sigma = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \dots, \vec{b}_{2N})^T$ , для ее эффективного решения применимы специализированные методы, представленные в [20, 21]. В частности, может быть использован следующий алгоритм: при совместном рассмотрении двух первых матрично-векторных равенств системы (16)

$$\begin{aligned}
 Q_1^{(-)} \vec{b}_1 &= \vec{q}_0, \\
 Q_1^{(+)} \vec{b}_1 &= Q_2^{(-)} \vec{b}_2,
 \end{aligned}$$

их совокупность можно интерпретировать как систему линейных алгебраических уравнений относительно  $\vec{b}_1$  с матрицей порядка  $2M$

$$H_1 = \begin{pmatrix} Q_1^{(-)} \\ Q_1^{(+)} \end{pmatrix},$$

из которой  $\vec{b}_1$  можно выразить через компоненты заданного вектора  $\vec{q}_0$  и вектора неизвестных  $\vec{b}_2$ ; затем аналогично объединяя второе и третье соотношение (16), и используя полученное выше соотношение связи  $\vec{b}_1$  и  $\vec{b}_2$ , можно записать систему линейных уравнений, из которых компоненты  $\vec{b}_2$  выражаются через компоненты  $\vec{b}_3$ , и так далее. На последнем шаге этой процедуры формируется система линейных алгебраических уравнений порядка  $2M$  относительно компонент вектора коэффициентов  $\vec{b}_{2N}$  с правой частью, выражаемой через  $\vec{q}_{2N}$ . Получая ее решение и поочередно рассматривая записываемые на предшествующих шагах алгоритма алгебраические системы, в которых  $\vec{b}_j$  выражаются через  $\vec{b}_{j+1}$ , можно, в итоге, получить компоненты всех векторов с коэффициентами разложений волновых полей в фрагментах меандрового волновода по систем базисных нормальных окружных волн изгиба.

**Заключение.** Результатом исследований является разработка эффективно алгоритмизируемой теоретической численно-аналитической методики анализа модели распространения гармонических изгибных упругих волн по тонкому пластинчатому волноводу меандровой геометрической формы, размещенному на упругой подложке – линейном упругом основании. Методика базируется использовании представлений полей гармонических колебательных смещений в полукольцевых фрагментах рассматриваемого волновода рядами по соответствующим базисным системам бегущих и стоячих краевых нормальных изгибных волн вдоль окружных угловых направлений кольцевых волноводов, а неопределенные коэффициенты этих рядов отыскиваются с применением концепции частичных областей путем реализации процедуры поэтапного «сшивания» волновых полей  $W_j$  и  $W_{j+1}$  на границах смежных элементов волновода. В процессе «сшивания» полей в фрагментах волновода на основе граничных условий их идеального механического контакта при изгибном деформировании, используются методы алгебраизации функциональных краевых условий, и определение коэффициентов, описывающих решение задачи, сводится к анализу систем линейных алгебраических уравнений относительно искомых постоянных коэффициентов с диагонально-блочными разреженными матрицами на базе разработанных эффективных подходов.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО ДонГУ в рамках государственного задания (№ госрегистрации 1023030100040-4-1.1.2;2.3.1).

1. *Бреховских Л.М.* О поверхностных волнах в твердом теле, удерживаемых кривизной границы / Л.М. Бреховских // Акуст. журн. – 1960. – Т. 13, № 4. – С. 541–554.
2. *Joseph L.R.* Ultrasonic waves in Solid Media. – Cambridge University Press, 1999. – 121 p.
3. *Голубева Е.В.* О винтовых поверхностных волнах на упругом цилиндре / Е.В. Голубева // Акуст. журн. – 1986. – Т. 22, № 3. – С. 385–386.
4. *Тютюкин В.В.* Волноводные свойства плоской кольцевой пластины. I. Изгибные волны / В.В. Тютюкин // Акуст. журн. – 2003. – Т. 49, № 6. – С. 843–851.
5. *Мелешко В.В.* Упругие волноводы: история и современность / В.В. Мелешко, А.А. Бондаренко, С.А. Довгий, А.Н. Трофимчук, Г.Я. Ванн Хейст // Математические методы и физико-механические поля. – 2008. – Т. 51, № 2. – С. 86–104.
6. *Ватульян А.О.* Исследование волновых процессов в упругих топографических волново-

- дах / А.О. Ватульян, Л.И. Паринова // Акуст. журн. – 2021. – Т. 67, № 2. – С. 119–125.
7. Губанова Ю.А. Формирование полос непропускания спин-волнового сигнала в меандровых структурах из ЖИГ / Ю.А. Губанова, В.А. Губанов, Е.Н. Бегинин, А.В. Садовников // ЖЭТФ. – 2023. – Т. 163, вып. 1. – С. 125–127.
  8. Арсеньева Е.М. Исследование дисперсионных характеристик поверхностной волны в однопроводниковой меандровой линии / Е.М. Арсеньева // Журнал радиоэлектроники. – 2011. – № 1. – С. 1–14.
  9. Болнокин В.Е. Сдвиговые волны в звене волновода меандровой структуры с изломом дугообразной формы / В.Е. Болнокин // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды XVIII Международной конференции (Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 г.): в 2 т. – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2016. – С. 80–84.
  10. Сторожев В.И. Распространение волн сдвига по ортотропному волноводу меандровой геометрической структуры / В.И. Сторожев, М.Н. Пачева, С.А. Прийменко // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов XI Всероссийской школы-семинара (пос. Дивноморское, 23–27 мая 2016 г.). – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2016. – С. 124.
  11. Болнокин В.Е. Трансформация поперечных волн в зоне прямоугольного излома волноводного слоя с сечением меандровой структуры / В.Е. Болнокин, М.Н. Пачева, В.И. Сторожев // Донецкие чтения 2016. Образование, наука и вызовы современности: Материалы I Международной научной конференции (Донецк, 16–18 мая 2016 г.). – Том 1. Физико-математические, технические науки и экология. – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2016. – С. 25–27.
  12. Речицкий В.И. Акустоэлектронные радиокомпоненты. Схемы, топология, конструкции / В.И. Речицкий. – М.: Радио и связь, 1987. – 192 с.
  13. Морган Д. Устройства обработки сигналов на поверхностных акустических волнах / Д. Морган. – М.: Радио и связь, 1990. – 415 с.
  14. Бугаев А.С. Устройства на поверхностных акустических волнах / А.С. Бугаев, В.Ф. Дмитриев, С.В. Кулаков. – Санкт-Петербург: ГУАП, 2009. – 187 с.
  15. Болнокин В.Е. Изгибные волны в окружном направлении кольцевой трансверсально-изотропной пластины с закрепленными краями / В.Е. Болнокин, А.В. Глущенко, Л.В. Дубяго, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2021. – № 4 (77). – С. 35–43.
  16. Болнокин В.Е. Изгибные волны в окружном направлении кольцевой трансверсально-изотропной пластины с шарнирно опертыми граничными контурами / В.Е. Болнокин, А.В. Глущенко, Л.В. Дубяго, В.И. Сторожев // Механика твердого тела. – 2021. – Вып. 51. – С. 114–121.
  17. Дубяго Л.В. Дисперсионный спектр упругих волн изгиба вдоль окружного направления в тонкой изотропной кольцевой пластине с жестко закрепленными либо шарнирно опертыми краями / Л.В. Дубяго, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2019. – № 4 (69). – С. 48–56.
  18. Болнокин В.Е. Моды изгибных упругих волн в окружном направлении изотропной кольцевой пластины на упругом основании / В.Е. Болнокин, В.И. Сторожев, Л.В. Дубяго // Донецкие чтения 2020: Материалы V Международной научной конференции (Донецк, 17–18 ноября 2020 г.). – Том 1: Физико-математические и технические науки. Часть 1. – Донецк: ДонНУ, 2020. – С. 35–38.
  19. Глущенко А.В. Окружные нормальные изгибные волны в кольцевой пластине с двумя разнородными концентрическими составляющими / А.В. Глущенко, Л.В. Дубяго, С.В. Сторожев, В.А. Шалдырван // Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки. – 2023. – № 1. – С. 12–20. – EDN QXXDZO.
  20. Писсанецки С. Технология разреженных матриц / С. Писсанецки. – М.: Мир, 1988. – 410 с.
  21. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем / Дж. Ортега. – М.: Мир, 1991. – 367 с.



**I.A. Moiseyenko, M.N. Pacheva, V.I. Storozhev**

**Method for analysis of the model of propagation of flexural waves over a thin plate meander waveguide on an elastic substrate.**

A numerical-analytical technique for analyzing the effects of the passage of a harmonic bending wave along a thin isotropic plate-waveguide of a meander geometric shape with alternating identical contacting differently convex semi-ring sections, which lies on the linear elastic substrate is proposed. The technique is based on the use of exact analytical representations for the fields of oscillatory displacements in semi-ring fragments of a waveguide in the form of series on basic systems of traveling and edge standing circumferential normal bending waves in ring plates on an elastic substrate and on the application of the concept of partial regions with sequential “stitching” of wave fields at the boundaries adjacent semi-ring waveguide elements. The analyzed wave processes are described by the applied theory of dynamic bending deformation of thin plates.

**Keywords:** *thin isotropic plates, wave of bending deformation, linear elastic substrates, meander geometric shape, propagation of harmonic bending waves, partial domain method, expansions on basic normal waves.*

*Получено 17.11.2023*

УДК 539.3

doi:10.24412/0136-4545-2023-4-48-60

EDN:RBCKMG



©2023. Е.С. Глушанков<sup>1</sup>, А.С. Гольцев<sup>2</sup>, А.Б. Мироненко<sup>3</sup>

## ТЕРМОЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСВЯЗНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЬЕЗОПЛАСТИНКИ С ЖЕСТКО ПОДКРЕПЛЕННЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В УСЛОВИЯХ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

В данной работе приведены результаты исследований термоэлектромагнитоупругого состояния бесконечной многосвязной пластинки из пьезоматериала, находящейся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой. Контуры некоторых отверстий в пластинке жестко подкреплены. С помощью численных исследований изучено влияние геометрических характеристик пластинки, свойств ее материала, характеристик конвективного теплообмена, а также подкреплений на контурах отверстий на значения основных характеристик термоэлектромагнитоупругого состояния пластинки.

**Ключевые слова:** линейный поток тепла, конвективный теплообмен, многосвязная пластинка из пьезоматериала, жестко подкрепленные контуры отверстий, температурные напряжения, комплексные потенциалы.

**Введение.** В современной науке и технике широко применяются конструкции, где в качестве элементов используются тонкие пластинки из пьезоматериалов [1]. В этих пластинках по различным причинам могут присутствовать

---

<sup>1</sup>Глушанков Евгений Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: evgenij.glushankov@gmail.com.

*Glushankov Evgenij Sergeevich* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

<sup>2</sup>Гольцев Аркадий Сергеевич – доктор физ.-мат. наук, проф., зав. каф. прикладной механики и компьютерных технологий ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: a.s.goltsev@mail.ru.

*Goltsev Arkady Sergeevich* – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Applied Mechanics and Computer Technologies.

<sup>3</sup>Мироненко Андрей Борисович – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости и вычислительной математики имени акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: a.mironenko@donnu.ru.

*Mironenko Andrey Borisovich* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

концентраторы напряжений типа отверстий или трещин. В процесс эксплуатации пластинки могут подвергаться действию различных температурных полей, в результате чего в пластинке могут возникать высокие концентрации напряжений [2, 3]. К настоящему времени решены самые различные задачи о действии температурных полей в тонких пластинках из пьезоматериалов [4, 5].

В работах [6–9] решено большое количество задач определения термоупругого состояния для тел из материалов, не обладающих пьезосвойствами, когда на границе тел действует конвективный теплообмен с внешней средой.

В работе [10] решена задача о действии линейного потока в многосвязной пластинке из пьезоматериала, на контурах которой действует конвективный теплообмен с внешней средой. При проведении численных исследований контуры пластинки полагались неподкрепленными.

Работа [11] посвящена исследованию термонапряженного состояния многосвязной пластинки из анизотропного материала с жестко подкрепленными отверстиями.

В данной работе исследовано влияние жесткого подкрепления контуров отверстий на термоэлектромагнитоупругое состояние пластинки из пьезоматериала, находящейся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой. Для случая бесконечной пластинки с одним жестко подкрепленным эллиптическим отверстием приведено точное аналитическое решение задачи. Для общего случая многосвязности пластинки задача решена с использованием метода наименьших квадратов. Проведены численные исследования термоэлектромагнитоупругого состояния пластинки с одним или двумя круговыми отверстиями. Показано влияние жесткого подкрепления контуров отверстий, геометрических характеристик пластинки, свойств ее материала и коэффициента теплообмена на распределение напряжений в пластинке.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим бесконечную многосвязную пластинку из пьезоматериала, занимающую область  $S$ , ограниченную контурами эллиптических отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) с центрами в точках  $O_l(x_{0l}, y_{0l})$ , полуосями  $a_l, b_l$ , углами поворота  $\varphi_l$  (рис. 1). Контур отверстия могут произвольно располагаться относительно друг друга. Через контуры отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) имеет место конвективный теплообмен с коэффициентами  $h_l$  с внешней средой температуры  $\mathfrak{T}_l$ . Контур  $L_l$  не подкреплен либо жестко подкреплен. На бесконечности отсутствуют тепловые, механические и электромагнитные воздействия.

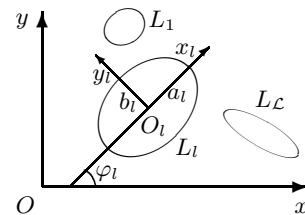


Рис. 1

Несвязанную статическую задачу термоэлектромагнитоупругости будем решать с использованием комплексных потенциалов. Тогда задача сводится к последовательному определению комплексного потенциала теплопроводности  $F_5(z_5)$ , а затем комплексных потенциалов термоэлектромагнитоупругости  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) из граничных условий соответствующих задач. После этого значения

основных характеристик ТЭМУС (температура  $T$ , плотности потока тепла  $q_x, q_y$ , напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , индукции электромагнитного поля  $D_x, D_y, B_x, B_y$ , напряженности электромагнитного поля  $E_x, E_y, H_x, H_y$ , перемещения  $u, v$ , потенциалы электромагнитного поля  $\varphi, \psi$ ) в любой точке пластинки определяются по формулам [4, 5]

$$T = 2 \operatorname{Re} F_5(z_5); \quad (1)$$

$$(q_x, q_y) = 2 \operatorname{Re} i\kappa(\mu_5, -1)F_5'(z_5); \quad (2)$$

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\mu_k^2, 1, -\mu_k)\Phi_k'(z_k); \quad (3)$$

$$(D_x, D_y, B_x, B_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\nu_k\mu_k, -\nu_k, \rho_k\mu_k, -\rho_k)\Phi_k'(z_k); \quad (4)$$

$$(E_x, E_y, H_x, H_y) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0)\Phi_k'(z_k); \quad (5)$$

$$(u, v, \varphi, \psi) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0)\Phi_k(z_k). \quad (6)$$

Здесь

$$\kappa = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2};$$

$\mu_5$  — корень характеристического уравнения задачи теплопроводности [4, 5]

$$k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} = 0; \quad (7)$$

$\mu_k$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) — корни характеристического уравнения задачи термоэлектромагнитоупругости [4, 5]

$$l_8(\mu) = 0; \quad (8)$$

где

$$l_8(\mu) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix};$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11}\mu^4 + 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 + 2s_{26}\mu + s_{22},$$

$$l_{3g}(\mu) = g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu + g_{22},$$

$$l_{3p}(\mu) = p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu + p_{22},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22},$$

$$l_{2\nu}(\mu) = -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22};$$

$$\nu_k = \frac{l_{3p}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1,4}), \quad \nu_5 = \frac{r_\chi}{r_5},$$

$$\rho_k = \frac{l_{3g}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3p}(\mu_k)l_{2\beta}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1,4}), \quad \rho_5 = \frac{r_\omega}{r_5};$$

$$r_5 = \frac{l_5(\mu_5)}{l_8(\mu_5)}, \quad r_\chi = \frac{l_\chi(\mu_5)}{l_8(\mu_5)}, \quad r_\omega = \frac{l_\omega(\mu_5)}{l_8(\mu_5)};$$

$$l_5(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{1t}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{1m}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\chi(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\omega(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) \end{vmatrix};$$

$$l_{2\alpha}(\mu_5) = -\alpha_1\mu_5^2 + \alpha_6\mu_5 - \alpha_2,$$

$$l_{1t}(\mu_5) = t_1\mu_5 - t_2,$$

$$l_{1m}(\mu_5) = m_1\mu_5 - m_2;$$

$$p_k = s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} - (g_{11}\mu_k - g_{12})\nu_k - (p_{11}\mu_k - p_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}\alpha_1}{r_5},$$

$$q_k = s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} - (g_{21}\mu_k - g_{22})\nu_k - (p_{21}\mu_k - p_{22})\rho_k + \frac{\delta_{k5}\alpha_2}{r_5\mu_5},$$

$$r_k^0 = g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})\nu_k - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}t_1}{r_5},$$

$$h_k^0 = p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\nu_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k + \frac{\delta_{k5}m_1}{r_5};$$

$$\Phi_5(z_5) = r_5 \int F_5(z_5) dz_5;$$

$k_{ij}$  — коэффициенты теплопроводности материала пластинки;  $s_{ij}$  — коэффициенты деформации материала пластинки;  $g_{ij}$  и  $p_{ij}$  — пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты материала пластинки;  $\beta_{ij}$ ,  $\nu_{ij}$  и  $\chi_{ij}$  — коэффициенты диэлектрической, электромагнитной и магнитной проницаемостей материала пластинки;  $\alpha_i$  — коэффициенты теплового расширения материала пластинки;  $t_i$  и  $m_i$  — пирозлектрические и пиромагнитные модули материала пластинки;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Комплексные потенциалы  $F_5(z_5)$ ,  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1,4}$ ) определены в многосвязных областях  $S_5$ ,  $S_k$ , получаемых из области  $S$  аффинными преобразованиями [4, 5]

$$z_5 = x + \mu_5 y, \quad (9)$$

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (10)$$

Эти функции в общем случае многосвязности имеют вид [4, 5]

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l} w_{5l}(z_5) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5); \quad (11)$$

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k). \quad (12)$$

Здесь  $c_5$ ,  $D_{5l}$  — вещественные постоянные, определяемые из граничных условий задачи теплопроводности, причем  $D_{5l} = -q_l/4\pi\kappa$ , где  $q_l$  — суммарный тепловой поток через контур  $L_l$  в область  $S$ ;  $w_{5l}(z_5) = \ln(z_5 - z_{5l})$ ;  $z_{5l}$  — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (9) произвольным точкам внутри контуров  $L_{5l}$ , получаемых из контуров  $L_l$  аффинным преобразованием (9);  $c_{5ln}$  — комплексные постоянные, определяемые из условий на контурах пластинки;  $\varphi_{5ln}(z_5) = \zeta_{5l}^{-n}$ ;  $\zeta_{5l}$  — комплексные переменные, определяемые из конформных отображений;

$$N_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl});$$

$\Gamma_k$ ,  $A_{kl}$ ,  $B_{kl}$  — постоянные, определяемые из систем уравнений

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, \nu_k, \mu_k \nu_k, \rho_k, \mu_k \rho_k) \Gamma_k = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);$$

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i A_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);$$

$$\sum_{k=1}^5 (1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) i B_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);$$

$\Gamma_5 = r_5 c_5$ ;  $A_{5l} = r_5 D_{5l}$ ;  $B_{5l} = r_5 (c_{511} R_{51} - D_{5l} z_{5l})$ ;  $w_{kl} = \ln(z_k - z_{kl})$ ;  $z_{kl}$  — точки, соответствующие при аффинном преобразовании (10) произвольным точкам внутри контуров  $L_{kl}$ , получаемых из контуров  $L_l$  аффинными преобразованиями вида (10);  $\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}$ ;  $\zeta_{kl}$  — комплексные переменные, определяемые из конформных отображений.

В локальных системах координат  $O_l x_l y_l$  параметрические уравнения эллипсов (рис. 1) имеют вид [4, 5]

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta,$$

а в основной системе  $Oxy$  координат —

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l. \end{aligned}$$

Здесь  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) — угловой параметр уравнения контура.

Комплексные переменные  $\zeta_{5l}$ ,  $\zeta_{kl}$  определяются из конформных отображений внешностей единичных кругов  $|\zeta_{5l}| \geq 1$ ,  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{5l}$ ,  $L_{kl}$  [4, 5]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left( \zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}. \end{aligned}$$

Функция  $F_5(z_5)$  должна удовлетворять граничному условию [10]

$$2 \operatorname{Re} (h_l F_5(\tau_5) + i \kappa \delta_{5,s}(\tau_5) F_5'(\tau_5)) = h_l \mathfrak{I}_l, \quad (14)$$

где  $\tau_5$  — точка, получаемая из граничной точки при аффинном преобразовании (9);  $\delta_{5,s}(\tau_5) = d\tau_5/ds$ ,  $s$  — дуга контура отверстия.

Функции  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) должны удовлетворять граничным условиям задачи термоэлектромагнитоупругости

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) \Phi_k(\tau_k) = (f_{l1}(\tau), f_{l2}(\tau), f_{l3}(\tau), f_{l4}(\tau)), \quad (15)$$

или в дифференциальной форме [4, 5] —

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) \delta_{k,s}(\tau_k) \Phi_k'(\tau_k) &= \\ &= \left( \frac{df_{l1}}{ds}(\tau), \frac{df_{l2}}{ds}(\tau), \frac{df_{l3}}{ds}(\tau), \frac{df_{l4}}{ds}(\tau) \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\tau_k$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) — точки, получаемые из граничной точки при аффинных преобразованиях (10);  $\tau$  — аффикс граничной точки;  $\delta_{k,s}(\tau_k) = d\tau_k/ds$ . Для неподкрепленных контуров  $L_l$

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (1, \mu_k, \nu_k, \rho_k),$$

$$(f_{l1}(\tau), f_{l2}(\tau), f_{l3}(\tau), f_{l4}(\tau)) = (c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}),$$

а для жестко подкреплённых контуров

$$(d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) = (p_k, q_k, \nu_k, \rho_k),$$

$$(f_{l1}(\tau), f_{l2}(\tau), f_{l3}(\tau), f_{l4}(\tau)) = (u_l(\tau), v_l(\tau), c_{l3}, c_{l4});$$

$c_{lj}$  — неизвестные постоянные интегрирования;  $u_l(\tau), v_l(\tau)$  — заданные на границе значения перемещений.

## 2. Решение задачи для бесконечной пластинки с эллиптическим отверстием.

Рассмотрим отнесённую к декартовой системе координат бесконечную пластинку с эллиптическим отверстием, контур которого обозначим через  $L_1$ , его полуоси —  $a_1, b_1$ , угол поворота —  $\varphi_1$  (рис. 2). Центр эллиптического контура совпадает с началом координат. Через контур имеет место конвективный теплообмен с внешней средой температуры  $\mathfrak{T}_1$  с коэффициентом теплообмена  $h_1$ . На бесконечности отсутствуют тепловые, механические и электромагнитные воздействия. Контур отверстия жестко подкреплён, потоки электромагнитной индукции через него отсутствуют.

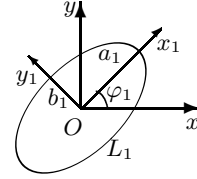


Рис. 2

*Задача теплопроводности.* На основе (11) функция  $F_5(z_5)$  принимает вид [10]

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{51n}}{\zeta_{51}^n}. \quad (17)$$

Подставляя функцию (17) в граничное условие (14) и применяя метод рядов, получим, что  $c_5 = \mathfrak{T}_1/2$  и  $c_{51n} = 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Таким образом, комплексный потенциал теплопроводности (17) имеет вид

$$F_5(z_5) = c_5 = \frac{\mathfrak{T}_1}{2}. \quad (18)$$

Следовательно, во всех точках пластинки температура является постоянной и равна  $\mathfrak{T}_1$ , а плотности потоков тепла равны нулю.

*Задача термоэлектромагнитоупругости.* Для функции  $\Phi_5(z_5)$  получим [10]

$$\Phi_5(z_5) = r_5 \int F_5(z_5) dz_5 = \Gamma_5 z_5, \quad (19)$$

где  $\Gamma_5 = r_5 c_5$ . Тогда функции  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) будем искать в виде

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \frac{a_{k11}}{\zeta_{k1}}. \quad (20)$$

Используя конформные отображения (13), перепишем функции (19) и (20) в виде

$$\Phi_5(z_5) = \Gamma_5 R_{51} \zeta_{51} + \frac{\Gamma_5 R_{51} m_{51}}{\zeta_{51}}, \quad (21)$$



$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k R_{k1} \zeta_{k1} + \frac{\Gamma_k R_{k1} m_{k1} + a_{k11}}{\zeta_{k1}}. \quad (22)$$

Подставим функции (21) и (22) в граничные условия (15), при этом учитывая, что на контуре отверстия  $\zeta_{k1} = \sigma$  и  $\overline{\zeta_{k1}} = \overline{\sigma} = \frac{1}{\sigma}$  ( $k = \overline{1, 5}$ ):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^4 \left[ (p_k, q_k, \nu_k, \rho_k) \left( \Gamma_k R_{k1} \sigma + \frac{\Gamma_k R_{k1} m_{k1} + a_{k11}}{\sigma} \right) + \right. \\ & \left. + (\overline{p}_k, \overline{q}_k, \overline{\nu}_k, \overline{\rho}_k) \left( \frac{\overline{\Gamma}_k \overline{R}_{k1}}{\sigma} + (\overline{\Gamma}_k \overline{R}_{k1} \overline{m}_{k1} + \overline{a}_{k11}) \sigma \right) \right] = \\ & = - \left[ (p_5, q_5, \nu_5, \rho_5) \left( \Gamma_5 R_{51} \sigma + \frac{\Gamma_5 R_{51} m_{51}}{\sigma} \right) + \right. \\ & \left. + (\overline{p}_5, \overline{q}_5, \overline{\nu}_5, \overline{\rho}_5) \left( \frac{\overline{\Gamma}_5 \overline{R}_{51}}{\sigma} + (\overline{\Gamma}_5 \overline{R}_{51} \overline{m}_{51} + \overline{a}_{511}) \sigma \right) \right]. \end{aligned}$$

Применим метод рядов. Тогда, приравнивая коэффициенты при  $\frac{1}{\sigma}$ , получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных  $a_{k11}$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^4 \left[ (p_k, q_k, \nu_k, \rho_k) (\Gamma_k R_{k1} m_{k1} + a_{k11}) + (\overline{p}_k, \overline{q}_k, \overline{\nu}_k, \overline{\rho}_k) \overline{\Gamma}_k \overline{R}_{k1} \right] = \\ & = - \left[ (p_5, q_5, \nu_5, \rho_5) \Gamma_5 R_{51} m_{51} + (\overline{p}_5, \overline{q}_5, \overline{\nu}_5, \overline{\rho}_5) \overline{\Gamma}_5 \overline{R}_{51} \right]. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, \nu_k, \rho_k) a_{k11} = & - \sum_{k=1}^5 \left[ (p_k, q_k, \nu_k, \rho_k) \Gamma_k R_{k1} m_{k1} + \right. \\ & \left. + (\overline{p}_k, \overline{q}_k, \overline{\nu}_k, \overline{\rho}_k) \overline{\Gamma}_k \overline{R}_{k1} \right]. \end{aligned}$$

После решения этой системы уравнений становятся известными постоянные  $a_{k11}$ , а следовательно, и функции  $\Phi_k(z_k)$ , и тогда можно в любой точке пластинки находить значения основных характеристик ТЭМУС по формулам (3)–(6).

**3. Решение задачи для бесконечной многосвязной пластинки.** В общем случае многосвязной области (рис. 1) неизвестные постоянные  $c_5$ ,  $D_{5l}$ ,  $c_{5ln}$ ,  $a_{kln}$ , входящие в функции (11) и (12), определяются из граничных условий (14) и (16) с использованием метода наименьших квадратов. Для этого на контурах  $L_i$  ( $i = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) выберем систему точек  $M_{im}(x_{im}, y_{im})$  ( $m = \overline{1, \mathcal{M}_i}$ ), в которых будем минимизировать невязки граничных условий задач теплопроводности и термоэлектромагнитоупругости.

*Задача теплопроводности.* При подстановке функции (11) в граничное условие (14), для определения неизвестных постоянных  $c_5$ ,  $D_{5l}$ ,  $c_{5ln}$  получается система линейных алгебраических уравнений [10]

$$\begin{aligned}
 & 2 \operatorname{Re} h_l c_5 + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (h_l w_{5l}(\tau_{5im}) + i \kappa \delta_{5,s}(\tau_{5im}) w'_{5l}(\tau_{5im})) D_{5l} + \\
 & + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (h_l \varphi_{5ln}(\tau_{5im}) + i \kappa \delta_{5,s}(\tau_{5im}) \varphi'_{5ln}(\tau_{5im})) c_{5ln} = h_l \mathfrak{I}_l \\
 & (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}),
 \end{aligned} \tag{23}$$

где  $\tau_{5im} = x_{im} + \mu_5 y_{im}$ . После решения этой системы с использованием метода сингулярных разложений [12] постоянные  $c_5$ ,  $D_{5l}$ ,  $c_{5ln}$ , а следовательно, и комплексный потенциал теплопроводности (11), будут известны. По известной функции (11) можно в любой точке пластинки найти температуру и плотности потока тепла по формулам (1), (2) [4, 5, 10].

*Задача термоэлектромагнитоупругости.* При подстановке функций (11) и (12) в граничные условия (16) для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$  получается следующая система линейных алгебраических уравнений [10]:

$$\begin{aligned}
 & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) \varphi'_{kln}(\tau_{kim}) a_{kln} = \\
 & = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{kip} \delta_{k,s}(\tau_{kim}) N'_k(\tau_{kim}) - \\
 & - 2 \operatorname{Re} d_{5ip} \delta_{5,s}(\tau_{5im}) r_5 F_5(\tau_{5im}) + \frac{df_{ip}}{ds}(\tau_{im}) \\
 & (i = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, \mathcal{M}_i}, p = \overline{1, 4}),
 \end{aligned} \tag{24}$$

где  $\tau_{kim} = x_{im} + \mu_k y_{im}$ . После решения этой системы с использованием метода сингулярных разложений [12] постоянные  $a_{kln}$ , а следовательно, комплексные потенциалы термоэлектромагнитоупругости (12), будут известны. По известным функциям (12) можно в любой точке пластинки найти значения основных характеристик ТЭМУС по формулам (3)–(6) [4, 5, 10].

**4. Численные исследования.** При проведении численных расчетов количество членов в рядах Лорана в функциях (11), (12) и количество «коллокационных» точек  $M_{im}$  на контурах  $L_i$  увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (относительная погрешность составляла меньше сотых долей процента). Для этого необходимо было в указанных рядах оставлять от 50 до 100 членов, на каждом из контуров брать от 500 до 1500 «коллокационных точек».

Были проведены численные исследования для пластинки из композита  $VaTiO_3 - CoFe_2O_4$  (материал М1) [13]. Физико-механические постоянные этого

материала имеют значения:

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= 7,165 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad s_{22} = 6,797 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad s_{66} = 19,912 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \\
 s_{12} &= -2,337 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad g_{16} = 2,028 \cdot 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м}^2, \\
 g_{21} &= -0,496 \cdot 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м}^2, \quad g_{22} = 1,157 \cdot 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м}^2, \\
 p_{16} &= 1,850 \cdot 10^{-5} \text{ МТл}^{-1}, \quad p_{21} = 0,576 \cdot 10^{-5} \text{ МТл}^{-1}, \quad p_{22} = 1,186 \cdot 10^{-5} \text{ МТл}^{-1}, \\
 \beta_{11} &= 0,156 \cdot 10^3 \text{ МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}, \quad \beta_{22} = 0,137 \cdot 10^3 \text{ МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}, \\
 \nu_{11} &= -0,190 \cdot 10^{-1} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м} \cdot \text{МА}, \quad \nu_{22} = -0,185 \cdot 10^{-1} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м} \cdot \text{МА}, \\
 \chi_{11} &= 0,336 \cdot 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{МТл}^{-1}, \quad \chi_{22} = 0,119 \cdot 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{МТл}^{-1}, \\
 \alpha_1 &= 8,530 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad \alpha_2 = 1,990 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \\
 t_2 &= 133,000 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot (\text{МКл} \cdot \text{К})^{-1}, \quad m_2 = 133,000 \cdot 10^{-3} \text{ МА} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}, \\
 k_{11} &= 2,500 \cdot 1 \text{ Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}, \quad k_{22} = 2,500 \cdot 1 \text{ Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}.
 \end{aligned}$$

В таблице 1 для пластинки с одним или двумя круговыми отверстиями радиуса  $a$  ( $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a$ ) (рис. 3), расстояние между которыми равно  $c$ , через подкрепленные контуры которых действует конвективный теплообмен с внешней средой температуры  $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2 = 1$ , приведены значения нормальных напряжений  $\sigma_n/a_0$  в точках контура левого отверстия на площадках, параллельных контуру, в зависимости от значения  $c/a$ . Случай  $c/a = \infty$  соответствует пластинке с одним круговым от-

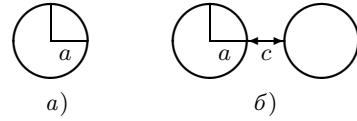


Рис. 3

Таблица 1. Значения напряжений  $\sigma_n/a_0$  в точках контура отверстия

$\theta$ , рад.	Значение $c/a$					
	0,1	0,5	1	2	10	$\infty$
Задача ГЭМУ						
0	5,074	1,944	1,293	0,938	0,714	0,667
$\pi/12$	2,159	1,466	1,105	0,865	0,691	0,676
$\pi/6$	0,297	0,732	0,741	0,698	0,628	0,619
$\pi/3$	0,108	0,266	0,344	0,409	0,461	0,463
$\pi/2$	0,369	0,349	0,345	0,352	0,380	0,385
$2\pi/3$	0,614	0,550	0,515	0,485	0,464	0,463
$5\pi/6$	0,842	0,767	0,722	0,680	0,627	0,619
$\pi$	0,941	0,863	0,817	0,771	0,708	0,667
Задача ТУ						
0	5,162	1,973	1,311	0,951	0,726	0,710
$\pi/12$	2,203	1,490	1,121	0,878	0,702	0,688
$\pi/6$	0,306	0,746	0,753	0,707	0,635	0,626
$\pi/3$	0,096	0,259	0,340	0,405	0,456	0,459
$\pi/2$	0,357	0,338	0,334	0,342	0,370	0,375
$2\pi/3$	0,613	0,547	0,511	0,482	0,459	0,459
$5\pi/6$	0,855	0,770	0,731	0,688	0,634	0,626
$\pi$	0,960	0,879	0,832	0,785	0,721	0,710

верстием. В таблице 2 для аналогичных случаев приведены значения напряжений  $\sigma_s/a_0$  в точках контура левого отверстия на площадках, перпендикулярных контуру.

Таблица 2. Значения напряжений  $\sigma_s/a_0$  в точках контура отверстия

$\theta$ , рад.	Значение $c/a$					
	0,1	0,5	1	2	10	$\infty$
Задача ТЭМУ						
0	1,250	0,289	0,084	-0,029	-0,101	-0,106
$\pi/12$	0,271	0,085	-0,023	-0,097	-0,152	-0,157
$\pi/6$	-0,431	-0,268	-0,258	-0,270	-0,293	-0,296
$\pi/3$	-0,911	-0,827	-0,789	-0,761	-0,743	-0,743
$\pi/2$	-1,070	-1,076	-1,078	-1,075	-1,067	-1,065
$2\pi/3$	-0,670	-0,697	-0,714	-0,728	-0,741	-0,743
$5\pi/6$	-0,230	-0,290	-0,263	-0,276	-0,293	-0,296
$\pi$	-0,040	-0,059	-0,071	-0,084	-0,102	-0,106
Задача ТУ						
0	1,483	0,386	0,158	0,035	-0,043	-0,048
$\pi/12$	0,375	0,143	0,024	-0,053	-0,111	-0,115
$\pi/6$	-0,417	-0,269	-0,260	-0,269	-0,288	-0,291
$\pi/3$	-0,914	-0,851	-0,821	-0,797	-0,780	-0,779
$\pi/2$	-1,074	-1,088	-1,081	-1,079	-1,070	-1,068
$2\pi/3$	-0,720	-0,745	-0,759	-0,770	-0,779	-0,779
$5\pi/6$	-0,216	-0,242	-0,257	-0,271	-0,288	-0,291
$\pi$	0,037	0,010	-0,007	-0,023	-0,045	-0,048

В таблице 3 для пластинки с двумя круговыми отверстиями радиуса  $a$ , расстояние между которыми равно  $c$  (рис. 3, б), через подкрепленные контуры которых действует конвективный теплообмен с коэффициентом  $h$  ( $h_1 = h_2 = h$ ) с внешней средой температуры  $\mathfrak{T}_1 = 1$ ,  $\mathfrak{T}_2 = 0$ , приведены значения нормальных напряжений  $\sigma_s/a_0$  в наиболее характерной точке  $\theta = 0$  контура левого отверстия в зависимости от значения параметра  $ha$  при некоторых значениях  $c/a$ .

Таблица 3.

Значения напряжений  $\sigma_s/a_0$  в точке  $\theta = 0$  рад. контура левого отверстия

$c/a$	Значение $ha$					
	0,001	0,1	1	10	100	$\infty$
Задача ТЭМУ						
0,1	0,625	0,627	0,643	0,777	1,233	1,539
1	0,042	0,062	0,203	0,670	0,959	1,010
10	-0,049	0,043	0,470	0,927	1,027	1,039
100	-0,051	0,104	0,500	0,903	0,950	0,956
Задача ТУ						
0,1	0,742	0,741	0,738	0,718	0,647	0,598
1	0,079	0,077	0,063	0,008	-0,030	-0,037
10	-0,022	-0,030	-0,074	-0,121	-0,132	-0,133
100	-0,024	-0,044	-0,107	-0,146	-0,152	-0,152

**Выводы.** Из представленных результатов следует, что наличие жесткого

подкрепления контуров отверстий существенно влияет на распределение напряжений в пластинке. Если температурное поле в пластинке является однородным, то при уменьшении расстояния между отверстиями концентрация напряжений  $\sigma_n$  в области перемычки резко возрастает, а значения напряжений  $\sigma_s$  несколько уменьшаются. А вне области перемычки изменения напряжений менее значительны. При этом, характеристики конвективного теплообмена не влияют на напряженное состояние пластинки.

В случае неоднородного температурного поля характер распределения напряжений в пластинке отличается от случая однородного поля. Так, наибольшая концентрация напряжений возникает вблизи контура отверстия, где температура внешней среды наиболее отличается от начальной температуры. Если  $ha < 0.001$ , то характер различия в термонапряженном состоянии около различных отверстий остается незначительным. Однако при увеличении значения  $ha$  концентрация напряжений существенно возрастает около контура отверстия, где температура внешней среды наибольшая. Особенно сильно возрастает концентрация напряжений в области перемычки. А если температура внешней среды внутри отверстия близка к начальной температуре, то концентрация напряжений около контура этого отверстия резко уменьшается.

Пренебрежение электромагнитными свойствами материала пластинки при расчетах приводит к существенному искажению результатов, поэтому при расчетах необходимо учитывать все свойства материала.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО ДонГУ в рамках государственного задания (№ госрегистрации 1023030100040-4-1.1.2;2.3.1).

1. Желудев И.С. Физика кристаллических диэлектриков / И.С. Желудев. – М.: Наука, 1968. – 463 с.
2. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред / Ж. Можен. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
3. Партон В.З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
4. Калоеров С.А. Плоская задача термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, О.А. Сорочан // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 4. – С. 81–91.
5. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в пьезопластинках с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 1. – С. 15–26.
6. Подстригач Я.С. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно // К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
7. Parihar K.S. Transient heat conduction and analysis of thermal stresses in thin circular plate / K.S. Parihar, S.S. Patil // J. Therm. Stress. – 2011. – Vol. 34, № 4. – P. 335–351.
8. Gaikwad K.R. Analysis of transient thermoelastic temperature distribution of a thin circular plate and its thermal deflection under uniform heat generation / K.R. Gaikwad, Y.U. Naner // J. Therm. Stress. – 2021. – Vol. 44, № 1. – P. 75–85.
9. Roozbahani M.M. Temperature and stress distribution in hollow annular disk of uniform thickness with quadratic temperature-dependent thermal conductivity / M.M. Roozbahani, H. Razzaghi, M. Baghani, M. Baniassadi, M. Layeghi // J. Therm. Stress. – 2017. – Vol. 40, № 7. – P. 828–845.
10. Глушанков Е.С. Термоэлектромагнитоупругое состояние бесконечной многосвязной пьезопластинки в условиях конвективного теплообмена при действии линейного потока теп-

ла / Е.С. Глушанков // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2020. – Вып. 2 (75). – С. 18–29.

11. Глушанков Е.С. Термонапряженное состояние бесконечной многосвязной анизотропной пластинки с жестко подкрепленными отверстиями, находящейся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой / Е.С. Глушанков, А.Б. Мироненко // Журн. теорет. и прикладной механики. – 2023. – Вып. 3 (85). – С. 82–92. – doi:10.24412/0136-4545-2023-3-82-92. – EDN:TYKLQA.
12. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
13. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magnetoelectroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.

**E.S. Glushankov, A.S. Goltsev, A.B. Mironenko**

**The thermo-electro-magneto-elastic state of multiply connected piezoelectric plate with reinforced holes under the convective heat transfer.**

In the paper, the results are presented for the investigation of thermo-electro-magneto-elastic state of infinite multiply connected piezoelectric plate under the action of convective heat transfer. The contours of some holes are reinforced. Through the numerical studies, the effects of plates's geometric characteristics, the properties of its material, the characteristic of convective heat transfer, and the holes' reinforcements on the values of the main characteristics of the thermo-electro-vagneto-elastic state of the plate was investigated.

**Keywords:** *linear heat flux, convective heat transfer, multiply connected piezoelectric plate, reinforced contours of holes, thermal stresses, complex potentials.*

*Получено 23.11.2023*

УДК 539.3:534.1

doi:10.24412/0136-4545-2023-4-61-71

EDN:RHKXPW

©2023. А.А. Глухов<sup>1</sup>

## ВОЛНЫ ПРОДОЛЬНО-СДВИГОВОГО ТИПА В АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ МЕЖДУ НЕОДНОРОДНЫМИ ПОЛУПРОСТРАНСТВАМИ

Представлен алгоритм получения дисперсионного уравнения, а также расчетных соотношений для кинематических и силовых характеристик применительно к локализованным стационарным упругим симметричным волнам P-SV типа, распространяющимся в плоскости трансверсально-изотропного функционально-градиентного слоя-пласта, обладающего симметричной по толщине экспоненциальной поперечной неоднородностью и расположенного между однотипными трансверсально-изотропными неоднородными полупространствами с физико-механическими характеристиками, описываемыми двойными экспоненциальными функциями поперечной координаты. Рассмотренная модель описывает волновые деформационные процессы, исследуемые в горной сейсмоакустике, ультразвуковой дефектоскопии и акустоэлектронике, а также представляет интерес в связи с вопросами волнового деформирования конструкций, создаваемых с применением аддитивных технологий.

**Ключевые слова:** *слой между полупространствами, функционально-градиентные трансверсально-изотропные материалы, двойные экспоненциальные и экспоненциальные функции неоднородности, стационарное динамическое деформирование, продольно-сдвиговые локализованные волны, дисперсионные уравнения, расчетные соотношения для кинематических и силовых характеристик.*

**Введение и цели исследования.** Задачи теоретического описания закономерностей распространения стационарных упругих волн вдоль деформируемого тела в виде плоскопараллельного упругого слоя, окруженного полубесконечными упругими массивами [1–3], несмотря на актуальность в фундаментально-научном отношении и широкий круг приложений в горной сейсмоакустике, шахтной пластовой сейсморазведке, ультразвуковой дефектоскопии и акустоэлектронике, в проектировании и анализе эксплуатационных характеристик конструкций, полученных методами 3D печати, имеют весьма обширный ряд не исследованных на данный момент аспектов, связанных с гипотезами относительно свойств упругой симметрии и возможностями учета разнотипной неоднородности для материалов компонентов такой составной волноводной структуры. Так, несмотря на исследования по данной проблематике, излагаемые в работах [4–

---

<sup>1</sup> Глухов Антон Александрович – аспирант каф. теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: antonglukhov2012@yandex.com.

Glukhov Anton Alexandrovich – Postgraduate, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky.

12], высокую степень актуальности сохраняют вопросы учета в моделях этого типа сочетаемых факторов анизотропии и непрерывной неоднородности физико-механических характеристик материалов слоя и полупространств, в описании которой должны быть отражено наблюдаемое на практике свойство увеличения степени неоднородности материалов в приграничных областях у плоскостей контакта разнородных составляющих – вмещающих полубесконечных массивов и слоя, а также сглаживание законов неоднородности при отходе от контактных поверхностей вглубь массивов.

В этой связи, целью представляемых в данной работе исследований является разработка аналитического алгоритма получения дисперсионного уравнения, а также расчетных соотношений для кинематических и силовых характеристик в случае распространения локализованных стационарных упругих волн P-SV типа вдоль произвольного направления в плоскости трансверсально-изотропного функционально-градиентного слоя-пласта, обладающего симметричной по толщине экспоненциальной поперечной неоднородностью и расположенного между однотипными трансверсально-изотропными неоднородными полупространствами с физико-механическими характеристиками, описываемыми двойными экспоненциальными функциями поперечной координаты.

**1. Постановочные соотношения рассматриваемой модели.** Рассматривается занимающее область  $V_{\Sigma} = V^{(+)} \cup V^{(1)} \cup V^{(2)} \cup V^{(-)}$  в системе координат  $Ox_1x_2x_3$  составное пространственное упругое тело с фрагментами

$$\begin{aligned} V^{(+)} &= \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 > h\}, & V^{(-)} &= \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 < -h\}, \\ V^{(1)} &= \{(x_1, x_2) \in R^2, 0 \leq x_3 \leq h\}, & V^{(2)} &= \{(x_1, x_2) \in R^2, 0 \geq x_3 \geq -h\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Полагается, что материал имеющего толщину  $2h$  составного слоя  $V^{(1)} \cup V^{(2)}$  является трансверсально-изотропным и обладает симметричной относительно срединной плоскости  $x_3 = 0$  экспоненциальной поперечной неоднородностью физико-механических свойств. Выражения для функциональных характеристик плотности  $\rho^{(1)}(x_3)$ ,  $\rho^{(2)}(x_3)$  и модулей упругости  $c_{ij}^{(1)}(x_3)$ ,  $c_{ij}^{(2)}(x_3)$  материалов в компонентах  $V^{(1)}$  и  $V^{(2)}$  слоя соответственно задаются в виде

$$\begin{aligned} \rho^{(1)}(x_3) &= \rho_0^{(1)} \exp(\mu x_3), & \rho^{(2)}(x_3) &= \rho_0^{(2)} \exp(-\mu x_3), \\ c_{ij}^{(1)}(x_3) &= c_{ij0}^{(1)} \exp(\mu x_3), & c_{ij}^{(2)}(x_3) &= c_{ij0}^{(2)} \exp(-\mu x_3), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\mu$  – параметр неоднородности, и выполняются условия

$$\rho_0^{(1)} = \rho_0^{(2)}, \quad c_{ij0}^{(1)} = c_{ij0}^{(2)}. \quad (3)$$

Вмещающие полупространства  $V^{(+)}$  и  $V^{(-)}$  также являются трансверсально-изотропными и имеют физико-механические характеристики, описываемые двойными экспоненциальными функциями

$$\begin{aligned} c_{ij}^{(+)}(x_3) &= A_{ij0}^{(+)} \cdot \varphi^{(+)}(\lambda, \beta, x_3), & \rho^{(+)}(x_3) &= \rho_0^{(+)} \cdot \varphi^{(+)}(\lambda, \beta, x_3), \\ \varphi^{(+)}(\lambda, \beta, x_3) &= \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)); \end{aligned} \quad (4)$$



$$\begin{aligned} c_{ij}^{(-)}(x_3) &= A_{ij0}^{(-)} \cdot \varphi^{(-)}(\lambda, \beta, x_3), \quad \rho^{(-)}(x_3) = \rho_0^{(-)} \cdot \varphi^{(-)}(\lambda, \beta, x_3), \\ \varphi^{(-)}(\lambda, \beta, x_3) &= \exp(\lambda \exp(\beta x_3)), \end{aligned} \quad (5)$$

в которых  $\lambda$  и  $\beta > 0$  – параметры неоднородности;

$$\rho_0^{(+)} = \rho_0^{(-)}, \quad A_{ij0}^{(+)} = A_{ij0}^{(-)}. \quad (6)$$

Представления (4), (5) описывают наличие у граничных поверхностей полупространств локализованных приповерхностных зон выраженной неоднородности свойств материала и эффект сглаживания темпов изменения этих свойств при удалении от поверхности контакта с асимптотическим стремлением к параметрам однородных материалов  $\rho_0^{(+)}$ ,  $\rho_0^{(-)}$ ,  $A_{ij0}^{(+)}$ ,  $A_{ij0}^{(-)}$  в глубине полупространств.

При введении соответствующих представлений вида

$$u_{1j}(x_1, x_3, t) = f_{1j}(x_3)e^{-i(\omega t - kx_1)}, \quad u_{3j}(x_1, x_3, t) = f_{3j}(x_3)e^{-i(\omega t - kx_1)}, \quad (7)$$

для компонент комплексного вектора динамических упругих перемещений в волнах P-SV типа с циклической частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$  вдоль координатного направления  $Ox_1$  в слоях  $V^{(j)}$ , амплитудные функции  $f_{1j}(x_3)$ ,  $f_{3j}(x_3)$ , с учетом свойств (3), подлежат определению из систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} &A_{440}^{(1)}f_{1j}'' + (-1)^{j+1}c_{440}^{(1)}\mu f_{1j}' + (\rho_0^{(1)}\omega^2 - c_{110}^{(1)}k^2)f_{1j} + \\ &+ (c_{130}^{(1)} + c_{440}^{(1)})(ik)f_{3j}' + (-1)^{j+1}c_{440}^{(1)}\mu(ik)f_{3j} = 0, \\ &(c_{130}^{(1)} + c_{440}^{(1)})(ik)f_{1j}' + (-1)^{j+1}c_{130}^{(1)}\mu(ik)f_{1j} + \\ &+ c_{330}^{(1)}f_{3j}'' + (-1)^{j+1}c_{330}^{(1)}\mu f_{3j}' + (\rho_0^{(1)}\omega^2 - c_{440}^{(1)}k^2)f_{3j} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения (8) удобно представлять в более компактной форме

$$\begin{aligned} \alpha_1 f_{1j}'' + (-1)^{j+1}\beta_1 f_{1j}' + \gamma_1 f_{1j} + \delta_1 f_{3j}' + (-1)^{j+1}\varepsilon_1 f_{3j} &= 0, \\ \delta_2 f_{1j}' + (-1)^{j+1}\varepsilon_2 f_{1j} + \alpha_2 f_{3j}'' + (-1)^{j+1}\beta_2 f_{3j}' + \gamma_2 f_{3j} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= A_{440}^{(1)}, \quad \beta_1 = c_{440}^{(1)}\mu, \quad \gamma_{13} = (\rho_0^{(1)}\omega^2 - c_{110}^{(1)}k^2), \\ \delta_1 &= (c_{130}^{(1)} + c_{440}^{(1)})(ik), \quad \varepsilon_1 = c_{440}^{(1)}\mu(ik), \quad \delta_2 = (c_{440}^{(1)} + c_{130}^{(1)})(ik), \quad \varepsilon_2 = c_{130}^{(1)}\mu(ik), \\ \alpha_2 &= c_{330}^{(1)}, \quad \beta_{23} = c_{330}^{(1)}\mu, \quad \gamma_2 = (\rho_0^{(1)}\omega^2 - c_{440}^{(1)}k^2). \end{aligned}$$

Системы дифференциальных уравнений относительно комплексных амплитудных функций  $g_{1\pm}(x_3)$ ,  $g_{3\pm}(x_3)$  в представлениях волновых смещений

$$u_{1\pm}(x_1, x_3, t) = g_{1\pm}(x_3)e^{-i(\omega t - kx_1)}, \quad u_{3\pm}(x_1, x_3, t) = g_{3\pm}(x_3)e^{-i(\omega t - kx_1)}, \quad (10)$$

описывающих исследуемые P-SV волны типа вдоль направления  $Ox_1$  в трансверсально-изотропных функционально-градиентных полупространствах  $V^{(+)}$  и  $V^{(-)}$ , с учетом свойств (6) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} & A_{440}^{(+)} g_{1\pm}'' + (-1)^{j+1} \gamma e^{(-1)^j \beta x_3} c_{440}^{(+)} g_{1\pm}' + (\rho_0^{(+)} \omega^2 - c_{110}^{(+)} k^2) g_{1\pm} + \\ & + (c_{130}^{(+)} + c_{440}^{(+)})(ik) g_{3\pm}' + (-1)^{j+1} \gamma e^{(-1)^j \beta x_3} c_{440}^{(+)}(ik) g_{3\pm} = 0, \\ & (c_{440}^{(+)} + c_{130}^{(+)})(ik) g_{1\pm}' + (-1)^{j+1} \gamma e^{(-1)^j \beta x_3} c_{130}^{(+)}(ik) g_{1\pm} + c_{330}^{(+)} g_{3\pm}'' + \\ & + (-1)^{j+1} \gamma e^{(-1)^j \beta x_3} c_{330}^{(+)} g_{3\pm}' + (\rho_0^{(+)} \omega^2 - c_{440}^{(+)} k^2) g_{3\pm} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

и далее представлены в матричной форме:

$$(\underline{A}_1^{(0\pm)} \partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0\pm)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(0\pm)}) \underline{G}^{(\pm)} = (-1)^j \gamma e^{(-1)^j \beta x_3} (\underline{A}_2^{(1\pm)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(1\pm)}) \underline{G}^{(\pm)}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_1^{(0\pm)} &= \begin{pmatrix} c_{440}^{(+)} & 0 \\ 0 & c_{330}^{(+)} \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_2^{(0\pm)} = \begin{pmatrix} 0 & ik(c_{130}^{(+)} + c_{440}^{(+)}) \\ ik(c_{130}^{(+)} + c_{440}^{(+)}) & 0 \end{pmatrix}, \\ \underline{A}_3^{(0\pm)} &= \begin{pmatrix} (\rho_0^{(+)} \omega^2 - c_{110}^{(+)} k^2) & 0 \\ 0 & (\rho_0^{(+)} \omega^2 - c_{440}^{(+)} k^2) \end{pmatrix}, \\ \underline{A}_2^{(1\pm)} &= \begin{pmatrix} c_{440}^{(+)} & 0 \\ 0 & c_{330}^{(+)} \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_3^{(1\pm)} = \begin{pmatrix} 0 & ikc_{440}^{(+)} \\ ikc_{130}^{(+)} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

В соотношениях (11)–(13) выбирается  $j = 1$  для случая полупространства  $V^{(+)}$  и  $j = 2$  – для полупространства  $V^{(-)}$ .

Системы уравнений (8), (11) дополняются краевыми условиями идеального механического сопряжения на плоскостях контакта граней слоя и границ полупространств, условиями идеального механического сопряжения в плоскости  $x_3 = 0$  контакта слоев  $V^{(1)}$  и  $V^{(2)}$ , а также условиями, связанными с предположениями относительно типа симметрии волновых движений в слое. Данные условия в реализуемом исследовании имеют вид

$$\begin{aligned} & f_{11}(h) = g_{1+}(h), \quad f_{31}(h) = g_{3+}(h), \\ & \exp(\mu h)(ik(c_{130}^{(1)} + c_{440}^{(1)})f_{11}(h) + c_{330}^{(1)}f_{31}'(h)) = \\ & = \exp(\lambda \cdot \exp(-\beta h))(ik(c_{130}^{(+)} + c_{440}^{(+)}g_{1+}(h) + c_{330}^{(+)}g_{3+}'(h)), \\ & \exp(\mu h)(ikc_{440}^{(1)}f_{31}(h) + c_{440}^{(1)}f_{11}'(h)) = \\ & = \exp(\lambda \cdot \exp(-\beta h))(ikc_{440}^{(+)}g_{3+}(h) + c_{440}^{(+)}g_{1+}'(h)); \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & f_{12}(-h) = g_{1-}(-h), \quad f_{32}(-h) = g_{3-}(-h), \\ & \exp(-\mu h)(ik(c_{130}^{(1)} + c_{440}^{(1)})f_{12}(-h) + c_{330}^{(1)}f_{32}'(-h)) = \\ & = \exp(\lambda \cdot \exp(\beta h))(ik(c_{130}^{(+)} + c_{440}^{(+)}g_{1-}(-h) + c_{330}^{(+)}g_{3-}'(-h)), \\ & \exp(-\mu h)(ikc_{440}^{(1)}f_{32}(-h) + c_{440}^{(1)}f_{12}'(-h)) = \\ & = \exp(\lambda \cdot \exp(\beta h))(ikc_{440}^{(+)}g_{3-}(-h) + c_{440}^{(+)}g_{1-}'(-h)); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 f_{11}(0) &= f_{12}(0), & f_{31}(0) &= f_{32}(0), \\
 ikc_{440}^{(1)}f_{31}(0) + c_{440}^{(1)}f'_{11}(0) &= ikc_{440}^{(1)}f_{32}(0) + c_{440}^{(1)}f'_{12}(0), \\
 ik(c_{130}^{(1)} + c_{440}^{(1)})f_{11}(0) + c_{330}^{(1)}f'_{31}(0) &= ik(c_{130}^{(1)} + c_{440}^{(1)})f_{12}(0) + c_{330}^{(1)}f'_{32}(0);
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 f_{11}(h) &= f_{12}(-h), & f_{31}(h) &= -f_{32}(-h), \\
 g_{1+}(h) &= g_{1-}(-h), & g_{3+}(h) &= -g_{3-}(-h).
 \end{aligned} \tag{17}$$

Представленные постановочные соотношения являются базовыми для получения характеристик исследуемых волн в компонентах составного волновода и формулировки основного дисперсионного уравнения для локализованных волновых движений рассматриваемого типа.

**2. Получение представлений для волновых полей и формулировка дисперсионного уравнения.** Решения систем уравнений (9) для случая симметричных волн в составном слое отыскиваются на базе метода Эйлера с подстановкой  $f_1 = Q_1 e^{pxz}$ ,  $f_3 = Q_3 e^{pxz}$ , в результате которой записываются системы линейных алгебраических уравнений относительно  $Q_1$ ,  $Q_3$ :

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1 p^2 + (-1)^{j+1} \beta_1 p + \gamma_1) Q_1 + (\delta_1 p + (-1)^{j+1} \varepsilon_1) Q_3 &= 0, \\
 (\delta_2 p + (-1)^{j+1} \varepsilon_2) Q_1 + (\alpha_2 p^2 + (-1)^{j+1} \beta_2 p + \gamma_2) Q_3 &= 0,
 \end{aligned} \tag{18}$$

и соответствующие полиномиальные характеристические уравнения

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 p^4 + (-1)^{j+1} \Delta_2 p^3 + \Delta_3 p^2 + (-1)^{j+1} \Delta_4 p + \Delta_5 &= 0, \\
 \Delta_1 = \alpha_1 \alpha_2, \quad \Delta_2 = (-1)^{j+1} (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1), \quad \Delta_3 = \alpha_1 \gamma_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 - \delta_1 \delta_2, \\
 \Delta_4 = (-1)^{j+1} (\beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2 - \delta_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \delta_2), \quad \Delta_5 = \gamma_1 \gamma_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2.
 \end{aligned} \tag{19}$$

При дальнейшей реализации алгоритма построения и анализа дисперсионного уравнения для исследуемых нормальных волн должна учитываться параметрическая непрерывность выделяемых ветвей корней, что при численном решении (19) требует создания дополнительного алгоритма их упорядочения. В этой связи, для нахождения корней (19) целесообразным является использование аналитического метода Феррари. При этом (19) приводится к виду

$$p^4 + (-1)^{j+1} A p^3 + B p^2 + (-1)^{j+1} C p + D = 0, \tag{20}$$

и в качестве этапа применения метода для обоих вариантов задания  $j$ , с применением формул Кардано для уравнения

$$y^3 - B y^2 + (AC - 4D) y - A^2 D + 4BD - C^2 = 0 \tag{21}$$

рассчитывается величина

$$y_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \tag{22}$$

$$p = -\frac{B^2}{3}q = -\frac{2B^3}{27} + \frac{B(AC - 4D)}{3} - A^2D + 4BD - C^2, \quad (23)$$

не зависящая от выбора  $j$  ввиду вхождения коэффициентов полинома (20) при  $p$  и  $p^3$  в выражения (21)–(23) во второй степени, а также в виде совместного произведения. Далее корни характеристических полиномов (20) соответственно определяются из пары квадратных уравнений

$$p^2 + (-1)^{j+1} \frac{A}{2} p + \frac{y_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} - B - y_0\right)p^2 + (-1)^{j+1} \left(\frac{A}{2} y_0 - C\right)p + \frac{y_0^2}{4} - D} = 0, \quad (24)$$

с полными квадратами в подкоренных выражениях. В силу этого, для  $j = 1$

$$p_1^{(1)} = \frac{-b_1 + \sqrt{D_1}}{2}, \quad p_2^{(1)} = \frac{-b_1 - \sqrt{D_1}}{2}, \quad p_3^{(1)} = \frac{-b_2 + \sqrt{D_2}}{2}, \quad p_4^{(1)} = \frac{-b_2 + \sqrt{D_2}}{2}, \quad (25)$$

и для  $j = 2$

$$p_1^{(2)} = \frac{b_1 + \sqrt{D_1}}{2}, \quad p_2^{(2)} = \frac{b_1 - \sqrt{D_1}}{2}, \quad p_3^{(2)} = \frac{b_2 + \sqrt{D_2}}{2}, \quad p_4^{(2)} = \frac{b_2 + \sqrt{D_2}}{2}, \quad (26)$$

$$b_1 = \frac{A}{2} + \alpha, \quad b_2 = \frac{A}{2} - \alpha, \quad D_1 = \sqrt{b_1^2 - 4\left(\frac{y_0}{2} + \beta\right)}, \quad D_2 = \sqrt{b_2^2 - 4\left(\frac{y_0}{2} - \beta\right)}, \quad (27)$$

$$\alpha = (A^2/4 - B - y_0)^{1/2}, \quad \beta = (y_0^2/4 - D)^{1/2}.$$

Соответственно, между наборами корней  $p_m^{(1)}$  и  $p_m^{(2)}$  имеется следующая из (25), (26) и подлежащая учету при записи представлений решений систем (9) связь

$$p_1^{(2)} = -p_2^{(1)}, \quad p_2^{(2)} = -p_1^{(1)}, \quad p_3^{(2)} = -p_4^{(1)}, \quad p_4^{(2)} = -p_3^{(1)}. \quad (28)$$

Для получаемых таким образом выражений

$$f_{1j}(x_3) = Q_{1j}^{(1)} e^{p_1 x_3} + Q_{1j}^{(2)} e^{p_2 x_3} + Q_{1j}^{(3)} e^{p_3 x_3} + Q_{1j}^{(4)} e^{p_4 x_3},$$

$$f_{3j}(x_3) = Q_{3j}^{(1)} e^{p_1 x_3} + Q_{3j}^{(2)} e^{p_2 x_3} + Q_{3j}^{(3)} e^{p_3 x_3} + Q_{3j}^{(4)} e^{p_4 x_3},$$

из (18) могут быть установлены соотношения связи  $Q_{1j}^{(m)}$  и  $Q_{3j}^{(m)}$ . Так, в случае  $j = 1$

$$\begin{aligned} Q_{11}^{(m)} &= \Delta_1^{(m)} Q^{(m)}, \quad \Delta_1^{(m)} = (\delta_1 p_m + \varepsilon_1), \\ Q_{31}^{(m)} &= \Delta_3^{(m)} Q^{(m)}, \quad \Delta_3^{(m)} = (\alpha_1 p_m^2 + \beta_1 p_m + \gamma_1), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} f_{11}(x_3) &= \Delta_1^{(1)} Q^{(1)} e^{p_1 x_3} + \Delta_1^{(2)} Q^{(2)} e^{p_2 x_3} + \Delta_1^{(3)} Q^{(3)} e^{p_3 x_3} + \Delta_1^{(4)} Q^{(4)} e^{p_4 x_3}, \\ f_{31}(x_3) &= \Delta_3^{(1)} Q^{(1)} e^{p_1 x_3} + \Delta_3^{(2)} Q^{(2)} e^{p_2 x_3} + \Delta_3^{(3)} Q^{(3)} e^{p_3 x_3} + \Delta_3^{(4)} Q^{(4)} e^{p_4 x_3}; \end{aligned} \quad (30)$$

в случае  $j = 2$

$$Q_{12}^{(m)} = \theta_1^{(m)} R^{(m)}, \quad \theta_1^{(m)} = (\delta_1 p_m - \varepsilon_1), \quad \theta_3^{(m)} = (\alpha_1 p_m^2 - \beta_1 p_m + \gamma_1); \quad (31)$$

$$\begin{aligned} f_{12}(x_3) &= \theta_1^{(1)} R^{(1)} e^{-p_1 x_3} + \theta_1^{(2)} R^{(2)} e^{-p_2 x_3} + \theta_1^{(3)} R^{(3)} e^{-p_3 x_3} + \theta_1^{(4)} R^{(4)} e^{-p_4 x_3}, \\ f_{32}(x_3) &= \theta_3^{(1)} R^{(1)} e^{-p_1 x_3} + \theta_3^{(2)} R^{(2)} e^{-p_2 x_3} + \theta_3^{(3)} R^{(3)} e^{-p_3 x_3} + \theta_3^{(4)} R^{(4)} e^{-p_4 x_3}. \end{aligned} \quad (32)$$

Таким образом, для симметричной волны верны соотношения

$$\Delta_1^{(m)} Q^{(m)} = \theta_1^{(m)} R^{(m)}, \quad \Delta_3^{(m)} Q^{(m)} = \theta_3^{(m)} R^{(m)}. \quad (33)$$

Используя, далее, краевые условия (16), можно записать равенства

$$\begin{aligned} p_1 \Delta_1^{(1)} Q^{(1)} + p_2 \Delta_1^{(2)} Q^{(2)} + p_3 \Delta_1^{(3)} Q^{(3)} + p_4 \Delta_1^{(4)} Q^{(4)} &= \\ = -p_1 \theta_1^{(1)} R^{(1)} - p_2 \theta_1^{(2)} R^{(2)} - p_3 \theta_1^{(3)} R^{(3)} - p_4 \theta_1^{(4)} R^{(4)}, \\ p_1 \Delta_3^{(1)} Q^{(1)} + p_2 \Delta_3^{(2)} Q^{(2)} + p_3 \Delta_3^{(3)} Q^{(3)} + p_4 \Delta_3^{(4)} Q^{(4)} &= \\ = -p_1 \theta_3^{(1)} R^{(1)} - p_2 \theta_3^{(2)} R^{(2)} - p_3 \theta_3^{(3)} R^{(3)} - p_4 \theta_3^{(4)} R^{(4)}, \end{aligned}$$

которые трансформируются в соотношения связи четырех констант  $Q^{(m)}$

$$\sum_{m=1}^4 p_m \Delta_1^{(m)} Q^{(m)} = 0, \quad \sum_{m=1}^4 p_m \Delta_3^{(m)} Q^{(m)} = 0. \quad (34)$$

При введении переобозначений

$$p_m \Delta_1^{(m)} = a_m, \quad p_m \Delta_3^{(m)} = b_m, \quad Q^{(1)} = A, \quad Q^{(2)} = B, \quad (35)$$

из (34), можно, в итоге, получить

$$\begin{aligned} Q^{(3)} &= \left( \frac{a_4(b_3 a_1 - b_1 a_3)}{a_3(b_4 a_3 - b_3 a_4)} - \frac{a_1}{a_3} \right) A + \left( \frac{a_4(b_3 a_2 - b_2 a_3)}{a_3(b_4 a_3 - b_3 a_4)} - \frac{a_2}{a_3} \right) B = \phi_1 A + \phi_2 B, \\ [Q^{(4)} &= \frac{b_3 a_1 - b_1 a_3}{b_4 a_3 - b_3 a_4} A + \frac{b_3 a_2 - b_2 a_3}{b_4 a_3 - b_3 a_4} B = \phi_3 A + \phi_4 B. \end{aligned} \quad (36)$$

и далее, соответственно, записать формулы для расчета амплитудных функций перемещений и напряжений в слое  $V^{(1)}$  для симметричной нормальной волны:

$$\begin{aligned} f_{11}(x_3) &= A(\Delta_1^{(1)} e^{p_1 x_3} + \phi_1 \Delta_1^{(3)} e^{p_3 x_3} + \phi_3 \Delta_1^{(4)} e^{p_4 x_3}) + \\ &+ B(\Delta_1^{(2)} e^{p_2 x_3} + \phi_2 \Delta_1^{(3)} e^{p_3 x_3} + \phi_4 \Delta_1^{(4)} e^{p_4 x_3}), \\ f_{31}(x_3) &= A(\Delta_3^{(1)} e^{p_1 x_3} + \phi_1 \Delta_3^{(3)} e^{p_3 x_3} + \phi_3 \Delta_3^{(4)} e^{p_4 x_3}) + \\ &+ B(\Delta_3^{(2)} e^{p_2 x_3} + \phi_2 \Delta_3^{(3)} e^{p_3 x_3} + \phi_4 \Delta_3^{(4)} e^{p_4 x_3}), \\ \sigma_{31,1}(x_3) &= e^{\mu x_3} [A(c_{440}^{(1)} i k \Delta_3^{(1)} e^{p_1 x_3} + c_{440}^{(1)} i k \phi_1 \Delta_3^{(3)} e^{p_3 x_3} + c_{440}^{(1)} i k \phi_3 \Delta_3^{(4)} e^{p_4 x_3} + \\ &+ c_{440}^{(1)} p_1 \Delta_1^{(1)} e^{p_1 x_3} + c_{440}^{(1)} p_3 \phi_1 \Delta_1^{(3)} e^{p_3 x_3} + c_{440}^{(1)} p_4 \phi_3 \Delta_1^{(4)} e^{p_4 x_3}) + \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
 & + B(c_{440}^{(1)} ik \Delta_3^{(2)} e^{p_2 x_3} + c_{440}^{(1)} ik \phi_2 \Delta_3^{(3)} e^{p_3 x_3} + c_{440}^{(1)} ik \phi_4 \Delta_3^{(4)} e^{p_4 x_3} + \\
 & + c_{440}^{(1)} p_2 \Delta_1^{(2)} e^{p_2 x_3} + c_{440}^{(1)} p_3 \phi_2 \Delta_1^{(3)} e^{p_3 x_3} + c_{440}^{(1)} p_4 \phi_4 \Delta_1^{(4)} e^{p_4 x_3}), \\
 \sigma_{33,1}(x_3) = & e^{\mu x_3} [A(c_{130}^{(1)} ik \Delta_1^{(1)} e^{p_1 x_3} + c_{130}^{(1)} ik \phi_1 \Delta_1^{(3)} e^{p_3 x_3} + c_{130}^{(1)} ik \phi_3 \Delta_1^{(4)} e^{p_4 x_3} + \\
 & + c_{330}^{(1)} p_1 \Delta_3^{(1)} e^{p_1 x_3} + c_{330}^{(1)} p_3 \phi_1 \Delta_3^{(3)} e^{p_3 x_3} + c_{330}^{(1)} p_4 \phi_3 \Delta_3^{(4)} e^{p_4 x_3}) + \\
 & + B(c_{130}^{(1)} ik \Delta_1^{(2)} e^{p_2 x_3} + c_{130}^{(1)} ik \phi_2 \Delta_1^{(3)} e^{p_3 x_3} + c_{130}^{(1)} ik \phi_4 \Delta_1^{(4)} e^{p_4 x_3} + \\
 & + c_{330}^{(1)} p_2 \Delta_3^{(2)} e^{p_2 x_3} + c_{330}^{(1)} p_3 \phi_2 \Delta_3^{(3)} e^{p_3 x_3} + c_{330}^{(1)} p_4 \phi_4 \Delta_3^{(4)} e^{p_4 x_3})].
 \end{aligned}$$

Для получения решений, описывающих волновые поля в полупространствах систем (12), в реализуемом исследовании использована представленная в работе [13] итерационная методика интегрирования, с применением которой представление  $\underline{G}^{(+)}(x_3)$  получено в виде линейной комбинации базисных векторных частных решений  $G_j^{(+)}(x_3)$  с произвольными коэффициентами  $C$  и  $D$

$$\underline{G}^{(+)}(x_3) = C \underline{G}_1^{(+)}(x_3) + D \underline{G}_2^{(+)}(x_3), \quad \underline{G}_j^{(+)}(x_3) = \begin{pmatrix} g_{1+,j}(x_3) \\ g_{3+,j}(x_3) \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$\underline{G}_j^{(+)}(x_3) = \underline{G}_{0j}^{(+)}(x_3) + \underline{G}_{1j}^{(+)}(x_3) + \underline{G}_{2j}^{(+)}(x_3) + \dots + \underline{G}_{pj}^{(+)}(x_3) + \dots; \quad (39)$$

$$(\underline{A}_1^{(0+)} \partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0+)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(0+)}) \underline{G}_{0j}^{(+)}(x_3) = 0; \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
 (\underline{A}_1^{(0+)} \partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0+)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(0+)}) \underline{G}_{1j}^{(+)}(x_3) &= -\gamma e^{-\beta x_3} (\underline{A}_2^{(1+)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(1+)}) \underline{G}_{0j}^{(+)}(x_3), \dots, \\
 (\underline{A}_1^{(0+)} \partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0+)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(0+)}) \underline{G}_{pj}^{(+)}(x_3) &= \\
 = -\gamma e^{-\beta x_3} (\underline{A}_2^{(1+)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(1+)}) \underline{G}_{p-1,j}^{(+)}(x_3), \dots; \quad \gamma = \beta \lambda.
 \end{aligned} \quad (41)$$

При построении базисного частного решения  $\underline{G}_j^{(+)}(x_3)$  в качестве  $\underline{G}_{0j}^{(+)}(x_3)$  используется частное решение однородного уравнения (40) вида

$$\underline{G}_{0j}^{(+)}(x_3) = \underline{f}_{0j+} e^{\delta_{j+} x_3}, \quad (42)$$

в котором  $\delta_{j+}$  ( $j = \overline{1, 2}$ ) – удовлетворяющие условию  $Re \delta_{j+} > 0$  корни биквадратного характеристического уравнения

$$\det \begin{vmatrix} c_{440}^{(+)} \delta^2 + (\rho_0^{(+)} \omega^2 - c_{110}^{(+)} k^2) & ik(c_{130}^{(+)} + c_{440}^{(+)} \delta) \\ ik(c_{130}^{(+)} + c_{440}^{(+)} \delta) & c_{330}^{(+)} \delta^2 + (\rho_0^{(+)} \omega^2 - c_{440}^{(+)} k^2) \end{vmatrix} = 0; \quad (43)$$

$$\underline{f}_{0j+} = \begin{pmatrix} -ik(c_{130}^{(+)} + c_{440}^{(+)} \delta_{j+}) \\ c_{440}^{(+)} \delta_{j+}^2 + (\rho_0^{(+)} \omega^2 - c_{110}^{(+)} k^2) \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Далее, на базе итерационного алгоритма (41) последовательно формируются представления

$$\underline{G}_{1j}^{(+)}(x_3) = \underline{f}_{1j+} e^{(\delta_{j+}-\beta)x_3}, \dots, \underline{G}_{nj}^{(+)}(x_3) = \underline{f}_{nj+} e^{(\delta_{j+}-n\beta)x_3}, \dots, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \underline{f}_{nj+} &= -\gamma \underline{M}_{1n,j+}^{-1} \underline{M}_{2n,j+} \underline{f}_{n-1,j+} = \\ &= (-\gamma)^n \underline{M}_{1n,j+}^{-1} \underline{M}_{2n,j+} \underline{M}_{1n-1,j+}^{-1} \underline{M}_{2n-1,j+} \dots \underline{M}_{11,j+}^{-1} \underline{M}_{21,j+} \underline{f}_{0j+}, \\ \underline{M}_{1n,j+} &= (\delta_{j+} - n\beta)^2 \underline{A}_1^{(0+)} + (\delta_{j+} - n\beta) \underline{A}_2^{(0+)} + \underline{A}_3^{(0+)}, \\ \underline{M}_{2n,j+} &= (\delta_{j+} - (n-1)\beta) \underline{A}_2^{(1+)} + \underline{A}_3^{(1+)}. \end{aligned} \quad (46)$$

С введением обозначений

$$\underline{Q}_{nj+} = \underline{M}_{1n,j+}^{-1} \underline{M}_{2n,j+}, \quad (47)$$

представления для  $\underline{G}_j^{(+)}(x_3)$  принимают форму экспоненциальных рядов

$$\begin{aligned} \underline{G}_j^{(+)}(x_3) &= \underline{f}_{0j+} e^{\delta_{j+}x_3} - \gamma \underline{Q}_{1j+} \underline{f}_{0j+} e^{(\delta_{j+}-\beta)x_3} + \gamma^2 \underline{Q}_{2j+} \underline{Q}_{1j+} \underline{f}_{0j+} e^{(\delta_{j+}-2\beta)x_3} - \\ &- \dots + (-\gamma)^n \underline{Q}_{nj+} \underline{Q}_{n-1,j+} \dots \underline{Q}_{1j+} \underline{f}_{0j+} e^{(\delta_{j+}-n\beta)x_3} + \dots \end{aligned} \quad (48)$$

Соответственно, для полупространства  $V^{(+)}$  записываются следующие представления фигурирующих в граничных условиях (14) амплитудных кинематических и силовых характеристик волнового поля

$$g_{1+}(x_3) = Cg_{1+,1}(x_3) + Dg_{1+,2}(x_3), \quad g_{3+}(x_3) = Cg_{3+,1}(x_3) + Dg_{3+,2}(x_3); \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{31+}(x_3) &= \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)) [C(c_{440}^{(+)} \partial_3 g_{1+,1}(x_3) + ikc_{440}^{(+)} g_{3+,1}(x_3)) + \\ &+ D(c_{440}^{(+)} \partial_3 g_{1+,2}(x_3) + ikc_{440}^{(+)} g_{3+,2}(x_3))], \\ \sigma_{33+}(x_3) &= \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)) [C(ikc_{130}^{(+)} g_{1+,1}(x_3) + c_{330}^{(+)} \partial_3 g_{3+,1}(x_3)) + \\ &+ D(ikc_{130}^{(+)} g_{1+,2}(x_3) + c_{330}^{(+)} \partial_3 g_{3+,2}(x_3))]. \end{aligned}$$

С использованием содержащих четыре произвольные постоянные  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  представлений для характеристик волновых полей в  $V^{(+)}$  и  $V^{(1)}$ , применительно к рассматриваемому случаю распространения симметричных локализованных волн из граничных условий (14) можно получить дисперсионные соотношения для исследуемых волновых движений в форме равенства нулю функционального определителя четвертого порядка

$$F(\omega, k) = \det \|a_{pq}\| = 0, \quad (50)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \Delta_1^{(1)} e^{p_1 h} + \phi_1 \Delta_1^{(3)} e^{p_3 h} + \phi_3 \Delta_1^{(4)} e^{p_4 h}, \\ a_{12} &= \Delta_1^{(2)} e^{p_2 h} + \phi_2 \Delta_1^{(3)} e^{p_3 h} + \phi_4 \Delta_1^{(4)} e^{p_4 h}, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned}
 a_{13} &= -g_{1+,1}(h), & a_{14} &= -g_{1+,2}(h); \\
 a_{21} &= \Delta_3^{(1)} e^{p_1 h} + \phi_1 \Delta_3^{(3)} e^{p_3 h} + \phi_3 \Delta_3^{(4)} e^{p_4 h}, \\
 a_{22} &= \Delta_3^{(2)} e^{p_2 h} + \phi_2 \Delta_3^{(3)} e^{p_3 h} + \phi_4 \Delta_3^{(4)} e^{p_4 h}, \\
 a_{23} &= -g_{3+,1}(h), & a_{24} &= -g_{3+,2}(h); \\
 a_{31} &= e^{\mu h} (c_{440}^{(1)} ik \Delta_3^{(1)} e^{p_1 h} + c_{440}^{(1)} ik \phi_1 \Delta_3^{(3)} e^{p_3 h} + c_{440}^{(1)} ik \phi_3 \Delta_3^{(4)} e^{p_4 h} + \\
 &\quad + c_{440}^{(1)} p_1 \Delta_1^{(1)} e^{p_1 h} + c_{440}^{(1)} p_3 \phi_1 \Delta_1^{(3)} e^{p_3 h} + c_{440}^{(1)} p_4 \phi_3 \Delta_1^{(4)} e^{p_4 h}), \\
 a_{32} &= e^{\mu h} (c_{440}^{(1)} ik \Delta_3^{(2)} e^{p_2 h} + c_{440}^{(1)} ik \phi_2 \Delta_3^{(3)} e^{p_3 h} + c_{440}^{(1)} ik \phi_4 \Delta_3^{(4)} e^{p_4 h} + \\
 &\quad + c_{440}^{(1)} p_2 \Delta_1^{(2)} e^{p_2 h} + c_{440}^{(1)} p_3 \phi_2 \Delta_1^{(3)} e^{p_3 h} + c_{440}^{(1)} p_4 \phi_4 \Delta_1^{(4)} e^{p_4 h}), \\
 a_{33} &= -(c_{440}^{(+)} \partial_3 g_{1+,1}(h) + ik c_{440}^{(+)} g_{3+,1}(h)) \exp(\lambda \exp(-\beta h)), \\
 a_{34} &= -(c_{440}^{(+)} \partial_3 g_{1+,2}(h) + ik c_{440}^{(+)} g_{3+,2}(h)) \exp(\lambda \exp(-\beta h)); \\
 a_{41} &= e^{\mu h} (c_{130}^{(1)} ik \Delta_1^{(1)} e^{p_1 h} + c_{130}^{(1)} ik \phi_1 \Delta_1^{(3)} e^{p_3 h} + c_{130}^{(1)} ik \phi_3 \Delta_1^{(4)} e^{p_4 h} + \\
 &\quad + c_{330}^{(1)} p_1 \Delta_3^{(1)} e^{p_1 h} + c_{330}^{(1)} p_3 \phi_1 \Delta_3^{(3)} e^{p_3 h} + c_{330}^{(1)} p_4 \phi_3 \Delta_3^{(4)} e^{p_4 h}), \\
 a_{42} &= e^{\mu h} (c_{130}^{(1)} ik \Delta_1^{(2)} e^{p_2 h} + c_{130}^{(1)} ik \phi_2 \Delta_1^{(3)} e^{p_3 h} + c_{130}^{(1)} ik \phi_4 \Delta_1^{(4)} e^{p_4 h} + \\
 &\quad + c_{330}^{(1)} p_2 \Delta_3^{(2)} e^{p_2 h} + c_{330}^{(1)} p_3 \phi_2 \Delta_3^{(3)} e^{p_3 h} + c_{330}^{(1)} p_4 \phi_4 \Delta_3^{(4)} e^{p_4 h}), \\
 a_{43} &= -(ik c_{130}^{(+)} g_{1+,1}(h) + c_{330}^{(+)} \partial_3 g_{3+,1}(h)) \exp(\lambda \exp(-\beta h)), \\
 a_{44} &= -(ik c_{130}^{(+)} g_{1+,2}(h) + c_{330}^{(+)} \partial_3 g_{3+,2}(h)) \exp(\lambda \exp(-\beta h)).
 \end{aligned}$$

**Заклучение.** Итогом представляемых в данной работе исследований является разработка аналитического алгоритма получения дисперсионного уравнения, а также расчетных соотношений для кинематических и силовых характеристик в модели распространения локализованных стационарных симметричных упругих волн P-SV типа вдоль произвольного направления в плоскости трансверсально-изотропного функционально-градиентного слоя-пласта с симметричной по толщине экспоненциальной поперечной неоднородностью и расположенного между однотипными трансверсально-изотропными неоднородными полупространствами с физико-механическими характеристиками, описываемыми двойными экспоненциальными функциями поперечной координаты.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 1023030100040-4 1.1.2;2.3.1).

1. Мелешко В.В. Упругие волноводы: история и современность / В.В. Мелешко, А.А. Бондаренко, С.А. Довгий, А.Н. Трофимчук, Г.Я. ван Хейст // Математические методы и физико-механические поля. – 2008. – Т.51, №2. – С. 86–104.
2. Акустические волны в материалах и элементах конструкций с дефектами, неоднородностями и микроструктурой: монография / М.С. Аносов [и др.]; отв. ред. В.И. Ерофеев, А.О. Мальханов. – Нижний Новгород: Нижегород. гос. техн. ун-т им. Р.Е. Алексеева, 2021. – 311 с.
3. Velasco V.R. Dynamics of systems with two interfaces / V.R. Velasco, B. Djafari-Rouhani // Phys. Rev. – 1982. – Vol. B 26. – P. 1929–1941.



4. White J.E. Underground sound. Application of seismic waves / J.E. White. – Elsevier Science Publishers B.V., 1983. – 270 p.
5. Wendler L. Acoustic interface waves in sandwich structures / L. Wendler, V.G. Grigoryan // Surface Science. – 1988. – Vol. 206. – P. 203–224.
6. Григорян В.Г. Локализованные акустические волны в слоистых структурах / В.Г. Григорян, Л. Вендлер // Физика твердого тела. – 1991. – Т. 33, № 7. – С. 2120–2128.
7. Hoven J.M. Acoustic waves in finely layered media / J.M. Hoven // Geophysics. – 1995. – Vol. 7.60, № 4. – P. 1217–1221.
8. Datta S.K. On ultrasonic guided waves in a thin anisotropic layer lying between two isotropic layers / S.K. Datta // J. Acoust. Soc. Am. – 2000. – Vol. 108. – P. 2005–2011.
9. Ting T.C.T. Steady waves in an anisotropic elastic layer attached to a half-space or between two half-spaces – A generalization of Love waves and Stoneley waves / T.C.T. Ting // Math. Mech. Solids. – 2009. – Vol. 14, No 1–2. – P. 52–71.
10. Глухов И.А. Симметричные упругие волны в трансверсально-изотропном слое между однотипными трансверсально-изотропными полупространствами / И.А. Глухов, В.И. Сторожев // Теорет. и прикладная механика. – 2014. – Вып. 8 (54). – С. 114–122.
11. Глухов И.А. Локализованные волны в анизотропном упругом слое между разнотипными анизотропными полупространствами / И.А. Глухов, В.И. Сторожев // Труды XVII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (г. Ростов-на-Дону, 14–17 окт. 2014 г). Т. 1. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ. – 2014. – С. 132–137.
12. Глухов И.А. Локализованные P-SV волны в трансропном слое между трансропными полупространствами при условиях скользящего контакта / И.А. Глухов, В.И. Сторожев // Теорет. и прикладная механика. – 2014. – Вып. 9 (55). – С. 71–81.
13. Глухов А.А. Интегрирование системы уравнений распространения произвольно ориентированных трехпарциальных поверхностных волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022 – №4 (81). – С. 15–22. – doi: 10.24412/0136-4545-2022-4-15-22. – EDN JBHEKR.

#### A.A. Glukhov

#### Waves of longitudinal shear type in an anisotropic layer between inhomogeneous half-spaces.

An algorithm for obtaining the dispersion equation, as well as calculated relationships for kinematic and stresses characteristics for localized symmetrical stationary elastic waves of the P-SV type propagating in the plane of a transversely isotropic functionally gradient layer-layer, which has an exponential transverse heterogeneity symmetrical in thickness and located between similar transversally isotropic inhomogeneous half-spaces with physical and mechanical characteristics described by double exponential functions of the transverse coordinate is presented. The considered model describes wave deformation processes studied in mining seismoacoustics, mine reservoir seismic exploration, ultraacoustic flaw detection and acoustoelectronics, and is also of interest in connection with the issues of wave deformation of structures created using additive technologies.

**Keywords:** *layer between half-spaces, functional-gradient transversally isotropic materials, double exponential and exponential functions of heterogeneity, stationary dynamic deformation, longitudinal-shear localized waves, dispersion equations, calculated relations for kinematic and stresses characteristics.*

Получено 24.11.2023

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

---

УДК 51-74:510.22:519.6:539.3  
doi:10.24412/0136-4545-2023-4-72-80  
EDN:SGWSTG



©2023. А.С. Гольцев<sup>1</sup>, С.Б. Номбре<sup>2</sup>, Д.Д. Полянский<sup>3</sup>, С.В. Сторожев<sup>4</sup>

### УЧЕТ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ РАСЧЕТЕ СКОРОСТЕЙ ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН

Представлена разработка алгоритма получения нечетко-множественных оценок влияния погрешностей в задании исходных параметров, связанных с разбросами экспериментальных данных и технологическими проектными допусками на результаты применения классической и учитывающей релаксацию теплового потока гиперболической расчетных моделей определения скоростей связанных термоупругих волн. Применена методика, которая основывается на переходе в функциональных соотношениях для расчета исследуемых скоростей в рамках детерминистических версий соответствующих моделей, к описывающим неконтрастность экзогенных характеристик нечетко-множественным параметрам-аргументам с фрагментированным

---

<sup>1</sup>*Гольцев Аркадий Сергеевич* – доктор физ.-мат. наук, проф., зав. каф. прикладной механики и компьютерных технологий ф-та матем. и информ. технологий ДонГУ, Донецк, e-mail: a.s.goltsev@mail.ru.

*Goltsev Arkady Sergeevich* – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department, Donetsk State University, Donetsk, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Chair of Applied Mechanics and Computer Technologies.

<sup>2</sup>*Номбре Светлана Борисовна* – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.b.nombre@donnasa.ru.

*Nombre Svetlana Borisovna* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

<sup>3</sup>*Полянский Дмитрий Дмитриевич* – аспирант каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: d.d.polyanskiy@donnasa.ru.

*Polyansky Dmitry Dmitrievich* – Postgraduate, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

<sup>4</sup>*Сторожев Сергей Валериевич* – доктор техн. наук, проф. каф. специализированных информационных технологий и систем строительного ф-та ДонНАСА, Макеевка, e-mail: s.v.storozhev@donnasa.ru.

*Storozhev Sergey Valerievich* – Doctor of Technical Sciences, Professor, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, Faculty of Civil Engineering, Chair of Specialized Information Technologies and Systems.

использованием арифметики нечетких величин и модифицированной альфа-уровневой формы эвристического принципа расширения. Получены расчетные соотношения для основных неконтрастных характеристик рассматриваемых моделей.

**Ключевые слова:** термоупругие волны, модели расчета скоростей, разбросы исходных параметров, погрешности экспериментальных данных, технологические допуски, нечетко-множественный учет неопределенности, аппарат нечетких вычислений, эвристический принцип расширения.

**Введение и цели исследования.** Для обширного ряда современных научно-технических отраслей, таких как энергетика, машино- и приборостроение, аэрокосмическая индустрия, технологии диагностики твердотельных объектов, одним из актуальных аспектов в проектных расчетах и количественном мониторинге эксплуатационных режимов является получение адекватных оценок для скоростей распространения термомеханических возмущений – связанных термоупругих волн [1–5]. При этом повышение качества расчетных оценок связано, в том числе, с учетом возможных погрешностей для значений исходных параметров расчетных моделей, обусловленных разбросами экспериментальных замеров различных физико-механических характеристик материалов и технологическими допусками в процессах их изготовления. Способы учета разбросов в значениях исходных параметров расчетных функциональных соотношений связаны с применением в исследуемых моделях методов вероятностно-стохастического анализа либо методов теории нечетких множеств [6, 7]. При этом особенностями применения нечетко-множественного подхода в исследованиях параметрических зависимостей для скоростей термоупругих волн являются менее строгие требования к характеру неконстрастной исходной информации, которая при использовании вероятностного подхода должна быть представлена однородными частотными выборками большой мощности, а также возможности учета данных эксклюзивных субъективных экспертных заключений. В контексте представленных соображений, целью данной работы является разработка нечетко-множественной методики учета параметрической неопределенности в виде разбросов значений исходных параметров при расчете скоростей связанных термоупругих волн в деформируемых средах.

**1. Детерминистические расчетные модели для скоростей термоупругих волн.** Актуальные апробированные модели расчета скоростей связанных термоупругих волн при учете различных групп факторов в рассматриваемых процессах представлены, в частности, в работах [8, 9]. Так, в рамках классической модели распространения гармонических термоупругих волн круговой частоты  $\omega$  с плоским фронтом в изотропной среде с начальной температурой  $T_0$ , изотермическими параметрами Ламе  $\lambda$  и  $\mu$ , коэффициентом объемного теплового расширения  $\alpha_T$ , коэффициентом теплопроводности  $\lambda_0$ , плотностью  $\rho$  и параметром теплоемкости  $c_\varepsilon$ , фазовые скорости и декременты затухания квазиупругой (квазиакустической)  $v_1, \vartheta_1$  и квазитепловой (квазитермической)  $v_2, \vartheta_2$  составляющих соответственно определяются соотношениями [8]

$$v_1 = \omega / Re((1/2)(\sigma^2 + q(1 + \varepsilon) + ((\sigma^2 + q(1 + \varepsilon))^2 - 4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}, \quad (1)$$

$$\vartheta_1 = \text{Im}((1/2)(\sigma^2 + q(1 + \varepsilon) + ((\sigma^2 + q(1 + \varepsilon))^2 - 4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}, \quad (2)$$

$$v_2 = \omega / \text{Re}((1/2)(\sigma^2 + q(1 + \varepsilon) - ((\sigma^2 + q(1 + \varepsilon))^2 - 4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}, \quad (3)$$

$$\vartheta_2 = \text{Im}((1/2)(\sigma^2 + q(1 + \varepsilon) - ((\sigma^2 + q(1 + \varepsilon))^2 - 4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}, \quad (4)$$

$$\sigma = \omega/c_1, \quad q = i\omega/\varsigma, \quad \varepsilon = m\eta\varsigma, \quad c_1 = ((\lambda + 2\mu)/\rho)^{1/2}, \quad \varsigma = \lambda_0/c_\varepsilon, \quad (5)$$

$$\eta = \gamma T_0/\lambda_0, \quad m = \gamma/(c_1^2 \rho), \quad \gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T.$$

В рамках модели гиперболической теплопроводности с релаксацией теплового потока [10, 11] асимптоты скоростей и коэффициентов затухания квазиупругой и квазитепловой составляющих рассчитываются на базе соотношений, записываемых, по большей части, в обозначениях работы [11]:

$$v_{1ag} = (2/(A_1 + A_2 - a_*))^{1/2}, \quad v_{2ag} = (2/(A_1 + A_2 + a_*))^{1/2}, \quad (6)$$

$$\vartheta_{1ag} = A_3(a_* - b_*)(2a_*(2(A_1 + A_2 - a_*))^{1/2})^{-1}, \quad (7)$$

$$\vartheta_{2ag} = A_3(a_* + b_*)(2a_*(2(A_1 + A_2 + a_*))^{1/2})^{-1},$$

$$a_* = ((A_1 - A_2)^2 + 4A_1A_2A_4)^{1/2}, \quad b_* = A_2 + A_1(2A_4 - 1); \quad (8)$$

$$A_1 = \rho/(K + (4/3)G), \quad A_2 = \tau A_3, \quad A_3 = \lambda_0^{-1}(\rho c_\varepsilon + \alpha_T^2 K T_0(1 + (4/3)GK^{-1})^{-1}),$$

$$A_4 = (1 + \rho c_\varepsilon(1 + (4/3)GK^{-1})/(\alpha_T^2 K T_0))^{-1};$$

$\rho$  – плотность изотропной среды,  $T_0$  – начальное отсчетное значение температуры,  $K = \lambda + (2/3)\mu$  – изотермический модуль объемного сжатия,  $G$  – изотермический модуль сдвига,  $\alpha_T$  – коэффициент объемного теплового расширения,  $\lambda_0$  – коэффициент теплопроводности,  $c_\varepsilon$  – параметр теплоемкости при постоянном объеме,  $\tau$  – параметр постоянной релаксации теплового потока.

Расчет подлежащих анализу значений непосредственно для величин фазовых скоростей  $v_g(\omega)$  и коэффициентов затухания  $\vartheta_g(\omega)$  рассматриваемых волн, в целях реализуемого алгоритма исследования учета влияния фактора параметрической неопределенности, осуществляется с использованием полученной в [10] системы дисперсионных соотношений

$$\vartheta^4 - 6\vartheta^2 k^2 + k^4 + 2A_3\vartheta k\omega + (A_1 + A_2)(\vartheta^2 - k^2)\omega^2 - A_1A_2(A_4 - 1)\omega^4 = 0, \quad (9)$$

$$4\vartheta k^3 - A_3\omega(k^2 + A_1(A_4 - 1)\omega^2) - (4\vartheta^3 + 2(A_1 + A_2)\vartheta\omega)k + 3\vartheta^2\omega = 0,$$

по следующей схеме: из второго соотношения (9), рассматриваемого как кубическое уравнение относительно величины  $k$ , по формулам Кардано записываются три варианта представлений

$$k = \Phi_j(\vartheta, \omega, A_1, A_2, A_3, A_4); \quad (10)$$

на основе подстановки этих представлений в первое уравнение (9) записываются три варианта численно исследуемого нелинейного уравнения

$$\vartheta_j(\omega, A_1, A_2, A_3, A_4) = 0; \quad (11)$$

после расчета отвечающих физическим условиям рассматриваемой модели корней  $\vartheta_*(\omega)$  уравнения (11), как коэффициентов затухания волны с круговой частотой  $\omega$ , определяется значения фазовой скорости соответствующей волны

$$v(\omega) = \omega / \Phi(\vartheta_*(\omega), \omega). \quad (12)$$

Дальнейшей задачей исследования является построение нечетко-множественных обобщений представленных выше расчетных алгоритмов на основе эвристического принципа обобщения в альфа-уровневой модификации и поэтапного фрагментированного применения аппарата нечетко-множественных вычислений в процессе перехода к обладающим разбросами нечетким аргументам в расчетных соотношениях для характеристик детерминистических вариантов рассматриваемых моделей [13].

**2. Нечетко-множественное обобщение расчетного алгоритма в рамках классической модели теплопроводности.** При разработке нечетко-множественной модификации расчетных соотношений (1)–(4), их исходные физико-механические, а также промежуточные и выходные параметры, интерпретируются как выпуклые нечетко-множественные величины  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{\lambda}_0$ ,  $\tilde{c}_\varepsilon$ ,  $\alpha_T$ ,  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{T}_0$ ,  $\tilde{\sigma}$ ,  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{\varepsilon}$ ,  $\tilde{c}_1$ ,  $\tilde{\zeta}$ ,  $\tilde{\eta}$ ,  $\tilde{m}$ ,  $\tilde{\gamma}$ ,  $\tilde{v}_1$ ,  $\tilde{\vartheta}_1$ ,  $\tilde{v}_2$ ,  $\tilde{\vartheta}_2$ , представленные суперпозициями множеств  $\alpha$ -уровня

$$\tilde{\lambda} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha], \quad \tilde{\mu} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha], \quad \dots, \quad (13)$$

$$\tilde{m} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{m}_\alpha, \bar{m}_\alpha], \quad \tilde{\gamma} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\gamma}_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha];$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1(\omega) &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{v}_{1\alpha}(\omega), \bar{v}_{1\alpha}(\omega)], & \tilde{\vartheta}_1(\omega) &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\vartheta}_{1\alpha}(\omega), \bar{\vartheta}_{1\alpha}(\omega)], \\ \tilde{v}_2(\omega) &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{v}_{2\alpha}(\omega), \bar{v}_{2\alpha}(\omega)], & \tilde{\vartheta}_2(\omega) &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\vartheta}_{2\alpha}(\omega), \bar{\vartheta}_{2\alpha}(\omega)]. \end{aligned} \quad (14)$$

В случае интерпретации неконтрастных исходных параметров  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{\lambda}_0$ ,  $\tilde{c}_\varepsilon$ ,  $\alpha_T$ ,  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{T}_0$  треугольными нормальными нечеткими числами  $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ,  $\tilde{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ ,  $\tilde{\lambda}_0 = (\lambda_{01}, \lambda_{02}, \lambda_{03})$ ,  $\tilde{c}_\varepsilon = (c_{\varepsilon 1}, c_{\varepsilon 2}, c_{\varepsilon 3})$ ,  $\tilde{\alpha}_T = (\alpha_{T1}, \alpha_{T2}, \alpha_{T3})$ ,  $\tilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ ,  $\tilde{T}_0 = (T_{01}, T_{02}, T_{03})$ , соответствующие границы интервалов  $\alpha$ -уровня имеют вид

$$\begin{aligned} \underline{\lambda}_\alpha &= (1 - \alpha)\lambda_1 + \alpha\lambda_2, & \bar{\lambda}_\alpha &= \alpha\lambda_2 + (1 - \alpha)\lambda_3; \\ \underline{\mu}_\alpha &= (1 - \alpha)\mu_1 + \alpha\mu_2, & \bar{\mu}_\alpha &= \alpha\mu_2 + (1 - \alpha)\mu_3; \dots; \\ \underline{T}_{0\alpha} &= (1 - \alpha)T_{01} + \alpha T_{02}, & \bar{T}_{0\alpha} &= \alpha T_{02} + (1 - \alpha)T_{03}. \end{aligned} \quad (15)$$

Промежуточные параметры  $\tilde{\sigma}$ ,  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{\varepsilon}$ ,  $\tilde{c}_1$ ,  $\tilde{\zeta}$ ,  $\tilde{\eta}$ ,  $\tilde{m}$ ,  $\tilde{\gamma}$  обобщаемой расчетной модели, определяемые соотношениями (5), могут быть получены в явной форме с применением аппарата арифметики треугольных нечетких чисел [9–10, 16–17]:

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_1 &= (c_{11}, c_{12}, c_{13}), & c_{11} &= (\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_3, & c_{12} &= (\lambda_2 + 2\mu_2)/\rho_2, \\
 c_{13} &= (\lambda_3 + 2\mu_3)/\rho_1; & \tilde{\gamma} &= (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), & \gamma_1 &= (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_{T1}, \\
 & & \gamma_2 &= (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_{T2}, & \gamma_3 &= (3\lambda_3 + 2\mu_3)\alpha_{T3}; \\
 \tilde{\sigma} &= (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), & \sigma_1 &= \omega/c_{13}, & \sigma_2 &= \omega/c_{12}, & \sigma_3 &= \omega/c_{11}; \\
 \tilde{\zeta} &= (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3), & \zeta_1 &= \lambda_{01}/c_{\varepsilon 3}, & \zeta_2 &= \lambda_{02}/c_{\varepsilon 2}, & \zeta_3 &= \lambda_{03}/c_{\varepsilon 1}; \\
 \tilde{q} &= (q_1, q_2, q_3), & q_1 &= i\omega/\zeta_3, & q_2 &= i\omega/\zeta_2, & q_3 &= i\omega/\zeta_1; \\
 \tilde{\eta} &= (\eta_1, \eta_2, \eta_3), & \eta_1 &= \gamma_1 T_{01}/\lambda_{03}, & \eta_2 &= \gamma_2 T_{02}/\lambda_{02}, & \eta_3 &= \gamma_3 T_{03}/\lambda_{01}; \\
 \tilde{m} &= (m_1, m_2, m_3), & m_1 &= \gamma_1/(c_{13}^2 \rho_3), & m_2 &= \gamma_2/(c_{12}^2 \rho_2), & m_3 &= \gamma_3/(c_{11}^2 \rho_1); \\
 \tilde{\varepsilon} &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), & \varepsilon_1 &= m_1 \eta_1 \zeta_1, & \varepsilon_2 &= m_2 \eta_2 \zeta_2, & \varepsilon_3 &= m_3 \eta_3 \zeta_3.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Непосредственно расчет характеристик  $\tilde{v}_1, \tilde{\vartheta}_1, \tilde{v}_2, \tilde{\vartheta}_2$  осуществляется на основе применения альфа-уровневой модификации эвристического принципа обобщения [9, 10], в рамках которого они определяются в форме (14), где

$$\underline{v}_{1\alpha}(\omega) = \inf_{\substack{\sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \overline{\sigma}_\alpha] \\ q \in [\underline{q}_\alpha, \overline{q}_\alpha] \\ \varepsilon \in [\underline{\varepsilon}_\alpha, \overline{\varepsilon}_\alpha]}} \{\omega/Re((1/2)(\sigma^2 + q(1 + \varepsilon) + ((\sigma^2 + q(1 + \varepsilon))^2 - 4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}\}, \tag{17}$$

$$\overline{v}_{1\alpha}(\omega) = \sup_{\substack{\sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \overline{\sigma}_\alpha] \\ q \in [\underline{q}_\alpha, \overline{q}_\alpha] \\ \varepsilon \in [\underline{\varepsilon}_\alpha, \overline{\varepsilon}_\alpha]}} \{\omega/Re((1/2)(\sigma^2 + q(1 + \varepsilon) + ((\sigma^2 + q(1 + \varepsilon))^2 - 4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}\};$$

$$\underline{\vartheta}_{1\alpha}(\omega) = \inf_{\substack{\sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \overline{\sigma}_\alpha] \\ q \in [\underline{q}_\alpha, \overline{q}_\alpha] \\ \varepsilon \in [\underline{\varepsilon}_\alpha, \overline{\varepsilon}_\alpha]}} \{Im((1/2)(\sigma^2 + q(1 + \varepsilon) + ((\sigma^2 + q(1 + \varepsilon))^2 - 4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}\}, \tag{18}$$

$$\overline{\vartheta}_{1\alpha}(\omega) = \sup_{\substack{\sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \overline{\sigma}_\alpha] \\ q \in [\underline{q}_\alpha, \overline{q}_\alpha] \\ \varepsilon \in [\underline{\varepsilon}_\alpha, \overline{\varepsilon}_\alpha]}} \{Im((1/2)(\sigma^2 + q(1 + \varepsilon) + ((\sigma^2 + q(1 + \varepsilon))^2 - 4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}\};$$

$$\underline{v}_{2\alpha}(\omega) = \inf_{\substack{\sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \overline{\sigma}_\alpha] \\ q \in [\underline{q}_\alpha, \overline{q}_\alpha] \\ \varepsilon \in [\underline{\varepsilon}_\alpha, \overline{\varepsilon}_\alpha]}} \{\omega/Re((1/2)(\sigma^2 + q(1 + \varepsilon) - ((\sigma^2 + q(1 + \varepsilon))^2 - 4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}\}, \tag{19}$$

$$\overline{v}_{2\alpha}(\omega) = \sup_{\substack{\sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \overline{\sigma}_\alpha] \\ q \in [\underline{q}_\alpha, \overline{q}_\alpha] \\ \varepsilon \in [\underline{\varepsilon}_\alpha, \overline{\varepsilon}_\alpha]}} \{\omega/Re((1/2)(\sigma^2 + q(1 + \varepsilon) - ((\sigma^2 + q(1 + \varepsilon))^2 - 4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}\};$$

$$\underline{\vartheta}_{2\alpha}(\omega) = \inf_{\substack{\sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \overline{\sigma}_\alpha] \\ q \in [\underline{q}_\alpha, \overline{q}_\alpha] \\ \varepsilon \in [\underline{\varepsilon}_\alpha, \overline{\varepsilon}_\alpha]}} \{Im((1/2)(\sigma^2 + q(1 + \varepsilon) - ((\sigma^2 + q(1 + \varepsilon))^2 - 4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}\}, \tag{20}$$

$$\overline{\vartheta}_{2\alpha}(\omega) = \sup_{\substack{\sigma \in [\underline{\sigma}_\alpha, \overline{\sigma}_\alpha] \\ q \in [\underline{q}_\alpha, \overline{q}_\alpha] \\ \varepsilon \in [\underline{\varepsilon}_\alpha, \overline{\varepsilon}_\alpha]}} \{Im((1/2)(\sigma^2 + q(1 + \varepsilon) - ((\sigma^2 + q(1 + \varepsilon))^2 - 4q\sigma^2)^{1/2}))^{1/2}\};$$

Учет параметрической неопределенности при расчете скоростей термоупругих волн

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}_\alpha &= (1 - \alpha)\sigma_1 + \alpha\sigma_2, & \bar{\sigma}_\alpha &= \alpha\sigma_2 + (1 - \alpha)\lambda\sigma_3; \\ \underline{q}_\alpha &= (1 - \alpha)q_1 + \alpha q_2, & \bar{q}_\alpha &= \alpha q_2 + (1 - \alpha)q_3; \\ \underline{\varepsilon}_\alpha &= (1 - \alpha)\varepsilon_1 + \alpha\varepsilon_2, & \bar{\varepsilon}_\alpha &= \alpha\varepsilon_2 + (1 - \alpha)\varepsilon_3;\end{aligned}\tag{21}$$

а величины  $\sigma_j$ ,  $q_j$ ,  $\varepsilon_j$  рассчитываются по формулам (16).

**3. Нечетко-множественное обобщение расчетного алгоритма в рамках модели гиперболической теплопроводности.** Нечетко-множественная модификация расчетного алгоритма (6)–(8) для определения асимптот скоростей и коэффициентов затухания квазиупругой и квазитепловой составляющих объемных термоупругих волн в рамках модели гиперболической теплопроводности с релаксацией теплового потока строится по схеме, аналогичной вышеописанной. Применительно к исходным параметрам в представлениях (8), а также к промежуточным параметрам расчетного алгоритма (6)–(8), в дополнение к (13) вводятся нечетко-множественные характеристики

$$\begin{aligned}\tilde{K} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{K}_\alpha, \bar{K}_\alpha], \\ \underline{K}_\alpha &= (1 - \alpha)K_1 + \alpha K_2, & \bar{K}_\alpha &= \alpha K_2 + (1 - \alpha)K_3, & K_j &= \lambda_j + (2/3)\mu_j; \\ \tilde{\tau} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\tau}_\alpha, \bar{\tau}_\alpha], & \underline{\tau}_\alpha &= (1 - \alpha)\tau_1 + \alpha\tau_2, & \bar{\tau}_\alpha &= \alpha\tau_2 + (1 - \alpha)\tau_3; \\ \tilde{a}_* &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{a}_{*\alpha}, \bar{a}_{*\alpha}], & \tilde{b}_* &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{b}_{*\alpha}, \bar{b}_{*\alpha}], \\ \tilde{A}_j &= (A_{j1}, A_{j2}, A_{j3}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{A}_{j\alpha}, \bar{A}_{j\alpha}], \\ \underline{A}_{j\alpha} &= (1 - \alpha)A_{j1} + \alpha A_{j2}, & \bar{A}_{j\alpha} &= \alpha A_{j2} + (1 - \alpha)A_{j3}, & (j &= \overline{1, 4}).\end{aligned}\tag{22}$$

Расчетные формулы для  $\tilde{A}_j$  базируются на аппарате стандартной арифметики треугольных нормальных нечетких чисел и имеют вид:

$$\begin{aligned}A_{11} &= \rho_1/(K_3 + (4/3)G_3), & A_{12} &= \rho_2/(K_2 + (4/3)G_2), & A_{13} &= \rho_3/(K_1 + (4/3)G_1); \\ A_{21} &= \tau_1 A_{31}, & A_{22} &= \tau_2 A_{32}, & A_{23} &= \tau_3 A_{33}; \\ A_{31} &= \lambda_{03}^{-1}(\rho_1 c_{\varepsilon 1} + \alpha_{T1}^2 K_1 T_{01}(1 + (4/3)G_3 K_1^{-1})^{-1}), \\ A_{32} &= \lambda_{02}^{-1}(\rho_2 c_{\varepsilon 2} + \alpha_{T2}^2 K_2 T_{02}(1 + (4/3)G_2 K_2^{-1})^{-1}), \\ A_{33} &= \lambda_{01}^{-1}(\rho_3 c_{\varepsilon 3} + \alpha_{T3}^2 K_3 T_{03}(1 + (4/3)G_1 K_3^{-1})^{-1}); \\ A_{41} &= (1 + \rho_3 c_{\varepsilon 3}(1 + (4/3)G_3 K_1^{-1})/(\alpha_{T1}^2 K_1 T_{01}))^{-1}, \\ A_{42} &= (1 + \rho_2 c_{\varepsilon 2}(1 + (4/3)G_2 K_2^{-1})/(\alpha_{T2}^2 K_2 T_{02}))^{-1}, \\ A_{43} &= (1 + \rho_1 c_{\varepsilon 1}(1 + (4/3)G_1 K_3^{-1})/(\alpha_{T2}^2 K_3 T_{03}))^{-1}.\end{aligned}\tag{23}$$

При формировании представлений для  $\tilde{a}_*$ ,  $\tilde{b}_*$ , а затем и для  $\tilde{v}_{1ag}$ ,  $\tilde{\vartheta}_{1ag}$ ,  $\tilde{v}_{2ag}$ ,  $\tilde{\vartheta}_{2ag}$  на основе модифицированного эвристического принципа обобщения исполь-

зуются следующие оценки для частных производных с учетом свойств положительной определенности значений параметров  $A_j$  [10]:

$$\begin{aligned} \partial a_*/\partial A_4 > 0, \quad \partial b_*/\partial A_2 > 0, \quad \partial b_*/\partial A_4 > 0; \quad \partial v_{1ag}/\partial A_1 < 0, \quad \partial v_{1ag}/\partial A_2 < 0, \\ \partial v_{1ag}/\partial a_* > 0; \quad \partial v_{2ag}/\partial A_1 < 0, \quad \partial v_{2ag}/\partial A_2 < 0, \quad \partial v_{2ag}/\partial a_* < 0; \\ \partial \vartheta_{1ag}/\partial b_* < 0, \quad \partial \vartheta_{1ag}/\partial A_1 < 0, \quad \partial \vartheta_{1ag}/\partial A_2 < 0, \quad \partial \vartheta_{1ag}/\partial A_3 > 0; \\ \partial \vartheta_{2ag}/\partial b_* > 0, \quad \partial \vartheta_{2ag}/\partial A_1 < 0, \quad \partial \vartheta_{2ag}/\partial A_2 < 0, \quad \partial \vartheta_{2ag}/\partial A_3 > 0. \end{aligned} \quad (24)$$

В итоге, с учетом (22)–(24), для компонентов представлений  $\tilde{v}_{1ag}$ ,  $\tilde{\vartheta}_{1ag}$ ,  $\tilde{v}_{2ag}$ ,  $\tilde{\vartheta}_{2ag}$  могут быть записаны выражения

$$\begin{aligned} \underline{a}_{*\alpha} &= \inf_{\substack{A_1 \in [\underline{A}_{1\alpha}, \overline{A}_{1\alpha}] \\ A_2 \in [\underline{A}_{2\alpha}, \overline{A}_{2\alpha}]} } ((A_1 - A_2)^2 + 4A_1A_2\underline{A}_{4\alpha})^{1/2}, \\ \overline{a}_{*\alpha} &= \sup_{\substack{A_1 \in [\underline{A}_{1\alpha}, \overline{A}_{1\alpha}] \\ A_2 \in [\underline{A}_{2\alpha}, \overline{A}_{2\alpha}]} } ((A_1 - A_2)^2 + 4A_1A_2\overline{A}_{4\alpha})^{1/2}; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\underline{b}_{*\alpha} = \inf_{A_1 \in [\underline{A}_{1\alpha}, \overline{A}_{1\alpha}]} \underline{A}_{2\alpha} + A_1(2\underline{A}_{4\alpha} - 1), \quad \overline{b}_{*\alpha} = \sup_{A_1 \in [\underline{A}_{1\alpha}, \overline{A}_{1\alpha}]} \overline{A}_{2\alpha} + A_1(2\overline{A}_{4\alpha} - 1);$$

$$\underline{v}_{1ag\alpha} = (2/(\overline{A}_{1\alpha} + \overline{A}_{2\alpha} - \underline{a}_{*\alpha}))^{1/2}, \quad \overline{v}_{1ag\alpha} = (2/(\underline{A}_{1\alpha} + \underline{A}_{2\alpha} - \overline{a}_{*\alpha}))^{1/2};$$

$$\underline{v}_{2ag\alpha} = (2/(\overline{A}_{1\alpha} + \overline{A}_{2\alpha} + \overline{a}_{*\alpha}))^{1/2}, \quad \overline{v}_{2ag\alpha} = (2/(\underline{A}_{1\alpha} + \underline{A}_{2\alpha} + \underline{a}_{*\alpha}))^{1/2};$$

$$\underline{\vartheta}_{1ag\alpha} = \inf_{a_* \in [\underline{a}_{*\alpha}, \overline{a}_{*\alpha}]} \underline{A}_{3\alpha} (a_* - \overline{b}_{*\alpha}) (2a_* (2(\overline{A}_{1\alpha} + \overline{A}_{2\alpha} - a_*))^{1/2})^{-1},$$

$$\overline{\vartheta}_{1ag\alpha} = \sup_{a_* \in [\underline{a}_{*\alpha}, \overline{a}_{*\alpha}]} \overline{A}_{3\alpha} (a_* - \underline{b}_{*\alpha}) (2a_* (2(\underline{A}_{1\alpha} + \underline{A}_{2\alpha} - a_*))^{1/2})^{-1};$$

$$\underline{\vartheta}_{2ag\alpha} = \inf_{a_* \in [\underline{a}_{*\alpha}, \overline{a}_{*\alpha}]} \underline{A}_{3\alpha} (a_* + \underline{b}_{*\alpha}) (2a_* (2(\overline{A}_{1\alpha} + \overline{A}_{2\alpha} + a_*))^{1/2})^{-1},$$

$$\overline{\vartheta}_{2ag\alpha} = \sup_{a_* \in [\underline{a}_{*\alpha}, \overline{a}_{*\alpha}]} \overline{A}_{3\alpha} (a_* + \overline{b}_{*\alpha}) (2a_* (2(\underline{A}_{1\alpha} + \underline{A}_{2\alpha} + a_*))^{1/2})^{-1}.$$

В соотношениях разрабатываемого алгоритма для расчета  $\tilde{v}_g(\omega)$  и  $\tilde{\vartheta}_g(\omega)$  рассматриваются неявные детерминистические функциональные зависимости

$$\vartheta_* = F_j^{-1}(\omega, A_1, A_2, A_3, A_4),$$

отвечающие трем версиям нелинейных уравнений (11) относительно параметра  $\vartheta$ , а также соотношения (10)

$$k = \Phi_j(\vartheta_*, \omega, A_1, A_2, A_3, A_4),$$

которые при нечетко-множественном обобщении приводят к представлениям



Учет параметрической неопределенности при расчете скоростей термоупругих волн

$$\tilde{\vartheta}_g(\omega) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\vartheta}_{*g\alpha}(\omega), \overline{\vartheta}_{*g\alpha}(\omega)], \quad \tilde{v}_g(\omega) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{v}_{g\alpha}(\omega), \overline{v}_{g\alpha}(\omega)], \quad (26)$$

$$\underline{\vartheta}_{*g\alpha}(\omega) = \inf_{\substack{A_1 \in [\underline{A}_{1\alpha}, \overline{A}_{1\alpha}] \\ A_2 \in [\underline{A}_{2\alpha}, \overline{A}_{2\alpha}] \\ A_3 \in [\underline{A}_{3\alpha}, \overline{A}_{3\alpha}] \\ A_4 \in [\underline{A}_{4\alpha}, \overline{A}_{4\alpha}]}} F_j^{-1}(\omega, A_1, A_2, A_3, A_4),$$

$$\overline{\vartheta}_{*g\alpha}(\omega) = \sup_{\substack{A_1 \in [\underline{A}_{1\alpha}, \overline{A}_{1\alpha}] \\ A_2 \in [\underline{A}_{2\alpha}, \overline{A}_{2\alpha}] \\ A_3 \in [\underline{A}_{3\alpha}, \overline{A}_{3\alpha}] \\ A_4 \in [\underline{A}_{4\alpha}, \overline{A}_{4\alpha}]}} F_j^{-1}(\omega, A_1, A_2, A_3, A_4);$$

$$\underline{v}_{g\alpha}(\omega) = \inf_{\substack{A_1 \in [\underline{A}_{1\alpha}, \overline{A}_{1\alpha}] \\ A_2 \in [\underline{A}_{2\alpha}, \overline{A}_{2\alpha}] \\ A_3 \in [\underline{A}_{3\alpha}, \overline{A}_{3\alpha}] \\ A_4 \in [\underline{A}_{4\alpha}, \overline{A}_{4\alpha}] \\ \vartheta_* \in [\underline{\vartheta}_{*g\alpha}, \overline{\vartheta}_{*g\alpha}]}} \{\omega / \Phi_j(\vartheta_*, \omega, A_1, A_2, A_3, A_4)\},$$

$$\overline{v}_{g\alpha}(\omega) = \sup_{\substack{A_1 \in [\underline{A}_{1\alpha}, \overline{A}_{1\alpha}] \\ A_2 \in [\underline{A}_{2\alpha}, \overline{A}_{2\alpha}] \\ A_3 \in [\underline{A}_{3\alpha}, \overline{A}_{3\alpha}] \\ A_4 \in [\underline{A}_{4\alpha}, \overline{A}_{4\alpha}] \\ \vartheta_* \in [\underline{\vartheta}_{*g\alpha}, \overline{\vartheta}_{*g\alpha}]}} \{\omega / \Phi_j(\vartheta_*, \omega, A_1, A_2, A_3, A_4)\}.$$

При численной реализации описанных расчетных алгоритмов осуществляется дискретизация разложений по множествам  $\alpha$  – уровня, и шаг варьирования параметра  $\alpha$  выбирается исходя из соображений получения практически значимого описания функций принадлежности для анализируемых неконтрастных характеристик процессов волнового термоупругого деформирования.

**Заключение.** Результатом представленных в работе исследований является осуществленная разработка алгоритма получения нечетко-множественных оценок влияния погрешностей в задании исходных параметров, связанных с разбросами экспериментальных данных и технологическими проектными допусками на результаты применения классической и учитывающей релаксацию теплового потока гиперболической расчетных моделей определения скоростей связанных термоупругих волн. Алгоритм основывается на переходе в функциональных соотношениях для расчета исследуемых скоростей в рамках детерминистических версий соответствующих моделей к описывающим неконтрастность экзогенных характеристик нечетко-множественным параметрам-аргументам с фрагментированным использованием арифметики нечетких величин и модифицированной альфа-уровневой формы эвристического принципа расширения. Получены расчетные соотношения для характеристик рассматриваемых моделей.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 1023030100040-4- 1.1.2;2.3.1).

1. *Magunov A.N.* Laser thermometry of solids: state of the art and problems / A.N. Magunov // Measurement Techniques. – 2002. – V. 45, N 2. – P. 173–181.
2. *Пашков А.Г.* Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход / А.Г. Пашков, В.А. Бубнов, С.Ю. Яновский. – М.: УРСС, 2004 – 289 с.
3. *Bargmann S.* Theoretical and computational aspects of non-classical thermoelasticity / S. Bargmann, P. Steinmann // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2006. – V. 196. – P. 516–527.
4. *Ignaczak J.* Thermoelasticity with Finite Wave Speeds / J. Ignaczak, M. Ostoja-Starzewski. – Oxford: OUP, 2009. – 413 p.
5. *Poletkin K.V.* Ultrafast heat transfer on nanoscale in thin gold films / K.V. Poletkin, G.G. Gurzadyan, J. Shang, V. Kulish // Appl. Phys. B. – 2012. – V. 107. – P. 137–143.
6. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
7. *Нгуен Куок Ши* Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.
8. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости / В. Новацкий/ – М.: Мир, 1970. – 256 с.
9. *Коваленко А.Д.* Термоупругость / А.Д. Коваленко. – К.: Вища школа, 1975. – 215 с.
10. *Бабенков М.Б.* Анализ распространения гармонических возмущений в термоупругой среде с релаксацией теплового потока / М.Б. Бабенков // ПМТФ. – 2013. – Т. 54, № 2. – С. 126–137.
11. *Витохин Е.Ю.* Численное и аналитическое исследование распространения термоупругих волн в среде с учетом релаксации теплового потока / Е.Ю. Витохин, М.Б. Бабенков // ПМТФ. – 2016. – Т. 57, № 3. – С. 171–185.
12. *Номбре С.Б.* Анализ неконтрастной модели осесимметричного термонапряженного состояния полого цилиндра / С.Б. Номбре, Д.Д. Полянский, С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 4 (81). – С. 63–76. – doi:10.24412/0136-4545-2022-4-63-76. – EDN TOGBNE.

## A.S. Goltsev, S.B. Nombbre, D.D. Polyansky, S.V. Storozhev

### Accounting of parametric uncertainty when calculating thermoelastic waves speed.

The development of an algorithm for obtaining fuzzy-set estimates of the influence of errors in setting the initial parameters associated with scatters in experimental data and technological design tolerances on the results of applying classical and hyperbolic calculation models that take into account the relaxation of heat flow for determining the velocities of coupled thermoelastic waves is presented. A technique is applied, which is based on the transition in functional relationships for calculating the studied rates within the framework of deterministic versions of the corresponding models, to fuzzy-set parameters-arguments describing the non-contrast of exogenous characteristics with fragmented use of arithmetic of fuzzy quantities and a modified alpha-level form of the heuristic principle of expansion. Calculation relations for the main non-contrast characteristics of the models under consideration are obtained.

**Keywords:** *thermoelastic waves, models for calculating velocities, scatter of initial parameters, errors in experimental data, technological tolerances, fuzzy set accounting of uncertainty, fuzzy calculation apparatus, heuristic generalization principle.*

Получено 10.10.2023

ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД,  
РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА И ГОРНАЯ  
ТЕПЛОФИЗИКА

---

УДК 622.831.322(03)

doi:10.24412/0136-4545-2023-4-81-88

EDN:MRZ FAR



©2023. В.А. Канин<sup>1</sup>, Ю.А. Пивень<sup>2</sup>, В.В. Васютина<sup>3</sup>

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ИНЖЕНЕРНОГО МЕТОДА  
ПОСТРОЕНИЯ ЗОН ПОВЫШЕННОГО ГОРНОГО ДАВЛЕНИЯ  
ПРИ РАЗРАБОТКЕ СВИТЫ УГОЛЬНЫХ ПЛАСТОВ

Представлена усовершенствованная методика построения зон повышенного горного давления при разработке свиты угольных пластов в условиях подработки или надработки источников их формирования смежными угольными пластами.

*Ключевые слова:* горные породы, призабойная часть пласта, выработки, замеры.

**Введение.** Опережающая отработка защитных пластов в многопластовом угольном месторождении является наиболее эффективной мерой предотвращения динамических и газодинамических явлений в угольных шахтах. При опережающей отработке не опасного защитного пласта снижаются горное и газовое давления на участках породного массива опасных пластов, подверженных разгружающему действию выработанного пространства защитного пласта. Одновременно с формированием зон разгрузки в массиве формируются зоны повышенного горного давления (ЗПГД), приуроченные к целикам угля и краевым

---

<sup>1</sup>Канин Владимир Алексеевич – доктор техн. наук, вед. науч. сотр. отд. горного давления РАНМИ, Донецк, e-mail: vlkanin2@yandex.com.

Канин Vladimir Alekseevich – Doctor of Technical Sciences, Leading Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Rocks Pressure Department.

<sup>2</sup>Пивень Юрий Анатольевич – канд. техн. наук, вед. науч. сотр. отд. горного давления РАНМИ, Донецк, e-mail: pivenyura5432@gmail.ru.

Пивен Yuri Anatolyevich – Candidate of Technical Sciences, Leading Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Rocks Pressure Department.

<sup>3</sup>Васютина Виктория Владимировна – канд. техн. наук, ст. науч. сотр. отд. горного давления РАНМИ, Донецк, e-mail: vasyutina.vika@yandex.ru.

Васютина Victoriya Valerievna – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Rocks Pressure Department.

частям угольных пластов. Ведение горных работ в таких зонах характеризуется повышенными опасностями проявлений горных ударов, внезапных выбросов угля, газа и других газодинамических явлений.

При разработке свит угольных пластов часто возникают ситуации, при которых на смежных пластах происходит пространственное совмещение зон разгрузки и зон ПГД (рис. 1).

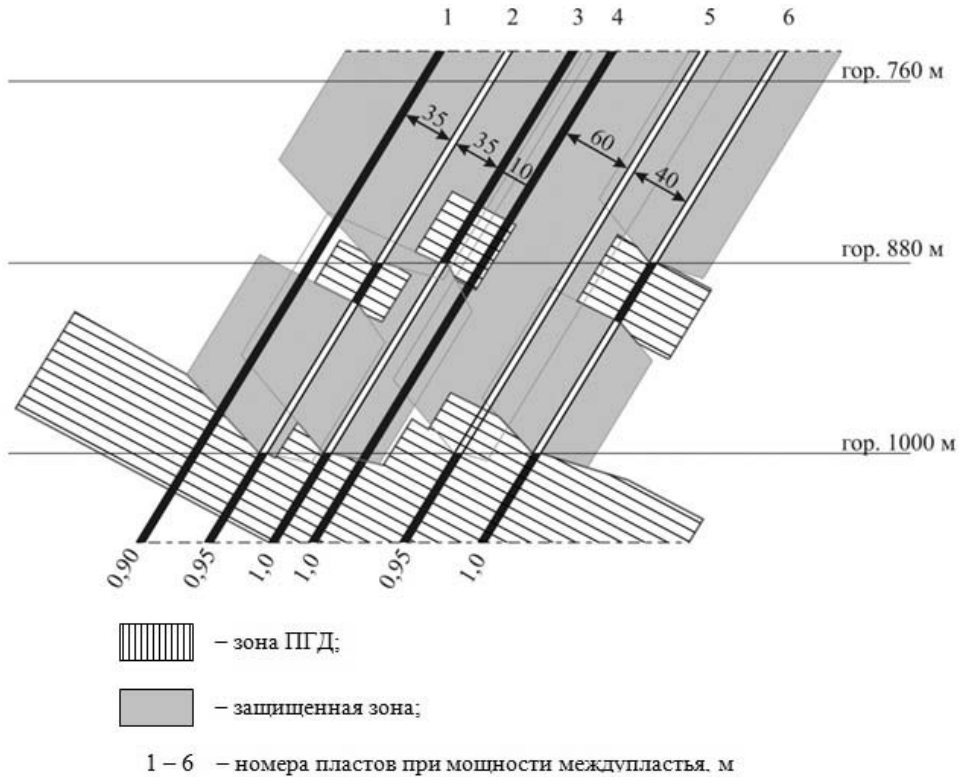


Рис. 1. Пример построения на разрезе вкрест простирания пластов зон ПГД с учетом скорректированных их размеров при подработке или надработке соседними сближенными пластами

Над- и подработка целиков и краевых частей пластов в таких ситуациях может приводить к значительному сокращению размеров образуемых зон ПГД. Однако, согласно требованиям всех предыдущих и последних «Правил...» и «Инструкции по безопасному ведению горных работ на пластах, опасных по внезапным выбросам угля (породы) и газа» [1, 2], их негативное влияние устраняется лишь при расположении опасного пласта в пределах зон эффективной защиты от влияния выработок смежных пластов. Во всех остальных случаях, независимо от количества смежных пластов и конфигурации выработанных пространств на них, размеры зон ПГД не корректируются, что приводит к необоснованному завышению протяженности опасных участков.

Целью данных исследований является совершенствование инженерных методов расчета дальности защитного действия и влияния повышенного горного

давления при разработке смежных угольных пластов путем уточнения геомеханических особенностей, закономерностей и степени влияния ряда факторов, обеспечивающих эффективную разработку смежных пластов для предотвращения динамических и газодинамических явлений.

**1. Изложение основного материала исследований.** Исследования зон ПГД при их под- и надработке включали математическое моделирование напряженного состояния толщи пород с использованием метода граничных интегральных уравнений, экспериментальные наблюдения в шахтных условиях и обобщение опыта разработки выбросоопасных пластов в различных геологических и горно-технических условиях [3, 4, 5]. Результатом выполненных исследований являются методические положения по учету совместного влияния выработок нескольких пластов при пространственном наложении зон разгрузки и зон повышенного торного давления.

Базовыми параметрами для определения размеров зон ПГД в кровлю и почву при подработке или надработке источника ПГД являются параметры  $d_1$  и  $d_2$  (рис. 2), которые для случая формирования ЗПГД от краевой части пласта определяются по таблице 1 в зависимости от ширины выработанного пространства, глубины  $H$  расположения источника ПГД (м).

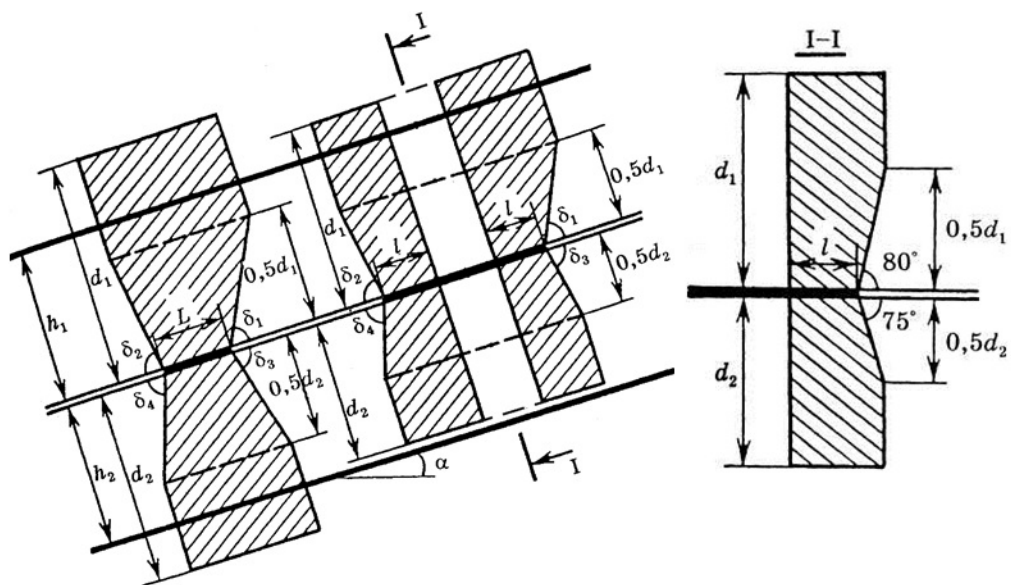


Рис. 2. Схемы к построению зон ПГД на угольных пластах

Значения  $d_1$  и  $d_2$  при  $a < 100$  м принимаются равными значениям  $d_1$  и  $d_2$  при  $a = 100$  м, при  $a > 250$  м – равными значениям  $d_1$  и  $d_2$  при  $a = 250$  м. Значения углов  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  и  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  принимаются согласно [1].

Размеры зон ПГД от целика рассчитываются путем умножения соответствующих для краевых частей угольных пластов значений  $d_1$  и  $d_2$  (табл. 1) на коэф-

эффициент  $K$ , определяемый по таблице 2, в зависимости от соотношения ширины целика ( $L$ ) и ширины зоны опорного давления согласно [1].

Таблица 1.  
Размеры зон ПГД от краевых частей пласта в его кровлю ( $d_1$ ) и почву ( $d_2$ )

Глубина расположения источника ПГД Н, м	Значения $d_1$ , м при ширине $a$ , м							Значения $d_2$ , м при ширине $a$ , м						
	100	125	150	175	200	225	250	100	125	150	175	200	225	250
300	75	84	93	98	102	108	115	68	79	90	95	100	103	106
400	82	92	102	106	110	115	120	75	86	96	101	105	108	112
500	88	98	108	112	117	121	126	82	92	102	107	111	115	119
600	92	102	112	116	121	126	130	87	97	106	111	116	120	123
700	96	106	116	120	127	131	135	90	100	109	115	120	124	127
800	100	110	120	126	133	134	140	93	103	112	118	124	127	130
900	104	114	125	131	136	141	145	96	106	117	122	127	130	133
1000	108	118	129	136	140	145	150	100	110	121	126	130	134	137
1100	112	123	135	140	145	149	154	103	114	125	130	134	137	141
1200	116	128	140	145	150	154	158	106	118	130	134	138	141	145
1300	120	131	142	148	154	158	162	109	122	135	137	142	145	148
1400	124	135	146	152	158	162	166	112	126	140	143	146	149	152

Таблица 2. Числовые значения коэффициента  $K$   
для определения размеров зон ПГД от целика угля

$L$ , м	0,20	0,25	0,35	0,5	1,0	1,5	>2,0
$K$	0	0,75	1,00	1,10	1,20	1,10	1,0

В случае наложения зон ПГД от нескольких краевых частей или угольных целиков соседних пластов на один и тот же участок данного пласта, построение зон ПГД необходимо выполнять отдельно от каждого источника ПГД.

При подработке или надработке источника ПГД параметры  $d_1$  и  $d_2$  корректируются при условии, если эффективная мощность  $m$  защитных пластов, согласно [1], не меньше 0,7 их критических мощностей  $m_0$ . При этом границы выработанного пространства защитного пласта, в соответствии с рисунками 3 а, 3 б и 4 а, 4 б, должны перекрывать нормальные проекции на этот пласт границ целика на величину не менее 20 м. Подработка или надработка краевой части пласта (источника ПГД) являются достаточными, когда граница выработанного пространства отдалена от нормальной проекции створа с краевой частью в сторону выработанного пространства на величину не менее 20 м, а в сторону массива – на величину не менее  $0.7 \times l$ , где  $l$  – ширина источника формирования зоны повышенного горного давления.

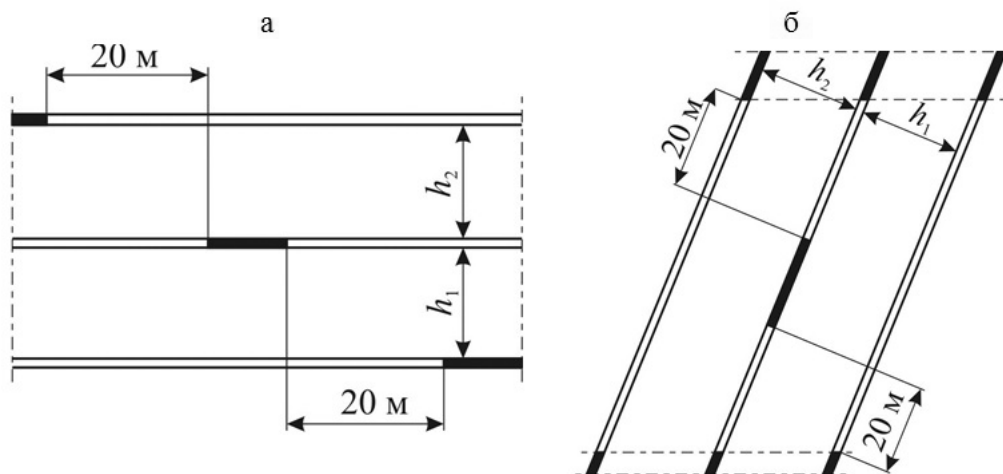


Рис. 3. Схемы для оценки условий достаточности подработки или надработки угольного целика для корректировки параметров зон ПГД: а – по простиранию пласта, б – по падению пласта

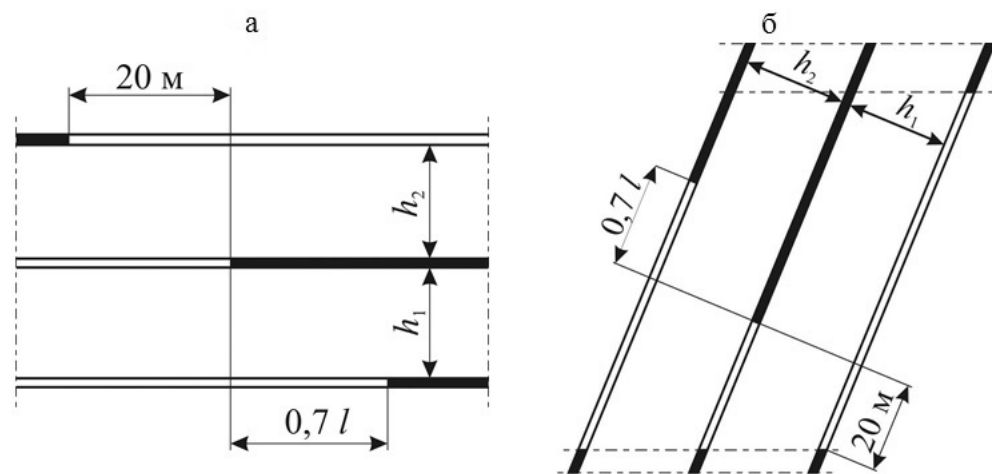


Рис. 4. Схемы для оценки условий достаточности подработки или надработки краевой части пласта для корректировки параметров зон ПГД: а – по простиранию пласта, б – по падению пласта

При выполнении рассмотренных выше условий, параметры под- или надработки соседними сближенными пластами зон ПГД в кровлю и почву пласта (источники ПГД) рассчитываются по формулам:

- при подработке:

$$d_1^{\text{П}} = K_M \times d_1, \quad (1)$$

$$d_2^{\text{П}} = K_B \times d_2; \quad (2)$$

- при надработке

$$d_1^H = K_B \times d_1, \quad (3)$$

$$d_2^H = K_M \times d_2, \quad (4)$$

где  $d_1^{\text{II}}$  и  $d_2^{\text{II}}$  – размеры зон ПГД соответственно в кровлю и почву при их подработке соседними сближенными пластами;  $d_1^H$  и  $d_2^H$  – то же при надработке зон ПГД;  $K_B$  – коэффициент, корректирующий расчетные значения  $d_1$ ,  $d_2$  в сторону выработанного пространства защитного пласта;  $K_M$  – то же, при расчетах  $d_1$  и  $d_2$  в сторону нетронутого угленородного массива;  $d_1$ ,  $d_2$  – значения размеров зон ПГД от краевой части пласта в его кровлю ( $d_1$ ) и почву ( $d_2$ ), представленные в таблице 1.

Значения коэффициентов  $K_B$  и  $K_M$  определяются по номограмме рисунка 5 в зависимости от расстояния  $h$  по нормали между пластом-источником ПГД и ближайшим защитным пластом. Остальные пласты не принимаются к учету.

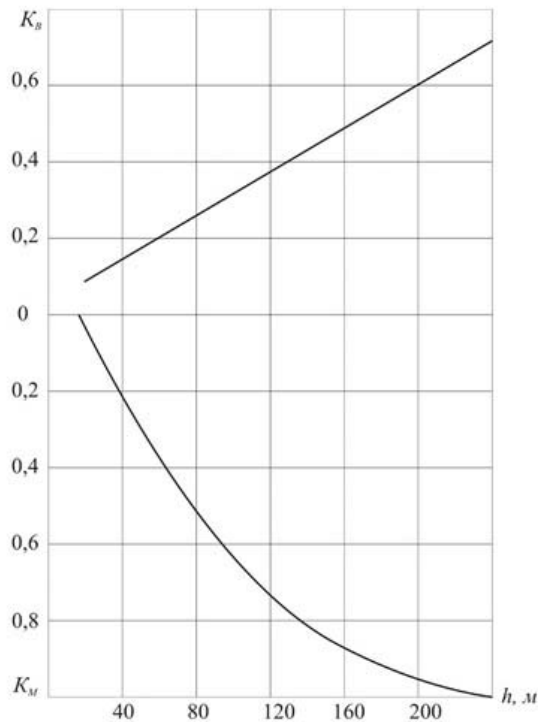


Рис. 5. Номограмма для определения коэффициентов  $K_B$  и  $K_M$

Скорректированные значения  $d_1^{\text{II}}$  ( $d_2^{\text{II}}$ ) и  $d_1^H$  ( $d_2^H$ ) – принимаются вместо значений  $d_1$  и  $d_2$  при выборе комплекса мер борьбы с газодинамическими явлениями в зонах ПГД, а также используются при графических построениях зон ПГД по схеме рисунка 2.



В случае невыполнения перечисленных выше условий достаточности подработки или надработки краевой части пласта, для корректировки параметров зон ПГД, но при попадании нормальных проекций границ источника ПГД в пределах границ выработанного пространства над- или подрабатывающего защитного пласта параметры зон ПГД могут быть скорректированы по результатам экспериментальных работ.

На рисунке 1 хорошо видно, как на пласте 2 (при подработке) и на пластах 3 и 6 (при надработке) дальность влияния зон ПГД сокращается в 2–3 раза по сравнению с дальностью влияния зон ПГД на этих же пластах на участках, где предварительная отработка защитных пластов отсутствовала.

### **Выводы и перспективы дальнейших исследований.**

1. По результатам выполненных исследований уточнены геомеханические особенности, закономерности и степень влияния ряда факторов, обеспечивающих эффективную разработку смежных пластов для предотвращения динамических и газодинамических явлений.

2. Практические результаты исследований, обеспечивающие повышение эффективности разработки угольных пластов в опасных зонах за счет сокращения объемов выполнения профилактических мероприятий, увеличения объемов добычи угля и скорости проведения подготовительных выработок на защищаемых пластах, включены в раздел использования защитных пластов «Правил ведения горных работ на пластах, склонных к газодинамическим явлениям», обеспечивающих предотвращение аварий в угольных шахтах, связанных с динамическими и газодинамическими явлениями.

3. Социальная значимость работы заключается в повышении безопасности горных работ за счет предотвращения аварий в угольных шахтах, связанных с динамическими и газодинамическими явлениями. Экономическая значимость работы заключается в сокращении объемов выполнения профилактических мероприятий, увеличении объемов добычи угля и скорости проведения подготовительных выработок на защищаемых пластах.

Исследования проводились в ФГБНУ «РАНИМИ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 1023020700021-4-2.7.1;2.7.5)

1. СОУ 10.1.00174088.011–2005. Правила ведения горных работ на пластах, склонных к газодинамическим явлениям – Киев: Минуглепром Украины, 2005. – 222 с.
2. РД 05-350-00. Инструкция по безопасному ведению горных работ на пластах, опасных по внезапным выбросам угля (породы) и газа – Москва: Федеральный горный и промышленный надзор России (Госгортехнадзор России), 2000. – 162 с.
3. Методические указания по расчету напряжений в зонах влияния очистных выработок. – Л., 1989. – 56 с.
4. *Смирнов С.Н.* Влияние разгружающего действия надработок на изменение размеров зон повышенного горного давления / С.Н. Смирнов, В.В. Зубков // Сб. науч. тр. ВНИМИ. – Л., 1990. – С. 57–59.
5. *Петухов И.М.* Расчетные методы в механике горных ударов и выбросов / И.М. Петухов, А.М. Линьков, В.С. Сидоров. – М.: Недра, – 1992. – 256 с.

*В.А. Канин, Ю.А. Пивень, В.В. Васютина*

**V.A. Kanin, Y.A. Piven, V.V. Vasyutina**

**Improving the engineering method for constructing zones of high rock pressure when developing a suite of coal seams.**

An improved technique for constructing zones of increased rock pressure during the development of a formation of coal seams in the conditions of side work or overworking of sources of their formation by adjacent coal seams is presented.

**Keywords:** *rocks, bottom-hole part of the formation, workings, measurements..*

*Получено 01.11.2023*

УДК 550.34

doi:10.24412/0136-4545-2023-4-89-101

EDN:AUYJMB



©2023. Л.А. Новгородцева<sup>1</sup>, В.В. Туманов<sup>2</sup>, О.Л. Шалованов<sup>3</sup>,  
Д.С. Бородин<sup>4</sup>, Е.А. Ялпуга<sup>5</sup>

## ИЗУЧЕНИЕ ПРЕДПОСЫЛОК ПРИМЕНЕНИЯ МИКРОСЕЙСМИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ ВЫЯВЛЕНИЯ ГАЗОНОСНЫХ СТРУКТУР В УСЛОВИЯХ ШАХТНОГО ПОЛЯ Ш. «КАЛИНОВСКАЯ-ВОСТОЧНАЯ»

В статье рассматриваются предпосылки применения метода микросейсмических зондирований и метода Накамуры для поисков структурных и структурно-тектонических ловушек метана с учетом горно-геологических условий участка шахты «Калиновская-Восточная» в районе пос. Объединенный г. Макеевки ДНР.

**Ключевые слова:** микросейсмические измерения, спектральные отношения, зоны трещиноватости, газопроявления.

**Введение.** На современном этапе развития пассивной сейсморазведки большое количество исследований посвящено изучению свойств микросейсмического

---

<sup>1</sup>Новгородцева Людмила Александровна – канд. геолого-минералогических наук, ст. науч. сотр. отд. эколого-геофизических исследований РАНМИ, Донецк, lodnv04017@gmail.com.

*Novgorodtseva Lyudmila Alexandrovna* – Candidate of Geological and Mineralogical Sciences, Senior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Ecological and Geophysical Research.

<sup>2</sup>Туманов Виктор Владимирович – ст. науч. сотр., зав. отд. эколого-геофизических исследований РАНМИ, Донецк, tum-v@yandex.ru.

*Tumanov Viktor Vladimirovich* – Senior Researcher, Head of Department, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Ecological and Geophysical Research.

<sup>3</sup>Шалованов Олег Леонидович – мл. науч. сотр. отд. эколого-геофизических исследований РАНМИ, Донецк, shalovanovoleg@yandex.com.

*Shalovanov Oleg Leonidovich* – Junior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Ecological and Geophysical Research.

<sup>4</sup>Бородин Дмитрий Сергеевич – мл. науч. сотр. отд. эколого-геофизических исследований РАНМИ, Донецк, bordym@yandex.ru.

*Borodin Dmitriy Sergeevich* – Junior Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Ecological and Geophysical Research.

<sup>5</sup>Ялпуга Елена Анатольевна – науч. сотр. отд. эколого-геофизических исследований РАНМИ, Донецк, 6217101@mail.ru.

*Yalputa Elena Anatolyevna* – Researcher, Republican Academic Research and Design Institute of Mining Geology, Geomechanics, Geophysics and Mine Surveying, Donetsk, Department of Ecological and Geophysical Research.

шума в частотном диапазоне от сотых долей герц до десятков герц и возможностям использования его для поисков коллекторов нефти и газа, в том числе метановых ловушек на шахтных полях [1, 2]. В то же время известно, что в Донецко-Макеевском угледобывающем районе ДНР метан находится как в угольных пластах, так и в угленосной толще, и запасы его по разным оценкам составляют от 741.4 до 1069.5 млрд. м<sup>3</sup> только в угольных пластах [3]. Очевидно, что наибольший интерес при поисках скоплений метана в этом районе могут представлять структурные и структурно-тектонические ловушки, представленные зонами трещиноватости вокруг и внутри пликативных и дизъюнктивных структур. С учетом особо сложных горно-геологических и техногенных условий Центрального Донбасса, наиболее перспективным представляется использование здесь, по крайней мере, на этапе опытно-методических исследований, как минимум двух передовых и хорошо изученных микросейсмических методов, какими являются традиционный метод микросейсмического зондирования (ММЗ, Горбатилов, 2008 г.) и метод Накамуры (Nakamura Y., 1989 г.). При этом особый интерес для изучения возможностей микросейсмических методов может представлять хорошо изученный горный массив шахты «Калиновская-Восточная», геологический разрез которой насыщен тектоническими нарушениями и зонами трещиноватости, а в 2020–2021 годах здесь были проведены сейсмические исследования с целью определения природы толчков, наблюдаемых в жилом секторе на поверхности над участком горных работ [4].

Целью статьи является определение разрешающей способности основных подходов к микросейсмическим измерениям для разработки оптимальной методики проведения полевых экспериментов и вариантов обработки и интерпретации полученных результатов в условиях сложного геологического разреза шахты «Калиновская-Восточная» для поиска возможных ловушек метана.

**1. Геологическое строение участка.** В региональном плане Донецко-Макеевский район находится в неотектонической зоне, контур которой определяется аномалией теплового потока – 60 мВт/м<sup>2</sup> [5] на южном крыле Кальмиус-Торецкой котловины. Общее падение пород карбона – северо-западное под углом 12–18 градусов; вблизи флексурных и антиклинальных складок углы падения увеличиваются до 50–70 градусов. Угленородный массив представлен переслаивающимися терригенными отложениями свит  $C_2^5$  и  $C_2^6$ . Состав угленосной формации следующий: пласты песчаников составляют 19–34%, известняков – 0.6–3.4%, углей – 0.3–2.2%, аргиллитов и алевролитов – до 60%. Газоносность углей на глубине 1000–1200 м высокая – 25–35 м<sup>3</sup>/т сухой беззольной массы (с.б.м).

Характерной особенностью геологии участка является наличие разновозрастных, разнонаправленных региональных надвигов и надвигов второго ранга, а также развитие пликативных тектонических структур, связанных с движением надвигов. Ниже приведены структурно-тектоническая схема (рис. 1) и три характерных геологических разреза (рис. 2–3) поля шахты Калиновская-Восточная. На схему вынесены данные по поглощению промывочной жидко-



ность. Между региональными надвигами находится система надвигов второго ранга – Промежуточный и надвиг «S», а надвиги Каменский, В и D окаймля-

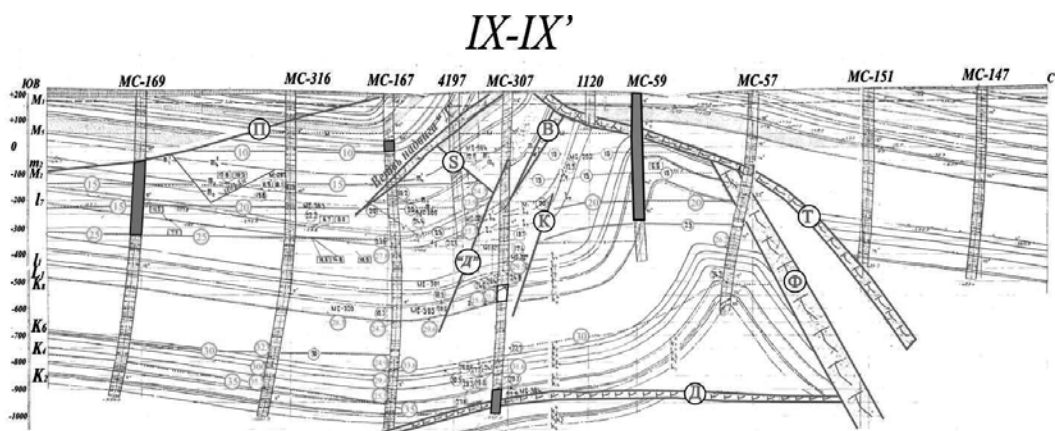


Рис. 2. Геологический разрез IX-IX' поля ш. Калиновская-Восточная. Условные обозначения представлены на рисунке 1

ют антиклинальную складку в северо-западной части участка. Такое сложное тектоническое строение участка с пересечениями плоскостей сместителей на разных глубинах создает множество потенциальных ловушек газа, однако, на самом деле, было обнаружено только одно газопроявление в скв. 306, находящейся в мелкой консолидационной отрицательной структуре, окаймленной известняками свиты (рис. 3, разрез XI-XI). Газопроявление зафиксировано на интервале глубин 950–469 м. в часто-переслаивающихся слоях трещиноватых песчаников и глинистых сланцев, содержащих большое количество растительных остатков и фауны, свидетельствующих об автохтонном накоплении. Так как на глубинах 560–565 м найдены многочисленные зеркала скольжения, а на глубинах 900–920 м обнаружено стопроцентное поглощение промывочной жидкости, можно предположить, что источником избыточного метана стали, во-первых, – особые фациальные условия в зоне накопления осадков, во-вторых, – возможные подвижки Диагонального надвига, вскрывающие угольные пласты с высокой газоносностью. Экраном, перекрывающим распространение метана в верхние горизонты, является плоскость сместителя надвига «S». Сравнение разрезов скв. № 167, № 4312 и скв. № 306 показывает, что песчаник в первых двух скважинах практически не трещиноватый, а поглощение промывочной жидкости присутствует только на интервале 130–140 м в скв. № 167.

Таким образом, быстрая изменчивость степени трещиноватости разреза свидетельствует о сложном поле действующих тангенциальных и нормальных напряжений [6]. Для более подробного изучения распределения трещиноватости в массиве были проанализированы данные по поглощению промывочной жидкости в скважинах (рис. 1). Были выявлены следующие закономерности:

– поглощение в верхних и средних частях разреза происходит в зонах, расположенных в непосредственной близости от региональных надвигов Тимошенко

(скв. № 55 и № 56) и Итальянского (скв. № 317, № 169);

– поглощение наблюдается фрагментарно по всему разрезу, если присутствует его пересечение субвертикальными плоскостями сместителей серии надвигов, например, Каменского, В, Д (рис. 2);

– слабая трещиноватость захватывает верхние участки разреза, а поглощение отсутствует вблизи более молодого регионального надвига Французского (скв. № 307, № 59, № 304, № 4196).

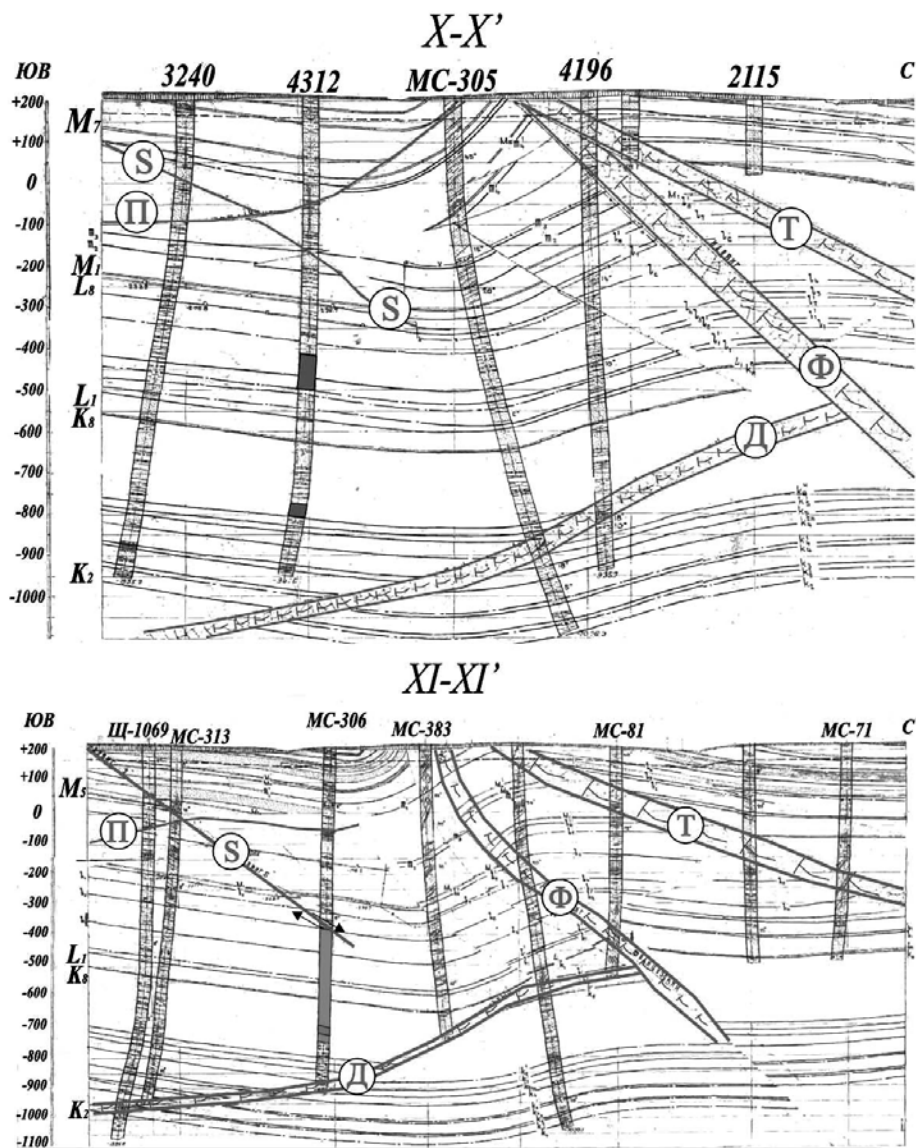


Рис. 3. Геологические разрезы X-X, XI-XI поля ш. Калиновская-Восточная. Условные обозначения представлены на рисунке 1

На основании вышеизложенного можно сделать вывод, что поле шахты Калиновская–Восточная, находящееся в зоне сближения региональных надвигов, испытывает тангенциальное напряжение, приводящее к образованию зон трещиноватости в верхних и средних частях разреза вблизи надвигов Тимошенко и Итальянского. Действие более молодого Французского надвига выразилось менее сильно и привело только к слабой трещиноватости разреза в его висячем крыле и рядом с выходом плоскости сместителя на поверхность.

**2. Возможные пути миграции метана.** В связи с тем, что высокая газоносность угольных пластов наблюдается на глубинах около 1000 м, необходимо изучить пути возможной миграции метана к верхним зонам разгрузки. Рассмотрим пример такого движения в центральной части разреза (рис. 2), где он пересекается серией плоскостей сместителей надвигов В, Д и Каменского. От угольных пластов  $K_4$  и  $K_4'$  (скв. № 167) с газоносностью  $35 \text{ м}^3$  на глубине 1100 м прослеживаются повышенные значения  $\text{CH}_4$ , идущие снизу вверх вдоль надвига Д до глубины 300 м, где находится плоскость сместителя надвига «S» (скв. № 307).

Аналогичным образом происходит движение метана вдоль плоскости сместителя надвига Каменского, однако высота его поднятия всего до глубины 500 м. Так как в скв. № 4197, № 307 и № 1120 газопроявлений не наблюдалось, можно предположить, что перераспределение метана в массиве идет не только вверх, но и по горизонтальным направлениям под экранами плоскостей сместителей надвигов «S» и Промежуточного.

**3. Результаты сейсмических работ.** На рисунке 1 показаны сейсморазведочный профиль КМПВ, местоположения стоянок мониторингового наблюдения 2020 и 2021 годов, и зона зафиксированных макро-событий с диапазоном магнитуд от 1 до 2.8. На рисунке 4 приведены типичные сейсмограммы, снятые трехкомпонентными датчиками аппаратурного комплекса «Ермак» в 2021 году (станции DNМК1–DNМК4).

Расчет гипоцентров макро-событий, выполненный на основе определенной по КМПВ скорости продольных волн, равной 2700 м/с, показал, что все они группируются на глубине от 700 до 800 м в зоне выхода на поверхность плоскости сместителя надвига «S» вблизи скв. 316, где на глубине около 1000 м в свите  $C_2^5$  зафиксировано максимальное значение природной метаноносности, равное  $35.7 \text{ м}^3/\text{т}$  с.б.м. (рис 2). В связи с этим можно предположить, что зона зафиксированных макрособытий принадлежит к максимально уплотненному участку с высокими значениями тангенциальных напряжений. Рядом находится скв. 320, где на глубине 1100 м так же обнаружена высокая метаноносность угольных пластов свиты  $C_2^5$ , равная  $35 \text{ м}^3/\text{т}$  с.б.м.

Анализ пересечений плоскостей сместителей надвигов на представленных разрезах показал, что движущимся в настоящее время является надвиг Промежуточный. Его висячее крыло совпадает с висячим крылом Диагонального надвига, находящегося на глубине около 1000 м, и зона, объединяющая его висячие крылья и висячие крылья надвига «S», представляет собой значительно



уплотненный фрагмент массива, что подтверждается низкой трещиноватостью по скв. 167 и 4312. Таким образом, сейсмический отклик массива на динамику действующих напряжений позволяет надеяться, что микросейсмическое поле при соответствующей обработке также покажет хороший геологический результат.

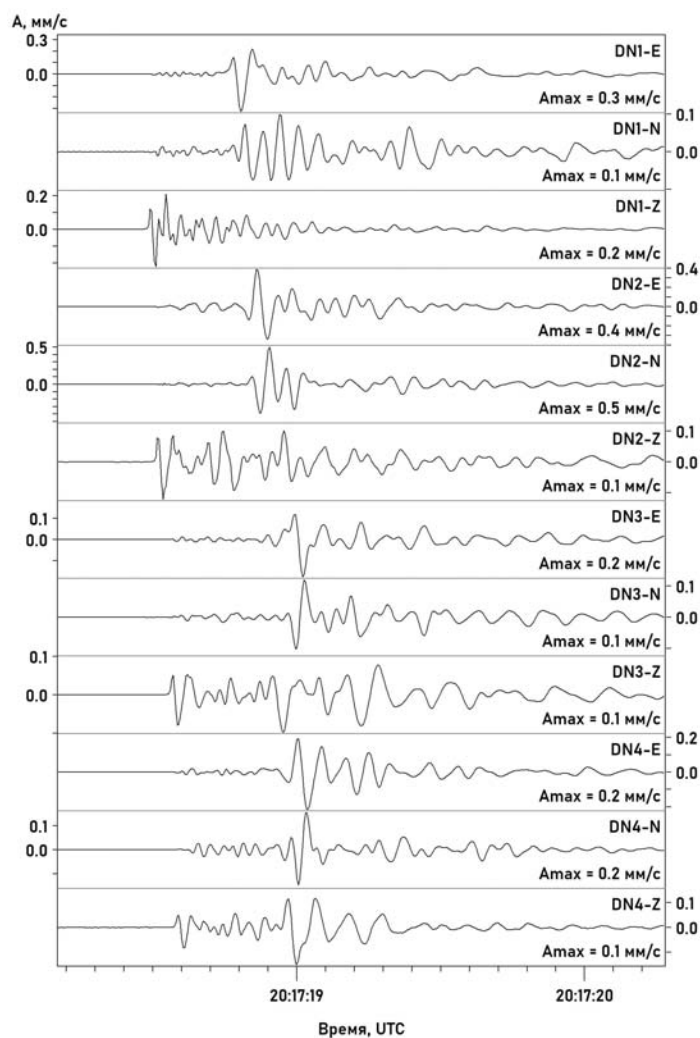


Рис. 4. Типичные сейсмограммы четырёх трёхкомпонентных станций «Ермак» одиночного макрособытия от 03.05.2021 г. на участке исследований.

Частью методик микросейсмических исследований в мире является установление зависимостей изменения фоновых значений шума от времени суток [7, 8]. В РАНМИ в 2023 г. была выполнена специализированная обработка данных сейсмического мониторинга, целью которой было изучение изменений амплитуд сейсмоимпульсов от времени. С этой целью для одной из горизонтальных

составляющих сигнала  $H_y$  и для вертикальной составляющей  $Z$  вычислялись суммы амплитуд  $\sum A_{iy}$  и  $\sum A_{iz}$  на определенном промежутке записи, соответствующем разным моментам суток в течение пяти дней. Затем вычислялись отношения  $\sum A_{iy}/\sum A_{iz}$  и строились графики, представленные на рисунке 5. Анализ графиков показывает, что в ночные часы горизонтальная составляющая  $H_y$  имеет максимумы, предположительно связанные с лунно-солнечными приливами, так как утром и днем значения  $H_y$  были минимальными. Амплитуды вертикальной составляющей колебаний были стабильно ниже, что требует дополнительных исследований в дальнейшем.

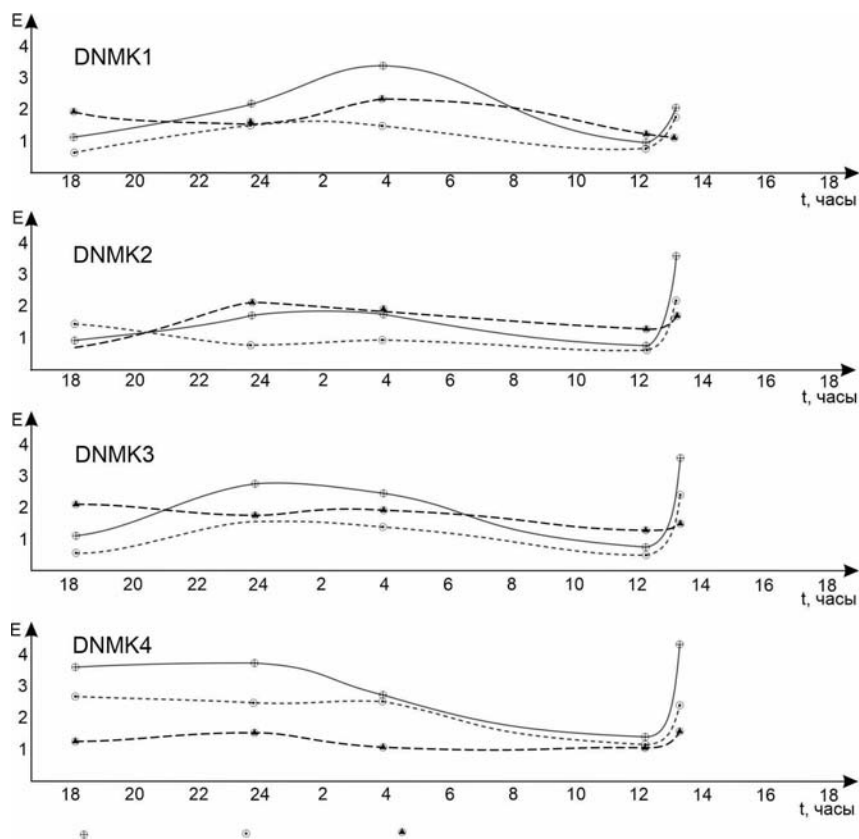


Рис. 5. Графики суточных вариаций сумм амплитуд разнонаправленных компонент макрособытий и их расчётные отношения, данные за несколько суток: 1 –  $\sum A_{iy}$ , 2 –  $\sum A_{iz}$ , 3 –  $\sum A_{iy}/\sum A_{iz}$

Таким образом, рассматривая результаты наблюдавшихся при мониторинге подземных событий (рис. 4) на поле шахты Калиновская-Восточная, можно сделать заключение, что происходит модуляция зафиксированных сигналов процессами собственных колебаний Земли под действием лунно-солнечной активности. В связи с этим фактом, можно сделать предположение о том, что эндогенная составляющая сигнала в микросейсмическом шуме будет соответствовать установленной закономерности.

При этом представляется очевидным, что основными задачами опытно-методических работ следует считать:

- 1) сравнение параметров микросейсмических импульсов в зонах сильной и слабой трещиноватости;
- 2) определение параметров спектральных характеристик микросейсм для разреза с газопроявлением;
- 3) выбор наилучших методик проведения полевых работ;
- 4) выбор оптимального комплекса обработки и интерпретации полученных данных.

Для дальнейшего понимания эффективности проведения опытно-методических работ рассмотрим физические основы, методику измерений и обработки в рамках наиболее перспективных современных направлений микросейсмологии.

**4. Методы микросейсмических зондирований (ММЗ).** Эти методы разрабатываются, развиваются и используются многими учеными начиная с 80-х годов 20 века [9–15]. Геологическими объектами поисков являются:

- флюидодинамические каналы и связанные с ними ловушки углеводородов;
- активные разломы и сопровождающие их зоны трещиноватости;
- солянокупольная тектоника и грязевые вулканы;
- трубки взрыва и т.п.

При этом известно, что для субвертикальных объектов с размерами не менее 20% от глубины залегания, эпицентр неоднородности определяется без ошибок. Две неоднородности, расположенные на расстоянии 50% от глубины залегания, так же хорошо разделяются. Исследователями установлено, что микросейсмический шум состоит из большого количества поверхностных волн разной частоты и природы, и при этом наиболее информативной является волна Рэлея. Движение частиц в этой волне происходит по эллипсам, длинные оси которых направлены перпендикулярно поверхности Земли. В связи с этим, происходит трансформация вертикальных компонент волны на неоднородностях. Частотный спектр волн Рэлея хорошо изучен в интервале 0.01–100 Гц.

Фундаментальным физическим положением ММЗ является корреляция между дисперсионной зависимостью скорости волны Рэлея  $V_R$ , ее частотой  $f$  и глубиной распространения. Получение экспериментальной кривой дисперсионной зависимости и измерение скорости  $V_R$  на поверхности малыми апертурными группами с расстоянием между датчиками, равном наименьшей длине волны Рэлея, соответствующей исследованию верхней части разреза, обеспечивает точный выбор той части спектра микросейсмических измерений, которая относится к трансформированной на неоднородности волне Рэлея [16]. Набору длин волн на разных частотах соответствуют разные глубины исследований, что и является зондированием. Установлено, что амплитуды волн Рэлея возрастают над зонами трещиноватости или низкоскоростными объектами и уменьшаются над более плотными высокоскоростными участками разреза.

Ориентировочный алгоритм выполнения исследований ММЗ заключается в выборе самого «спокойного» (без тектонических нарушений) участка шахтного

поля и установке 4-х датчиков на расстоянии не более половины длины волны ( $0.5\lambda$ ). Для частоты приема колебаний, например,  $f=10$  Гц, половина длины волны составит примерно 70 м. Определяется неидентичность амплитуд на всех датчиках и скорость  $V_R$ . Далее оставляется на месте один датчик, считающийся опорной точкой, а другие используются для картирования выбранной области разреза. Накопление сигнала производится в интервале 1.5 часа для получения стабильности спектра.

При обработке проводится нормирование полученных спектров на спектры опорной точки. Выполняется построение карт относительной интенсивности микросейсмического сигнала для каждой частоты в спектре. При интерпретации проводится привязка карт к глубине с помощью соотношения:

$$H = K \times \lambda(f) = K \frac{V_R(f)}{f}, \quad (1)$$

где  $H$  – глубина;  $K$  – коэффициент глубинной привязки, который определяется экспериментально;  $\lambda$  – длина волны;  $V_R$  – скорость рэлеевских волн.

**5. Метод Накамуры.** В 1989 году в статье Накамуры [17] было показано, что в однородной изотропной среде существует пропорциональная зависимость отношений амплитуд спектров волн Рэля  $H/Z$  – суммарного горизонтального вектора  $H$  к вертикальной компоненте  $Z$ , от динамических характеристик разреза, а также то, что она меняется с частотой  $f$ , соответствующей определенной глубине исследования. Горизонтальная и вертикальная компоненты волны Рэля по разному реагируют на горизонтальную слоистость разреза, и в районе контакта двух геологических слоев, более чем в 2.5 раза отличающихся между собой по акустической жесткости, возникает резонанс с максимальным пиком [18] на частоте

$$f_0 = V_s/4h_0, \quad (2)$$

где  $V_s$  – скорость поперечных волн в верхнем горизонте,  $h_0$  – глубина залегания контакта слоёв.

Теоретически установлено, что для большинства горных пород

$$V_s = 1.05 \div 1.09V_R, \quad (3)$$

и, следовательно,

$$h_0 = 1.07 \frac{V_R}{4f_0}, \quad (4)$$

откуда можно определить глубину залегания границы раздела между слоями.

Метод Накамуры находит свое применение для изучения характеристик грунтов и геологических образований на глубине до 1000 м. Эллиптичность микросейсм изучается путем расчета соотношений  $H/Z$ , на базе которых строятся резонансные границы разрезов, например, между рыхлым поверхностным слоем

и скальным основанием или переслаивающимися песчано-глинистыми породами и доломитами [19, 20].

Полевые работы могут проводиться одной или двумя автономными станциями в полосе частот от 0.1 до 5 Гц, в течение 30 минут. Одна из станций может находиться на расстоянии 300–400 м от профиля наблюдений, другая перемещается с шагом 25–30 м вдоль профиля. Некоторыми исследователями проводятся измерения в ночные часы для меньшего влияния технических помех.

Обработка заключается в расчете спектров горизонтальной и вертикальной компонент по методу Фурье и анализе микросейсм; в попарном расчете отношений спектров векторов горизонтальных компонент  $H_x$  и  $H_y$  и вертикальных компонент  $Z$ , и построении результирующих разрезов этих отношений с выделением аномальных значений к соседним значениям на определенных глубинах. Осуществляется привязка пиков к конкретным слоям, на которых подразумеваются явления резонанса геологического разреза и геологическая дифференциация.

В настоящее время исследователи Тарасов С.А., Давыдов В.А., Аносов Г.И. [18–20] пришли к выводу, что метод Накамуры показывает устойчивые результаты при расчленении осадочных геологических разрезов с контрастными границами плотности глубиной до 1000 м.

**Выводы.** Таким образом, наличие крупных разнонаправленных региональных надвигов и надвигов второго ранга создает внутри исследуемого массива как закономерно расположенные, так и случайно возникающие зоны трещиноватости.

Глубины залегания зон трещиноватости и их мощности колеблются в самых широких пределах.

В связи с вышеизложенным, опытно-методические исследования необходимо проводить на известных объектах с целью привязки полученных данных по глубине. При этом требуется использовать оба метода на разрезах с установленным газопроявлением и без него. В приповерхностной части разреза целесообразно использовать метод Накамуры для детализации, а для глубинной части разреза лучшую результативность обеспечит метод МЗ. Полученные данные после обработки указанными методами на каждом из планируемых объектов подвергаются анализу спектральных характеристик и привязке их к потенциальным стратиграфическим или структурным ловушкам метана.

Учитывая тот факт, что основное внимание в опытно-методических работах будет направлено на изучение микросейсм над газопроявлением, где в горизонтально-слоистом разрезе присутствует и наклонная плоскость надвига «S» и субвертикальная разуплотненная неоднородность, как было показано выше, нужно использовать многочисленные теоретические методы расчетов сейсмограмм для разных видов нарушений углепородного массива, ранее разработанные в РАНИМИ [21].

Исследования проведены в ФГБНУ «РАНИМИ» в рамках государственного задания (№ госрегистрации 1023020700022-3-2.7.5).

1. *Asten M.W.* Array estimators and the use of microseisms for reconnaissance of sedimentary basins / M.W. Asten, Henstridge M.W. // *Geophysics*. – 1984. – Vol.15(4). – P. 1828–1837.
2. *Новгородцева Л.А.* Предпосылки применения микро-сейсмических наблюдений для изучения опасных скоплений метана в приразломных зонах / Л.А. Новгородцева, О.Л. Шалованов и др. // *Журнал теоретической и прикладной механики*. – 2022. – № 4(81). – С. 86–95. – doi:10.24412/0136-4545-2022-4-86-96. – EDN:VBSJCU.
3. *Анциферов А.В.* Газоносность угольных месторождений Донбасса / А.В. Анциферов, М.Г. Тиркель, М.Т. Хохлов, В.А. Привалов, А.А. Голубев, А.А. Майборода, В.А. Анциферов. – Киев: наукова Думка, 2004. – 231 с.
4. *Анциферов А.В.* Мониторинг техногенной сейсмичности в зоне влияния угольных шахт Донбасса (на примере ш. «Калиновская-Восточная» ГП «Макеевуголь») / А.В. Анциферов, В.В. Туманов, Н.И. Лобков, Д.С. Бородин, О.Л. Шалованов, Р.П. Базеева // *Труды РАНИМИ*. – 2020. – № 9(24). – С. 78–87.
5. *Гордиенко В.В.* Современная активизация и изотопия гелия территории Украины / В.В. Гордиенко, И.В. Гордиенко, О.В. Завгородняя, И.М. Логвинов, В.Н. Тарасов. – Киев: Логос, 2015. – 123 с.
6. *Корчемагин В.А.* Структурно-тектонифизические исследования для газоносности и горно-геологических условий на полях шахт Донецко-Макеевского района / В.А. Корчемагин, В.И. Алёхин, И.О. Павлов // *Геотехническая механика*. – 2010. – Вып. 87. – С. 209–217.
7. *Чиркин И.А.* Пространственно-временные изменения трещиноватости в кристаллическом фундаменте по данным сейсмической локации бокового обзора / И.А. Чиркин, А.С. Жуков, А.В. Волков // *EAGE-SEG-EAGO. Тезисы докладов Международной геофизической конференции*. – Москва, 2003. – С. 29–33.
8. *Непеина К.С.* Сейсмический мониторинг современных геодинамических процессов с использованием градиентной установки / К.С. Непеина, П.А. Казначеев, П.Н. Александров // *Вестник КРАУНЦ: науки о земле*. – 2019. – № 4(44). – С. 84–92.
9. *Садовский М.А.* Новые методы сейсмической разведки. Перспективы развития / М.А. Садовский, А.В. Николаев // *Геофизика и физика взрыва: избранные труды*. – Ч.2. – М.: Наука, 2004. – С. 272–280.
10. *Горбатилов А.В.* Технология глубинного зондирования земной коры с использованием естественного низкочастотного микросейсмического поля. Изменение окружающей среды и климата: монография. Т. 1. – Ч. 2 / А.В. Горбатилов. – М.: ИФЗ РАН, 2008. – С. 223–236.
11. *Горбатилов А.В.* Возможность оценки параметров геологических объектов на основе использования фонового микросейсмического поля. Результаты экспериментальных исследований и моделирования / А.В. Горбатилов // *Современные методы обработки и интерпретации сейсмологических данных: матер. междунар. сейсмологической школы*. – Обнинск, 2006. – С. 66–71.
12. *Дыбленко В.П.* Сейсмоакустика пористых и трещиноватых геологических сред. Том 2. / В.П. Дыбленко, О.Л. Кузнецов, Ю.А. Курьянов и др. – М., 2004. – 320 с.
13. *Бережной Д.В.* Анализ спектральных характеристик микросейсм как метод изучения структуры геологической среды / Д.В. Бережной, Е.В. Биряльцев и др. // *Сб. НИИ математики и механики Казанского университета*. – Казань: Изд-во Казанского госуниверситета, 2008. – С. 360–386.
14. *Данилов К.Б.* Применение метода микросейсмических зондирований для изучения трубки взрыва им. М.В. Ломоносова (Архангельская алмазонасная провинция) / К.Б. Данилов // *Вестник КРАУНЦ. Науки о Земле*. – 2011. – № 1, вып. 17. – С. 172–178.
15. *Биряльцев Е.В.* Выбор метода микросейсмических исследований в зависимости от решаемой задачи / Е.В. Биряльцев, М.Р. Камилов // *Георесурсы*. – 2018. – № 20 (3), ч. 2. – С. 217–221.
16. *Горбатилов А.В.* Способ сейсморазведки / А.В. Горбатилов // *Патент на изобретение № 227 15 54*. – Бюллетень изобретений. – G01V1/100, 2006. – 9 с.
17. *Nakamura Y.* A method for dynamic characteristics estimation of subsurface using microtremor on the ground surface / Y.A Nakamura // *Quarterly Report of Railway Technical Research*

- Institute. – 1989. – Vol. 30, № 1. – P. 25–33.
18. *Давыдов В.А.* Малоглубинное сейсмическое зондирование на основе изучения эллиптичности микросейсм / В.А. Давыдов // Георесурсы. – 2019. – Т. 21, № 1. – С. 78–85.
  19. *Аносов Г.И.* Метод Накамуры: современные технологии сейсмического микрорайонирования стройплощадок на урбанизированных территориях / Г.И. Аносов. – Калининград: ГеоЮгСервис, ООО ЦИИЗ-Импульс, 2010. — С. 1–3.
  20. *Тарасов С.А.* Уточнение скоростного разреза осадочной толщи методом Накамуры на новых сейсмических станциях ИДГ РАН / С.А. Тарасов, А.Г. Гоев, С.Г. Волосов, Э.М. Горбунова, Г.Н. Иванченко, С.Г. Королев // Российский сейсмологический журнал. – 2020. – Т. 2, № 4. – С. 43–50.
  21. *Анциферов А.В.* Сейсмическая разведка угленосных массивов / А.В. Анциферов, М.Г. Тиркель, В.А. Анциферов. – Донецк: «Вебер», 2008. – 204 с.

**L.A. Novgorodtseva, V.V. Tumanov, O.L. Shalovanov, D.S. Borodin, E.A. Yalputa**  
**Investigation of the requirements for the use of microseismic methods to identify gas-bearing structures in the circumstances of the mine field coal mine “Kalinovskaya-Vostochnaya”.**

The article discusses the requirements of using the microseismic sounding method and the Nakamura method for searching of structural and structural-tectonic methane traps considering with the mining and geological conditions of the Kalinovskaya-Vostochnaya minefield in the area of township United Makeevka city DPR.

**Keywords:** *microseismic measurements, spectral ratios, fracture zones, gas appearance.*

*Получено 17.11.2023*