Міжнародна програма
«ЕВРИСТИКА ТА ДИДАКТИКА ТОЧНИХ НАУК»
International program
«HEURISTICS and DIDACTICS of EXACT SCIENCES»
Международная программа
«ЭВРИСТИКА И ДИДАКТИКА ТОЧНЫХ НАУК»

ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ: проблеми і дослідження

DIDACTICS of MATHEMATICS:
Problems and Investigations

ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ:
проблемы и исследования

Міжнародний збірник наукових робіт
International Collection of Scientific Works
Международный сборник научных работ

Випуск 17

Засновники:

Донецька школа евристики та точних наук Донецької фірми наукоємних технологій (Фірми ТЕАН) Національної академії наук України

Національний педагогічний університет ім.М.П.Драгоманова

Донецький національний університет

Інститут педагогіки Академії педагогічних наук України

Донецьк Фірма ТЕАН 2002

УДК 51(07)+53(07)
ББК В1 р
Д44

Збірник заснований професором Юрієм Олександровичем Палантом у 1993 році.

Рекомендовано до друку Вченою радою Донецького національного університету 26.04.2002 (протокол №4).

Д44 **Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. –** Вип. 17. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2002. – 188 с. (Міжнародна програма «Евристика та дидактика точних наук»).

ISBN 966-7507-0-9 (серія)
ISBN 966-7507-08-4 (Фірма ТЕАН, Україна)

Викладено нові підходи до деяких питань методики навчання математики. Роботи присвячено використанню евристичних методів навчання, стимулюванню творчої діяльності учнів.

Изложены новые подходы к некоторым вопросам методики обучения математике. Работы посвящены использованию эвристических методов обучения, стимулированию творческой деятельности учащихся.

New approaches to some methods of training mathematics problems are described. The publications concern the use of heuristic methods in teaching sciences, stimulation of creative activity of students in the field of constructing and solving problems.

УДК 51(07)+53(07)
ББК В1 р

ISBN 966-7507-0-9 (серія)
ISBN 966-7507-07-6 (Фірма ТЕАН, Україна)

ДО ПРОБЛЕМИ РОЗВИТКУ ТВОРЧИХ ЗДІБНОСТЕЙ

О.С.Чашечникова, канд. педагог. наук, доцент
Сумський державний педагогічний університет ім. А.С.Макаренка

Одною з найважливіших цілей навчання в школі взагалі, і окремо – навчання математики, – повинна бути мета формування і розвитку творчої особистості учня – майбутнього фахівця, члена суспільства. *Творчу особистість може виховати лише творча особистість, людина ерудована, інтелектуальна, інтелігентна.*

На даному етапі постає проблема необхідності деякого переосмислення структури підготовки майбутнього вчителя, в тому числі, вчителя математики. “...нам треба *підготувати на високому рівні* не лише *всіх студентів*, а і *на підвищеному рівні тих, хто* буде навчатись в магістратурі, аспірантурі і в *майбутньому поповнить викладацький корпус вищих закладів освіти*...” (Слєпкань З.І. Проблема диференційованої підготовки майбутнього вчителя математики // Евристичні методи у навчанні математики. Тези доп. міжн. наук.-мет. конф.(3-5 жовтня 2000 р. – Донецьк: ТЕАН, 2000. – 116 с. – С.40).

Аналіз досвіду роботи свідчить, що останнім часом серед вчителів деяких навчальних закладів з’явилася тенденція відводити власній теоретичній підготовці вторинну роль, виводячи на перший план *саме і тільки* практичну підготовку.

Звичайно, теоретична підготовка без практики є тільки потенціалом, що не реалізований. Але *практика без грунтовного знання теорії призводить до роботи вчителя методом спроб і помилок, до недоцільного і нерідко шкідливого “експериментування” над учнями.* З досвідом такий вчитель поступово (раніше чи пізніше) приходить до висновків, що є “винаходом велосипеда”. Але це вже не має значення для тих його учнів, що в результаті невдалих експериментів, спроб не отримали необхідної інтелектуальної підготовки. Ця проблема схожа з проблемою навчання іноземним мовам: знання лексики, правил утворення речень без живої практики гальмується; але при необхідності "живого спілкування" мова людини, що не має достатньої теоретичної підготовки, з мови інтелектуала перетворюється на мову дилетанта у всіх сферах.

Необхідність боротися з дилетантством, непрофесіоналізмом викликає необхідність більш грунтовно підходити до теоретичної підготовки майбутніх вчителів з питання формування творчої особистості учнів. Тим більше, що вчитель математики часто починає працювати з дітьми, здібності яких (в тому числі, – творчі, математичні) ще не достатньо проявилися, тому необхідно їх продіагностувати, виявити обдарованих учнів. Не завжди в цьому може вчителю допомогти шкільний психолог. Тому ми пропонуємо більше уваги приділити ознайомленню майбутніх вчителів математики з теоретичними основами проблеми формування і розвитку творчої особистості.

Серед найважливіших умов ефективності виконання творчої діяльності інтелектуальний рівень людини відіграє одну з перших ролей. Інтелектуальний рівень особистості характеризується двома основними параметрами – ерудицією (обсягом набутої інформації) і спроможністю використовувати цю інформацію при виконанні певних завдань (інтелектуальний розвиток особистості). Ми можемо назвати перший параметр «*потенційною інтелектуальною енергією»*, а другий – «*кінетичною інтелектуальною енергією», «енергією руху до мети».* Інтелект дозволяє людині мислити і діяти цілеспрямовано, ефективно, враховуючи як наявні умови, так і ті, що виникають вже в процесі виконання завдання і безумовно впливають як на сам процес, так і на його результат. Інтелект можна розуміти як систему надбаних знань, досвіду та здатності до їх використання, подальшого накопичення і вдосконалення.

Мислення і творчість можна вважати інтелектом в дії.

Найсуперечливіше питання теорії творчості, творчих здібностей і здібностей взагалі є питання про походження і природу здібностей, процесу творчості. Представники консервативних напрямків (Ф.Гальтон, Е.Торндайк, послідовники Дьюї) додержуються точки зору, що здібності є спадковими, а для кожної людини існує відповідна фіксована межа розвитку. Г.Вольф, Ф.Баумгартен, А.Анастазі визначають, що здібності залежать, поперше, від "генного знаряддя". Ірраціоналісти (О.Ф.Больнов та ін.) при цьому основну роль відводять саморозвитку, неопрагматисти ж не заперечують необхідності у чіткій організації керівництва діяльністю дитини в процесі розвитку закладених у її природі творчих здібностей. Але вітчизняні і сучасні західні психологи (М.Вегнер, У.Глассер, М.Дональдсон, М.Карне, Р.Карпентер, М.Прингл, М.Раїна та ін.) вважають за необхідне забезпечити ефективне керівництво розвитком обдарованої дитини, вважають необхідними програми по пошуку талановитих дітей серед всіх груп населення та створенню оптимальних умов їх розвитку. При цьому відмічається, що програма навчання обдарованих дітей досягає кращих результатів, коли за її ходом слідкує добре підготований керівник [11, 11-14], [13].

Наше дослідження грунтується на теорії А.М.Леонтьєва та його послідовників: спадковість опосередковано впливає на наявність і розвиток здібностей; властивості мозку не є абсолютною гарантією формування здібностей, але є одними з передумов здатності до формування здібностей. Перебудова ж психічних функцій є процесом поетапним: екстеріорізація і розгортання функцій; обробка нової ланки, що вводиться в структуру; наступна інтеріорізація цієї ланки.

Дослідження здібностей і інтелектуального розвитку монозіготних і дізиготних близнюків ще раз підтвердили, що вплив самого генотипу на розвиток здібностей, таланту, творчої особистості значною мірою варіюється під впливом особливостей програми і методики навчання [10; 14].

Діагностика розвитку творчих здібностей, обдарованості не може бути об'єктивною і успішною без чіткого визначення предмету дослідження.

Існують різні трактовки *задатків.* Задатки розуміють як морфологічні і функціональні особливості побудови мозку, органів почуття і руху, які є передумовами розвитку здібностей (А.Н. Леонтьєв, А.В.Петровський, А.Л.Лурія, В.Г.Казаков, Л.Л.Кондратьєва, С.Л.Рубінштейн); ще не розвинену природну основу здібностей, що виявляється при перших спробах діяльності (А.Г.Ковальов, В.Н.Мясищев, Б.Д.Карвасарський, С.С.Лібих); генетичні програми, що визначають розвиток функціональних систем у структурі мозку (В.В.Дружинін, В.Д.Шадриков, Н.С.Кантонистова).

Якщо гіпотеза про залежність задатків від розмірів і маси головного мозку не підтвердилася, то на наш час перспективними є гіпотези про зв'язок задатків з мікроструктурою головного мозку, та про опосередкований вплив особливостей розташування клітинних полів у корі великих півкуль головного мозку та індивідуальних особливостей побудови клітинних шарів на відмінності у задатках (Н.С.Преображенська, С.А.Саркисов). Сучасні фізіології і психології, базуючись на даних експериментів Д.Прелла, Н.Н.Данилової, Л.В.Крушинського, Г.Айзенка, К.Тейлора, Я.Стреляу, Е.А.Голубевої, А.Л.Гостингера, Б.В.Зейгарника, В.Б.Швиркова, Т.Ярвилехто, М.Самса, К.Холера, Перлета, В.Сиервальда, вважають, що природними передумовами здібностей є потреби; властивості нервової системи (як спільні для людини і тварини, так і суто людські); сформовані в процесі життя системи тимчасових зв'язків.

Підсумуємо: *задатки здібностей* – особливості мікроструктури мозку і нервової системи, природна основа індивідуальних відмінностей особистості.

Одним з перших проблемою творчих здібностей почав займатися П.К.Енгельмейєр, але він розглядав тільки здібності дорослих людей.

На наш погляд, неможна погодитися з деякими авторами, що розглядають результативність певної діяльності як прямий наслідок наявності або відсутності відповідних здібностей, а самі здібності визначають як сукупність властивостей особистості, що обумовлюють успішність навчання будь-якій діяльності і удосконалення в ній (В.Л.Венгер, Е.А.Голубєва, Р.М.Грановська, В.Г.Казаков, Л.Л.Кондратьєва, К.К.Платонов). При такому підході не приділяється уваги іншим важливим факторам, що гальмують або сприяють продуктивній діяльності. “Здібності – психічні властивості індивіда, які регулюють його поведінку і є умовою його життєдіяльності. Потенціальні здібності подаються організацією морфологічних структур, пристосованих для якої-небудь діяльності” (Философский словарь // п/р И.Т. Фролова. – М.: Изд-во полит. лит., 1987. – 590 с. – С.453). В означеннях такого типу поняття “задатки здібностей” замінюється на “ потенціальні здібності”.

Здібності – індивідуально-психологічні особливості людини, які мають відношення до успішності певної діяльності або багатьох видів діяльності. Вони не зводяться до наявних знань і вмінь, але можуть пояснити легкість і швидкість набуття цих знань і вмінь (С.Л.Рубінштейн, Б.М.Теплов, О.В.Петровський) [9]. Від наявності здібностей залежить можливість здійснення і ступінь продуктивності діяльності (Н.С.Лейтес, О.Г.Ковальов, В.В.Богословський, А.О.Степанов) [4]. Здібності є *істотними* психічними властивостями особистості, виявом єдиної, цілісної сутності людини, що виявляються в її цілеспрямованій діяльності, зумовлюють її успіх (Г.С.Костюк) [2; 309].

Здібності роблять людину потенційно придатною до певного виду діяльності. Вони проявляються у швидкості засвоєння, правильності і оперативності застосування відповідних знань і вмінь, у нетривіальності їх використання. За А.В.Петровським здібності – індивідуально-психологічні особливості, що є умовою успішності здійснення певної діяльності, проявляють відмінності в динаміці оволодіння необхідними для цієї діяльності знаннями і вміннями. Здібності виявляються лише в діяльності, яка не може здійснюватися без їх наявності [6].

Знання, вміння і здібності взаємообумовлені, їх взаємозв'язок є складним. Нам здається цілком переконливим положення про те, що здібності є сплавом природнього і надбаного. За теорією Х.Хідена мозок дитини має при народженні волокнисту сіть, що з'єднує клітини мозку; цей зв'язок є потенційним. Реальним він стає, коли по лініях зв'язку починають проходити біоструми, які функціонують в період, коли мозок зайнятий розв'язанням певної проблеми. Без стимулюючого навчального середовища нейрони не можуть формувати багату мережу волокнистих сполучень, стають пустими і атрофуються. Не даючи дитині своєчасного і повноцінного розвитку, можна приректи її на низькі темпи розвитку в подальшому, великі затрати сил і часу (Никитин Б.Н. Ступеньки творчества. – М.: Просвещение, 1989. – 159 с. – С.24-25). В процесі розв'язування нестандартних завдань в мозку людини виникає інформаційна динамічна модель проблемної ситуації, що складається з елементів розв'язання, відображених мозком у їх зв'язках і взаємовідношеннях. Ця модель формується в процесі активної свідомої діяльності. Слід об'єкта, що відображається, не лише копія його, але є динамічним, знаходиться у взаємодії з слідами інших об'єктів, внаслідок чого встановлюються нові зв'язки і відношення між елементами проблемної ситуації, що призводить до розв'язання задачі (В.Н.Пушкін) [8, с.96-97].

Н.С.Лейтес розглядав розвиток здібностей в зв'язку з віковими особливостями, переконливо показав, що існують сензитивні періоди для розвитку певних здібностей [4].

Переходячи до питання визначення творчих здібностей, необхідно визначитись з поняттями обдарованість, талант, геніальність та поняттям творчість.

Термін "обдарованість" ввів Б.М.Теплов [9]. Він називав *обдарованістю* якісно своєрідне поєднання здібностей, від яких залежить можливість успішного виконання діяльності. Згодом тим же терміном він почав позначати сукупність задатків до конкретної діяльності. Як позначав сам Б.М.Теплов, єдиним міркуванням на користь даного терміну є походження слова "обдарованість" від слова "дар" (те, що надане від народження).

Обдарованість визначали як: вроджені особливості, що є передумовою розвитку здібностей (П.А.Рудик); природні особливості, що, розвиваючись, проявляються у здібностях (П.І.Іванов); природний фонд здібностей, що є анатомо-фізіологічними задатками (Н.Д.Левітов); сукупність загальних здібностей, що зумовлює особливо успішну діяльність людини в певній галузі (Н.С.Лейтес, В.Г.Козаков, Л.Л.Кондратьєва).

Ми вважаємо, що *обдарованість* – системна якість, сукупність ряду здібностей, які забезпечують найбільшу успішність і продуктивність діяльності. Якісну специфіку кожної окремої здібності можна вважати виявом окремої грані обдарованості.

Високий ступінь обдарованості називають *талантом*, а вищий – *геніальністю.* О.В.Петровський вважає *талант* поєднанням здібностей, що надають людині можливість успішно, самостійно і оригінально займатися якою-небудь складною трудовою діяльністю. Структура таланту обумовлюється характером вимог, що пред'являє особистості дана діяльність. Окремо взята здібність не може бути аналогом таланту, навіть якщо вона яскраво виражена і досягла високого рівня розвитку. Під *талантом* розуміють також сукупність психофізіологічних якостей, необхідних для розв’язання завдань, для яких ще заздалегідь не відомий набір правил і операцій, послідовність яких приводить до мети.

Обдарованість і талант безплідні без наполегливої праці, талант є поєднанням генетично обумовленої обдарованості з працею (А.Н.Колмогоров, С.У.Гончаренко). Розвиток творчих здібностей, подальший прогрес таланту відбувається саме в *творчій діяльності, в процесі творчості.*

Творчість – процес продуктивної діяльності, яка створює нові матеріальні і духовні цінності суспільного значення, на основі пізнання світу створюється нова реальність, що задовольняє різноманітні потреби (Философский словарь // п/р И.Т. Фролова. – М.: Изд-во полит. лит., 1987. – 590 с. – С.474; Гончаренко С.У. Український педагогічний словник. – К.: Либідь, 1997. – 376 с. – С.326).

Творча ситуація може розглядатись як *подразник,* а творчість як *реакція* на цей подразник (В.М.Бехтерев, Я.А.Пономарьов). Процес відбувається за ланцюжком: подразник → рефлекс зосередженості → міміко-соматичний рефлекс → підйом енергії, пов’язаний з дією судинно-рухового апарату та гормонів внутрішньої секреції, що збуджує мозкову діяльність [7].

Уява і творчість, що взаємопов’язані переробкою елементів досвіду, вимагають як передумови – внутрішньої свободи мислення, дій і пізнання. За словами Л.С.Виготського, творчість виникає з тієї хвилини, коли енергія, що не витрачена на безпосереднє призначення, залишається нереалізованою і уходить за поріг свідомості, звідки повертається у нові види діяльності [1, с.202].

В основу виникнення і розвитку здібностей сучасні психологи поклали активність і саморегуляцію. Н.С.Лейтес вважав, що розумова активність дає стимул до розвитку здібностей [4, с.252]. Можливість саморегуляції – основа правильності дій, своєчасного прилаштування до умов задачі, успішного досягнення необхідного результату.

Ми вважаємо, що властивості різних типів вищої нервової діяльності і вікові особливості – лише передумови розумової активності і саморегуляції. Рівень їх прояву визначається особистістю вцілому (її розумовим розвитком, системою відношень і мотивів). Існують різні підходи до визначення компонентів творчих здібностей. До них відносять:

– уміння долати протиріччя і швидко звужувати пошукове поле (Г.С.Альтшуллер);

– здатність до згортання розумових операцій, до переносу інформації, легкість асоціацій, гнучкість мислення (переходу від одного класу явищ до іншого), гнучкість інтелекту (до відмовлення від «скомпроментованої» гіпотези), здатність до оціночних дій і до «зціплення», легкість генерування ідей, формулювань, доведень, доведення до кінця (О.Н.Лук, Н.К.Вахтомин);

– здатність мотивувати власну діяльність, планувати її, запам’ятовувати і використовувати інформацію, виділяти головне, здійснювати самоконтроль (Л.О.Денищева);

– висока пізнавальна активність і допитливість, швидкість і оригінальність словесних операцій (Ю.З.Гільбух);

– розгальмування мислення, відсутність психологічного бар’єру, що змушує шукати розв’язання у звичному напрямку (М.І.Меєрович);

– працездатність, розумову активність, саморегуляцію навчальної діяльності (цілеспрямованість роботи, концентрацію уваги, самоконтроль, чітку організацію власної діяльності) (І.С.Якиманська);

– напруженість уваги, вразливість, сприйнятливість, інтуїцію, фантазію, вигадку, дар передбачення, широту знань, ухилення від шаблону, оригінальність, наполегливість, високу саморегуляцію, працездатність (Я.А.Пономарьов);

– нетривіальність висловлювань, яскраво виражене прагнення до інтелектуальної новизни, семантична гнучкість (здатність бачити об’єкт під іншим кутом зору, знаходити його нове використання), образна адаптивна гнучкість (бачення нових сторін об’єкту), семантична спонтанна гнучкість (здатність продукувати різноманітні ідеї в ситуаціях, які не містять орієнтирів для інших ідей (Дж. Гілфорд) [3, с.243];

– незвичайна енергія, кмітливість, винахідливість, пізнавальна здатність, прямота та безпосередність, прагнення до володіння знаннями (фактами, закономірностями), потяг до відкриття, гнучкість, вправність, упертість, незалежність мислення, здатність оцінювати, співробітничати, інтуїція, прагнення до розвитку, здатність повністю орієнтуватися у проблемі, легко долати границі, відкидати несуттєве, сприйнятливість до нових знань, наполеглива праця, вміння аналізувати і синтезувати (Г.Я.Розен, К.Тейлор) [3, с.243].

З.І.Калмикова назвала творчі здібності здібностями до «продуктивного мислення», виділила серед них глибину, гнучкість, стійкість, усвідомленість, самостійність. А.П.Зенькович запропонувала такі критерії творчих здібностей: здатність до орієнтування на кінцеву мету, до узагальнення знань і способів дій з переносом на нетипові випадки, до бачення фактів у їх взаємозв’язку з близькимі і віддаленими фактами та явищами, до відшукання нестандартних варіантів розв’язання проблеми; здатність до реальної оцінки вірогідності і значущості сутності і шляхів розв’язання проблеми (Зенькович А.П. Проблемы формирования творческой активности учителя математики. – Тула: ТПИ, 1986. – 80 с.).

В роботах В.Н.Алфимова, М.Є.Артемова, Г.В.Тимошко, Б.Р.Кадирова, Н.А.Менчинської, С.Л.Рубинштейн, П.А.Шеварьова визначається, що інтелектуальні здібності характеризуються швидкістю і глибиною узагальнень, легкістю переходу до згорнутого розумового процесу, оволодіння новими способами мислення та скороченням часу і зусиль, що витрачаються при цьому, гнучкістю і оберненістю розумових дій.

Творчу діяльність розглядають як найбільш ймовірну сферу виникнення емоцій (І.А.Васильєв, В.Л.Поплужний, О.К.Тихомиров), серед здібностей виділяють «емоційне передбачення», динамічність переходу від нього до планування діяльності по досягненню поставленої мети, швидкий перехід від невербалізованих операційних змістів до вербалізованих і навпаки. Велике значення для творчості має розвиток інтелектуальних емоцій, пізнавальних інтересів. Прояв вольових особливостей складається з уміння чітко організовувати власну розумову діяльність, доводити виконання завдання до кінцевого результату, долати труднощі, що виникають, контролювати відповідність отриманих результатів умові, ситуації, вимогам, працездатність, здатність до тривалої зосередженості, підтримування розумової напруги. Виявляється здатність до творчості у розумовій активності, інтелектуальній ініціативі, підвищеній допитливості, широті пізнавальних інтересів, потребі у розумовій напрузі. Не менш важливою є спрямованість особистості на розвиток власних творчих здібностей.

Творчі здібності найкраще проявляються у творчій діяльності, при виконанні завдань творчого характеру. Але навіть у випадку, коли на перший погляд завдання, що пропонується, не є творчим, особистість, що має задатки творчих здібностей, виконує його нестандартно, декількома способами, розширює і поглиблює сутність завдання, знаходить не тільки очікуваний результат, але й робить супутні «відкриття», нове знання формулює у вигляді алгоритму, схеми, принципу, використовує набуте при виконанні не тільки схожих, але й змінених, нових завдань, які нерідко стосуються інших питань. Це нерідко і допомагає виявити задатки творчих здібностей учнів.

1. Выготский Л.С. Педология подростка // Собрание сочинений. – Т.4. – М.: Педагогика, 1991. – 480 с.
2. Костюк Г.С. Навчально-виховний процес і психічний розвиток особистості. – К.: Радянська школа, 1989. – 609 с.

3. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников. – М.: Просвещение, 1968. – 432 с.
4. Лейтес Н.С. Умственные способности и возраст. М.: Педагогика, 1971. – 280 с.
5. Леонтьев А.Н. Проблемы развития психики. – М.: МГУ, 1981. – 584 с.
6. Петровский А.В. О психологии личности. – М.: Знание, 1971. – 64 с.
7. Пономарев Я.А. Психология творчества. – М.: Наука, 1976. – 304 с.
8. Пушкин В.Н. Эвристика – наука о творческом мышлении. – М.: НПЛ, 1967. – 272 с.
9. Теплов Б.М. Избранные труды. – М.: Педагогика, 1985. – 328 с.
10. Чашечникова О.С. Дослідження рівнів розвитку математичних здібностей близнюків // Актуальні проблеми розвитку творчої особистості в процесі вивчення математики та інформатики: Матер.доп. міжв. наук. – мет.конф. 16-17 квітня 1997 р. – Суми, 1997. – С.40-42.
11. Чашечникова О.С. Розвиток математичних здібностей учнів основної школи. – Дисс. ... канд.пед.наук. – К., 1997. – 205 с.
12. Якиманская И.С. Развивающее обучение. – М.: Педагогика, 1979. – 144 с.
13. Raina M.K. Creativity research. International perspective. – New Delphi: National Counsil of Educational Research and Training, 1980. – 260 p.
14. Bouchard Th. G., Lykken D.T., McGue M., Segal N.L., Tellegen A. Sources of Human Psychological Differences: The Minnesota Study of twins reared apart. – Minneapolis: Department of Psychology, University of Minnesota, 1990. – 29 p.

Резюме. Статья посвящена проблеме формирования творческих способностей.

Summary. The article is about the problem of forming creative person.

Надійшла до друку 10.02.2002 р.

РАЗВИТИЕ ТВОРЧЕСКОЙ ЛИЧНОСТИ (ДИАГНОСТИЧЕСКИЙ АСПЕКТ)

Е.И.Скафа, канд.педагог.наук, доцент,
И.В.Жукова, студентка,
Донецкий национальный университет

Каждый школьник обладает только одному ему присущими особенностями познавательной деятельности, эмоциональной жизни, воли, характера, поведения, каждый требует индивидуального подхода, основанного на хорошем знании и понимании психологических закономерностей формирования его личности. Такой индивидуальный подход возможно осуществить в рамках современной парадигмы образования – перехода на личностно-ориентированное обучение учащегося. В основе такого обучения лежит признание уникальной сущности каждого ученика и индивидуальности его учебной траектории. Роль учителя при этом состоит в организации соответствующей образовательной среды и создании оптимальных условий для обучения и развития творческих задатков ученика.

Анализ психолого-педагогичсекой и методической литературы по данной проблеме позволил нам выделить основные шесть факторов, влияющих на развитие творческой личности. К ним мы относим:

1. Индивидуализацию обучения. Учитель не ориентируется на среднего ученика, а к каждому ученику осуществляется индивидуальный подход.
2. Дифференциацию обучения. Каждый ученик получает право и гарантированную возможность уделять преимущественное внимание тем направлениям, которые в наибольшей степени отвечают его склонностям.
3. Самостоятельность. Ученик самостоятельно изучает учебный материал, он выбирает свою тактику запоминания, обобщения, анализа этого материала. Он сам строит свой учебный процесс. Учитель при этом управляет данным процессом, находится в роли консультанта.
4. Окружение или среду. Очень важна и необходима окружающая среда, поддерживающая и награждающая творческие идеи.
5. Способность к обучению или обучаемость. Это понятие хорошо раскрыла З.И.Калмыкова [1]. Рассматривая компоненты продуктивного мышления, она выделила те его особенности, от которых зависит легкость овладения разнородными знаниями, темп продвижения в них. У школьников эти свойства их психики обусловливают успешность

учебной деятельности, быстроту и легкость в овладении новыми знаниями, широту их переноса, т.е. выступают как их общие способности к учению. З.И.Калмыкова эти способности обозначила термином «обучаемость».

6. Формирование эвристической деятельности. Известно, что изучение математики развивает мышление: логическое, абстрактное, образное и т.д. Математика развивает память, выносливость, терпение, добросовестность. Следовательно, именно в процессе обучения математике обучение разнообразным эвристическим приемам формирует эвристическую деятельность и более эффективно способствует развитию творческого мышления. Иными словами, процесс формирования эвристической деятельности и творчество взаимосвязанные между собою компоненты. Как отмечает А.В.Хуторской [2], эвристика – наука об открытии нового, а творчество – процесс создания нового. Т.е. без сформированных у обучаемого эвристических приемов деятельности, невозможно организовать и управлять процессом творческой деятельности.

Эвристическая деятельность – более широкое понятие, чем творческая деятельность, поскольку включает в себя:

1) сами творческие процессы по созданию образовательной продукции в учебных предметах;
2) познавательные процессы, неизбежные и необходимые для сопровождения творчества;
3) организационные, методологические, психологические и иные процессы, которые обеспечивают творческую и познавательную деятельность.

Другими словами, эвристическая деятельность включает не только творческую деятельность, но и метатворческую (от греч. «мета»–стоящее за), т.е. когнитивную и методологическую деятельности, которые «стоят за» творчеством и обеспечивают его реализацию. Поэтому для развития творческой личности наиболее существенным фактором естественно является формирование у обучаемых приемов эвристической деятельности.

Анализ психолого-педагогической литературы показал, что самым благоприятным возрастом для развития творческой личности является ранний подростковый возраст (11-13лет) по двум причинам:

1. В этом возрасте начинается развитие аналитико-синтетического восприятия предметов и явлений, увеличивается объем восприятия, развитие памяти и внимания, при запоминании обучаемые используют сравнения, систематизацию, классификацию. Происходит формирование внутрипредметных и межпредметных ассоциаций, развитие абстрактного мышления и развитие критичности мышления.
2. В этом возрасте дети переходят в седьмой класс. Преимущество состоит в том, что учащиеся изучают не просто математику, а две дисциплины: алгебру и геометрию. Это значительно расширяет горизонты применения эвристических приемов.

Исследовав факторы, влияющие на развитие личности, проанализировав возрастные особенности школьников и выявив возраст, в котором целесообразно системно подходить к развитию творческой личности, а также, на основе сравнительного анализа категорий продуктивного мышления, разработанных З.И.Калмыковой [1] и критериев математических способностей по В.А.Крутецкому [3], нами вычленены основные свойства, присущие творческой личности, формирующиеся у учащихся в процессе обучения математике. Эти свойства рассматриваются нами как некие способности, возможно, заложенные у некоторых школьников генетически и обязательно развитые у всех учащихся в процессе реализации определенной программы развития творческой личности. К свойствам творческой личности мы относим:

1. Способность к формализованному восприятию материала, схватыванию формальной структуры задачи.
2. Способность к быстрому и широкому обобщению математических объектов, отношений и действий (способность увидеть общее в различных математических выражениях и действиях).
3. Способность к свертыванию процесса рассуждения и системы соответствующих действий. Способность мыслить свернутыми структурами.
4. Гибкость мыслительных процессов. Способность к быстрой и свободной перестройке направленности мыслительного процесса, переключению с прямого на обратный ход мысли, переключению от одной умственной операции к другой.
5. Стремление к ясности, простоте, экономности и рациональности решений.
6. Память и устойчивость мышления. Способность запоминать математические отношения, схемы рассуждений и доказательств, методы решения типовых задач и принципы подхода к ним, запоминать общие правила. Умение ориентироваться на совокупность выделенных ранее признаков, несмотря на провоцирующее воздействие случайных признаков новых задач того же типа.

Итак, для развития вышеперечисленных свойств творческой личности нами разработана «Программа развития творческой личности и формирования эвристической деятельности в процессе обучения математике». Структура данной программы следующая:

1) тесты первичной диагностики творческого потенциала, определения уровня развития творческих способностей и определения уровня сформированности творческой личности на данном этапе обучения;
2) система корректировочных упражнений, способствующих формированию определенных свойств творческой личности;

3) методическая система эвристических учебных ситуаций (ориентирования, поиска, преобразования, интеграции);
4) система эвристических задач;
5) эвристико-дидактические конструкции:
   – эвристические обучающие компьютерные программы;
   – программы актуализации знаний «тест-коррекция-повторный тест-коррекция»;
   – программы «задача-метод», «софизмы»;
   – программы автоматизированного рецензирования решения задач;
6) эвристические факультативы.

Итак, для реализации программы первоначальным звеном является первичная диагностика творческого потенциала, которую мы предлагаем проводить в виде теста. Тест состоит из пяти субтестов, включает 36 заданий, рассчитан на 45 минут и предлагается учащимся в начале седьмого класса. Цель данного теста - выявление наличия у учащихся тех или иных способностей соответствующих выделенным свойствам творческой личности. Приведем примеры некоторых заданий теста.

Первый субтест включает восемь задач и предназначен для оценки способности к формализованному восприятию материала. Например.

Какой из нижеперечисленных вопросов нужно задать к предложению, чтобы получилась задача?

1. В двух кассах магазина находится 200 грн. Если из первой кассы во вторую переложить 50 грн, то в обеих кассах денег будет поровну.

1. Сколько гривен нужно переложить из одной кассы в другую, чтобы денег получилось поровну?
2. Сколько было денег в обеих кассах до того, как переложили 50грн?
3. Верно ли, что если из одной кассы в другую переложить 50 грн, то в обеих кассах будет одинаковое количество денег?
4. Сколько денег было в обеих кассах?

Прочти задачу и укажи правильный ответ из перечисленных ниже.

5. Девочка зашла в магазин в 10ч.30мин. Она купила 3 зеленых карандаша по 1 грн и 2 терки по 1грн 50коп. Сколько времени девочка была в магазине?

1) 2 часа; 2) 1 час; 3) 1 час 30 мин; 4) неизвестно.

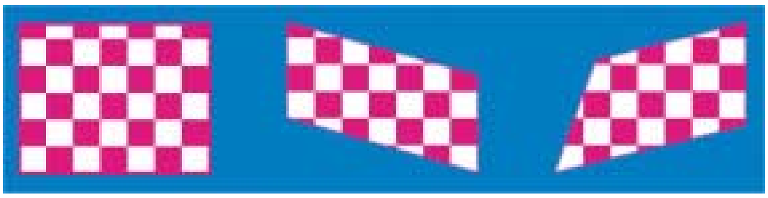
8. Чтобы узнать массу слона, верблюда и жирафа, осел поставил их всех на весы. Их общая масса оказалась 6160 кг. Когда на весах остались верблюд и жираф, весы показали 1151 кг. Наконец на весах остался один жираф, и масса его была 475 кг. Какова масса слона и верблюда вместе?

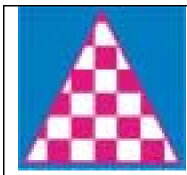
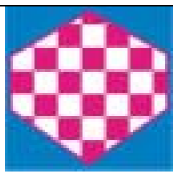
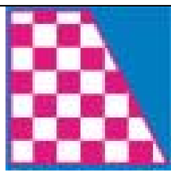
1) 4128 см; 2) 258 м;. 3) 5685 кг; 4) 6160 литров.

Основной принцип решения этих заданий заключается в умении воспринимать в условии задачи не просто отдельные величины, а отношения представленных в задаче величин. Что, в свою очередь, дает возможность ученику легко вычленить те данные, которые необходимы и достаточны для решения задачи, также отчетливо представлять соотношения величин при постановке несформулированного вопроса.

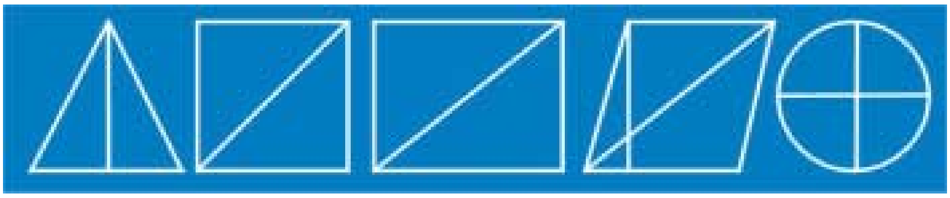
Второй субтест включает восемь задач предназначенных для оценки способности к быстрому и широкому обобщению материала. Например.

9. Подумай, что объединяет фигуры верхнего ряда на рисунке и выбери среди предложенных ту фигуру, которая к ним подходит.



			
1)	2)	3)	4)

12. Посмотри на картинки и укажи, что у них общее:



1) высота; 2) площадь; 3) раздел математики; 4) диагональ.

16. Прочти внимательно задачи. Тебе нужно распределить их на три группы, объединяя их по общему признаку:

1. За один день мама прочитала 17 страниц книги, а за другой – в 2 раза больше. Сколько страниц мама прочитала за 2 дня?
2. Прямоугольные плиты для застилки дорожки имеют размеры 180 см и 50 см. Сколько требуется плит, чтобы застелить дорожку длинной 450 м и шириной 180 см?
3. В соревнованиях по прыжкам в длину, высоту и с шестом принимали участие 42 спортсмена. В высоту прыгало 13, в длину 22 спортсмена, а остальные прыгали с шестом. Сколько спортсменов прыгало с шестом?
4. На футбольном поле прямоугольной формы со сторонами 110 м и 75 м скосили траву. С какой площади скошена трава?
5. На олимпийских играх в Москве в 1980 году в соревнованиях по легкой атлетике участвовало 305 женщин, а мужчин на 478 больше. Сколько всего спортсменов участвовало в соревнованиях по легкой атлетике?
6. Петя взял из библиотеки на каникулы 3 книги и прочитал их. В одной книге было 245 страниц, в другой в 7 раз меньше, чем в первой, а в третьей на 48 страниц больше, чем во второй. Сколько страниц было в трех книгах?

1 Группа	**2 Группа**	**3 Группа**

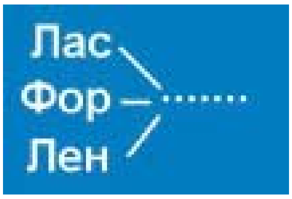
Принцип решения этих задач заключается в умении сразу, «с места» выделять существенные признаки задач и примеров определенного типа, умение схватывать определенные отношения величин, данных в задаче, умение видеть за разнообразным внешним оформлением задач их единую внутреннюю логическую структуру.

Третий субтест включает восемь задач и предназначен для оценки гибкости (динамичности) мыслительного процесса.

19. Верно ли, что если произведение двух натуральных чисел больше 100, то каждое число больше 10?

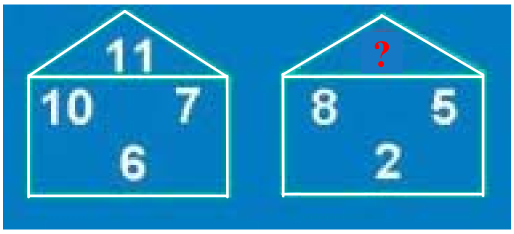
1) да; 2) нет; 3) не знаю.

20. Окончанием данным словам служит математический термин из пяти букв, найди его.



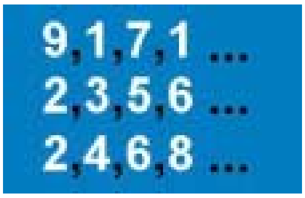
1) прямая; 2) линия; 3) точка; 4) сумма.

23. Вставь недостающее число



1) 9; 2) 1; 3) 11; 4) 15.

24. Тебе предлагается ряд чисел, расположенных по определенному правилу, твоя задача состоит в том, чтобы определить число, которое было бы продолжением соответствующего ряда. Выбери столбик с числами, которые будут правильными для каждой строчки



1 Столбик	2 Столбик	3 Столбик
5 7 10	1 7 9	5 8 10

Решение задач этого субтеста построено по принципу умения быстро и свободно переключаться с прямого на обратный ход мысли, переключаться от одной умственной операции к другой, умение перестраивать направленность мыслительного процесса. Такое умение требует своеобразной «ломки» установленной схемы решения и замены ее новой.

Задачи четвертого субтеста предназначены для оценки рациональности решений, и включают четыре задачи.

25. Дети устроили в школе праздник. Подарками служили коробки с конфетами. Наполняя коробки конфетами, одна группа израсходовала 8килограмм конфет, вторая – 9 килограмм, третья – 6 килограмм, четвертая – 7 килограмм. Сколько стоили все конфеты, если один килограмм стоил 2 гривны? Какой из вариантов решения ты выберешь?

8*2=16грн
9*2=18грн
7*2=14грн
6*2=12грн
16+18+14+12=60грн

1)

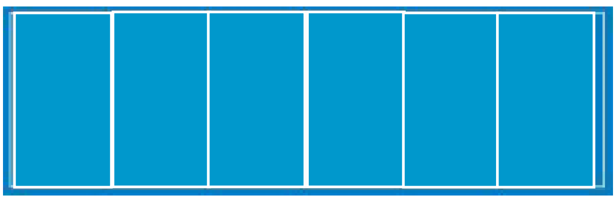
9+8+7+6=30кг
30*2=60грн

2)

9+6=15кг
7+8=15кг
15+15=30кг
30*2=60грн

3)

28. Ты видишь на рисунке площадку для гольфа, которая состоит из шести прямоугольных плит размеры каждой из них 3 х 2 метра. Нужно быстро посчитать периметр всей площадки. Как ты это сделаешь?



3*2=6
2*6=12
2*6=12
12+12+6=30

1)

3*2+2*2*6=30

2)

3+2*6+2*6+3=30

3)

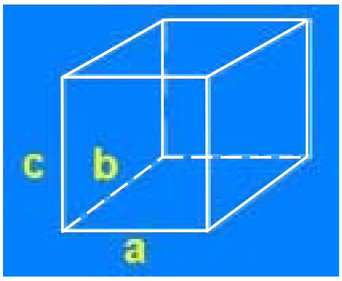
Решая задачи этого субтеста, ученики должны проявить стремление к самостоятельной оценке ряда возможных способов решения и выбора из них наиболее ясного, простого, экономного. Проявить умение ориентироваться не только на количество, но и на качество действий.

Чтобы оценить устойчивость мышления, то есть память, предназначаются задачи пятого субтеста состоящего из восьми задач.

33. Является ли число 3 корнем уравнения* 2х-3*(х+1)=15 *?

1) да;
2) нет;
3) не знаю.

36. Сереже нужно найти объем прямоугольного параллелепипеда. Как ты думаешь, какую формулу Сереже нужно использовать, чтобы получить правильный ответ?



1) $V=a*b$
2) $V=a^2$
3) $V=a*b*c$
4) $V=4*a$

Принцип решения этих задач заключается в умении ученика использовать ранее выученные общие правила, схемы рассуждений и доказательств, методы решения типовых задач и принципы подхода к ним, не обращая внимания на провоцирующее воздействие признаков новых задач того же типа.

Способность к свертыванию процесса рассуждений, способность мыслить свернутыми структурами оценивалась в процессе решения учениками всех задач.

Для того чтобы определить свернутый или развернутый характер процесса умозаключений у учащихся нами введено временное ограничение.

Количественная обработка результатов происходит по следующей схеме: если ученик решает 50% и выше заданий по каждому субтесту, то в этом случае мы говорим о наличии у учащегося соответствующего признака, в обратном случае – об отсутствии.

Для определения уровня развития творческих способностей предназначен тест №2. Он включает 34 задания и предлагается ученикам в начале второго семестра седьмого класса.

Целью данного теста является оценка эффективности применения эвристических приемов на уроках математики и факультативных занятиях, на основе сравнения результатов полученных при первом тестировании.

Целью теста №3 является проверка эффективности применения программы занятий эвристиками на основе сравнения первых двух тестирований. Контрольный тест состоит из 32 заданий и предлагается в конце второго семестра седьмого класса.

Тесты разработаны нами в двух формах: в виде компьютерной программы; в виде тестовых бланков. В зависимости от психологических особенностей школьников, ученики могут выбирать тот или иной вид работы с предложенными тестами.

В данной статье мы остановились на характеристике только первого компонента нашей программы. Анализ и содержание остальных компонентов будут изложены в следующих публикациях.

1. Калмыкова З.И. Продуктивное мышление как основа обучаемости. – М.: Педагогика, 1981. – 200 с.
2. Хуторской А.В. Развитие одаренности школьников. – М.: Гуманит. Изд. Центр ВЛАДОС, 2000. – 320 с.
3. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников. – М.: Просвещение, 1968. – 432 с.

Резюме. В роботі дається характеристика діагностичного аспекту створеної авторами „Програми розвитку творчої особистості та формування евристичної діяльності в процесі навчання математики”.

Summary. The diagnostic aspect characteristics of «the programm of creative person development and heuristic activities forming in the process of teaching mathematics» created by the authors is given in the article.

Надійшла до друку 03.04.2002 р.

REDISCOVERY IN MATHEMATICS: A MEASUREMENT MODEL
(ПЕРЕОТКРЫТИЕ В МАТЕМАТИКЕ: МОДЕЛЬ ИЗМЕРЕНИЯ)

Michael G. Voskoglou
T.E.I. of Patras – School of Technological Applications, Greece

1. The use of rediscovery in the teaching of mathematics

The learning of mathematics through the use of the problem solving processes is highly based on the idea of rediscovery. Polya (1963) suggests that rediscovery is the main tool for the materialization of the process of "active learning", distinguishing the following "consequtive phases" in the whole process: Presentation of the new information, exploration, formalization and assimilation.

The teacher of mathematics applying the method of rediscovery during the teaching procedure presents the new information as a problem and asks his students to solve it. The participation (if possible) of the students in the formulation of this problem increases their interest for the new knowledge and helps them to understand better its importance. This becomes usually feasible by the choice, from the teacher, of the «best motivation» (a historical aspect, a practical problem of the everyday life, a story etc) connecting the existing knowledge of the students with the new information.

The next step (exploration of the problem) moves on a heuristic level. The teacher leaves his students to work alone on their parers, inspecting their works and giving them from time to time suitable instructions or helpful hints.

When the students, or at least some of them, are ready to state their ideas about the solution procedure the teacher directs the conversation, leading to the rejection of the wrong suggestions, to the classification of the correct ones and finally to the interpretation of the basic ideas and conclusions concerning the new information (state of formalization).

At the first step of assimilation the teacher, aiming to help his students to generalize the new information to a variety of situations, gives them a number of suitable exercises and (or) simple problems for solution.

At the final step a number of composite problems are given for solution, relating the new information to the existing knowledge structures of the students (step of categorization). These problems are usually involving either applications of the new information to other sciences (e.g. applications of the derivative to physics, economics etc), or extensions of it to other mathematical areas (e.g. addition of non negative integers and union of sets having no common elements, addition of integers and abelian groups etc).

At this point one must observe that the model of Voss for the general process of learning, that we have presented in an earlier paper [6], is fully compatible with the use of rediscovery in teaching mathematics, because its states (representation, interpretation, generalization and categorization of the input data) are in an obvious correspondence with the analogous states of the method of rediscovery presented above.

This observation explains well why the measurement model about the mathematical learning process that we shall present in the next section, and which pressumes the use of rediscovery in teaching mathematics, is based on an adaption of the general model of Voss for the case of learning mathematics.

2. Construction of the measurement model.

In this section it is tacitly assumed that the teacher of mathematics is applying the method of rediscovery in order to present a new topic in the classroom.

Let A be the set of the students who interpret satisfactorily the new information, let B be the set of the students who face successfuly the solution of the exercises and simple problems (state of generalization) and let C be the set of the students who face satisfactorily the composite problems at the last step of the teaching procedure in the classroom (state of categorization). Then obviously $C \subseteq B \subseteq A$.

Denote by n_A, n_B and n_C the cardinalities of A, B and C respectively and let n be the total number of the students in the classroom. Then $P(A)=\frac{n_A}{n}$ gives the probability for a student in the classroom to interpret satisfactorily the new information. Also $P(B)=\frac{n_B}{n}$ gives the probability for a student to face successfully the state of generalization, while $P(C)=\frac{n_C}{n}$ gives the probability for a student to pass successfully through all the states of the learning process in the classroom.

Furthermore the conditional probability $P(B/A)=\frac{P(A \cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{n_B}{n_A}$ expresses the percentage of the students who have interpreted satisfactorily the new information, that face successfully the state of generalization as well.

In the same way the conditional probability $P(C/B)=\frac{n_C}{n_B}$ expresses the percentage of the students who have faced successfully the state of generalization, that face succesfully categorization as well. Finally $P(C/A)=\frac{n_C}{n_A}$ expresses the percentage of the students, who have interpreted satisfactorily the new information, that pass successfully through all the other steps of the learning process in the classroom.

3. An application in the classroom.

A. The student sample:

The following experiment took place at the Technological Educational Institute of Patras, when I was teaching the indefinite integral to a group of 30 students of the School of Technological Applications.

B. The method:

Under the pure mathematical scope the right way to present the indefinite integral is to teach first the definite one and then, through the need of calculating the value of the definite integral of a continuous in a closed interval function, to define the corresponding indefinite integral and prove the fundamental theorem of integral calculus due to Newton and Leibniz.

Personally I am always avoiding this way of presentation and I am following the inverse one, because I believe that pedagogically this is more suitable.

Thus in the case of this experiment and in the short introduction of my 3 hour lecture I presented integration as the converse pocess of derivation and I asked from my students to try to obtain the basic rules of intergation through the corresponding known rules of derivation.

After the basic theoretical conclusions (state of interpretation), I gave them for solution a number of exercises on the basic methods of intergration (by parts, by substitution, intergation of a rational function etc) together with some simple problems involving initial or boundary conditions, which uniqelly determine the constant of intergration (state of generalization).

At the final step (state of categorization) I gave to the students who had faced satisfactorily the solution of the exercises and simple problems a number of composite problems involving economical applications of the indefinite integral and solutions of simple differential equations (separation of variables, use of intergating factors etc) ; see Dowling [1], paragraph 16.6 and chapter 18 (to the rest of the students I gave also these problems as homework).

C. Data collected from the students:

Inspecting the works (and reactions) of my studens I found that 3 of them were unable to understand satisfactorily the new subject. Some other students faced difficulties before understanding the basic ideas (they looked back to their notes of my previous lectures and (or) they asked for help), but finally they came through.

Further 5 students, although it seems that they understood the basic theoretical ideas, they were unable to apply them for solving the greater part of the exercises and simple problems. The other 22 students faced satisfactorily the solution of the exercises and simple problems, although a number of them had difficulties before coming through.

At the final step 9 students faced satisfactorily the solution of the composite problems, but the other 13 students they didn't, or solved only a small part of them.

D. The results:

According to the foundings above it comes out that n_A=27, n_B=22 and n_C=9. Thus P(A)=$\frac{27}{30}$, i.e. 90% of the students interpreted satisfactorily the new information.

Also P(B)=$\frac{22}{30}$, i.e. approximately 73,33% of the students faced succesfully the state of generalization, while P(C)=$\frac{9}{30}$, which means that 30% of the students passed successfully through all the states of the learning process in the classroom.

Further P(B/A)=$\frac{22}{27}$, fact which means that approximately 81,48% of the students who had interpreted satisfactorily the new information faced also successfully the state of generalization. Also P(C/B)=$\frac{9}{22}$, i.e. approximately 40,9% of the students who had faced succesfully the state of generalization faced successfully the state of categorization as well.

Finally $P(C/A)=\frac{9}{30}$, which means that approximately 33,3 % of the students who had interpreted satisfactorily the new information passed successfully through all the states of the learning process in the classroom.

4. Discussion and conclusions.

Nowadays, although views have been appeared disputing the effectiveness of instruction in the use of general problem solving strategies in mathematics teaching and giving emphasis to the aquisition of the appropriate "schemas" and the automation of rules [4], it is more or less acceptable that through the problem solving processes we can give to the students a balanced view of mathematics and we can face effectivelly the false opposition between "learning mathematics" and "learning to apply mathematics" [2,3].

The use of rediscovery as a teaching method turns out to be the basic tool for the learning of mathematics through the use of the problem solving processes.

The model proposed above for measuring mathematical learning skills, based on an adaption of the model of Voss [7] describing the general process of learning, pressumes the use of rediscovery in teaching a new topic of mathematics.

The classroom experiment that we have presented above shows that the implementation of our measurement model can help the teacher to get a concetrating view of his students' "behaviour" in the classroom and therefore to readapt his teaching plans (more or less repetitions of previous topics, presentation of suitable exercises and examples to the class, speed of teaching of the next topics etc) according to the case.

1. Dowling E. T. Theory and Problems of Mathematics for Economists, Schaum's Outline Series, New York: McGraw-Hill, 1980.
2. Lawson M. The Case for Instruction in the Use of General Problem-Solving Strategies in Mathematics Teaching: A Comment on Owen and Sweller, J. for Research in Mathematics Education,1990, 21, 403-410.
3. Niss M. Applications and modelling in the mathematics curriculum - state and trends, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 1987, 18, 487-505.
4. Owen E., Sweller J. Should Problem Solving Be Used as a Learning Device in Mathematics?, J. for Research in Mathematics Education, 1989, 20, 322-328.

5. Polya G. On learning, teaching and learning teaching, American Mathematical Monthly, 1963, 70, 605-619.
6. Voskoglou M.G. (1999), The process of learning mathematics: A fuzzy set approach, Heuristics and Didactics of Exact Sciences, 1999, № 10, p.9-13.
7. Voss J.F. Learning and transfer in subject-matter learning: A problem solving model, Int. J. Educ. Research, 1987, 11, 607-622.

Резюме. В статье приведен пример использования метода «переоткрытия» в обучении математике, предложена модель измерения уровней обучаемости учащихся при использовании данного метода.

Резюме. У статті наведено приклад застосування методу «перевідкриття» у навчання математики, запропоновано модель вимірювання рівнів навчання учнів під час застосування даного методу.

Надійшла до друку 05.01.2002 р.

КОНСТРУКТИВНІ ЗАДАЧІ ЯК ЗАСІБ ДІАГНОСТИКИ ВИСОКОГО РІВНЯ МАТЕМАТИЧНИХ ЗНАНЬ

С.В.Музиченько, аспірант
Чернігівський державний педагогічний університет імені Т.Г.Шевченка

Одним із ключових моментів реформування загальної середньої освіти є запровадження 12-бальної шкали оцінювання, яка ґрунтується на позитивному принципі, тобто передбачає врахування рівня досягнень учня, а не ступеня його невдач. Школи перейшли на нову систему оцінювання в минулому навчальному році. Звичайно, здійснити такий перехід непросто. Вчителям доводиться долати як психологічні труднощі, пов'язані із застарілими стереотипами, так і технічні, до яких, зокрема, належить створення дієвого механізму діагностики того чи іншого рівня навчальних досягнень учнів.

Основним засобом діагностики рівня математичних знань є задачі і вправи, вміння розв'язувати які, як правило, свідчить і про наявність відповідних теоретичних знань, і про здатність застосовувати їх практично. Найбільш зручною і доцільною формою перевірки та оцінювання набутих учнями знань та вмінь була і залишається письмова контролююча робота. Зрозуміло, що завдання, підібрані для такої роботи, мають утворювати певну систему, перш за все, в кількісному і якісному аспектах. Основними факторами, які визначають якісний склад перевірочної роботи, є, по-перше, зміст навчального матеріалу і, по-друге, нерівномірність його засвоєння учнями. Тому система завдань повинна бути повною, тобто відображати всі основні передбачені програмою математичні факти (поняття, зв'язки і відношення між ними і т.д.), а також повинна забезпечувати всім учням можливість виявити особисті досягнення. Для реалізації індивідуального підходу до перевірочних робіт повинні входити завдання з різним співвідношенням між відтворювальною і творчою діяльністю. Це співвідношення досить чітко можна визначити, керуючись розробленими МОН "Загальними критеріями навчальних досягнень учнів". Так, згідно останніх, високий рівень навчальних досягнень передбачає вміння застосовувати теоретичний матеріал не лише в типових, а й в змінених, логічно і алгоритмічно ускладнених, нестандартних ситуаціях. Тобто учень має виявити певні творчі здібності в навчальній діяльності. Щоб він мав таку можливість, йому мають бути запропоновані відповідні завдання.

В зв'язку з цим виникає питання, які навчальні задачі можна вважати творчими, а які до таких не належать?

Аналіз літератури, в якій висвітлюється поняття "творча задача", показує, що чіткі критерії віднесення тієї чи іншої задачі до творчої, відсутні.

На думку одних, творчою можна вважати задачу, спосіб розв'язання якої учням невідомий. В.А.Моляко творчою називає задачу, яка "вся цілком є новою, незнайомою для суб'єкта, або ж, щонайменше, містить значну новизну, що і зумовлює значні розумові зусилля…" Академік П.Л.Капіца, характеризуючи творчі учбові задачі, відмічає, що вони не мають визначеної відповіді, оскільки той, хто розв'язує таку задачу, може по мірі своїх здібностей необмежено заглиблюватись у вивчення поставленого питання. Г.О.Балл істотною ознакою творчої задачі вважає відсутність однозначного результату. Деякі автори основним критерієм творчої задачі вважають її прикладну спрямованість або яскраво виражений дослідно-пошуковий характер, процес розв'язування якої максимально наближений до наукової діяльності і включає всі характерні її етапи (постановка проблеми, висування гіпотез, їх перевірка і т.д.). В.А.Крутецький до творчих математичних задач відносить задачі конкретних типів, а саме: задачі з не сформульованою вимогою, з недостатньою або надлишковою кількістю даних, із змінною умовою, із декількома розв'язками, а також задачі на доведення.

Особливий інтерес представляє типологія навчально-творчих задач, розроблена В.І.Андрєєвим. Він виділяє 14 типів задач (не лише математичних), які сприяють розвитку творчих здібностей учнів, серед яких задачі на виявлення протиріччя, задачі з відсутністю повної вихідної інформації, задачі на прогнозування, на оптимізацію, на розробку алгоритмічних і евристичних розпоряджень, логічні задачі, дослідницькі задачі, задачі на складання протилежних задач, задачі на рецензування.

Дана типологія, як зазначає автор, є відкритою, тобто може бути доповнена іншими типами. При цьому В.І.Андрєєв визначає навчально-творчу задачу як таку форму організації змісту навчального матеріалу, котра дозволяє крім оволодіння певними знаннями розвивати особисті якості учнів, які сприяють успішній творчій діяльності.

Хоча цілковитої єдності у висвітленні цього питання немає (та й не може бути), очевидно, що позиції авторів не є взаємовиключаючими. Підсумовуючи, ознаками навчально-творчої задачі можна вважати наступні:

- невизначеність способу розв'язання;
- суб'єктивна новизна одержаного результату;
- присутність в процесі розв'язування характерних закономірностей і етапів творчої діяльності.

Яким же змістом наповнюють поняття "творча задача" вчителі математики?

Як свідчить проведене нами анкетування, значна частина вчителів відчуває труднощі, відповідаючи на це питання. Як правило, вчителі ототожнюють творчі задачі із задачами підвищеної складності (так звані задачі із зірочкою), відносять до них логічні головоломки, задачі з елементами досліджень. Відповідно і високий рівень навчальних досягнень своїх вихованців абсолютна більшість діагностує з допомогою задач на доведення, дослідження або ж типових для даної теми завдань, але вищого рівня складності.

Основним орієнтиром для вчителів у питаннях поточного і тематичного оцінювання є сучасні дидактичні матеріали, переважна більшість яких має диференційований характер і розрахована на 12-бальну систему оцінювання. На сьогодні вони пропонуються в достатній кількості і асортименті.

Переглянувши кілька збірників диференційованих дидактичних матеріалів для 8-го класу, можна переконатись, що найбільш поширеними завданнями для високого рівня, наприклад, з теми "Раціональні дроби. Додавання та віднімання дробів" є наступні:

- скоротіть дріб;
- перетворіть на дріб (спростіть) вираз, який є сумою або різницею дробів з різними знаменниками;
- доведіть тотожність.

В цих завданнях передбачається вільне володіння всіма способами розкладання многочленів на множники, знання формул суми і різниці кубів, використання тотожності $a - b = -(b - a)$ тощо. Тобто завдання мають характер алгоритмічно ускладнених ситуацій. Вони дозволяють виявити міцність та системність знань, але не вимагають творчої ініціативи.

Пропонуються й більш цікаві та оригінальні завдання як, наприклад, такі:

1) Знайдіть множину допустимих значень змінної для виразу $\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}$.
2) Визначте, за яких натуральних значень n вираз $\dfrac{2n+12}{2n}$ набуває цілих значень.

3) Знайдіть значення виразу $\frac{2b-a}{a}$, якщо $\frac{a}{b}=2$.

Звичайно, учням, знання яких поверхові, формальні, такі завдання не під силу. Більше того, крім міцних усвідомлених знань їх виконання вимагає ще й кмітливості, впевненості, математичних здібностей. Їх можна віднести до логічно ускладнених ситуацій.

Доцільність використання наведених вище завдань з метою діагностики високого рівня математичних знань не викликає заперечень. Разом з тим, слід відзначити, що, по-перше, ними не вичерпуються всі придатні для цього завдання, а, по-друге, не всі з них володіють в достатній мірі якостями творчих задач.

Дійсно, хоча, наприклад, перше завдання і не є типовим, але в основі його розв'язання лежить стандартне застосування знань (знаменник не повинен дорівнювати нулю). Третє завдання можна розв'язати кількома способами: 1) почленно розділити чисельник на знаменник; 2) поділити і чисельник і знаменник на b; 3) виразити a через b і підставити в дріб. Останній спосіб найбільш стандартний, проте саме його, як правило, і обирають учні.

Що стосується першого зауваження, то як один із можливих засобів діагностики високого рівня навчальних досягнень ефективно можна використовувати також задачі, в яких вимога носить конструктивний характер. В таких задачах шуканими виступають деякі математичні об'єкти або їх структурні елементи, причому побудований об'єкт має задовольняти заданим в умові задачі вимогам. В геометрії – це загальновідомі задачі на побудову, яким приділяється достатня увага і в методичній літературі, і в шкільній практиці. Є такі задачі і в алгебрі.

Множина алгебраїчних об'єктів досить різноманітна. Зокрема, в шкільному курсі алгебри можна виділити такі основні об'єкти: рівняння, вирази, тотожності, нерівності з однією змінною, системи рівнянь та нерівностей, функції, графіки, числові послідовності, прогресії. Крім того, в якості об'єкту створення, можна розглядати математичні моделі до задач, а також і самі задачі.

Звичайно, не всі конструктивні задачі в рівній мірі придатні для використання з метою діагностики високого рівня математичних знань. В цьому відношенні слід враховувати ту обставину, що частина конструктивних задач являється об’єктом вивчення (наприклад, завдання на побудову графіків чи математичних моделей до задач), отже вміння їх розв’язувати передбачаються програмними вимогами. Тому такі завдання мають характер типових стандартних ситуацій. Крім того, конструктивні завдання відрізняються за рівнем складності. Наприклад, з розглянутої вище теми можна запропонувати такі конструктивні завдання:

1) Складіть дріб, який не існує при заданому значенні змінної.
2) Подайте дріб у вигляді суми (різниці) дробів з різними знаменниками.

Звичайно, перше завдання досить просте, воно посильне і для учнів, які мають посередні можливості. Тому конструктивні завдання такого рівня складності варто використовувати як засіб розвитку творчих здібностей учнів. А для діагностики високого рівня досягнень більш доцільними є складніші завдання.

Наведемо кілька прикладів.

1) Складіть зведене квадратне рівняння, коренями якого були б його коефіцієнти.
2) Не розв’язуючи дане квадратне рівняння, складіть нове, корені якого: а) протилежні кореням даного; б) обернені кореням даного; в) втричі більші за корені даного.
3) Наведіть приклад многочлена четвертого степеня, старший коефіцієнт якого дорівнює 1, а множина коренів а) порожня; б) складається з одного елемента; в) складається з двох елементів; г) складається з трьох елементів; д) складається з чотирьох елементів.

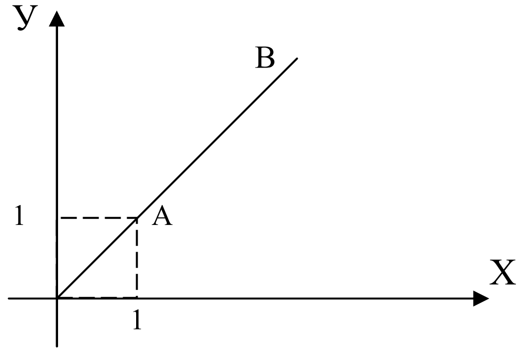
4) Задайте формулою лінійну функцію, графік якої перетинає осі координат в заданих точках.

5) Задайте формулою функцію, графік якої симетричний відносно а) даної точки; б) даної прямої графіку заданої функції.

6) Складіть одне з можливих рівнянь, розв’язком якого була б кожна точка променя AB (мал.1).

7) Складіть систему двох рівнянь,
відносно початку координат.

8) Складіть систему нерівностей,
координатної площини.



Мал.1

Як свідчить практика, для розв’язування таких завдань недостатньо знати і розуміти відповідний теоретичний матеріал, потрібно ще й вміти використовувати свої знання в нетиповій ситуації.

Наприклад, розв’язування задачі 6 грунтується на таких добре відомих учням математичних фактах: промінь AB – частина прямої $y = x$; область визначення функції $y=\sqrt{x-1}$ – проміжок $[1; \infty)$. Але найважче – здогадатися, як ці факти об’єднати в одному виразі, тобто шуканому рівнянні, яке може бути, наприклад, таким $\sqrt{y-1}=\sqrt{x-1}$ (можливі й інші варіанти: $y=(\sqrt{x-1})^2+1$ або $\mathrm{y}-\sqrt{\mathrm{x}-1}=x-\sqrt{x-1}$).

Взагалі, конструювання математичних об’єктів спонукає учнів використовувати великий обсяг інформації, застосовувати міркування, обернені по відношенню до тих, яких вимагає розв’язування традиційних задач. Учням доводиться встановлювати нові зв’язки і залежності між елементами задачі, по-новому їх комбінувати, в значній мірі довільно. Така діяльність для учнів набуває ознак новизни і оригінальності, що дозволяє її характеризувати як творчу. Розглядувані завдання спонукають до творчості ще і в тому розумінні, що багато з них мають безліч, нерідко досить різноманітних розв’язків. Тобто такі завдання передбачають прояви творчості не лише у знаходженні способу розв’язання, а й у остаточній його реалізації. Так, наприклад, виконуючи завдання “Складіть рівняння першого степеня, яке б мало корінь x=5”, один учень зупиниться на найпростішому варіанті типу $3x$=15, а інший запропонує більш цікавий: $x+1+\frac{3+x}{2}=10$.

Резюме. В статье рассматривается проблема диагностики творческого компонента в структуре высокого уровня математической подготовки учеников основной школы и обосновывается возможность использования для этой цели алгебраических конструктивных задач.

Summary. In article the problem of diagnostics of a creative component in structure of a high level of mathematical preparation of pupils of the basic school is considered and the opportunity of use for this purpose of algebraic constructive tasks is proved.

Надійшла до друку 11.12.2001 р.

SCHOOLCHILDREN TRAININNG IN THE CLASSICAL METHODS OF DEMONSTRATIVE REASONING AS AN EFFECTIVE WAY OF DEVELOPING THEIR MATHEMATICAL THINKING. SUBJECT: «THE DIRICHLET PRINCIPLE»

(ОБУЧЕНИЕ ШКОЛЬНИКОВ КЛАССИЧЕСКИМ СПОСОБАМ ДОКАЗАТЕЛЬНЫХ РАССУЖДЕНИЙ КАК ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ ЛИЧНОСТИ.

ТЕМА:"ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ".

(Опыт индивидуально – групповой работы))

Dr.Peter Samovol,
Ben-Gurion University of Negev, Beer- Sheva, Israel,
Mark Applebaum,
Negev Academic College of Engineering, Beer- Sheva, Israel

The whys and wherefores

To train and develop children’s mathematical thinking and at the same time, widen their theoretical and practical knowledge and skills at the level of program requirements and above them – these are the principal aims, tasks and problems the math teacher is faced with.

The main tool for student's training and development of his mathematical abilities is the problem solving. G.Polya [5] has indicated that it is necessary to tackle with problems to master in solving them. He wrote: "if a student succeeds in solving the problem at hand he adds a little to his ability to solve problems". It is important to emphasize here that the problems selected by the teacher are an object as well as a subject of training.

Here we are going to narrate our abundant experience of work in this direction, based on the Dirichlet principle topic.

Our schoolchildren group included pupils exhibiting interest in mathematics studies.

The choice of this topic as a didactic invariant in schoolchildren teaching was caused by the following considerations:

1. The principle of redundancy, or the Dirichlet principle, is one of the classical methods for demonstrative reasoning. The formulation of the Dirichlet principle is simple and easy enough for any auditorium to understand. However, such apparent simplicity and triviality turn to complexity in its practical implementation, mainly because of the difficulties connected with "rabbits" and "cages" unmasking.
2. The utilization of this method reasoning vigorously develops the pupils' mathematical thinking towards divergence and contributes to the development of creative thinking in the wide sense of this term, as well. Pupil obtains an opportunity to display his own intellectual initiative in the development of something new – new idea, new unexpected aspect, new approach, new allegory, etc.).
3. The Dirichlet principle is interesting for teachers from the didactic, methodical and psychological points of view firstly because its successful application demands a number of principal intellectual skills and abilities from pupil. Some of them are:

– ability to improvise and to abstract;

– ability to re-formulate the problem situation, making up a new plot or new conceptual images;
– ability to find a suitable allegory;
– ability to exhibit the flexibility of mental processes;
– ability to feel and understand direct and reverse logic problem connections.

The first lesson

Topic: **"Cages and Rabbits"**

Thesis for the conversation of teacher with schoolchildren

1. When thinking over nonstandard problem-to-prove, it may often be helpful to use the method of reasoning, known among school and college students as the "Cages and Rabbits" principle (or theorem). In a facetious form it is formulated in the following way: "it is impossible to put 4 rabbits into 3 cages in such a manner that there would be only one rabbit in each case". It means that there surely would be a cage containing no less then two rabbits. This method has a scientific name, too. The Dirichlet principle (or the theorem of redundancy). In more general form it is usually formulated thus: "If there are no less than $(n+1)$ objects which are to be placed into no more than n boxes – then no less than one box may be found containing no less than two objects".
2. The principle formulation may be generalized thus: "If n objects are placed into k boxes and $n > k$, then

i) it is always possible to find a box containing no less than $\frac{n}{k}$ objects, and

ii) it is always possible to find a box containing no more than $\frac{n}{k}$ objects.

Sometimes an integer part of $\frac{n}{k}$ is used, if $\frac{n}{k}$ isn't integer.

(Let us remind the definition of an integer part of x: Integer part $[x]$ of number x is a maximum integer number not exceeding number x. For instance, $[1.2]=1; [2.9]=2; [-2.3]=-3$

3. The Dirichlet theorem may be easily proven using the *reductio ad absurdum* method.
4. Indeed, let us assume that the mentioned box (case a) cannot be pointed out. Hence it follows that each box contains less than $\frac{n}{k}$ subjects. But then k boxes contain less than n objects. This is a contradiction, because there are exactly n objects. The (b) statement may be proven in similar way.
5. The Dirichlet principle is applicable to indiscreet values as well:
6. "If k rabbits have eaten n kg of grass, then it is possible to find a rabbit who was to eat no less than $\frac{n}{k}$ kg of grass."
7. As well, a rabbit exists who has eaten no more than $\frac{n}{k}$ kg of grass.
8. These statements may be proven in similar way.
9. Despite its apparent simplicity and triviality, sometimes even evidently, the Dirichlet principle often serves as the key to the solution of a wide range of problems. Here it is important to note that:

i) this method gives only "non-constructive" solution: we can only state or deny the fact of the mentioned "cage" existence, but we are not able to point out which cage it is (for example, we don't know its number);

ii) as it was already stressed, the most difficult stage of solution, by the opinion of the majority of mathematicians, is the distribution of roles between "rabbits" and "cages". It is not an easy task to make this decision. As a rule, the experience and logical thinking may help here.

You will have an opportunity to ascertain the latter statement validity by studying several problems presented below.

The second lesson

Topic: **The Dirichlet principle and integers**

Problem No 1

Prove the theorem:

Given that for two natural numbers N and m, the inequality $N > m$ is held. Then among N integer numbers two numbers can always be found, such that their difference is divisible by m.

Discussion

As for the Dirichlet principle application, the amount of "rabbits" must always exceed the amount of "cages". It would be reasonable to assign the role of "rabbits" to each of the N integers. Various remainders from the division of integers by m would be the "cages".

For example, the "rabbits" (read: the numbers) that are divisible by m we place into the "cage" # 0.

The "rabbits" (read: the numbers) for which the remainder is equal to 1, we place into the "cage" # 1. The "rabbits" (read: the numbers) for which remainder is equal to 2, we place into the "cage" # 2. And so on up to cage # $(m-1)$. So into the "cage" # $(m-1)$we place the "rabbits" (read: the numbers) for which remainder is equal to $(m-1)$.

By the problem conditions $N > m$, and the amount of different remainders from the division of integers by *m* is also equal to *m*, so the number of "rabbits" is larger than the number of "cages". Therefore, by the Dirichlet principle, no less than two "rabbits" would be placed into the same "cage". Hence, the difference of these numbers should be an aliquot to *m*. QED.

Let us stress that the theorem: "From *N* integers two such numbers can always be selected that their difference is divisible by m $(N > m)$" – it is sometimes called the main conclusion of the Dirichlet principle for integer numbers.

Problem No 2

Is it right that among *n* integer numbers several numbers always can be found such that their sum is divisible by *n*?

Solution (with some elements of methodical discussion)

2.1. Let $a_1, a_2, ..., a_n$ be n arbitrarily chosen integer numbers. Let us consider n following sums:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

....

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

2.2 If one of S_k $(1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{n})$ integers is divisible by *n,* then the solution is accomplished, as we have got positive answer to the posed problem.

2.3 If none one of *n* integers of S_k $(1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{n})$ type is divisible by *n,* then the division of these numbers by *n* may produce the following set of $(n-1)$ remainders $1,2,3,...,(n-1)$.

Now it is time to distinguish between "cages" and "rabbits", that is to apply the Dirichlet principle. To let the principle work, a number of "rabbits" should exceed the number of "cages", so we assign the numbers of S_k $(1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{n})$ type to be the "rabbits" while $(n-1)$members of the remainders set: $1,2,3,...,(n-1)$ to be the "cages".

The way of our reasoning is like this:

The "rabbits" (read: the numbers) for which the remainder is equal to 1, we place into the "cage" number 1.

The "rabbits" (read: the numbers) for which the remainder is equal to 2, we place into the "cage" number 2. And so on, up to the cage number $(n-1)$.

Into the "cage" number $(n-1)$we place the "rabbits" (read: the numbers) for which the remainder is equal to $(n-1)$.

According to the problem conditions, the amount of rabbits, that is number of sums, is equal to *n*, (namely, "rabbits"), and we have exactly $(n-1) < n$ of remainders (namely, "cages"). Therefore, there are more "rabbits" than "cages", and in virtue of the Dirichlet principle, no less than two "rabbits" would be placed into the same "cage". In the formal language, it means that among the numbers of $S_1, S_2, ..., S_n$ set at least two numbers can always be found that have the same remainder, when divided by *n*. Hence, the difference of two such numbers will be aliquot to *n*.

For example, if $r_k = r_p$ then $(S_k - S_p) \vdots n$.

By virtue of the accepted denotation (if $k > p$), the difference

$$S_k - S_p = (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_p) = a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_k$$

will be an aliquot to *n*.

Therefore, the final answer to the posed question would be the same as in 4.2: "Yes, it's right".

The problem is completely solved.

Several methodical advises

Advice 1. As our observations indicate, the first impulse of a person solving a similar problem is the striving to find an example giving negative answer to the question set. Our advice: do not embarrass this wish.

Advice 2. At the final stage of the problem solution, the discussion it is helpful in order to turn the schoolchildren's attention to the following immediate consequence of the above argumentation: if *n* arbitrary numerals are put down in a line, then either one of them is divisible by *n*, or a sum of several consecutive numbers is divisible by *n*.

Advice 3. Monitoring of obtained knowledge, attainments and skills

Suggest to schoolchildren to think about a possible solution of Problem No 2, using the proven theorem.

Problem No 3 (Task for investigation) [2]

Consider the Fibonacci series: 1,1,2,3,5,8,...

The two first members of this sequence are $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, and each succeeding term of the sequence beginning with the third term is the sum of the two immediately preceding ones. That is, $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$.

1. Find out whether among the first 10001 terms of this sequence a term can be found with two zeroes as the two least digits (in decimal form)?

2. Try to formulate this problem in a general form.

Solution (with some elements of methodical discussion)

3.1 Solution

Let us consider a set of various remainders that correspond to the division of various terms of our sequence by 100. Let us denote the remainder resulting from the division of n-th term by 100 as r_n (that is, $a_n = b_n \cdot 100 + r_n$, where $0 \le r_n \le 99$). It is evident that $r_1 = 1,\ r_2 = 1,\ \ r_5 = 5$, and so on.

There exist exactly 100 various different values of terms in the set of r_{n} remainders. Consider various pairs of the remainders: (r_j, r_i), when $0 \le i \le 99$, and when $0 \le j \le 99$.

There are exactly $100 \cdot 100 = 10^4$ various pairs of this type.

$(r_1, r_2), (r_2, r_3),\ (r_3, r_4), (r_4, r_5), \ldots, (r_k, r_{k+1}), (r_{k+1}, r_{k+2}), \ldots, (r_{10001}, r_{10002})$.

Now it is necessary to distribute the roles of "cages" and "rabbits" in our allegory.

Here $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ remainders shouldn’t be represented as "rabbits" that are willing to be immediately put into the appropriate "cages". Such choice could not make the Dirichlet principle to the work.

We shall call all consecutive pairs of the (r_k, r_{k+1}) type that we have constructed earlier the “rabbits”.

There are exactly 10001 of such pairs:

$(r_1, r_2), (r_2, r_3),\ (r_3, r_4), (r_4, r_5), \ldots, (r_k, r_{k+1}), (r_{k+1}, r_{k+2}), \ldots, (r_{10001}, r_{10002})$

The "cages" will be 10000 different pairs of remainders (r_j, r_i), at $0 \le i \le 99$ and $0 \le j \le 99$.

Now we have 10001 "rabbits" and 10000 "cages". By virtue of the Dirichlet principle, at least two pairs of remainders must coincide, for example, the pair of remainders (r_k, r_{k+1}) coincides with the pair of remainders (r_m, r_{m+1}).

This means, in particular, that $r_k = r_m$ and $r_{k+1} = r_{m+1}$, where $\mathrm{k} < \mathrm{m}$.

As $a_{m-1} = a_{m+1} - a_m$; $a_{k-1} = a_{k+1} - a_k$, we have $\mathrm{r}_{\mathrm{k-1}} = r_{m-1}$

Similarly reasoning, we can derive an equality $r_{k-2} = r_{m-2}$ from an equality $r_{k-1} = r_{m-1}$ and so on, up to $r_2 = 1 = r_{m-k+2}$; $\mathrm{r}_1 = 1 = r_{m-k+1}$. And as $a_{m-k} = a_{m-k+2} - a_{m-k+1}$ we have $\mathrm{r}_{\mathrm{m-k}} = 1 - 1 = 0$.

It means that the term a_{m-k} is the term we are looking for.

3.2. From the proposed method of "cages" and "rabbits" definition it becomes clear how certain generalization can be made. Here is another example:

Let us consider the Fibonacci series: 1,1,2,3,5,8,...

Find out, whether a term divisible by *n* can be found among the first $\left(n^2 + 1\right)$ terms of this sequence. (The solution of this problem is absolutely similar to that of the previous problem when $n = 10001$. That is why it is omitted here).

Several methodical advises

Advice 4. Just as we have done earlier, it is necessary to divide this problem into a chain of lemmas and prompts, which would be relatively easy for the given group of schoolchildren. For instance:

1. Calculate the first 10 members of the Fibonacci series.
2. Calculate the remainders $r_1, r_2, ..., r_{10}$ resulting from the division of the first 10 Fibonacci numbers by 100.
3. Write down the pairs of remainders:
   $(r_1, r_2), (r_2, r_3), (r_3, r_4), (r_4, r_5), ..., (r_k, r_{k+1}), (r_{k+1}, r_{k+2})$

Further detailed elaboration level depends on the particular pupil’s abilities.

Advice 5. Monitoring of obtained knowledge, attainments and skills

Offer schoolchildren to think over such questions:

– Is the sequence $r_1, r_2, ..., r_n$ a periodic one?:
– Is it correct that for any natural *n* in the Fibonacci sequence a term can be found with *n* zeroes as the *n* least digits?

Note. It is interesting to recall that Fibonacci has introduced his sequence after the investigations conducted and the observations of reproduction over the rabbits placed into cages.

Problem training

Home task 1

Prove that two such numbers can be found among arbitrary 52 natural numbers that either their sum or their difference is divided by 100.

Is this assertion valid for 51 numbers?

Home task 2

A natural number was duplicated and 1 was added to the product. The number obtained was again duplicated, and again 1 was added to the product. This operation was repeated 100 times. Is it possible that the resulting number is divisible by 1999? By 2000?

Home task 3

As many as 2^n prime numbers are put down in one row. It is known that less than *n* of these numbers differs. Prove that a set of successive terms can be selected from these numbers such that a product of these terms would be a perfect square.

Home task 4

Prove that for any natural number there exists a number aliquot to it and written by the combination of only two figures: 1 and 0.

Home task 5

There are as many as n 100000 phones in a town. Their numbers are represented by 5 figures. More than one half of all phones is installed in a central district. Prove that at least one of the numbers in a central district is equal to the sum of the two other phones from the same district.

Home task 6

Prove that for any $a > 0$ and any natural N such integers $m \geq 0, \& k \geq 0$ can be found that the following inequality is held $|ka - m| \leq \frac{1}{N}$.

This short acquaintance with the Dirichlet principle we wish to conclude with some notes:

I. Very often we do not even notice that we use this principle to resolve a problem.

II. But even if we do understand that a problem may be solved by virtue of the Dirichlet principle, this sole understanding will not make the problem easier or less interesting. The major sophistication, a kind of a "logical pass" lays in the question, what is to be assigned as "cages" and what – as "rabbits". Here the authors give only one advice they believe to be the basic and the final:

***Advice 2002* "Just solve as many problems as possible!"**

Conclusion

The process of a person's thinking development is a complex dynamic system of quantitative and qualitative changes, which take place in the intellectual activity of a person within his entire life.

Our 20-year pedagogical experience allows us to claim that the principal difference in the mental development of a senior pupil and a teenager is the completeness of their scientific attitude.

Many researchers, for instance, Krutetskii, V.A. [4], Kohn I.S., [3], Cholodnaya, M.A. [1], basing on the laws of intellect development study, came to the following conclusion: development of intellect and vision in young people are connected with the development of their creative abilities. That assumes not merely information assimilation but intellectual initiatives and activity when creating something really new.

The suggested methodology provides such opportunity.

Let us emphasize that a teacher desiring to educate active creative person inevitably faces the significant problem of the choice of priorities while selecting the training content. In doing so, a special role must be assigned to the schemes of logical reasoning. Ability to build logical reasoning chains will later become the integral part of today's pupil intellectual activity.

Among possible major topics in the choice of training contents we recommend to pay special attention to the problems requiring the redundancy idea in its various forms and manifestations for their solution.

1. Cholodnja, M. A., "Psychology of intelligence: paradoxes of research " Moscow: Bars, 1997.
2. Halperin, G., Tolpigo, A., Moscow Mathematical Olympiads. Moscow: Nauka, 1986.
3. Kohn, I.S., Psychology of high school students. Moscow: Prosvechenie, 1982.
4. Krutetskii, V. A., The Psychology of the Mathematical Abilities of the Schoolchildren. Chicago: University of Chicago Press, 1976.
5. Polya, G., Mathematics and Plausible Reasoning. Princeton, New Gersey: Princeton Press, 1954.

Резюме. В статье анализируется успешный авторский опыт работы с учащимися, проявляющими интерес в обучении математики. Обосновывается целесообразность и перспективность выбора дидактического содержания в виде различных методов доказательных рассуждений. В качестве иллюстрации рассматривается Принцип Дирихле. Изложено подробное методическое содержание учебного цикла из трёх занятий по данной теме.

Резюме. У статті аналізується успішний авторський досвід роботи з учнями, які виявляють інтерес у навчанні математики. Обгрунтовується доцільність та перспективність вибору дидактичного змісту у вигляді різних методів доведених міркувань. Як ілюстрація розглядається Принцип Діріхле. Викладено докладний методичний зміст навчального циклу з трьох занять з даної теми.

Надійшла до друку 16.04.2002 р.

ВИХОВАННЯ ПРАГНЕННЯ ДО САМОРОЗВИТКУ УЧНІВ ЗАСОБАМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Н.М.Лосєва, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Донецький національний університет

"Засвоєння знань у процесі навчання – це не механічний процес передавання їх учителем, коли головне навантаження лягає на пам'ять школярів. Оволодіння знаннями залежить не стільки від пам'яті, скільки від тієї діяльності, в яку включається учень. Від системи розумових операцій, котрі він здійснює при їх засвоєнні" [3, с. 84].

"Результативність процесу навчання здебільшого визначається успішністю реалізації принципів навчання, які випливають як із закономірностей навчання, так і потреб суспільства до формування особистості. Тому принципи виступають як необхідні умови, які сприяють підвищенню якості педагогічної діяльності. У педагогічному процесі принципи навчання виступають не окремо, а в тісному взаємозв'язку, що створює цілісну систему забезпечення ефективності навчання" [4, с. 196].

Дійсно, процес навчання будується на певній системі дидактичних принципів, використовує різні методи і способи навчання з метою свідомого й міцного засвоєння знань, умінь і навичок. І тільки тоді, коли викладач залучає учнів до активної пізнавальної діяльності, можна домогтися на уроках повноцінного засвоєння учнями необхідного матеріалу, основних понять, ідей, методів.

Важливу роль у сприйманні й усвідомленні учбового матеріалу відіграють фактори мотиваційного характеру. "Формування свідомої мотивації у ставленні до навчання сприяє розвиткові загального ставлення учнів до життя" [1, с. 161]. Викладач повинен указати на важність поняття в практиці, на перспективи використання його в подальшому навчанні, показати такі сторони нового матеріалу, які можуть викликати інтерес до повноцінного засвоєння. Треба "створювати у учнів психічний стан очікування чогось вагомого, потрібного, легке емоційне збудження, яке супроводжується необхідним напруженням, задоволенням від того, що приступаємо до чогось цікавого" [5, с. 85].

Навчання взагалі, і математики у частковому випадку, можна й необхідно будувати таким чином, щоб воно уявлялося учню серією маленьких відкриттів.

Причому крім результатів самого відкриття, доцільною є бесіда про процес знаходження істини з усіма його труднощами. Через розкриття фактів історії розвитку науки реалізується принцип зв'язку навчання з життям.

Тому неможливо переоцінити позитивний вплив від використання історичних відомостей на навчальний процес. Вони демонструють зв’язок математики із практичними потребами людей, із розвитком інших наук, показують особливості розвитку математики і конкретної теми, дозволяють простежити як впливали великі учені та їх відкриття на розвиток суспільства.

Використання елементів історії у викладанні математики є доцільним саме тому, що воно виконує розвиваючу та виховну функції. Історичні відомості розширяють розумовий кругозір учнів, підвищують їх загальну культуру, поглиблюють розуміння навчального матеріалу, виховують в учнів потяг до наукової творчості, критичне відношення до нових фактів, збуджують інтерес та любов до предмета.

"Школярі стають співавторами пошуків, роздумів, знахідок. Наслідок – допитливість, радість пізнання.

Самостійна діяльність школярів у навчанні спонукає їх до порівняння явищ, процесів, фактів; узагальнення, умовиводів.

Ефективним засобом створення умов для порівняння є використання наочності" [3, с. 73].

Дійсно, застосування принципу наочності є однією з необхідних умов успішного навчання. Унаочнення підвищує ефективність навчання, допомагає подолати формалізм у викладанні, пожвавлює навчальний процес, збуджує ініціативу та мислення учнів, привчає їх до аналізу та узагальнення.

Наочність у навчанні – дійсний засіб боротьби за міцні знання учнів. Так ще Я.Коменський вважав, що суттєве наочне сприймання завжди приводить до того, що коли хтось цим шляхом щось засвоїв, то він знатимемо це твердо. Саме тому, із метою закріплення математичних знань при вивченні навчального матеріалу, доцільним є використання моделей, які ілюструють властивості математичних об'єктів. Особливо необхідним стає застосування моделей у тому випадку, коли питання, що розглядаються, є складними, і не всі учні зможуть відтворити нелегкі доведення. Але те, що «відкрито» самим учнем у процесі його роботи глибоко запам'ятовується. Слабкі учні, якщо і не зможуть відтворити доведення, то запам'ятають формулу здобуту експериментально й безпосереднє ними. Досвід показує, що в пам'яті учнів найкраще відтворюються знання здобуті на основі використання реальних предметів, цікаві факти, конкретні приклади, а також сумніви й роздуми учнів, що викликають у них яскравий емоційний стан.

Покажемо можливий спосіб реалізації вищезгаданих принципів навчання в процесі вивчення тем «Об'єм кулі» та «Площа сфери».

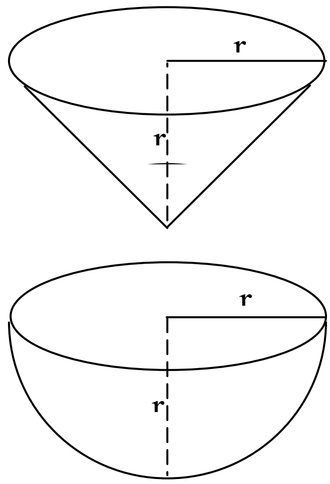
Усвідомлення учнями цих питань має не тільки загальноосвітнє, а й практичне значення, оскільки архітектурні споруди, деталі машин, приладів, речі побуту мають форму тіл обертання.

Здається доцільним починати бесіду з учнями розповіддю про те, як ще в старовину люди намагалися розв'язувати ці питання.

Об'єм та площу поверхні кулі першим обчислив видатний давньогрецький математик Архімед (287-212 р. до н.е.). У своєму трактаті "Про кулю та циліндр" він дає строге доведення цих формул. Про те, як він прийшов до свого відкриття можна зрозуміти з викладеного ним у "Ефоді" так званому "механічному" доведенні, завдяки якому він зробив висновок, що куля у чотири рази більша за конус [2, с. 181].

Викладач знає, що саме спільний із учнями пошук істини, залучання їх до спільної праці збільшує мотивацію навчання й поглиблює інтерес до предмета.

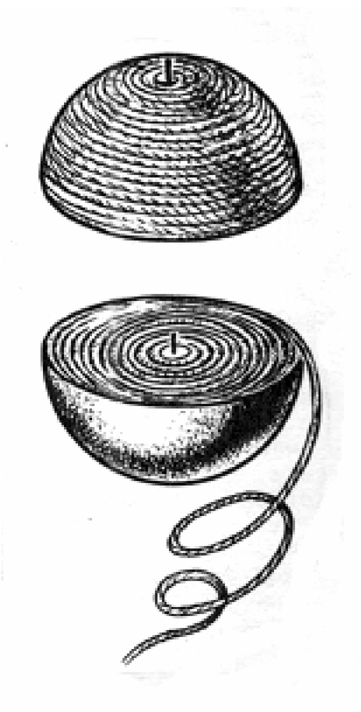
Тому він пропонує учням провести дослід. Обираються моделі конуса й півкулі так, щоб радіус основи конуса і його висота дорівнювали радіусу півкулі. Якщо наповнювати конус водою і переливати її у півкулю, то можна побачити, що об'єм півкулі приблизно у два рази більший за об'єм конуса. Формула для знаходження об'єму конуса на момент проведення досліду вже учням знайома. Якщо радіус кулі – r, то об'єм конуса дорівнює $\frac{\pi r^3}{3}$. Згідно з дослідом маємо, що об'єм півкулі у два рази більший за об'єм конуса.



Отже, об'єм кулі більший за об'єм конуса у чотири рази і дорівнює

$$V_{кулі} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Обчислити площу поверхні кулі на практиці можна за допомогою такого досліду.



Візьмемо дерев'яну модель півкулі і заб'ємо в неї два гвіздки: перший – в центрі великого круга, другий – в вершині півкулі. Прикріпимо кінець шнура (не дуже тонкого) до другого гвіздка, і покриємо шнуром поверхню півкулі, вкладаючи його спіраллю.

Потім покриємо основу півкулі – великий круг. Після цього виміряємо довжини цих двох шнурів і бачимо, що довжина шнура, витраченого на покриття основи, тобто круга радіуса R, приблизно у два рази менша за довжину шнура, витраченого на покриття поверхні півкулі.

Приходимо до висновку: із того, що площа великого круга дорівнює πR^2, маємо, що площа поверхні півкулі – $2\pi R^2$, а площа поверхні кулі, відповідно, $4\pi R^2$.

Цей дослід – один із найдавніших. Саме так люди дізналися, що площа поверхні кулі в чотири рази більша за площу його великого круга.

Зрозуміло, що такі методи навчання, як досліди, це тільки початок у засвоєнні учнями певних знань. Первинне сприймання й усвідомлення навчального матеріалу є лише важливою передумовою проникнення в сутність явищ. Воно не дає стрункої й повної картини, але дає змогу вчителю виконати своє завдання – максимально скоротити етап сприймання, підвести учнів до висновків.

Догадка, яка випливає з досліду, потребує строгого доведення. Саме така послідовність у діяльності учнів є основою формування у них наукових переконань.

Звернемо увагу на те, що в методичній літературі багато уваги приділяється різним способам доведення теорем. "Володіння методами доведень і вміння вибрати потрібний метод – важлива умова для самостійного пошуку" [6, с.80]. Неможливо переоцінити значення таких пошуків задля математичного розвитку учнів. Викладач при доведенні теореми не тільки сам пропонує декілька способів доведення, а й заохочує учнів до пошуків. Нам невідомі більш ефективні шляхи розвитку гнучкості мислення та винахідливості, ніж шлях, що пролягає крізь пошуки різних способів розв'язування проблеми.

Крім того, доведення теореми декількома способами є одним із шляхів перевірки правильності здобутих результатів: якщо різні способи розв'язування приводять до одного й того ж результату, то його можна вважати достовірним. Розглянемо способи знаходження об'єму кулі. Дотримуючись принципу науковості освіти, по-перше, розглянемо спосіб, який пов'язаний з відповідним рівнем сучасної науки, тобто спосіб знаходження об'єму кулі за допомогою інтегрального числення.

Спосіб 1.

Вводимо декартові координати. Приймаємо центр кулі за початок координат. Площина XOY перетинає поверхню кулі радіуса R по кругу, коло якого задано рівнянням: $x^2+y^2=R^2$

Півколо, що розташоване над віссю OX, задається рівнянням

$y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \le x \le R$.

Об‘єм кулі визначається формулою:

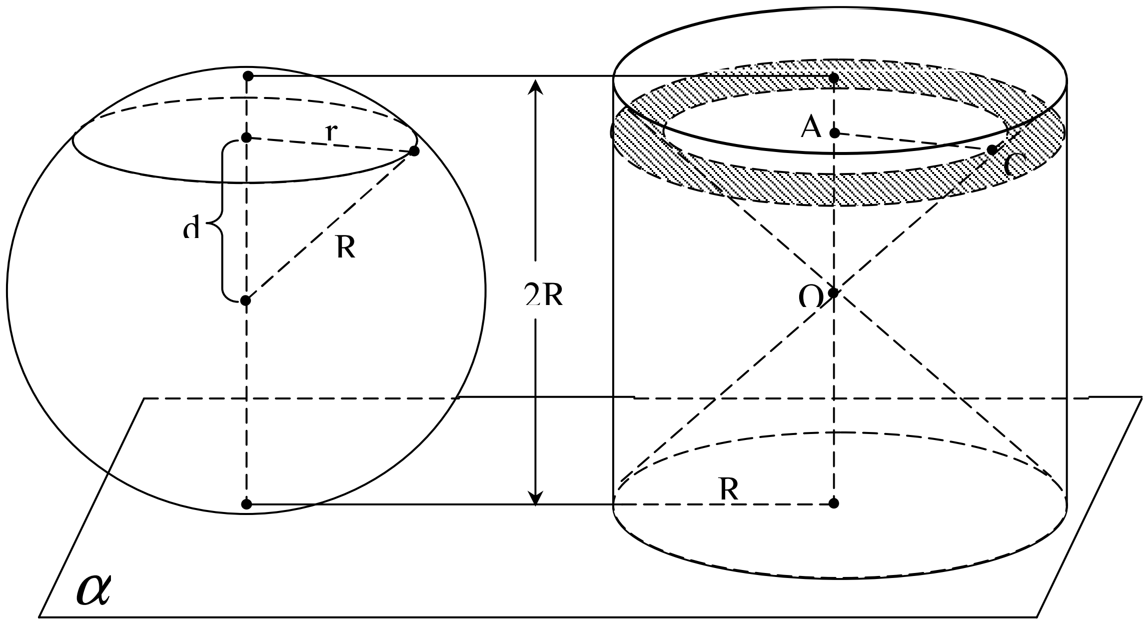
$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx = \pi(R^2 x - \frac{x^3}{3}) |_{-R}^{R}$$, тобто $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Формулу для обчислення об’єму кулі можна також знайти за допомогою принципу Кавальєрі (за нашим навчальним планом учні знайомляться з цим принципом ще при знаходженні об’єму піраміди).

Спосіб 2.

Нехай на площині α розміщені куля з радіусом R й циліндр із радіусом основи R і висотою 2R. Уявимо, що із циліндра вирізано й вилучено два конуси, що мають спільну вершину на середині O осі циліндра. Основою першого конуса є верхня основа циліндра, а основою другого конуса – нижня. Тоді від циліндра залишиться деяке тіло. Покажемо, що об’єм цього тіла дорівнює об’єму нашої кулі. Для цього проведемо довільну площину, яка паралельна до площини α і перетинає обидва тіла. Нехай відстань від цієї площини до центра кулі дорівнює d, а радіус круга, утвореного в перерізі, r. Тоді $r^2 = R^2 - d^2$, а площа цього круга дорівнює $\pi r^2 = \pi(R^2 - d^2)$. Січна площина дає у перерізі із тілом, що залишилося від циліндра, кругове кільце. На малюнку воно заштриховане. Радіус зовнішнього кола цього кільця дорівнює R, а внутрішнього – d . Це випливає з того, що прямокутний трикутник ACO рівнобедрений ($\angle AOC$ =

$= \angle ACO = 45°$) і AC=AO=d. Тоді площа цього кільця дорівнює $\pi R^2 - \pi d^2 = \pi\left(R^2 - d^2\right)$.



Таким чином, бачимо, що довільна січна площина, яка паралельна до площини α, дає в перерізі з кулею й тілом, що залишилося від циліндра вилученням двох конусів, фігури однакової площі. Отже, згідно з принципом Кавальєрі, об'єми цих тіл рівні.

Але об'єм того тіла, яке залишилося від циліндра, коли вилучено два конуси, дорівнює об'єму циліндра без подвоєного об'єму конуса, тобто, він дорівнює:

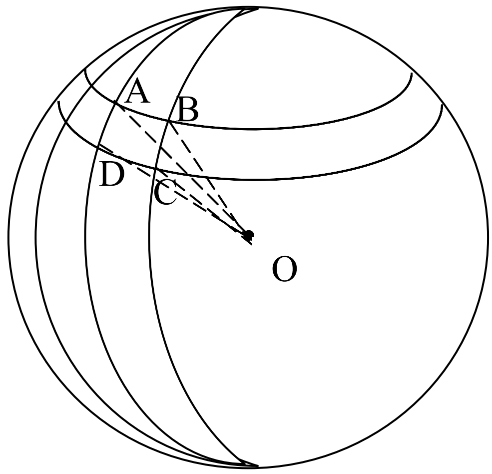
$\pi R^2 2R - 2\frac{1}{3}\pi R^2 R = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$. Таким чином,

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Як і у випадку обчислення об'єму, площу поверхні кулі також можна знайти декількома способами.

Спосіб 1.

Нехай дано кулю радіуса R. Розіб'ємо поверхню кулі на n чотирикутників досить малих розмірів. Їх можна умовно вважати плоскими.



Сполучимо вершини чотирикутників із центром кулі. Тоді куля розіб'ється на n маленьких пірамід з вершинами у центрі кулі і висотами, що дорівнюють радіусу кулі. Позначимо площі чотирикутників через $S_1, S_2, ..., S_n$, об'єми утворених пірамід – $V_1, V_2, ..., V_n$, а об'єм кулі через V. Знайдемо об'єми пірамід розбиття:

$$V_1 = \frac{1}{3}S_1 R,\ V_2 = \frac{1}{3}S_2 R,\ \dots,\ V_n = \frac{1}{3}S_n R.$$

Об'єм кулі наближено дорівнює сумі об'ємів пірамід розбиття. Маємо:

$$V = V_1 + V_2 + ... + V_n = \frac{1}{3}S_1 R + \frac{1}{3}S_2 R + ... + \frac{1}{3}S_n R = \frac{1}{3}R\left(S_1 + S_2 + ... + S_n\right)$$

Сума площ усіх чотирикутників дорівнює поверхні кулі, тобто

$$S_1 + S_2 + ... + S_n = S$$

Тоді $V = \frac{1}{3}RS$, або $S = \frac{3V}{R}$.

Оскільки $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, то формула площі поверхні кулі буде така:

$$S = 4\pi R^2.$$

Отже, поверхня кулі дорівнює почетвереній площі великого круга.

Можна також казати, що об'єм кулі дорівнює площі його поверхні, помноженій на 1/3 радіуса.

$$V_{кулі} = 4\pi \cdot r^2 \frac{r}{3}.$$

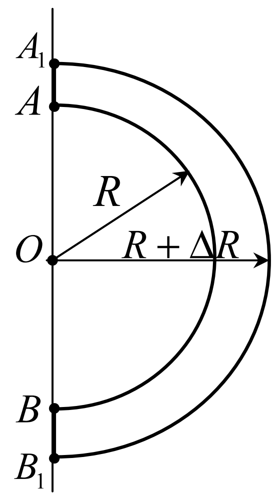
Розглянемо інший спосіб розв'язання цього питання, який допоможе нам реалізувати принцип трудності й доступності навчання.

"Під трудністю у найзагальнішому плані розуміють розрив між підготовленістю учнів до процесу навчання і тими вимогами, які цей процес до учнів пред'являє. Трудність є виразом основного протиріччя між тим новим, що повинні пізнати учні, тими завданнями, які вони повинні вирішити, і наявністю у них запасу знань, уявлень, умінь вирішувати завдання. Щоб подібне протиріччя стало рушійною силою процесу навчання, воно повинно висуватися логікою цього процесу, бути ланцюгом у низці пізнавальних завдань, що вирішуються учнями під керівництвом учителя... Доступність розуміємо не як легкість для засвоєння, а як міру посильної трудності" [4, с. 179-180]. "Чим складнішим є матеріал, тим простіше, дохідливіше має його викласти вчитель" [1, с. 160].

Спосіб 2. Ідею цього методу запропонував французький математик Анрі Лебег (1875-1941).

Площі поверхонь циліндра й конуса зручно обчислювати за допомогою їх розгорток. Для сфери такий спосіб обчислення площі поверхні використати не можливо, бо сферу не можна розгорнути на площину.

Введемо означення площі поверхні, яке дає можливість обчислювати площі тих поверхонь, які не можна розгорнути на площину.



Щоб отримати наглядне уявлення про даний спосіб розглянемо приклад із практики. Нехай нам треба обчислити площу куполоподібного даху цирку. За його площу можна взяти відношення об’єму фарби, витраченої на фарбування даху, до товщини шару фарби. Це наближення буде тим кращим, чим меншою буде товщина шару.

Тобто, за площу S поверхні F приймають границю відношення об’єму ΔV шару до товщини ΔR коли $\Delta R \to 0$.

Нехай маємо півкруг із центром O і радіусом R. При обертанні цього півкруга навколо осі AB отримаємо кулю радіуса R. Надамо радіусу R приросту ΔR, тоді об’єм кулі V отримає приріст ΔV, де ΔV – об’єм фігури, отриманої внаслідок обертання півкільця AA_1B_1B, тобто тіла, що міститься між двома концентричними сферами радіусів R та $\Delta R + R$.

Його об’єм:

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi (R + \Delta R)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(3R^2 \Delta R + 3R\Delta R^2 + \Delta R^3\right)$$

За площу сфери приймають границю відношення приросту об’єму кулі, обмеженої цією сферою, до приросту радіуса, коли приріст радіуса прямує до нуля:

$$S = \lim_{\Delta R \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta R}. \ (*)$$

Тому

$$S = \lim_{\Delta R \to 0} \frac{\frac{4}{3}\pi \left(3R^2 \Delta R + 3R\Delta R^2 + \Delta R^3\right)}{\Delta R} = \frac{4}{3}\pi \lim_{\Delta R \to 0} \left(3R^2 + 3R\Delta R + \Delta R^2\right) = 4\pi R^2.$$

За означенням (*) площа сфери дорівнює похідній від функції V(R), що виражає об‘єм кулі, обмеженої цією сферою. Користуючись формулою об‘єму кулі, маємо:

$$S_{кулі} = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)' = 4\pi R^2.$$

Доведення теорем різними способами начебто залучає учнів до самостійного розв’язання проблеми. Допитливий учень може зрозуміти, що він здатний не тільки пізнати вже створене, але і сам брати участь у створенні нового, бо існує не лише один спосіб знаходження істини. Такий "процес навчання сприяє розвитку самостійності... і може забезпечувати формування навичок самовиховання." Саме таким може бути шлях реалізації принципу виховуючого навчання. "Під час навчальної роботи виховується культура праці, виробляється стиль діяльності... формується інтерес до предмета, встановлюється зв'язок науки з життям... Навчання є виховним, бо воно формує систему ставлень учнів до навколишнього світу" [4, с. 177].

Запропонований підхід до навчання показує, що математика – це метод пізнання навколишнього світу, точний спосіб розрахунків, засіб навчитися мислити логічно. Можливо, що таким чином викладач зможе перетворити процес пізнання в інтелектуальне свято для учнів і вони відчують надію й упевненість у своїх силах, спробують реалізувати свої внутрішні можливості.

1. Галузинський В.М., Євтух М.Б. Педагогіка: теорія та історія. – К.: Вища школа, 1995. – 237с.
2. Глейзер Г.И. История математики в школе. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1983. – 351 с.
3. Лозова В.І. Цілісний підхід до формування пізнавальної активності школярів. – Харків: ОВС, 2000. – 164с.
4. Лозова В.І., Троцко Г. В. Теоретичні основи виховання і навчання. – Харків, 1997. – 338с.
5. Онищук В.О. Активізація навчання старшокласників. – К.: Рад. школа, 1978. – 127 с.
6. Слєпкань З.І. Методика навчання математики. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

Резюме. В статье рассматривается способ организации учебно-познавательной деятельности учащихся в процессе изучения стереометрии.

Summary. Method of organization of educational activity during the process of studying stereometry is shown in the article.

Надійшла до друку 10.03.2002 р.

ДЕЯКІ АСПЕКТИ МЕТОДИКИ ОРГАНІЗАЦІЇ І УПРАВЛІННЯ ЕВРИСТИЧНОЮ ДІЯЛЬНІСТЮ УЧНІВ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРІЇ

К.В.Власенко, вчитель математики,
Слов'янський педагогічний ліцей

В нашому дослідженні методика організації і управління евристичною діяльністю учнів на уроках геометрії, в контексті становлення творчої інтелектуально-розвинутої людини, представлена послідовністю ситуацій орієнтування, пошуку, перетворення та інтеграції.

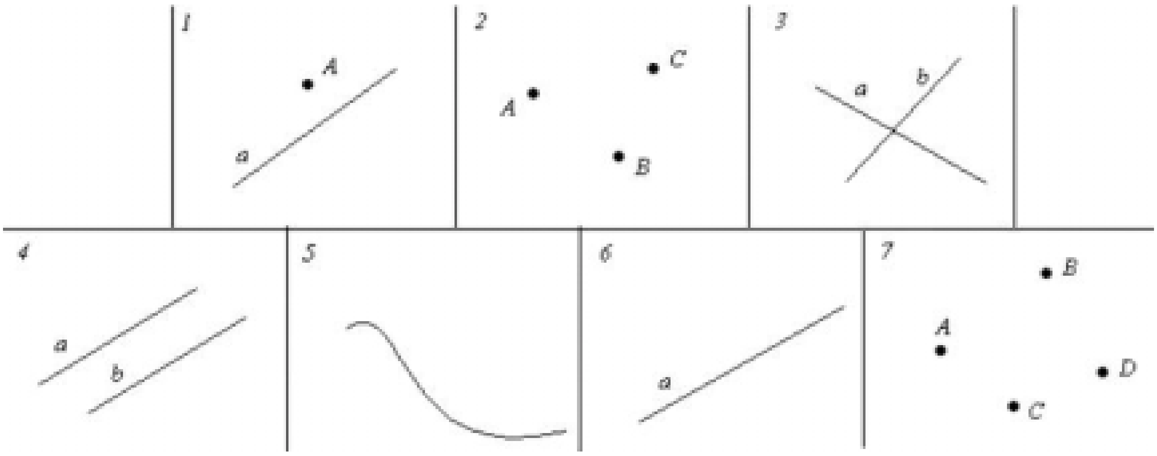
У відповідності з ідеєю В.В.Серікова [6] про розгортання педагогічних умов як ступіней організації і управління педагогічною ситуацією, ми побудували логіку розгортання евристичної діяльності учня на уроках геометрії як ступіней організації і управління ситуацією розв'язання евристичної задачі. Ми розглядаємо евристичну задачу не як ту, що алгоритмічно не розв'язується для даного суб'єкта, а як ситуацію прояву евристичних позицій школяра в навчальному процесі, як ***суб'єктивно евристичну задачу.*** Задача тоді, у нашому розумінні, не може бути евристичною споконвічно, вона стає такою в залежності від того, як її сприймає учень: як особистісну, значиму, що має для нього цінність, або як незначущу, нецінну. У першому випадку учень розглядає розв'язання задачі як засіб для здійснення зовнішніх стосовно пізнання цілей, у другому - воно (пізнання) само є мета. У першому випадку процес пізнання обривається як тільки розв'язана задача, у другому - навпроти, він розвивається, приводячи учня до ситуативної не стимульованої евристичної діяльності, що дозволяє виходити за межі заданого і дозволяє побачити "непередбачене". У цій ситуативній не стимульованій діяльності і криється "таємниця вищих форм людської творчості", як вважає Д.Б. Богоявленська [1].

Перша ступінь – актуалізація ситуації орієнтування дитини, подолання особистісного опору евристичній діяльності і усвідомлення незадоволеності процесом і результатом репродуктивної діяльності.

На даному етапі учням пропонуються евристичні задачі певного змісту. При розв’язуванні цих задач учні виносять первинне уявлення про зв'язок геометрії як науки з матеріальним світом, про значимість діючих знань і умінь, причому ці уявлення достатньо міцні, тому що добуті в результаті діяльності, тобто праці. При цьому в учнів розвиваються і необхідні при розв’язуванні задач уміння предметного характеру, причому більш довільно, тому що пізнавальна активність, що виникає при розв’язуванні задач з цікавлячим школярів змістом, знижує фізичне і розумове навантаження школяра, роблячи виконання даного виду роботи емоційно приємним, тому що зміст задач кожного разу новий і незвичайний [4].

Ефективним способом організації розв’язання таких евристичних задач ми вважаємо усну роботу з використанням евристичної бесіди. На уроках геометрії це може бути розв’язання задач за готовими малюнками з аналізом умови і вимог задачі або складання опису геометричних понять за загальними чи окремими основними характеристиками. Організація усного обговорення розв’язування задачі або обговорення достатніх характеристик, за якими можна означити поняття, дає можливість кожній дитині висловитися й у результаті вільної дискусії народжується означення, ознака, розв’язання. Часто пропонуються евристичні задачі з великою часткою визначеності змісту, тому за 7-10 хвилин уроку вдається розв’язати 4-5 таких задач, причому щоразу нових.

Покажемо це на прикладі деяких питань до теми “Аксіоми стереометрії”. Необхідно побудувати площини на заданих малюнках, якщо це можна зробити. Ще у п’ятому класі учень намагається будувати як можна більше прямих через дві точки, так і зараз ми можемо надати йому можливість зробити самостійно висновки, які він запам’ятає та якими він буде користуватись надалі, оволодіваючи навичками евристичної діяльності.



Усвідомленню та міцному запам'ятовуванню головного в теоретичному матеріалі, активному його застосуванню сприяють глибоке і різностороннє продумування внутрішньої логіки нових знань, аналіз причин і взаємозв'язків. В такому разі висновки і узагальнення не будуть заучуватися механічно, а виступати в свідомості як логічні наслідки аналізу матеріалу, що вивчається [5].

Базою для організації та управління такою евристичною діяльністю може служити система навчальних задач або запитань. Як відмічає В.І.Крупіч [3], навчальна задача як структурний компонент навчальної ситуації стає фактором формування евристичної діяльності учня, коли зміст задачі стає для нього суб'єктивно евристичним, тобто значимим, цінним, емоційно наповненим. Це відбувається, якщо процес розв’язування задачі викликає в учня особистісні, міжособистісні чи інтелектуальні труднощі, подолання яких і сприяє становленню евристичної діяльності.

Наприклад, після вивчення теми «Призма» такими запитаннями можуть бути:

1) Чи може гранню п'ятигранника бути: а) чотирикутник; б) п'ятикутник?
2) Яку мінімальну кількість граней може мати призма? Скільки вершин, ребер, бічних ребер у такої призми?

3) Чи існує призма, у якої лише одне бічне ребро перпендикулярне до площини основи?
4) Чи існує призма, в якій лише одна бічна грань перпендикулярна до площини основи?
5) Чи існує паралелепіпед, у якого лише одна бічна грань перпендикулярна до площини основи? Тільки дві грані перпендикулярні до площини основи?
6) Основою похилого паралелепіпеда є прямокутник. Дві бічні грані перпендикулярні до основи. Чи можуть ці грані бути суміжними? Довести, що дві інші бічні грані – прямокутники.

Робота над задачами проблемного характеру вимагає уміння не тільки знайти розв’язання, але і виявити всі можливі способи, вибрати з них найбільш раціональні в даному конкретному випадку, з'ясувати, чи завжди задача має розв’язання, оперативно оцінити реальність результатів. Евристика – організація процесу продуктивного творчого мислення, спрямованого на “відкриття”, коли “не працює” відомий алгоритм [2].

Простежимо використання евристичного підходу під час створення ситуації орієнтування при розв’язанні стереометричних задач на обчислення об’ємів. Наприклад, при розв’язанні задач на обчислення об’ємів просторових многогранників одержали такі результати: $\pi\, b^3\sin^3\alpha\, \mathrm{tg}\gamma$ (1); $a^2 H\cos\beta\sin\alpha$ (2); $b^2\cos^2\alpha\,\sin\alpha\,\sin 2\gamma$ (3); $b^3\cos\alpha\,\mathrm{tg}\beta$ (4). Знаючи, що при розв’язанні деяких задач допущена помилка, визначити номер формули, що відповідає невірному розв’язанню. Оперативно можна зробити висновок, визначаючи “розмірність” величин та елементи формул. Легко побачити, що в (2), (4) формулах розмірність визначається в кубічних одиницях, і тільки у формулі (3) – у квадратних, а у формулі (1) – використовується зайвий елемент π, тобто саме при розв’язанні задач (1) і (3) допущена помилка.

Учень готовий до переходу на наступний етап, якщо має позитивну установку на участь в евристичній діяльності, що виявляється в усвідомленні основи і способів діяльності, умінні відповідати на питання: “що очікуєш одержати в результаті?”; “що потрібно для цього?”; “що заважає?”; “навіщо ти це робиш?”; “чому ти це робиш саме так?” і т.д.

Друга ступінь – актуалізація ситуації пошуку, навчання зразкам евристичної діяльності на основі одержання нової інформації. Підставою для створення ситуації служать евристичні задачі напіввизначеного змісту. У ході цього відбувається подальший розвиток здатності учня до рефлексивного осмислення власної діяльності і досягнення рівня уміння ставити питання. За допомогою відповідей на ці питання досягається усвідомлення засобів і основ власної діяльності дитини. Основою для активізації ситуації пошуку може служити система навчальних задач або питань, потребуючих творчої переробки змісту. Проілюструємо на прикладі таблиці, яку необхідно заповнити під час пояснення теми “Застосування векторів для розв’язання задач”:

Основні відношення між фігурами	
Задано мовою геометрії	Записати мовою векторів
1. AB $\parallel$ CD	1. $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$
2. AB $\perp$ CD	2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
3. a – пряма, A, B, C – точки на прямій a.	$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}, або \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BC}, або \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB},$ $\overrightarrow{OC} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB}, де O$ довільна точка, p+q=1.
4. M=M_1	4. $\overrightarrow{MM_1} = \vec{0}, або \ \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM}$, де O-довільна точка
5. O, A, B, C – точки на площині α	5. $x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC} = 0,$ де x, y, z-дійсні числа
6. AB $\parallel$ α CD $\parallel$ α EF $\parallel$ α, де AB, CD, EF – прямі, α - площина, AB і CD – перетинаються.	6. $\overrightarrow{EF} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{CD},$ де x, y- дійсні числа

7. С- точка на промені АВ, $\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}$ Зокрема, якщо АС=СВ	$\overrightarrow{AC}=\frac{m}{n}\cdot\overrightarrow{CB}, або \overrightarrow{OC}=\frac{m}{m+n}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{n}{m+n}\cdot\overrightarrow{OB}$ де О – довільна точка, m і n – довільні числа; $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$.
8. M_1 – середина відрізка A_1B_1 , M_2 - середина відрізка A_2B_2.	8. $\overrightarrow{M_1M_2}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}\right)$.
9. ОАВС - паралелограм	а) $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$; б) $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}, або\ \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$, де А, В, С – не лежать на одній прямій.
10. АВ=m, де АВ – відрізок, m- довжина АВ.	10. $m^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2$.
11. М – центроїд ΔABC	11. $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$, де О – довільна точка, або $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$
12. АВ$\perp\alpha$, де – α площина, АВ,CD, MF – прямі, CD і MF – перетинаються і лежать на площині α.	12. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0\ і\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MF}=0$ вектори $\overrightarrow{CD}\ і\ \overrightarrow{MF}$ – не колінеарні.

Розв’язування геометричних задач векторним методом викликає труднощі навіть в умовах роботи в класах з поглибленим вивченням математики. Тому надзвичайно важливо організувати попереднє переведення основних відношень між фігурами з мови геометрії на мову векторів і навпаки, тобто наявні широкі можливості використання аналогій для встановлення зв’язків між аналогічними поняттями.

Третя ступінь – актуалізація ситуації перетворення, основою для створення якої служать евристичні задачі невизначеного змісту тобто задачі, у яких зазначений предмет і мета діяльності та необхідно визначити властивості, вибрати метод і спосіб її розв’язання. На даному етапі відбувається перетворення сформованих образів евристичної діяльності учня на індивідуально-особистісному рівні, йде формування адекватної самооцінки своїх інтелектуально-творчих можливостей і досягнень.

Уся робота з розв’язання евристичних задач здійснюється в процесі вільного спілкування, обміну думками, у творчій дискусії. Визначальною умовою при цьому є особиста включеність учня в евристичну діяльність.

Подібна організація навчального процесу виходить за рамки формування умінь і навичок і впливає на організацію і управління в учнів здатністю до пошуку альтернатив, відкритості, сприйнятливості до аналізу і критики, що сприяє становленню їхньої евристичної діяльності. В основі технології роботи на даному етапі лежить організація колективно-розподільної діяльності, що дозволяє найбільшою мірою створити атмосферу спільного творчого пошуку. Ситуація групової діяльності створює атмосферу розкутості і вільного спілкування, дозволяє школярам позбутися від стереотипних підходів до розв'язання евристичних задач і шаблонової розумової діяльності [7]. Спостерігається виражена тенденція прагнення до оволодіння матеріалом, що "важко дається". Метою даного етапу є усвідомлення і переживання дитиною цінності і змісту пізнання, коли інтерес викликає не результат, а сам процес розв'язання евристичної задачі, процес пізнавання.

Наприклад, базою для створення ситуації перетворення під час вивчення теми "Введення декартових координат у просторі" може служити використання прийомів евристичної діяльності: порівняння, абстрагування, встановлення і використання аналогій та інших. Наведемо фрагмент уроку узагальнення і систематизації при вивченні вище означеної теми.

На уроці ставиться мета засвоїти поняття "декартовий простір", "координати точки декартового простору", вміти знаходити координати точки, заданої в декартовому просторі, і розв'язувати обернену задачу — за заданими координатами точки знаходити її положення в декартовому просторі. З метою полегшення сприймання нового матеріалу всіма учнями на уроці доцільно використати або модель координатного простору, або допомогу програм "GRAN2", "GRAN3".

Перш за все необхідно нагадати учням поняття координатної прямої, координати точки на ній, згадати розв'язування двох взаємно-обернених задач, пов'язаних з положенням точки на координатній прямій і знаходження відстані між двома точками, розташованими на ній. Аналогічні відомості згадуються про координатну площину і задачі, пов'язані з нею. З цією метою можна запропонувати для фронтальної роботи в класі таку систему запитань:

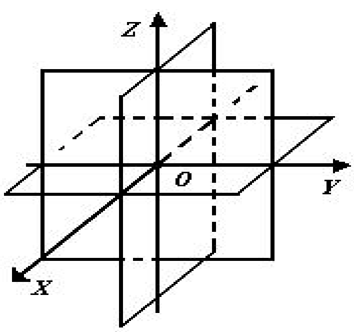
1) Що таке координатна пряма? Чим визначається положення точки на координатній прямій?
2) Позначте на координатній прямій точки A(3), B(-2), C(5,6). Знайдіть координати точки K (Мал.1).

Мал.1

3) Як визначається відстань між точками $A_1(X_1)$ і $A_2(X_2)$ координатної прямої?
4) Знайдіть відстань між точками *P(3)* і Q*(-5).*
5) Що таке система координат на площині?
6) Чим визначається положення будь-якої точки на координатній площині?
7) Як знайти положення точки *M(x; y)* на координатній площині за координатами x, y? Знайти точку *P(2; -4)* на координатній площині.
8) Як знайти координати точки *A,* заданої на координатній площині? (Учні знаходять координати точки *A,* користуючись координатною площиною, зображеною на дошці або на екрані монітору).
9) Як визначити відстань між точками $A_1(X_1;Y_1)$ і $A_2(X_2;Y_2)$ за їхніми координатами? Знайти відстань між точками *A(2;-3)* і *B(1;-2).*
10) Як визначити координати середини відрізка AB за відомими координатами його кінців? Знайти для точок *A(2;0)* і *B(5;-2).*

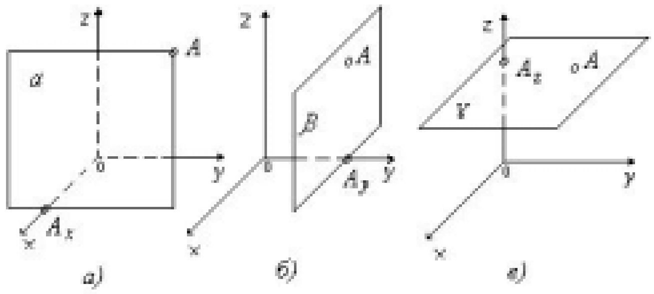
Далі вчитель створює евристичну ситуацію, яку можна назвати ситуацією перетворення, звертаючи увагу на те, що положення точки в просторі, формула відстані між двома точками і координати середини відрізка в просторі визначаються аналогічно тому, як це робилось на площині. Але для цього треба задати прямокутну (декартову) систему координат в просторі. Як це зробити?

В класі знайдуться учні, які запропонують побудувати три взаємно перпендикулярні прямі в просторі, які перетинаються в одній точці *O* — початку координат. Щоб полегшити учням зображення таких прямих в просторі, доцільно нагадати, що ребра куба, які проходять через ту саму вершину, належать трьом взаємно перпендикулярним прямим. Отже, для зображення системи координат в просторі досить зобразити в кабінетній проекції (горизонтальна і перпендикулярна їй пряма в зображенні перетинаються під кутом 45°) три ребра куба, які виходять з однієї вершини. Зводиться домовленість: горизонтальну пряму прийняти за вісь у, вертикальну — за вісь z, а ту, що під кутом 45° до вісі у— за вісь x. Перш ніж зображати координатні площини, корисно обґрунтувати їх отримання відповідними аксіомами і теоремами. Це сприятиме повторенню і ілюстрації застосування раніше набутих знань. Справді, за аксіомою стереометрії отримали три площини *xy,* xz, yz. За ознакою перпендикулярності прямої і площини кожна з трьох прямих перпендикулярна площині, що утворюється двома іншими прямими; кожна з утворених площин за ознакою перпендикулярності площин перпендикулярна кожній з двох інших площин. Слід врахувати, що зображення моделі координатного простору — не проста справа для учнів і вимагає чимало часу на уроці. Тому краще скористатися готовим зображенням на таблиці чи на екрані дисплея (Мал.2).



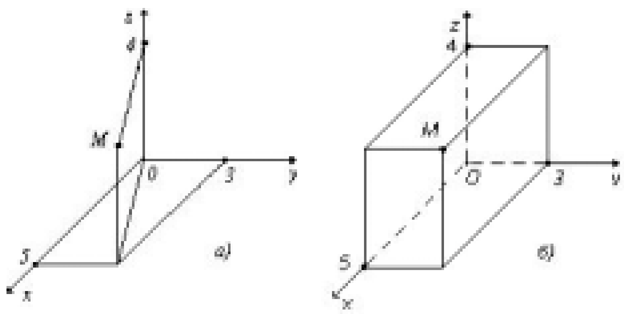
Мал. 2

При формуванні понять “абсциса”, «ордината», «апліката» доцільно використати персональний комп’ютер (GRAN3), за допомогою якого можна показати динаміку моделювання при визначенні координат точки *A* простору (Мал.3).



Мал.3

Після аналізу малюнків і введення означень кожної з координат точки *A,* корисно звернути увагу учнів на те, що абсциса точки *A* дорівнює за модулем відстані від точки *A* до площини y0z, ордината — до площини x0z, апліката — до площини *xOy.* Тут є аналогія з тим, що на координатній площині *xOy* абсциса точки *A* за модулем дорівнює відстані цієї точки до вісі z, а ордината — відстані до осі x. Після цього доцільно познайомити учнів з двома способами знаходження точки *A* простору за її даними координатами. Наприклад, побудувати точку *M(5;3,4).* Перший з них показано на Мал.4 а). Другий зводиться до побудови в координатному просторі прямокутного паралелепіпеда за трьома його вимірами 5,3,4 одиниць.



Мал.4

Завершити урок доцільно висновком: положення точки в координатному просторі визначається трьома числами, які називаються координатами точки в просторі, а також ще раз звернути увагу на те, як і з якими прийомами евристичної діяльності учні зштовхнулися на уроці.

Виведення формули відстані між двома точками простору і формул координат середини відрізка цілком можливо організувати у формі самостійної роботи групи сильніших учнів /перша формула/ і групи середніх учнів —другі формули. Але на попередньому уроці необхідно задати учням повторити з курсу планіметрії виведення вказаних формул.

Четверта ступінь – актуалізація ситуації інтеграції. Діяльність учня в цій ситуації характеризується проявом суб'єктивного, світоглядного відношення до вивчених фактів і способом їхнього пояснення, самостійним знаходженням проблем, парадоксів і суперечок, проявом евристичної позиції в навчальному процесі. Учень сам визначає свій ступінь готовності до цього етапу, етапу пошуку, складання і розв’язання евристичних задач різних видів, і або продовжує розв’язувати задачі, пропоновані вчителем чи іншими учнями, або починає сам шукати, складати і розв’язувати задачі, виявляючи тим самим функції самореалізації, рефлексії і пошуку евристичної діяльності школяра. При такому виді діяльності відбувається інтеграція раніше отриманих знань і умінь з тими, котрі відпрацьовуються в поточний момент, також відбувається автоповторення необхідних знань, раніш вивчених тем. За рахунок подібної пізнавальної самодіяльності здійснюється задоволення пізнавальної потреби, що зростає в міру свого задоволення. Якісний ріст інтелектуальної активності спостерігається вже на етапі пошуку фактів, що учень може використовувати при складанні власної задачі в позаурочний час. Прикладом ситуації інтеграції може служити розв’язання задачі на побудову паралелограма: побудувати паралелограм за стороною a та діагоналями d_1, d_2.

Учень, проводячи аналіз задачі, будує допоміжний трикутник за трьома сторонами $\left(a, \frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)$. Тобто під час побудови іде повторення властивостей паралелограма та згадується алгоритм побудови трикутника за трьома сторонами. Після розв'язання задачі учні разом з учителем роблять висновки. Будуючи паралелограм слід: знайти на малюнку, який зображено для аналізу, допоміжний трикутник або провести певні лінії, щоб його дістати; встановити кількість побудованих вершин чотирикутника, побудувавши допоміжний трикутник; знайти решту вершин чотирикутника, використавши умови, які вони задовольняють.

Після такої праці учневі додому можна задати скласти самостійно декілька задач на побудову паралелограма, ромба, прямокутника, квадрата так, щоб для їх розв'язання необхідно було скористатись властивостями та ознаками цих фігур.

Виявлена логіка дозволила нам конструювати ситуації розв'язання евристичної задачі як систему дидактичних умов для організації і управління евристичною діяльністю учнів, простір інтелектуально-творчого евристичного саморозвитку. Зазначений підхід допомагає індивідуалізувати процес навчання геометрії в масовій школі й у школах зі спеціалізованим вивченням математики і прогнозувати індивідуальну траєкторію саморозвитку кожної дитини.

1. Богоявленская Д.Б., Богоявленская М.Е. Творческая работа – просто устойчивое словосочетание // Педагогика. – 1998. – №3. – С. 36-43.
2. Горчакова І.А., Палант Ю.О. Евристика в математичних задачах (основна школа). – Донецьк: ТЕАН, 1999.
3. Крупич В.И. Структура и логика процесса обучения математике в средней школе. – М., 1985. – 117 с.
4. Махмутов М.И. Проблемное обучение. – М.: Педагогика, 1975. – 368 с.
5. Менчинская Н.А. Проблемы учения и развития // Проблемы общей, возрастной и педагогической психологии. – М., 1978.
6. Сериков В.В. Образование и личность. Теория и практика проектирования педагогических систем. – М.: Издательская корпорация "Логос", 1999. – 272 с.

7. Хуторской А.В. Развитие одарённости школьников. Методика продуктивного обучения. – М.: ВЛАДОС, 2000.

Резюме. В статье рассматриваются педагогические ситуации, создающие условия для организации и управления эвристической деятельностью учащихся на уроках геометрии в массовой школе, а также в школах с углубленным изучением математики.

Summary. The article tells about pedagogical situations that make conditions for organization and management of pupil's Heuristic activity at geometry lessons in ordinary schools and special mathematical schools.

Надійшла до друку 17.02.2002 р.

МЕТОДИКА УПРАВЛІННЯ САМОСТІЙНОЮ НАВЧАЛЬНО-ПІЗНАВАЛЬНОЮ ДІЯЛЬНІСТЮ УЧНІВ ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕОРЕТИЧНОГО МАТЕРІАЛУ

Л.І.Малихіна, асистент,
Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В.Винниченка

Організація самостійної навчально-пізнавальної діяльності учнів безпосередньо на уроці під прямим керівництвом вчителя повинна бути спрямована перш за все на формування опорних знань і навичок, які учень буде використовувати, працюючи самостійно без будь-якої допомоги.

Покажемо це на прикладі вивчення теми "Косинус, синус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника" (геометрія, 8 клас). Основна мета уроку: ввести поняття косинуса, синуса й тангенса гострого кута як відношення відповідних сторін прямокутного трикутника; довести теорему про косинус гострого кута трикутника. Як правило, більшість учнів засвоюють дану теорему формально: оволодівають лише формою знань (словом), не засвоюючи змісту, тобто не вникаючи в її суть. Для того, щоб до деякої міри усунути формалізм у знаннях учнів, бажано перед розглядом теореми провести лабораторно-практичну роботу із застосуванням обчислювальної техніки, й встановити дослідно, що косинус кута залежить тільки від його градусної міри й зовсім не залежить від розмірів трикутника та розміщення його на площині.

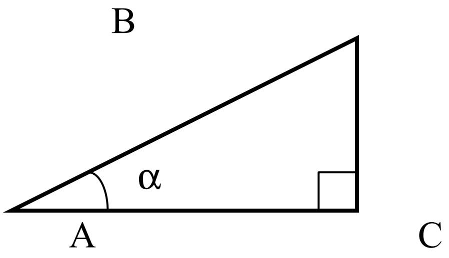


Рис. 1.

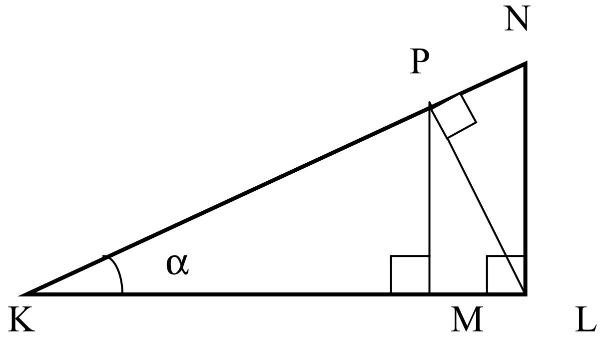


Рис. 2.

Тому на початку уроку з учнями пригадуємо, що у прямокутному трикутнику ABC (рис. 1) катет AC прилеглий до гострого кута α, BC – протилежний куту α, AB – гіпотенуза. Потім пропонуємо записати відношення прилеглого катета до гіпотенузи (AC/AB). Наголошуємо, що це відношення називається косинусом кута α і позначається cos α, тобто cos α = AC/AB. Зауважуємо, що кут α завжди гострий. Отже, *косинусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи*.

Щоб виробити в учнів уміння розпізнавати це поняття, даємо їм завдання: за рис. 2 записати косинус кута α різними способами. Один з учнів виконує дане завдання на прозорій плівці, яку під час перевірки й корекції виконання завдання висвітлюємо графопроектором. Учень, що виконував завдання на плівці, коментує його розв’язання.

Аналогічно вводимо поняття синуса й тангенса гострого кута прямокутного трикутника.

Потім пропонуємо учням самостійно побудувати кути AOB з градусними мірами 30°, 45°, 60°. На стороні OA цих кутів вибрати три точки A_1, A_2, A_3 й опустити з них перпендикуляри на сторону OB (рис.3).

Шляхом вимірювання відповідних сторін та за допомогою обчислювальної техніки заповнити таблицю 1.

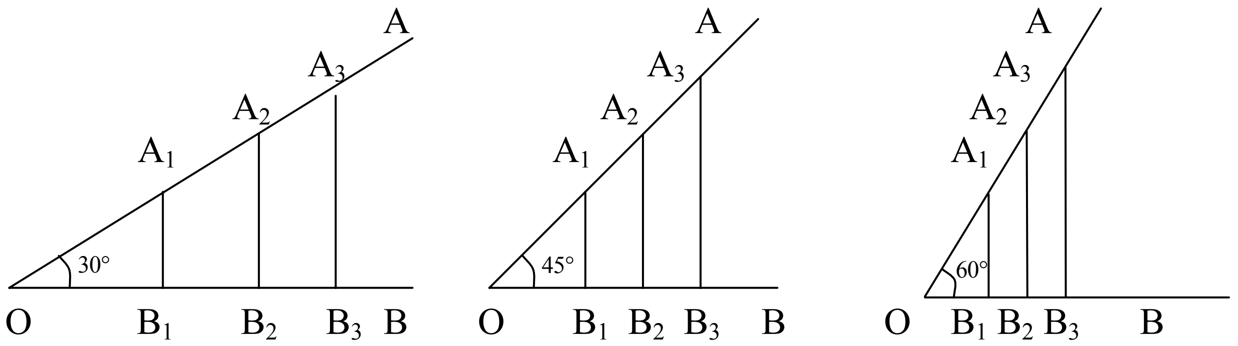


Рис. 3.

Одному з сильних учнів треба запропонувати виконати дане завдання на переносній дошці (як зразок для слабких учнів, хоча результати вимірювань будуть суттєво відрізнятися, але сам процес виконання завдання буде зрозумілим кожному), а іншому – виконати завдання на прозорій плівці, яку згодом висвітлити графопроектором для порівняння.

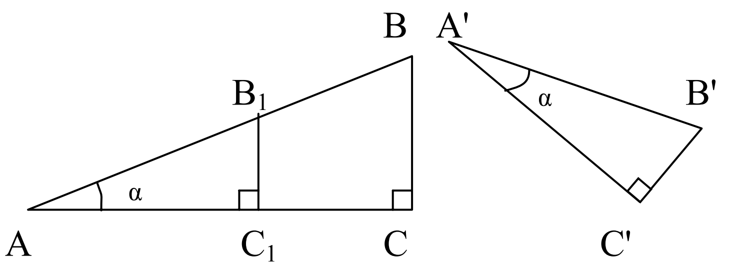
Таблиця 1

Результати вимірювань та обчислень учнів

α	OA_1	OB_1	$\frac{OB_1}{OA_1}$	OA_2	OB_2	$\frac{OB_2}{OA_2}$	OA_3	OB_3	$\frac{OB_3}{OA_3}$
30°			□			□			□
45°			△			△			△
60°			⯃			⯃			⯃

Після вимірювань та обчислень даємо таке завдання: порівняйте значення в прямокутниках (вони у всіх дітей будуть наближено рівними), а тепер в прямокутнику, трикутнику й восьмикутнику (різні), який висновок ми можемо зробити?

На основі цього учні роблять висновок, що зі зміною кута косинус змінюється, тобто косинус кута залежить від його градусної міри. Звертаємо увагу учнів на те, що незалежно від того, де була вибрана точка A_i (i = 1; 2; 3) на куті АОВ, відношення $\frac{OB_i}{OA_i}$ є величина стала. Це відношення змінюється тільки в залежності від зміни кута. Пропонуємо дітям самостійно сформулювати теорему після чого доводимо її перший раз у формі евристичної бесіди, повторивши перед доведенням теорему про пропорційні відрізки.



Дано: ΔABC, $\Delta A'B'C'$,

$\angle A = \angle A' = \alpha$,

$\angle C = \angle C' = 90°$.

Довести: $\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}$. (1)

Рис. 4.

Учитель. Відкладемо на промені AB відрізок $AB_1 = A'B'$, а на промені AC відрізок $AC_1 = A'C'$ (рис.4). Що ми можемо сказати про утворений трикутник AB_1C_1 і трикутник $A'B'C'$?

Учень. Ці трикутники рівні за I ознакою рівності трикутників, отже, $\Delta AB_1C_1 = \Delta A'B'C'$.

Учитель. Що ми можемо сказати про прямі BC і B_1C_1?

Учень. Ці прямі перпендикулярні до прямої AC, отже, вони паралельні між собою, тобто $BC \parallel B_1C_1$.

Учитель. Застосуємо теорему про пропорційні відрізки до нашого випадку, який висновок ми можемо зробити?

Учень. Паралельні прямі BC і B_1C_1, які перетинають сторони кута A, відтинають від сторін кута пропорційні відрізки, тобто $\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC}{AB}$ (2).

Учитель. Згадайте перший крок доведення та порівняйте рівність (2) з рівністю (1). Хто може зробити висновок?

Учень. За побудовою $AB_1 = A'B'$, $AC_1 = A'C'$, отже, $\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}$. Теорему доведено.

Потім даємо завдання: відтворити покроково доведення теореми з усіма необхідними обґрунтуваннями й скласти таблицю з двома входами. У лівому стовпчику записати всі твердження, з яких складається доведення, а в правому – обґрунтування кожного з них (табл. 2).

Таблиця 2

Доведення теореми про косинус гострого кута прямокутного трикутника

№п/п	**Твердження**	**Обґрунтування**

Причому сильним учням пропонуємо виконати завдання за готовим рисунком, на якому змінюємо букви (рис.5).

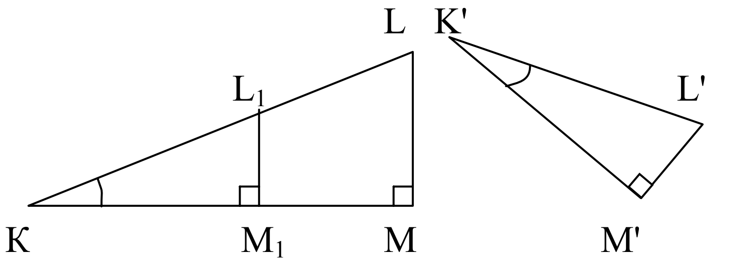


Рис. 5.

Дано: ΔKLM, $\Delta K'L'M'$,

$\angle K = \angle K' = \alpha$,

$\angle M = \angle M' = 90°$.

Довести: $\frac{K'M'}{K'L'} = \frac{KM}{KL}$. (1)

Середнім учням даємо додатково картку “Консультант”, на якій зображена таблиця 2 й частково заповнено лівий стовпчик (випущено тільки деякі логічні висновки), для слабких учнів – лівий стовпчик картки “Консультант” заповнено повністю. Одному з сильних учнів треба запропонувати виконати дане завдання на прозорій плівці, яку згодом висвітлити графопроектором для перевірки й корекції. Саме виконання таких видозмінених завдань дає можливість вчителю з'ясувати як добре учні зрозуміли той чи інший теоретичний матеріал (у даному випадку теорему).

Але розуміння теоретичного матеріалу ще не гарантує повного його засвоєння. З короткочасної пам'яті інформація, як правило, після неодноразового закріплення й повторення переходить у довготривалу пам'ять. Обсяг короткочасної пам'яті вибірково обмежений і зв'язаний з актуальною свідомістю учня. Довготривала пам'ять розрахована на довгочасне збереження інформації, вона зв'язана з індивідуальними розумовими здібностями й волею людини.

На відміну від короткочасної пам'яті, де не потрібно пригадувати (адже матеріал щойно сприйнятий), при довготривалій пам'яті пригадування потрібне завжди, бо пов'язані із сприйняттям відомості ще не знаходяться в актуальній свідомості.

Час перекодування інформації із короткочасної пам'яті в довготривалу в кожної людини суто індивідуальний. Труднощі виникають тоді, коли необхідно усвідомити й належним чином співвіднести, зв'язавши в уяві, нові відомості з тими, які вже зберігаються в довготривалій пам'яті.

Швидкому переведенню інформації з короткочасної й оперативної пам'яті в довготривалу сприяє використання опорних конспектів. Але шаталівська система використання опорних конспектів не завжди ефективна, оскільки основою опорних конспектів є уніфіковані графічні схеми, які не завжди зрозумілі тим, хто не присутній під час їх складання, і особливо тим, чия система мислення нестандартна. Ураховуючи, що рівень асоціативних зв'язків у кожного учня різний, то й використання опорних конспектів у процесі навчання повинно бути диференційованим. Практика показує, що теоретичний матеріал краще запам'ятовується якраз тоді, коли учень **самостійно** складає опорний конспект, адже в цьому випадку він відшукує **свої** *асоціативні зв'язки*, активізує **свою** *розумову діяльність*, що в свою чергу розвиває його здібності, сприяє швидкому переходу інформації в довготривалу пам'ять.

Оскільки довготривала пам'ять спирається на логічну структуру матеріалу, то проблема запам'ятовування складного матеріалу розв'язується за рахунок його включення (навіть штучного) в логічні зв'язки з іншими добре відомими уявленнями, поняттями й фактами. У цьому випадку діє така закономірність: чим більше нових асоціацій при першому знайомстві з новим поняттям виникає в учня, і чим більше часу ми зможемо приділити логічному осмисленню цих асоціацій, тим краще запам'ятовується саме поняття.

Тому наступним кроком засвоєння нового поняття може стати складання опорного сигналу. Скласти його можна на уроці під керівництвом учителя (рис.6), а додому запропонувати учням скласти свій опорний конспект або сигнал для самостійного вивчення теореми.

Для повторення вивченого матеріалу можна запропонувати учням дати відповіді на такі питання:

1. Дати означення косинуса (синуса, тангенса) гострого кута прямокутного трикутника.
2. Чи може бути кут тупим (прямим)?
3. Дано кути, градусна міра яких різна. Які за величиною косинуси цих кутів?
4. Чи залежить косинус кута від: а) розмірів трикутників, б) розміщення їх на площині? Відповідь поясніть.

Між іншим система занять для вивчення теоретичного матеріалу теми може й повинна включати не тільки уроки, а й ті форми занять, які дозволяють поглиблювати самостійну діяльність й більш ефективно нею керувати.

КОСИНУС КУТА

$$\mathrm{Cos}\,A = \frac{AC}{AB}$$

залежить

не залежить

від

розміщення трикутника

градусної міри кута

розмірів трикутника

У двох прямокутних трикутників з одним і тим самим гострим кутом косинуси цього кута рівні.

Рис. 6.

Класна самостійна навчально-пізнавальна діяльність учнів знаходить логічне продовження в домашній навчальній роботі, де учень, як правило, зустрічає певні труднощі й відчуває потребу в обговоренні питань, які виникають. Їх можна розглянути на консультації або в процесі співбесіди з учителем, який може проконтролювати процес виконання обов'язкових завдань, надати учневі допомогу для переборення труднощів тощо. Крім того, вчитель може дати нові вказівки, рекомендації з використання додаткової літератури для учнів, які зацікавилися тими чи іншими питаннями більш детальніше, або займаються самоосвітою.

Зростання ролі диференційованого управління самостійною навчально-пізнавальною діяльністю учнів можливе при вивченні факультативних курсів, роль і значення яких зростає, так як саме вони забезпечують поглиблене вивчення предмета й формування пізнавальних інтересів, стимулюють самоосвіту.

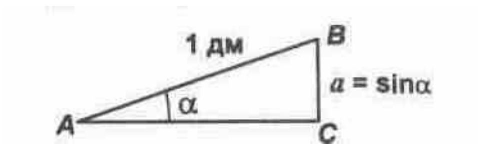
Наприклад, після вивчення у 9 класі з алгебри теми "Функції та їх графіки" корисно для сильних учнів та тих, хто цікавиться математикою, провести факультативне заняття, на якому більш глибоко розкрити зміст основних понять з теми, вивчити функції $y = [x]$, $y = \{x\}$, $y = | x |$, $y = \text{sign } x$ їх властивості й графіки.

Розпочати заняття слід з актуалізації опорних знань, після чого можна запропонувати учням самостійно (10-12 хв.) з'ясувати переваги й недоліки різних способів задання функцій. За результатами їх роботи після колективного обговорення потрібно скласти таблицю. Суть словесного способу задання функції корисно показати на прикладах, ввівши нові функції $y = [x]$, $y = \{x\}$, $y = | x |$, $y = \text{sign } x$. Тут же розглянути їх властивості й побудувати графіки.

Потім можна перейти до тренувальних вправ евристичного та творчого типу, серед яких корисно запропонувати вправи для закріплення понять косинус, синус, тангенс гострого кута прямокутного трикутника.

Це стане пропедевтикою вивчення тригонометричних функцій в старших класах. Наприклад:

1. Рис.7 ілюструє означення синуса гострого кута. Якщо AB = 1 дм, то величина BC показуватиме значення синуса кута α. Рис.8 ілюструє, як можна обчислити значення синуса даного кута.



$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$$

Рис. 7.

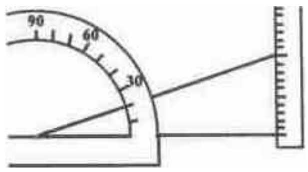


Рис. 8.

Заповніть таблицю:

Кут α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
sin α										

Які властивості функції синус на проміжку від 0° до 90° ви могли б спрогнозувати за таблицею?

2. Заповніть таблицю:

Кут α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
cos α										

а) користуючись транспортиром і лінійкою;

б) користуючись формулою $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$$cos\alpha = \frac{AC}{AB}$$

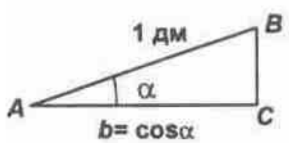


Рис. 9.

Спрогнозуйте за таблицею властивості функції косинус на проміжку від 0° до 90°. Порівняйте властивості косинуса й синуса для цього проміжку.

3. Розгляньте рис.10.

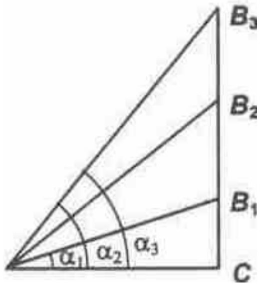


Рис. 10.

Яка функція встановлює співвідношення між величиною кута й відношенням катетів у прямокутному трикутнику? Чи для всіх кутів на проміжку від 0° до 90° визначена ця функція?

Як змінюється значення функції із збільшенням кута від 0° до 90°? Чи приймає функція на проміжку від 0° до 90° найменше (найбільше) значення? Якщо так, то яке й при якому значенні аргументу?

Диференційований характер управління самостійною навчально-пізнавальною діяльністю учнів на консультаціях, співбесідах та факультативах забезпечує закріплення знань та умінь і дає можливість ускладнювати завдання для наступних занять.

1. Бурда М.І. Вивчення геометрії в 7 класі: Метод. посібник / За ред. проф. І.Ф.Тесленка. – К.: Рад. школа, 1984. – 112 с.
2. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

Резюме: В статье рассмотрены некоторые методические приёмы управления самостоятельной учебно-познавательной деятельностью учащихся на примере изучения темы «Косинус, синус, тангенс острого угла прямоугольного треугольника» (геометрия, 8 класс).

Summary: The paper views ways of management of school students´ independent coqnitive learning activity illustrated by teaching the theme: Cosinus, sinus, tangens of acute angle of a rectangular triangle (geometry, Grade 8).

Надійшла до друку 10.02.2002 р.

ПОНЯТТЯ ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ, НЕПЕРЕРВНОЇ І РОЗРИВНОЇ ФУНКЦІЙ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

О.П.Томащук, кандидат педагогічних наук
Міжрегіональна Академія управління персоналом, м. Київ
О.Л.Лещинський, кандидат фізико-математичних наук
Промислово-економічний коледж Національного авіаційного університету, м. Київ

Поняття границі функції в точці. Важливе місце як у курсі математичного аналізу, так і у шкільному курсі математики посідає тема “Границя функції”. Без засвоєння поняття границі функції учні не зможуть зрозуміти зміст інших понять математичного аналізу, які вивчаються у школі – неперервність, похідна, інтеграл. Тому для вчителя математики важливо оволодіти ефективною методикою формування в учнів поняття границі функції, яка б відзначалася доступністю і водночас науковістю матеріалу, що викладається.

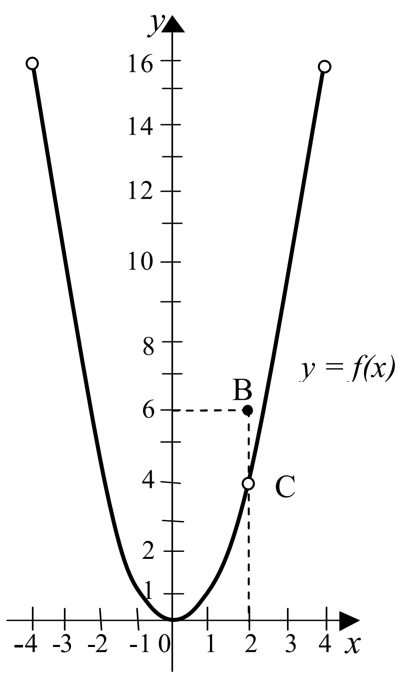
Як відомо, найбільш поширеними є два підходи до введення поняття границі функції. При першому підході вводиться означення границі функції за Коші, тобто на мові “ε-δ”, а при другому – означення за Гейне, тобто на мові послідовностей.

У шкільному підручнику “Алгебра і початки аналізу” [1], за яким нині навчаються більшість шкіл України, реалізується перший підхід. Набутий досвід викладання показує, що в учнів виникають значні труднощі у засвоєнні означення границі функції за Коші. Більшість учнів просто не підготовлені до того, щоб із розумінням сприймати це означення. У зв’язку з цим формування в учнів поняття границі доцільно розпочинати не з формування поняття границі функції, а з формування поняття границі послідовності, оскільки останнє у порівнянні з поняттям границі функції є простішим і засвоюється учнями краще. Це переконання підтверджено власним досвідом викладання. У статті [2] нами пропонується методика формування в учнів поняття границі послідовності.

Коли ж учні будуть знайомі з поняттям границі послідовності, то поняття границі функції, на нашу думку, краще буде ввести, сформулювавши означення за Гейне. Пояснюється це тим, що цей підхід до введення поняття границі функції має низку беззаперечних переваг у порівнянні із підходом, коли це поняття вводиться на основі означення за Коші. В подальших викладках ми вкажемо на ці переваги. Нижче пропонуємо своє бачення реалізації підходу, при якому вводиться означення поняття границі функції за Гейне.

Враховуючи те, що поняття границі функції засвоюється учнями досить важко, доцільно буде спочатку сформувати в учнів наочно-інтуїтивні уявлення про це поняття, використовуючи при цьому відповідні геометричні ілюстрації. Потім перейти до введення формального означення границі функції в точці.

Розпочати слід з вибору функції, визначеної на числовому проміжку, наприклад, $f(x)=\begin{cases} x^2, x\in(-4;4), x\neq 2, \\ 6, \quad x=2 \end{cases}$, і побудови її графіка (мал.1).



мал.1

Позначивши на малюнку кілька значень аргументу x таких, що досить близько наближаються до 2, але не дорівнюють двом, учні помічають, що при цьому відповідні значення функції $f(x)$ як завгодно близько наближаються до числа 4. Вчитель зазначає, що в такому випадку кажуть, що задана функція $f(x)$ в точці 2 має границею число 4 і символічно записують $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$.

Після цього учні самостійно або за допомогою вчителя зможуть зробити таке узагальнення: число A є границею функції f у точці x_0, якщо значення функції $f(x)$ як завгодно близько наближаються до A, коли значення аргументу x досить близькі до x_0, але $x \neq x_0$, тобто якщо $f(x) \approx A$, коли $x \approx x_0$, але $x \neq x_0$ Тут учитель повинен наголосити, що це твердження виражає *суть поняття границі функції в точці*. І на цю суть необхідно постійно звертати увагу учнів. На нашу думку, спираючись лише на суть поняття границі функції в точці, можна вивчати це поняття навіть у гуманітарних класах.

Далі слід вказати учням на необхідність записати виявлену властивість функції $f(x)$ математичною мовою і перейти до введення формального означення границі функції в точці. Зрозуміло, що це потрібно зробити також конкретно-індуктивним методом.

Для цього слід вибрати, наприклад, послідовність $(x_n)=\left(\dfrac{2n-1}{n}\right)$ і разом із учнями встановити, що ця послідовність володіє такими властивостями:

$$1)\ x_n \in (-4;4)\ \forall n \in N; \quad 2)\ x_n \neq 2\ \ \forall n \in N; \quad 3)\ \lim_{n\to\infty} x_n = 2.$$

Позначивши декілька точок послідовності (x_n) на осі абсцис та відповідні значення функції f в цих точках на осі ординат, учні помітять, що $f(x_n) \to 4$, коли $n \to \infty$. Висунуту учнями на основі візуальних даних гіпотезу потрібно підтвердити доведенням:

$$f(x_n)=x_n^2=\left(\frac{2n-1}{n}\right)^2=\frac{4n^2-4n+1}{n^2}=4-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\to 4 \text{ коли } n\to\infty,$$

тобто послідовність $(f(x_n))$ є збіжною до числа 4, коли (x_n) збігається до числа 2.

Розглянувши послідовність $(x_n)=\left(\dfrac{2n+(-1)^n}{n}\right)$, члени якої вже почергово справа і зліва наближаються до числа 2, учні також переконуються, що послідовність (x_n) володіє властивостями:

$$1)\ x_n \in (-4;4)\ \forall n \in N; \quad 2)\ x_n \neq 2\ \forall n \in N; \quad 3)\ \lim_{n\to\infty} x_n = 2$$

і

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+(-1)^n}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{4\cdot(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=4.$$

Розглянуті приклади дозволять учням висунути гіпотезу про те, що $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=4$ для довільної послідовності (x_n) такої, що:

$$1)\ x_n \in (-4;4)\ \forall n \in N; \quad 2)\ x_n \neq 2\ \forall n \in N; \quad 3)\ \lim_{n\to\infty} x_n = 2.$$

Використовуючи властивості границь послідовностей, справедливість цієї гіпотези необхідно підтвердити разом з учнями:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = 2\cdot 2 = 4.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=4$ для довільної послідовності (x_n), що володіє властивостями:

$$1)\ x_n \in (-4;4)\ \forall n \in N; \quad 2)\ x_n \neq 2\ \forall n \in N; \quad 3)\ \lim_{n\to\infty} x_n = 2.$$

Позначаючи число 4 (границю функції $f(x)$) як A, а число 2 як x_0, на основі розглянутого прикладу учні самостійно зможуть сформулювати **означення границі функції в точці за Гейне**: Нехай функція f визначена в деякому околі $O(x_0)$ точки x_0 за винятком, можливо, самої точки x_0. Тоді число A називають границею функції f у точці x_0 і записують $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ для довільної послідовності (x_n), що володіє властивостями: 1) $x_n \in O(x_0)\ \forall n \in N$; 2) $x_n \neq x_0\ \forall n \in N$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Ввівши поняття границі функції в точці, слід пояснити учням, що воно характеризує поводження функції в досить малому околі точки x_0, причому абсолютно не має значення, визначена чи ні функція f в самій точці x_0, а якщо і визначена, то яке саме значення вона набуває в цій точці (на існування границі функції f в точці x_0 і на значення цієї границі це не впливає). Щоб це пояснення було зрозумілим для учнів нами якраз і вибрана для прикладу саме функція $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in(-4;4),\ x\neq 2, \\ 6, & x=2. \end{cases}$

Слід зазначити, що означення границі функції в точці за Гейне має низку беззаперечних переваг у порівнянні із відповідним означенням за Коші. Насамперед, це його всеохоплюючий характер, який виражається в тому, що в означенні за Гейне x_0 і A можуть бути як скінченними, так і нескінченно віддаленими точками (означення границі функції за Коші формулюються по-різному для скінченних x_0 і A та нескінченних x_0 і A). Крім того, доведення основних властивостей границь функцій на основі означення за Гейне не викликають труднощів, оскільки спираються на відповідні властивості границь послідовностей (що не можна стверджувати про доведення цих властивостей, користуючись означенням за Коші).

Однак у класах з поглибленим вивченням математики після введення означення границі функції в точці за Гейне, використовуючи відповідні геометричні ілюстрації, доцільно буде також сформулювати для скінченних A і x_0 означення цього поняття за Коші та довести еквівалентність цих означень. Для нескінченних A і x_0 можна дати учням завдання самостійно сформулювати відповідні означення.

Після введення поняття границі функції в точці за Гейне слід розглянути приклади на його закріплення. Це можуть бути приклади такого типу.

Приклад 1. Довести, користуючись означенням границі функції за Гейне, що $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-2x+5\right)=8$.

Розв'язання. Розглянемо довільну послідовність (x_n), що володіє властивостями: 1) $x_n\neq 3$ $\forall n\in N$ і 2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=3$ (оскільки функція $f(x)=x^2-2x+5$ визначена на всій числовій прямій, а, отже, і в будь-якому околі точки 3, то умова $x_n\in O(3)$ $\forall n\in N$ не накладається). Враховуючи, що $f(x)=x^2-2x+5$, за властивостями границь послідовностей маємо

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}(x_n^2-2x_n+5)=\lim_{n\to\infty} x_n^2-2\cdot\lim_{n\to\infty} x_n+\lim_{n\to\infty} 5=3^2-2\cdot 3+5=8.$$

Отже, за означенням границі функції в точці $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-2x+5\right)=8$.

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x+5}$, користуючись означенням границі функції за Гейне.

Розв'язання. Нехай (x_n) – довільна послідовність, що володіє властивостями: 1) $x_n\neq -5$ $\forall n\in N$ і 2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-5$ (оскільки функція $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x+5}$ визначена на всій числовій прямій, окрім точки –5, а, отже, в будь-якому проколеному околі точки –5, то умова $x_n\in \mathrm{O}(-5)$ $\forall n\in N$ не накладається).

Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^2-25}{x_n+5}$. Оскільки $x_n\to -5$ $(n\to\infty)$, то чисельник і знаменник дробу $\dfrac{x_n^2-25}{x_n+5}$ прямують до нуля. Тому застосовувати теорему про границю частки послідовностей тут не можна. Але оскільки $x_n\neq -5$ $\forall n\in N$, то даний дріб можна скоротити на x_n+5 і знайти границю знайденого виразу:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-25}{x_n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n+5)\cdot(x_n-5)}{x_n+5}=\lim_{n\to\infty}(x_n-5)=-5-5=-10.$$

Отже, за означенням границі функції в точці $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x+5}=-10$.

Далі разом з учнями слід з'ясувати, коли певне число A не буде границею функції f в точці x_0: число A не є границею функції f в точці x_0, якщо існує принаймні одна послідовність (x_n), що володіє властивостями: 1) $x_n\in \mathrm{O}(x_0)$ $\forall n\in N$; 2) $x_n\neq x_0$ $\forall n\in N$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, але $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq A$ або $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ не існує (це є заперечення означення границі функції в точці за

Гейне). Сформульоване твердження допоможе учням також з'ясувати умови, які дозволяють довести неіснування границі функції f в точці x_0: функція f, визначена в деякому околі $O(x_0)$ точки x_0 за винятком, можливо, самої точки x_0, в цій точці не має границі, якщо існують принаймні дві такі послідовності (x_n) і (x_n^*), що: 1) $x_n \neq x_0$ і $x_n^* \neq x_0$ $\forall n \in N$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^* = x_0$, але $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^*)$. На закріплення матеріалу, пов'язаного з неіснуванням границі функції в точці, потрібно розглянути приклади.

Приклад 3. Довести, що функція $f(x) = \text{sign } x = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x < 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ 1, & \text{якщо } x > 0 \end{cases}$ в точці $x_0=0$ не має границі.

Розв'язання. Доцільно буде спочатку намалювати графік функції $f(x)=\text{sign } x$ і на малюнку показати, що дійсно ця функція в точці $x_0=0$ не має границі. А потім провести аналітичні викладки.

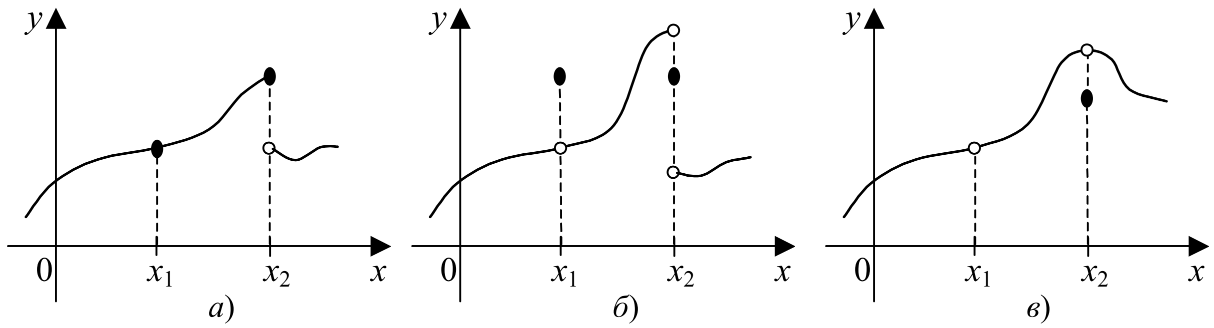
Розглянемо послідовність (x_n), що збігається до $x_0=0$: $x_n=\frac{1}{n}$, $n=1, 2, 3, \ldots$. Оскільки $x_n=\frac{1}{n}>0$ $\forall n \in N$, то $f(x_n)=1$ $\forall n \in N$ і тому $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

Розглянемо тепер іншу послідовність (x_n^*), що збігається до $x_0=0$: $x_n^*=-\frac{1}{n}$, $n=1, 2, 3, \ldots$. Оскільки $x_n^*=-\frac{1}{n}<0$ $\forall n \in N$, то $f(x_n^*)=-1$ $\forall n \in N$ і тому $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^*) = \lim\limits_{n\to\infty}(-1) = -1$.

Отже, для двох різних послідовностей (x_n) і (x_n^*), що збігаються до точки $x_0=0$, маємо $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^*)$. А це означає, що функція $f(x)=\text{sign } x$ в точці $x_0=0$ не має границі.

Можна також розглянути такі приклади на доведення неіснування границі функції f у точці x_0: 1) $f(x)=\frac{|x|}{x}$, $x_0=0$; 2) $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$, $x_0=0$; 3) $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$, $x_0=0$; 4) $f(x)=D(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x-\text{раціональне число,}\\ 0, & \text{якщо } x-\text{ірраціональне число}\end{cases}$ (функція Діріхле), x_0 – довільне ірраціональне число; 5) $f(x)=[x]$, x_0 – довільне ціле число; 6) $f(x)=\{x\}$, x_0 – довільне ціле число.

Корисними для учнів також будуть вправи на зразок такої: в яких точках функції, графіки яких зображені на малюнку 2, не мають границі і чому?



мал.2

Поняття неперервної і розривної функцій. Розгляд теми "Неперевність функції" в 11 класі доцільно розпочати із проведення мотивування, зазначивши учням, що більшість процесів і явищ оточуючої дійсності, в зв'язку з неперервним плином часу, впродовж якого вони відбуваються, одержують кількісний опис за допомогою неперервних функцій. Тому успішне вивчення таких процесів і явищ неможливе без глибокого розуміння змісту поняття неперервної функції, знання основних властивостей неперервних функцій.

При введенні поняття неперервної функції можна спиратися на інтуїтивні уявлення учнів про неперервну функцію як таку, графіком якої є суцільна лінія. В зв'язку з цим, розглянувши ту ж саму функцію, що і при введенні поняття границі функції: $f(x)=\begin{cases}x^2, x\in(-4;4), x\neq 2\\ 6, x=2.\end{cases}$ і побудувавши її графік (мал.1), можна поставити учням запитання: які перетворення необхідно зробити з графіком цієї функції, щоб одержати суцільну (неперервну) лінію. Учні будуть одностайними у відповідях: перенести точку *B* в точку *C*, тобто покласти $f(2)=4$, а не $f(2)=6$. Згадавши, що для даної функції $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$, вони з легкістю сформулюють таке означення:

Означення 1 (неперервної функції на мові границі функції). Функція *f*, визначена в околі точки x_0, називається неперервною в цій точці, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

На основі цього означення зразу ж слід встановити умови, одночасне виконання яких забезпечує неперервність функції *f* в точці x_0:

1) функція *f* має бути визначена в околі точки x_0 (в тому числі і в самій точці x_0);

2) в точці x_0 вона повинна мати границю;

3) ця границя повинна дорівнювати значенню функції *f* в точці x_0, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Ланцюжок рівносильних переходів:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} f(x_0) \quad\Leftrightarrow$$

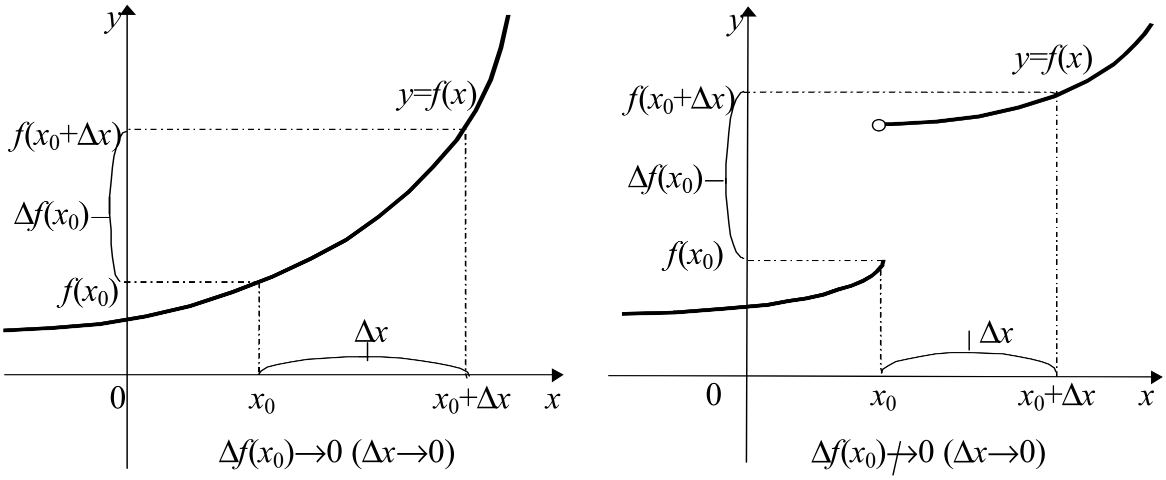
$$\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to x_0}\big(f(x)-f(x_0)\big)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$$

дозволить сформулювати ще одне означення неперервної функції – на мові приростів.

Означення 2 (неперервної функції на мові приростів). Функція *f*, визначена в околі точки x_0, називається неперервною в цій точці, якщо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$.

Спираючись на це означення, необхідно розкрити учням суть поняття неперервної функції: функція *f* є неперервною в точці x_0, якщо при малих зміщеннях від цієї точки відповідні значення функції змінюються також мало.

Для розтлумачення учням суті поняття неперервної функції в точці потрібно використати відповідні геометричні ілюстрації. При цьому доцільно, поряд із графіком функції, неперервної в точці x_0, розглянути графік функції, для якої властивий розрив у цій точці (мал.3).



мал.3

Далі на декількох прикладах слід показати учням, як використовувати обидва означення для доведення неперервності функції в точці.

Потім необхідно сформулювати означення функції, неперервної на проміжку, і розглянути приклади на дослідження неперервності функції на проміжку.

Ввівши поняття функції, розривної в точці, та точки розриву, необхідно зауважити, що в точці x_0 функція f матиме розрив, якщо виконується хоча б одна з умов: 1) функція f не визначена в точці x_0, хоч в усіх інших точках деякого околу точки x_0 вона визначена; 2) у точці x_0 не існує границя функції f; 3) границя функції f в точці x_0 існує, але не дорівнює значенню цієї функції в точці x_0, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. При цьому для глибшого засвоєння студентами поняття розривної в точці функції доцільно буде навести приклади функцій, яким властиве виконання деяких із вказаних умов. Наприклад, функція $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$ розривна в точці x_0=5, оскільки вона в цій точці не визначена. Функція $f(x)$=sign x розривна в точці x_0=0, оскільки в цій точці не існує границя цієї функції. Функція $f(x)=\begin{cases} x^2, x \neq 2, \\ 6, \quad x = 2 \end{cases}$ хоча і має границю в точці $x_0=2$, але ця границя не дорівнює значенню функції f в точці $x_0=2$ ($\lim\limits_{x \to 2} f(x)=4$, $f(x_0)=f(2)=6$, тобто $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$). Тому ця функція розривна в точці $x_0=2$. Розглянуті приклади слід супроводити відповідними графічними ілюстраціями.

Для глибшого засвоєння поняття розривної функції можна запропонувати учням розв'язати таку вправу: в яких точках функції, графіки яких зображені на малюнку 2, є розривними і чому?

1. Алгебра і початки аналізу: Проб. підруч. для 10-11 кл. серед. шк. / М.І.Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук. – К.: Зодіак-ЕКО, 1995. – 608 с.
2. Томащук О.П. Поняття границі послідовності в шкільному курсі математики // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнар. зб. наук. робіт. Вип. 16 – Донецьк, 2001. – С.159-167.

Резюме. В статье изложена методика формирования у учащихся общеобразовательных учебных заведений понятий предела функции, непрерывной и разрывной функций.

Summary. The article deals with methods of shaping general education establishments students' concepts about function's limit, continual and discrete functions.

Надійшла до друку 18.04.2002 р.

ПІДГОТОВКА МАЙБУТНЬОГО ВЧИТЕЛЯ ДО ПРОВЕДЕННЯ КОНТРОЛЮ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ УЧНІВ

В.В.Мацюк, аспірант,
Бердянський державний педагогічний інститут ім. П.Д. Осипенко

На сучасному етапі свого розвитку середня загальноосвітня школа є прогностичною ланкою перебудови методичної системи вивчення фундаментальних дисциплін у педагогічному вузі. Вона, зокрема, орієнтує на вивчення студентами теорії та практики обґрунтованого підходу до обліку і контролю результатів навчальної діяльності. При цьому важливо з'ясувати, з яких позицій треба підходити до організації цієї важливої ланки навчального процесу. На наш погляд, контроль у вищому педагогічному навчальному закладі треба вважати не тільки засобом визначення рівня знань та навичок студентів; слід додатково ставити мету підготовки до проведення контролю у наступній роботі у середньому закладі освіти і визначення свого місця у системі шкільного навчання у майбутньому, що надзвичайно важливо з погляду самовизначення особистості майбутнього вчителя [1].

При викладанні курсу "Алгебра та теорія чисел" у Бердянському державному педагогічному інституті ім. П.Д. Осипенко ми проводимо попередній, поточний та підсумковий контроль, звертаючи увагу студентів на методику проведення контролю, особливості різних форм та методів контролюючих заходів.

Перший етап контролю відбувається перед вивченням кожного розділу курсу на підготовчих заняттях у години індивідуальної роботи, що дозволяє викладачеві визначити рівень підготовленості студентів до успішного навчання, проводити диференційовану роботу з вивчення розділу, а також навчати студентів проведенню попереднього контролю. Попередній контроль ми проводимо у формі усного фронтального опитування, різнорівневих математичних диктантів, індивідуалізованої роботи за картками та контролюючими програмами, а також за дидактичними тестами закритого та відкритого типів завдань, завданнями на відповідність та встановлення правильної послідовності. Наприклад, перед вивченням окремих розділів курсу „Алгебра і теорія чисел" студентам пропонуємо [2]:

<u>Тестове завдання відкритого типу</u>

1. Лінійним рівнянням з n невідомими називається ....
2. Розв'язком лінійного рівняння з n невідомими називається ....

3. Розв'язати лінійне рівняння з n невідомими це означає ....
4. Системою m лінійних рівнянь з n невідомими називається ....
5. Однорідним лінійним рівнянням з n невідомими називається ....
6. Системою однорідних лінійних рівнянь називається ....
7. Розв'язком системи лінійних рівнянь називається ....
8. Система лінійних рівнянь, яка має хоч один розв'язок, називається.........
9. Система лінійних рівнянь, яка не має розв'язків, називається ....
10. Сумісна система рівнянь, яка має один розв'язок, називається.................
11. Сумісна система рівнянь, яка має безліч розв'язків, називається ....
12. Метод Гаусса полягає у ....
13. Якщо система лінійних рівнянь сумісна і у розв'язуючій частині вивідної системи, одержаної методом Гаусса, число рівнянь менше від числа невідомих, – ....; якщо ж це число рівнянь дорівнює числу невідомих, – ....
14. Система лінійних однорідних рівнянь завжди ....
15. Якщо в системі m однорідних рівнянь з n невідомими число рівнянь m менше за число невідомих n, то система ....
16. (Критерій сумісності Кронекера-Капеллі). Для сумісності системи лінійних рівнянь необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи і ......
17. (Критерій визначеності). Якщо система лінійних рівнянь з n невідомими сумісна і її ранг дорівнює r, то при ..... система визначена, при ...... – невизначена.
18. Якщо вектор $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ є розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь, то вектор $(c\alpha_1, c\alpha_2, ..., c\alpha_n)$ ....
19. Якщо вектори $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ і $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ є розв'язками системи лінійних однорідних рівнянь, то ....
20. Якщо система лінійних однорідних рівнянь має хоч один нетривіальний розв'язок, то вона ....
21. Якщо $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ – частиний розв'язок неоднорідної системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

а $\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ – частиний розв'язок зведеної системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

то сума цих векторів ....

22.Якщо $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ і $\overline{\alpha'} = (\alpha_1', \alpha_2', ..., \alpha_n')$ довільні частинні розв'язки неоднорідної системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

то їх різниця є ....

23.Будь-який розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь дорівнює ...

<u>Тестове завдання на відповідність</u>

Встановити тип структури

1. Півгрупа	A. $\langle Z, +\rangle$;
	B. $\langle Z, *\rangle$;
2. Група	C. $\langle N, +\rangle$;
	D. $\langle N, *\rangle$;
	E. $\langle Q, +\rangle$;
	F. $\langle Q^*, *\rangle$;
3. Півкільце	G. $\langle R\_, +\rangle$;
	H. $\langle R, *\rangle$;
	I. $\langle C, +\rangle$;
	J. $\langle C^*, *\rangle$;

4. Кільце

5. Тіло

6. Поле

K. $\langle Z\_, +\rangle$;
L. $\langle Q_+, *\rangle$;
M. $\langle\{1, -1\}, +\rangle$;
N. $\langle\{1, -1\}, *\rangle$;
O. $\langle\{1, -1, i, -i\}, *\rangle$;
P. $\langle Z, +, *\rangle$;
Q. $\langle N, +, *\rangle$;
R. $\langle Q, +, *\rangle$;
S. $\langle R, +, *\rangle$;
T. $\langle C, +, *\rangle$;
U. $\langle Z[i], +, *\rangle$;
V. $\langle\{0\}, +, *\rangle$.

<u>Тестове завдання на встановлення правильної послідовності дій</u>

Указати алгоритм перевірки істинності твердження: „Алгебраїчна структура $\langle P, \oplus, \otimes\rangle$ – поле”.

<u>Тестові завдання закритого типу</u>

1. Указати стовпчик, який відповідає кон'юнкції двох висловлень А та В:

p(A)	**p(B)**	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0

2. Указати стовпчик, який відповідає диз’юнкції двох висловлень А та В:

p(A)	**p(B)**	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0

3. Указати стовпчик, який відповідає імплікації двох висловлень А та В:

p(A)	**p(B)**	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0

4. Указати стовпчик, який відповідає еквіваленції двох висловлень A та B:

p(A)	**p(B)**	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0

5. Значення істинності складного висловлення залежить від:
   1) істинності простих висловлень, що входять до нього;
   2) істинності простих висловлень, що входять до нього та властивостей логічних операцій;
   3) властивостей логічних операцій.
6. Висловлення A та B називаються рівносильними, якщо
   1) $p(A)=p(B)$;
   2) $p(A)\neq p(B)$;
   3) $p(A)=p(\overline{B})$;

При поточному контролі ми використовуємо різнорівневі математичні диктанти, математичні твори, самостійні роботи репродуктивного, творчого характеру для студентів із різними навчальними можливостями, які орієнтовані на роботу в різних типах середніх шкіл.

По завершенню вивчення кожного розділу курсу ми проводимо тематичний контроль у вигляді взаємоконтролю, теоретичного і практичного тестування, колоквіуму. Розглянемо, наприклад, таку форму опитування, як <u>взаємоконтроль</u>. Викладачі підбирають питання взаємоконтролю так, щоб вони мали вигляд системи, яка охоплює основний теоретичний матеріал, дає можливість закріпити його основні моменти, є засобом, який допомагає засвоїти наступний матеріал. Наприклад, при вивченні теорії подільності в кільці цілих чисел ми пропонуємо такі запитання:

1. Що означає висловлення “ціле число a ділиться на ціле число b”? Чи вірне воно, якщо a=275, b=1? А якщо a=1, b=275? Сформулюйте заперечення цього висловлення.
2. Дайте характеристику множині цілих чисел b таких, що $a \vdots b$, де a фіксоване число.
3. Яким умовам задовольняє остача від ділення a на b? Чи може бути при діленні на – 142 остача 187? А остача – 45?
4. Яке число називають найбільшим спільним дільником двох чисел?
5. Використовуючи означення, встановити, чому дорівнює найбільший спільний дільник чисел 15 і 0.
6. Як знайти найбільший спільний дільник декількох чисел?
7. Чому процес послідовного ділення в алгоритмі Евкліда є скінченим?
8. Що розуміють, коли говорять, що найбільший спільний дільник двох чисел є їх лінійною комбінацією?
9. Які числа називаються взаємно простими?
10. Вкажіть різницю між поняттями “взаємно прості числа” і “попарно взаємно прості числа”, яке з цих понять є висновком іншого? У якому випадку ці поняття співпадають?
11. Яке число називається спільним кратним двох чисел?
12. Яке число називається найменшим спільним кратним декількох чисел?
13. Які пари простих чисел називаються близнюками? У чому полягає проблема чисел-близнюків?
14. Сформулюйте асимптотичний закон розподілу простих чисел.
15. Сформулюйте теорему Лежандра.
16. Сформулюйте теорему Гаусса.
17. Сформулюйте теорему Бертрана.
18. У чому полягає схожість і різниця між непозиційними і позиційними системами числення?

19. Подайте теоретичне обґрунтування переходу від однієї системи числення до іншої.
20. Яким чином пов'язані алгоритм Евкліда і ланцюгові дроби?
21. У якому випадку розклад раціонального числа у скінчений ланцюговий дріб є єдиним?
22. Яким числом є скінчений ланцюговий дріб?
23. Які дроби називають підхідними до ланцюгового дробу?
24. За яким законом складається підхідний дріб?
25. Яку характерну особливість має знаменник підхідного дробу?
26. Який зв'язок між чисельниками і знаменниками двох сусідніх підхідних дробів?
27. Чому будь-який підхідний дріб з парним номером менше будь-якого підхідного дробу з непарним номером?
28. Які наближення до числа a/b дають підхідні дроби з парними номерами?

Після того, як питання взаємоконтролю розподілено, викладач пояснює, як треба на них відповідати (обмежитись формулюванням теорем, формулами і прикладами на використання того чи іншого теоретичного положення без строгого доведення). На практичному занятті з взаємоконтролю викладач пропонує вийти до дошки студентам, які готові складати взаємоконтроль (одночасно опитуються 6-12 студентів). Кожний студент в руках має запитання взаємоконтролю, або вони з'являються на екрані. Перший студент відповідає на перше питання, решта по черзі відповідають на друге, третє, … Коли будуть одержані відповіді на всі запитання, студенти починають відповідати на перше, … поки викладач їх не зупинить. У середньому кожний студент відповідає на 4-6 питань. Порядок запитань складає загальну картину всього раніше пройденого матеріалу і сприяє їх повторенню всією групою студентів решта студентів уважно слухають відповіді, тому що їм теж доведеться відповідати. Якщо один зі студентів, що знаходяться біля дошки, не зміг відповісти на питання, на нього відповідає інший студент, якого викладач викликає. В кінці викладач оголошує оцінки і нагадує студентам, що такий вид п'ятихвилинної перевірки знань вельми ефективний при повторенні матеріалу з учнями.

Ефективним методом проведення тематичного контролю є колоквіуми, на які виносяться основні питання теорії. Важливість колоквіумів, на нашу думку, не тільки у тому, що вони дозволяють контролювати засвоєння студентами теоретичного матеріалу не у вигляді набору окремих фактів, а як цілісну систему. Їх особливе значення у тому, що вони дають можливість організувати порівняно тривалу самостійну роботу над загальними, крізними ідеями навчального курсу. Програма колоквіуму повідомляється студентам за три тижні до його проведення (при цьому багато матеріалу в ньому ще не вивчалося). Наприклад, у першому семестрі при вивченні алгебраїчних систем програма колоквіуму може бути такою:

Основні поняття і факти

1. Алгебраїчні операції. Асоціативність, комутативність та дистрибутивність бінарних алгебраїчних операцій.
2. Нейтральний елемент, симетричні елементи. Обернені операції.
3. Алгебраїчні структури. Алгебри.
4. Півгрупа. Приклади півгруп. Означення групи. Приклади груп. Елементарні відомості про групи. Підгрупа.
5. Півкільце: означення та приклади. Означення кільця й приклади кілець. Елементарні відомості про кільця. Підкільце. Дільники нуля в кільці, область цілісності.
6. Тіло: означення та приклади.
7. Означення полів. Приклади полів. Деякі властивості полів. Характеристика поля. Підполе, розширення поля.

8. Поняття ізоморфізму алгебраїчних структур. Ізоморфізм груп. Ізоморфізм кілець і полів. Упорядковані кільця і поля.
9. Аксіоматичне означення поля дійсних чисел. Наслідки з аксіом поля й упорядкованості поля. Наслідки з аксіоми точної верхньої межі.
10. Побудова поля комплексних чисел. Властивості комплексних чисел.
11. Геометричне зображення комплексних чисел. Тригонометрична форма комплексного числа. Геометрична інтерпретація операцій над комплексними числами.
12. Формула Муавра. Добування квадратного кореня з комплексного числа. Добування кореня n-го степеня з комплексного числа. Корені з одиниці.

Основні теореми

1. Довести теорему про необхідну і достатню умову оборотності асоціативної операції.
2. Довести властивості групи.
3. Довести, що будь-яка підгрупа групи є групою.
4. Довести властивості кільця як адитивної абелевої групи.
5. Довести властивості різниці.
6. Довести властивості кільця які випливають з асоціативності операції множення.
7. Довести властивості кільця які випливають з дистрибутивності множення відносно додавання.
8. Довести властивості кільця.
9. Довести, що будь-яке підкільце кільця є кільцем.
10. Довести формулу бінома Ньютона.
11. Довести властивості поля як комутативного кільця.
12. Довести властивості поля як мультиплікативної абелевої групи.
13. Довести властивості частки довільного поля $\langle P, \oplus, \otimes \rangle$.
14. Довести, що у будь-якому полі e≠θ та будь-яке поле є областю цілісності.

15. Довести властивості степеня з цілими показниками для довільного поля $\langle P, \oplus, \otimes \rangle$.
16. Довести властивості відношення гомоморфізму між алгебрами.
17. Довести властивості відношення гомоморфізму груп.
18. Довести властивості відношення гомоморфізму кілець (полів).
19. Довести властивості поля характеристики нуль і характеристики р.
20. Довести властивості спряжених комплексних чисел.
21. Довести, що поле комплексних чисел не може бути упорядковане.
22. Довести, що модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку модулів співмножників, а аргумент - сумі аргументів.
23. Довести, що модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів, а аргумент - різниці аргументів.
24. Довести формулу Муавра.
25. Вивести формулу для добування квадратного кореня з комплексного числа.
26. Довести, що множина всіх коренів n-го степеня з одиниці є абелева мультиплікативна група.

Основні вміння та навички

1. Визначити тип алгебраїчної структури (півгрупа, група, півкільце, кільце, тіло, поле).
2. Виконати дії з комплексними числами заданими в алгебраїчній формі (додавання, віднімання, множення, ділення, добування квадратного кореня).
3. Виконати дії з комплексними числами заданими в тригонометричній формі (множення, ділення, піднесення до будь-якого цілого степеня, добування кореня n-го степеня (n – будь-яке натуральне число)).

Студенти різних типологічних груп мають можливість підготуватись до колоквіуму з різним рівнем повноти, відповідно індивідуальним кінцевим цілям навчання. Підготовка до колоквіуму формує у студентів навички самоконтролю і адекватної самооцінки своєї математичної підготовки. Таким чином, колоквіум допомагає студентам визначити своє місце у майбутній педагогічній діяльності.

Наприкінці семестру ми проводимо підсумковий контроль у формі заліку. На залік виносимо значний за обсягом матеріал, що охоплює пов'язаних між собою декілька тем. Мета заліку – досягнення студентами вільного володіння різними методами, вивченими у курсі, закріплення міжпредметних зв'язків даного предмету. Оцінюючи обсяг матеріалу, який виноситься на залік, не можна формально рахувати "кількість теорем", гадаючи, що більша кількість питань автоматично посилює складність заліку. Якщо ми бажаємо домогтися вільного, творчого відношення до матеріалу, знання багатьох фактів потрібне незалежно від того, залучимо ми їх до програми чи ні.

Заліки ми проводимо з використанням дидактичних тестів на конструювання відповіді у формі числового коду з використанням чи без використання комп'ютера. Наведемо приклад декількох завдань із залікових тестів першого семестру.

1 Сформулюйте індуктивне означення формули логіки висловлень

1) істина та хибність – формули;
2) інших формул у логіці висловлень немає;
3) просте висловлення – формула;
4) $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \vee F_2$ – формули;
5) $F_1 \Rightarrow F_2$, $F_1 \Leftrightarrow F_2$ – формули;
6) якщо F_1, F_2 – формули, то $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \Rightarrow F_2$, $F_1 \Leftrightarrow F_2$ – формули;
7) якщо F_1, F_2 – формули, то $\rceil F_1$, $\rceil F_2$, $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \Rightarrow F_2$, $F_1 \Leftrightarrow F_2$ – формули.

2 Які закони в алгебрі множин об'єднують у групу "закони мислення"

1) $A \cap A = A$
2) $A \cap \varnothing = \varnothing$
3) $A = A$

4) $A \cup A = A$

5) $A \cap \rceil A = \varnothing$

6) $A \cup U = U$

7) $A \cup \rceil A = U$

8) $\rceil A \cup \rceil A = \rceil A$

3 Бінарне відношення може бути представлене:

1) множиною пар;
2) графом;
3) орієнтованими ребрами;
4) точками;
5) висловленням;
6) предикатом;
7) графіком;
8) характеристичною властивістю.

Систематичний, раніше обговорений зі студентами контроль, дисциплінує їх, виховує відповідальність до навчання, сприяє реальній самооцінці своєї підготовки і адекватного їй визначення свого місця у майбутній педагогічній діяльності, а також сприяє підготовці студентів до проведення попереднього, поточного та тематичного контролю у середніх закладах освіти в майбутньому.

1. Шавальова В.І. Наступність у побудові методичних систем навчання математики в школі та педагогічному вузі: Автореф. дис. канд. пед. наук.: 13.00.02/ НПУ ім. М.П. Драгоманова/ К., 1997. – 24 с.
2. Мацюк В.В. Збірник рівневих контрольних робіт з курсу “Алгебра і теорія чисел: Елементи теорії множин і логіки. Алгебраїчні структури. Основні числові системи.” для студентів І курсу фізико-математичних факультетів педінститутів (денна форма навчання). – Бердянськ: БДПІ, 2001. – 96 с.

Резюме. В статье приводятся тестовые задания открытого, закрытого типов, на соответствие, на установление правильной последовательности действий, на конструирование ответа в виде числового кода, а также вопросы для проведения взаимоконтроля, коллоквиума, которые используются в процессе преподавании курса «Алгебра и теория чисел» в Бердянском государственном педагогическом институте им. П.Д. Осипенко.

Summary. The article represents test's task of closed and opened types, which have purpose to determine the correct actions consequence of answers construction, in the form of numeric code. The questions for realization of the mutual control and colloquium are presented, which are used in teaching of the course "Algebra and numeric theory" in Berdyansk teaching training institute.

Надійшла до друку 10.01.2002 р.

ГРАФІЧНЕ ПЛАНУВАННЯ ЯК ЗАСІБ ВНУТРІШКІЛЬНОГО КОНТРОЛЮ ЗА ВИКЛАДАННЯМ МАТЕМАТИКИ

Н.С.Вагіна, старший викладач,
Бердянський державний педагогічний інститут ім. П.Д. Осипенко

На сучасному етапі реформування системи освіти особливо актуальним є забезпечення належного рівня математичної підготовки підростаючого покоління [1, с.3].

Саме математика надає широкі можливості для інтелектуального розвитку особистості і тому дуже важливо вести пошук найбільш ефективних форм, методів організації процесу навчання математики, вміло спрямовувати його на досягнення всіма учнями обов'язкового рівня, створення умов для опанування учнями провідних ліній курсу [7, с.145; 1, с.8].

Управлінська діяльність керівників загальноосвітніх навчальних закладів повинна забезпечувати на кожному її етапі від планування до корекції органічне поєднання вимог до кожного вчителя з стимулюванням процесу вчительської творчості. При цьому слід пам'ятати, що маючи право на вільний вибір форм і методів, вчитель може обирати їх за принципами зручності, доцільності, власного розуміння і обізнаності, конкретних умов класу, в якому він працює. Тобто, стоячи перед вибором, він повинен його мати. Саме тому, однією із задач шкільного керівництва з підвищення ефективності навчання математики є ознайомлення вчителів з різними формами і цільовими підходами до структури та змісту тематичного планування, формами і методами викладання, проведення якісного контролю навчальних досягнень учнів, аналізу, корекції і поглиблення знань. І тільки той педагог, який добре оволодів всім різномаїттям педагогічного арсеналу, може стати справжнім майстром вчительської справи.

Як показує багаторічний досвід проведення внутрішкільного контролю за викладанням математики на рівні директора школи, більшість вчителів-математиків, працюючи сумлінно і наполегливо, у притаманному кожному вчителеві стилі, досягаючи певних результатів, не уникає, по суті, однакових недоліків у своїй роботі. І перш за все, це може бути віднесено до проблеми поточного планування, починаючи з тематичного.

З початку, звичайно важко уявити собі цю проблему в усій її повноті. Однак, спробуємо розібратися ретельніше. Перед початком нового семестру відбувається обговорення і затвердження календарного планування, розподіл годин шкільного компоненту розвиваючого і коригуючого характеру. Далі вчитель приступає до складання тематичних планів [4, с. 104]. Ніби складнощів й немає. Плани мають схожі форми, враховують методичні рекомендації провідних спеціалістів [2, 3, 4], відображають рівні кваліфікації вчителів (звичайно у більш досвідчених вони несуть особливі ознаки поширеності і обґрунтування, у менш – в кращому випадку точнісінько копіюють рекомендовані), але при проведенні внутрішкільного контролю, в тому числі підсумкового – з виконання програм – виявляються відхилення від запланованого з різних причин (перенесення занять внаслідок карантину, хвороби вчителя, продовження терміну вивчення більш складної теми інтенсифікація або самостійне опрацювання учнями завдань окремих уроків, наприклад). Природно, що враховуючи обставини, які складаються в конкретному класі, вчитель може вносити до календарного плану певні зміни [4, с.103]. Все це не повинно викликати занепокоєння, якщо суттєво не впливає на кінцевий результат, але одразу стає проблемою, якщо дані об’єктивного контролю – контрольних зрізів – виявляють серйозні недоліки у підготовці учнів. Саме результати опитування учнів, насамперед, свідчать про прорахунки в плануванні, невикористані можливості, неправильні підходи у визначенні місця і змісту поточного контролю засвоєння теми, своєчасного проведення корекції, закріплення навичок і переводу їх в уміння, непродуманість дій вчителя щодо скорочення наступної теми замість використання годин резервного часу. Зрозуміло, що всі радикальні зміни в затвердженому плані підлягають узгодженню, але не можна опікати кожний крок вчителя, він сам повинен робити самоконтроль, обґрунтовуючи реалізацію плану. Звичайно, існує багато чинників, що впливають на якість засвоєння програмного матеріалу, але є потреба і необхідність ще раз підкреслити, що форма, структура системи уроків і зміст тематичного планування, врахування можливостей навчального часу повинні бути запорукою ефективної організації всього процесу навчання математики. Тому вимоги до доцільності, прозорості, можливостей проведення корекції планування не є зайвими. Також слід акцентувати увагу вчителів ще на одному з важливих етапів планування, а саме – на визначенні системи уроків. Причому, якщо структурно цю систему представити у вигляді блоків діяльності вчителя і учнів, то блоки здобуття нових знань, закріплення, контролю є основними, але не рівнозначними за обсягом часу. В них існує поточний контроль, корекція, систематизація, узагальнення і поглиблення знань і перед тим, як планувати треба визначитись саме з структурою плану, тобто розподілом годин безпосередньо по блокам.

Вивчення кожної теми повинно завершуватись підсумковим тематичним оцінюванням навчальних досягнень учнів з теми. Воно включає, по-перше, кілька занять, на яких вивчений матеріал повторюється, систематизується та узагальнюється, по-друге, тематичну контрольну роботу. Форми її проведення визначаються відповідно до рекомендацій Міністерства освіти і науки України та підсумкового тематичного оцінювання.

У плануванні навчального матеріалу значні за обсягом теми діляться на окремі підтеми, що містять логічно завершений навчальний матеріал. У цьому випадку в кожній з них передбачаються поточні контрольні роботи, які відіграють роль тематичного заліку з підтеми [3, с.2].

На формування структури тематичного планування впливає і наявність навчального часу, яка обумовлена, в свою чергу, змістом робочого навчального плану середнього загальноосвітнього навчального закладу передбаченого для конкретного класу. Це можуть бути години варіативної частини, що спрямовані на вивчення вибірково-обов’язкових предметів, тобто додаткових годин до основного розкладу уроків або час для проведення індивідуальних і групових занять розвиваючого або коригуючого характеру. В останньому випадку вчитель планує проведення цих консультацій (занять) у позаурочний час паралельно з плануванням основного курсу з врахуванням інтересів і потреб учнів, поглиблення або корекції їх знань. Причому застосування годин шкільного компоненту в залежності від їх призначення може бути досить гнучким і повністю відповідати вимогам диференціації навчально-виховного процесу та створення особистісно-орієнтованої системи навчання математики. Наприклад, якщо на паралелі з двох класів заплановано відведення по одній годині для проведення індивідуальних і групових консультацій з математики, то можна формувати різні типологічні групи учнів з цих класів (корекція для більш слабких, поглиблення для інших). При тому співвідношення годин розвиваючого і компенсуючого характеру по кожному класу складатиме фактично 0,5 год./ 0,5 год. при більш високому ефекті їх застосування: 1 год./ 1 год. Інший приклад: у конкретному класі можливості робочого навчального плану не дозволяють відвести на консультування учнів з математики більше ніж 0,5 год./ тиждень. Навряд чи доцільно щотижня проводити ці додаткові заняття протягом саме 0,5 год., раціональніше по 1 год. через тиждень, але не спонтанно, а суворо дотримуючись плану.

Наведені приклади не претендують на охоплення і аналіз всіх варіантів, це мінімум з мінімуму, але, якщо керівник загальноосвітнього навчального закладу (насамперед звичайної загальноосвітньої школи без поглибленого вивчення математики) дійсно дбає про гуманізацію навчально-виховного процесу і гуманітаризацію змісту навчання, створення цілісної системи формування особистості, реалізацію завдань державної політики в галузі освіти, то, безперечно, викладання математики як провідного курсу шкільної освіти буде надійно обґрунтованим і забезпеченим можливостями робочого навчального плану закладу.

Продовжуючи розмову про структуру тематичного планування програмного матеріалу з математики можна умовно визначити п’ять основних блоків діяльності: вивчення нового матеріалу (I), його закріплення (II), проведення систематизації, узагальнення і поглиблення знань (III), діагностики і контролю (поточного, тематичного, підсумкового) (IV), корекції і поглиблення (V).

Очевидно, що під час вивчення окремої теми уроки різних блоків можуть чергуватися або – при викладанні за лекційно-практичною системою – в суворій послідовності [4, с. 109]. Простежити доцільність розподілу годин на уроки різних блоків за традиційною формою тематичного планування можливо за записом і паралельним аналізом поурочних планів вчителів, але уявляється більш зручною, прозорою і наочною графічна форма планування програмного матеріалу в вигляді плану-„стрічки” (рос. мовою *ленточной формы планирования*), що була апробована на протязі трьох років у ЗОШ №13 м. Бердянська. Ця форма не тільки враховує практично всі вимоги до поточного планування: розподіл матеріалу теми по блоках діяльності, визначення видів уроків, врахування „підтримки” шкільного компоненту, а й виявляється достатньо ефективною у використанні. Зрозуміло, що застосування графічного плану-„стрічки” фактично доповнює існуючу традиційну, роками перевірену форму тематичного планування [4, с.103-105].

Але ж вона є дуже корисною для проведення контролю, аналізу організації процесу навчання математики, корекції планування, врахування умов конкретних класів, значно сприяє процесу підвищення майстерності, особливо молодих вчителів. Крім того, складання графічного плану-„стрічки” майже не потребує додаткового інструктажу, легко перевіряється. Як це відбувається покажемо на конкретних прикладах, для цього візьмемо одну тему з алгебри 8-го класу („Квадратні рівняння”) і проаналізуємо складання тематичних планів для класів з різною кількістю годин на тиждень як за традиційною так і за графічною формою в порівняльному плані.

Приклад 1.

Алгебра. 8 клас [2, с.13-14]

Тематичне планування на III чверть (скорочений варіант)

(2 години на тиждень, разом 20 годин)

Тема: Квадратні рівняння (20 годин)		
Номер уроку	Зміст уроку	Кількість годин
1-2	Квадратні рівняння. Розв’язування неповних квадратних рівнянь	2
3	Розв’язування вправ. *Самостійна робота*	1
4-5	Формула коренів квадратного рівняння. Зведене квадратне рівняння	2
6	Розв’язування вправ. *Самостійна робота*	1
7-8	Розв’язування рівнянь, що зводяться до квадратних	2
9	Систематизація та корекція знань і умінь з теми „Квадратні рівняння”	1
10	*Контрольна робота №1*	1
11-12	Розв’язування задач за допомогою квадратних рівнянь	2
13	Розв’язування вправ. *Самостійна робота*	1
14-15	Теорема Вієта і теорема обернена, обернена до неї	2
16	Розв’язування вправ. *Самостійна робота*	1
17	Систематизація та узагальнення знань і умінь	1
18	*Контрольна робота №2*	1
19	Аналіз контрольної роботи розв’язування цікавих задач	1
20	Підсумковий урок	1

Умовні позначки:	$\boxtimes$	Блок І – вивчення нового матеріалу
	—	Блок ІІ – закріплення матеріалу
	⊗	Блок ІІІ – систематизація та узагальнення
	С. р.	Блок IV – діагностика і контроль
	|	Блок V – корекція, поглиблення, аналіз
	Т.а.	Тематична атестація

Примітки:

1. За таблицею легко відстежити робочі тижні, в разі необхідності їх можна нумерувати, починаючи з вересня, що може бути дуже корисним для загальноосвітніх навчальних закладів, які працюють за розкладом відповідно номерам тижнів.
2. Розклад занять в прикладі: вівторок, середа – уроки за розкладом, четвер – групові та індивідуальні консультації.
3. Якщо уроки спарені, то відповідний стовпчик потрібно зробити в два рази ширше.

Приклад 2. Алгебра. 8 клас [3, с. 8]

Орієнтовне календарне планування (3 години на тиждень, разом 20 годин)

Тема: Квадратні рівняння (20 годин)		
Номер уроку	Зміст уроку	Кількість годин
49	Квадратне рівняння.	1
50-51	Неповні квадратні рівняння, їх розв’язування	2
52-53	Формула коренів квадратного рівняння.	2
54-55	Зведене квадратне рівняння, формула його коренів	2
56	Теорема Вієта і теорема обернена, обернена до неї	1
57-58	Розв’язування задач і вправ. *Самостійна робота*	2
59	*Поточна контрольна робота*	1
60-62	Рівняння, що зводяться до квадратних	3
63-64	Розв’язування рівнянь, що зводяться до квадратних	2
65-66	Розв’язування задач. *Самостійна робота*	2
67	*Поточна контрольна робота*	1
68	Розв’язування задач і вправ. *Самостійна робота*	1
69	*Тематична контрольна робота*	1

Алгоритм складання графічного тематичного плану:

1. підготовка форми плану: „стрічка” місяців, на яку нанесені тільки дні, числа і яку поділено на робочі тижні.
2. заповнення форми вчителем: номери, умовні позначки уроків, визначення підтем (все краще роботи олівцем).
3. в разі необхідності вчитель вносить корективи до плану, що робиться досить легко при наявності повної календарної сітки.

За двома наведеними графічними зразками планування однієї теми дуже легко визначити різницю в підходах до формування системи уроків з теми, відстежити хід виконання практичної частини навчальних програм, наявність занять коригуючого і поглиблюючого характеру, чітко простежити (табл. №1) місце уроків систематизації, узагальнення і поглиблення знань (до речі, якщо на табл. №2 саме такі уроки в темі не визначені, то вчителеві слід зорієнтуватися які з уроків даної теми виконуватиме такі функції. В даному випадку або уроки 58, 64 – з підтем, або 68 – з теми).

Графічна форма планування може бути також застосована для складання графіку контролю за виконанням практичної частини навчальних програм і контролю за рівнем навчальних досягнень учнів з різних предметів в окремих класах або паралелях (зводити до єдиного графіку всі класи школи вряд чи доцільно). Мета складання такого графіку, крім контролю, ще й не допущення перевантаження учнів, запобігання ситуацій „збігання” на один день різних контрольних робіт, які при наявності календарної сітки не важко „розвести” по різних днях надаючи пріоритет закріплення за датою саме тому предмету, який має менший обсяг тижневих годин (див. табл. №3).

Таким чином, застосування графічної форми планування допомагає вдосконалювати організацію процесу викладання математики, але не менш доцільно використовувати її в управлінській діяльності керівникам шкіл для проведення внутрішкільного контролю системи уроків теми, поєднання різних блоків діяльності, ефективності застосування шкільного компоненту, виконання практичної частини навчальних програм тощо.

1. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5-11 класи / В. Бевз, А. Мерзляк, З. Слєпкань/. – К.:Перше вересня. – 2001.
2. Бевз.В. Тематичне планування // Математика в шк., №1. – 2001.
3. Орієнтовне планування. Математика, 5-11 класи загальноосвітніх навчальних закладів. ІІ семестр 2001/02 навч. року / Г.М. Литвиненко. – К.: Шкільний світ, січень. – 2002.
4. Слєпкань З.І. Методика навчання математики. – Київ: Зодіак-Еко. – 2000.
5. Оганесян В.А., Колягин Ю.М., Луканин Г.Л., Саннинский В.Я. Методика преподавания математики в средней школе. – М.: Просвещение. – 1980, 258 с.
6. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики. Книга для учителя. – М.: Просвещение – 1990, 183 с.
7. Планирование обязательных результатов обучения математике. Сост. Фирсов – М.: Просвещение. – 1989.
8. Хмара Т.М. Створюємо особистістно-орієнтовану систему навчання математики // Математика в шк., №5. – 2001.

Резюме. В данной статье раскрываются и обосновываются возможности и преимущества графической формы планирования для контроля и совершенствования процесса обучения математике.

Summary. In the article is opened and explained possibilities and agvantages, algoritm of making and using of graphic form of planning for control and perfection of studying-upbringing process of teaching mathematics.

Надійшла до друку 10.01.2002 р.

РОЗВИТОК СЕМІОТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ УЧНІВ ЯК ОДНА З УМОВ ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ГРУПОВОЇ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ (КОНСТРУЮВАННЯ “ІНФОРМАЦІЙНОГО ПОЛЯ” УРОКУ ЗАСВОЄННЯ НОВИХ ЗНАНЬ)

Ретунська В.В., учитель вищої категорії, учитель-методист, м. Кіровоград

Педагогічній науці та шкільній практиці України належить обмежене число досліджень групової навчальної діяльності школярів на уроках математики у школі. У підручниках для студентів та посібниках для вчителів відсутній матеріал про організацію навчання учнів у складі малих груп. Сучасний стан впровадження діяльності малих груп учнів у навчальний процес шкіл не може задовольнити шкільну освіту з кількох причин. “По-перше, відсутність групової діяльності позбавляє навчальний процес можливості організувати навчання на основі соціальної взаємодії учасників цього процесу, по-друге, збіднюється структура навчальних занять, по-третє, не використовуються можливості групового ефекту” [3,с.216]. Закономірним наслідком схарактеризованого стану є той факт, що проблема групової навчальної діяльності на уроках математики лишається так до кінця й не розв’язаною.

Якщо здійснити ретельний аналіз педагогічних досліджень, присвячених цьому питанню, то стає очевидним, що навчання у складі малих груп проводилося в основному як організаційна форма навчання тимчасових за складом груп, як епізодичне явище у самому процесі навчання. Групи постійного складу, що працювали разом протягом кількох років, досліджувалися недостатньо.

Серед педагогів-дослідників домінуючою є думка про те, що групова навчальна діяльність найбільш ефективна на уроках закріплення, систематизації та контролю знань. У своєму дослідженні ми намагалися організувати навчальну діяльність у складі малих груп на всіх етапах шкільного процесу навчання. Вирішення поставленого завдання вимагало перегляду багатьох моментів навчального процесу. Особливо це стосувалося “інформаційного поля” уроку. Необхідно було наповнити “інформаційне поле” уроку математики повним змістом, який би якнайкраще відповідав саме груповій діяльності на уроці.

Дозволимо собі невеликій філософський відступ. Згідно з філософськими принципами Касіррера сучасну людину характеризує новий спосіб адаптації до середовища, котре трансформує його життя, – символічний. Касіррер розглядає символічні системи не як розширені реальності, а як її нові виміри: людина живе не лише в суто матеріальному світі, але і в символічному [2]. Ця думка на наш час дуже важлива й актуальна, оскільки підвищення теоретичного рівня наукових знань веде до їх помітної схематизації і формалізації. Характер і зміст образів у сучасному світі, умови їх створення і перебудування в процесі діяльності суттєво ускладнюються і безперервно змінюються. Змінюється й сам процес навчання. Він вимагає від дитини опанування різноманітною знаковою культурою і має намір створення специфічної знакової предметності.

Як засвідчують численні експериментальні дані, мислення не тільки робиться мовним, як стверджував Виготський, воно і візуалізується в міру оволодіння різноманітними знаково-символічними системами. Ось чому всі види навчальної діяльності учнів у складі малих груп повинні бути максимально наповнені діями, основу яких складають одержання нової інформації та її подальше осмислення за рахунок оперування знаково-символічними засобами. Тобто утворюється деяка залежність між сформованістю семіотичної функції і груповою діяльністю на уроці.

Традиційно процес засвоєння учнями нових знань полягав у тому, що до початку самостійного оперування новими знаннями вони повинні були попередньо їх вивчити. Але цей висновок, який лежить на поверхні й освячений віковою традицією, приводить до досить малоефективного навчання. Порив у цьому напрямі був зроблений П.Я.Гальперіним у створеній ним теорії поетапного формування розумових дій, яка яскраво застосовується у молодших класах і вже не так послідовна у середній ланці загальноосвітньої школи.

Наша ідея якраз і полягала в тому, щоб при пояснені нового матеріалу спочатку була відпрацьована адекватна до цього теоретичного матеріалу діяльність і лише потім учні могли перейти до самостійної роботи з цим матеріалом. Звичайно бачити на уроках математики у школі, як, завершуючи пояснення, вчитель на одному-двох прикладах обов’язково показує учням, як “спрацьовує” теорія, а потім пропонує приступити до самостійної роботи. При цьому він не має змоги прослідкувати, чим саме користуються учні, виконуючи завдання. На перший погляд, і так усе ясно: чим ще крім повідомлених у ході пояснення даних, може користуватися учень? Насправді усе набагато складніше: учень, наприклад, може безпомилково працювати самостійно, користуючись лише наданим в його розпорядження зразком і зовсім не співвідносити свої дії з викладом теоретичного матеріалу. Подолати це протиріччя можливо, якщо організувати навчальну діяльність певним чином.

Навчальний предмет – математика. Його основу складають знання законів і застосування їх при вирішенні конкретних прикладів. Частіше всього суть закону на рівні його функціонування залишається незрозумілою учневі – просто він діє за зразком. Сильніші учні освоюють адекватну до закону дію швидко, а слабкі можуть так і не виконати операційних дій до кінця. Застосовувана нами при пояснені нового матеріалу методика дозволяє самому учневі у ході пояснення будувати модель закону, що вивчається, на функціональному рівні. Пояснимо це більш детально.

Теоретичні (М.М.Бахтін, В.С.Біблер, Б.Ф.Ломов, О.М.Матюшкін) й експериментальні дослідження дозволили виділити спеціальну структурну ланку пізнавальної активності, що відбувається перед вирішенням розумових завдань. Ця структурна ланка має самостійну цінність й особливе значення в навчанні. Вона виражається як проблема, сформульована перед іншим учасником мислення, як питання, звернуте до партнера, як завдання, поставлене перед іншою людиною.

Засвоєння нового матеріалу в процесі групової навчальної діяльності пов’язане саме з вмінням запитувати, з можливістю розуміти вивчене через запитання, що ставляться іншому. Але така діяльність використовується в основному при взаємоконтролі знань у групі. Учень запитує іншого учня, ставлячи вже відомі йому і собі запитання й очікуючи від нього відповіді близької до тої, що є у підручнику. І дуже важливо знайти спеціально розроблені завдання, коли суть нового матеріалу осягається в процесі відповіді на поставлені тому, хто вчиться, запитання. Вміти запитувати при поясненні іншого, значить, знати самому те, про що ти питаєш. Але можна ще, відповідаючи на запитання, оволодівати новими знаннями.

Нами були розроблені завдання, які так і називаються “Запитуючи – пояснюю”. Механізм дії завдань стане зрозумілим, якщо розглянути їх безпосередньо.

Наведемо приклад такого завдання з курсу алгебри 7-го класу. Тема уроку: “Множення і ділення степенів”. Учні груп, які мають високий рівень навчальних можливостей, вивчають цю тему самостійно, а потім працюють з іншими учнями за знаково-символічним записом цієї теми, що у них є, ставлячи запитання. Ось так :

<u>ЗАПИС</u>	**<u>ЗАПИТАННЯ</u>**
• $a^2 \cdot a^3$	• Що значить a^2 і a^3?

(Учень пише $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$)

	• Тоді поясни запис $a^2 \cdot a^3$

(Учень пише $a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) =$ А далі ? $= a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$

• $a^2 \cdot a^3 = a^5$ $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3}$	• Який ти можеш зробити висновок, виходячи з цього запису?
• $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	• А тепер, якщо все зрозумів, доведи мені цю властивість. Тобі важко? Тоді дивись, як все просто і легко.
$^{n} \cdot {}^{к} =$ $= \underbrace{\ \cdot\ \ldots\ }_{n\ разів} \cdot \underbrace{\ \cdot\ \ldots\ }_{к\ разів} =$	• Продовж запис.

(Учень пише $= {}^{n} \cdot {}^{к} =$ • А далі?

$= {}^{n+к}$)

• Знайди помилку в записі.

• $\Delta^{a+b} = \underbrace{\Delta \cdot \Delta \ldots \Delta}_{b\text{ разів}} \cdot \underbrace{\Delta \cdot \Delta \ldots \Delta}_{a\text{ разів}} = \Delta^{b+a}$

(Учень відповідає, консультант слідкує за його відповіддю).

• ${}^{x} \cdot {}^{y} = {}^{x+y}$

• А тепер доведи сам.

• $\boxed{2a}^{3} \cdot \boxed{2a}^{2} =$

Далі учень працює самостійно.

Учні, які мають високий рівень научуваності дуже швидко освоюють такий вид діяльності при навчанні у складі малих груп. Маючи спеціальні картки запису доведень законів, самостійно працюють зі своїми однокласниками. Наводимо приклад картки запису законів піднесення до степеня добутку і степеня :

I

$$(\ \cdot \Delta)^n = \underbrace{(\ \cdot \Delta) \cdot (\ \cdot \Delta) \ldots (\ \cdot \Delta)}_{n\text{ разів}} =$$

$$= \underbrace{\ \cdot \ \ldots \ }_{n\text{ разів}} \cdot \underbrace{\Delta \cdot \Delta \ldots \Delta}_{n\text{ разів}} =$$

$$= {}^{n} \cdot \Delta^{n}$$

II

$$(-5x)^3 = \boxed{-5}^{3} \cdot x^{3} = -125x^{3}$$

I

$$({}^{m})^{k} = \underbrace{{}^{m} \cdot {}^{m} \ldots {}^{m}}_{k\text{ разів}} = {}^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{k\text{ разів}}} = {}^{m\cdot k}$$

II

$$(X^{5})^{3} = X^{5\cdot 3} = X^{15}$$

За цими картками можна організувати ще один цікавий вид роботи в основному для учнів, що мають середній і низький рівень навчальних можливостей. Маючи перед собою картку, слабкий учень ставить запитання своєму консультанту. Виявляється, це не таке вже й легке для учнів завдання. Спочатку кількість запитань не перевищує одного-двох, і лише накопичивши досвід такої роботи, ці учні починають працювати більш успішно.

Необхідно відзначити, що фіксація теоретичних зв’язків і залежностей матеріалу, який вивчається учнем, в таких завданнях відбувається з допомогою саме знаково-символічних образів.

Психологи встановили, що швидкість сприйняття пов’язана з рухом очей. Активний пошук потрібної для учня інформації змушує його не тільки частіше звертатися до запропонованого знаково-символічного запису, але й сприяє розвитку його індивідуальних особливостей, швидкості й точності сприйняття і переробки інформації. Тому доцільно звернути увагу на те, що розробляючи знаково символічний запис законів, які вивчаються, теорем, правил, ми велику увагу приділяли просторовому розміщенню елементів, котрі до неї входять. Легкий, красивий, не перевантажений запис швидко ідентифікується учнем. Поступово у нього виробляється свій, індивідуальний стиль роботи в “інформаційному полі” уроку, що в свою чергу, дозволяє нарощувати особистісний темп просування у навчанні. Наприклад:

(група В – учні, які мають високий рівень навчальних можливостей; група С – середній, група Н – низький).

Як у підручнику	**Як це робилось на уроці**
(а + в) · с = ас + вс	Запис пояснення для учнів групи В $(\quad + \Delta) \cdot O = \quad \cdot O + \Delta \cdot O$ Запис пояснення для учнів груп С і Н $(\boxed{2а} + в) \cdot 3с = \boxed{2а} \cdot 3с + в \cdot 3с = 6ас + 3вс$
	Запис пояснення для учнів В групи $(\quad + O)^2 = \quad ^2 + 2 \quad \cdot O + O^2$

$(а + в)^2 = а^2 + 2ав + в^2$	пояснення для учнів груп С і Н $(\boxed{3n} + 2m)^2 = \boxed{3n}^2 + 2 \cdot \boxed{3n} \cdot 2m + 2m^2 =$ $= 9n^2 + 12nm + 4m^2$

Серед різноманітних видів діяльності зі знаково-символічними засобами, які ми використовували на уроках засвоювання нових знань, є завдання на кодування, суть яких полягає у тому, що отриманні знання учень кодує самостійно і пропонує іншому декодувати запропонований запис. Такий вид діяльності мобілізує процес індивідуального "вичерпування" смислової суті матеріалу, який розглядається на уроці, створює динамічний образ вивченого і можливість неоднозначного його уявлення. Н.Г.Салміна у своїй книзі "Знак и символ в обучении" пише: "Кодування у навчальній діяльності передбачає вміння відтворити зміст у знаково-символічній формі. Запровадження кодування в навчальну діяльність дає можливість здійснювати діяльність у різних планах" [1,с.88].

Ефективність використання цих завдань на уроках математики очевидна. Учням важко здійснювати математичні перетворення, якщо мислимий зміст є відносно нерухомим, жорстким і тому важко піддається переробці. Набагато цікавіше бачити перед собою незвичайний запис, який треба і розгадати, і зробити це швидше за інших.

Завдання декодування можуть бути різними. Частіше всього ми використовували завдання, де потрібно було доповнити запис і декодувати його. Наприклад:

5 КЛАС. Тут закодовано математичні закони. Постав, де потрібно, в запису знаки "+", "-", "=", (...), "x".

Які закони ти закодував?

1. О О (О + = + О);

2. О Δ О О Δ (ОΔ ± О = О · (Δ ±));

3. О Δ Δ О Δ (О/Δ ± /Δ = (О ±)/Δ)

7 КЛАС. Розкодуй запис:

а) $^{\cdots} - \Delta^{\cdots n} = (\quad - \Delta^{n}) (\quad + \Delta^{n})$

б) $(\quad ^{\cdots\Delta})^{\cdots} = (\quad ^{к})^{3\Delta} = \ldots.$

в) $O,O\Delta = (\ldots)^2$; $O,OOO \quad = (\ldots.)^2$

г) $^{4} - \Delta^{4} = (\ldots..) (\quad + \Delta) ((\quad ^{\cdots} + \Delta^{\cdots})$

д) $(\quad \ldots.)^3 = \ldots. + 3 \ldots\ldots + \ldots. \Delta^2 + \ldots.$

Відзначаючись, здавалося б, своєю простотою, ці завдання несуть у своїй змістовій сутності один дуже важливий момент: щоб якесь поняття було сприйняте адекватно, потрібно, аби воно було побудовано (“сконструйоване”) власними діями. Виконуючи таке завдання, учень не просто вгадує серед уже написаних законів відомі для нього, а й створює динамічний образ схеми дії відповідно до цієї формули.

Такий вид діяльності, як кодування, дозволяє учням включитися у дуже важливий вид діяльності зі знаково-символічними засобами – в переклад реальності на знаково-символічну мову.

Відзначимо ще один важливий момент у діяльності учнів зі знаково-символічними засобами: перехід до різних видів знаково-символічного вираження знань. Завдяки цьому досягається відокремлення форми від змісту, що є надзвичайно важливим для повноцінного засвоєння знань. “В ефективному навчанні, – пише далі Н.Г.Салміна – необхідно прагнути до формування різномодальних знань, які можуть бути вираженими у будь-якій формі, відповідно до змісту. Невіддільність змісту від форми при невмінні розділяти їх перешкоджає повноцінному засвоєнню знань” [1,с.218].

Створення такої специфічної знакової предметності в ході пояснення нового матеріалу дозволяє внести елемент диференціації безпосередньо у сам процес пояснення, а це дуже важливо, бо клас працює за групами. У цьому випадку учні груп С і Н не відкинуті за межу нерозуміння, у них є всі можливості працювати над засвоєнням даного поняття або закону самостійно й успішно. Учні групи В, використовуючи символічний запис закону, можуть зразу приступати до виконання тренувальних вправ, учень, який сумнівається у своїх знаннях, залучається до активного пошуку інформації, зрозумілої для нього і необхідної у подальшій роботі.

Використання знаково-символічного запису дозволяє організувати по-іншому й повторення вивченого матеріалу: не як виконання навчальних вправ, а на рівні відтворення його смислової суті. Цілком зрозуміло, що для того, аби яке-небудь знання стало усвідомленим, воно повинне зайняти місце мети дії. На практиці це досягається виконанням завдань такого виду:

<u>5 КЛАС.</u>

1. “Поясни дію законів додавання по-своєму, як ти бачиш”. Це завдання творчого характеру і вони можуть виконуватися учнями в будь-якій формі. Дидактична мета таких завдань – відтворення учнем функціональної сутності закону.

2. Яких натуральних значень набуває , якщо:

$, 367 > 6{,}07 \quad (> 6)$

$10{,}3\ \ 6 > 10{,}326 \quad (> 2)$

$19{,}24\ \ < 19{,}248 \quad (< 8)$

$11,\ \ 36 > 11{,}\Delta 89 \quad (> \Delta)$

3. Запиши відповідь:

а) Δ, · 10 = ...	б) Δ, : 10 = ...	в) , : = ...
Δ, · 100 = ...	Δ, : 100 = ...	Δ,ΔΔΔ : Δ,Δ = ...
Δ, · 1000 = ...	Δ, : 1000 = ...	0, : , = ...

4. Розкодуй запис:

,1Δ · 10 = 31,6

Δ, 6 · 100 = 500,6

Δ ,Δ · $\boxed{}$ = 2324

5. Розв’яжи рівняння:

а) , : (x – 0,4) = , ; (x – 0,4 = 1, x = 1,4)

б) Δ,OΔ = (x + 0,01) · Δ; (x + 0,01 = 1,01; x = 1).

7 КЛАС.

1. Спрости вираз:

а) $- (2 \quad - 2\Delta) + (\quad + \Delta)$;　　г) $(\Delta O + \quad \Delta) \cdot \quad \Delta O + 2 \quad \Delta^2 O^2$;

б) $O + (2O - \quad) + (\quad - 3O)$;　　д) $5 \quad {}^2\Delta^{11} \cdot 10 \quad {}^7\Delta^{15}$.

в) $(\quad {}^{\Delta})^0 + (\Delta \quad)^0 - (\quad {}^0)^{\Delta}$;

2.Розв’яжи рівняння:

а) $x - Ox^2 = \Delta + x(\quad - Ox^2)$;　　г) $\Delta x - x^2 = O - x^2$;

б) $Ox + \quad - \quad x^2 = x \cdot (O - \quad x) - \quad$;　　д) $4 \quad x + x^2 = O + x^2 + 3 \quad x$;

в) $6x^2 - 6\Delta x + 20 = -4\Delta x + 40 + 6x^2$.

3.Розкодуй запис:

1) $(\ldots \quad {}^{\cdots}\Delta^{\cdots})^2 = 16 \quad {}^{14}\Delta^{16}$;　　5) $\quad {}^2x^2 + \ldots + y^4 = (\ldots + \ldots)^{\cdots}$;

2) $\ldots x^2 + 8x + \ldots = (\ldots + 1)^2$;　　6) $\ldots. + 2\Delta x^3y^3 + y^6 = (\ldots + \ldots)^{\cdots}$;

3) $25 \ldots + \ldots + \ldots = (\ldots a^2 + 2 \quad)^2$;　　7) $(\quad {}^2 + \ldots) (\ldots - \quad {}^2\Delta^4 + \ldots) = \ldots$;

4) $16x^{\cdots} + 24 \; x^3y^3 + 9y^{\cdots} = (\ldots + \ldots)^2$;　　8) $(\ldots + \Delta^3) (\ldots - \ldots) = \quad {}^{12} - \ldots$

Таким чином, є підстави зробити висновок, що одержання нової навчальної інформації учнями та її подальше осмислення за рахунок оперування знаково-символічними засобами “наповнює” “інформаційне поле” уроку змістом, який найбільше відповідає динаміці самої групової діяльності. Існує певна залежність між сформованістю семіотичної функції і пізнавальною активністю учнів при груповій навчальній діяльності. Для успішної роботи груп на уроці необхідна велика кількість різноманітних завдань, які відрізняються від звичайних диференційованих завдань і своїм змістом, і, головне, операційною діяльністю.

1. Салмина Н.Г. Знак и символ в обучении. – М.: Изд-во Московського ун-та, 1989. – 286 с.
2. Cassirer E. Essai sur I‘home. – Paris, 1979.
3. Ярошенко О.Г. Проблеми групової навчальної діяльності школярів: дидактико-методичний аспект. – К.: Станіца, 1999. – 245 с.

Резюме. Статья посвящена проблеме обучения школьной математике в составе малых групп. Основное внимание уделено конструированию «информационного поля» урока. На конкретных примерах показано как использование знаково-символических образов на уроках усвоения новых знаний повышает эффективность групповой учебной деятельности. Приведены виды заданий на кодирование и декодирование учебной информации, полученной учащимися на уроке в ходе объяснения нового теоретического материала.

Summary. This article is devoted to the problem of teaching mathematics in small groups. The main attention is paid to the formation of the “information field” of the lesson. The author proposes to use signs and symbols to introduce new material and to rise the effect of group activities. The article offers you examples on encoding and decoding of educational information recieved by the pupils during the explanation of new theoretical material.

Надійшла до друку 10.02.2002 р.

ДО ПИТАННЯ ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНОСТІ МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ СТУДЕНТІВ

О.Г.Фомкіна, канд. педагог. наук,
А.І.Шурдук, канд. фізико-математичних наук,
Полтавський університет споживчої кооперації України

Психологи стверджують: будь-яке наукове знання засвоюється тільки тоді, коли воно є відповіддю на запитання, що потребує напруги думки, зусиль, збуджує інтерес. Але слід добавити і наступне: необхідність знань зумовлюється їх принципіальною практичною значимістю.

Рушійною силою математики, оцінкою ефективності її методів була і є практика. Важко назвати таку галузь математики, навіть саму абстрактну, яка б не була причетна до пояснення явищ природничого, соціального, економічного чи іншого характеру.

В зв’язку з цим видатний російський математик П.Л.Чебишев писав: “В старину задавали математические задачи боги, как, например, удвоение куба, по поводу размеров Дельфийского жертвенника. Далее наступил второй период, когда задачи задавали полубоги: Ньютон, Эйлер, Лагранж. Теперь третий период, когда задачи задает практика”.

Саме вона ставить серйозні вимоги до математичної підготовки студентів, яка повинна полягати не тільки в передачі певної кількості знань, але і бути направленою на максимальний розвиток творчих здібностей студентів, самостійність їх мислення, уміння застосовувати загальні теоретичні положення до розв’язання конкретних практичних проблем.

Математика зможе зайняти належне місце в системі підготовки спеціалістів лише в тому випадку, коли студенти з першого року навчання по-справжньому зацікавляться цією наукою, зрозуміють її роль та визначать місце у вирішенні специфічних проблем, пов’язаних з майбутньою професійною діяльністю. Цій меті можуть служити прикладні задачі математики, екскурси в її історію, перспективи розвитку цієї науки. Для майбутніх економістів, наприклад, надзвичайно важливою є економічна інтерпретація математичних понять (похідної, інтеграла і т.д.), математичне формулювання певних економічних законів (закона спадної прибутковості, принципу спадної граничної корисності, умови оптимальності випуску продукції), розгляду найпростіших застосувань вищої математики в економіці (балансові моделі, еластичність функції, виробничі функції і т.п.), які майже не потребують додаткової (економічної) інформації. Але мета буде досягнута лише в тому випадку, коли викладач сам буде чітко уявляти, як в даній спеціальності – технічній, економічній та інших – використовуються математичні ідеї та моделі, формальний апарат математики. Викладач має бути в курсі того, що дало чи може дати використання математики для розвитку конкретної області знань. При цьому прикладний аспект, пов’язаний зі спеціальністю студента, має бути обов’язково присутнім не тільки на лекціях, а і в самостійній, індивідуальній роботі студентів.

Навчання математичним дисциплінам буде найбільш ефективним, якщо воно буде наповнене задачами, що формують не тільки математичні знання, а й сприяють розвитку прикладних математичних навичок та умінь. Так, наприклад, майбутні економісти при вивченні математики можуть вирішувати важливі проблеми фінансової сфери підприємницької діяльності, шляхом розв'язування задач типу:

1. Кожен, із трьох працюючих банків, нараховує вкладникам певний річний процент (свій для кожного банку). На початку року підприємство вклало 1/3 вільних коштів розміром 6000 грошових одиниць в перший банк, половину грошей в другий банк, решту – в третій банк. До кінця року сума цих внесків зросла до 7500 гр. од. Якби в перший банк було покладено 1/6 всіх коштів, 2/3 – в другий банк, 1/6 – в третій банк, то до кінця року сума внеску склала б 7200 гр. од.; якби половину внеску поклали в перший банк, 1/6 – в другий банк та 1/3 – в третій банк, то сума внеску на кінець року становила б 12500 гр. од. Який процент виплачує кожен із трьох банків?

2. В день 60-річчя пан Петренко відкрив рахунок ренти в страховій компанії на своє ім'я за умови, що він буде одержувати щорічно у свій день народження, починаючи з наступного року, 5000 гривень на протязі 10 років. Компанія прийняла його кошти і відкрила йому рахунок ренти з щорічним зростанням вкладених коштів на 8%. Яку суму внесено на рахунок ренти паном Петренко?

3. Кожного року батьки вносять 800 гривень на свій рахунок накопичення із щорічним прибутком зростання рахунку на 3%. Обчислити суму коштів, накопичених за 17 років.

4. В таблиці приведені дані про виконання балансу за звітний період (в умовних грошових одиницях):

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Галузь</td><td colspan="2">Використання</td><td rowspan="2">Кінцевий продукт</td><td rowspan="2">Валовий випуск</td></tr>
<tr><td>Енергетика</td><td>Машино-будування</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Вироб-ництво</td><td>Енергетика</td><td>100</td><td>160</td><td>240</td><td>500</td></tr>
<tr><td>Машинобу-дування</td><td>275</td><td>40</td><td>85</td><td>400</td></tr>
</table>

Обчислити необхідний об’єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцевий продукт енергетичної галузі повинен зрости в 2 рази, а машинобудування – на 20%.

5. Початковий вклад в банк складає Q_0 грошових одиниць. Банк щорічно виплачує p% річних. Необхідно знайти розмір Q_t через t років.

Задачу розв’язуємо в три етапи:

1) Знаходимо розв’язок, використовуючи складні проценти: очевидно, при p% річних розмір вкладу щорічно буде збільшуватися в (1+) разів, тобто $Q_1=Q_0(1+)$, $Q_2=Q_0(1+)^2$, . . . , $Q_t=Q_0(1+)^t$. Якщо нарахувати проценти по вкладам не один раз в рік, а n раз, то при тому ж щорічному прирості p%, процент нарахування за частину року складе %, а розмір вкладу за t років при n t нарахуваннях буде

(1).

2) Далі розв’язуємо задачу, вважаючи, що проценти по вкладу нараховуються кожне півріччя (n=2), поквартально (n=4), щомісячно (n=12), кожен день (n=365), кожен час (n=8760) і т.д., неперервно

($n \to \infty$). Тоді розмір вкладу за t років складатиме

Розв'язання задачі зводиться до знаходження границі

=

=[використовуємо 2-у чудову границю]=.

Тоді $Q_t = Q_0$ (2).

Формула (2) дає можливість знаходити розмір вкладу при неперервному нарахуванні процентів.

3) Для порівняння результатів, одержаних за формулами (1) і (2), пропонуємо студентам знайти розміри вкладу Q_t при Q_0 =1 грошова одиниця (гр.од.), p=5%, t=20 років. Результати обчислень можуть бути занесені в таблицю:

	Обчислення складних процентів за формулою (1)					Неперервне нарахування процентів за формулою (2)
	n=1	n=2	n=4	n=12	n=365	
Розмір вкладу, гр.од.	2,6355	2,6851	2,7015	2,7126	2,7181	2,7182

Слід звернути увагу студентів на те, що в практичних фінансово-кредитних операціях неперервне нарахування процентів застосовується рідко, воно виявляється значно ефективним при аналізі складних фінансових проблем, зокрема, при обґрунтуванні і виборі інвестиційних рішень.

Навчальні функції таких задач одночасно спрямовані на підвищення математичної підготовки студентів і на вироблення вмінь застосовувати математичний апарат для дослідження економічних процесів і явищ, будувати моделі економічних ситуацій, знаходити математичні залежності в реальних виробничих процесах, передбачати очікуваний результат як наслідок аналізу величин, що характеризують дану економічну ситуацію. Вони дають змогу розкрити методологічні питання взаємозв'язку теорії з практикою, переконуючи студентів в тому, наскільки важливе вивчення математичних дисциплін для обраної ними спеціальності.

Ми переконані в тому, що подальша розробка та впровадження в сучасний навчальний процес задач прикладного змісту, сприятиме не тільки зростанню якості математичної підготовки, а й підвищенню ефективності функціонування всього комплексу навчальних дисциплін, спрямованих на підготовку висококваліфікованих спеціалістів будь-якого профілю.

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів. – К.: Національна академія управління, 1997.
2. Кремер Н.Ш. и др. Высшая математика для экономистов. – М.: Юнити, 1997.

Резюме. Наполненность курса математики задачами прикладной направленности – один из эффективных путей формирования будущего специалиста. Они способствуют развитию творческих способностей студентов, самостоятельности их мышления, умению применять общие теоретические положения к решению конкретных практических проблем.

Summary. The examples, drown from the fields of business, economics and other fields of general interest demonstrate to students that mathematics has an important role to play in their forthcoming professional endeavors.

Надійшла до друку 20.11.2002 р.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ АКТИВИЗАЦИИ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Е.Г.Новожилова, ст. преподаватель,

Донецкий национальный университет, г. Донецк

Достижения современной науки значительно увеличили объем знаний, который необходимо усвоить каждому студенту. Таким образом, вопросы активизации и интенсификации учебного процесса становятся одной из насущных проблем, требующих решения преподавателями высших учебных заведений. Фундаментальные курсы, такие как математика, менее подвержены изменениям, к тому же вся система образования – инерционна по своей сути, поэтому изменения в методике преподавания должны проводиться чрезвычайно осторожно.

Тем не менее, понимание того, что методика преподавания математики для экономистов должна отличаться от традиционно сложившихся курсов математики для других естественнонаучных специальностей, приобрело четкость в последнее время, когда в достаточно большом количестве стали появляться учебники по математике для экономических специальностей [1, 2 и др.]. Сам факт появления этих учебников очень значимый, хотя не всегда можно согласиться с принципами отбора учебного материала и методикой его изложения, это зависит от личных пристрастий автора. На наш взгляд, опираясь на современные учебные пособия по математике для экономистов, можно предложить специальную методику изучения математики, в которой будет учтена специфика будущей специальности студента, т.е. реализована тесная связь математики с экономическими приложениями изучаемых разделов, решением актуальных задач рыночной экономики.

Студенты должны приобрести начальные навыки анализа экономической ситуации или процесса, решить вопрос об управляемых и неуправляемых факторах изучаемого явления, определить существенные и несущественные с экономической точки зрения связи, развить ассоциативное мышление, установить цель исследования и найти пути ее реализации.

Весь процесс изучения математики должен быть связан с построением экономико-математических моделей, математическими методами их решения, анализом полученных решений с точки зрения возможности их экономических приложений. При изложении курса математики уровень предлагаемых экономико-математических моделей может и должен существенно меняться: от простейших задач с экономическим содержанием при изучении первых тем и разделов курса математики, к описанию с помощью математических методов экономических процессов, адекватных уровню экономических знаний студентов, и далее до составления математических моделей реальных экономических задач и их решения в курсе эконометрии. При этом использование экономических ситуаций, примеров и задач должно иметь не спорадический, а регулярный характер, что способствует усилению мотивации к изучению студентами математических дисциплин. В каждом разделе математики можно привести соответствующие примеры. Приведем обзор тем курса математики и некоторые примеры и задачи, которые можно применять при чтении этих вопросов.

Аналитическая геометрия. Этот раздел традиционно изучается первым в курсе высшей математики. Так как тема «Прямая линия на плоскости» достаточно подробно излагается в школьном курсе математики, то в вузовском курсе есть возможность, обратив внимание на некоторые основные теоретические положения ранее не встречавшиеся, проиллюстрировать изложение следующими примерами экономического содержания.

Линейная функция может служить для описания экономических зависимостей между величинами, связанными отношением пропорциональности, т.е. $Y = ax + b$.

Наиболее удобны для использования в этом случае такие зависимости: производственные издержки от объема производства однородной продукции, транспортные расходы от расстояния, на которое перевозится груз, спрос (или предложение) товара от цены единицы продукта, формула простых процентов и т.п. В каждом из этих случаев в качестве параметра b выступают постоянные расходы, независящие от количества или объема независимой переменной (затраты на содержание административных зданий, административно-технический персонал, оплату погрузочных работ и т.п.), параметр a – это переменные расходы (затраты на сырье, топливо, материальные затраты на производство, заработная плата рабочих и т.д.). Студентам надо подчеркнуть, что это простейшие зависимости между рассматриваемыми величинами, они могут быть более сложными, и при дальнейшем изучении курса будут встречаться и другие формы функциональных выражений связи между этими переменными.

Пример. Эмпирическим путем установлены следующие зависимости спроса d и предложения s на некоторый товар от цены этого товара p

$$S = a_1 p + a_0, \quad d = b_1 p + b_0$$

Определить при какой цене на этот товар достигается равенство спроса и предложения (т.е. найти цену равновесия).

Пример. Фирма может затратить 3000 тыс. грн. на производство двух видов изделий. Стоимость производства изделия первого вида 1 тыс. грн., второго изделия – 6 тыс. грн. Какая зависимость связывает объемы производства изделий первого и второго вида?

При изложении темы «Кривые второго порядка» можно поставить задачи определения стоимости машинного парка с учетом физического износа на момент времени T (квадратическая зависимость), зависимости себестоимости продукции от производительности труда, дисконтирование при использовании формулы простых процентов (обратно пропорциональная связь).

Векторная алгебра. Обобщая понятия двух- и трехмерных векторов, даем определение n – мерного вектора как упорядоченного набора чисел, используя в качестве примеров объемы производства предприятием n видов продукции за один день, стоимости производства единицы каждого из этих видов продукции. Операции сложения векторов, умножения вектора на число, скалярное произведение векторов легко определить, решая следующие проблемы: найти объемы производства всех видов продукции за два дня; за квартал, если известно, что за этот период объем ежедневного производства не изменялся; определить суммарную стоимость ежедневной продукции. Основные свойства этих операций, т.е. выполнение или не выполнение коммутативного, ассоциативного и дистрибутивного законов также можно проверить с помощью этих примеров.

Дифференциальное исчисление. Этот раздел начинается с повторения темы «Элементарные функции, их свойства и графики». Кроме ранее использованных функциональных зависимостей, как примеры алгебраических функций можно привести формулу сложных процентов, производственную функцию (объем производства Q как функция производственных затрат L), теорему Парето о распределении доходов среди населения.

В теории пределов второй замечательный предел появляется при переходе к непрерывному начислению сложных процентов. Определение предела, являясь одним из основных, фундаментальных понятий курса математики, в общем-то, не представляет больших возможностей для использования примеров с экономическим содержанием, но при дальнейшем изложении курса для введения различных понятий экономики в последующих темах используем предельный переход.

Производную функции одной переменной вводим как определение темпов роста объемов производства, а не только как физическую скорость. Одним из важнейших экономических понятий, которое широко используется на практике, является понятие эластичности (относительной производной). Примеры, которыми сопровождается изложение этой темы, используются для вычисления эластичности спроса или предложения товара относительно его цены, определению маргинальных (предельных) издержек производства, предельной выручки и т.п.

В теме «Наибольшее и наименьшее значения функции» возникают большие возможности для составления задач с использованием данных экономики.

Изучая функции двух и нескольких переменных, вводим производственные функции, которые учитывают тот факт, что объем производства $\boldsymbol{Q}$ зависит от количества труда $\boldsymbol{L}$ и капитала $\boldsymbol{K}$,

$$\boldsymbol{Q = f(L, K),}$$

в частности функции Кобба-Дугласа, продолжаем изучение понятия эластичности, рассматривая частные, прямые и перекрестные эластичности.

Пример. Новый продукт активно рекламировался в течение нескольких месяцев. Изучая полученные данные, компания установила следующую зависимость между объемом продажи продукта $\boldsymbol{S}$ и ежемесячными вложениями в рекламу $\boldsymbol{A}$ и количеством месяцев, в течение которых эта реклама производилась $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{S = f(A, T).}$$

В настоящее время компания планирует затратить на рекламу сумму $\boldsymbol{A_0}$ в течение $\boldsymbol{T_0}$ месяцев. Какой будет эффект при

1) небольшом уменьшении продолжительности рекламной кампании, если количество вложенных денег не меняется;

2) небольшом увеличении денежных вложений при той же продолжительности рекламной кампании?

Перед студентами можно поставить проблему: определить частные производные и частные эластичности, чем отличается информация, которую мы получаем в каждом из этих случаев, что удобнее использовать для проведения экономического анализа?

Как известно, нет конечного максимума у функции Кобба-Дугласа

$$Q = A\,L^{\alpha}\,K^{\beta}$$

Но на практике величины ресурсов ограничены, таким образом возникает возможность для решения серии задач на условный экстремум функции двух переменных.

Интегральное исчисление. В тех случаях, когда экономический процесс является непрерывным или может рассматриваться как таковой, появляется возможность привести некоторые экономические примеры с использованием определенных интегралов. Например, определить объем производства, работу, суммарный объем производства и т.д. В качестве дальнейшего приложения исчисления процентов можно вычислить дисконтированный объем дохода при непрерывном начислении процентов.

Пример. Годовой доход $K = f(t)$ является функцией времени t. Удельная процентная ставка p. Определить дисконтированный объем дохода полученного за T лет.

В этом случае искомая сумма равна $K_0 =$

Дифференциальные уравнения. Изучение предшествующих разделов высшей математики наглядно показало студентам, что осуществление исследования зависимости между величинами наиболее удобно проводить в том случае, когда эта зависимость задана с помощью аналитической формулы $y = f(x)$. Но часто в процессе научного изучения некоторого явления можно получить другие формы задания зависимостей. Например, при совершении фьючерсных сделок величина спроса $\boldsymbol{d}$ и предложения $\boldsymbol{s}$ зависит от цены продукта $\boldsymbol{p}$ следующим образом

$$s = a_0 + a_1 p + a_2 p', \quad d = b_0 + b_1 p + b_2 p',$$

где p'– производная цены по времени (тенденция формирования цены). Как в этом случае определить цену равновесия? Приравняв выражения спроса и предложения, получаем уравнение, содержащее как $\boldsymbol{p}$, так и $\boldsymbol{p'}$**.**На основании этого примера вводим определение дифференциального уравнения первого порядка и его решения. В качестве других примеров составляем дифференциальные уравнения, с помощью которых определяется количество населения в момент времени $\boldsymbol{T}$***,*** эффективность рекламы, стоимости оборудования и т.п. Как решение некоторых из этих задач появляется функция, называемая логистической, которая часто встречается в теории экономических исследований.

Числовые и функциональные ряды. В этом разделе продолжается изучение примеров, связанных с исчислением процентов, если предположить, что начисление процентов проводится на бесконечном промежутке времени (например, бесконечная рента). Кроме того, можно рассмотреть случаи переменных процентных ставок и инфляционные процессы.

Линейная алгебра. Введение понятий матрицы, определителя, действий над матрицами и свойств определителей с помощью экономических примеров было приведено в [3]. Поэтому остановимся подробнее на примерах, которые можно рассмотреть в конце изучения основного раздела.

Одним из важных применений матричной алгебры в макро- и микроэкономических задачах является модель межотраслевого баланса. Кстати, здесь можно обратить внимание студентов на то, что это традиционно сложившееся название, хотя с помощью рассматриваемого метода могут быть решены задачи не только о потоках между отдельными отраслями, но и между странами или цехами, филиалами одного предприятия. В этой модели, используя действия над матрицами и обратную матрицу, по заданной технологической матрице нормативных затрат в валовом или стоимостном выражении и объемам конечных продуктов определяем коэффициенты полных затрат, план выпуска продукции каждой отраслью, коэффициенты косвенных затрат, суммарные расходы и расходы по отраслям, совокупные затраты труда, объемы капиталовложений и т.д.

В качестве пропедевтики темы «Марковские цепи», которая рассматривается в разделе «Теория вероятностей и математическая статистика», можно привести следующий пример.

Предприятие начинает выпуск нового товара. С целью рекламы ***a%*** населения получают его бесплатный образец. Проведенное статистическое исследование показало, что на следующей неделе ***p***% продолжают его покупать, а остальные приобретают другие виды аналогичных товаров. В то же время ***q***% лиц, покупавших другие товары, начали покупать новый товар. Определить какой объем производства необходим, чтобы по истечении достаточно большого промежутка времени, удовлетворить всех покупателей?

Этот пример интересен еще и тем, что в процессе решения необходимо найти предел переходных матриц

$$A_0 = \lim_{n \to \infty} A^n$$

Приложения таких моделей рассматриваются в финансах, бухгалтерском учете, производстве и маркетинге и называются дискретными марковскими цепями.

В результате такого подхода к изложению курса высшей математики для экономистов, устанавливается связь с различными экономическими дисциплинами, студенты знакомятся с возможностями использования в практических исследованиях предлагаемого математического аппарата. Степень удовлетворенности студентов выполняемой работой, уровень самостоятельности, наличие интереса к изучаемому курсу и т.д. могут служить показателем правильного методического подхода к процессу обучения. Кроме того, необходимо учитывать, что каждой экономической специальности нужен свой математический аппарат, который соответствует требованиям прикладной экономики, чтобы у студентов сформировалась ассоциативная система математических знаний, умение создавать экономики – математические модели, находить их математическое решение, проводить экономический анализ адекватности построенных моделей и найденных решений.

1. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. – М., Наука, 1984. – 286 с.
2. Ляшенко И.Н., Ляшенко Е.И. Математика для экономистов. – Донецк, 1998. – 228 с.
3. Новожилова Е.Г. Дефиниция понятия матрицы в курсе математики для экономистов // Евристика та дидактика точних наук. – Вип.4. – Донецьк. – 1996. – С. 36-38.

Резюме. Для підвищення зацікавленості студентів до вивчення математичних курсів необхідне використання економічних прикладів і моделей протягом усього навчального процесу. Деякий досвід викладання математики на економічних факультетах наведено в цієї праці.

Summary. For rise of students' interest to fundamental mathematics it is necessary to use the economic examples and models pending of in all educational process. Some mathematics teaching experience on economic faculties expounds in this paper.

Надійшла до друку 05.01.2002 р.

ОСОБЛИВОСТІ МЕТОДИКИ ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН З ВИКОРИСТАННЯМ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Л.І.Нічуговська, кандидат економічних наук, доцент
Полтавський університет споживчої кооперації України

У сучасній дидактиці та методичних системах вищого закладу освіти зустрічаються різноманітні моделі організації та проведення практичних занять, які відрізняються за структурою, методичними прийомами, теоретичним рівнем, стилем, результатом.

За дидактичним завданням практичні заняття класифікуються на комбіновані, вивчення нового матеріалу, закріплення нового матеріалу, повторювально-узагальнюючі, письмовий контроль. Існують заняття інтегровані, коли вивчається матеріал кількох тем одним блоком, є міжпредметні, що об'єднують споріднений матеріал кількох предметів, є заняття-ессе, заняття-конкурси, заняття-ділова гра, заняття-практикум і т.п. Але до якого типу б заняття не належало, в ньому завжди мають бути реалізовані всі ланки методичної системи: постановка пізнавального завдання, його мета; мотивація; відбір змісту, встановлення послідовності його викладання; використання методів і дидактичних прийомів; вибір організаційних форм і засобів навчання.

Враховуючи, що курс "Математика для економістів" вивчається студентами протягом трьох семестрів, виникає необхідність стимулювати трансформацію накопичених в інтенсивному темпі репродуктивних знань і вмінь у продуктивні, формуючи творчу компоненту особистості першокурсника.

В цьому контексті необхідно пам’ятати, що для формування навичок та вмінь з математичного моделювання та реалізації його прикладних аспектів студенти повинні не просто бути присутніми на практичному занятті, щось розв’язувати, моделювати, відповідати на питання, готуватись до тестування, але й мати простір для експерименту, для помилок, для критичної оцінки своїх можливостей.

Для досягнення розуміння економічного аналізу за допомогою математичних методів і моделей необхідно, щоб студент був активним партнером у навчальному процесі, який самостійно здійснює індивідуальний аналіз шляхів розв’язання проблеми і при цьому вміє обґрунтувати зроблений вибір у складі групи або підгрупи.

Після реалізації відповідних аналітичних процедур та обчислювальних алгоритмів бажано орієнтувати студентів на формулювання власних підходів, ідей, пропозицій з певних питань у письмовій формі. Це надає можливість: порівняти індивідуальні висновки з результатами інших студентів, зафіксувати міру загального та відмінного і творчо їх переосмислити; привчатись до колективної роботи, у процесі якої можливе використання інтелектуального потенціалу своїх колег-студентів, тобто відчути себе членом команди однодумців, чітко визначивши в ній власну позицію; розвинути уміння логічно, чітко, коротко, предметно, зважено висловлювати власні думки; уважно слухати інших, доповнюючи та коригуючи, при необхідності, більш вагомими аргументами.

Вищевикладені позиції акцентують увагу на необхідності творчого переосмислення співвідношення та оптимізації індивідуальних та групових форм навчальної діяльності студентів у залежності від сукупного потенціалу групи.

Аналіз досліджень методичних особливостей у проведенні практичних занять з позицій існуючого та власного досвіду свідчить, що у вищій школі домінує традиційна стратегія організації і проведення практичних занять з математичних дисциплін, а саме: контроль виконання домашнього завдання; з'ясування рівня теоретичної підготовки; типові завдання та їх ускладнені варіанти, диференційовані відносно можливого рівня знань студентів; підсумковий аналіз; постановка проблем наступного заняття та завдання для позааудиторної роботи.

Тому, при проведенні практичних занять з використанням математичного моделювання необхідно максимально відходити від традиційних стереотипів у методах, формах та засобах навчання, активніше застосовувати методи проблемного навчання, більш цілеспрямовано залучати студентів до процесу самостійного пошуку та відкриття нових знань, впроваджувати інноваційні технології (ділові ігри, ситуаційні завдання, кейс-метод, різноманітні тренінги тощо). Слід відмітити, що пошук нових нетрадиційних форм проведення практичних занять є необхідним фактором активізації пізнавальної діяльності студентів навчального закладу при умові поглиблення безпосереднього змісту діяльності, відмови від методичного догматизму, коли віддається переваги певній сукупності методичних прийомів та засобів, що, в свою чергу, призводить до методичного одноманіття або до протилежного ефекту, якщо фетишизуються інновації форм і методичних прийомів, не об'єднаних єдиною педагогічною метою.

Таким чином, виникає необхідність ретельного підходу до визначення ролі і місця практичного заняття з використанням математичного моделювання у системі практичних занять з добре обґрунтованим методичним забезпеченням, яке має бути пристосованим до потреб студентської аудиторії, до швидкості, з якою група здатна засвоювати навчання, до набутого раніше обсягу знань з математичних дисциплін та реальних можливостей студентів як користувачів ПЕОМ.

Наприклад, починаючи вивчення розділу “Математична статистика” на практичних заняттях доцільно ознайомити студентів із загальною структурною схемою статистичного аналізу. Підкресливши, що навички та вміння його ефективного використання для розв’язання різноманітних проблем – одна із домінуючих цілей навчання курсу “Теорія ймовірностей та математична статистика” (див. схему 1). Схема 1 чітко виділяє групу практичних занять, які об’єднуються блоком математичного моделювання, що сприяє усвідомленню студентом його місця у структурі знань даного розділу; орієнтує на необхідність повторення певних навчальних матеріалів; адаптує відомі математичні поняття до проблем статистики; вказує послідовність розгляду нової інформації, яка поповнює базу вихідних знань, тобто впорядковує матеріал у певній послідовності.

При цьому, адаптацію уже відомих математичних понять та відповідних формул, тобто актуалізацію опорних знань студентів, які будуть використовуватись при вивченні нової теми, доцільно проводити у вигляді фронтального опитування із записами на дошці, якщо це потрібно, та відповідними коментарями в усній формі.

Але більш ефективна, на нашу думку, актуалізація опорних знань, яка проводиться у письмовій формі на початку практичного заняття. Так, наприклад, для відновлення попередніх знань по темі “Опис статистичних даних” можна підготувати слайд з наступними питаннями:

1. Чому необхідно упорядковувати та систематизувати дані після того, як вони зібрані? Чому не залишити їх у вигляді ряду даних, порядок слідування яких зберігає їх цілісність і не порушує їх точного значення?

2. Визначте і наведіть приклади методів організації даних, перерахованих нижче. Які переваги кожного з них: а) Частотний розподіл; б) Накопичений (кумулятивний) частотний розподіл; в) Розподіл відносних частот; г) Гістограма; д) Полігон.
3. Які будуть обмеження границі інтервалів частотного розподілу, що можуть ефективно впливати на обробку неперервних вибіркових даних як противаги дискретних?
4. Яка різниця між згрупованими розподілами “менше ніж” та “більше ніж” накопиченої частоти? Наведіть короткі приклади для кожного типу.
5. Коротко опишіть правила, які можуть бути покладені в основу поділу на інтервали та визначення їх границь при розподілі частот. Які припущення мають бути відомими при обробці неперервних даних.

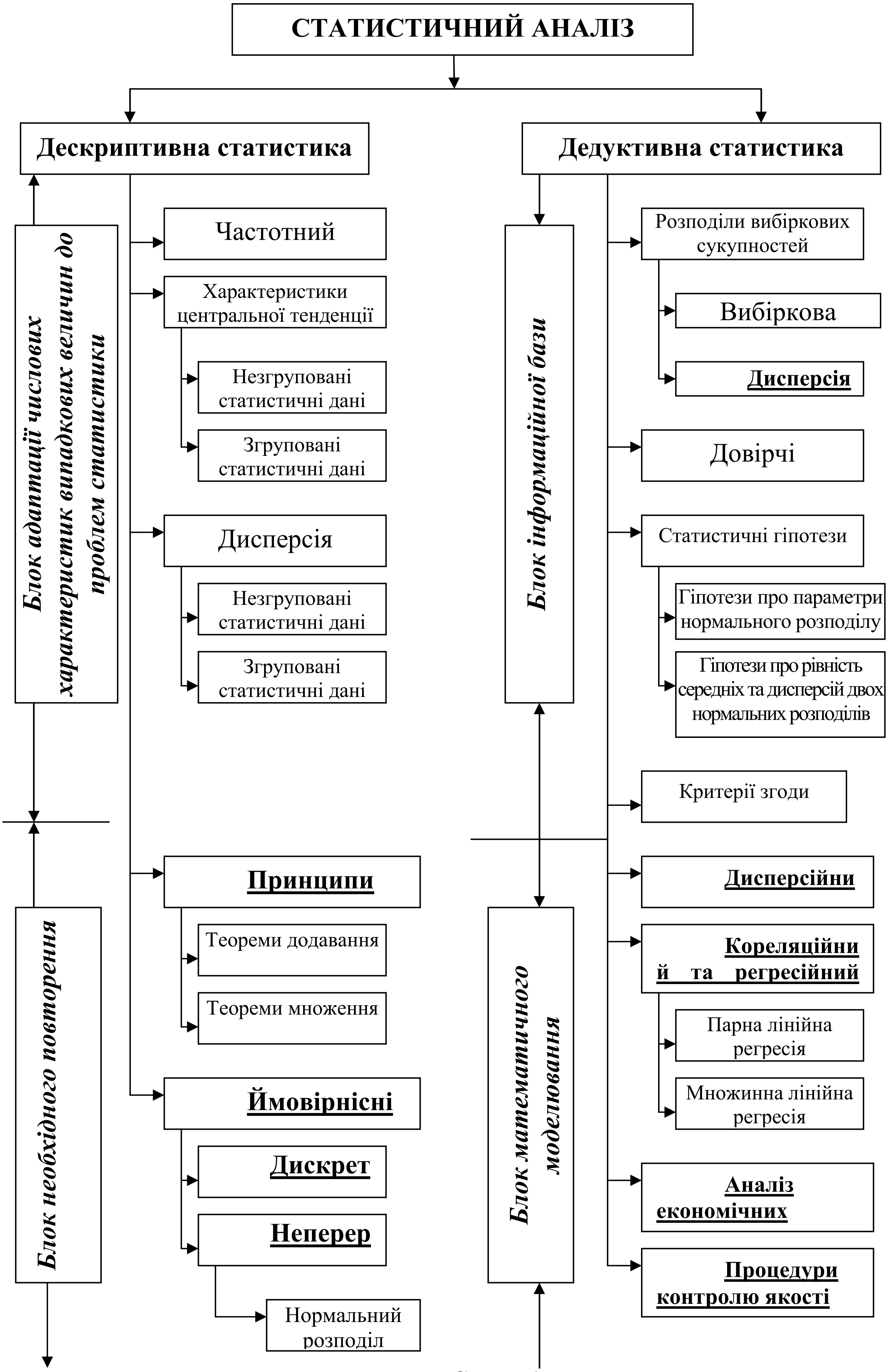

СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ
Дескриптивна статистика
Дедуктивна статистика
Блок адаптації числових характеристик випадкових величин до проблем статистики
Частотний
Характеристики центральної тенденції
Незгруповані статистичні дані
Згруповані статистичні дані
Дисперсія
Незгруповані статистичні дані
Згруповані статистичні дані
Блок необхідного повторення
Принципи
Теореми додавання
Теореми множення
Ймовірнісні
Дискрет
Неперер
Нормальний розподіл
Блок інформаційної бази
Розподіли вибіркових сукупностей
Вибіркова
Дисперсія
Довірчі
Статистичні гіпотези
Гіпотези про параметри нормального розподілу
Гіпотези про рівність середніх та дисперсій двох нормальних розподілів
Критерії згоди
Блок математичного моделювання
Дисперсійни
Кореляційни й та регресійний
Парна лінійна регресія
Множинна лінійна регресія
Аналіз економічних
Процедури контролю якості

Схема 1

Або запропонувати прийняти рішення в наступних ситуаціях, які розташовані по мірі ускладнення. При цьому кожен студент сам вибирає ситуацію:

1. Щорічно журнал “Фортуна” публікує перелік 500 відомих корпорацій, що досягли найбільших обсягів продажу різноманітних товарів та послуг. Як помічник начальника відділу менеджменту та торговельних операцій, ви намагаєтесь проаналізувати оприлюднені статистичні дані обсягів продажу цих фірм, але вважаєте, що звичайне перерахування всіх видів товарів та послуг, реалізованих на ринку, неефективна процедура.

Тому, ви маєте вирішити, яким чином узагальнити статистичні дані, щоб аналітики вашої фірми змогли проникнути у суть даних, оцінити значущість кожної позицій, що стали невід’ємними компонентами успішної діяльності цих корпорацій. Обміркуйте своє рішення та опишіть технічні особливості варіанту, який ви пропонуєте.

2. Як новому співробітнику великої комп’ютерної компанії, Вам доручено підготувати детальний звіт про діяльність вашої фірми інвесторам, які не зовсім розуміються на статистичних поняттях. Обміркуйте і оберіть методику, якою ви скористаєтесь для розв’язання вашої проблеми.

Отже, використання таких інтерактивних прийомів уже на початку практичного заняття справить сильне враження на студентів, захопить їхню увагу, активізує пізнавальну діяльність, визначить їх рівень навченості і научуваності, що може привести до легкого стресу та, як правило, мобілізувати на подальшу інтенсивну діяльність відповідно їх потенційних можливостей.

Зауважимо, що рівень попередніх знань студентів стане відомим викладачу після відповідної перевірки, але до зустрічі на індивідуальному занятті, на консультації, практичному занятті тощо, тобто можливі варіанти оцінки ефективності зворотного зв’язку між лектором-студентом, студентом-викладачем практичного заняття та внесення необхідних коректив в процес навчальної діяльності. Стосовно основної частини практичного заняття, то після визначення його теми, наприклад “Проста вибіркова лінійна регресія і кореляція” доцільно реалізувати наступні етапи:

1. Студенти за допомогою викладача виявляють основні поняття цієї теми (регресійна модель, кореляція, звичайний МНК (метод найменших квадратів), припущення до його застосування, поняття адекватності моделі тощо); пропонується самостійно побудувати блок-схему послідовного взаємозв’язку цих понять (колективна версія подається на дошці);
2. На слайді запропонувати версію викладача, порівняти їх, обговорити відмінності, прийти до компромісного варіанту (див. схему 2).
3. Згідно конспектів лекцій підібрати інформаційне забезпечення даної теми у вигляді інформаційної довідки формул.

Схема 2

4. Пропонуються наступні вправи і завдання для індивідуального виконання (i – номер прізвища студента у загальному списку групи).

   1) Використавши ANOVA-таблицю (таблицю однофакторного дисперсійного аналізу), знайдіть оцінку середньоквадратичного відхилення випадкової величини.

   2) Відома інформація про дві змінні – x і y:

;

Знайдіть рівняння регресії y на x. Поясніть значення нахилу та перетину регресійної моделі.

3) Встановити взаємозв'язок між обсягом продажу товару (y) та затратами на рекламну діяльність (x) оцінюючи таку регресію: . Поясніть результати регресії.

4) Згідно таблиці значень факторів x та y

Таблиця 1

№ п/п	x	y
1	$10 + i$	$21 + i$
2	$8 + i$	$32 + i$
3	$12 + i$	$18 + i$
4	$3 + i$	$24 + i$
5	$5 + i$	$27 + i$

а) обчисліть коефіцієнт кореляції між x та y;

б) знайдіть рівняння регресії y на x та оцініть її нахил та перетин;

в) побудуйте діаграму розподілу значень факторів та рівняння регресійної моделі.

5) Зробіть оцінку функції споживання від доходу:

а) Яка змінна є залежною і яка змінна незалежною?

б) Пояснити взаємозв'язок між споживанням і доходом.

в) На скільки зросте споживання, якщо доход (x) збільшиться на 1грн.?

г) Яким буде споживання, якщо доход буде нульовим?

6) Нехай коефіцієнт детермінації у регресійній моделі завдання 5 становить 0,65. Поясніть, що це означає?

5. Проводиться підсумок, оцінюються результати співпраці студентів, ще раз акцентується увага студентів, що регресійний аналіз застосовується для знаходження взаємозв'язку між двома змінними, нагадуються методи оцінювання параметрів вибіркової моделі, щільності їх взаємозалежності. При цьому визначається мета подальшого вивчення цієї теми, де вказується, що на наступне практичне заняття необхідно:

- вміти перевіряти регресійну модель на адекватність за F-критерієм;
- тестувати значимість параметрів регресії a_0 та a_1 за t-тестом Стьюдента;
- обчислювати інтервали довіри для параметрів моделі;
- тестувати значимість коефіцієнта кореляції;
- будувати довірчі інтервали для прогнозного значення залежної змінної.

Отже, домашнє завдання студентам буде наступним:

1. Побудувати опорний конспект-схему теоретичних процедур відповідно навчальним цілям заняття.
2. Підібрати коло проблем у бізнесі та економіці, де можливе застосування лінійних однофакторних моделей.
3. Продовжити заповнення інформаційної довідки відповідно поставлених проблем.
4. Познайомитись з можливостями табличного процесору “Excel” у контексті його застосування для розв'язання завдань, пов'язаних з лінійною регресійною моделлю.
5. Відома статистика про динаміку двох економічних показників:

x_i	40	25	36	45	15	10	9	56	36	37

y_i	15	12	13	24	8	7	7	22	14	15

а) знайти регресійну модель та інтерпретувати результати; б) побудувати діаграму розсіювання, пояснити результати; в) графічно зобразити відхилення фактичних даних згідно регресійної прямої. Яке узагальнення можна зробити?; г) обчислити та інтерпретувати коефіцієнт кореляції.

Отже, подібний підхід до організації практичного заняття, на якому використовуються інтерактивні методи навчання у поєднанні з колективною, груповою та індивідуальною роботою студентів, без сумніву, сприяє активізації їх пізнавальної діяльності, тому що: визначає, що повинен знати та вміти студент з даної навчальної теми; залучає студентів до активного процесу добування нових знань, до вирішення питань проблемного характеру; створює яскравий фон для перебування студентів у постійній напрузі, відчуваючи різноманітність, цікавість, корисність завдань та дух суперництва; поглиблює мотивацію студентів до навчання, демонструючи доцільність і корисність математичних знань, можливості їх застосування у майбутній професійній діяльності; заохочує студентів працювати, повністю використовуючи свій власний потенціал; надає більшої можливості для індивідуальної роботи студентів групи, у процесі якої реалізується система керованого навчального процесу відповідно до цілей і завдань, що визначаються як викладачем, так і студентом; формує впевненість студента відповідно змісту навчального матеріалу, тому що, по-перше, саме він має змогу самостійного вибору вправ і завдань; по-друге, можливість визначити, у контексті самооцінки, якому матеріалу слід приділити особливу увагу; збільшує час викладача на діагностику рівня знань та допомогу при труднощах, які можуть виникнути у студента при засвоєнні теми.

Резюме. Рассматриваются особенности проведения практических занятий по математическим дисциплинам с использованием математического моделирования для студентов экономических специальностей.

Summary. The features of practice realization on mathematical disciplines with use mathematical modelling for the students of economic specialities are considered.

Надійшла до друку 15.01.2002 р.

ПРИКЛАДНАЯ НАПРАВЛЕННОСТЬ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Н.И. Селякова, ассистент,
Донецкий национальный университет

Прикладная направленность в обучении математике включает в себя политехнизацию обучения, связь обучения с жизнью, межпредметные связи, способствует формированию устойчивого интереса к предмету математики, т.к. учащийся имеет возможность постичь глубину проникновения математики в различные области знаний. Кроме того, как отмечает Г.П.Бевз (Бевз Г.П. Прикладна спрямованість шкільного курсу геометрії: Посіб. для вчителя. – К., 1999.), она помогает осуществлению профориентационной работы в школе, поэтому немаловажной является идея ознакомления студентов, будущих учителей математики, в рамках специального курса «Прикладная направленность в обучении математике» с новыми и новейшими теориями, понятиями, фактами в математике, их связями со смежными и другими науками, приложениями.

К таким значительным теориям относится современная интерпретация теории фракталов. В статье мы предлагаем вариант вводной лекции о фракталах, считая, что учителям и школьникам небезинтересно узнать об этих удивительных математических объектах и их неожиданных приложениях в разных науках.

В последнее время значительно возрос интерес к математическим объектам, еще недавно считавшимися «экзотическими» и даже «патологическими». Это непрерывные нигде не дифференцируемые функции, кривые и поверхности, не имеющие касательной ни в одной точке, сингулярные распределения, множества, не имеющие нетривиальной (отличной от нуля и бесконечности) меры Лебега [1] и др. Объединяет эти, на первый взгляд столь разные объекты, понятие фрактала – множества, размерность Хаусдорфа-Безиковича [2] которого не совпадает с топологической. Можно сказать, что первоисточником теории фракталов является работа Хаусдорфа «Dimension und auberes. Mab// Math/ Ann-1919», где он рассматривал понятие α-меры Каратеодори [1] в n –мерном пространстве, содержащей в качестве частного случая меру Лебега, с целочисленных значений α на любые положительные, впервые ввел понятие метрической размерности, которая может быть и дробной («фрактальной») размерностью. Больше в этом направлении Хаусдорф не опубликовал ни одной работы. Его идеи были обобщены и развиты далее в публикациях А.С.Безиковича, который длительное время занимался этой тематикой.

Второе «открытие» фрактальных множеств сделал Бенуа Мандельброт [3]. Он довольно долго и скрупулезно создавал свою мысленную картину мира, изучая колебание цен на хлопок. Так получилось, что в картине мира по Мандельброту не нашлось места дихотомии. Вместо того, чтобы отделить небольшие изменения от ощутимых, воображение свело их воедино. Ученый не отдавал предпочтения ни мелкому ни крупному масштабу, ни дням ни десятилетиям – его интересовала целостная картина. Когда Мандельброт на компьютере проанализировал информацию об изменении цен на хлопок, ожидаемые им результаты не заставили себя ждать. Они были потрясающими. Точки, которые не желали ложиться на кривую нормального распределения (это кривая Гаусса [3], имеющая форму колокола), обнаруживали странную симметрию, иначе говоря, каждый отдельный скачок цены был случайным и непредсказуемым, но последовательность таких изменений не зависела от масштаба. Кривые, изображавшие дневные скачки, и те, что воспроизводили месячную динамику, прекрасно соответствовали друг другу. Внутри самых, казалось бы, хаотических нагромождений информации скрывался поразительный порядок. Поразительный настолько, что Мандельброт задался вопросом: какой еще закон сохранил бы свою силу, будь он приложен к столь произвольной выборке данных. Почему одна и та же закономерность справедлива и для распределения доходов и для динамики цен на текстильное сырье. Далее

Мандельброт обратился к информации из гидрографии – из истории Нила. Египтяне тысячелетиями наблюдали и фиксировали уровень вод для оценки будущего урожая и определения будущих налогов. Уровень вод Нила варьировался чрезвычайно резко: в иные годы он поднимался довольно высоко, в другие поток мелел. Мандельброт классифицировал данные о таких изменениях. Он выделил два типа эффектов, наблюдаемых также и в экономике, и назвал их эффектами Ноя и Иосифа.

Эффект Ноя, или скачок, обозначает отсутствие последовательности, иначе, разрыв: количественная величина может меняться как угодно быстро. Также и в экономике: цены могут совершать мгновенные скачки, сменяющие друг друга с огромной быстротой.

Эффект Иосифа символизирует непрерывность. Периоды наводнений и засухи настают вновь и вновь, чередуясь друг с другом. Математический анализ колебаний уровня Нила выявил, что подобное постоянство наблюдалось как десятилетиями так и веками.

Два явления – скачок и непрерывность – стремятся к противоположным результатам, но сводятся к одному: тенденции в природе вполне реальны, однако способны затухать так же быстро, как и проявляться. Отсутствие последовательности, внезапные вспышки помех в электрических цепях, множества Кантора [4] – подобным явлениям не нашлось места в геометрии двух прошедших тысячелетий.

Для постижения истинной сложности наука нуждается в ином типе измерения, чем тот, что присущ классической геометрии. Новая геометрия подобна зеркалу, отражающему вовсе не плавные и мягкие очертания привычной Вселенной, а неровный и шершавый контур иного мира. Зарождающуюся науку можно назвать геометрией ям и впадин, фрагментов разбитого единства, изгибов, узлов, переплетений. Впадины и сплетения стоят много больше, нежели классические формы Евклидовой геометрии, зачастую являясь ключом к постижению самой сущности явлений.

Рис.1 Множество Кантора.

Анализ, проделанный Мандельбротом при изучении береговой линии Великобритании [5], ошеломлял. Длина любой береговой линии, объяснял Мандельброт, в известном смысле бесконечно велика. Мандельброт обнаружил, что при бесконечном уменьшении меры измеряемая длина береговой линии неограниченно растет. Мандельброт двигался от целочисленных размерностей 0, 1, 2, 3, ... к тому, что казалось невозможным – дробным измерениям. Дробное измерение позволяет вычислять характеристики, которые не могут быть определены четко другим путем: степени неровности, прерывистости или неустойчивости какого-либо объекта. Мандельброт указал пути расчета дробных измерений объектов окружающей действительности при использовании определенной методики [2] построения форм или некоторых заданных величин. Создавая свою геометрию, он выдвинул закон о неупорядоченных формах, что встречаются в природе.

Закон гласил: степень нестабильности постоянна при различных масштабах. Справедливость этого постулата обнаруживается вновь и вновь. Мир снова и снова обнаруживает устойчивую неупорядоченность.

Стержнем новой геометрии стал термин «фрактал » от «разбивать», «дробить», «разрыв».

Фрактал позволяет вообразить бесконечность!

Фрактальное измерение оказалось замечательным инструментом. В известном смысле степень неровности определяла способность того или иного объекта занять определенное пространство. Обычная Евклидова кривая – одномерна, чего нельзя сказать о кривой Коха, которая теснится в ограниченном пространстве.

Рис.2 «Снежинка» Коха.

Кривая Коха, или «снежинка» Коха строится следующим образом. Каждая сторона равностороннего треугольника делится на три равные части. На средней части достраивается равносторонний треугольник, при этом основание достроенного треугольника удаляется и т.д.. Длина контура полученной фигуры равна: 3*4/3*4/3*4/3*... до бесконечности т.е. следующее построение увеличивает периметр в 4/3 раза, а значит длина стремится к бесконечности. При этом фигура вписана в окружность, описанную около первоначального треугольника. Таким образом бесконечно длинная линия очерчивает ограниченную площадь (рис 2).

«Снежинка» Коха, свойства которой оказались настолько странными и неожиданными, потрясла математический мир. Итальянский математик

Э.Чезаро, удивленный внутренней бесконечностью и самоподобием «снежинки», писал в 1905 году: «Если бы она была одарена жизнью, то можно было бы лишить ее жизни, только уничтожив кривую в целом. В противном случае она бы возрождалась снова и снова из глубины своих треугольников, как это делает жизнь во Вселенной» [4].

Другими каноническими примерами фрактальных множеств, кривых, поверхностей служат «набивка» Серпинского, «ковер» Серпинского, «губка» Серпинского [2]. «Набивка»,»ковер», «губка» Серпинского – это линии, лишенные нетривиальной меры, обладающие свойством самоподобия, как и «снежинка» Коха.

Рис.3 «Набивка» Серпинского.

Рис.4 «Ковер» Серпинского. Рис.5 «Губка» Серпинского.

Остановимся подробнее на объекте «набивка» Серпинского (рис.3). Последовательность построения «набивки» следующая. В равностороннем треугольнике каждая сторона делится пополам, и точки деления соединяются отрезками. Полученный внутренний треугольник удаляется. С оставшимися тремя треугольниками проделывается та же операция и т.д. до бесконечности. «Набивка» обладает качеством, которое весьма трудно представить: любая произвольная точка является точкой разветвления, «вилкой» в структуре. Очень трудно постичь всю сложность бесконечности , внедряющейся в самое себя.

Общим в описанных конструкциях является их самоподобие и отсутствие нетривиальной меры, хотя, вообще говоря , эти свойства не являются типичными для фракталов, но в большинстве случаев являются достаточными для фрактальности.

Рис.6 Дракон-Хартера-Хейтуэя.

Примеры изображений, полученных с помощью множеств Джулиа. представлены на следующем рисунке.

Характеристические свойства фракталов связаны с понятием размерности множества [1]. Фрактальное измерение [4] оказалось замечательным инструментом постижения описанных выше структур. В известном смысле степень неровности , шероховатости определяла способность того или иного объекта занять определенное пространство. Например, кривая Коха является уже не просто линией, это нечто большее, но еще и не плоскость, она глубже одномерного объекта, но поверхностнее двумерного.

Мандельброт смог вполне точно описать фрактальное измерение. Для кривой Коха размерность равна 1.2618.

Исследование образцов неупорядоченности в естественных процессах и анализ бесконечно сложных форм пересекались, и точкой пересечения послужило так называемое внутренне подобие. «Фрактальный» – это прежде всего «внутренне подобный». Внутреннее подобие – это симметрия , проходящая сквозь масштабы, повторение большого в малом.

Удивительные формы вроде кривой Коха являлись внутренне подобными, так как выглядели все теми же при любом увеличении – одно и то же преобразование повторяется в уменьшающемся масштабе.

О размерности Хаусдорфа-Безиковича, о фрактальной структуре систем человека, о других фрактальных объектах в биологии и других науках поговорим в следующей лекции.

1. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г.. Функциональный анализ. – К.: Вища школа, 1990. – 600 с.
2. Горобець Ю., КучкоА. Вступ до фізики фрактальних структур. Посібник для студентів фізичних спеціальностей вищих закладів освіти. – Тернопіль: “Підручники та посібники”, 2000. – 125 с.
3. Глейк Д.. Хаос. Создание новой науки. – С-Пб.: Амфора, 2001. – 398с.
4. Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. – К.: Наукова думка, 1992. – 207 с.
5. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.

Резюме. Розглядаються деякі психологічні аспекти підвищення активності студентів та учнів у вивченні математики. Планується продовження цієї тематики.

Summary. The article tells about increasing activity in students mathematical studying.

Надійшла до друку 23.03.2002 р.

ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ НАСТУПНОСТІ МІЖ ПОЧАТКОВОЮ І ОСНОВНОЮ ШКОЛАМИ ПІД ЧАС НАВЧАННЯ УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЮ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ АРИФМЕТИЧНИМИ СПОСОБАМИ

С.М.Лук'янова, аспірант,

Національний педагогічний університет ім. М.П.Драгоманова, м. Київ

Щоб продовжувати в 5-6 класах ефективно навчати учнів розв'язуванню текстових задач, вчитель має бути обізнаним щодо змісту і методики цієї роботи, яка проводилась в початковій школі, здійснювати наступність у процесі навчання. Мета цієї статті – показати вчителям основної школи зміст і методичні особливості навчання учнів розв'язуванню текстових задач в початковій школі і сформулювати завдання, які повинні ставитись перед вчителем у зв'язку з навчанням учнів 5-6 класів розв'язуванню текстових задач арифметичними способами.

Останнім часом психологи, дидактики, методисти і вчителі-практики прийшли до висновку, що скорочення в 5-6 класах традиційної системи задач, які розв'язуються арифметичними способами, і раннє навчання алгебраїчному методу розв'язування задач за допомогою рівнянь стали однією з причин погіршення розвитку мислення учнів та зниження рівня їх математичної підготовки.

Текстові задачі займають значне місце у навчанні математики. Вони є і предметом навчання, і, головне, засобом розвитку мислення учнів, їх кмітливості, винахідливості, інтересу до предмету. Задачі допомагають в формулюванні математичних понять і засвоєнні різних способів розв'язування, в реалізації прикладної спрямованості курсу математики. Вміння розв'язувати задачі є критерієм успішності навчання математиці.

Для того, щоб повернення в 5-6 класи задач, які розв'язуються арифметичними способами, сприяло розвитку розумової діяльності учнів і допомагало в старших класах засвоєнню алгебраїчного методу, потрібно розв'язати ряд методичних проблем. Це стосується типізації задач, розміщення їх в певній системі, доцільності різних типів та способів розв'язування задач.

Як показало експериментальне навчання в школах м. Києва, обов'язково потрібно вирішити питання про забезпечення наступності при розв'язуванні задач між початковою школою та 5-6 класами, а також перспективних зв'язків з систематичним курсом алгебри 7-9 класів.

За роки навчання в початковій школі учням пропонується близько 2000 завдань на розв'язування задач та різні види творчої роботи з ними. Але незважаючи на таку велику кількість задач, у багатьох учнів на початок навчання в 5 класі несформовані загальні уміння щодо розв'язування задач, тому задача іншого сюжету чи трохи ускладненого словесного опису викликає значні труднощі. Проаналізуємо причини такого стану та шляхи його поліпшення.

Вивчення математики у початкових класах здійснюється через систему доцільних задач і практичних робіт. Як зазначено в програмі [4], орієнтація на розв'язування задач як на провідний вид діяльності учнів під час вивчення математики – є однією з ідей, які мають бути покладені в основу навчання.

За призначенням задачі, які розглядаються в початковій школі, можна умовно розділити на 4 групи [1]:

1) Задачі, які ілюструють застосування табличних випадків арифметичних дій, алгоритмів їх виконання; призначені для введення математичних понять, показу їхнього практичного значення.
2) Задачі й завдання, які розкривають поняття “задача”, створюють уявлення учнів про способи розв’язування задач, підводять їх до розуміння загального підходу до розв’язування математичних задач.
3) Задачі програмного мінімуму на 1-4 дії.
4) Задачі з логічним навантаженням.

До недавнього часу найбільша увага зверталась на задачі програмного мінімуму, які поділяються на прості і складені. Основне призначення простих задач – показати випадки застосування арифметичних дій. За характером цих випадків задачі об’єднуються в три групи: а) задачі на конкретний зміст арифметичних дій; б) задачі на зв’язки між компонентами і результатами арифметичних дій, тобто на знаходження невідомих компонентів; в) задачі на збільшення чи зменшення числа на кілька одиниць чи в кілька разів (у прямій і непрямій формі), на різницеве чи кратне порівняння двох чисел. Окремо розглядають задачі на ділення з остачею, на знаходження частини від числа і числа за його частиною.

Таким чином, на одну дію в початкових класах розглядаються 28 видів задач. В процесі розв’язування простих задач учні опановують основні прийоми роботи над задачею. Отже, знання “задачної азбуки”, тобто простих задач, є необхідною умовою успішного формування і розвитку вмінь розв’язувати складені задачі.

Задачі на 2 дії часто виступають “блоками”, з яких складається розв’язування задач на 3 і більше дій. Близько 30 видів задач на 2 дії поділено на 7 груп: а) найлегші зведені задачі на дії одного та різного ступенів; б) задачі з відношенням; в) задачі з “сумою” (або іншим виразом); г) на двоопераційне знаходження невідомого компонента; д) на порівняння з результатом чи з іншим числом; є) на знаходження четвертого пропорційного; ж) задачі, які включають знаходження частини числа.

Задачі на 3-4 дії утворюються шляхом “розширення” задач на дві дії через доповнення умови чи постановки іншого запитання, а також це задачі на знаходження суми чи різницевого або кратного порівняння двох добутків (сум, різниць, часток), на пропорційне ділення, на знаходження двох чисел за двома різницями, за кратним порівнянням і їх сумою (різницею), за їх сумою і різницею. Крім того, в окремі види виділяються задачі на рух, на час (знаходження тривалості події, початку або її закінчення), задачі з геометричним змістом.

Така велика кількість видів задач наводить на думку, що вчителі змушені досить рідко проводити повний аналіз складеної задачі та порівняння її з вже відомими видами, а одразу спрямовують діяльність учнів на відшукання способу її розв’язування.

Аналіз методичних посібників для вчителів свідчить про те, що головна увага в них приділяється поясненням, як найшвидше розв’язати задачу. Майже зовсім відсутні методичні рекомендації щодо організації свідомого вибора учнями раціональних прийомів, що полегшують пошук розв’язання складеної задачі. Відсутні і рекомендації по формуванню в учнів загальних розумових дій, потрібних для розв’язування задач, узагальнюючих евристичних схем, способів розв’язування окремих видів задач.

Відвідування уроків, анкетування вчителів початкових класів показало, що більшу частину учбового часу при повторенні матеріалу за курс початкової школи вони відводять на закріплення обчислювальних навиків (розв’язування прикладів) та на знаходження невідомих компонентів дій (це пов’язано з орієнтацією на навчання учнів використанню рівнянь при розв'язуванні текстових задач в 5 класах). Задачний матеріал повторюється недостатньо глибоко, а методичні прийоми роботи над задачами досить одноманітні.

В останні роки в підручниках початкової школи значно збільшилась кількість видів творчої роботи над задачами та частота їх застосування. Зупинимось коротко на характеристиці деяких з цих завдань.

1. <u>Розв'язування задач за готовим планом чи схемою</u>. Такі завдання пояснюють учням потребу у складанні плану та розкривають "технологію розв'язування складеної задачі, її структуру" [3]. <u>Наприклад</u>: *у хлопчика 9 груш, а у дівчинки більше на 5. Скільки груш у дівчинки?*

<u>Міркуй за планом</u>. 1) Ця задача із словами "більше на ...". 2) У задачі відоме <u>менше</u> число (9). 3) Треба знайти <u>більше</u> число. 4) Більше число знаходять <u>додаванням</u>. 5) Треба до меншого числа додати ...

2. <u>Пояснення розв'язання</u>. В першому класі учням пропонують пояснити розв'язання задачі (про що дізналися кожною дією). Далі завдання трохи ускладнюється: пояснити дане розв'язання і розв'язати задачу іншим способом. Згодом учням пропонується нове ускладнення: з поміж кількох даних числових виразів знайти той, за допомогою якого розв'язується дана задача.

3. <u>Тлумачення виразів, складених за умовою задачі</u>. До задачі без запитання подано кілька числових виразів, складених за її числовими даними. Ставиться завдання: визначити про що дізнаються, обчислюючи кожен з виразів. Такі завдання допомагають всебічному аналізу ситуації, яка описується умовою задачі.

4. <u>Завдання з додатковою умовою вибору числових даних</u>. Це можуть бути такі три види завдань: а) задачі із зайвими даними; б) розв'язування двох простих задач, об'єднаних спільним сюжетом; в) використання малюнків чи таблиці з числовими характеристиками.

5. Розв’язування і порівняння груп задач. Групи задач можуть бути утворені за різною ознакою: пряма і обернена задачі, вид залежності між величинами тощо. Наприклад: *Яка з задач розв’язується дією множення?*
1. *У 6 коробок поклали по 2 олівці в кожну. Скільки всього поклали олівців?*
2. *Поклали 6 олівців в коробки, по 2 олівці в кожну. Скільки всього коробок?*
3. *Розклали 6 паличок порівну в 2 купки. Скільки паличок в кожній купці?*

6. Складання задач: а) на вказану дію чи за даним виразом; б) подібних чи обернених задач; в) певного виду; г) за коротким записом чи малюнком; д) доповнення задачі.

Хочемо звернути увагу ще на один різновид завдань, які тільки почали з’являтися в підручниках, але вже добре себе зарекомендували. Це завдання на виявлення “слів-ознак” для вибору дій. Як свідчить практика, за браком часу вчителі досить рідко проводять докладний семантичний аналіз задач, хоча користь такого аналізу в розвитку мислення учнів загальновідома.

У підручниках для 1 класу Кочиної Л.П., починаючи з перших сторінок, пропонуються такі завдання: “…виділи голосом підкреслені слова і числа. Поясни підкреслені слова… Учись виділяти опорні слова в запитанні задачі. Це допоможе тобі правильно і швидко вибрати дію для розв’язання” [3]. Доцільно продовжити і пропонувати в наступних класах завдання такого виду.

На думку авторів підручників, збільшення кількості і видів творчої роботи над задачею здійснено з метою посилення навчальних функцій завдань підручника та забезпечення можливостей диференціації навчання. Крім того, як показали відвідування уроків, такі завдання допомагають у формуванні в учнів загальних прийомів діяльності в процесі пошуку розв’язку (складання короткого запису, схеми, плану розв’язування, всебічного аналізу даних і шуканих тощо).

Таким чином, на початкову школу покладають завдання по забезпеченню міцної бази всієї подальшої математичної освіти.

Як показав навчаючий експеримент, якщо на перших уроках в 5 класі (а краще в перший місяць навчання) відбувається повторення основних видів задач, які розкривають смисл арифметичних дій, якщо це повторення проводиться не формально, а з елементами корекції, і при цьому використовувати ті форми організації уроку і методи навчання, до яких звикли учні в початковій школі, то подальша математична підготовка дійсно буде базуватись на вже сформованих знаннях і способах діяльності.

При повторенні доцільно використати таку таблицю:

Дія, за допомогою якої розв'язуються задачі	**Види задач**
1) додавання	а) на знаходження суми двох або кількох чисел; б) на збільшення числа на декілька одиниць
2) віднімання	а) на знаходження невідомого числа за сумою двох чисел і одного з них; б) на зменшення деякого числа на декілька одиниць; в) на порівняння двох чисел (на скільки одне більше чи менше за друге)
3) множення	а) на знаходження суми двох або декількох однакових доданків; б) на збільшення числа в декілька разів
4) ділення	а) на знаходження невідомого множника за даним добутком двох множників і відомим множником; б) на поділ числа на декілька рівних частин; в) на зменшення числа в декілька разів; г) на визначення, в скільки разів одне число більше чи менше за друге;

	д) на вміщення

Для того, щоб це повторення не було “тупцюванням на місці”, як раз і доцільно використовувати різні види творчої роботи над задачею.

Наприклад: *За схемою складіть задачі, використавши слова*:

а) “*важче*”, б) “*легше*”, в) “*швидший*”, г) “*довший*”, е) “*повільніший*” тощо.

10 … 48 …

Замість … відповідно постав необхідні одиниці вимірювання: м, см, г, хв.

Таке повторення допоможе наблизити зміст і методику навчання на перших уроках в 5 класі до тієї роботи, яка застосовувались в початковій школі, і допоможе подоланню психологічного бар’єру при переході з I на II ступінь навчання. На привеликий жаль, вчителі п’ятих класів часто не достатньо обізнані з вимогами програми початкових класів, тому без будь-яких пояснень вимагають від учнів розв’язування задач, які в початковій школі або не вивчались, або не належали до програмного мінімуму. Природно, що учні не справляються з цим завданням, уроки проходять не ефективно, діти втрачають віру в свої сили і інтерес до навчання. Таким чином, обізнаність вчителя 5 класу із змістом і характером викладу матеріалу в підручниках з математики початкової школи, є однією з умов здійснення наступності в процесі навчання.

При проведенні анкетування багато вчителів і початкової, і основної школи висловили пропозиції щодо створення програми неперервного курсу математики для 1-6 (або 1-9) класів. Така програма допомагала б вчителям бачити зміст і особливості навчання математики в початковій школі набутих знань і умінь в наступних класах, і перспективи розвитку. Автори [5] зробили спробу створити таку програму. Запропонована ними програма містить ряд цікавих ідей по роботі з іменованими числами, величинами та “геометричними об’єктами”. Але ідеї авторів програми відносно розв’язування текстових задач ми вважаємо на сучасному етапі розвитку шкільної освіти неприйнятними. Зокрема це стосується таких висловів, які в програмі записані вже на початку 1 класу: “Розв’язування рівняння як один із найбільш раціональних способів розв’язування задач… Перевага розв’язування задач за допомогою рівнянь”. Якщо учня в першому класі переконують в “перевазі рівнянь при розв’язуванні задач”, то він буде намагатися і прості задачі розв’язувати “через х”.

На завершення вкажемо заходи, які, на нашу думку, допомогли б забезпечити наступність у навчанні учнів математики між початковою і основною школою.

По-перше, потрібно узгодити програми і підручники для 4(3) і 5 класів. По-друге, потрібне змістовне ознайомлення вчителів п’ятих класів з програмою початкової школи, змістом навчального матеріалу і найпоширенішими в 4(3) класах формами організації уроку і методикою навчання. Для цього можна порадити не лише відвідування уроків в початковій школі вчителями 5 класів і навпаки, а і спільні методичні семінари; організацію відкритих уроків на важливі з погляду забезпечення наступності теми. По-третє, в педагогічних вузах для вчителів-предметників необхідне висвітлювання в курсі методики математики розв’язування текстових задач в початковій школі. По-четверте, доцільно створити і апробувати спільний для 4 і 5 класів збірник текстових задач, до якого обов’язково включити завдання щодо формування загального підходу до розв’язування будь-яких задач. По-п’яте, з метою допомоги вчителеві в дотриманні певної системи в доборі задач створити методичний посібник по розв’язуванню текстових задач арифметичними способами.

Важливу роль в розв’язанні зазначених проблем мають відігравати освітні стандарти з математики для початкової, основної і старшої школи.

1. Богданович М.В. Методика розв’язування задач в початковій школі: Навч. посібник. – К.: Вища школа, 1990.
2. Богданович М. Особливості вивчення математики в початкові школі // Математика в школі. – 1999. – №4.
3. Кочина Л.П. Математика: Проб. підручн. для 1 кл. трирічн. почат. шк. – К.: Спалах ЛТД, 1997.
4. Програми середньої загальноосвітньої школи. 1-4 (1-3) класи. – К.: Бліц, 1997.
5. Тарасов Л.В., Тарасова Т.Б., Чашечникова О.С. Експериментальна програма неперервного посиленого курсу математики для 1-6 х класів // Математика. – 2001. – №25-26.

Резюме. В статье рассматривается проблема преемственности при решении текстовых задач арифметическими способами.

Summary. The author analyses the reasons of pupils inability to solve textural problems.

Надійшла до друку 18.04.2002 р.

Знаково-символічні особливості текстів задач

Н.А.ТАРАСЕНКОВА, КАНД. ПЕДАГОГ. НАУК, ДОЦЕНТ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Особливими видами текстів, які опрацьовують учні у процесі навчання математики, є формулювання умов задач. Від специфіки знаково-символічних оболонок, в які загорнуто їхній зміст, значною мірою залежить успішність першого кроку в аналізі умови задачі – декодування вихідної інформації – та увесь наступний хід розв’язування.

Під час виявлення та аналізу вихідних даних задачі учні нерідко зазнають певних утруднень, припускаються помилок [2; 5]. Саме тут важливого значення набувають уміння учнів розпізнавати зміст за тими чи іншими знаково-символічними оболонками, використовувати різні знаково-символічні засоби для інтерпретування даних задачі.

З позицій психолого-семіотичного підходу [4], в текстах задач важливими є наступні їх характеристики:

– в якому плані (реальному чи символічному) сформульовано задачу;
– які знаково-символічні засоби (тільки природна мова; природна мова і логіко-математична символіка; природна мова і графічні ЗСЗ тощо) задіяні у формулюванні;
– чи притаманна тексту задачі властивість гіпертекстовості [6], і якщо так, то якого виду й порядку;
– чи є необхідним створення додаткових заміщувачів для конкретизації умови та діяльності декодування (наприклад, у більшості геометричних задач, сформульованих словесно, для декодування інформації потрібно створити відповідний рисунок);
– чи потребується переформулювання тексту для повного декодування інформації, чи воно може відбутися у результаті послідовного опрацювання текстових елементів.

Умови більшості задач шкільного курсу математики, як правило, задаються у символічному, а не реальному плані – в них не йдеться про побутові, виробничі та інші ситуації. Їх зміст подано у математичних термінах, а значить аналіз тексту відразу має відбуватися як рух у тій символічній реальності, яку змодельовано задачею. Через це, успішне декодування вихідних даних таких задач цілком залежить від того, наскільки явно у тексті задачі представлена істотна інформація, як і які розставлено акценти, чи виведено назовні контекстні зв'язки апарату розв'язування задачі із тим навчальним матеріалом, що є предметом поточного навчання.

З огляду на такі міркування, одне й те саме формулювання умови задачі у залежності від того, в який момент навчання вона використовується, може вимагати від учнів різних розпізнавальних процедур. Наприклад, якщо задача "Розв'яжіть рівняння $2x^2 - 3x + 2 = 0$"

пропонується учням при вивченні теми “Квадратні рівняння”, тоді її контекстний зв’язок із темою дозволяє минути (або здійснити миттєво, на неусвідомлюваному рівні) процедуру ідентифікації даного рівняння як квадратного і відразу перейти до виявлення його коефіцієнтів та застосування необхідної формули. Якщо ж ця задача пропонуватиметься учням у будь-який інший момент навчання й особливо тоді, коли він значно віддалений у часі від вивчення даної теми, тоді з’ясування, чи є дане рівняння квадратним, виступає необхідним етапом аналізу умови.

При цьому, нерідко виявляється, що учні не готові до виконання такої діяльності. Справа в тім, що можливість обминати процедуру ідентифікації рівняння як квадратного при вивченні теми “Квадратні рівняння” хоча й дозволяє зекономити ресурси учнів та сконцентрувати їх зусилля на відпрацюванні способу розв’язування, але призводить і до негативних наслідків. Зокрема, до них треба віднести те, що в досвіді учнів часто утворюється спайка змісту і форми “квадратне рівняння – це $\ x^2 + \ x + \ = 0$”. Через неї, ідентифікуючи рівняння, учні здебільшого задовольняються лише візуальним аналізом, а змістовий аналіз не проводять. Причому, значна кількість початкових вправ, в яких квадратний тричлен подано у стандартному вигляді, лише підкріплює в учнів впевненість у правомірності їх дій. Отже, знаково-символічні оболонки цих задач потрібно варіювати так, щоб із самого початку в учнів формувалась потреба виявляти тип рівняння та відповідні вміння.

Сім’я задач, в яких описано побутові, виробничі та інші ситуації, відрізняється від попереднього класу задач перш за все тим, що математичні відношення між реальними об’єктами дійсності в них не виведено назовні. Для успішного декодування інформації важливого значення набуває увесь семіотичний досвід учнів, уплетений у канву їх математичних знань, навичок і вмінь. Якщо події, які розгортаються у задачі, мали (чи, принаймні, могли б мати) місце у житті учня та його оточуючих, тоді життєвий досвід школяра виступатиме помічником у математизації ситуацій, а в противному випадку – навпаки. Зокрема, гальмівний ефект виникатиме через те, що учню знадобляться додаткові зусилля для того, щоб уявити реальний перебіг подій, відчути себе їх співучасником.

Це не означає, що у навчанні математики не потрібно використовувати задачі, наприклад, із виробничою та іншою тематикою. Навпаки, загальновизнаним є факт того, що вміння учнів розв'язувати прикладні задачі є найбільш вагомим показником якості їх математичної підготовки. Проте, уведення учнів у світ застосувань математики, на нашу думку, має відбуватися за принципом послідовного віддалення від особистісних переживань. Особливо це важливо на початкових етапах вивчення курсу математики основної школи.

У формулюваннях однотипних задач прикладного характеру варіювання ситуацій за показником особистісної участі доцільно здійснювати за такою схемою:

– задача формулюється із використанням *Я-словника* учнів даного віку;
– задача формулюється із використанням *словника найближчого оточення* учнів даного віку;
– задача формулюється *у термінах, віддалених від особистого досвіду* учнів даного віку.

Наприклад, за такою схемою побудовано наступну систему задач:

1) Уяви, що школа знаходиться від твого дому на відстані 1 км, і шлях до неї пролягає по прямій. На дорогу до школи щоранку ти витрачаєш 15 хвилин. Сьогодні ти трохи забарився. Як потрібно змінити швидкість твого руху, щоб подолати цей шлях за 10 хвилин?
2) Відстань від школи до спортклубу становить 1 км. Тетянка долає її за 15 хвилин, а Іванко – за 10 хвилин. Чия швидкість більша та на скільки?
3) Деяке фізичне тіло, рухаючись рівномірно, проходить шлях, довжиною 1 км, за 15 хвилин. Як потрібно змінити швидкість рівномірного руху тіла, щоб воно подолало цей шлях за 10 хвилин?

Зауважимо, що формулювання більшості задач із використанням Я-словника учнів доцільно здійснювати у термінах вірогідної ситуації – учень може потрапити у неї в реальному житті, але може й не потрапити. Якщо описувати задачу як подію, що вже відбулася у житті учня, тоді неминучими будуть зіставлення цієї події з особистим досвідом, що відволікатиме учня від безпосереднього математичного завдання.

Знаково-символічні оболонки задач шкільного курсу математики утворюються як засобами природної мови, так і з використанням логіко-математичної символіки та інших ЗСЗ. Причому, у кожному з цих випадків питання про трудність повноцінного декодування інформації не вирішується автоматично. Не обов’язково, що задачі, сформульовані засобами природної мови, є найлегшими для декодування, а умови задач, що містять математичну символіку, виявляються найбільш трудними. І обернений зв’язок також не є абсолютним. Ця характеристика текстів математичних задач безперечно має вагоме значення для процедур вичерпування вихідної інформації, але набуває відповідного наповнення (а значить, має детально аналізуватися) лише у зв’язці із конкретним предметним змістом задач та їх дидактичним призначенням.

Наприклад, кожна із наведених вище задач на рух містить символічний запис чисел. Тексти цих задач можна було б сформулювати лише засобами природної мови – замість “1 км” записати “один кілометр” тощо. Але, оскільки основною інформацією є функціональна залежність між швидкістю, часом та відстанню, а дані величини є носіями лише конкретної інформації, зчитування якої не повинно гальмувати процес декодування основної інформації, то заміна символічного позначення чисел на їх мовні аналоги не є доцільною.

Однак, за нашими спостереженнями, нерідкими є ситуації, коли учні, вилучивши інформацію про конкретні числові значення (а вони просто “кидаються у вічі” у текстах таких задач), починають формальне маніпулювання ними – додають, множать, ділять ці числа, підганяючи результат під відповідь, якщо вона наведена до задачі. Все це є свідченням того, що даним числовим значенням учні надали статусу основної інформації, через що припинили подальший її пошук у тексті задачі. Такого б не сталося, якби учні мали звичку не відокремлювати конкретне числове значення від назви величини, а відразу утворювали цілісні одиниці інформації: "відстань 1 км"; "час 15 хвилин"; "швидкість невідома". Називання термінів не тільки б створювало певні перешкоди для формального маніпулювання числами, але й підштовхувало мимовільне пригадування сутності функціонального зв'язку поміж даними величинами.

Кожній задачі курсу математики основної школи притаманна внутрішня гіпертекстовість від першого до четвертого порядку, які пов'язані із використанням термінології, символіки, інших знаково-символічних засобів та необхідністю опрацьовувати текст задачі на рівні окремого речення, субабзацу й абзацу. Внутрішня гіпертекстовість більш високих порядків – на рівні квазіабзаців різного обсягу, скоріше є виключенням, аніж правилом для формулювань задач, представлених у підручниках і посібниках з математики для 5-9 класів.

За показником зовнішньої гіпертекстовості у формулюваннях задач часто проявляються такі особливості:

– використання рисунків, графіків, таблиць тощо, які поряд із текстовими фрагментами несуть істотну інформацію щодо даних задачі (зазначимо, що у такому випадку не йдеться про використання немовних елементів у дублюючій функції – як засобів додаткового роз'яснення, унаочнення тощо);
– взаємне розміщення тексту задачі та його немовних елементів, яке може бути топографічно зосередженим й розосередженим, коли текст і рисунок (графік, діаграма, таблиця тощо) значно рознесені у площині сторінки;

– побудова формулювань задач у вигляді *n*-арних текстів (частіше це стосується такого різновиду шкільних математичних задач, як приклади).

Треба зазначити, що наявність у задачі гіпертекстової оболонки не означає, що її трудність відразу стає надвисокою. Названі три характеристики по-різному впливають на процес аналізу задачі. Лише за наявності другої характеристики можна з упевненістю сказати, що текст задачі є значно ускладненим. Причини того пов’язані, перш за все, з особливостями фізіології аналізаторної системи людини [7]. Зокрема, графічні елементи формулювання задачі повинні розташовуватися поруч із відповідним текстом, причому обов’язково ліворуч.

Вплив першої характеристики на трудність задачі можна з’ясувати лише у зв’язці із її предметним змістом і дидактичним призначенням. Формулювання ж декількох задач у вигляді *n*-арного тексту може зробити їх сукупний текст не тільки більш компактним, але й більш простим для вичерпування інформації. При цьому важливе значення має і те, як розташовуються індивідуальні текстові фрагменти по відношенню один до одного й до спільного текстового фрагмента задачі.

Для прикладу порівняємо дві текстові оболонки задачі, перша з яких застосована у задачі № 40 підручника з математики для 5 класу [3, 12]:

1. Обчисли:

а) (1505 : 35 + 47) · 27; в) 35 · 24 – 35 · 14;

б) (28 · 25 + 50) : 30; г) 34 · 17 + 66 · 17;

2. Обчисли:

а) (1505 : 35 + 47) · 27; б) (28 · 25 + 50) : 30; в) 35 · 24 – 35 · 14; г) 34 · 17 + + 66 · 17.

Зрозуміло, що перший спосіб оформлення *n*-арного тексту є більш легким для декодування інформації. Тут, по-перше, кожний числовий вираз топографічно відокремлений від інших і його легше опрацьовувати, а по-друге, матричне оформлення записів поза зайвих слів, на рівні візуального мислення, виводить назовні схоже і відмінне у цих виразах, а значить і деякою мірою у способах дій із ними. Отже, створюються додаткові умови для вдосконалення математичного досвіду учнів.

Ряд задач шкільного курсу математики з необхідністю передбачає уведення додаткових знаково-символічних заміщувачів для конкретизації умови. Наприклад, такими є задачі: "Знайдіть суму і різницю дробів "; "Точка *O* належить стороні *AC*, а точка *P* – стороні *BC* трикутника *ABC*. Трикутник *OPC* подібний до трикутника *ABC*. Довести, що прямі *OP* та *AB* паралельні" тощо.

Проте, наведені задачі мають суттєві відмінності. У першій з них для конкретизації вихідної інформації для кожної вимоги задачі можна створити лише єдиний додатковий знаково-символічний заміщувач. Ними будуть математичні речення та .

А от у другій задачі побудова єдиного додаткового заміщувача – правильного рисунка, є можливою тільки після доведення факту паралельності прямих *OP* і *AB*, тобто лише у результаті розв'язання задачі. Якщо такий заміщувач створити відразу, тоді в учнів виникатимуть підсвідомі бар'єри, сутність яких можна виразити словами: "Навіщо доводити те, що очевидно". Розв'язувати ж задачу, спираючись тільки на спотворений рисунок, теж не варто.

Тут доцільніше використати розділовий прийом – створити декілька рисунків, на яких відображатимуться принципово різні варіанти розташування точок *O* і *P* на сторонах даного трикутника. При цьому краще міркувати так: "Трикутник *ABC* – довільний. Зображаємо його. Точка *O* має довільне розміщення на стороні *AC*. Зображаємо її. Для точки *P* можливими є три варіанти розташування на стороні *BC*. Зобразимо це на трьох різних рисунках (рис. 1-3)".

Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

У такому разі, прихована сутність доведення для учнів виводитиметься назовні – треба довести, що з трьох даних варіантів два потрібно відкинути як неможливі. Це зовсім не означає, що учні налаштовуватимуться на застосування саме розділового методу доведення. Наприклад, у даній задачі вже на перших кроках розв'язування, коли виведуться наслідки з подібності трикутників *OPC* і *ABC*, фактично буде отримано підтвердження того, що другий і третій рисунки не відповідають умові. Отже, подальші міркування розгортатимуться в аналітико-синтетичному дусі.

Використання наведеного прийому уведення додаткових заміщувачів дозволяє забезпечити повне декодування вихідної інформації не тільки у розглянутому прикладі. На нашу думку, саме у такий спосіб потрібно створювати заміщувачі у теоремах і задачах, в яких доводитимуться ознаки математичних об'єктів.

Для повного й швидкого декодування вихідної інформації, поданої в тексті задачі, найбільш вагомою характеристикою виступає лінгвістична будова цього тексту. На нашу думку, задачі, тексти яких потребують переформулювання для вичерпування вихідної інформації, й задачі, в яких воно може відбутися у результаті послідовного опрацювання текстових елементів, потрібно віднести до різних класів задач. Перші з них є більш трудними для учнів, аніж другі.

Для прикладу порівняємо наступні формулювання задачі № 1131 підручника з математики для 5 класу [1, 170]:

1) З двох чисел одне у 5 разів менше від другого. Їх середнє арифметичне дорівнює 42. Знайди ці числа;
2) Середнє арифметичне двох чисел дорівнює 42. Одне з них у 5 разів менше від другого. Знайди ці числа;

3) Знайди два числа, якщо одне з них у 5 разів менше від другого, а їх середнє арифметичне дорівнює 42;

4) Знайди два числа, якщо їх середнє арифметичне дорівнює 42 й одне з них у 5 разів менше від другого;

5) З двох чисел одне у 5 разів менше від другого. Знайди ці числа, якщо їх середнє арифметичне дорівнює 42;

6) Середнє арифметичне двох чисел дорівнює 42. Знайди ці числа, якщо одне з них у 5 разів менше від другого.

В умові даної задачі можна виділити три одиниці вихідної інформації – дано два числа; одне з чисел у 5 разів менше від другого; середнє арифметичне двох даних чисел дорівнює 42. У кожному з наведених формулювань задачі перша одиниця інформації не виведена назовні, а непрямо представлена у другій й тертій інформаційних одиницях та у вимозі задачі.

Для учня 5-го класу й учня, наприклад, 8-го класу ця ситуація має принципові відмінності. Учень 8-го класу вже має у своєму досвіді програму діяльності, пов'язану із двома невідомими величинами, які потрібно знайти. Тому виведена назовні інформація "дано два числа" не викликатиме в нього стану підвищеної тривожності, оскільки принаймні один вихід із даної ситуації бачиться відразу – увести дві змінні. Чи знадобиться цей хід у подальшому розв'язуванні – то вже інша справа. Для учня ж 5-го класу відкрито й відразу представлена інформація про те, що дано два деяких числа, може виявитися бар'єром, який йому невідомо, як долати. Не дуже впевнений у своїх можливостях п'ятикласник взагалі може відмовитися від подальшої діяльності, стверджуючи "я не зможу розв'язати задачу". Отже, у формулюваннях задач, призначених для учнів різного віку, потрібно враховувати, яку інформацію доцільно, а яку недоцільно представляти у явному вигляді.

В усіх наведених формулюваннях задачі перша інформаційна одиниця представлена неявно. Проте, у третьому й четвертому варіантах ця інформація виводиться назовні легше, аніж у перших двох варіантах, оскільки саме з її текстової оболонки починається читання тексту задачі. З огляду на наведені вище міркування, ці два формулювання треба вважати більш трудними для п’ятикласника у порівнянні із першими двома.

Наведені формулювання задачі відрізняються ще й за такими параметрами:

а) як розміщено текст вимоги задачі по відношенню до тексту умови (умова і вимога є приєднаними текстами; один із текстів розсікає тіло іншого);

б) в якому порядку (прямому чи зворотному) подано другу й третю одиниці інформації.

Якщо умова і вимога є приєднаними текстами (у нашому прикладі – це варіанти 1-4), таке формулювання задачі потрібно вважати більш простим у порівнянні із тими випадками, коли один із текстів розсікає тіло іншого (у нашому прикладі – це 5-6 варіанти).

Для п’ятикласника більш доступною у плані декодування, розуміння й подальшого оперування є інформація про пряме порівняння двох чисел, у результаті якого можна встановити певне відношення між ними (у даній задачі – це друга одиниця інформації). Інформація про два даних числа, з якої явно не слідує їх підпорядкованість одне одному (у даній задачі – це третя одиниця інформації), є більш складною для сприймання та осмислення. У таких наших міркуваннях ми вбачаємо аналогію із тими труднощами, які характерні для процедур декодування явно і неявно заданих функцій. Крім того, передування інформації про середнє арифметичне двох чисел у розглядуваній задачі неодмінно вимагатиме від учня п’ятого класу переформулювання її умови.

Отже, за порядком подання умов у формулюванні теж має здійснюватися диференціація задач. У нашій послідовності прикладів формулювання із непарними номерами потрібно вважати більш легкими для декодування у порівнянні із відповідними формулюваннями, поданими за парними номерами.

Враховуючи усі наведені аргументи, у послідовності формулювань, наведених вище, нами встановлена певна ієрархія. Найлегшим для п'ятикласника ми вважаємо перше формулювання, а найбільш трудним – останнє.

У процесі навчання математики вагомий внесок у розвиток учнів може внести система задач, побудованих на одній і тій самій інформаційній основі, але загорнутих у різні знаково-символічні оболонки. При цьому, бажано використовувати усі можливі формулювання кожної задачі й у такій послідовності, щоб трудність процедур декодування інформації нарощувалася плавно, а не стрибкоподібно.

1. Бевз Г.П. Математика: Пробний підручник для 5 класу загальноосвітніх навчальних закладів. – К.: Вежа, 2000. – 208 с.
2. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посібник. – 3-є вид., перероб. і допов. – К.: Вища шк., 1989. – 367 с.
3. Математика: Пробний підручник для 5 класу / За ред. Г.Янченко. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2000. – 272 с.
4. Салмина Н.Г. Знак и символ в обучении. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 286 с.
5. Слєпкань З.І. Методика навчання математики. – К.: Зодіак-Еко, 2000. – 512 с.
6. Тарасенкова Н.А., Левченко А.В. Гіпертекстова структура навчальних текстів з математики // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірн. наук. праць: В 3-х томах. – Т. 1: Теорія та методика навчання математики. – Кр. Ріг: Криворізький ДПУ, 2001. – С.314-321.
7. Хрипкова А.Г. и др. Возрастная физиология и школьная гигиена: Пособие для студентов пед. ин-тов / А.Г. Хрипкова, М. В. Антропова, Д.А. Фарбер. – М.: Просвещение, 1990. – 319 с.

Резюме. В статье рассматриваются особенности семиотической составляющей формулировок школьных математических задач.

Summary. In the article the features of semiological component of the formulations of school mathematical problems are esteem

Надійшла до друку 25.03.2002 р.

ЗМІСТ

ДО ВІДОМОСТІ АВТОРІВ

В ЗБІРНИКУ ПУБЛІКУЮТЬСЯ ОРИГІНАЛЬНІ РОБОТИ З ДИДАКТИКИ МАТЕМАТИКИ, РОЗВИВАЮЧОГО НАВЧАННЯ, ЕВРИСТИКИ, ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ІДЕЙ ТА МЕТОДІВ У НАВЧАННІ. МОВА ПУБЛІКАЦІЇ – УКРАЇНСЬКА, РОСІЙСЬКА, АНГЛІЙСЬКА.

Редколегія зберігає за собою право відхиляти роботи без обговорення та рецензування.

Витрати на публікацію сплачуються автором.

Об`єм статті від 6 до 10 сторінок.

Бажано раніше узгоджувати назву та об`єм роботи, надіслав її коротку анотацію.

Для публікації необхідно представити рекомендацію кафедри та відгук члена редакційної ради.

Автор надає:

1) 1 екземпляр статті (яку набрано у WORD, на білім папері розміром 297x210 мм, підготовленої для репродуктування на резографі (чіткий та контрасний друк);
2) дискету з файлом своєї роботи.

Формули та малюнки теж набираються на комп`ютері. Малюнки розміщуються усередині тексту (не окремо!).

Поля: ліворуч - 25 мм, праворуч - 25 мм, зверху - 25 мм, знизу - 25 мм.

Номери сторінок не проставляти !

Через 1 інтервал друкується: назва роботи великими жирними літерами симетрично, далі - пропуск рядка і ініціали та прізвище автора (авторів), науковий ступень, вчене звання – курсивом, рядковими літерами, з симетричним розміщенням, потім на другому рядку місце роботи та адреса для спілкування (адреса вказується за бажанням авторів)-курсивом, рядковими літерами. Після цього - пропуск рядка і йде початок тексту роботи. Текст друкується через 1,5 інтервали. Пропуск спочатку абзацу - 7 литер. Посилання на літературу розташовуються номерами у квадратних дужках. Список літератури йде у кінці роботи після пропуску рядка через 1 інтервал, без додаткових назв. Оформлення бібліографії стандартне (ГОСТ 7.5-88). Після статті та списка літератури (якщо він є) треба додати резюме на двох мовах, відмінних від тієї, котрою написано статтю через 1 інтервал.

Екземпляр рукописа повинен бути підписаний автором. На звороті останнього аркуша автор повинен вказати своє призвище, ім`я по батькові повністю, науковий ступень, вчене звання, місце роботи та посаду, наукового керівника (якщо він є), домашню та робочу адресу з індексом, домашній та робочий телефони, fax, E-mail (якщо є).

При пересиланні рукопис та дискету повинно розмістити не згинаючи поміж двома аркушами картону або покласти у папку.

МОЖЛИВЕ СПІЛКУВАННЯ ЕЛЕКТРОННОЮ ПОШТОЮ

РОБОТИ, ЯКІ НЕ ВІДПОВІДАЮТЬ ВКАЗАНИМ ВИМОГАМ, ПУБЛІКУВАТИСЯ НЕ БУДУТЬ!

Роботи надсилати за адресою: пр.Миру 29/63, Донецьк-15, 83015, Україна, Хорольській Олені Вікторівні.

Fax: (38)–(0622)-927112 (Для Скафи О.І.).

E-mail: skafa@univ.donetsk.ua

E-mail: horol@bio.donetsk.ua

Контактні телефони:

Науковий редактор - доц. Скафа Олена Іванівна

Тел.:(38)-(0622)-919244 (р.), (38)-(0622)-554429 (д.), код для СНД (0622).

Відповідальний секретар - ст.викл. Хорольська Олена Вікторівна

Тел.:(38)-(0622)-992375 (р.), (38)-(062)-3378985 (д.).

У ВАК України

Постановою Президії ВАК України від 10.11.99 №3-05 11 затверджено перелік наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися основні результати дисертаційних робіт. До розділу "Педагогічні науки" включено наш збірник наукових праць "Дидактика математики: проблеми і дослідження" (Бюлетень ВАК України, 1999, №6), який є продовженням видання "Евристика та дидактика точних наук" міжнародного збірника наукових робіт. Нумерація випусків продовжується.

Наукове видання

**ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ: ПРОБЛЕМИ І ДОСЛІДЖЕННЯ
МІЖНАРОДНИЙ ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ**

Випуск 17

Рекомендовано до друку вченою радою Донецького національного університету 26.04.2002 (протокол №4).

Редакція збірника:
Науковий редактор – канд. пед. наук, доц. Скафа Олена Іванівна.
Тел.: (38)-(0622)-919244 (р.) (38)-(0622)-554429 (д.), код для СНД (0622).
E-mail: skafa@univ.donetsk.ua

Відповідальний секретар – ст. викл. Хорольська Олена Вікторівна
Тел.: (38)-(0622)-992375 (р.), (38)-(062)-3378985 (д.).
E-mail: Horol@bio.donetsk.ua

Адреса редакції збірника: Кафедра вищої математики та методики викладання математики. Донецький національний університет, вул. Університетська, 24, Донецьк, 83055, Україна

Узгоджені матеріали надсилати за адресою:
Хорольській О.В., пр.Миру, 29/63, Донецьк-15, 83015, Україна

Підписано до друку 29.04.2002 р. Формат 60x90/16. Папір типографський. Друк Офсетний. Умовн. друк. арк. 11,75. Тираж 300 прим. Замовлення № 491

Видавництво Донецької фірми наукоємних технологій НАН України
(Фірми ТЕАН)
Україна, 83050, Донецьк, а/я 435. E-mail: tean@an.dn.ua
Надруковано: Лабораторія комп'ютерних технологій Донецького національного університету, 83055, м.Донецьк, вул. Університетська, 24