Міжнародна програма
«ЕВРИСТИКА ТА ДИДАКТИКА ТОЧНИХ НАУК»
International program
«HEURISTICS and DIDACTICS of EXACT SCIENCES»
Международная программа
«ЭВРИСТИКА И ДИДАКТИКА ТОЧНЫХ НАУК»

ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ: проблеми і дослідження

DIDACTICS of MATHEMATICS:
Problems and Investigations

ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ:
проблемы и исследования

Міжнародний збірник наукових робіт
International Collection of Scientific Works
Международный сборник научных работ

Випуск 18

Засновники:

Донецька школа евристики та точних наук Донецької фірми наукоємних технологій (Фірми ТЕАН) Національної академії наук України

Національний педагогічний університет ім.М.П.Драгоманова

Донецький національний університет

Інститут педагогіки Академії педагогічних наук України

Донецьк Фірма ТЕАН 2002

УДК 51(07)+53(07)
ББК В1 р
Д44

Збірник заснований професором Юрієм Олександровичем Палантом у 1993 році.

Рекомендовано до друку Вченою радою Донецького національного університету 29.11.2002 (протокол №10).

Д44 **Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. –** Вип. 18. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2002. – 160 с. (Міжнародна програма «Евристика та дидактика точних наук»).

ISBN 966-7507-0-9 (серія)
ISBN 966-7507-09-2 (Фірма ТЕАН, Україна)

Викладено нові підходи до деяких питань методики навчання математики. Роботи присвячено використанню евристичних методів навчання, стимулюванню творчої діяльності учнів.

Изложены новые подходы к некоторым вопросам методики обучения математике. Работы посвящены использованию эвристических методов обучения, стимулированию творческой деятельности учащихся.

New approaches to some methods of training mathematics problems are described. The publications concern the use of heuristic methods in teaching sciences, stimulation of creative activity of students in the field of constructing and solving problems.

УДК 51(07)+53(07)
ББК В1 р

ISBN 966-7507-0-9 (серія)
ISBN 966-7507-09-2 (Фірма ТЕАН, Україна)

ЩО ТАКЕ МАТЕМАТИКА?

В.Г.Бевз, канд.пед.наук., доцент,
Національний педуніверситет ім. М.П.Драгоманова, м. Київ

Запитання "Що таке математика?" завжди було надто дискусійним. З приводу нього дискутували не тільки (навіть не стільки) математики, скільки філософи. І це не випадково. За довгий час свого існування математика зазнала суттєвих змін та значного розвитку. Була вона "царицею" і "служницею", ставала надбанням "аристократів" і "широких народних мас", виступала "інструментом пізнання" і "універсальною мовою" тощо. І весь час не припинялися дискусії навколо питання про предмет математики.

В Стародавній Греції (V ст до н.е), де народилась математика як наука, (μαυημα – "наука", "знання", "вчення"), розрізняли 4 "μαυημα (матема)": 1) вчення про число (арифметика), 2) вчення про фігури (геометрія), 3) вчення про пропорції в природі і мистецтві (гармонія), 4) вчення про форми світу (астрономія). Усі інші знання, зокрема фізику, географію, історію їх філософи не відносили до науки. Бо вважали, що тільки "матема" має тверді логічні основи, здобуті вищою субстанцією – розумом.

Здавна математики і філософи різних країн намагалися дати означення предмету математики. Наведемо приклади кількох з них.

Чим займається математика, як не порядком і відношенням. (Арістотель.)

Математика – це наука, що розглядає кількість у матеріальних об'єктах, або, на думку інших, наука, що вивчає кількість абстрактну, не зачіпаючи того, чи вона міститься в матеріальних тілах чи поза ними.
(Ф. Прокопович.)

Математика – це наука, що не тільки показує в кожному окремому випадку співвідношення, але й визначає причини, від яких вони залежать за природою самих речей. (Л.Ейлер.)

Радянські вчені мали дотримуватися «єдино правильного» означення математики за Ф.Енгельсом: "Математика – це наука про просторові форми і кількісні відношення дійсного світу”. Таке означення не відповідає суті сучасної математики, напевно і сам Енгельс не погодився б з ним. У реченні, з якого відокремили це означення його послідовники, йшлося не про всю математику, а тільки про її частину – чисту математику. До того ж – не про сучасну, а про ту, яка тільки зароджувалась. І формулювалося це речення не як означення, а як заперечення думки ідеалістів про те, що в чистій (не прикладній) математиці розум має справу не з матеріальними об’єктами, а з продуктами вільної уяви і творчості розуму. Ф.Енгельс писав так:

“Як поняття числа, так і поняття фігури взяті виключно із зовнішнього світу, а не виникли в голові з чистого мислення. Повинні були існувати речі, які мають певну форму, і ці форми повинні були порівнюватись, перш ніж можна було дійти до поняття фігури. Чиста математика має своїм об’єктом просторові форми і кількісні відношення дійсного світу, отже – вельми реальний матеріал. Той факт, що цей матеріал набирає надзвичайно абстрактної форми, може лише слабо затушувати його походження із зовнішнього світу. Але щоб бути спроможним дослідити ці форми і відношення в чистому вигляді, треба цілком відокремити їх від їхнього змісту, залишити цей останній осторонь як щось неістотне; таким шляхом ми дістаємо точки, позбавлені вимірів, лінії, позбавлені товщини й ширини, різні a і b, x і y, сталі і змінні величини, і лише в самому кінці ми доходимо до продуктів вільної творчості і уяви самого розуму, а саме – до уявних величин.”

Заперечувати цю думку підстав немає. Коли математика ще тільки зароджувалася, її поняття і відношення брались із зовнішнього світу. Ці перші абстракції справді виникали як відображення деяких предметів і явищ матеріального світу. Але так було тільки в період з а р о д ж е н н я математики, у наступні періоди розвитку вона істотно змінилась.

У цитованому абзаці Енгельс писав, що після того, як дістають точки, позбавлені вимірів, лінії, позбавлені товщини й ширини, різні a і b, x і y, доходять до “продуктів вільної творчості і уяви самого розуму, а саме – до уявних величин”. А в математиці здебільшого і йдеться саме про такі точки, лінії та змінні a , b, x , y; отже – про п р о д у к т и в і л ь н о ї т в о р ч о с т і і у я в и р о з у м у ! У іншому місці Енгельс писав ще чіткіше: “… вся так звана чиста математика займається абстракціями … всі її величини є, строго кажучи, уявні величини”. І це правда. В матеріальному світі не існує об’єкта, схожого наприклад, на геометричну пряму, чи на площину, чи на число 7^{π} і т. ін. У навколишньому матеріальному світі немає жодної прямої, якою уявляють її в геометрії – без товщини, ідеально рівною і нескінченною в обидві боки. І геометричної площини, яка б поділяла весь світ навпіл, не існує. Ніде і ніколи не існувало!

А в сучасній математиці розглядаються не тільки такі елементарні поняття, як пряма, площина, натуральні чи раціональні числа, а й набагато складніші конструкції з таких понять і абстракцій вищих порядків. Ідеться про абстракції від абстракцій, а не від об’єктів і процесів матеріального світу. Наприклад, функції $y = 3x$, $y = – 0,5x + 1$, $y = 3$ – абстракції. Абстрагуючись від таких абстракцій переходять до абстракцій вищого порядку – лінійної функції $y = ax + c$. Абстрагуючись від понять лінійної, квадратичної, степеневої та інших функцій, переходять до ще абстрактнішого і загальнішого поняття – числової функції $y = f(x)$. Так само розширювалося поняття числа: від натуральних чисел через раціональні та ірраціональні числа приходять до поняття дійсних чисел, потім – до комплексних, кватерніонів та інших гіперкомплексних чисел. Так поступово створювали порівняно загальніші і абстрактніші математичні конструкції, все віддаляючись від об’єктів і процесів матеріального світу. Тому стосовно сучасної математики неправомірно стверджувати, що предметом її вивчення є просторові форми і кількісні відношення матеріального світу.

Більшість математичних понять не відображають яких-небудь предметів чи відношень матеріального світу, вони створені уявою і розумом математиків. Це добре розуміли і радянські математики, але за умов дотримання принципу партійності вони не могли просто відкинути застарілу точку зору на предмет математики, а тільки зауважували і доповнювали прийняте формулювання.

Академік А.М.Колмогоров писав: “Як у результаті внутрішніх потреб математики, так і нових запитів природознавства, коло кількісних відношень і просторових форм, які вивчає математика, надзвичайно розширюється: сюди входять відношення, що існують між елементами довільної групи, векторами, операторами в функціональних просторах, уся різноманітність форм просторів будь-якого числа вимірів та ін. При такому широкому розумінні термінів “кількісні відношення” і “просторові форми” наведене означення Енгельса застосовуване і на сучасному етапі її розвитку”.

Б.В.Гнєденко дотримувався подібної думки: “Деякі вчені вважають, що означення Енгельса не враховує розвитку математики в XX столітті і його треба доповнити. Я вважаю, що важливо добавити логічні структури…”.

Це доповнення свідчить про те, що Б.В.Гнєденко поділяв точку зору Н.Бурбакі (псевдонім, під яким група математиків різних країн, переважно французьких, зробила спробу дати систематичний виклад сучасної математики на основі аксіоматичного методу; припинила діяльність у 1968 р.), які стверджували, що ”Математика – це наука про математичні структури”.

Математична структура – це множина, між елементами якої встановлено одне або кілька відношень. При цьому виділяються три типи основних структур: алгебраїчні структури (групи, кільця, поля і т.д.), структури порядку і топологічні структури.

З поняттям математичних структур знайомляться здебільшого тільки студенти математичних відділень університетів. Випускникам середніх шкіл і спеціалістам не математикам це поняття не відоме. Тому їм означення математики через математичні структури не зрозуміле. До того ж немало математиків, які добре розуміють суть і роль математичних структур, не погоджуються з таким означенням, бо воно дещо однобічне, не враховує прикладної математики.

Один з найвідоміших керівників бурбакістів Ж.Дьєдонне писав: “Сучасна математика в своїй основі не має якої-небудь утилітарної мети, а є інтелектуальною дисципліною, практична користь від якої зводиться до нуля… Математика – не більше ніж “розкіш”, яку може дозволити собі цивілізація”. Інші вчені з цим не погоджуються. Звичайно, для декого математика – розкіш. Але далеко не для всіх. Зокрема, спеціалісти прикладної математики так не вважають. А оскільки більшість спеціалістів дивляться на математику ширше, не вважають її тільки “розкішшю”, то й дотримуються іншого означення.

М.С. Бургін: “Математика – наука, в якій формалізованими методами вивчаються властивості абстрактних і реальних структур, котрі відображають певні сторони реального світу і включають “ просторові форми і кількісні відношення дійсного світу”.

Неоднозначність розуміння суті математичної науки, розгалуженість її розділів та застосувань дають підстави деяким науковцям висловлювати думку, що сформулювати означення математики чи вичерпно описати її предмет неможливо. Так вважають не тільки сучасні математики, а й спеціалісти минулих часів, коли вважали, що математика займається переважно дослідженням величин.

В.Левицький писав: “Подати зміст математики – це завдання непосильне; сказати, що це наука про величини та їх взаємні відношення, це буде лише невелика частина, яка не вичерпує її змісту, бо ж до математики – побіч чисел і геометричних величин, побіч величин тяглих і нетяглих (неперервних і дискретних) – входить і наука про комбінаторику, і про групи, і вищі числа і їх комплекси, і про вищі простори і т.д., до яких назву величини можна прикладати лише з деякими застереженнями.”

Р.Курант, написавши разом з Г.Роббінсом велику книгу «Що таке математика», згодом зробив такий висновок: “На запитання “Що таке “математика?” неможливо дати обґрунтовану відповідь на основі самих лише філософських узагальнень, семантичних означень або за допомогою обтічного газетно-журнального багатослів’я. Так само як не можна дати загальне означення музики чи живопису: ніхто не може оцінити ці види мистецтва, не розуміючи, що таке ритм, гармонія і лад у музиці або форма, колір і композиція у живописі. А для розуміння суті математики ще більшою мірою потрібне справжнє проникнення у її складові елементи”.

Вважаємо, що коротко і доступно зміст математичної науки можна описати так. *Математика – це наука про математичні моделі та їх застосування до розв’язування задач.*

А задачі можуть бути різними: досить важливими прикладними і такими, “практична користь яких зводиться до нуля”. Було б неправильно бачити тільки щось одне: прикладні питання, чи абстракції, які не мають ніякої практичної цінності. Коли математичну науку вважають продуктивною силою, то мають на увазі її прикладну складову. Друга складова математики, “практична користь від якої зводиться до нуля”, не є безпосередньою продуктивною силою суспільства. Але не слід її ігнорувати, вона відіграє приблизно таку ж роль, як спорт, живопис, віршоскладання. Дослідження в геометрії трикутника, в теорії простих чисел, в n – мірних векторних просторах тощо, в жодному разі, не гірші від гри в шахи чи інші інтелектуальні ігри, які людство цінить заради торжества розуму, допитливості й винахідливості, які роблять людину *homo sapiens*. Результати досліджень в чистій математиці оцінюють за їхньою логічною завершеністю і майстерністю виконання, а тому їх місце – серед культурних цінностей людства.

Приблизно так можна відповісти на запитання “що таке математика?” студентам. А ще їм бажано зауважити, що математика є складовою частиною загальнолюдської культури. І хоча ця частина культури в повній мірі не кожному доступна (як і окремі види мистецтва) загальний погляд на математику, її зміст та застосування має знати кожна освічена людина.

Учням на запитання "Що таке математика?" можна відповісти порізному. Якщо запитує учень основної школи, йому краще відповісти так. Математика – це наука про числа і геометричні фігури. Усі інші математичні поняття, що розглядаються в основній школі, – вирази, пропорції, функції, рівняння, нерівності, послідовності – комбінації із чисел або з чисел і змінних, які позначають числа. Іншого означення математики такий учень і не зрозумів би.

Якщо запитує старшокласник, що таке математика, йому бажано відповісти докладніше. Математика – це наука про числа, геометричні фігури та інші поняття, придатні для математичного моделювання. Мається на увазі, що йому вже відоме поняття математичної моделі. Відокремлення чисел і геометричних фігур у такій відповіді бажане для забезпечення наступності та щоб зробити означення зрозумілішим для учнів. А взагалі, можна сказати і так: "Математика – це наука про математичні моделі". Таке формулювання можна пропонувати і студентам, воно найкраще відповідає змісту і ролі сучасної математичної науки.

Майже так розкриває зміст поняття математики Л.Д.Кудрявцев: "Математика – це область людського знання, в якій вивчаються математичні моделі".

Тепер поняття математичної моделі і математичного моделювання включені до програми з алгебри 9 класу. Думається, що в старших класах бажано продовжити вивчення цієї теми, уточнивши і розширивши одне з найголовніших понять математичної науки.

Математична модель – система математичних співвідношень, яка описує розглядуваний об'єкт, процес або явище. Приклади математичних моделей – рівняння (алгебраїчне, трансцендентне, диференціальне і т.ін.), система чи сукупність рівнянь, система чи сукупність рівнянь і нерівностей, графіки, діаграми тощо. Математичні моделі можуть бути неперервними, дискретними, стохастичними і т. ін. Користуючись математичними моделями, можна досліджувати об’єкти, процеси, явища, не вдаючись до дорогих натуральних експериментів, а замінюючи їх імітацією у вигляді математичних перетворень і обчислень.

Для сучасної математики поняття математичної моделі одне з найважливіших. Правильно розуміти сутність математики без цього поняття не можна. Тому, думається, і в школі цьому поняттю бажано приділити більше уваги. Подібно до того, як колись математики і методисти домагалися введення в шкільні програми поняття функції, так тепер бажано домагатися ознайомлення учнів з поняттям математичної моделі і математичного моделювання.

1. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Прикладная математика. – К.: Наукова думка, 1976.
2. Бурбаки Н. Архитектура математики. – [Б.В.Гнеденко. Математика – наука древняя и молодая]. – М.: Знание, 1972.
3. Бургін М.С. Про природу та сутність математики. Праці науково-дослідного семінара “Основи математики та інформатики”, т.4. – К.: УкрАІН, 1998.
4. Гнеденко Б.В. Введение в специальность. – М.: Наука, 1991.
5. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. – М.: Наука, 1991.
6. Колмогоров А.Н. Математика – наука и профессия. – М.: Наука, 1988.
7. Кудрявцев Л.Д. Мысли о современной математике и ее изучении. – М.: Наука, 1977.
8. Математика в современном мире. – М.: Мир, 1967.
9. Математика в афоризмах, цитатах і висловлюваннях / укладач Н.О.Вірченко – К.: Вища школа, 1974.
10. Яглом И.М. Математические структуры и математическое моделирование. –М.: Советское радио, 1980.

Резюме. Предлагаемая статья посвящена проблеме определения предмета математики. Анализируются различные подходы к описанию сущности математики. Предлагается рассматривать математику как науку о математических моделях и их применении к решению задач. Поднимается вопрос об изучении элементов математического моделирования в курсе математики старшей школы.

Summary. The proposed article is devoted to the problem of definition of mathematics, different methods to discription a main point of mathematics are analysed, consideration of mathematics as science about mathematical models and the application to do in something.

Надійшла до друку 25.09.2002 р.

ЗАДАЧІ-ТЕОРЕМИ ЯК ЕЛЕМЕНТИ БАЗОВОГО ЗМІСТУ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

В.О.Швець, канд. пед. наук, доцент,
національний педуніверситет ім. М.П.Драгоманова, м. Київ

У підручнику геометрії [1] та деяких інших нині діючих шкільних підручниках з математики серед запропонованих задач можна знайти такі, які одержали статус задач-теорем. Їх поява зрозуміла. Щоб не переобтяжувати теоретичну частину великою кількістю теорем автори віднесли частину з них до задач, справедливо вважаючи, що сильніші учні спроможні самостійно справитись з їх доведенням, а одержані при цьому твердження використати як опорні в розв'язуванні інших задач. (Для слабовстигаючих учнів такі доведення часом приведені і залишається лише в них розібратись). Виникає запитання:" чи задач з таким статусом у відповідних параграфах підручника вдосталь, щоб поглибити і розширити знання учнів з певної теми?"

Аналіз змісту підручників [1] і [2] показує, що іноді таких задач недостатня кількість. Звернемося до прикладів. У обох названих підручниках вивчається тема "Многогранники", де учнів знайомлять з поняттями двогранний, тригранний і многогранний кути. Проте ні теорем, ні задач-теорем про властивості плоских кутів тригранного та многогранного кутів, які традиційно були в підручниках з геометрії А.П.Кисельова, Н.О.Глаголєва, А.М.Колмогорова та інших авторів, немає. Тому й стає проблематичним як для вчителів так і для учнів, наприклад, розв'язання задач типу "Чи існує тригранний кут з плоскими кутами 20^0, 30^0 і 60^0?" [2, №339], які в збірниках задач М.О.Рибкіна та інших авторів розглядались як усні вправи.

Розглянемо інший приклад, який цікавий не тільки як ілюстрація, а й як важливий опорний факт.

У збірнику задач [3] в розділі «Прямі та площини в просторі» вміщено ряд задач на ортогональне проекціювання фігур. Практика показує, що і в учнів, і в учителів під час їх розв'язування також виникають певні труднощі.

Зупинюся на одній із них. Щоб зрозуміти її, розглянемо конкретну задачу.

149. а) Ортогональною проекцією прямокутника зі сторонами 8 см і 9 см, є чотирикутник, площа якого дорівнює 36 см^2. Обчисліть кут між площинами цих чотирикутників. Чи може дана проекція бути квадратом? [3].

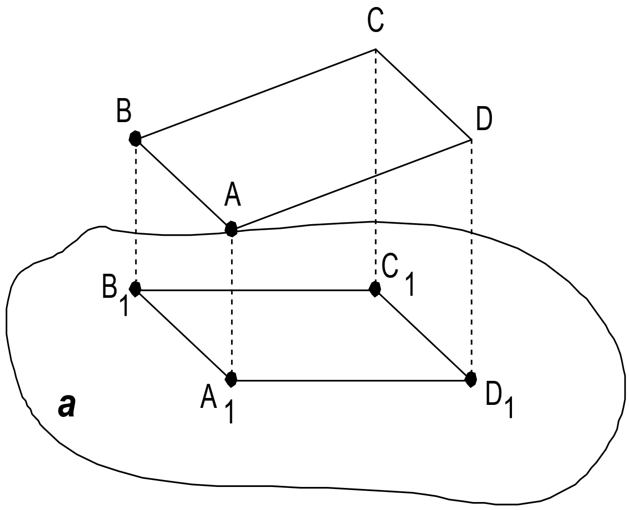


Рис.1

Розв'язуючи дану задачу учні і вчителі легко з'ясовують, що кут φ між площинами обох чотирикутників можна обчислити за формулою $\cos\varphi = \dfrac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}}$, де $S_{A_1B_1C_1D_1}$ і S_{ABCD} відповідно площі проекції $A_1B_1C_1D_1$ та прямокутника $ABCD$. (Рис.1)

Тоді $\cos\varphi = \dfrac{36}{72} = \dfrac{1}{2}$. Звідки слідує, що $\varphi=60^0$.

Неважко також, виходячи з властивостей паралельного проекціювання (яким є також і ортогональне), установити, що чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ — паралелограм. Труднощі викликає відповідь на запитання:

“Чи може дана проекція бути квадратом?” Це можна пояснити тим, що в учнів не вистачає знань певних опорних теоретичних фактів, які дають змогу швидко й правильно знаходити відповідь на запитання.

Таким опорним фактом може стати задача-теорема, якої в підручниках [1] і [2] також немає.

Задача-теорема. Прямий кут відображається ортогональним проекціюванням у прямий кут тоді і тільки тоді, коли принаймні одна з його сторін паралельна площині проекції.

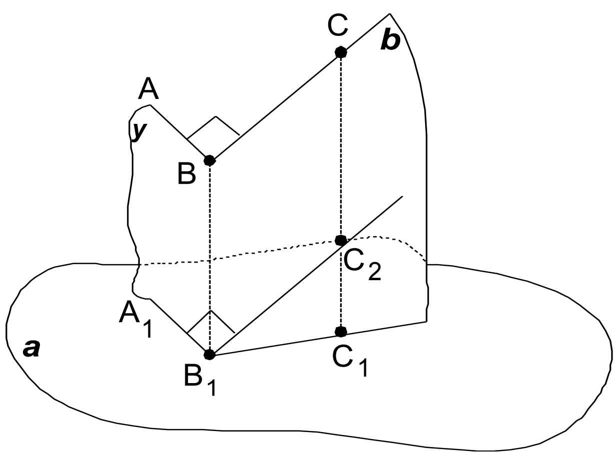


Рис.2

Проведемо доведення у два етапи.

1. Дано:

$\angle ABC = 90°$, $\angle A_1B_1C_1$ — ортогональна проекція $\angle ABC$ на пл. α, $BB_1 \perp \alpha$, $AB \parallel \alpha$.

Довести:

$\angle A_1B_1C_1 = 90°$.

Доведення

Через прямі BB_1 і BC проведемо площину β. В ній проведемо $B_1C_2 \| BC$. Через прямі AB і BB_1 проведемо площину γ. Площини α і γ перетинаються по прямій $A_1B_1 \| AB$, а площини α і β по прямій B_1C_1.

$\angle A_1B_1C_2 = \angle ABC$ - як кути з відповідно паралельними сторонами. Отже, $\angle A_1B_1C_2$=90^0. Пряма C_2B_1 – похила, а C_1B_1 – її проекція на площину α.. За теоремою про три перпендикуляри $C_1B_1 \perp B_2A_1$. Отже, $\angle A_1B_1C_1$=90^0.

2. Дано: $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$=90°. $\angle A_1B_1C_1$— ортогональна проекція $\angle ABC$ на площину α, пряма BC — не паралельна площині α.

Довести: $AB \parallel \alpha$. (Рис.2)

Доведення

Через прямі BC і BB_1 проведемо площину β, а через прямі BA і BB_1 — площину γ.

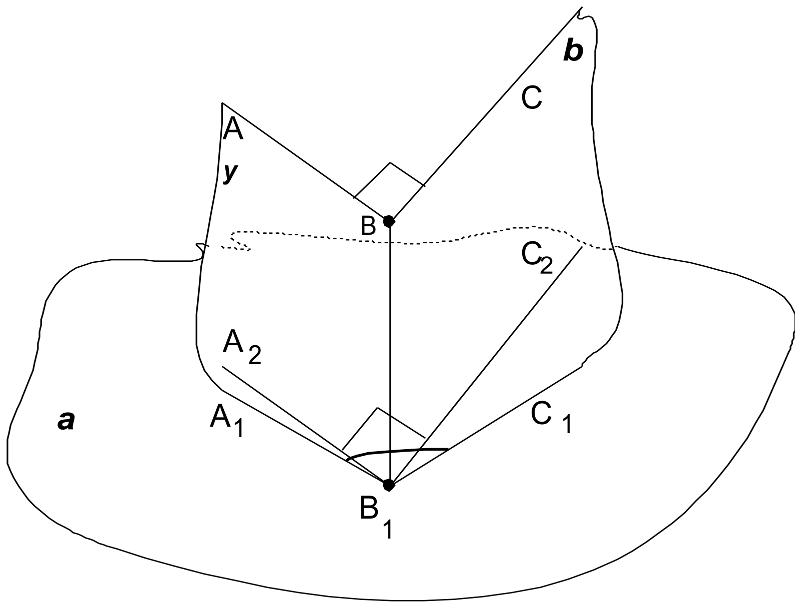


Рис. 3

Припустимо, що пряма AB не паралельна площині α. У площині γ проведемо пряму $B_1A_2 \parallel BA$, а в площині β –пряму $B_1C_2 \parallel BC$. Тоді $\angle A_2B_1C_2 = \angle ABC = 90^\circ$ як кути з відповідно паралельними сторонами. Прямі A_1B_1 і A_2B_1 – різні. Оскільки $BB_1 \perp \alpha$, то $A_1B_1 \perp BB_1$. Але $A_1B_1 \perp B_1C_1$.

Отже, $A_1B_1 \perp \beta$.

Аналогічно доводимо, що $B_1C_1 \perp$, звідки випливає, що $A_2B_1 \perp {}_1C_1$. Але $A_2B_1 \perp {}_1C_2$. Отже, $A_2B_1 \perp$. Тому маємо, що дві різні прямі A_2B_1 і A_1B_1 перпендикулярні до площини β і проходять через точку B_1. А це суперечить відомій теоремі про єдиність перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної площини. Одержана суперечність указує на те, що зроблене припущення – неправильне. Отже, $AB \parallel \alpha$.

Задачу-теорему доведено.

Повернемося до розв'язування задачі 149, а.

Відповідь на запитання, чи може дана проекція бути квадратом, одержується швидко і красиво.

Припустимо, що проекція $A_1B_1C_1D_1$ – квадрат. Тоді ортогональною проекцією прямого $\angle$ буде прямий $\angle$. (Рис. 1)

Тоді або $AB \parallel \alpha$, або $AD \parallel \alpha$. Відповідно сторона квадрата $A_1B_1C_1D_1$ буде дорівнювати або 8 см, або 9 см, а його площа — або 64 см^2, або 81 см^2. А це суперечить умові задачі. Одержали суперечність. Тому $A_1B_1C_1D_1$ бути квадратом не може.

Розглянемо застосування доведеної задачі-теореми до розв'язування інших задач.

153, а) Ортогональною проекцією правильного трикутника на площину, що містить одну з його вершин, є рівнобедрений трикутник з бічною стороною $3\sqrt{13}$ см. Сторона правильного трикутника дорівнює 12 см. Обчисліть кут між площинами цих трикутників, якщо одна сторона трикутника паралельна площині проекції. [3]

Розв'язання

Умову «одна сторона трикутника паралельна площині проекції» поки що відкинемо.

Нехай $\Delta\ BC$ – рівносторонній, BC = 12 см, $\Delta\ B_1C_1$ – ортогональна проекція $\Delta\ BC$ на площину α, точка $A \in$.

Визначимо кут φ між площинами (ABC) та α.

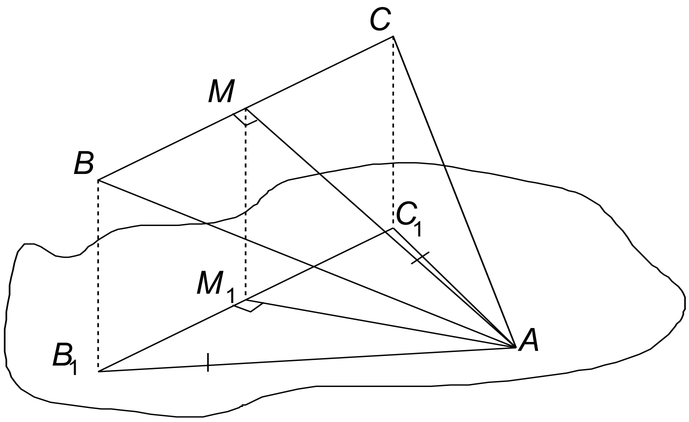


Рис.4

Оскільки в умові задачі не вказується, які саме дві сторони $\Delta\ B_1C_1$ рівні, то можливі два випадки.

1-й випадок

Нехай $AB_1 = AC_1 = 3\sqrt{13}$ см. (Рис.4)

Як відомо, $\cos\varphi = \dfrac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}}$, де $S_{AB_1C_1}$ і S_{ABC} — площі трикутників AB_1C_1 та ABC відповідно.

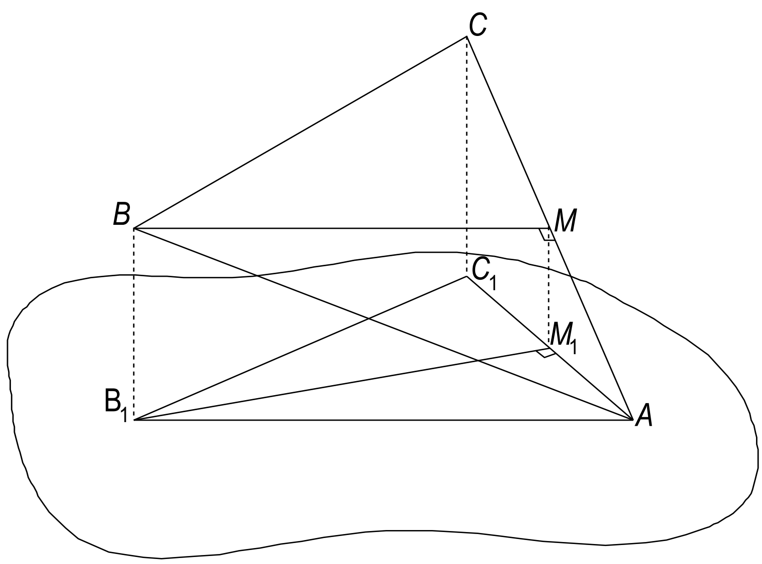
Але $S_{ABC} = \dfrac{BC^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{144\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$ (см^2).

Знайдемо площу $\Delta\ B_1C_1$. У $\Delta\ BC$ проведемо медіану AM. Ортогональне проекціювання на площину α відобразить точку M в точку M_1, яка (за властивістю паралельного проекціювання) буде серединою B_1C_1. Отже, AM_1 — медіана $\Delta\ B_1C_1$. Оскільки AM і AM_1 — висоти відповідно трикутників ABC і AB_1C_1, то прямий $\angle\ MA$ ортогональним проекціюванням відображається в прямий $\angle\ M_1A$.

Із задачі-теореми випливає, що $BC \parallel B_1C_1$. Отже, B_1C_1 = 12 см, B_1M_1 = 6 см, $M_1A = \sqrt{B_1A^2 - B_1M_1^2} = \sqrt{117 - 36} = \sqrt{81} = 9$ (см).

Тоді $S_{AB_1C_1} = 6 \cdot 9 = 54$ (см^2), $\cos\varphi = \dfrac{54}{36\sqrt{3}} = \dfrac{54\sqrt{3}}{36 \cdot 3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\varphi = 30°$.

2-й випадок



Нехай $B_1C_1 = B_1A = 3\sqrt{13}$. (Рис.5)

Проведемо в $\Delta\ ABC$ медіану BM. Ортогональне проекціювання на площину α відобразить точку M у точку M_1, що буде серединою сторони C_1A. Тоді B_1M_1 – медіана $\Delta\ AB_1C_1$, $BM \perp AC$ і $B_1M_1 \perp AC_1$.

Отже, прямий $\angle\ AMB$ ортогональним проекціюванням відображається в прямий $\angle\ AM_1B_1$. Із задачі-теореми випливає, що $BM \parallel B_1M_1$. Отже, $B_1M_1 = BM$, $B_1M_1 = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2} = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ (см).

Тоді $M_1A = \sqrt{B_1A^2 - B_1M_1^2} = \sqrt{117 - 108} = \sqrt{9} = 3$ (см),

$S_{AB_1C_1} = B_1M_1 \cdot M_1A = 18\sqrt{3}$ (см^2), $\cos\varphi = \dfrac{18\sqrt{3}}{36\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$, $\varphi = 60°$.

Відповідь. 30° або 60°.

У читача може виникнути запитання: для чого в задачі дається додаткова умова, що одна сторона трикутника паралельна площині проекції? Це зроблено для того, щоб учні не досліджували різні випадки взаємного розміщення фігур, а розглядали тільки один випадок.

Приведені вище приклади показують наскільки важливо вдало підібрати до кожного параграфа (чи розділу) підручника систему задач-теорем. Зупинюсь на цьому детальніше.

Ідея (і її практичне впровадження) викласти зміст шкільного курсу геометрії в підручнику у вигляді мінімізованого “шматка” теорії, а його розширення і поглиблення у вигляді задач-теорем належить, як відомо О.В.Погорєлову [1]. Безперечно, так будувати шкільний підручник можна, однак, якщо в ньому теоретична частина представлена чітко, лаконічно, логічно завершеною (для мінімального обсягу), то з вибором задач-теорем, очевидно, є проблеми.

Аналіз наукової, навчально-методичної літератури, досвіду роботи вчителів, власні міркування приводять до наступних висновків. Вони стосуються саме вибору задач-теорем. Назвемо їх вимогами до задач-теорем:

1. Теоретичну частину підручника мають доповнювати не окремі задачі-теореми, а їх система, яка утворена на основі певних критеріїв.
2. Система таких задач має бути “достатньою”, тобто такою , щоб давала змогу розвинути мінімальний обсяг змісту в базовий та поглиблений.
3. Система таких задач має бути “компактною”, тобто кожна із задач системи не повинна бути очевидним наслідком однієї чи декількох інших.

В противному випадку її слід віднести до тренувальних задач.

Задачі-теореми разом з теоретичною частиною дають змогу здійснювати диференційоване навчання учнів геометрії. Така диференціація може враховувати як обсяг вивченого матеріалу так і рівень його засвоєння, що важливо для практичного навчання.

1. Погорєлов О.В. Геометрія: Стереометрія: підруч. для 10-11 кл. серед. шк. – 3-тє вид. – К.: Освіта, 1997. – 128 с.
2. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г. Геометрія: підруч. для 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – К.: Вежа, 2002. – 224 с.
3. Литвиненко Г.М., Федченко Л.Я., Швець В.О. Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту. Ч.II: Геометрія. – Львів: ВНТЛ, 1997. – 79 с.
4. Екзаменаційні завдання з математики для шкіл, ліцеїв та гімназій з поглибленим вивченням математики. – Тернопіль: Підручники і посібники, 1996. – 72 с.

Резюме. В статье предлагается дополнять теоретический материал школьного учебника геометрии системой задач-теорем, приведены примеры таких задач.

Summary. The article recommends to add the theoretical material from Geometry Work Book with tasks, theoremes and give some examples of such tasks.

Надійшла до друку 28.08.2002 р.

ПРОБЛЕМА ВЗАЄМОПОВ'ЯЗАНОСТІ ПРОЦЕСІВ ФОРМУВАННЯ І РОЗВИТКУ ТВОРЧИХ ЗДІБНОСТЕЙ СТАРШОКЛАСНИКІВ І МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

О.С.Чашечникова, канд. пед. наук, доцент,
Сумський державний педагогічний університет ім.А.С.Макаренка

Одна з умов продуктивності процесу формування і розвитку творчих здібностей учня – наявність цілеспрямованого керівництва цим процесом з боку вчителя, який сам є творчою особистістю. Творча особистість ж майбутнього вчителя формується і розвивається тим більш ефективно, чим більш якісною є деяка основа розвитку, закладена в процесі навчання нинішнього студента ще в школі. Вчорашній учень – майбутній вчитель математики деякою мірою іноді несвідомо є "спадкоємцем" досвіду своїх вчителів, їх манери викладання, що потім накладає певний "слід" на формування його власного стилю роботи. Тому, на наш погляд, те, як відбувався розвиток творчих здібностей майбутнього вчителя математики у школі, сприяє або гальмує формування і розвиток творчої особистості студента.

Умова цілеспрямованості цього процесу потребує знання його основ: розуміння, що саме можна вважати творчістю; як відбувається творчий процес; яким чином можна діагностувати рівень розвитку певних компонентів, що притаманні творчій особистості.

Під творчістю розуміють процес діяльності, яка створює нові матеріальні і духовні цінності; на основі пізнання світу створюється нова реальність, що задовольняє різноманітні потреби [6,474]. Цей процес є психологічно складним, вищим рівнем пізнання, яке не може відбуватися без попереднього накопичення знань (В.В.Богословський, К.К.Петровський). За трактовкою В.І.Андреєва для творчості характерні наявність творчого завдання; соціальна та особистісна значущість та прогресивність; наявність об'єктивних та суб'єктивних (якості особистості, знання, вміння, позитивна мотивація, творчі здібності) передумов для творчості; новизна та оригінальність процесу або результату. Відсутність хоча б одної з вищенаведених ознак призводить до неможливості здійснення творчої діяльності (або діяльність не можна вважати творчою).

Мислення, як творчість, виникає, коли стереотипи досвіду є недостатніми. Процес творчості відбувається при розв'язуванні творчого завдання – завдання, в процесі розв'язування якого виникає протиріччя між ресурсами накопиченого досвіду і унікальністю умов і вимог ситуації задачі. Самостійне подолання цього протиріччя – творче розв'язання (І.М.Семенов, С.Ю.Степанов). Творча ситуація може розглядатися як подразник, а творчість – реакція на цей подразник (В.М.Бехтерев, Я.А.Пономарьов).

Дж.П.Гілфорд вважав, що творчість є властивістю звичайної людини, структура творчої діяльності є принципово однаковою на всіх рівнях обдарованості. За діапазоном розвитку відрізняються основні здатності різних людей до творчої діяльності [4,31].

Ми виходимо з того, що творча діяльність і розвиток творчих здібностей творчої особистості, – взаємопов’язані компоненти творчого процесу. На наш погляд, існує взаємопов’язаність і циклічність: на основі наявного рівня розвитку творчих здібностей особистості відбувається творча діяльність, в процесі здійснення якої ці здібності вдосконалюються, що дає змогу і саму творчу діяльність здійснювати на більш високому рівні. Одні компоненти творчої особистості більш динамічно реагують, інші розвиваються повільніше. Не існує «стелі», що обмежує вдосконалення; не можна передбачити «кінцевого» рівня розвитку здібностей особистості і рівня виконання нею творчої діяльності в творчому процесі.

Ми пропонуємо виділити різні рівні творчого процесу, класифікуючи:

I. *За результатом (продуктом) творчості.* Результат (продукт) є:

1) перекомбінуванням наявних зв’язків, створенням варіацій наявного продукту (об’єкту) діяльності;
2) вдосконаленням вже наявного продукту (об’єкта);
3) новим, ще не відомим, об’єктом.

II. *За оперативністю, раціональністю:*

1) процес відбувається з великою витратою зусиль і часу;
2) гіпотеза виникає швидко, “блискавично”, але багато зусиль потребує її обгрунтування, перевірка;
3) процес виникнення гіпотези є довготривалим, але її перевірка відбувається з меншою витратою часу і зусиль;
4) весь процес відбувається оперативно.

III. *За рівнем значущості.* Об’єкт творчості (процес) є:

1) значущим для суб’єкта творчості;
2) значущим для певної групи людей або для певної галузі;
3) об’єкт творчості (процес) має глобальну значущість.

IV. *За впливом на суб’єкта діяльності* (розвиток якостей особистості суб’єкта творчості – уваги, пам’яті, волі, логічного мислення, творчих здібностей та ін.; набування суб'єктом творчості нових знань і вмінь, вдосконалення їх системи):

1) незначний вплив на суб'єкта творчості;
2) незначний вплив на розвиток якостей особистості, але значний вплив на вдосконалення системи знань і вмінь суб'єкта творчості;
3) значний вплив на розвиток якостей особистості, але незначний вплив на вдосконалення системи знань і вмінь суб'єкта творчості;
4) значний вплив на суб'єкта творчості стосовно обох аспектів.

В структурі творчої діяльності виділяють декілька фаз(А.Маслоу, К.Ізард, П.К.Енгельмейер, А.М.Блох, Рібо, Уоллес, Гордон, П.М.Якобсон). Найбільш лаконічною, на наш погляд, є схема, запропонована Я.А.Пономарьовим: 1) фаза логічного аналізу; 2) фаза інтуїтивного розв'язання; 3) фаза вербалізації інтуїтивного розв'язання; 4) фаза формалізації вербалізованого розв'язання.

Проаналізувавши ці схеми та схеми, запропоновані Н.Середою та В.Г.Розумовським, нами в ході попереднього дослідження було уточнено загальну схему творчого процесу, базуючись на тому, що процес навчання розв'язуванню нестандартних завдань підвищеного рівня складності є творчим процесом, тобто математичні здібності можна розглядати як здібності до творчого математичного процесу, до розв'язування творчих проблем [7,156].

На наш погляд, схема творчого процесу виглядає так: *1 етап* – осмислення, формулювання проблеми; *2 етап* – аналіз проблеми, інтуїтивне передбачення гіпотези; *3 етап* – пошук шляхів розв'язання, відбір необхідної інформації (що міститься в умові задачі або вже відомої); пошук "невідомої" інформації; *4 етап* – розв'язання проблеми одним чи кількома шляхами, способами; оцінка ефективності кожного з них, вибір найбільш раціонального; *5 етап* – узагальнення і систематизація набутого при розв'язуванні проблеми досвіду; розповсюдження, перенос отриманого методу (алгоритму, принципу, схеми) на розв'язання задач певного класу (при одночасному розвитку здібності легко виділяти задачі того чи іншого класу, типу) [9].

Ми вважаємо, що залежно від виду творчості (науково-теоретична, технічна, винахідницька, художня, педагогічна та ін.) схема творчого процесу набуває певних особливостей. В.А.Кан-Калик і М.Д.Нікандров виділили таку послідовність етапів педагогічної творчості: 1)виникнення педагогічного задуму, що спрямований на вирішення педагогічного процесу; 2) розробка задуму; 3) втілення педагогічного задуму в діяльність, у спілкування з людьми; 4) аналіз та оцінка результатів творчості.

Існують різні підходи до визначення компонентів творчих здібностей (Г.С.Альтшуллер, В.М.Алфимов, К.К.Вахтомин, Ю.З.Гільбух, Л.П.Доблаєва, М.К.Індик, Б.Р.Кадиров, В.О.Крутецький, О.М.Лук, Н.О.Менчинська, Д.Пойя, Я.А.Пономарьов, Г.Я.Розен, С.Л.Рубинштейн, Н.Ф.Тализіна, К.Тейлор, П.А.Шеварьов, І.С.Якиманська та ін.).

Дж.Гілфорд вважав, що для творчого мислення характерні нетривіальність висловлювань, ярко виражене прагнення до інтелектуальної новизни, семантична гнучкість, образна адаптивна гнучкість, семантична спонтанна гнучкість. З.І.Калмикова назвала творчі здібності здібностями до "продуктивного мислення", виділивши серед них глибину, гнучкість, стійкість, усвідомленість, самостійність [2].

На наш погляд, найбільш конкретною є система критеріїв творчих математичних здібностей, запропонована в роботах В.О.Крутецького [3].

Велике значення має уміння чітко організовувати власну розумову діяльність, здійснювати самоконтроль в процесі діяльності (В.О.Крутецький, Н.С.Лейтес), а також здатність підтримування розумової напруги (В.Д.Небилицин). Не менш важливою є спрямованість особистості на розвиток власних здібностей (Т.І.Артем'єва).

Нерідко творчу особистість представляють як особистість, що здатна до творчого мислення – мислення, результатом якого є відкриття принцилово нового або вдосконалене розв'язання певного завдання (Г.Линдсей, К.С.Халл, Р.Ф.Томпсон). Творче мислення спрямоване на створення нових ідей, а перевірка запропонованих розв'язань, виявлення області їх можливого застосування, знаходження недоліків – мета критичного мислення. Для ефективного розв'язування завдань необхідні обидва види мислення, але використовуються вони окремо: творче мислення є перешкодою для критичного, критичне – перешкодою для творчого [5,149]. Творче і критичне мислення є складовими творчої особистості.

Виявляються здібності у розумовій активності, інтелектуальній ініціативі, підвищеній допитливості, широті пізнавальних інтересів, потреб у розумовій діяльності (І.А.Петухова, І.С.Якиманська). Необхідно розмежувати здібності та їх конкретну реалізацію, а також, на нашу думку, акцентувати увагу на одній з важливіших в процесі творчості властивостей індивіда – мотивації.

Виходячи із уточненої нами схеми творчого процесу, в попередньому дослідженні ми використовували таку систему компонентів, притаманних особистості, що спроможна розв'язувати нестандартні, творчі завдання (проблеми): 1) цілеспрямованість мислення (ЦМ); 2) широта мислення (ШМ); 3) глибина мислення (ГлМ); 4) гнучкість мислення (ГнМ); оригінальність мислення (ОрМ); 5) критичність мислення (КрМ). Враховуючи специфіку математичної діяльності, нами було запропоновано розгорнуту систему творчих математичних здібностей [7,155-156;9].

В ході вивчення математики учень є суб'єктом творчого процесу, тому, спираючись на вище сформульовану схему творчого процесу, в ході попереднього дослідження ми дійшли висновку, що доцільно назвати компоненти творчих здібностей (в тому числі, – творчих математичних здібностей) так: 1) цілепостановча здібність (ЦЗ); 2) тактична здібність (ТЗ); 3) стратегічна здібність (СЗ); 4) оціночна здібність (ОЗ); 5) здібність інтелектуального самозбагачення (ІСЗ). Рівень розвитку здібності інтелектуального самозбагачення учня (студента) визначає, наскільки дієвими стають нові набуті знання і вміння.

Проводячи наступні дослідження, ми дійшли висновку про доцільність доповнення вищевказаної системи ще одним компонентом – інтелектуальна компетентність (ІК). Під інтелектуальною компетентністю розуміють особливий тип організації знань, що забезпечує можливість приймати ефективні рішення в конкретних сферах діяльності (М.А.Холодна) [8,402-403].

Наше дослідження розглядає проблему взаємопов’язаності формування і розвитку творчих здібностей старшокласників при навчанні математики та майбутніх вчителів математики. З цієї точки зору необхідно розглядати два аспекти – формування і розвиток: 1) творчих математичних здібностей учнів і студентів; 2) творчих педагогічних здібностей студентів.

Існують різні класифікації педагогічних здібностей: за умовами ефективності педагогічної діяльності (Н.Д.Левитов, Ф.Н.Гоноболин, В.О.Крутецький); за чутливістю до різних компонентів педагогічної діяльності (Н.В.Кузьмина, А.А.Реан); за відповідністю результату діяльності психофізіологічним функціям і станам (Н.А.Аминов) [1,147-153]. Серед компонентів творчої особистості вчителя виділяють: 1) мотиваційну та енергетичну активність; 2) евристично-творчі здібності; 3) творчо-логічні здібності; 4) комунікативно-творчі здібності; 5) риторичні здібності; 6) рефлексивні здібності (М.О.Лазарев) [4,35-36].

На наш погляд, виходячи з структури творчого педагогічного процесу, педагогічні здібності можна також вважати здібностями до розв’язування творчих (педагогічних) завдань (проблем). Тому в нашому дослідженні ми будемо називати компоненти педагогічних здібностей так само (ЦЗ, ШМ, ГлМ, ГнМ, ОрМ, КрМ, ІСЗ).

Прояв вищевказаних здібностей в процесі виконання творчих математичних завдань і в творчому педагогічному процесі можна проілюструвати таблицею (табл.1).

Таблиця 1

№	Здібність	Прояв здібності	
		в процесі виконання творчих математичних завдань	в творчому педагогічному процесі
1	ЦЗ	Здатність виявити і сформулювати проблему математичною мовою.	Здатність: виявити та сформулювати педагогічну проблему на основі діагностики рівнів розвитку, навченості, вихованості учнів; чітко ставити дидактичні, розвиваючі, виховні цілі.
2	ТЗ	Здатність: проаналізувати сформульовану проблему, прогнозувати, передбачати кінцевий результат, сукупність засобів і прийомів досягнення мети.	Здатність: проаналізувати сформульовану проблему, прогнозувати, передбачати кінцевий результат, сукупність засобів і прийомів досягнення наміченої мети.
3	СЗ	Здатність: до пошуку шляхів розв'язання, до підбору найбільш корисної в конкретному випадку інформації, до вияву явних і неявних зв'язків; до самокерівництва власною діяльністю; оперативність мислення.	Здатність: до пошуку шляхів розв'язання, підбору ефективних методів, прийомів, засобів навчання; добору конкретного навчального матеріалу; до керівництва діяльністю учнів та самокерівництва власною діяльністю; оперативність мислення.
4	ОЗ	Здатність: до знаходження і критичної оцінки всіх можливих варіантів, що містяться в умові, способів розв'язування і обгрунтованого вибору з них найбільш раціонального.	Здатність: до знаходження, критичної оцінки всіх можливих варіантів, способів розв'язування педагогічної проблеми, до обгрунтованого вибору з них найбільш ефективного, відповідного віковим та індивідуальним особливостям учнів; до створення системи оперативного двостороннього зв'язку у системі "вчитель ↔учень", до оцінки та своєчасної корекції процесу і результатів діяльності учнів та до самооцінки і самокорекції.

5	ІСЗ	Здатність: мислити широко, здійснюючи перенесення отриманого методу (способу, схеми, алгоритму, принципу) на виконання інших завдань, визначаючи ефективність його використання в кожному конкретному випадку.	Здатність: мислити широко, застосовувати набутий досвід роботи (власний; ефективний інноваційний досвід роботи інших) в процесі подальшої педагогічної діяльності, визначаючи його доцільність у кожному конкретному випадку.
6	ІК	Ерудованість; інтуїція; здатність до імпровізації, почуття гумору, артистизм. Прагнення до самовдосконалення.	Ерудованість, широка обізнаність не тільки з свого предмету; інтуїція, емоційна чутливість, тактовність; здатність до імпровізації, почуття гумору, артистизм. Прагнення до самовдосконалення.

Всі складові творчої особистості є взаємопов'язаними.

З метою формування і розвитку творчої особистості нами розроблено і впроваджено в практику роботи із старшокласниками в процесі навчання математики і студентів в процесі методичної підготовки системи вправ, спрямовані на розвиток творчої особистості учнів (студентів). Вони включають вправи таких видів (таблиця 2).

Таблиця 2

Види вправ	Цілі: сформувати і розвинути здібності	
	творчі математичні	педагогічні здібності
1. Цілепостановчі	1) виділяти і формулювати проблему; 2) інтерпретувати проблему математичною мовою; 3)перекодовувати інформацію, трансформувати її, встановлювати зв'язки між інформацією, поданою мовою формул, графіків, таблиць, малюнків та ін..	1)виділяти і формулювати педагогічну проблему; 2)формулювати дидактичну, розвиваючу, виховну цілі

2. Тактичні	1) аналізувати проблему; 2) висувати гіпотезу; 3) прогнозувати; бачити різні можливі варіанти, що містяться в умові; кмітливість, математичну інтуїцію.	1)аналізувати проблему; діагностувати; 2) висувати гіпотезу; 3)прогнозувати; бачити різні можливі варіанти розв'язання проблеми; кмітливість, педагогічну інтуїцію
3. Стратегічні	1) самостійно організовувати пошук шляхів розв'язання; 2) здійснювати самостійний пошук інформації і розпізнавати актуально корисну і потенційно корисну; 3) складати і здійснювати план розв'язання проблеми.	
4. Оціночні	1) здійснювати перевірку результатів кожного етапу розв'язування проблеми; 2) знаходити різні способи розв'язування проблеми; 3) вибирати найбільш раціональний і ефективний шлях розв'язування; 4) обгрунтовувати логічно і вірно власні висновки, знаходити і виправляти помилки; 5) рецензувати, бути опонентом, дискутувати.	
5. Самозбагачуючі	1) аналізувати, узагальнювати, класифікувати, систематизувати; 2)розповсюджувати, переносити отриманий новий метод (схему, алгоритм, принцип) на розв'язування інших завдань, розгортати принцип у схему розв'язування; 3) аналізуючи, порівнюючи, проводячи аналогії, визначати завдання, які входять у групу завдань, що розв'язуються з використанням конкретного нового (відомого вдосконаленого) способу.	1) аналізувати набутий досвід, систематизувати, узагальнювати; 2) розповсюджувати, переносити набутий досвід на розв'язування інших завдань; 3) аналізуючи, порівнюючи, визначати доцільність застосу-вання методу, прийому і т.ін. у певному конкретному випадку; необхідність внесення відповідних змін, вдосконалення.
6. Комплексні	дозволяють розвинути комплекс вищеперелічених здібностей	

Наголосимо на тому, що результатом творчої діяльності є як розв’язання творчого завдання, так і вдосконалення якостей суб’єкта творчого процесу, формування і розвиток творчої особистості:

1) розв’язування нестандартного, творчого завдання відбувається на основі системи, що складається з наявної бази знань і вмінь суб’єкта, наявного рівня розвитку творчих здібностей; наявного досвіду виконання творчої діяльності (БАЗА);

2) в результаті творчого процесу розв’язування (ТВОРЧИЙ ПРОЦЕС), відбувається виконання творчого завдання, розв’язання проблеми, знаходження нового методу, способу, алгоритму (РЕЗУЛЬТАТ ДІЯЛЬНОСТІ);

3) при достатньому рівні розвитку ІСЗ набуті знання і вміння, набутий досвід включаються в базу знань і умінь, яка в результаті діяльності розширюється та вдосконалюється; вдосконалюються, переходячи на більш високий рівень розвитку, творчі здібності суб’єкта діяльності, досвід творчої діяльності.

Творчість полягає в переході (трансдукції) з суб’єктивно-психічної системи в матеріально-речову при умові їх взаємного опору цій трансдукції (В.А.Роменець); суб’єктивні властивості людини є факторами, що сприяють творчому процесу або гальмують його. Рівень розумового розвитку часто не відповідає рівню розвитку творчих здібностей, успіхам у творчій діяльності (Торранс, Н.С.Лейтес). За думкою Г.Нойнера і Г.Віцлака творче мислення і творча діяльність випливають не з наявності психічних передумов, а із специфічної взаємодії в діяльності. Серед якостей особистості, що сприяють творчій діяльності, виділяють: творчу активність, силу волі, підвищену працездатність, інтелектуальну енергія, виняткову зосередженість на предметі діяльності (В.І.Андреєв, Д.Б.Богоявленська, Г.С.Костюк, Ю.І.Кулюткін, Н.С.Лейтес, В.І.Лозова, Б.М.Теплов). Назвемо це системою якостей особистості, що сприяють творчій діяльності.

Для діагностики рівня розвитку творчих здібностей нами в ході констатуючого експерименту використовувалися психологічні тести (табл.3).

Таблиця 3

№	Назва тесту	Здібності, що діагностуються
1	Тест мотивації досягнень Д.Адкинса і Б.Баллифа	ЦЗ, ТЗ, СЗ, ОЗ
2	Тест творчого мислення Торранса	ЦЗ,ТЗ, СЗ, ОЗ
3	WAIS (Векслеровська шкала інтелекту)	ЦЗ, ТЗ, СЗ, ІСЗ
4	Тест Равена серія А серія В серія С серія Д серія Е	ЦЗ ТЗ СЗ ОЗ ІСЗ

В нашому дослідженні система компонентів є системою критеріїв.

Спираючись на вищевикладену систему критеріїв розвитку творчих математичних здібностей, педагогічних здібностей, вікові особливості старшокласників і студентів, ми виділяємо, грунтуючись на результатах констатуючого експерименту, п'ять рівнів розвитку математичних здібностей: дуже високий (обдарованість; високий; середній; нижче середнього; низький). В попередньому нашому дослідженні було виділено 4 рівні [7, 156-157]. Необхідність виділення п'яти рівнів пояснюємо тим, що діапазон відмінності рівнів розвитку творчих математичних здібностей старшокласників збільшується через відмінності у програмах з математики за якими вони навчалися в основній школі. Те ж саме стосується і студентів – майбутніх вчителів математики (відмітимо, що серед них представників V рівня (низький), за даними нашого дослідження, немає).

Виділені нами групи з різними рівнями математичних здібностей динамічні, тісно пов'язані, взаємопроникнені, діє принцип вибору учнями рівня виконуємих завдань. Більш низький рівень при наявності спланованої роботи – не кінцевий пункт розвитку, а сходинка на шляху до більш високого рівня.

В попередньому дослідженні, враховуючи аналіз літератури (Р.А.Хабіб), досвід конкретної шкільної практики, ми умовно розбили учнів І і ІІ рівнів на три групи, базуючись на їх математичних нахилах: учні-“теоретики”, учні-“практики”, учні-“конструктори” [9,38-39].

Спираючись на вищевикладену систему критеріїв визначення рівня спроможності особистістю розв’язувати педагогічні проблеми, враховуючи вікові особливості студентів, грунтуючись на результатах констатуючого експерименту, нами виділено чотири рівні розвитку педагогічних здібностей майбутніх вчителів математики:

І рівень (*дуже високий*). Студент оперативно діагностує рівні розвитку і навченості учнів, чітко визначає актуальні цілі навчання математики; прогнозує близьку і дальню перспективу. На основі аналізу, доцільно підбирає зміст навчального матеріалу; форму навчання; сукупність методів, прийомів та засобів досягнення мети, що відповідають віковим та індивідуальним особливостям учнів. Спроможний ефективно організувати власну діяльність, діяльність співробітництва з учнями; оперативно і об’єктивно здійснює контроль та оцінку процесу та результатів навчання, його корекцію. Гнучко реагує на зміни, здатний до імпровізації. Ерудований, оперативно застосовує інформацію. Емоційно чутливий, тактовний. Отримує задоволення від роботи, від спілкування з учнями на конструктивному рівні. Прагне до самовдосконалення.

ІІ рівень (*високий*). Загалом має якості, притаманні студентам І рівня, але не завжди доцільно підбирає методи та прийоми навчання; має деякі ускладнення при необхідності об’єктивно оцінювати знання; менш оперативно реагує на зміни у ситуації, рідше імпровізує.

ІІІ рівень (*середній*). Необхідність виявити та проаналізувати педагогічну проблему, поставити відповідні цілі, прогнозувати – іноді викликає ускладнення. Студент не завжди раціонально виконує добір навчального матеріалу; нерідко використовує одноманітні методи, прийоми, засоби навчання. Віддає перевагу відпрацьованому сценарію, а не імпровізації, але має прагнення до самовдосконалення. Працює з учнями із задоволенням.

IV рівень (*<u>нижче середнього</u>*). Студент більше спрямований на використання шаблонів, сценаріїв розв'язування проблеми, запропонованих іншими (прагнуть працювати за готовими розробками уроків і т.д.). Рівень ерудиції невисокий. Іноді не усвідомлює необхідності у самовдосконаленні. Прагне працювати з учнями з невисоким рівнем розвитку здібностей.

V рівень (*<u>низький</u>*). Рівень ерудиції невисокий. Процес роботи над педагогічною проблемою відбувається складно; студент підходить до виконання завдань формально; є пасивним. При роботі з учнями не враховує їх індивідуальних та вікових відмінностей. Не отримує задоволення від роботи, незацікавлений у самовдосконаленні.

Творча особистість – поняття багатогранне. Її можна представляти як динамічну структуру, що включає в себе *основу* – наявність сукупності достатньо розвинених здібностей (нерідко – достатньо різнопланових, що у багатьох випадках є однією з причин більшої плідності діяльності); *силу руху до мети* (здатність та бажання цілеспрямовано, наполегливо і систематично працювати над розв'язуванням нестандартних завдань, над створенням нового); *спрямованість на самовдосконалення* (здатність виявляти недоліки і прогалини у власній системі знань та вмінь, працювати над їх усуненням).

В результаті аналізу виділимо три структурні частини творчої особистості:

I. Система компонентів, притаманних особистості, що спроможна розв'язувати нестандартні, творчі завдання (проблеми):

I.1. Загальні. I.2. Специфічні.

II. Система якостей особистості, що сприяють ефективності творчої діяльності.

III. Система знань і умінь, що застосовуються при виконанні певної творчої діяльності.

__**Зауваження.**__ В даному дослідженні специфічними ми вважаємо: для старшокласників – творчі математичні здібності; для студентів-майбутніх вчителів математики – як систему творчих математичних здібностей, так і систему педагогічних здібностей.

1. Зимняя И.А. Педагогическая психология. –М.: Логос, 1999. – 384с.
2. Калмыкова З.И. Педагогика гуманизма. – М.: Знание, 1990. – 80 с.
3. Крутецкий В.А. Психология математических способностей. – М.: Просвещение, 1968. – 432 с.
4. Лазарев М.О. Формування творчої активності гімназістів та ліцеїстів як складової їх духовної культури // Зб. наук. доп. – Суми: СДПУ, 2001. – С.23-48.
5. Линдсей Г., Халл К.С., Томпсон Р.Ф. Творческое и критическое мышление // Хрестоматия по общей психологиии п/р Ю.Б.Гиппентейер, В.В.Петухова. – М.: Моск.ун-т, 1981. – С.149-152.
6. Философский словарь/п/р И.Т.Фролова. – М.: Изд. полит.лит., 1987. – 590 с.
7. Чашечникова О.С. Проблема математичних здібностей: історія і сучасність // Вісник Черкаського університету. – Вип.18. – Черкаси, 2000. – С.154-158.
8. Чашечникова О.С. Розвиток інтелектуальної компетентності старшокласників в процесі навчання математики // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики. – Т.1. – Кр.Ріг: Нац.МетАУ, 2002. – С.402-406.
9. Чашечникова О.С. Розвиток математичних здібностей учнів основної школи. Дисс.канд.пед.наук. – К., 1997. – 208 с.

Резюме. В статье представлен взгляд автора на некоторые аспекты проблемы взаимосвязи процессов формирования творческой личности старшеклассников при изучении математики и будущих учителей математики в процессе методической подготовки.

Summary. The article is about the problem of relations process development pupil's and student's creative abilities.

Надійшла до друку 24.09.2002 р.

РОЗВИТОК САМООСВІТНІХ УМІНЬ ЯК КОНСТРУКТИВНИЙ КОМПОНЕНТ ПЕДАГОГІЧНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Н.М.Лосєва, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Донецький національний університет

У наш час помітно зростає інтерес до проблеми самоосвітньої діяльності в процесі навчання. Інтерес цей не випадковий. Він відбиває нові вимоги, які ставить сучасне суспільство перед освітою. Розширення кругозору, пошук і розвиток умінь самостійного придбання інформації стали потребою часу. Освіта стає деяким перманентним процесом, від якого усе в більшому ступені залежить доля конкретної людини і всього людства. Кінцевою метою освіти тепер стала не "підготовка висококваліфікованого фахівця взагалі", а підготовка людини до життя у світі, який незвичайно швидко змінюється, створення умов для всебічного розвитку цієї конкретної людини щоб допомогти їй знайти своє місце в складних умовах реальності. В умовах традиційного навчання той, хто навчається, приречений приймати інформацію здебільшого в готовому вигляді і механічно запам'ятовувати її. Але ж сприйняття, засвоєння і запам'ятовування нової інформації пов'язані зі складною роботою мозку. Не кожний учень готовий до такої праці. Таке навчання стає нудним і не може викликати пізнавального інтересу. Чи варто змушувати учнів сприймати інформацію в готовому вигляді? Психологи ж давно довели, що знання не може бути пересаджене з голови в голову механічно. Воно виникає у людини тільки в результаті її власної діяльності, спрямованої на предмет пізнання. Тому робота викладача по формуванню навичок самоосвіти з метою самореалізації особистості є головною і невід'ємною частиною усього навчального процесу. І педагогу необхідно передбачити створення умов за яких виникає необхідність самостійного добування інформації учнями, використання її для власного розвитку, самореалізації, вирішення будь-яких проблем із сфери людської діяльності.

Навчальний процес треба організувати так, щоб підштовхувати суб'єктів цього процесу до необхідності підвищення своєї компетентності, зменшення різниці між власними знаннями і новими досягненнями в науці. Незаперечним є той факт, що чим вищим є рівень самостійності в придбанні знань, тим вищим є рівень їхнього засвоєння. Відомо також, що самоосвітня діяльність активізує мислення, розвиває творчі здібності, а формування людини як творчої особистості, у свою чергу, вимагає росту самоосвітньої діяльності в процесі безупинної освіти. Таким чином, самостійність і творчість – нерозривні поняття. До того ж формування навичок самоосвіти сприяє вихованню наполегливості, завзятості в досягненні поставленої мети, дозволяє кожному учню виявити себе як особистість. Самоосвітня діяльність тісно пов'язана з проблемами самоактуалізації, самовдосконалення, самореалізації особистості. Суб'єкт не вимагає значного зовнішнього керування і контролю, тому що він має внутрішню мотивацію навчання, достатній рівень самоконтролю і самодисципліни. "Сучасна система освіти покликана дати навички самоосвіти і закласти основу єдиної системи безупинної освіти. Новому поколінню необхідно передавати не просто готові знання, а технологію постійного відновлення людиною своєї освіти" [4, 57].

Педагоги стверджують, що вивчення матеріалу повинно бути активним і кращий спосіб вивчити що-небудь – це відкрити самому. Психологи Богоявленський Д., Менчинська Н. доводять, що знання, які отримані в процесі самостійної діяльності, є найпрочнішими та найглибшими. Німецький фізик Ліхтенберг (відомий також як укладач афоризмів) говорить: "Те, що ви були змушені відкрити самостійно, залишає у вашому розумі доріжку, якою ви зможете знову скористатися" [2, 290]. Тому, для того щоб вивчення матеріалу було найефективнішим, необхідно надати учням умови самостійно відкрити максимум можливого. Крупинка особистого знання дорожче тонн пояснень. Знання дають можливість людині правильно орієнтуватися в навколишньому середовищі. Але ця віддалена користь від учня схована, тому що він ще не має системи знань, із позиції якої зміг би оцінити кожну її крупицю. Виходить, що його треба зацікавити не конкретним предметом вивчення, а процесом одержання знання, створити такі умови, коли навчання стає задоволенням. Захопленість самим процесом обумовлена невикорінною для людини потребою в самоствердженні і реалізації своєї особистості за допомогою творчої діяльності. Тому так важливо створювати на уроках таку обстановку, коли учень здатний сам для себе творити знання. І саме тому планування курсу навчання – це щось більше, ніж простий вибір фактів, які підлягають вивченню. Тут дуже важливим є те, у якому порядку ще й якими методами будуть вивчатися ці факти.

Загальновідомою є аксіома навчання: матеріал потрібно викладати таким чином, щоб перед учнями поставали невеликі проблеми і вони завжди знаходилися у творчому пошуку. Творча самостійна діяльність вимагає особистої участі учнів у виробництві принципово нових для них знань.

На думку автора, вивчення геометрії як науки про простір дозволяє вирішувати безліч педагогічних проблем. Геометрію можна розглядати як чисто дедуктивну науку, яка базується на системі аксіом. Але головне в геометрії – це уміння спостерігати. Геометрія являє собою ту область знань, у якій можна робити інтуїтивні та індуктивні відкриття, а потім підкріплювати їх міркуваннями. За допомогою геометрії відбувається подальше розширення математичного кругозору учнів. Вони, наприклад, розуміють, що геометрія Евкліда не є єдиною.

Д.Пойа відзначає, що деякі люди "розуміють геометрію як ремесло, деякі – як частину фізики (найбільш примітивну – так найчастіше вважають фізики; найбільш цікаву – заперечують їм математики)" [2, 316]. Автор, як математик, звичайно, приєднується до другої точки зору і стверджує: якщо викладач хоче відкрити своїм учням предмет по-справжньому, а не "пробігти" пункти програмного матеріалу, то треба постаратися зробити спробу дати поштовх міркуванням про навколишній реальний світ, учити тому, що є корисним як суспільству, так і самому учню у його подальшому житті. Причому, учити треба з обов'язковим використанням у своїй роботі принципу наступності.

Наступність у навчально-виховній роботі – складне багатопланове педагогічне поняття. Можна говорити про наступність у розвитку учнів (їхньої волі, характеру, розуму), про наступність у вихованні учнів (морального, естетичного виховання; формування світогляду), а також про наступність у вивченні предмета. Нові знання не виникають на порожнім місці, вони спираються хоча б на "щось я вже чув" і усі наступні знання розкручуються за спіраллю. Людина, звичайно, цікавиться тим, що їй уже відомо. І для того, щоб вона захотіла довідатися про щось нове, потрібен інтерес, який ще не виник. Де ж вихід із цього зачарованого кола? За яку ниточку потрібно потягнути, щоб благополучно розпустити клубок пристрастей і бажань учня і направити їх у русло тієї конкретної особистості, яка формується на Ваших очах і за Вашою допомогою?

На нашу думку, корисним буде підготовка і проведення уроків-семінарів у старших класах. Викладач ставить ряд питань спеціально організованим (із врахуванням психологічних особливостей) для цієї роботи тимчасовим творчим групам, які намагаються самостійно розібратися в матеріалі семінару. Потім весь навчальний матеріал викладається і закріплюється на загальному семінарі у вигляді дискусії. Автор упевнений, що попередні дослідження учнів збуджують у них "апетит" до одержання нової інформації, і тільки після такого самостійного пошуку інформації та дослідження проблеми, варто обговорювати отримані результати. Головна умова: педагог не повинний квапитися висловити свою точку зору, він надає учням стільки свободи та ініціативи, скільки дозволяють існуючі умови навчання.

Розглянемо один із можливих варіантів підготовки учнів до семінару "Неевклідові геометрії", метою якого є розуміння наявності геометрій, відмінних від евклідової. Викладач пропонує список необхідної літератури (наприклад, [3, 5-102]; [5, 162-169]) і ставить учням такі питання: П'ятий постулат Евкліда і спроби його доведення. Геометрія Лобачевського та її "сюрпризи". Псевдосфера. Геометрія скривлених поверхонь. Сферична геометрія. Геометрія нашого світу та теорія відносності.

Короткий конспект відповідей творчих груп може виглядати так.

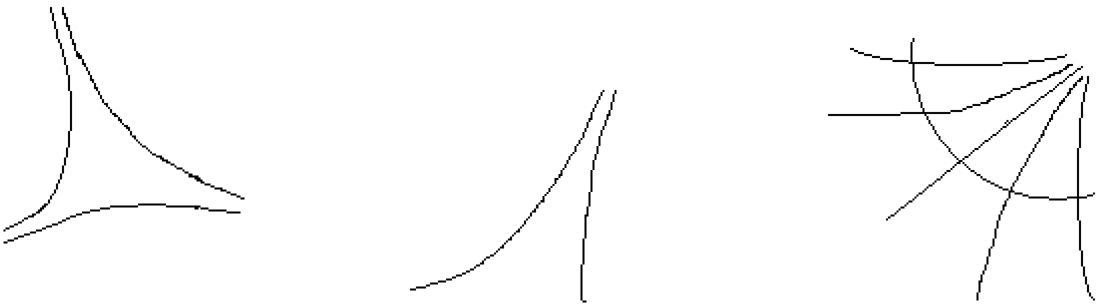
Історія створення геометрії Лобачевського одночасно є історією спроб довести п'ятий постулат Евкліда. Цей постулат являє собою одну з аксіом, покладених Евклідом в основу викладу геометрії і формулюється так: якщо дві прямі перетинаються третьої так, що по яку-небудь сторону від неї сума внутрішніх кутів є меншою за суму двох прямих кутів, то з тієї ж сторони прямі перетинаються. Багато математиків, які жили після Евкліда, намагалися довести, що ця аксіома є зайвою, що вона може бути доведена як теорема на підставі інших аксіом. Так, наприклад, у V ст. математик Прокл (перший коментатор праць Евкліда) зробив таку спробу. Однак у своєму доведенні Прокл використовував твердження: два перпендикуляри до однієї прямої знаходяться на обмеженій відстані друг від друга. Але при всій удаваній наочній "очевидності" – це твердження при строгому аксіоматичному викладі геометрії вимагає обґрунтування. У дійсності використане Проклом доведення є еквівалентом п'ятого постулату. Критичний аналіз подальших спроб довести п'ятий постулат виявив велике число аналогічних "очевидних" тверджень, якими можна замінити п'ятий постулат в аксіоматиці Евкліда.

Припустивши, що п'ятий постулат є невірним, математики намагалися прийти до логічного протиріччя. Але всі їхні спроби були безрезультатними, і протягом двох тисячоріч після появи "Початків" Евкліда математикам не приходила проста, але дуже зухвала думка: а чи може бути так, що, замінивши п'ятий постулат Евкліда його запереченням (при збереженні інших аксіом Евкліда), ми прийдемо до нової, неевклідової геометрії, яка багато в чому не погодиться з нашими звичними наочними уявленнями, але не містить ніяких логічних протиріч?

Першим, хто припустив можливість існування неевклідової геометрії, у якій п'ятий постулат заміняється його запереченням, був К.Ф.Гаусс. Але він до кінця життя так і не зважився опублікувати результати своєї роботи. XIX століття вирішило загадки п'ятого постулату. До цього відкриття незалежно від Гаусса прийшов російський учений – професор Казанського університету М.І.Лобачевський. Науковий світ не сприйняв серйозно відкриття Лобачевського, і він помер, так і не домігшись визнання своїх ідей. М.І.Лобачевський замінив п'ятий постулат Евкліда його запереченням – аксіомою Лобачевського: через точку поза прямою в даній площині можна провести хоча б дві прямі, що не перетинають дану пряму. Як і його попередники, Лобачевський спочатку намагався виводити різні наслідки, сподіваючись, що рано чи пізно він прийде до протиріччя. Однак він довів багато десятків теорем, не виявивши логічних протиріч. І тільки тоді Лобачевському спала на думку здогадка про несуперечність геометрії, у якій п'ятий постулат замінений його запереченням.

У геометрії Лобачевського зберігаються усі теореми, які в евклідовій геометрії можна довести без використання п'ятого постулату (чи його еквівалента – аксіоми паралельності): вертикальні кути рівні, кути при основі рівнобедреного трикутника рівні. Однак теореми, при доведенні яких застосовується аксіома паралельності, видозмінюються. Так теорема про суму кутів трикутника підносить перший сюрприз: у геометрії Лобачевського сума кутів будь-якого трикутника є меншою за 180 градусів. Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам іншого трикутника, то в евклідовій геометрії рівні і треті кути (такі трикутники подібні). У геометрії Лобачевського не існує подібних трикутників. Більш того, в геометрії Лобачевського якщо кути одного трикутника відповідно дорівнюють кутам іншого трикутника, то ці трикутники рівні.

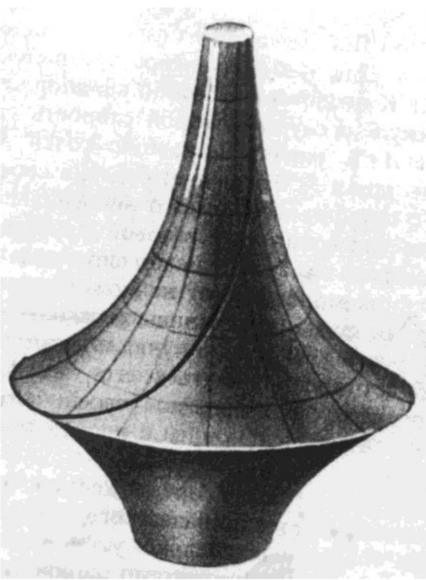
Усі можливості розташування двох прямих на площині в геометрії Лобачевського обмежуються такими випадками: дві незбіжні прямі або перетинаються в одній точці, або є розбіжними (наприклад, два перпендикуляри до однієї прямої, що необмежено віддаляються друг від друга), або паралельні. На мал. 1а зображений цікавий варіант розташування трьох прямих на площині Лобачевського: кожні дві з них паралельні (тільки в різних напрямках); на мал. 1б зображені прямі, що необмежено наближаються друг до друга, які Лобачевський і називає паралельними; на мал. 1в зображена пряма "перпендикулярна" усім прямим, які паралельні між собою в одному напрямку.



а) б) в)

Малюнок 1.

Щоб одержати доказ несуперечності цієї геометрії, треба було побудувати модель, але сам Лобачевський цього зробити вже не встиг. Побудувати таку модель випало математикам наступного покоління. У 1868 році італійський математик Е.Бельтрамі досліджував поверхню, яка називається псевдосферою, і довів, що на ній діє геометрія Лобачевського.



Якщо на цій поверхні намалювати найкоротші лінії («геодезичні») і вимірювати по цих лініях відстані, складати з дуг цих ліній трикутники, то виявляється, що в точності реалізуються усі формули геометрії Лобачевського (зокрема, сума кутів будь-якого трикутника менш 180°). Уже через кілька років німецький математик Ф.Клейн (1849-1925) запропонував іншу модель площини Лобачевського. Ще одна модель геометрії Лобачевського була запропонована французьким математиком А.Пуанкаре (1854-1912). Згодом були запропоновані й інші моделі геометрії Лобачевського. Цими моделями була остаточно встановлена її несуперечність. Тим самим було показано, що геометрія Евкліда не є єдино можливою.

Велика заслуга в розширенні наших уявлень про можливі геометричні простори належить німецькому математику XIX століття Б.Ріману. Він відкрив спосіб побудови "геометрій", які локально, "у малому", улаштовані майже так само, як і евклідова геометрія, але володіють "кривизною" і це позначається при розгляді великих кусків простору. Його відкриття мало великий прогресивний вплив на весь подальший розвиток геометрії і математики в цілому. XX століття виявило, що геометрія Лобачевського не тільки має важливе значення для абстрактної математики, як одна з можливих геометрій, але й безпосередньо пов'язана з додатками математики до фізики. Виявилося, що взаємозв'язок простору і часу, відкритий у роботах Х.Лоренца, А.Пуанкаре, А.Ейнштейна, Г.Мінковського й описуваний у рамках спеціальної теорії відносності, має безпосереднє відношення до геометрії Лобачевського. Наприклад, у розрахунках синхрофазотронів використовуються формули Лобачевського.

Ріманова геометрія служить фундаментом загальної теорії відносності. Можна навіть сказати, що загальна теорія відносності – це більш геометрія аніж фізика, і тут виявляється вплив ідей німецького математика Д.Гільберта, який співробітничав з А.Ейнштейном при створенні цієї теорії. Зауважимо, що ріманова геометрія має важливі додатки в теорії пружності та в інших розділах фізики і техніки.

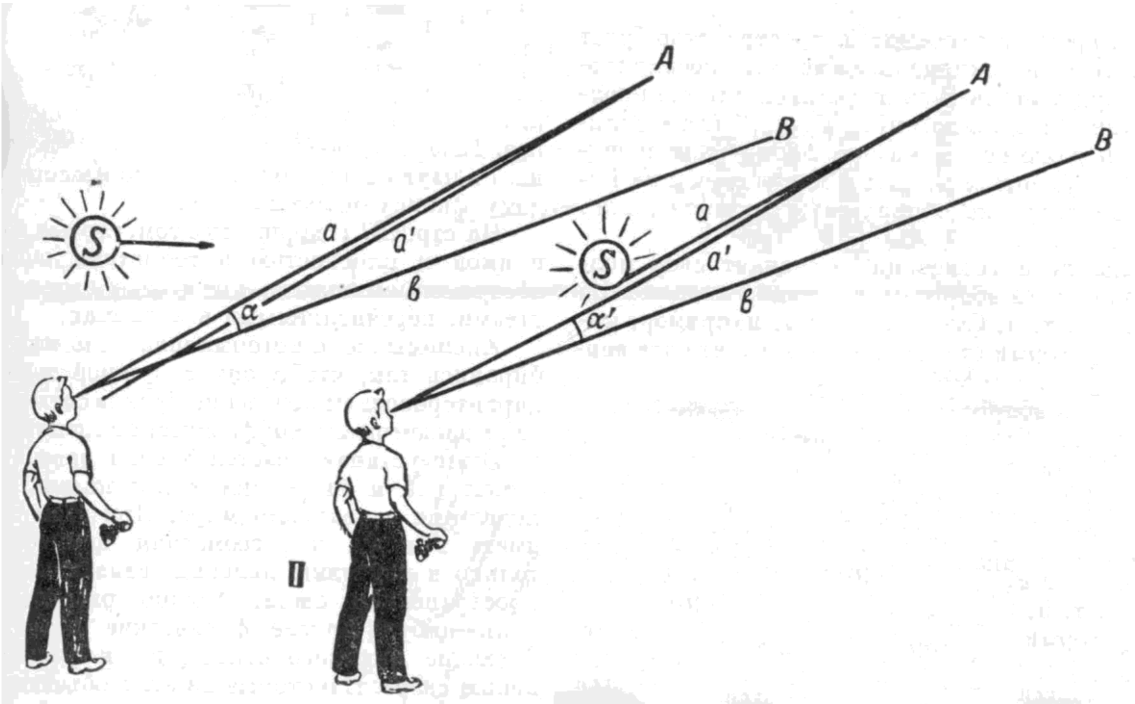
Багато чого в геометрії Лобачевського стало яснішим, після того як вчені ознайомилися з геометрією кривих поверхонь. Розглянемо, наприклад, геометрію на кулі. Виникає питання, чи не можна переконатися в кулястості Землі, проводячи виміри безпосередньо на земній поверхні. Звичайно, це легко зробити – адже якщо рухатися по Землі в одному напрямку, то, зрештою, ми повернемося на те ж місце, звідкіля вийшли. Але для цього прийдеться зробити кругосвітню подорож. А чи не можна переконатися в кулястості Землі, залишаючись увесь час на невеликій її ділянці, скажемо на острові? Виявляється, можливо. Для цього треба вимірювати геометричні фігури на поверхні Землі. Візьмемо на цій поверхні дві точки – A і B. Ці точки можна з'єднати різними лініями, не залишаючи нашого острова, але серед усіх цих ліній буде тільки одна, яка має найменшу довжину. Ми знаємо, що Земля куляста, і тому можемо сказати, що це дуга великого кола, який з'єднує точки A і B. Людина, яка живе на острові і не знає, про кулястість Землі, назве цю лінію прямою, що з'єднує точки A і B. Якщо після цього людина візьме три точки A, B, C і виміряє кути трикутника, то за умов, що острів дуже маленький і точність інструментів теж мала, вона зробить висновок, що сума кутів цього трикутника дорівнює 180^0. Зовсім інший результат можна отримати, якщо острів великий або якщо інструменти у жителя цього острова дуже точні. Щоб зрозуміти, у чому тут справа, розглянемо такі три точки на глобусі: за точку A вибираємо Північний полюс, за точку B – точку перетину екватора з нульовим меридіаном і за точку C – точку перетину екватора з меридіаном, який має довготу 90°. У цього трикутника ABC усі три кути дорівнюють 90°. Тоді сума кутів трикутника дорівнює 270 градусів. Отже, на поверхні кулі сума кутів трикутника є більшою за 180 градусів, і вона буде тим більшою, чим більшою є площа трикутника (тому для маленьких трикутників сума кутів майже дорівнює 180 градусам). Точно вимірюючи кути великого трикутника, можна переконатися, що ми живемо на скривленій поверхні.

Виміри, що були проведені на кулі, можна проводити і на іншій поверхні. На будь-якій поверхні є лінії, що з'єднують дві точки і мають найменшу довжину серед усіх ліній, що з'єднують ці точки. Такі лінії називають геодезичними. Вимірюючи кути трикутників, утворених геодезичними лініями, можна судити про ступінь скривленості поверхні. Наприклад, у кулі та еліпсоїда сума цих кутів буде більшою за 180°, а в сідла – меншою 180°. Відомий німецький учений Б. Ріман показав, що можна розглядати не тільки скривлені поверхні, але і скривлені простори. Що ж являє собою кривий простір? У скривленості поверхні можна переконатися, не виходячи за її межі, вимірюючи кути в трикутниках на цій поверхні. Так само простір вважають скривленим, якщо сума кутів трикутників, узятих у цьому просторі, відрізняється від 180°.

Ми розглянули різні геометрії, і, природно, виникає питання: яка ж геометрія нашого світу? Скривлений наш простір чи ні? Щоб чітко поставити це питання, треба визначити які лінії у просторі ми будемо вважати прямими. Прямою, що з'єднує дві точки, ми назвемо світловий промінь, який іде в порожнечі з однієї точки в іншу. Візьмемо в просторі три точки A, B та C і розглянемо трикутник, утворений світловими променями, що з'єднують ці точки. Чи буде сума кутів цього трикутника дорівнювати 180°?

Найвідоміший фізик XX століття А. Ейнштейн створив теорію відносності, яка підтвердила скривленість нашого простору. За теорією Ейнштейна, матеріальні маси скривляють навколишній простір. Теорія відносності одержала блискуче підтвердження в проведених досвідах.

Уявимо собі на Землі спостерігача, який у певний момент бачить зірки A, B та поблизу від зірки A Сонце S, що рухається в напряму до зірки A. Цей досвід проводився при повному сонячному затьмаренні. Спостереження відбувалися у невеликий проміжок часу, тому зірки A і B можна вважати нерухомими. Неважко виміряти швидкість пересування Сонця по небу. У малий проміжок часу вона постійна. Знаючи цю швидкість і відстань між Сонцем і зіркою A, неважко підрахувати, у який момент часу Сонце закриє цю зірку. Однак, досвід показує, що в дійсності зірка A закривається Сонцем із деяким запізненням, трохи пізніше розрахованого часу. Як же це пояснюється теорією відносності? Виявляється, що сильне поле тяжіння, утворене Сонцем, скривляє простір довкола нього і змінює напрям світлового променя. Пояснимо це докладніше.



Малюнок 3

У початковий момент часу Сонце не впливає на шлях світлових променів, які випромінюються зіркою А, тому що вони далекі від Сонця. Промінь *a* попадає в око спостерігача, і він бачить зірку. Промінь a' не попадає в око спостерігача. Коли ж Сонце, що створює сильне поле тяжіння, досить наблизиться до променів *a* і a', ці промені будуть неначе притягатися до Сонця. І, коли Сонце закриє від спостерігача промінь *a*, спостерігач не перестане бачити зірку, тому що промінь a', який притягує Сонце, потрапить у його око (мал. 3). І справа не у тім, що промінь світла скривився (він залишається прямим, адже ми назвали прямими саме промені світла в порожнечі), а у тім, що простір навколо Сонця, під дією тяжіння Сонця, одержав нові властивості, скривився. Скривляють простір й інші зірки. Маленькі тіла теж впливають на світлові промені, тільки, звичайно, набагато менш ніж зірки. Відомо, що всі тіла в природі знаходяться в безперестанному русі. Тому тіло, що скривляло в деякий момент простір в одному місці, через якийсь час скривляє його в іншому місці. У різні моменти світлові промені поводяться по-різному, і геометрії, що описують їхнє поводження в ці моменти, будуть різними. Отже, геометрія, що описує з певною точністю наш реальний простір (геометрія світлових променів), не залишається незмінною. Виходить, у формулюванні аксіом треба враховувати час. Поняття простору й часу виявляються невіддільними, нерозривними.

Відкриваючи нові фізичні закони, уточнюючи їх, ми також змушені уточнювати і геометрію, яку застосовуємо. Дослідження питань космосу призвело до висновку про неевклідовість нашого простору світлових променів. Зрозуміло, що і при розгляді звичайних земних питань залежність простору від часу збережеться, простір буде залишатися неевклідовим, але ця неевклідовість буде настільки незначною, що нею цілком можна (і треба!) знехтувати. Евклідова геометрія зберігає своє повне значення в питаннях практики, інженерної техніки тощо. Смішно було би, коли, наприклад, інженер, став враховувати, що дві вертикальні лінії схилу не паралельні, а перетинаються в центрі Землі. У таких питаннях евклідова геометрія з великою точністю описує наш реальний світ, і не випадково, що вивчення властивостей простору люди почали саме з евклідової геометрії. Усе це, зрозуміло, ніякою мірою не применшує важливості неевклідових геометрій. Вони знаходять собі застосування в найважливіших теоретичних і практичних питаннях сучасної фізики і математики.

Тут наведено стислий конспект, а у виступах учнів на семінарі, звичайно, були біографічні довідки, багато цікавого матеріалу і багато емоцій. Необхідно підкреслити, що підготовка до такого семінару поставила моїх учнів перед необхідністю оволодіти комплексом різних загальних і комунікативних умінь. Учні повинні були спланувати свою багатоденну підготовку до семінару, оволодіти методикою поглибленого читання, "вмінням користуватися довідниками, здійснювати систематизацію самостійно здобутої інформації, порівнювати виклад одного і того ж питання в науково-популярній і науковій літературі, включатися в діалог, логічно аргументувати" [1, 143].

Кожен викладач розуміє, що питання, які були поставлені перед учнями є гарною пропедевтикою для подальшого вивчення ними таких математичних курсів як диференціальна геометрія, основи геометрії тощо. І якщо педагог прагне до того, щоб знання його учнів "були добре організованими", то він розуміє, що нові факти не виникають із нічого: вони повинні бути пов'язані з навколишнім світом, з уже наявними знаннями, спиратися на них, знаходити в них своє пояснення, відповідати природній допитливості учнів.

Викладачі, які віддані своїй справі, здатні відшукати способи, за яких новий факт у математичних знаннях учнів прив'язується до раніше вивчених фактів та цементує їх. Головне, що педагог організує навчальну діяльність учня так, щоб той зміг зробити для себе відкриття, у результаті якого він синтезує нове знання, установлює взаємозв'язки, робить висновки, формулює нове означення тощо. Принцип творення знань спонукає педагога змінити свою позицію в навчальному процесі. З інформатора він перетворюється в організатора пізнавальної діяльності, яку самостійно проводить учень. На уроці вчитель не прагне розкрити усю сутність інформації. Він тільки організує пізнавальну діяльність учнів і підтримує горіння їхнього мислення, підкидаючи питання, як поліна в палаюче багаття.

Самоосвітня діяльність дозволяє учням випробувати задоволення від праці та робити черговий крок у своєму розвитку. Анатоль Франс у своєму творі "Сад Епікура" написав: "Пробуджуйте цікавість. Відкрийте очі своїм учням, але не перевантажуйте їхній мозок. Досить заронити в нього іскру. Вогонь сам розгориться там, де є для нього їжа". Сучасні педагоги розуміють, що заняття, які тільки дають знання, не наближають людину до щастя життя. Заняття, які підводять людину до осмислення істини, сприяють руху до щастя, бо знання є цінними тільки як засіб збагнення таємниць життя і засіб знайти свободу вибору власної долі.

1. Лозова В. І. Цілісний підхід до формування пізнавальної активності школярів. – Харків: "ОВС", 2000. – 164 с.
2. Пойа Д. Математическое открытие. – М.: Наука, 1976. – 448 с.
3. Силин А.В., Шмакова Н.А. Открываем неевклидову геометрию. – М.: Просвещение, 1988. – 126 с.
4. Хадаев В. Д. Нужны новые теории // Педагогика. – 1987. – №2. – С.57-58.
5. Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А.П. Савин.–М.: Педагогика, 1989.– 352 с.

Резюме. В статье рассматривается педагогическая ситуация, создающая условия для развития навыков самообразовательной деятельности учащихся.

Summary. This article proposes you a study of pedagogical situation that creates conditions for the development of self-study skills of the pupils.

Надійшла до друку 19.08.2002 р.

РАЗНОВИДНОСТИ ЭВРИСТИК И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ В ДИДАКТИЧЕСКИХ ЦЕЛЯХ

Е.И.Скафа, канд. пед. наук, доцент,
Донецкий национальный университет

В процессе обучения математике бывает полезно давать некоторые общие рекомендации, облегчающие поиск решения задачи либо наталкивающие на "открытие" новой закономерности, факта, понятия, теоремы и т.д. Такие рекомендации различными исследователями в области методики математики называются по-разному: эвристические ориентиры, эвристические предписания, правила-ориентиры, эвристические схемы, стратегии, концентры, эвристико-дидактические конструкции и т.д. Все они относятся к эвристическим приемам деятельности и в их основе лежат, естественно, разнообразные эвристики.

Итак, мы будем рассматривать *эвристические приемы как особые приемы, которые сформировались в ходе решения одних задач и более или менее сознательно переносятся на другие задачи.* Они дают самое общее направление мысли, не гарантируя получение нужного результата.

Для более глубокого понимания сути эвристики как эвристических приемов деятельности предлагаем классификацию эвристик.

В исследованиях по психологии приемы деятельности классифицируются по следующим основаниям: по степени обобщенности приема; по степени обобщенности цели; по степени заданности состава приема; по форме операционного состава; по возможности достижения цели. Поэтому в качестве оснований для классификации эвристик мы принимаем основания, отнесенные к параметрам структурных элементов приема деятельности. Мы выбираем: степень обобщенности приема, степень обобщенности цели (приемы достижения определенных целей).

Первое основание, которое мы выделяем для классификации – *степень обобщенности приема.*

Здесь эвристики делятся на:

– **общие эвристики**, применяемые практически во всех областях знаний.

Целью их является установление общих закономерностей тех процессов, которые имеют место при решении всякого рода проблем, независимо от их содержания.

Структурными элементами являются эвристические приемы мыслительной деятельности и эвристические ориентиры;

– специальные эвристики, связанные с изучением конкретных математических фактов.

Цель данных эвристик состоит в создании благоприятных дидактических условий для самоорганизации учащихся при "открытии" и усвоении новых знаний, умений, а также в овладении приемами решений различных классов эвристических задач.

Структурными элементами специальных эвристик являются эвристические предписания, диалогические концентры, базовые эвристики решения эвристических задач;

– **эвристико-дидактические конструкции,** как программы управления эвристической деятельностью учащихся в процессе обучения математике.

Под эвристико-дидактическими конструкциями мы понимаем систему логически связанных учебных проблем (эвристических задач или обучающих компьютерных программ), которые в совокупности с эвристическими вопросами, указаниями и минимумом учебной информации позволяют учащимся (преимущественно без помощи извне) открыть новое знание об объекте исследования, способе или средстве эвристической деятельности.

Целью таких эвристик является формирование у обучаемых общей стратегии наиболее рационального поиска решения определенного класса учебных проблем.

К структурным элементам системы мы относим эвристические программы, понимая под этим, понятие, введенное Л.М.Фридманом: *эвристическая программа – это такая программа, которая при решении сложных задач использует разные эвристики* [1], а также системы эвристически ориентированных задач.

Вторым основанием для классификации выбрана *степень обобщенности цели.*

К таким эвристикам мы относим.

Из класса общих эвристик:

- **эвристические приемы мыслительной деятельности.**

Эту группу образуют приемы мыслительной деятельности, подразделяемые нами следующим образом.

1. Общие (анализ, синтез, сравнение, абстрагирование, обобщение, специализация, классификация, систематизация, аналогия и др.).
2. Специфические (к ним относим: подведение под понятие и выведение следствий);

– **эвристические ориентиры.**

1. Общие предварительные и правдоподобные правила, доводы, рассуждения, целью которых является поиск решения данной проблемы. К ним мы относим:
   – правила ориентиры;
   – правила-советы;
   – эвристический довод;
   – эвристическое рассуждение;
   – эвристические схемы;
   – стратегии и др.

Эвристические правила-ориентиры можно представить в виде своих разновидностей – *эвристического довода*, который, как отмечает Д.Пойа [2], может быть полезен, т.к. может подготовить точное доказательство, отдельные элементы, которого он содержит в себе и *эвристического рассуждения,* имея в виду, предварительное и правдоподобное рассуждение, цель которого найти решение для данной проблемы. Эвристическое рассуждение часто основывается на индукции или аналогии.

К правилам-ориентирам мы относим также, предлагаемые З.И.Слепкань в своих исследованиях, *эвристические схемы.* Как отмечает автор, по мере сформированности у обучаемых основных компонентов умения, например, умения доказывать теорему и решать задачи на доказательства, учащимся полезно предложить общую эвристическую схему доказательства любого математического утверждения [3].

К эвристическим правилам-ориентирам можно отнести *эвристические стратегии,* предлагаемые И.Б.Писаренко. "Любая общая стратегия решения нестандартных задач, – отмечает автор, – должна быть, с одной стороны, эффективной, с другой – легкой для запоминания". Общие стратегии поиска решения эвристических задач И.Б.Писаренко выражает в виде рекомендаций трех уровней [4].

2. Эвристические ориентиры специфического характера. Приемы существенно ограничивающие поиск решения сложных задач, однако, не гарантирующие получение нужного результата. Примерами эвристических ориентиров могут служить, предложенные Ю.А.Палантом [5], наборы общих эвристик:

– исследуй по частям, перебери возможные варианты;
– нарисуй картинку;
– формулируй эквивалентную проблему;
– модифицируй (изменяй, преобразуй с появлением новых свойств);
– выбери эффективную систему обозначений;
– воспользуйся симметрией, периодичностью;
– подразделяй на случаи;
– обращай действия;
– рассуждай от противного, ищи контрпримеры;
– рассмотри экстремальные случаи;
– обобщи;
– рассмотри несколько моделей задачи, выяви связи между ними;
– рассмотри граничные и предельные случаи;
– ищи аналогию, действуй по аналогии;
– проверь результат (по знаку, размерности, характеру изменения, достаточности и излишку, содержанию интерпретации, направлению и характеру изменения, достаточности и излишку условий);
– выделяй главное (главную часть) и др.

Из класса специальных эвристик:

– эвристические предписания.

Рассматриваются в процессе обучения конкретному учебному материалу и предлагаются в форме вопросов, указаний-советов, эвристических советов и т.д.

Теория эвристических предписаний разработана В.И.Андреевым [6], при этом, *под эвристическим предписанием понимается система эвристик в форме вопросов, указаний-советов, целенаправленное применение которых не детерминирует полностью действий решающего, но активно формирует у него общую стратегию наиболее рационального поиска решения определенного класса учебных проблем, учебно-исследовательских задач.*

Главная цель применения эвристических предписаний – создать благоприятные дидактические условия для самоорганизации учащихся "при открытии" и усвоении новых знаний, умений.

Формы проявления эвристик, входящих в эвристические предписания, это:

– переформулировка;

– наводящие вопросы;

– указания-советы;

– наглядность;

– аналогии;

– диалогические концентры.

Прием, при котором всякое существенно важное математическое понятие после его введения погружают в диалог с другими понятиями с целью востребованности основных знаний и их систематизации. Идея создания и использования диалогических концентров изложена Е.Е.Семеновым [7];

– базовые эвристики решения эвристических задач.

Приемы решения эвристических задач, которые сформировались в результате решения одних и переносятся к использованию в других задачах. Некоторые из базовых эвристик – это:

– рассмотрение предельного случая;

– введение вспомогательных неизвестных;

– переход к равносильной задаче;

– выделение подзадач;

– метод малых изменений;

– введение дополнительных элементов (или дополнительных построений);
– метод обобщения плюс индукция;
– преобразование требования задачи;
– принцип симметрии;
– прием моделирования;
– принцип Дирихле и т.д.

Из класса эвристико-дидактических конструкций:

– эвристические компьютерные программы.

Представляют собой программные средства для формирования эвристической деятельности в процессе обучения математике. Примерами таких программ могут служить:

– программы актуализации знаний;
– акцентированные программы;
– программы с запаздывающей коррекцией;
– сцепленные программы;
– программа «задача-метод»;
– программа «задача-софизм»;
– программа автоматизированного рецензирования решения задач и др.

Идеология построения программ данного типа изложена Е.И.Скафой [8];

– система эвристически-ориентированных задач.

Это система эвристических задач, способствующих процессу управления формированием эвристической деятельности учащихся, в основе построения которой лежат наборы общих и специальных эвристик.

Эта система должна удовлетворять следующим требованиям:

– полноты представления эвристик;
– целесообразного соотношения между эвристическим и логическим компонентами на каждом этапе обучения;

– возможного осознания главных математических идей путем выведения интуитивных рассуждений на уровень осознанных логических процессов по схеме "предзнание" – формализация – "послезнание", обеспечение мотивации этого перехода;

– обеспечение широты ориентировочной деятельности;

– направленности на "открытие".

Таким образом, построенная нами классификация эвристик дает возможность более глубже исследовать вопросы влияния эвристик на управление процессом обучения математике, формирования приемов познавательной и творческой деятельности обучаемых.

Анализируя схему построения классификации (схема 1), мы приходим к заключению о том, что в основе решения любой эвристической задачи лежат как общие так и специальные эвристики, поэтому работа по формированию приемов эвристической деятельности должна проходить по двум взаимосвязанным и взаимообусловленным линиям. С одной стороны, следует учитывать имеющийся опыт эвристической деятельности (о чем речь пойдет в дальнейшем), а с другой – обеспечить выполнение такой системы заданий по программам школьных тем и при таких условиях, которые гарантируют формирование эвристических приемов, с помощью которых происходит процесс поиска решения эвристической задачи.

Основой же процесса формирования эвристических приемов разных видов является набор различных эвристик, который, как верно отметил Е.Е.Семенов:

1) предлагается как некоторая «народная мудрость», порожденная опытом других;
2) учитель подводит учащихся к эвристике в процессе решения задач;
3) открывается (обнаруживается) учеником [9].

1. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. – М.: Просвещение, 1983. – 158 с.
2. Пойа Д. Как решать задачу. – М.: Учпедгиз, 1961. – 207 с.
3. Слєпкань З.І. Методика навчання математики. – К.: Зодіак – Эко, 2000. – 512 с.
4. Писаренко И.Б. Стратегия решения нестандартных задач // Математика в школе. – 2002. – №5. – С.40-44.
5. Палант Ю.О., Хорольська О.В., Карлащук А.Ю. Евристичні лінії у шкільному компоненті // Евристики та дидактика точних наук. – 1998. – Вип.9. – С.4-6.
6. Андреев В.И. Эвристическое программирование учебно-исследовательской деятельности. – М.: Высш. школа, 1981. – 240 с.
7. Семенов Е.Е. О диалогическом концентризме в преподавании математики // Математика в школе. – 2002. – №5. – С.44-48.
8. Скафа Е.И. О процессе управления эвристической деятельностью при обучении решению математических задач // Труди міжнар. кнф. "Інформаційні технології в освіті". – Мелітополь, 2001. – С.81-88.
9. Семенов Е.Е. Размышления об эвристиках // Математика в школе. – 1995. – №5. – С.39-43.

Резюме. В роботі запропонована класифікація евристик за двома основами: ступінь узагальнення прийому та ступень узагальнення мети (прийоми досягнення визначених цілей). Це дає змогу провести систематизацію евристик, що відіграють визначну роль у формуванні навчально-пізнавальної евристичної діяльності учнів.

Summary. In this paper the systematization of heuristic tricks with the purpose of didactics is considered. The examples are given in the field of training of mathematicians and the classification of heuristics is presented.

Надійшла до друку 12.08.2002 р.

МЕТОДИКА УПРАВЛІННЯ ЕВРИСТИЧНОЮ ДІЯЛЬНІСТЮ УЧНІВ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРІЇ ПІД ЧАС ФОРМУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПОНЯТЬ

К.В.Власенко, вчитель математики,
Слов'янський педагогічний ліцей

Поняття – це форми мислення, в яких відображаються загальні суттєві і характерні (специфічні) властивості та особливості певних предметів або явищ дійсності: "формування у дітей узагальнень і понять вважається однією з головних цілей шкільного викладання", – пише відомий психолог В.В.Давидов [1, с.11]. Шкільний курс математики займає в цьому особливе місце у зв'язку з тим, що математичні поняття відрізняються від понять інших наук високим рівнем узагальнення і абстракції.

Вивчати процес формування у дітей наукових понять одними з перших почали психологи під керівництвом Л.С.Виготського. І сьогодні залишається актуальним положення Л.С.Виготського про основні параметри, за якими можна судити про зміни розумової діяльності у процесі навчання, зокрема в процесі засвоєння понять. До таких параметрів належать: міра і якість, узагальнення понять, степінь їх абстрагованості і степінь включення їх в систему, іншими словами – "системність" знань. Великий внесок в розв'язання цієї проблеми зробили психологи Г.С.Костюк, В.В.Давидов, Є.М.Кабанова-Меллер, Н.Ф.Тализіна, Д.М.Богоявленський, Н.А.Менчинський та ін.

Характеризуючи пізнавальну діяльність як об'єкт управління, Н.Ф.Тализіна зазначає, що "формування понять передбачає, по-перше, засвоєння системи спеціальних операцій по встановленню необхідних і достатніх ознак понять в конкретних предметах. По-друге, засвоєння загальнологічної системи операції: по підведенню об'єктів під дане поняття, по одержанню наслідків із належності класу предметів і ін. Операційна сторона і складає власно психологічний механізм поняття. Без нього поняття не може бути ні сформоване, ні застосоване до розв'язання різних задач. Через зазначену систему операцій і відбувається управління формуванням понять" [3, с.32].

В структуру пізнавальної діяльності по засвоєнню математичних понять входять як загальні, так і специфічні евристичні прийоми. До загальних належать дії: аналіз, синтез, порівняння, абстрагування і конкретизація, узагальнення і спеціалізація, використання аналогій, класифікація і систематизація. Вони забезпечують встановлення необхідних і достатніх властивостей понять в конкретних об'єктах і формування узагальненого поняття і системи понять у структурі предмета.

До специфічних евристичних прийомів належать прийоми підведення під поняття і обернений йому прийом виведення наслідків, тобто від факту належності об'єкта до певного поняття переходять до системи властивостей, які притаманні даному об'єкту.

Покажемо місце і роль загальних і специфічних евристичних прийомів, які сприяють актуалізації евристичних ситуацій: орієнтування, пошуку, перетворення та інтеграції в процесі формування геометричних понять під час вивчення першої теми поглибленого курсу 8-го класу “Чотирикутник. Паралелограм”.

Ми дотримуємось концепції Г.І.Саранцева [2], за методологією якого, процес формування понять в школі складається з наступних етапів: мотивація введення понять; виявлення суттєвих властивостей поняття, які використовуються в його означенні; засвоєння логічної структури означення понять; використання понять; встановлення зв’язку поняття, що вивчається, з іншими.

Отже, перший етап формування поняття включає мотивацію. Сутність цього етапу полягає в підкресленні значимості розглянутого поняття, у порушенні інтересу до нього. Відомий французький математик Фреше підкреслює: “Якщо щось дійсно необхідно, так це – знищення догматичного методу: не давати ніяких визначень, не вказавши, як вони виникли, для чого вони потрібні, як вони застосовуються” [4].

Мотивація може здійснюватися за допомогою залучення засобів нематематичного змісту. У цьому випадку доречна евристична бесіда. Система продуманих учителем запитань або якась інформація допоможе актуалізувати ситуацію орієнтування дитини, яка залучається до евристичної діяльності щодо формування математичних понять під час лекцій або уроку, однієї з головних колективних форм організації навчання. Успішне використання евристичної бесіди веде до осмислення, згадування, нового “відкриття” забутого або не вивченого матеріалу та запам’ятовування всіма учнями класу. Перед серйозною розмовою пропонується замислитися над інформацією. *Геометрія з давнини допомагала людині в розв’язанні багатьох практичних задач. І в теоретичному матеріалі, і в задачах ви вже зустрічались з різним використанням чотирикутника, тому маєте змогу проявити свою кмітливість. В 7 –му класі ви багато уваги привернули трикутнику і це не випадково. Хоча трикутник ледве не простіша після відрізка фігура, він має багато важливих і цікавих властивостей. Наприклад, подумайте як це так, що в Мишка відламалась одна ніжка в стільці, а він сидить і не падає? (Мабуть тому, що три ніжки, які залишились дають достатню опору). Тобто трикутник, який лежить в основі цієї опори, можна використовувати скрізь. Але чому ж ми ніколи не бачили будівель, де в основі фундаменту лежить трикутник? Усе: площі, городи, дома, вулиці, меблі та інше, – в їх основі чотирикутні форми: паралелограми, прямокутники, квадрати, ромби та довільні чотирикутники.(Мабуть тому, що це більш надійно і раціонально). А щоб знати чому так, тобто, які властивості чотирикутника впливають на це, для цього ми і будемо вивчати тему: “Чотирикутник”.*

Процес розкриття змісту поняття та створення уявлення про його об’єм починається із сприймання ним необхідної інформації, яку або дає учитель, або учень її отримує з підручника та інших посібників. Але далеко не всі учні навчилися подібній роботі. Можна рекомендувати, наприклад, таку форму: клас під час традиційного уроку розбивається на групи. Кожна група виконує завдання лабораторної роботи, вивчаючи, а потім обговорюючи висновки, які отримуються в ході роботи. Представники кожної групи розкривають та захищають перед класом отримані означення, властивості та ознаки. Така розповідь не являє собою якусь зв'язану лекцію, бо провокується питаннями і учителя, і учнів з інших груп. Записуються усі зроблені висновки, приклади й контрприклади. Кожен учень крім цього записує коротко те, що він вважає необхідним запам'ятати з дискусії (отримуються перші навички конспектування). Така робота займає десь пару (два спарених уроки), бо темп виконання може бути не достатньо швидким. Такою діяльністю ми активізуємо ситуацію перетворення. Учні в ході цієї діяльності вчаться користуватись евристичним прийомом "виведення наслідків", наступним кроком, після якого є "підведення під поняття".

Пропонуємо питання, над якими працюватиме кожна група:

1. Які геометричні поняття були використані для означення трикутника?
2. Побудуйте правильно довільний $\Delta\, ACD$. Поясніть, що означає правильно.
3. Скільки точок зараз необхідно додати, щоб отримати чотирикутник?
4. Чи може ця точка лежати з якимись двома іншими на одній прямій? Обґрунтуйте свою відповідь.
5. Спробуйте сформулювати тепер означення чотирикутника. За аналогією з трикутником дайте назву точкам, про які йшла мова та відрізкам, що їх з'єднують.
6. Проведіть через вершини трикутника (скажімо через A і C) прямі, паралельні відповідно сторонам AC і CD. Назвіть отриманий чотирикутник $ABCD$. $ABCD$ – паралелограм.
7. Проаналізуйте та порівняйте такі визначення:

Паралелограм – це фігура, яка складається з чотирьох точок, кожні три з яких не лежать на одній прямій, сполучених між собою попарно паралельними прямими.

Паралелограм – це чотирикутник, у якого кожна сторона паралельна протилежній стороні

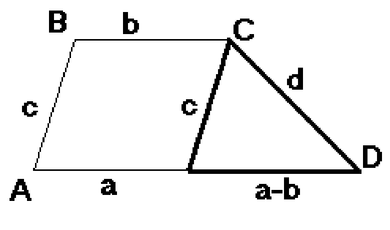
Аналогічні питання можна поставити, щоб визначити поняття прямокутник, ромб, квадрат, а потім узагальнити їх, запропонувавши учням індивідуально чи по групах скласти таблицю із спільними властивостями вивчених чотирикутників, вказавши на те, що їх відрізняє. Активізуючи тим самим ситуацію пошуку, після перевірки, обговорення та доповнення отримали таку таблицю як результат евристичної діяльності учнів(етап навчання поняттю в простіших типових ситуаціях).

<table>
<tr><td colspan="6">Опуклі чотирикутники</td></tr>
<tr><td colspan="4">Паралелограм</td><td>Трапеція</td><td>Довільний чотирикутник</td></tr>
<tr><td>Паралелограм</td><td>Ромб</td><td>Квадрат</td><td>Прямокутник</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Протилежні сторони попарно паралельні</td><td>Дві протилежні сторони паралельні</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Діагоналі перетинаючись, діляться точкою перетину навпіл</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Протилежні кути рівні</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">Кути по 90°</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Усі сторони рівні</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Діагоналі рівні, є діаметрами описаного кола</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Діагоналі перпендикулярні, ділять кути пополам</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Сума внутрішніх кутів, які прилежать до бічної сторони – 180°</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">Чотири вершини, чотири сторони, дві діагоналі, сума усіх кутів -360°</td></tr>
</table>

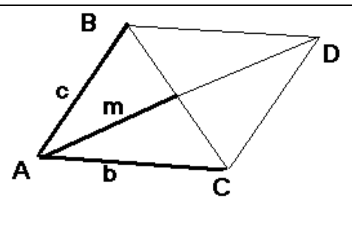
Дослідження показують, що від методів та прийомів навчання, які використовує учитель, значною мірою залежить продуктивність евристичної діяльності учнів при розв’язуванні задач з метою підведення під поняття.

Ми поділяємо точку зору, що для залучення учнів до продуктивної евристичної діяльності, при розв’язуванні задач (етап включення поняття в систему змістових зв’язків з іншим теоретичним матеріалом) методом додаткових побудов, необхідний дослідницький метод навчання, де учні під керівництвом учителя аналізували б ряд прийомів “розвитку задачі”: перетворення задачі; конструювання задачі, аналогічної даній, але більш складної; узагальнення задачі; конкретизація задачі і конструювання задачі, зворотної даній під час розв’язування задач на побудову, обчислення, доведення. Евристичні прийоми “розвивай задачу”, “моделюй умову” застосовуються під час розв’язання і допомагають учителю актуалізувати ситуацію інтеграції. Розглянемо ряд задач, в яких використовуються метод добудови до паралелограма з застосуванням його властивостей.

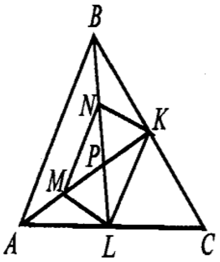
Задача №1 (на побудову). *Побудувати трапецію за основами a і b (a>b) та бічними сторонами c і d.*

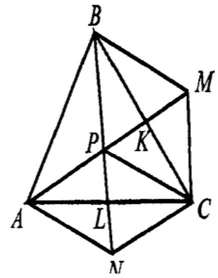
Під час аналізу побудови помічаємо, що коли провести *CK //AB,* отримаємо паралелограм *ABCK,* використання властивостей якого допоможе переформулювати умову: побудувати трикутник за трьома сторонами *KC= c, CD= d. KD=a-b.*	

Задача №2 (на обчислення). *Дві сторони трикутника 15 см і 25 см, а медіана, яку привели до третьої сторони, – 16 см. Знайти довжину третьої сторони трикутника.*

Якщо модифікувати умову так, що нам задан паралелограм із сторонами c і b та діагональ d=2m, то можна скористатись формулою: $d_1^2 + d_2^2 = 2(c^2 + b^2)$.	

Задача №3 (на доведення). *Доведіть, що медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну медіану у відношенні 2:1, починаючи від вершини трикутника.*

<table>
<tr>
<td>Сконструюємо задачу обернену до заданої: припустимо це відношення виконується. Після додаткових побудов, доведіть, що MNKL – паралелограм(доведіть, що PMNC-паралелограм).</td>
<td>

I спосіб


II спосіб</td>
</tr>
</table>

Таким чином, у процесі формування понять з геометрії запропонована методика надає учневі можливість осмисленого формування прийомів евристичної діяльності та узгодженого з учителем вибору основних компонентів свого навчання; виходу учня за рамки звичайного навчального матеріалу і перехід до метапредметного рівня навчання; випередження навчальних стандартів та загальновизнаних досягнень в області геометрії; осмислення способів діяльності, знаходження її суттєвих особливостей, тобто рефлексії.

1. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения / Международная ассоциация «развивающее обучение». – М.: «Интор», 1994. – 544 с.
2. Саранцев Г.И. Формирование математических понятий в средней школе // Математика в школе. – 1998. – №4. – С.27-29.
3. Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний. – М.: Изд-во Московского университета, 1975. – 343 с.
4. Вайшвилло Е.К. Понятие как форма мышления. – М., 1989.

Резюме. В статье рассмотрена методика управления эвристической деятельностью при формировании геометрических понятий.

Summary. The article runs about methods of management of heuristik activity in the process of formation of geometrical notions.

Надійшла до друку 02.09.2002 р.

О ТЕХНИКЕ ВВЕДЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ

А.В.Товстолис, канд. физ.-мат. наук,
Донецкий национальный университет

1. Введение

В различных математических курсах часто приходится иметь дело с различными объектами, корректное введение которых бывает достаточно проблематичным. Как правило, это вызвано тем, что некоторые нюансы, необходимые для корректного определения, требуют изложения дополнительного материала. Последнее также часто не представляется возможным, вследствие ограниченности учебного времени. Выход из данной ситуации, как правило, используется следующий: предлагается «упрощённое» определение понятия, в ряде случаев эквивалентное настоящему. Такое определение позволяет двигаться дальше, зачастую даже быстрее приступить к решению задач, привести более простое доказательство соответствующих утверждений.

Результатом такого подхода обычно является явная подмена одного понятия другим и, как следствие, получение неверных утверждений, совершенно запутывающих студента. Последствия такой подмены могут быть самыми разнообразными – от «достаточно безобидных» ошибок, вероятных в случае применения такого понятия в «достаточно экзотической» ситуации до разрушения системы понятий и результатов, лежащей в основе того или иного курса.

Описанные выше проблемы часто возникают в рамках современной школьной программы по математике. Но что более опасно, в некоторой степени такой подход становится свойственным и университетским курсам для математических факультетов.

В настоящей работе предпринята попытка анализа описанных ситуаций и даются общие рекомендации по их предотвращению.

Сначала проанализируем факторы, обуславливающие саму возможность подмены понятия на более простое.

1. Как уже отмечалось, ограниченность учебного времени.
2. Неготовность аудитории к восприятию понятия в его корректном виде.
3. Сложность понятия самого по себе и его зависимость от других понятий и результатов, изложение которых выходит за рамки излагаемого курса.

Несмотря на кажущуюся серьёзность перечисленных факторов, можно предложить гибкий и эффективный механизм их преодоления. Естественно, эффективность такого механизма зависит от мастерства преподавателя и от студенческой аудитории. Но прежде, чем перейди к его обсуждению, приведём несколько примеров подмены понятий в курсе математического анализа.

2. Примеры подмены понятий

Сначала приведём тривиальный пример, который можно предложить студентам сразу после определения предела или непрерывности функции в точке.

Предел функции в точке.

Что будет, если в определении предела заменить проколотую окрестность точки на обычную? Итак, пусть функция определена в некоторой *окрестности* точки x_0 и существует такое число A, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in B(x_0, \delta) \text{ имеем } |f(x) - A| < \varepsilon$$

(здесь $B(x_0,\delta) = \{x : |x - x_0| < \delta\}$ – *окрестность* точки x_0 радиуса δ).

Итак, изменение одного слова в определении предела приводит к определению непрерывности в точке, поскольку мы сразу получаем, что $A = f(x_0)$.

Это типичный пример того, как студенты, не предавая значения «мелочам», могут прийти к ошибочным утверждениям. Следующие два примера являются иллюстрацией не вполне корректного построения курса, и для преодоления последствий такого подхода творчески подходящим к обучению студентам придётся приложить достаточно усилий.

Точки перегиба функции.

Как известно, точка x_0 называется точкой перегиба действительной функции f, если существует некоторое $\delta > 0$, такое, что функция f выпукла на $(x_0 - \delta, x_0)$ и вогнута на $(x_0, x_0 + \delta)$ или наоборот. Другими словами, функция меняет выпуклость при переходе через точку x_0.

Если функция f ещё и дифференцируема в интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то производная f' меняет знак при переходе через x_0 и, если провести касательную к графику функции $y = f(x)$ в этой точке, то в $(x_0 - \delta, x_0)$ график функции будет лежать выше касательной, а в $(x_0, x_0 + \delta)$ – ниже касательной (или наоборот). Это обстоятельство и является поводом для подмены понятия. А именно, говорят, что дифференцируемая в некоторой окрестности точки x_0 функция имеет эту точку точкой перегиба, если в некоторой её окрестности график функции справа и слева от x_0 лежит по разные стороны от касательной к графику в этой точке.

Иногда дело может зайти ещё дальше. Такое определение предлагается как общее определение точки перегиба, т.е. при определении требуется дифференцируемость функции. Тем самым, от элегантного понятия, которое связано с понятием выпуклости, играющим важнейшую роль в анализе, почти ничего не остаётся.

Но даже для дифференцируемых функций такая подмена неправомерна. Примером может служить функция

$$f(x) = \begin{cases} x^5\left(1 + \sin^2 \dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

которая дважды непрерывно дифференцируема. График этой функции «зажат» между графиками функций $y = x^5$ и $y = 2x^5$. Очевидно, что $f'(0) = 0$, поэтому касательной к графику функции в точке $x_0 = 0$ является прямая $y = 0$. Кроме того, функция нечётная. Таким образом, график функции пересекает касательную в точке $(0,0)$, на $(-\infty,0)$ лежит строго ниже касательной, а на $(0,+\infty)$ – строго выше.

Если исходить из второго варианта определения точки перегиба, то точка $x_0 = 0$ является точкой перегиба функции f. Но совершенно очевидно, что в любой окрестности этой точки, как справа, так и слева, выпуклость функции меняется сколь угодно много раз, т.к. в любой такой окрестности производная функции сколь угодно раз меняет знак.

Подробное обсуждение этого вопроса можно найти в [1, гл. IV, § 2].

Интеграл Римана.

Наверное, это одна из самых сложных тем для восприятия студентами. Причина этого, наверное, кроется в школьной программе. К сожалению, в представлении большинства студентов интеграл это не понятие, соответствующее площади, а разность первообразных подынтегральной функции в концах отрезка. В результате, студент может долго и безрезультатно вычислять, например, такой интеграл:

$$\int_{-1}^{1} x^5 \ln\left(1+\cos\left(\sin^2 x\right)\right) dx .$$

Но если, после нескольких недель изучения этой темы, в одномерном случае ситуация проясняется, то в кратном случае всё гораздо сложнее. Преподавателю следует здесь быть особенно осторожным. Как известно, интеграл Римана строго вводится для измеримых по Жордану областей. Но существует и второй подход. Обычно в курсе математического анализа понятие кратного интеграла Римана вводится сначала на областях, имеющих форму параллелепипеда, а затем осуществляется нехитрый переход к произвольной области:

$$\int_{\Omega} f(x)\,dx = \int_{A} f(x)\,\chi_{\Omega}(x)\,dx ,$$

где A – параллелепипед, содержащий область Ω, а χ_{Ω} – характеристическая функция области Ω. Всё бы было правильно, если потребовать измеримость по Жордану области Ω, что зачастую не делается. Далее материал излагается следующим образом: «область Ω измерима по Жордану тогда и только тогда, когда функция, тождественно равная единице, интегрируема», что само по себе верно.

При таком подходе получаем функции, интеграл Римана от которых по области Ω существует, а сама область и вовсе не измерима по Жордану. Тривиальным примером может служить функция, тождественно равная нулю на Ω. Ведь в этом случае $f(x)\chi_{\Omega}(x) \equiv 0$ на $\mathbf{R}^n$. Но это ещё не всё. Далее, если пренебречь измеримостью области Ω, получаем опровержение известного критерия Лебега интегрируемости функции по Риману. Для этого нужно, например, взять область Ω, состоящую из всех точек квадрата $[0,1]\times[0,1]$, у которых обе координаты рациональны. Очевидно, что она не измерима по Жордану. Пусть далее $f(x) \equiv 1$ для всех $x \in \Omega$. Наименьший прямоугольник, содержащий эту область, очевидно, есть $[0,1]\times[0,1]$. Но $f(x)\chi_{\Omega}(x)$ есть не что иное, как функция Дирихле, которая не интегрируема на $[0,1]\times[0,1]$. Так что f не интегрируема на Ω. Однако функция f ограничена и множество её точек разрыва на Ω есть множество лебеговой меры нуль.

Такая разница в подходах хорошо иллюстрирует характерные особенности интеграла Римана и её имеет смысл излагать в качестве иллюстрации и предостережения. Весьма полезна в этом плане соответствующая задача 8.67 из сборника задач [2, § 8] (набор утверждений, требующих проверки и задания на приведение примеров).

Сосредоточить внимание на измеримости множества следует также и потому, что эти вопросы играют важную роль при определении интеграла Лебега. Ведь интеграл Римана – это достаточно специфическое понятие, предназначенное для работы с ограниченными и почти всюду непрерывными функциями.

3. Построение иллюстративных примеров

При определении различных понятий зачастую бывает трудно осознать значимость вводимых определений. Поэтому новые понятия необходимо хорошо иллюстрировать и указать студентам место новых понятий в общей структуре предмета. Во многих случаях хорошо построенный пример позволяет студентам интуитивно подойти к понятию. Например, при определении предела последовательности хорошим примером является демонстрация затухающих колебаний маятника. Такой пример позволяет сразу понять определение. В некоторых случаях можно подвести студентов к определению, записав обозначение для вводимого объекта. Например, при определении суммы ряда можно просто записать выражение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ведь студенты первого курса уже знакомы с конечными суммами и с пределом последовательности. Поэтому дать определение суммы ряда не представляется сложным.

При введении таких понятий как функциональные классы полезно построить тонкие примеры функций, принадлежащих этим классам. Когда речь идёт о дифференцируемых функциях, то студенты хорошо знают, что у непрерывной функции может не быть производной. Обычно приводится пример $f(x) = |x|$, но ведь может возникнуть ряд других вопросов. Например, может ли функция быть дифференцируемой, а производная не быть непрерывной? Интуитивно студенты скорее всего ответят, что может. А как построить пример? Первокурсникам сделать это сложно, т.к. здесь требуется определённая математическая культура и умение считать производную по определению. Поэтому естественно задать этот вопрос в качестве домашнего задания и на следующем занятии его обсудить. Примером может явиться функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

производная которой равна

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Кроме того, очень интересным для студентов будет и тот факт, что существует всюду непрерывная и нигде не дифференцируемая функция. Этот и многие другие примеры можно найти, например, в [3].

При изучении интеграла Римана и критерия Лебега интегрируемости функции по Риману весьма полезен будет пример функции, разрывной во всех рациональных точках отрезка $[0,1]$ и непрерывной в иррациональных. Это, так называемая, функция Римана:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=\frac{m}{n}\in\mathbf{Q}\\ 0, & x\notin\mathbf{Q}.\end{cases}$$

Такой пример сразу способен прояснить ситуацию и заставить студента задуматься над теми действиями, которые он выполняет, а заодно и вспомнить такие разделы как предел и непрерывность функции.

При изучении темы «Ряды Тейлора» целесообразно привести пример бесконечно дифференцируемой функции, которая в нуле не разлагается в ряд Тейлора:

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Эта функция, все производные которой в нуле равны нулю, играет ключевую роль при построении многих важных примеров. Кроме того, здесь же необходимо определить действительные аналитические функции, что впоследствии пригодится при изучении теории функций комплексного переменного.

Каждое вновь вводимое понятие должно сопровождаться примерами. Но не следует забывать о том, что пример должен быть не только содержательным, но и хорошо запоминающимся. Сложные примеры могут быть полезны только для творчески подходящих к обучению студентов. Целью таких примеров должно быть следующее: вскрыть сущность понятий, приводящих к тем или иным результатам. Одной из главных целей приведения примеров должно явиться также объяснение необходимости введения понятия. Если студент поймёт для чего нужно понятие и как оно соотносится с другими важными понятиями, можно считать, что он им активно овладел.

4. Общие рекомендации по ведению понятий

Как уже отмечалось, иногда для корректного введения понятия требуются дополнительные знания. Например, для введения определения производной требуется умение обращаться с пределами функции. В школьной программе пределы не изучаются в необходимой мере, поэтому и с понятием производной возникают серьёзные трудности. В такой ситуации целесообразно сделать следующее:

1. С помощью примеров подвести студентов под понятие.
2. Привести недостающие понятия и основные результаты (без доказательства) и дать подробные ссылки на литературу для желающих глубже разобраться в вопросе. При необходимости напомнить изученные ранее понятия и относящиеся к ним основные результаты.
3. Корректно ввести определение понятия.
4. С помощью примеров проиллюстрировать введенное понятие с тем, чтобы оно заняло своё место в наборе понятий и основных результатов курса.

Конечно, использование недоказанных результатов отрицательно сказывается на понимании материала, но ведь многие студенты не всегда разбирают доказательства. Кроме того, те студенты, которые хотят хорошо разобраться в материале, получают соответствующие библиографические ссылки и могут восполнить этот пробел. Таким образом, такой подход является более эффективным, чем всякого рода «понятийные упрощения».

Для введения понятий, вполне согласующихся с изученным ранее материалом, достаточно применения тех же правил с соответствующим изменением пункта 2. Не следует считать, что если для формулировки определения не требуется знаний, выходящих за пределы изученного материала, то усвоению нового понятия ничего не препятствует. Даже если определение вполне понятно, без хороших примеров и соотнесения его с другими понятиями и результатами оно вряд ли будет успешно использоваться студентом.

Различные специфические понятия, не оказывающие заметного влияния на программу курса, можно вводить путём предложения решить определённые задачи. Например, в качестве задачи на исследование сходимости ряда можно предложить исследовать гипергеометрический ряд. Аналогичным образом можно познакомить студентов с функцией Стеклова, свёрткой функций и т.п. Такой подход также применяется для знакомства с различными результатами, не входящими в общий курс. Посредством последовательного решения нескольких задач, студент подводится к результату, который является весьма нетривиальной теоремой. Такие системы задач хорошо представлены в [4]. Особенно хорошо такой подход зарекомендовал себя при работе с хорошо успевающими студентами, когда им выдаются индивидуальные задания в то время, как остальным студентам предлагается решать типовые задачи.

Кроме того, необходимо давать ссылки на библиографические источники, в которых хорошо раскрыта та или иная тема курса. Работая с литературой, студенты приобретают навыки самостоятельной работы. Это также уменьшит вероятность получения ошибочной информации, от которой студенты не застрахованы ни во время посещения лекции, ни во время работы с литературой. К тому же изложение материала в каком-либо из рекомендованных источников может быть более удобным для восприятия конкретным студентом.

5. Проверка усвоения понятийного аппарата

Как показывает практика, студент только тогда хорошо усвоил материал, когда он может привести соответствующие примеры. Например, при изучении функциональных классов он должен привести примеры функций принадлежащих и не принадлежащих классу и выяснить отношения между этими классами. Здесь можно провести аналогию с усвоением основных утверждений курса. Студент должен представлять, что произойдёт, если в теореме какое-либо условие ослабить либо вовсе убрать. То же самое касается и определений.

Иногда для того, чтобы понятия были хорошо усвоены, нужно решить ряд типовых задач. Так что наиболее эффективной является техника иллюстрирования понятия примерами как сразу после его введения, так и после решения определённого набора задач.

Любые знания имеют одно неприятное свойство – они со временем забываются. Чтобы они не забывались, нужно либо постоянно к ним обращаться (активные знания), либо нужно помнить нечто, позволяющее их быстро возобновить. Таким средством могут явиться содержательные и хорошо запоминающиеся примеры. Кроме того, одной из основных целей обучения в высшей школе является научить студента находить нужную ему информацию. Понятия, составляющие единую и стройную систему, подкреплённые примерами и списком литературы, наверняка помогут в этом деле.

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М., Ленинград: Физматгиз, 1958. – 608 с.
2. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Функции многих переменных. – Санкт-Петербург.: ИЧП «Кристалл», 1994. – 496 с.
3. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. – Волгоград: Платон, 1997. – 251 с.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1990. – 624 с.

Резюме. В роботі подано аналіз можливих неточностей при введенні деяких математичних понять. Розглядаються причини та наслідки виникнення таких неточностей. Викладення супроводжується численними прикладами. Наведено рекомендації та загальні міркування щодо введення понятійного апарату та контролю засвоєння понять, що вводяться.

Summary. An analysis of possible inaccuracies on introduction of some mathematical notions is present in the article. Causes and effects of such inaccuracies are considered. The presentation is illustrated by several examples. Some recommendations and common reasons on introducing of conceptual apparatus, and on the control of understanding of the introduced notions, are presented.

Надійшла до друку 09.09.2002 р.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ФОРМИРОВАНИЮ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В.И.Хаджинов, ст. преподаватель,
Донецкий национальный университет

Как и частота появления некоторого события в n экспериментах, среднее значение имеет тенденцию определенной устойчивости: при возрастании n стремится к некоторому неслучайному числу. Это неслучайное предельное значение арифметических средних и называется средним значением случайной величины, или ее математическим ожиданием. Существование предельного значения у средних арифметических при возрастании числа наблюдений постулируется на основании эмпирических фактов. Но сходимость средних можно получить строго математически. Это составляет содержание закона больших чисел (ЗБЧ). Аналогичная ситуация имеет место и при определении вероятности события: сначала постулируется существование предельных значений частот, а затем после введения вероятности доказывается ЗБЧ, утверждающий сходимость в определенном смысле частоты события и его вероятности. Именно на явлении существования предельного значения основывается теория вероятностей: она постулирует существование идеальной "долговстречающейся доли" (вероятности) или "долговстречающегося среднего" (математического ожидания). В действительности, как мы знаем, ситуация с долей представляет собой частный случай ситуации со средним. В соответствии с этим при построении аксиоматической теории можно выбрать один из двух путей: идеализировать понятие частоты или понятие среднего арифметического. В первом случае исходят из понятия вероятности и на его основе затем определяют понятие математического ожидания. Во втором случае в качестве основной концепции берется понятие математического ожидания, а вероятность рассматривается как его частный случай. Первый путь общепринят, хотя еще в первом руководстве по теории вероятностей голландца Х.Гюйгенса (1629-1695), которое вышло впервые в качестве приложения к "Математическим этюдам" (1657) его учителя Ф. ван Схоотена "О расчетах в азартных играх", был выбран второй путь. В начале своей работы Х.Гюйгенс пишет: "Если число случаев, в которых получается сумма a равна p и число случаев, в которых получается сумма b равна q и все случаи могут получится одинаково легко, то стоимость моего ожидаемого выигрыша равна $(pa + qb)/(p + q)$", т.е. вводит понятие математического ожидания, а затем решает самые разнообразные задачи, на справедливое распределение ставок при разном числе игроков и разном количестве недостающих партий. Именно математическое ожидание явилось первым теоретико-вероятностным понятием.

В 1982 г. была переведена на русский язык книга крупного специалиста в теории вероятностей П.Уиттла "Вероятность", написанная в 1970 году, в которых вся теория основана на аксиоматизации понятия математического ожидания, а не вероятностной меры. В курсах Невё (1964) и Феллера (1966), этому подходу уделяется некоторое внимание, хотя авторы не принимают его полностью.

Вслед за П.Уиттлом укажем просто факты, которые и на наш взгляд говорят в пользу второго пути, успешно реализованного в книге П.Уиттла:

1) по всей видимости люди лучше представляют, что такое "среднее значение", чем, что такое "вероятность".

2) Некоторые важные темы, такие как задачи оптимизации и аппроксимации, можно легко объяснить и развить, если сформулировать их в терминах математического ожидания.

3) Практический подход – анализ такого типа утверждений, которые действительно существенны в конкретных приложениях, – удивительно часто приводит к утверждениям формулируемым в терминах математического ожидания.

4) Имеются преимущества и при изложении теории на более высоком уровне.

Понятие среднего преследует нас на каждом шагу в повседневной жизни: средний рост, средний вес, средняя заработная плата, средняя результативность за игру, средняя продолжительность жизни, среднее время обслуживания, средняя скорость, средний балл на экзаменах и т.д. Вообще когда мы пытаемся охарактеризовать качественную или количественную сторону интересующего нас "объекта" мы очень часто прибегаем к его усредненным характеристикам. Какой смысл мы вкладываем в предложение, когда говорим о стрелке, что он при данных условиях стрельбы дает 85% попаданий? Это значит, что из 100 выстрелов произведенных им при определенных постоянных условиях в среднем бывает 85 удачных (и значит около 15 неудачных) . Понятно, что в не в каждой сотне будет 85 удачных выстрела, иногда их может оказаться значительно больше, иногда меньше; но в среднем при многократном повторении число попаданий будет неизменным. Число 85 служит показателем мастерства стрелка и бывает очень устойчивой, т.е. для данного стрелка почти всегда будет одним и тем же и лишь изредка будет сколько-нибудь значительно уклоняться от "устойчивого часто встречающегося среднего" значения. Средние значения привлекаются нами не только (а может быть и не столько) при характеристике объекта, но при сравнении двух и более "однотипных" (однородных) объектов. Так, если о некотором стрелке скажут, что он в тех же условиях что и первый стрелок попадает в среднем 90%, то нам становится понятно, что второй стрелок стреляет лучше, чем первый стрелок.

Приведем ряд примеров, приводящих нас к необходимости вычисления среднего значения.

Пример 1.

Если три кружки пива ценой по 13 смешиваются с 2 кружками ценой по 8, после перемножения 3 на 13 и 2 на 8 получится общая цена всех кружек 55, что дает путем деления на число всех кружек, т.е. 5, среднюю цену 1 кружки смеси равную 11. Такова же должна быть, согласно правилу, и оценка величины ожидания чего-либо, что будет иметь три случая по 13 и два случая по 8. Этот пример заимствован из книги Я.Бернулли "Искусство предложений". Заметим, что сказанное Я.Бернулли является ничем иным как повторение правила Гюйгенса.

Пример 2.

Для розыгрыша лотереи было выпущено N билетов, из них m_1 билет с выигрышем x_1 грн., m_2 билета с выигрышем x_2, ..., $m_к$ билетов с выигрышем $x_к$ грн. Какова цена билета, если сумма денег, вырученная от продажи билетов, равняется сумме всех выигрышей? Если мы обозначим искомую цену билета через X, то из условия задачи будем иметь: $X \bullet N = x_1\ m_1+x_2m_2+... + x_кm_к$, откуда $X=(x_1m_1+x_2m_2+...+x_кm_к)/N$, т.е. цена билета равняется "среднему выигрышу". Эту величину называют средним взвешенным, которая является обобщением среднего арифметического т.к. при всех m одинаковых мы получим среднее арифметическое.

В книге Н.Бернулли "О применении искусства предложения в вопросах права" он писал, что "правило это тождественно с тем, с помощью которого обыкновенно отыскиваются среднее арифметическое нескольких данных величин, а так же с правилом смешения. ... Еще более заслуживает быть отмеченным особое и исключительное совпадение наблюдающиеся между этим правилом и тем, которое рекомендуется для нахождения центра тяжести нескольких грузов".

Пример 3.

Рассмотрим задачу, которая была приведена итальянским математиком Пачиоли (1454-1514) в 1494 году .

Два игрока договорились играть в кости до момента, когда одному из них удастся выиграть 3 партии. Но игра была прервана после того, как первый выиграл 2, а второй 1 партию. Как справедливо разделить ставку? (Пачиоли считал, что 2: 1) .

Прошло еще 100 лет с лишним, и в 1654 г. задача была решена в ходе переписки Б. Паскаля (1623-1662) и П. Ферма (1601-1665) .

Вслед за Паскалем будем рассуждать так. Все стало бы ясно, если бы игроки сыграли еще одну партию:

1) если эту партию выиграет игрок А, то он получит всю ставку,

2) если партию выиграет игрок В, то справедливо разделять всю ставку пополам, т.к. у каждого по две выигранные партии.

Итак: А может выиграть всю ставку или 1/2 ставки т.е. в среднем (1+1/2) /2=0,75 ставки. У В возможности или ничего не выиграть или выиграть 1/2 ставки, т.е. в среднем (0+1/2) /2=0.25 ставки, т.е. ставка должна быть разделена, как 3:1

Пример 4.

Пусть x – числовое значение некоторой неизвестной величины, которое мы хотим определить насколько возможно точнее с помощью какого-либо измерительного инструмента. Пусть произведено для этого n измерений, которые дали результаты x_1, x_2, ... , x_n слегка различающиеся между собой, что обусловлено неизбежным и зависящим от разных причин измерительными ошибками. Возникает вопрос: какое же значение следует присвоить величине x в качестве заслуживающего наибольшего доверия? Принято в качестве "истинного" или "оптимального" значения выбирать среднее арифметическое $\bar{x}=(x_1+...+x_n)/n$. Дать подлинное обоснование указанной процедуре мы сможем чуть позже, изучив теорию вероятностей, но уже сейчас мы сможем отметить минимальное свойство среднего арифметического $\bar{x}$, которое до некоторой степени оправдывает его выбор. Пусть x – какое угодно числовое значение измеренной величины. Тогда x-x_1, x-x_2,...,x-x_n – отклонение этой величины от результата наблюдений. Эти значения могут быть частью положительными, частью отрицательными и совершенно естественно стремится к такому оптимальному выбору значения x, при котором "тотальное" (в некотором смысле) отклонение было бы возможно меньше. Следуя Гауссу, берут обыкновенно в качестве "измерительной неточности" не сами отклонения, а их квадраты $(x\text{-}x_i)^2$ и затем выбирают x с таким расчетом, чтобы минимизировать "тотальное" отклонение под каковым понимают сумму квадратов отдельных отклонений $(x\text{-}x_1)^2+... + (x\text{-}x_n)^2$

Определенное таким образом оптимальное значение и есть не что иное, как среднее арифметическое $\bar{x}$: в этом заключается исходное положение знаменитого, созданного Гауссом "метода наименьших квадратов". Докажем это утверждение:

Если мы напишем $(x\text{-}x_i)= (\bar{x}\text{-}x_i)+ (x\text{-}\bar{x})$, то получим $(x\text{-}x_i)^2= (\bar{x}\text{-}x_i)^2+$ $+(x\text{-}\bar{x})^2+2 (\bar{x}\text{-}x_i)(x\text{-}\bar{x})$ $(i=1,2,\dots,n)$

Сложим все такие равенства при i=1, 2, ..n. Последний член при этом даст $2(x\text{-}\bar{x})(n\bar{x}\text{-}x_1\text{-}x_2\text{-}...\text{-}x_n)=0$ по определению $\bar{x}$. Следовательно, мы получим:

$$(x\text{-}x_1)^2+...+(x\text{-}x_n)^2= (\bar{x}\text{-}x_1)^2+...+(\bar{x}\text{-}x_n)^2+n\,(x\text{-}\bar{x})^2$$

Отсюда ясно, что $(x\text{-}x_1)^2+...+(x\text{-}x_n)^2\geq(\bar{x}\text{-}x_1)^2+...+(\bar{x}\text{-}x_n)^2$, причем здесь знак равенства возможен только при $x=\bar{x}$

Общий метод наименьших квадратов принимает руководящий принцип – минимизировать сумму квадратов отклонений – во всех более сложных случаях, когда нужно как-то согласовать между собой ряд слегка противоречащих друг другу наблюдений.

Если в качестве основной концепции выбираем понятие математического ожидания, то можно предложить следующий план действий:

На статических данных (перепись населения) вводятся понятия выборочного среднего наблюдаемой величины $\overline{x}$ и выборочной дисперсии S^2_x и изучаются их основные свойства. Затем вводится понятие стохастического (вероятностного) эксперимента и переходим к понятию "среднего по бесконечной популяции". Эмпирический факт "сходимости выборочного среднего" приводит к постулированию того, что для наблюдаемой величины X существует "среднее по всей популяции". Это идеализированное значение называют ожидаемым значением или математическим ожиданием X. Далее требуем чтобы математическое ожидание обладало всеми основными свойствами выборочного среднего, т.е. формулируем аксиомы математического ожидания. Следующим шагом построения теории является введение понятий: пространства элементарных исходов, событий, случайной величины. Затем вводится простейшая случайная величина: индикатор события А. Тогда определяем вероятность события А как математическое ожидание индикатора события А. Таким образом, вероятность события А это ожидаемая доля экспериментов, в которых в действительности появилось событие А.

1. Уиттл П. Вероятность. – М.:Наука, 1982. – 287 с.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложение: в 2 томах. – Т.1. – М.: Мир, 1984. – 527 с.
3. Невё Ж. Математические основы теории вероятностей. – М.: Мир, 1969.

Резюме. В данной статье автор предлагает основывать изучение теории вероятностей на аксиоматизации понятия математического ожидания, а не понятия вероятностной меры.

Summary. The author of the article proposes to base theory of probability studying on axiomatisation of term “average of distribution” rather then “probabilistic measure”.

Надійшла до друку 05.09.2002 р.

ФИЛОСОФСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ НАУЧНОГО МИРОВОЗЗРЕНИЯ СТУДЕНТОВ

В.М.Дрибан, доцент, Г.Г.Пенина, канд. экон. наук, доцент
Донецкий государственный университет экономики и торговли им. М.Туган-Барановского

В [1,с. 13-23] рассмотрены вопросы формирования научного мировоззрения студентов в процессе преподавания математического анализа. В настоящей статье авторы предпринимают попытку раскрыть возможности курса аналитической геометрии для формирования мировоззрения студентов.

Р.Декарт (1596-1650) и П.Ферма (1601-1665) разработали аналитическую геометрию. В основу аналитической геометрии они положили использование прямоугольных (декартовых) координат. Тем самым открылась возможность соединения двух таких непохожих по объекту исследования частей математики – алгебры и геометрии.

До создания метода координат алгебра и геометрия представляли своего рода противоположности. Для алгебры характерен абстрактный характер ее положений, тогда как объекты геометрии все еще остаются достаточно конкретными – это реальные пространственные формы. Метод координат поставил во взаимно однозначное соответствие алгебраический объект – пару (тройку) чисел – объекту геометрическому – точке на плоскости (в пространстве), тем самым соединив абстрактное и конкретное. Такое единство противоположностей подняло математику на новый, качественно более высокий уровень, так как появилась возможность изучать геометрические объекты методами алгебры.

В соответствии с диалектикой и ее законами аналитическая геометрия позволила вскрыть внутренние связи и единство многих геометрических фактов, которые в геометрии Евклида рассматривались и изучались как изолированные. Методы аналитической геометрии позволили решить целый ряд геометрических задач, остававшихся неразрешимыми в геометрии Евклида. Это произошло потому, что аналитическая геометрия более абстрактна, чем геометрия Евклида, а научная абстракция представляет собой метод проникновения в наиболее глубокие, существенные связи предметов и явлений. Таким образом, в аналитической геометрии мы наблюдаем диалектическое единство абстрактного и конкретного, единичного и всеобщего.

Важнейшая, на наш взгляд, задача, стоящая перед преподавателем при изложении курса аналитической геометрии, задача, которая несет познавательную и мировоззренческую нагрузки, заключается в том, чтобы наряду с изложением фактического материала показать наиболее впечатляющим образом существо и значение одной из основополагающих идей математики – идеи соответствия.

Уже на первой лекции по аналитической геометрии необходимо, на наш взгляд, придать принципиальное значение возможности приводить в соответствие точкам плоскости (пространства) пары (тройки) чисел, если на плоскости (в пространстве) задана система координат. Однако полное представление о методе Декарта и о его отличии от метода элементарной геометрии раскрывается, когда эта идея расширяется и приводит к установлению соответствия между линией как бесконечным множеством точек и уравнением как носителем бесконечной совокупности пар чисел, удовлетворяющих этому уравнению. Идея соответствия линии и ее уравнения может быть раскрыта двумя способами. В одном случае линия представляется как бесконечное множество тех и только тех неподвижных точек, координаты каждой из которых удовлетворяют ее уравнению. Другой подход имеет в своей основе механическое движение, то есть линия рассматривается как траектория движущейся точки, изменение координат которой обусловлено определенным уравнением. Оба эти представления одинаково важны, ни одним из них не следует пренебрегать. Известно, что и сам Декарт широко пользовался кинематическим способом образования линий и, в противоположность древним математикам, не только не побоялся ввести в геометрию движение, но даже полагал его в основу учения о кривых. Тем самым в математику вошло движение, а значит, и диалектика.

Идею соответствия линии и уравнения хорошо раскрывает следующий простой методический прием. Пусть имеется уравнение

$$2x - 5y + 6 = 0.$$

Вообразим, что в записанном уравнении там, где стоят x и y, вырезаны окошечки:

$$2\square - 5\square + 6 = 0.$$

Если теперь представить, что точка $M(x, y)$ движется вдоль линии, выражаемой данным уравнением, то в окошечках мы будем наблюдать непрерывное мелькание чисел. Но как только точка будет остановлена, то в окошечках появятся определенные два числа – координаты точки M в том ее положении, в котором движение ее прекратилось.

Приведенный методический прием хорошо демонстрирует связь между двумя параллельно протекающими процессами – процессом движения точки по определенной траектории и процессом, как бы протекающим “внутри” уравнения, соответствующего этой траектории. В результате студенты должны четко усвоить, что уравнение линии является полным алгебраическим аналогом самой линии как геометрического объекта, аналогом, несущим в себе все особенности формы и свойства этой линии.

Здесь уместно привести слова Э.Кинэ: “Сама идея, сама возможность выражать прямую или кривую в алгебраических терминах показалась мне не менее прекрасной, чем “Илиада” [2, с.110], подчеркнув, что эту красоту идеи соответствия ощутил не математик, а писатель (Э.Кинэ – французский писатель XIX в.).

Наибольший мировоззренческий потенциал в курсе аналитической геометрии имеет раздел “Кривые второго порядка”. В этом плане важно показать студентам общие подходы к кривым второго порядка. Лектор рассказывает о том, что кривые второго порядка и их вырождения имеют одинаковое “происхождение”: они являются сечениями плоскостью поверхности конуса, если этот конус мыслить неограниченно продолженным в обе стороны от вершины. Этот факт (известный ещё древним грекам) чрезвычайно поучителен в познавательном и методологическом аспектах, а его демонстрация на доске или на модели производит большое эмоциональное воздействие.

В учебниках по высшей математике кривые второго порядка как конические сечения или вообще не рассматриваются, или рассматриваются как бы статично, независимо друг от друга: при определённых положениях секущей плоскости получается та или иная кривая. На наш взгляд, студентам интереснее и поучительнее в методологическом аспекте увидеть образование кривых второго порядка в процессе динамики, то есть в процессе непрерывного изменения положения секущей плоскости. Если плоскость пересекает конус параллельно его основанию, то в сечении получается окружность (в частности, точка как окружность нулевого радиуса). Если плоскость наклонять, то сечение становится эллиптическим. Чем сильнее наклоняется плоскость, тем больше вытягивается эллипс, оставаясь эллипсом до тех пор, пока плоскость не станет параллельной образующей конуса. Как только это произойдёт, кривая перестаёт быть замкнутой, и две её ветви устремляются в бесконечность, образуя параболу. Дальнейший наклон плоскости приведёт к тому, что она пересечёт вторую половину конуса. В этом случае коническое сечение есть гипербола (распространена ошибка, будто для образования гиперболы секущая плоскость обязательно должна быть параллельна оси конуса). Форма ветвей гиперболы меняется с изменением наклона плоскости до тех пор, пока они не выродятся в две пересекающиеся прямые.

Лектор может (а при наличии времени должен) показать ещё один общий подход к кривым второго порядка: эллипс (кроме окружности), гипербола и парабола являются множествами точек, отношение расстояния которых до данной точки (фокуса) к расстоянию до данной прямой (директрисы) есть величина постоянная (эксцентриситет). При таком подходе определения и уравнения различных кривых второго порядка отличаются друг от друга лишь величиной эксцентриситета. Таким образом, оказывается, что эксцентриситет, который раньше был лишь показателем степени "сплюснутости" кривой, теперь становится одной из важнейших характеристик, видовым признаком, позволяющим по уравнению отличить одну кривую второго порядка от другой.

В этом плане поучительно рассмотреть (без доказательства) общее уравнение кривых второго порядка, отнесенное к вершине:

$$y^2 = 2px - (1-\varepsilon^2)x^2. \qquad (1)$$

При $\varepsilon = 0$ получим окружность (в частности, при $\varepsilon = 0$ и $p = 0$ получим точку). Если эксцентриситет ε возрастает, оставаясь меньше единицы, то $1-\varepsilon^2 > 0$. Имеем непрерывно деформирующийся эллипс. Как только эксцентриситет становится равным единице, эллипс "превращается" в параболу. При дальнейшем увеличении эксцентриситета получим гиперболу. "Здесь можно проследить, – пишет неизвестный автор, – всю эволюцию форм кривых второго порядка. В первом акте высокой трагедии мы будем наблюдать деформирующийся эллипс, один из фокусов которого устремился в бесконечность, увлекая за собой и центр эллипса. Во втором акте меняющееся значение эксцентриситета достигает значения, равного единице, и тогда, только на одно мгновение мелькает образ параболы с тем, чтобы тотчас исчезнуть и дать место новому существованию – гиперболе.

Последний акт будет длиться бесконечно долго – деформирующаяся гипербола может жить не спеша, но судьба ее выродиться в пару прямых предрешена”. Блестящее единство математики, диалектики и эстетики!

Полезно обратить внимание студентов на то, что эволюция кривых второго порядка, “заложенная” в уравнении (1), является алгебраическим отражением эволюции кривых второго порядка как конических сечений.

Умение видеть изменение геометрического образа при изменении параметров имеет большой познавательный смысл. Подобные примеры не только развивают воображение студентов, их эстетическое восприятие, но и делают изучение учебного материала по-настоящему интересным. Это стократ окупает некоторые дополнительные затраты времени.

Общие подходы к кривым второго порядка прекрасно иллюстрируют диалектический закон перехода количественных изменений в качественные: изменение количества (величины угла наклона плоскости, которая пересекает коническую поверхность, или числового значения эксцентриситета) ведет к появлению нового качества (к другой по форме и по свойствам кривой второго порядка).

С интересом воспринимают студенты сообщение о том, что теорию кривых второго порядка создали древние греки, не зная метода координат. Они рассматривали кривые второго порядка чисто геометрически, как конические сечения. Греческий математик Аполлоний Пергский (IV в. до н.э.!) настолько полно разработал теорию конических сечений, что никто из последующих математиков не сумел ни существенно дополнить, ни исправить исследования Аполлония. Это уникальный факт в истории математики.

Теория кривых второго порядка – блестящее подтверждение того, что нельзя недооценивать фундаментальные теоретические исследования.. Древние греки создавали геометрию конических сечений как “чистую” геометрию, она не находила своего применения почти двадцать веков, пока Кеплер не использовал ее для создания теории движения небесных тел, согласно которой планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце. Тем самым была похоронена геоцентрическая астрономия Аристотеля и Птолемея, которая "… на 18 веков погрузила науку во мрак невежества" (Ф.Дайсон – американский физик XX в.).

Исходя из теории Кеплера, Ньютон создал механику, служащую основой физики и техники. Трудно представить себе, насколько задержалось бы развитие человечества, если бы в свое время не была бы создана "неприкладная" теория конических сечений. А впоследствии оказалось, что кривые второго порядка являются траекториями и других небесных тел. Образно говоря, кривые второго порядка являются неотъемлемым элементом геометрической картины мироздания. Не сказать об этом студентам значит упустить один из важнейших моментов в формировании их мировоззрения.

В обзорном порядке надо уделить внимание конкретным применениям кривых второго порядка в космонавтике, оптике, технике и в других областях практической деятельности, еще раз напомнив студентам, что изучались эти кривые как чисто теоретические объекты и очень долгое время не находили никаких практических применений.

При изложении аналитической геометрии в пространстве необходимо, на наш взгляд, всячески подчеркивать аналогии с аналитической геометрией на плоскости, аналогии как в доказательствах, так и в полученных результатах.

Студенты должны знать, что благодаря аналогиям в математике и других науках часто выдвигаются правдоподобные гипотезы, которые затем или подтверждаются или отвергаются, то есть установление аналогий является одним из действенных методов познания мира.

Для формирования мировоззрения студентов полезно сообщить им о существовании геометрии многомерного пространства, в котором, условно говоря, "геометрическая точка" определяется набором n координат

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Такое пространство является естественным математическим обобщением одномерного, двухмерного и трехмерного пространств. Хотя при $n > 3$ n-мерной точке не соответствует никакой реальный геометрический образ, теоретическое и практическое значение введения многомерных пространств очень велико, так как в геометрии, физике, астрономии, экономике и других областях человеческой деятельности приходится изучать такие объекты, для задания которых недостаточно трех действительных чисел. Так, если в классической физике положение материальной точки в пространстве определяется тремя координатами, а время рассматривается независимо от пространства, то теория относительности Эйнштейна может быть объяснена лишь в рамках единого четырехмерного пространства, представляющего собой объединение трехмерного пространства и времени.

Для формирования мировоззрения студентов следует, на наш взгляд, кратко информировать их о существовании других, неевклидовых геометрий, уделив внимание истории создания геометрии Лобачевского и ее сути. История создания геометрии Лобачевского является ярким примером того, как “простое” изменение точки зрения на исследуемый объект может привести к гениальным открытиям.

Одним из путей попыток доказательства 5-го постулата Евклида был метод от противного. Предположив, что через точку P, взятую вне прямой, не проходит ни одна прямая, параллельная данной прямой, итальянский математик Д.Саккери (1667-1733) пришел к противоречию. Тогда он испробовал второе и единственно возможное предположение: пусть через точку P проходят хотя бы две прямые, параллельные данной прямой. Исходя из этой аксиомы, Саккери доказал целый ряд интересных результатов, пока не дошел до теоремы, показавшейся ему настолько странной, что он счел ее противоречащей ранее полученным результатам. На самом деле, как позже было выяснено, противоречия не было. Саккери был первым математиком, который “держал в руках” начала геометрии Лобачевского. Но он настолько был уверен в абсолютной истинности 5-го постулата Евклида, что принял желаемое за действительное. По этому пути шли и многие другие математики. Не следует забывать, что в начале XIX в. почти все математики были уверены, что евклидова геометрия – единственно возможная. Эта консервативность мышления не позволяла увидеть тем, кто пытался найти противоречие при замене 5-го постулата другим и, следовательно, доказать этот постулат, что они создают новую, неевклидову геометрию. Не находя противоречий, они просто прекращали исследования в этом направлении.

Н.И.Лобачевский (1792-1856), как и Саккери, пытался вначале доказать 5-й постулат Евклида методом от противного. Однако по мере того, как развертывалась все более и более длинная цепочка следствий, он пришел к твердому убеждению, что никакого противоречия не только не получается, но и не может получиться. Вместо противоречия Лобачевский получил хоть и своеобразную, но логически стройную и безупречную систему предложений, систему, обладающую тем же логическим совершенством, что и обычная евклидова геометрия. Так была создана новая, неевклидова геометрия Лобачевского.

Правильность идей Лобачевского была полностью доказана после того, как итальянский математик Э.Бельтрами (1835-1900) установил, что в трехмерном пространстве можно указать поверхности (псевдосферы), на которых осуществляется геометрия Лобачевского. Открытие Бельтрами дало геометрам новый метод исследования – метод интерпретации. С помощью этого метода было доказано, что геометрия Лобачевского так же непротиворечива, как и геометрия Евклида, то есть любое противоречие в геометрии Лобачевского стразу повлекло бы за собой противоречие в геометрии Евклида. Тем самым окончательно было доказано, что с логической точки зрения обе геометрии совершенно равноправны.

Нельзя не отметить, что к основным положениям неевклидовой геометрии независимо от Лобачевского и практически одновременно с ним пришел венгерский математик Я.Больяи (1802-1860). В то время ему было около 23 лет! Поэтому геометрию Лобачевского называют также геометрией Лобачевского-Больяи.

Значение самого факта создания неевклидовой геометрии для математики и естествознания огромно, и английский математик Клиффорд, назвавший Лобачевского “Коперником геометрии” не преувеличил. Лобачевский разрушил догму о “неподвижной”, единственно истинной евклидовой геометрии так же, как Коперник разрушил догму о неподвижной, составляющей незыблемый центр Вселенной – Земле.

Вопрос о том, какая из геометрий истинна в физическом смысле слова, то есть наиболее приспособлена к изучению того или иного круга изучаемый физический явлений, есть вопрос физики, а не математики. Решение этого вопроса зависит от того, какой круг физических явлений изучается. Геометрия Евклида, конечно, продолжает быть математической идеализацией нашего повседневного пространственного опыта и поэтому сохраняет свое основное положение как в значительной части физики, так и во всей технике. Положение меняется, когда мы переходим к космическим масштабам. Общая теория относительности Эйнштейна рассматривает геометрическую структуру пространства как нечто зависящее от действующих в этом пространстве масс и приходит к необходимости привлекать геометрические системы, являющиеся неевклидовыми в гораздо более сложном смысле этого слова, чем тот, который связывается с геометрией Лобачевского.

Немецкий математик Г.Риман (1826-1866) впервые развил математическое учение о пространстве, он создал свою, риманову геометрию, частными случаями которой оказались геометрии Евклида и Лобачевского. Позже риманова геометрия превратилась в самостоятельную науку, которая стала математическим фундаментом общей теории относительности.

Неевклидовы геометрии служат ярким примером того, как самые абстрактные теории могут привести к полному пересмотру взглядов на наш реальный мир.

Полезно обратить внимание студентов на то, что в математике любой полученный результат в дальнейшем не отбрасывается. Он может только дополняться, расширять область своего применения, обобщаться. Каждое новое поколение математиков, опираясь на предыдущие достижения, "строит новый этаж" одного и того же здания – здания математики. Геометрия Лобачевского никоим образом не отбросила геометрию Евклида, аналитическая геометрия расширила возможности евклидовой геометрии, применяя другие методы, n-мерное пространство явилось обобщением одномерного, двухмерного и трехмерного пространств, геометрия Римана не отбросила геометрии Евклида и Лобачевского, а содержит их как частные случаи.

Не вызывает сомнения, что сообщение (в том или ином объеме) фактов, подобных приведенных выше, в существенной мере будет способствовать формированию научного мировоззрения студентов.

1. Дидактика математики: проблеми і дослідження //Міжнародний збірник наукових робіт. Вип.16. Донецьк: Фірма ТЕАН, 2001. – 175 с.
2. Математика в афоризмах, цитатах, высказываниях /Сост. Н.А. Вирченко. – Киев.: Вища школа, 1983. – 278 с.

Резюме. Розглянуто деякі питання формування наукового світогляду студентів у процесі викладання аналітичної геометрії

Summary. Some issues on students' scientific outlook formation in the process of analytical geometry teaching are investigated.

Надійшла до друку 11.09.2002 р.

МІЖПРЕДМЕТНІ ЗВ'ЯЗКИ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ КУРСУ "ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ"

В.І.Клочко, професор, доктор пед.наук, З.В.Бондаренко
Вінницький державний технічний університет

Формування математичних понять, умінь і навичок математичного моделювання на певному рівні є головним завданням викладення математики у технічному вузі. Математика для студента є одним із засобів досягнення мети у його професійній діяльності. Тому одним із основних компонентів методики проведення занять є це зміст навчальної інформації, який би відображав внутрішньо-системні та міжсистемні взаємозв'язки. Реалізація міжпредметних зв'язків у навчальному процесі сприяє формуванню у студента системи професійно орієнтованих знань, способів самостійного мислення. Аналіз змісту навчального матеріалу і навчального процесу під час вивчення теми або окремої дисципліни "Диференціальні рівняння" показав, що між цією дисципліною і навчальними дисциплінами технічного циклу можна виділити такі закономірні зв'язки.

1. За напрямом зв'язків – попередні і послідуючі. Наприклад, в процесі вивчення курсу "Диференціальні рівняння" при використанні знань з курсу "Диференціальне та інтегральне числення", який забезпечує дисципліну, будуть встановлені попередні зв'язки, а при використанні знань з курсу "Теоретичні основи електротехніки" – послідуючі.
2. По типу взаємодії знань – зв'язки розвитку і зв'язки функціонування. Зв'язки розвитку передбачають концентричне розширення знань в послідуючих дисциплінах. Наприклад, поняття лінійного диференціального рівняння першого порядку з курсу "Диференціальні рівняння" отримує розвиток в опануванні курсу "Теоретичні основи електротехніки", де розглядається процес встановлюючого змінного струму в колі з самоіндукцією. При реалізації зв'язків функціонування, відомості з двох суміжних дисциплін інтегрується в нові знання, які

належать третій дисципліні. Наприклад, поняття похідної вищого порядку з курсу “Диференціальне числення”, разом з поняттям ряда Тейлора з курсу “Ряди”, утворюють в курсі “Диференціальні рівняння” нове знання про наближене диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів. Або поняття гармоніки з курсу “Ряди Фур’є” разом з поняттям розв’язку однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами, дають можливість в курсі “Теоретичні основи електротехніки” досліджувати зміни напруги струму на конденсаторі відповідного контура.

3. За складом змісту знань. Наприклад, геометричний зміст диференціального рівняння першого порядку $y' = f(x,y)$ пояснюється на основі знань з курсу аналітичної геометрії про кутовий коефіцієнт дотичної. Або поняття стійкості розв’язку диференціального рівняння з курсу “Диференціальні рівняння” конкретизується в курсі “Опір матеріалів” при дослідженні стійкості пружного стрижня при його стисканні.
4. За способом перенесення знань – зв’язки включення і зв’язки співставлення. Наприклад, поняття резонансу з курсу “ Диференціальні рівняння” включаються в курс “Радіоелектроніка” в нові знання при конструюванні різних підсилювачів. А аналогія між електричними і акустичними явищами дозволяє замінити вивчення багатьох акустичних задач розв’язуванням еквівалентних електричних схем в курсі “Рівняння математичної фізики”.
5. За пізнавальними цілями:

– зв’язки обґрунтування (використання в курсі “Екологія”, для опису особливостей біологічного динамічного процесу періодичної зміни чисельності істот антогоністичних популяцій, знань курсу “ Диференціальні рівняння” про розв’язки систем диференціальних рівнянь);

– зв’язки узагальнення (використання знань про гармонійний осцилятор з курсу “Диференціальні рівняння” при формуванні понять малих коливань математичного, фізичного маятника, або малих коливань тягарця, підвішеного на пружній пружині під дією сили ваги в середовищі без опору, або електричних коливань в контурі, який складається з ємності і індуктивності);

– зв'язки конкретизації (уточнення узагальнених знань з попереднього курсу в конкретних знаннях, які вивчаються. Наприклад, конкретні знання з курсу "Фізика" про другий закон Ньютона, закон Ньютона про охолодження тіла, закон Фур'є про теплоту, закон Торрічеллі про витікання рідини, закон Кіргофа, закон Ома, закон збереження енергії, імпульсу в знаннях курсу "Диференціальні рівняння" про складання диференціального рівняння, як залежності між досліджуємими величинами, яка базується на відомих фізичних законах);

– зв'язки інтерпретації (наприклад, знання з курсу "Теоретичні основи електротехніки" про два закони комутації: 1) струм в індуктивності в перший момент після комутації залишається таким самим, яким він був до комутації, 2) напруга на ємності в перший момент після комутації залишається такою ж, якою вона була до комутації, інтерпретується, як знання задачі Коші в курсі " Диференціальні рівняння".

Можна виділити такі способи впровадження міжпредметних зв'язків. Це включення в навчальний матеріал дисциплін, які вивчаються, знання про загальний об'єкт вивчення з інших дисциплін, наведення прикладів використання навчального матеріалу дисципліни, яка вивчається при проходженні послідуючих курсів. Включення в задачі конкретних числових даних з прикладних дисциплін, використання комплексних робіт, питань, задач, завдань на обґрунтування, узагальнення, конкретизацію, порівняння, синтез знань із суміжних навчальних дисциплін. Завдяки такому підходу студенти бачать реальне застосування диференціальних рівнянь, а це спонукає їх до активного вивчення цієї теми.

Можна запропонувати типовий розрахунок, який би студенти змогли виконати за допомогою комп'ютера. Особливістю такої роботи є те, що студенти, використавши комп'ютер, досліджують динаміку процесу, проводять аналіз результату, обчислювальний експеримент. Прикладом може бути наступна задача.

Задача. Розглядається схема динамічного моделювання процесу поверхневого пластичного деформування деталі із закріпленим гідравлічним демпфером у центрі при механічній обробці (рис. 6).

Диференційне рівняння, яке описує процес поверхневого пластичного деформування деталі, закріпленої в центрах з биттям b мм, має вигляд:

$$mx'' = Cx' - (B + x + b\sin wt)) + ES(B_1 - x - b\sin wt))\,\mathrm{sgn}(B_1 - xb\sin wt)),$$

де

m – приведена маса інструмента – кг;

b – биття деталі – мм;

C – коефіцієнт демпфірування – Н/(мм/с);

k – жорсткість пружини – Н/мм;

B – поверхневий натяг пружини – мм;

w - кутова швидкість деталі – рад/с;

E – жорсткість матеріалу – Н/мм^2;

S – площа плями контакту – мм^2;

B_1 – попередній статичний натяг інструмента в деталь – мм.

У програмі DFSCTCH наводиться схема розміщення інструмента для динамічного моделювання процесу поверхневого пластичного деформування з гідравлічним демпфером. Студенти знайомляться із математичними моделями, які відповідають елементам схеми та її можливим спрощенням, а також із математичними моделями, які відповідають спрощеним схемам даного процесу. У вищенаведеному рівнянні функція sgn(*x*) описує силову дію поверхні деталі на інструмент у випадку наявності контакту та відсутності його. Наявність підпрограми розв'язування рівняння дає можливість двом підгрупам студентів провести аналіз цих режимів і порівняти результати.

Завдання 1. Вибрати такий крок інтегрування, щоб був найбільш інформативним розв’язок;

2. Дослідити динаміку зміни натягу для w=10 рад/с, 100рад/с. Зробити висновок про неможливість роботи на деяких частотах, знайти оптимальну частоту (див. рис. 7 і 8);

3. Провести дослідження при заміні Cx' на Cx'^2 (тобто, при використанні гідравлічних демпферних пристроїв);

4. Дослідити випадок, коли деталь обробляється тороїдальним або сферичним інструментом з невеликим радіусом (r<=3 мм), прийняти:

$$s = k_1(1 + B_1 - x - b\sin(wt))^3,$$

де (k_1=1), k = 1000 Н/мм^2, w = 100 рад/с, b = 0.01мм, C= 200 Н (мм/с), B_1 = 0.01 мм, ES = 100 кН/мм, B = 1 мм.

5. Вибрати модельне рівняння, щоб одержати:

а) монотонний розв’язок;

б) осцилюючий розв’язок;

6. Знайти розв’язки:

а) аналітичний (для перетвореного рівняння);

б) за формулою Тейлора;

в) за методом Пікара для рівняння 1-го порядку;

7. Побудувати графіки розв’язків та оцінити похибки в точках, далеких від OX. Проаналізувати наближення, похибки.

8. Розв’язати рівняння чисельними методами:

а) Ейлера;

б) Рунге-Кутта;

9. Для порівняння результатів скористатись методом ізоклін (використати програму IZOKLIN).

10. Провести обчислювальні експерименти:

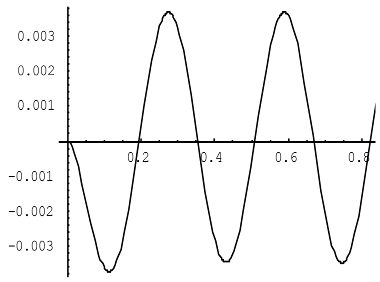
а) змінити крок інтегрування;

б) змінити початкові умови;

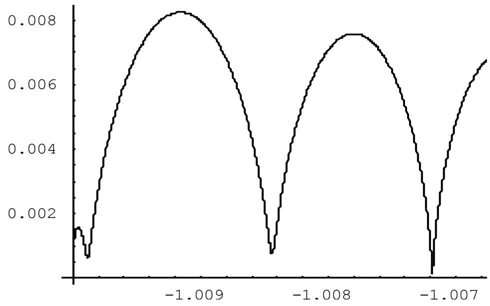
в) змінити значення параметрів рівняння.

11. Побудувати графік зміни похибки в залежності від кроку інтегрування.

12. Зробити висновки. Підготуватись до контролю.



Крива ходу різця



Крива швидкості руху різця

Рис. 1. Графічний розв'язок рівняння при w = 20 рад/с

Одержавши розв'язок диференціального рівняння чисельним методом Рунне-Кутта і використавши математичний пакет Mathematica 4, студенти аналізують криві натягу при різних значеннях *w,* роблять висновки відносно динаміки процесу. Аналіз зміни натягу в процесі механічної обробки з кутовою швидкістю w = 20 рад/с (рис. 1) вказує на неможливість роботи при таких частотах обертання деталі, оскільки контакт інструмента та деталі не постійний, а періодично повторюється. Такі та інші висновки можуть зробити студенти, одержавши консультацію на спеціальній кафедрі. Отже, змінюючи параметри диференціального рівняння, можна змінити зсув цих кривих і таким чином безпосередньо впливати на зміну форми деталі.

Розв'язування таких задач під час вивчення курсу вищої математики можливо не тільки тому, що вони демонструють роль диференціальних рівнянь в процесі вивчення навколишнього світу, а й показують, як здійснюється пізнання суті реальних процесів та явищ, як формалізується умова задачі, нехтуються суттєві деталі, як вибирається метод розв'язування, як інтерпретується результат.

Пізнавальну діяльність студентів при впровадженні міжпредметних зв'язків можна організувати наступним чином.

На першому етапі необхідно активізувати опорні знання із забезпечуючих курсів. Студенти повинні пригадати раніше вивчений матеріал, взяти з нього необхідні для впровадження зв'язків опорні знання, відпрацювати їх.

Наприклад, при вивченні теми "Фундаментальна система розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь" в курсі "Диференціальні рівняння" опорними знаннями будуть означення лінійної комбінації векторів, означення лінійної залежності і лінійної незалежності векторів, відповідні теореми і наслідки з теорем з курсу "Лінійна алгебра".

На другому етапі потрібно встановити зв'язки між новими та опорними знаннями. Для цього в новому навчальному матеріалі необхідно виділити ті знання, в основі яких будуть опорні. Тобто опорні знання лінійної залежності і незалежності векторів пов'язані з такими питаннями: "Які умови слід накласти на функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, які є частинними розв'язками лінійного однорідного диференціального рівняння, щоб система $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x)$, де $C_k(k = \overline{1,n})$ – довільні сталі, була загальним розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння? Таке питання вказує на зв'язок опорних і нових знань. Для відповіді на це питання вводиться поняття лінійної залежності і лінійної незалежності системи функцій, які відіграють таку саму важливу роль, що і системи базисних векторів у лінійній алгебрі.

Реалізація першого і другого етапів дозволяє підготувати студента до перенесення знань з однієї предметної галузі в другу. В результаті чого виникає дидактична задача на взаємозв'язок актуалізованих знань.

На третьому етапі вся діяльність студента спрямована на розв'язування поставленої задачі.

Таким чином, включення у навчальну діяльність студентів по виконанню інтегрованих завдань, вимагає:

– чіткої орієнтації у викладанні курсу “Диференціальні рівняння” на кінцеві цілі підготовки спеціалістів;

– міждисциплінної інтеграції процесу навчання зі спеціальності, з метою набуття студентами вміння синтезувати знання із різних предметів для розв’язування інженерних задач;

– повного використання фундаментальних наук у викладанні загально інженерних та спеціальних дисциплін.

1. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. – М.: Наука, 1987.
2. Клочко В. І. Застосування нових інформаційних технологій навчання при вивченні курсу вищої математики у технічному вузі: Навчально-методичний посібник. Вінниця: ВДТУ, 1997.
3. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 1994.

Резюме. В статье указаны межпредметные связи, которые можно выделить во время обучения темы “Дифференциальные уравнения” и учебными дисциплинами технического профиля.

В качестве примера приводится задача, в которой рассматривается схема динамического моделирования процесса поверхностной пластической деформации детали с закреплённым гидравличным демпфером в центре при механической обработке. Решение подобных задач демонстрируют студентам роль дифференциальных уравнений в познании сути реальных процессов и явлений.

Summary. The intersubject communications(connections) are specified in clause which it is possible to allocate during training a theme " the Differential equations " and educational disciplines of a technical structure.

As an example the task in which the circuit of dynamic modelling of process of superficial plastic deformation of is considered at machining. The decision of similar tasks demonstrate to the students a role of the differential equations of essence in knowledge of real processes and phenomena.

Надійшла до друку 10.06.2002 р.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КООРДИНАТ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ЗНАХОДЖЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ МІСЦЬ ТОЧОК

Л.М.Кобко, канд. техн. наук, доцент,
Є.Ф.Вінниченко, ст. викладач
Чернігівський державний педагогічний університет ім. Т.Г.Шевченка

Метод координат (або координатний метод) один з надійних і ефективних, тому йому часто надається перевага при розв'язуванні багатьох задач на знаходження геометричних місць точок, які важко розв'язуються іншими методами.

Поняття геометричних місць точок – одне з найважливіших в геометрії. Воно використовується не тільки при розв'язуванні задач на побудову. Не менше значення це поняття має в аналітичній геометрії, де його застосування дає можливість простим і доступним способом одержати наочне представлення про різні криві.

При вдалому виборі системи координат і встановленні залежності координат біжучої точки шуканого ГМТ від координат даних точок (або від рівнянь даних ліній) координатний метод дає можливість швидше досягти результату засобами алгебри, які заміняють побудови обчисленнями.

Розв'язання задач методом координат охоплює всі частинні випадки, що звільняє нас від проведення дослідження.

Для координатного методу, як правило, не потрібні допоміжні побудови.

Розглянемо приклади розв'язання задач координатним методом на знаходження геометричних місць точок площини, утворених кінематичним способом.

Задача 1. Знайти геометричне місце центроїдів трикутників ABC, що мають спільну сторону *AB*, а протилежна цій стороні вершина *C* ковзає по даній прямій *l*.

Розв'язання. Виберемо прямокутну декартову систему координат $(O,\vec{i},\vec{j})$ так, щоб вісь x сумістилась з прямою l, а початок координат O – довільна точка прямої l. Нехай в $(O,\vec{i},\vec{j})$ $A(a_1;a_2)$, $B(b_1;b_2)$, $C(x_c;0)$, $M(x;y)$ – відповідно вершини і центроїд деякого трикутника, що задовольняє умові задачі (рис.1). Тоді ордината точки M: $y=\dfrac{a_2+b_2}{3}=const$. А це означає, що точка M належить прямій l_1, яка паралельна даній прямій l і ділить відстань від середини M_1 відрізка AB до даної прямої l у відношенні 1:2.

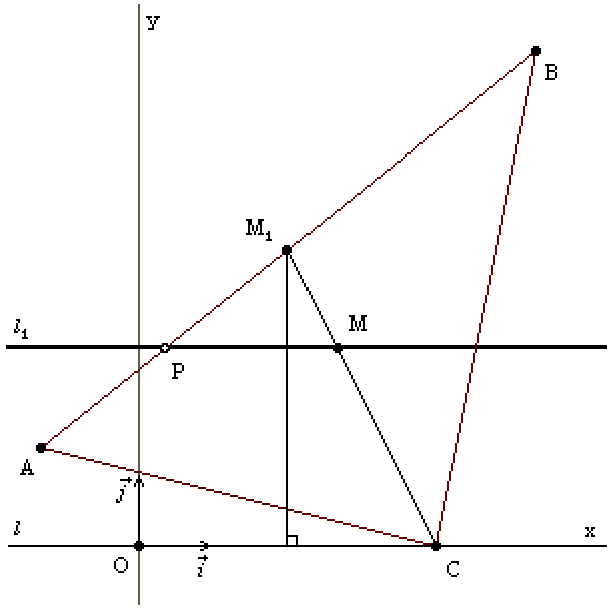


Рис. 1

Задача 2. Знайти геометричне місце центроїдів трикутників, спільна сторона яких є хордою кола радіуса r, а протилежна цій стороні вершина ковзає по цьому колу.

Розв'язання. Нехай хорда AB=2a. Виберемо прямокутну декартову систему координат $(O,\vec{i},\vec{j})$ так, щоб початок координат сумістився з центром кола, а вісь $x \parallel$ AB (рис.2).

Тоді в $(O,\vec{i},\vec{j})$ рівняння кола набуде вигляду $x^2+y^2=r^2$, а вершини трикутника ABC і центроїд матимуть координати: $A(-a;-b)$, $B(a;-b)$, $C(x_c;\sqrt{r^2-x_c^2})$, $M(x;y)$, де $b=\rho(O,AB)$. Тоді за формулою координат центроїда трикутника знайдемо координати x, y точки M:

$$x=\frac{-a+a+x_c}{3}=\frac{x_c}{3},\quad y=\frac{-b-b+\sqrt{r^2-x_c^2}}{3}=\frac{-2b+\sqrt{r^2-x_c^2}}{3}.$$

Виключивши x_c з цих рівностей, одержимо шукане ГМТ: $x^2+(y-\frac{2}{3}b)^2=\frac{a^2}{9}$. Це рівняння кола з центром $O_1(0;-\frac{2}{3}b)$ радіуса $r_1=\frac{a}{3}$.

Задача 3. Знайти траєкторію, яку описують ортоцентри трикутників, що мають спільну сторону *AB*, а протилежна цій стороні вершина *C* ковзає по даній прямій *l*, паралельній *AB*.

Розв'язання. Нехай $AB=2a$, $\rho(l,AB)=b$. Виберемо прямокутну декартову систему координат $(O,\vec{i},\vec{j})$ так, щоб вісь *x* сумістилась з прямою *AB*, початок координат *O* співпав з серединою відрізка *AB* (рис.3). Тоді $A(-a;0)$, $B(a;0)$, $C(x_c;b)$, $H(x;y)$ – відповідно вершини і ортоцентр деякого трикутника, що задовольняє умову задачі.

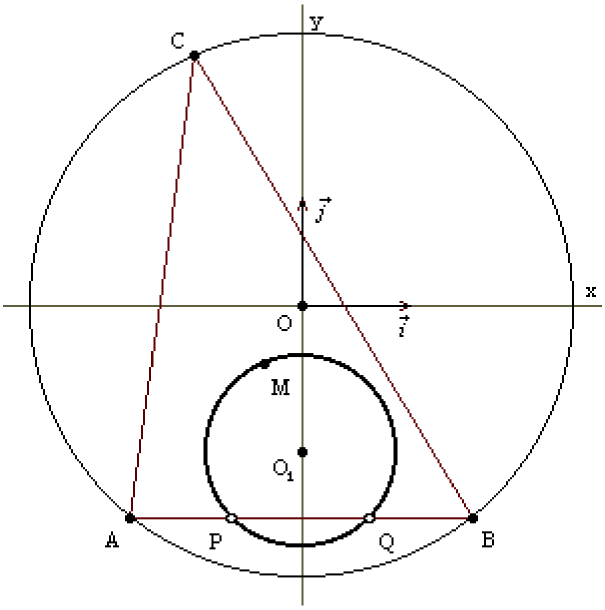


Рис. 2

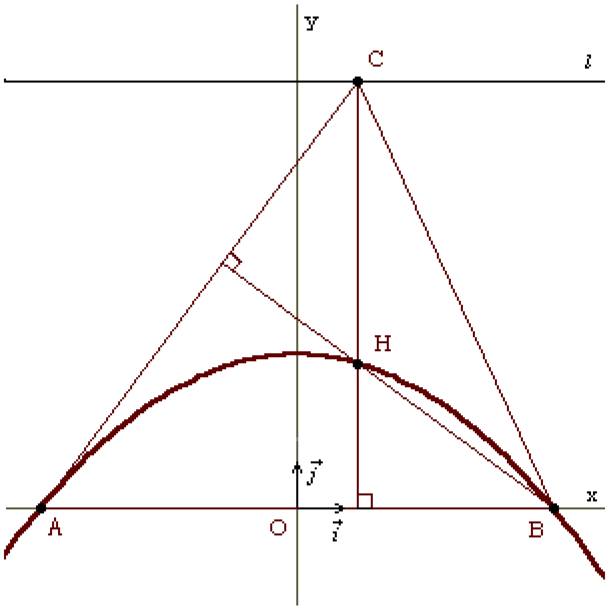


Рис. 3

Рівняння висоти *CH* матиме вигляд: $x=x_c$. (1)

Виключивши x_c з рівностей (1) і (2),одержимо: $y=-\frac{1}{b}x^2+\frac{a^2}{b}$.

Отже, шуканим ГМТ є симетрична відносно осі *y* парабола, вершина якої є точка $N(0;\frac{a^2}{b})$, а вітки параболи перетинають вісь *x* в точках *A* та *B*.

Якщо пряма *l* не паралельна стороні *AB*, то при цьому точка *H* може описувати гіперболу або пряму в залежності від розташування прямої *l*.

Задача 4. Яку лінію описує основа бісектриси *AN* трикутника *ABC*, якщо *AB*=*c* нерухома, а вершина *C* ковзає по колу з центром у точці *A* радіуса *b*? [1]

Розв’язання. Виберемо прямокутну декартову систему координат $(O,\vec{i},\vec{j})$ так, щоб початок координат сумістився з точкою А, вісь *x* – з прямою *AB* (рис.4). Тоді в $(O,\vec{i},\vec{j})$ рівняння кола набуде вигляду $x^2+y^2=b^2$, вершини трикутника: $A(0;0)$, $B(c;0)$, $C(x_c;\sqrt{b^2-x_c^2})$, основа бісектриси $N(x;y)$.

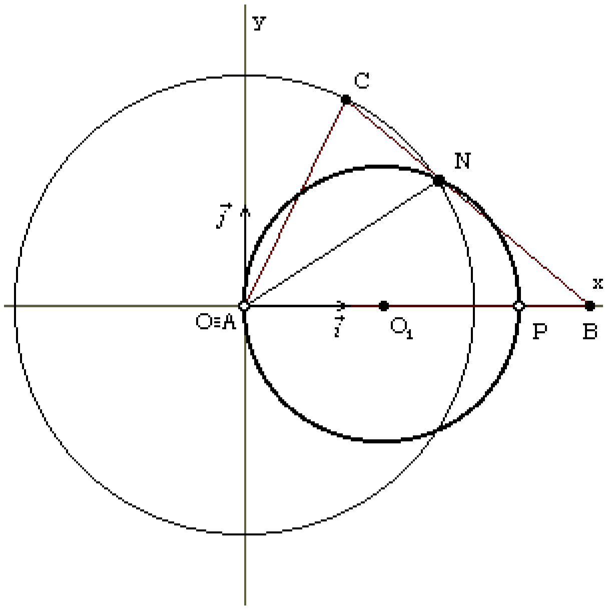


Рис. 4

За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника маємо: $\dfrac{\overrightarrow{CN}}{\overrightarrow{NB}}=\dfrac{CN}{NB}=\dfrac{b}{c}$.

У координатній формі ці рівності набудуть вигляду:

$$\frac{x-x_c}{c-x}=\frac{b}{c},\qquad \frac{y-\sqrt{b^2-x_c^2}}{0-y}=\frac{b}{c}.$$

Виключивши з них x_c, одержимо: $\left(x-\dfrac{bc}{b+c}\right)^2+y^2=\dfrac{b^2c^2}{(b+c)^2}$.

Таким чином, шуканим ГМТ є коло з центром $O_1\left(\dfrac{bc}{b+c};0\right)$

радіуса $r=\dfrac{bc}{b+c}$.

Задача 5. Дано коло з центром в точці O радіуса R та точка A всередині кола. Точки B і D лежать на колі. Знайти множину четвертих вершин прямокутників $ABCD$.

Виберемо прямокутну систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$ так, щоб початок координат сумістився з центром O кола, а вісь x – з прямою OA (рис.5).

Нехай в $(O, \vec{i}, \vec{j})$ вершини прямокутника мають координати: $A(a;0)$, $B(b_1;b_2)$, $C(x;y)$, $D(d_1;d_2)$. Оскільки $ABCD$ – прямокутник, то $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$, або з врахуванням відповідних координат $a^2 + (x^2 + y^2) = (b_1^2 + b_2^2) + (d_1^2 + d_2^2)$.

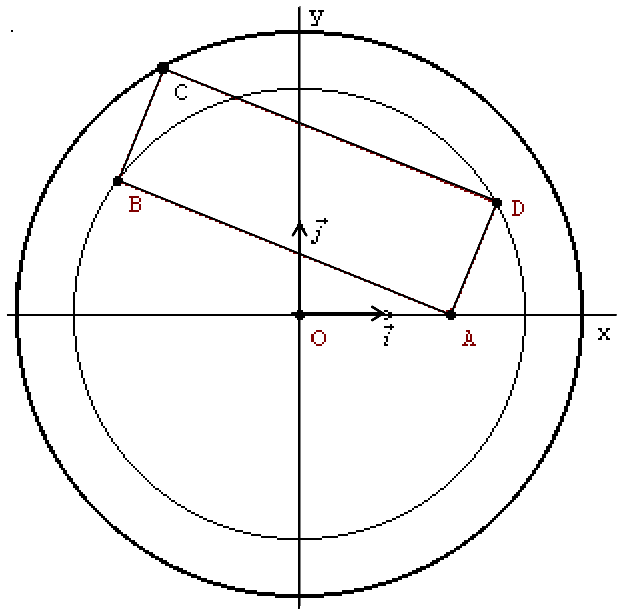


Рис. 5

За умовою точки B і D належать колу, отже $b_1^2 + b_2^2 = R^2$, $d_1^2 + d_2^2 = R^2$. Звідси одержимо рівняння шуканого ГМТ: $x^2 + y^2 = 2R^2 - a^2$, яке визначає коло, концентричне даному.

Зауваження. *Якщо точка C належить прямій AB, то з розглянутих ГМТ (задачі 1, 2, 4) виключаються точки P (рис.1), P і Q (рис.2), P і O (рис.4). В цих випадках трикутник ABC вироджується у відрізок.*

Широке впровадження засобів інформаційних технологій в освіті дає змогу ефективно вивчати розглядувану тему з використанням різних програмних засобів. Застосування комп'ютера на уроках математики надає широкі можливості для проведення різноманітних чисельних експериментів, на основі яких учень приходить до формування гіпотез щодо досліджуваних закономірностей, має можливість висунути певні здогадки, припущення, ідеї та експериментально їх підтвердити чи спростувати шляхом знаходження контрприкладів. Зокрема, вітчизняна програма GRAN-2D, яка була розроблена на кафедрі інформатики НПУ ім.М.П.Драгоманова, має спеціальні засоби роботи з геометричними місцями точок [2]. Побудова математичних моделей розглядуваних задач з використанням такої програми дасть можливість учням сформулювати гіпотези щодо вигляду шуканого ГМТ, проводити аналіз побудованої моделі в динаміці, допоможе правильно зорієнтуватися у виборі системи координат. Завдяки цьому досягається високий рівень проблемності пізнавальної активності, на основі чого в учнів створюються нові пізнавальні навички.

1. Колесова Т.И. Геометрические места точек на плоскости и их применение в решении задач. Методические рекомендации для студентов I и II курсов математического факультета. – Чита: Обл.типография, 1986. – 36 с.
2. Жалдак М.І., Вітюк О.В. Комп'ютер на уроках геометрії: Посібник для вчителів. – К.: НПУ ім.М.П.Драгоманова, 2000. – 154 с.

Резюме. Рассматривается применение метода координат в решении задач на отыскание геометрических мест точек, образованных кинематическим способом.

Summary. The use of coordinate method for solving the problem on searching out geometrical places of cinematically formed points is considered.

Надійшла до друку 10.06.2002 р.

СИСТЕМА КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ В ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Л.І.Нічуговська, канд. економ. наук, доцент
Полтавський університет споживчої кооперації України

Контроль знань і вмінь студентів – невід'ємна і важлива частина процесу навчання. Розглядаючи навчальний процес з позиції теорії управління, відзначимо позитивну роль контролюючої діяльності, яка є суттєвою компонентою універсального управлінського циклу по забезпеченню цілеспрямованості та стабільності як зовнішнього оберненого зв'язку (контролююча діяльність викладача), так і внутрішнього зворотного (самоконтроль студентів). При цьому, зворотній зв'язок служить основою в плануванні коригувальних дій і проведенні аудиторних занять (лекцій, практичних занять, індивідуальної роботи тощо) та в пошуку удосконалення форм та методів їх організації. Крім того, слід акцентувати увагу на факті існування взаємооднозначної відповідності між контролем знань і процесом навчання в цілому, яка полягає у тому, що:

– особливості змісту предмету навчання визначають напрямки його контролю;
– конкретна методична стратегія навчання математичним дисциплінам потребує відповідних форм контролю.

Наприклад, в курсі "Теорія ймовірностей та математична статистика" змістом навчання є ймовірнісні закономірності випадкових подій в масових випробуваннях та навички їх використання у побудові економіко-стохастичних моделей на мікро- та макрорівнях.

В навчальній дисципліні "Дослідження операцій" змістом навчання є застосування різних математичних методів та моделей для виявлення оптимальних способів прийняття рішення в задачах організаційного управління в умовах, коли мають місце обмеження техніко-економічного або якогось іншого характеру, що вимагає уже інших форм контролю.

Отже, виникає необхідність реалізації системного підходу до контролю і оцінки знань студентів з математичних дисциплін, в основі якого – наявність зв'язків між основними навичками та етапами навчання.

У цьому аспекті доцільно згадати систему контролю і оцінки знань для учнів, розроблену К. Стоуном, основні позиції якої, наприклад, поняття тестованої навички, можуть поповнити методичний арсенал викладачів вищих закладів освіти.

В основі цієї методики лежить наявність сталих зв'язків між навичками та етапами навчання [1, с. 377].

Базисними навичками всіх етапів навчання за К. Стоуном є навички:

А-типу – вміння учня самостійно щось виконати, яка виступає як рівень знання змісту (теми, розділу тощо);

В-типу – вміння ідентифікувати засвоєні поняття при розв'язанні конкретних завдань;

С-типу – вміння визначати послідовність дій по використанню А та В навичок.

Адаптуючи цю систему до контролю знань в контексті навчання математичному моделюванню, можна вважати, що А-навички означають вміння студента економічного факультету при заданих умовах будувати математичну модель певної ситуації (виробничої, фінансової, ринкової тощо); В-навички вказують, наскільки оперативно студент будує економіко-математичну модель; С-навички характеризують знання загальних підходів, принципів до реалізації економіко-математичних моделей. Але, на нашу думку, ця система потребує доповнення у вигляді дуже важливих навичок D-типу – вміння студента економічного спрямування інтерпретувати одержані результати, прогнозувати тенденції динаміки досліджуваного явища (процесу) шляхом аналізу реалізацій економіко-математичних моделей.

Отже, структура тестових завдань з використанням математичного моделювання має містити чотири рівня і оцінюватись багатобальною шкалою.

Зауважимо, що подібний підхід до системи контролю знань студентів з математичних дисциплін не суперечить рівням засвоєння знань, що виділені в роботі В. Беспалько [2], де I рівень – знання-знайомства, II – знання-копії (алгоритмічний рівень), III – знання-вміння (евристичний рівень), IV – знання-трансформації (творчий рівень). Слід відзначити, що перші три рівні оцінюються відповідно оцінками "задовільно", "добре" та "відмінно", тоді як четвертий рівень засвоєння математичних знань, що хоча і не є типовим явищем для більшої частини студентів, також оцінюється оцінкою "відмінно", що вказує на недосконалість існуючої системи оцінювання знань. Отже, виникає необхідність коригування традиційної системи оцінювання знань студентів у вищих закладах освіти, що вимагає особливої уваги до організації контролю в процесі навчання.

Контроль знань студентів, як невід'ємна частина навчального процесу, включає наступні етапи: планування, перевірку, облік, аналіз та узагальнення одержаних результатів, коригувальні дії.

"Актуальним є розуміння залежності між етапами та подальшими функціями контролю.

Серед основних функцій педагогічного контролю можна виділити діагностичну, навчаючу, виховну, організаторську, розвиваючу, стимулюючу та методичну. Так, діагностична функція контролю тісно пов'язана з процесом виявлення якості знань (їх повнота, осмисленість, глибина, гнучкість, дієвість, системність, узагальненість, міцність), ступеня сформованості загально-навчальних та математичних навичок та умінь тощо.

Навчаюча функція пов'язана з можливостями застосування різноманітних видів і форм контролю для реалізації особистісно-орієнтованого процесу навчання студентів при вивченні певної теми, розділу тощо.

Розвиваюча і виховна функції тісно пов'язані із стимулюючою функцією контролю як каталізатора активізації пізнавальної діяльності особистості в залежності від її психофізіологічних особливостей, інтелектуального потенціалу, самостійності мислення, орієнтування в процесі розв'язування нестандартних задач, глибини проникнення в суть явищ, самооцінки та рівня домагань тощо.

Методичні та організаторські функції контролю можуть бути віднесені до резервів викладацької майстерності і вимагають:

- чіткого формулювання критеріїв оцінювання;
- надійності перевірки, об'єктивності оцінювання;

- реалізації індивідуального та диференційованого підходів;
- наукового обґрунтування, систематичності вимог, неперервності;
- своєчасності, різноманітності, гнучкості, дієвості;
- конкретності термінів виконання;
- економічності;
- коректного ставлення до студентів;
- забезпечення можливостей одержання позитивних результатів у процесі навчання.

Всі ці функції тісно пов'язані між собою у навчально-виховному процесі. Екзамени, заліки, колоквіуми виконують діагностичну і контролюючу функції; практичні та лабораторні заняття – діагностичну, навчаючу, розвиваючу та виховну функції; науково-дослідні конференції, математичні олімпіади, ділові ігри – стимулюючу, розвиваючу, виховну; програмовані методи – організаційну, навчаючу і контролюючу.

Слід зазначити, що відпрацьована система педагогічного контролю знань з урахуванням всіх його функцій, є важливою умовою підвищення рівня фундаментальної освіти фахівців економічного спрямування. До форм педагогічного контролю відносять екзамени, заліки, усне опитування, письмові контрольні роботи, індивідуальні завдання, лабораторні роботи, колоквіуми, розрахункові роботи тощо.

В залежності від часу розрізняють вхідний, поточний, тематичний, рубіжний, підсумковий і заключний контроль.

Вхідний контроль надає можливість визначити ступінь готовності студентів до сприймання нової інформації, що пропонується на лекції або буде вивчатись на практичному занятті і може реалізовуватись у наступних формах:

– контрольні питання на початку лекції (практичного, лабораторного заняття) або розгляд ситуаційної проблеми, що актуалізують опорні знання;
– перевірка виконання домашнього завдання;

– вибіркове усне опитування;
– фронтальне письмове опитування;
– математичний диктант;
– тестування за допомогою індивідуальних міні-тестів протягом 10-15хв.

В залежності від типу домашнього завдання (колективне чи індивідуальне) його перевірка може бути наступною. Наприклад, по темі “Числові характеристики положення центру розподілу та дисперсії вибіркової сукупності” для визначення рівня підготовленості студентів доцільно запропонувати наступні міні-ситуації по прийняттю рішення (на підготовлених слайдах).

1. Менеджер по персоналу банку зібрав для балансу більше ніж 500 контрольних рахунків за куплені товари, але в оригіналі зібрані дані здались йому таким статистичним матеріалом, що важко піддається обробці. Допоможіть йому досягти розуміння в одержаних даних у зжатій та зрозумілій формі.
2. Для корпорації брокери вивчають рівень прибутковості чотирьох різних акцій за останні декілька років . Всім здається, що акції мають однаковий рівень прибутковості за певний період. Брокери мають вирішити проблему ідентифікації цих акцій, щоб передбачити найменший ризик інвестиційних вкладень. Допоможіть прийняти рішення.
3. У підготовці майбутньої робочої зустрічі з коригування заробітної плати з правлінням корпорації місцеве об’єднання профспілок намагається вирішити проблему, а саме: яким чином дані по рівню заробітної плати 350 працівників можуть бути використані для аналізу їх купівельної спроможності, як визначити споживчий кошик робітника корпорації і яка різниця у рівні зарплати має переважати.

Яку методику аналізу можна запропонувати?

Після колективного обговорення запропонованих ситуацій, можна запропонувати студентам дати письмові відповіді на наступні питання:

1. Визначіть і наведіть приклади числових характеристик центральної тенденції та характеристик розсіювання.
2. За яких умов Ви віддасте перевагу медіані, як мірі центральної тенденції, а не середньому?

3. Для вибіркової сукупності 4; 9; 8; -1; -0,5; 1,25; 9 знайти: а) просту середню; б) медіану; в) моду. Інтерпретувати кожну статистику. Про що говорить кожна із них? Чому вони різні, якщо всі вони середні?

Після того, як студенти дали свої відповіді, можна проаналізувати деякі з них.

Індивідуальні домашні завдання видаються кожному студенту особисто і диференціюються рівнем складності. Як правило, індивідуальні домашні завдання пропонуються студентам після вивчення певного розділу і можуть бути віднесеними до тематичного контролю. Перевірка цих завдань, обговорення результатів, аналіз проблем, що виникли при їх виконанні, частково розглядаються на практичних заняттях. Більш детальний аналіз проводиться на консультаціях, індивідуальних заняттях зі студентами.

Зазначимо, що тематичний контроль не обмежується тільки індивідуальними домашніми завданнями диференційованого типу, що виконуються в позааудиторний час. Не менш важливим моментом тематичного контролю є стандартизований контроль, що базується на застосуванні тестової системи з альтернативними варіантами відповідей. Стандартизований контроль доцільно проводити із використанням ПЕОМ. Технологія тестування може істотно змінюватися в залежності від можливості ступеня формалізації певного розділу математичної дисципліни, структури альтернативних відповідей тощо.

Слід відзначити деякі особливості побудови тестових завдань з курсу "Математика для економістів". Відомо, що серед різноманітних функцій управління важливе місце займає прийняття рішень, у процесі якого розглядаючи альтернативні варіанти дій, необхідно відібрати ті, які оптимізують результати підприємницької діяльності. І тому, тестові завдання з математики мають бути побудовані таким чином, щоб крім функцій контролю, оцінювання знань, їх корекції тощо, вони могли розвивати логічне мислення, підсилювати інтенсивність розумових дій, формувати вміння аналізу заданої інформації з позицій її достатності і т.д.

Отже, доцільно включати в тести завдання наступного типу.

1. Підприємство виготовляє продукцію трьох видів – А, В та С. Який прибуток одержало підприємство у 2000 році, якщо відома деяка інформація, а саме:

1) Підприємство у 2000р. виготовило продукції виду А в кількості 1200 одиниць, виду В – 1800 одиниць та виду С – 2500 одиниць;
2) Прибуток від реалізації одиниці продукції В становить 50(грн.), що вдвічі більший від реалізації продукції А.

2. Чи буде добуток $x \cdot (y - 5)$ непарним числом, якщо відомі деякі твердження:

1) $x < 5$; 2) $y > 12$.

Оцініть достатність інформації за приведеними варіантами відповідей і знайдіть правильну.

1) Інформації твердження 1) достатньо, а інформації твердження 2) недостатньо для відповіді на питання;
2) Інформації твердження 2) достатньо, а інформації твердження 1) недостатньо для відповіді на питання;
3) Сумісна інформація тверджень 1) та 2) достатня для відповіді на питання, але ні твердження 1) , ні твердження 2) не є достатніми для відповіді;
4) Необхідна інформація обох тверджень для відповіді на питання;
5) Сумісна інформація тверджень 1) та 2) не є достатньою для відповіді на питання, необхідна додаткова інформація.

Формула оцінювання тестових завдань може бути наступною:

“число правильних відповідей мінус 0,25 від числа неправильних”.

Використання такої форми оцінювання дозволяє урахувати намагання студента виконати завдання, розв'язання яких викликають певні труднощі. Крім того, викладач одержує інформацію для аналізу про рівень засвоєння певної теми (розділу) і в разі необхідності може спланувати необхідні корегувальні дії індивідуально для кожного студента.

Якщо завдання носять диференційований характер, то використання відповідної оцінки (в балах) для кожного завдання дозволяє оцінити кожну студентську роботу (в балах) наступною формулою: "якщо від суми балів, одержаних за правильні відповіді, відняти 0,25 від можливої суми балів за виконання завдань, де відповіді неправильні", то одержимо сумарну кількість балів за кожну роботу

Оцінка "відмінно" ставиться, якщо число одержаних балів становить не менше 90% загальної кількості балів; оцінка "добре" ставиться, якщо число одержаних балів становить від 80% до 89% загальної кількості балів; оцінка "задовільно" – від 60% до 79% відповідно.

Слід відзначити необхідність доведення до відома студентів шкали оцінювання. Це особливо актуально у випадку поєднання контрольного тестування із самотестуванням. Важлива роль шкали оцінювання і у випадку використання рейтингової системи.

Як приклад наведемо модифікований варіант використання модульно-рейтингової системи навчання курсу "Вища математика" для студентів спеціальності "Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності". Зауважимо, що, по-перше, навчання студентів математиці відбувається англійською мовою, по-друге, кількість студентів не перевищує 28 осіб (одна академічна група); по-третє, з групою працює тільки один викладач, який є одночасно і лектором, і керівником практичних занять. Враховуючи специфіку навчального процесу (навчання англійською мовою) об'єктами оцінювання знань згідно кожного модуля вибираються:

- словник математичних термінів (СМТ);

– ключові поняття, означення, терміни, формули (КП);
– опорні конспекти кожної теми (ОП);
– індивідуальні домашні завдання (ІДЗ);
– стандартизоване опитування (СО);
– система самостійних завдань (ССЗ);
– контрольне тестування (КТ);
– комплексні контрольні роботи (ККТ);
– участь в математичних олімпіадах (МП);
– участь в науковому гуртку;
– участь у науковій студентській конференції.

Зауважимо, що не всі види навчальних завдань оцінюються рейтинговими балами. Студенти в обов’язковому порядку мають одержувати заліки по перших двох позиціях. Кількість намагань не обмежена. Мета – обов’язкове “закриття” позицій згідно кожного модуля і фіксація відповідної помітки в індивідуальному сітковому графіку. Індивідуальний сітковий графік з дисципліни “Вища математика” видається кожному студенту на першому аудиторному занятті. В ньому зафіксовані: кількість навчальних тижнів за кожен семестр; поділ дисципліни на блок-модулі; для кожного блоку вказані певні форми контролю і частота їх проведення; максимальна кількість можливих балів по кожному виду діяльності. Подібний підхід дозволяє студентам вести власний облік своїх досягнень, порівнювати свої результати з успіхами своїх товаришів, визначати свій власний рейтинг, планувати свою навчальну діяльність. Крім того, дух здорового суперництва, який взагалі притаманний людині і особливо виявляється в період юності, є активним стимулом навчально-пізнавальної діяльності. Слід відзначити, що модульно-рейтингова система оцінювання успішно впроваджується на спеціальності “Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності” впродовж трьох років і при цьому констатується 100% абсолютна успішність і якісна – не менше 75%.

Оскільки рівень навченості студентів знаходиться в прямій залежності від ефективності системи контролю, то ефективність контролю залежить від оптимального сполучення методів, форм, засобів та видів контролю, які, на нашу думку, мають бути підпорядковані педагогічній доцільності навчального процесу, що полягає в необхідності рухатись шляхом пізнання від об'єктивного результату (якість знань, рівень розумового розвитку індивідуумів та їх потенційні можливості тощо) до стану навчання математичних дисциплін, а не навпаки.

1. Стоун К. Психопедагогика. Психологическая теория и практика обучения. – М. Просвещение, 1984. – 486 с.
2. Беспалько В.П. Слагаемые педагогической технологии. – М.: Педагогика, 1989. – 192 с.

Резюме. Рассматриваются особенности системы контроля знаний студентов экономических специальностей высших учебных заведений в процессе изучения математических дисциплин.

Summary. The features of control by the results of mathematical teaching of the students majoring in Economics at higher educational establishments are considered in this article.

Надійшла до друку 25.06.2002 р.

ОРГАНІЗАЦІЯ КОНТРОЛЮ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В ФІНАНСОВО-ЕКОНОМІЧНИХ КОЛЕДЖАХ

Г.І.Білянін, ст. викладач,
Буковинський державний фінансово-економічний інститут

Математика, як наука, виникла із практичних потреб людства. Зрозуміло, що із розвитком суспільства, при розв'язанні все складніших практичних проблем роль математики зростала. Вона, практично, стала мовою, яка дуже широко використовується в усіх сферах людської діяльності. "Сучасна математика – це універсальна мова майбутнього", – заявляє Ж. Ван Гут.

Суттєво важлива її роль на сучасному етапі накладає велику відповідальність на стан викладання математики в навчальних закладах. Особливо це стосується підготовки молодших спеціалістів фінансово-економічного профілю. Тут математика повинна зайняти місце базового профільного предмету і ось чому.

Підготовку молодшого спеціаліста можна умовно розбити на дві головні, органічно пов'язані, складові: надання середньої освіти, належного рівня культури необхідних для участі в повсякденному житті та забезпечення професійної підготовки.

Якщо розглянути професійну підготовку і врахувати всі ті істотні зміни, які сталися в останні роки у змісті спеціальної підготовки, то тільки знання математики може забезпечити потреби спеціальної підготовки і майбутньої професійної діяльності хорошого фінансиста та економіста.

Сучасний фінансист та економіст повинні володіти математичним мисленням, обробляти великі масиви статистичної інформації, володіти обчислювальними навичками, будувати математичні моделі економічних процесів з метою аналізу ситуації та прийняття рішення для прогнозу. Саме тому важливого значення набуває інтенсифікація навчання математиці під час підготовки молодших спеціалістів.

Складовою частиною вирішення цієї проблеми є перебудова системи контролю результатів навчання. Так як в шкільну практику введено 12-бальну систему оцінювання, а згідно державного освітнього стандарту(проекту) [1] та вимог особистісно-орієнтованого навчання пріоритетними питаннями контролю стало просування студента в опануванні знаннями, вміннями та навичками, а не тільки те яку оцінку він отримав, то відповідно до цього, контролю підлягають не тільки результати навчання, а й процес їх досягнення. Тому цілі контролю можна розбити на:

– об'єктивна педагогічна діагностика;
– керування навчально-пізнавальною діяльністю;

– формування і розвиток потреб та навичок самоконтролю.

Враховуючи все сказане вище і те, що студентами першого курсу коледжів стають випускники 9 класів ЗОШ, пропонуємо наступну методику планування і організації контролю результатів навчання. Вона побудована аналогічно тій, яка описана в статті [2].

В основу пропонованої методики покладено тематичне планування навчального процесу і тематичний контроль результатів навчання.

Наприклад, якщо на весь курс відведено 220 годин (209 – аудиторне вивчення). Це становить 38 робочих тижнів. І семестр – по шість годин, а ІІ семестр – по 5 годин на тиждень. 11год. – самостійне опрацювання), то весь матеріал доцільно розбивати на 7 модулів(тем). Пропонуємо орієнтовну сітку такого розбиття (Таблиця 1).

Таблиця 1.

№ п/п модуля, його короткий зміст	Кількість годин			
	всього	аудиторних	з них практичних	самост. робота
Модуль І. Характеристика основних математичних понять та їх елементів; множини і операції над ними.	18	16	8	2
Модуль ІІ. Функціональна залежність між величинами. Елементарні функції, їхні властивості і графіки.	38	36	12	2
Модуль ІІІ. Рівняння, нерівності, системи.	38	36	18	2
Модуль IV. Прямі та площини в просторі. Вектори і координати.	28	26	10	2
Модуль V. Диференціальне числення.	38	38	18	
Модуль VI. Інтегральне числення.	34	32	12	2
Модуль VII. Геометричні тіла та поверхні, їх об’єми та площі.	28	27	12	1
Всього:	220	209	90	11

Таким чином, структурною одиницею навчального матеріалу є ***модуль***, який задає дидактичний цикл. Кожен модуль закінчується модульною оцінкою (аналогічно тематичній).

Тому при організації контролю результатів навчання перший етап передбачає планування модульного контролю результатів навчання.

Модульний контроль – це діяльність викладача, та студентів, пов'язана з спостереженням та оцінюванням процесу засвоєння і опанування студентами навчального матеріалу даного модуля і його корекцію.

Згідно орієнтовної сітки розбиття матеріалу за модулями, в першому семестрі студенти повинні засвоїти матеріал 4-ох модулів, тобто, отримати 4 модульні оцінки, а в II семестрі – 3 модульні оцінки. В залежності від оцінок можливі варіанти:

а) Якщо оцінки “10-12” з усіх модулів – то студент автоматично отримує таку ж оцінку за семестр.

б) “ 4-9” – то він допускається до здачі усного екзамену, за семестр, який включає матеріал всіх вивчених модулів. Кожен білет містить 2 теоретичних питання (одне з алгебри, друге – з геометрії) та, аналогічно, двох практичних завдань;

в) якщо хоча б з одного із модулів оцінка “1-3”, то призначається під час канікул термін перескладання матеріалу, спочатку за модуль, потім за семестр. Якщо студент не в змозі засвоїти матеріал за модуль чи за семестр, то потрібно вирішувати питання відрахування його з навчального закладу оскільки без потрібних математичних навиків і знань він не зможе засвоювати спецдисципліни.

Таким чином, модульний контроль відіграє дуже важливу роль. Звідси – ставлення до планування модульного контролю має бути дуже відповідальним.

Місце, види і форми контролю мають узгоджуватись із цілями кожного етапу навчально-пізнавальної діяльності студентів [2]. Тому модульний контроль можна представити як сукупність трьох видів контролю – попереднього, поточного і підсумкового, кожен з яких здійснюється відповідно до цілей певного етапу навчально-пізнавальної діяльності студентів.

Види контролю тісно пов'язані із тематичним плануванням. Опираючись на нього, викладач визначає основний посібник, за яким розкривається той чи інший модуль, та допоміжні. Для попереднього та поточного контролю викладач:

а) складає перелік питань діагностичного характеру, які пізніше, при підсумковому контролі, повинні бути чітко диференційованими за рівнями;

б) визначає основні типи практичних завдань, необхідних для засвоєння, та робить їх підбірку;

в) складає самостійні завдання на 15-20 хвилин, які включають типові вправи для перевірки засвоєння практичних навиків і вмінь;

г) планує підсумковий контроль у вигляді усного заліку або планової контрольної роботи.

Усний залік бажано проводити за модулями, де переважає теоретичний матеріал і вправи пропонуються мінімального (обов'язкового) рівня, а контрольну роботу – де домінує практичне застосування теоретичних знань. В неї бажано включати тільки практичні завдання.

Наприклад, в І семестрі для модулів 1,2,4 – доцільно провести залік, а для модуля 3– контрольну роботу. Розглянемо технологію модульного планування і оцінювання на прикладі вивчення модуля 3– "Рівняння, нерівності, системи". В програмі [3] находимо наступну інформацію:

№ п/п теми	Навчальний модуль, основна мета вивчення, зміст навчального матеріалу	Вимоги до математичної підготовки студентів
1	2	3

<u>Модуль III</u> Рівняння, нерівності, системи (36 год.)

<u>Мета:</u> *Систематизувати, узагальнити та підвищити теоретичний рівень набутих раніше знань про рівняння, нерівності, системи та основні методи їх розв'язування; показати, що теорія подільності многочленів будується за аналогією до теорії подільності чисел; виробити вміння знаходити корені многочленів та розкладати їх на множники; ознайомити з основними методами розв'язування рівнянь, нерівностей та [систем] вищих степенів і виробити вміння їх застосовувати.*

Вивчити ірраціональні, показникові, логарифмічні, тригонометричні рівняння, нерівності, [системи] ; та методи їх розв'язування ; ознайомитись із прикладним застосуванням.

10.	Тема: **Алгебраїчні рівняння** Многочлени із однією змінною. Рівняння, як математична модель фінансово-економічної задачі , рівняння еквівалентності в фінансах. Алгебраїчні рівняння і їх види. Розв'язування рівнянь способом введення нової змінної, [однорідних], симетричних, ірраціональних, рівнянь зі змінною під знаком модуля. Рівняння вищих степенів. Застосування теореми Безу та наслідків з неї до розв'язування рівнянь вищих степенів; розкладання многочлена на множники; схема Горнера.	***Вивчивши тему студенти повинні:*** **Мінімальний рівень (А)** ● ***мати поняття про*** – многочлен з однією змінною; – алгебраїчні рівняння їх види; – методи розв'язування окремих типів рівнянь; – ірраціональне рівняння і рівняння зі змінною під знаком модуля. ● ***знати*** – означення многочлена і правило ділення многочленів "кутом " та за схемою Горнера; – алгоритм знаходження цілих коренів рівняння. ● ***вміти*** – реалізовувати алгоритми ділення многочленів; – роз'язувати вказані у змісті найпростіші рівняння; – знаходити цілі корені рівнянь вищих степенів. **Підвищений рівень (рівень Б)** ● ***мати поняття про*** – застосування рівнянь в фінансово-економічній діяльності; – рівносильність рівнянь, рівняння-наслідок. ● ***знати*** – означення основних понять, які вивчаються в даній темі: многочлена, ОДЗ, рівняння з однією змінною, розв'язку, кореня; – суть основних методів розв'язування рівнянь; – алгоритм знаходження раціональних коренів рівнянь вищих степенів. ● ***вміти*** – розв'язувати складніші алгебраїчні рівняння, в тому числі і рівняння вищих степенів та обгрунтовувати рівносильності здійснюваних перетворень.
11.	Тема: **Алгебраїчні нерівності та системи рівнянь і нерівностей** Дробово-раціональні нерівності. [Нерівності із змінною під знаком модуля та ірраціональні нерівності]. Системи лінійних рівнянь з двома і трьома невідомими та їх розв'язування за формулами Крамера. Метод Гаусса для розв'язування лінійних систем з n-невідомими. Нелінійні системи та їх роз'язання	***Вивчивши тему студенти повинні:*** **Мінімальний рівень (А)** ● ***мати уявлення про*** – дробово-раціональні нерівності. ● ***мати поняття про*** – систему лінійних рівнянь з декількома змінними; – нелінійну систему рівнянь. ● ***знати*** – метод інтервалів для розв'язування дробово-раціональних нерівностей; – формули Крамера і метод Гаусса для розв'язування систем лінійних рівнянь. ● ***вміти*** – розв'язувати дробово-раціональні нерівності

	методом підстановки. [Застосування теореми Вієта до розв'язування систем. Колові, симетричні системи].	методом інтервалів; – розв'язувати лінійні системи за формулами Крамера і методом Гаусса; – розв'язувати найпростіші нелінійні системи рівнянь. **Підвищений рівень (рівень Б)** ● ***мати поняття про*** – ірраціональну нерівність; – колові та симетричні системи; – застосування теореми Вієта до розв'язування систем. ● ***знати*** – способи розв'язування нерівностей із змінною під знаком модуля та ірраціональних нерівностей; – методи розв'язування нелінійних систем. ● ***вміти*** – розв'язувати складніші нерівності і системи, зазначені у змісті, та обгрунтовувати рівносильності здійснюваних перетворень.
12.	Тема: **Трансцендентні рівняння** Поняття про трансцендентні рівняння. Показникові та логарифмічні рівняння і способи їх розв'язування. Найпростіші тригонометричні рівняння, [тригонометричні рівняння, які зводяться до найпростіших].	***Вивчивши тему студенти повинні:*** **Мінімальний рівень (А)** ● ***мати поняття про*** – трансцендентне рівняння; – логарифмічне, показникове, тригонометричне рівняння. ● ***знати*** – способи розв'язування найпростіших показникових та логарифмічних рівнянь; – формули розв'язків найпростіших тригонометричних рівнянь. ● ***вміти*** – виконувати тотожні перетворення нескладних показникових, логарифмічних і тригонометричних виразів; – розв'язувати нескладні показникові, логарифмічні, тригонометричні рівняння. **Підвищений рівень (рівень Б)** ● ***знати*** – способи розв'язування складніших показникових, логарифмічних і тригонометричних рівнянь. ● ***вміти*** – розв'язувати складніші показникові, логарифмічні, тригонометричні рівняння.
13.	Тема: **Трансцендентні нерівності і системи рівнянь** Показникові та логарифмічні нерівності, методи їх розв'язування. [Показ-	***Вивчивши тему студенти повинні:*** **Мінімальний рівень (А)** ● ***мати поняття про*** – показникову, логарифмічну і тригонометричну нерівності.

	никово-логарифмічні системи рівнянь]. Найпростіші тригонометричні нерівності і способи їх розв'язування. [Системи тригонометричних рівнянь].	● ***знати*** – основні способи розв'язування найпростіших показникових, логарифмічних і тригонометричних нерівностей. ● ***вміти*** – розв'язувати нескладні показникові і логарифмічні нерівності; – розв'язувати найпростіші тригонометричні нерівності. **Підвищений рівень (рівень Б)** ● ***мати поняття про*** – систему показникових, логарифмічних, тригонометричних рівнянь; ● ***знати*** – способи розв'язування складніших показникових і логарифмічних нерівностей; – способи розв'язування показникових логарифмічних і тригонометричних систем рівнянь. ● ***вміти*** – розв'язувати складніші показникові, логарифмічні, тригонометричні нерівності; – розв'язувати системи показникових, логарифмічних і тригонометричних рівнянь.

Як основний посібник, ми пропонуємо використати навчальний посібник "Алгебра. Розв'язування задач і вправ", О.Г.Гайштут, Г.М.Литвиненко, та "Алгебра і початки аналізу", 10-11 клас, М.І.Шкіль, З.І.Слепкань, О.С.Дубинчук.

Наводимо орієнтовне планування занять для заданого модуля згідно вказаної вище програми:

№ заняття	Назва розділів і тем навчальної дисципліни	Кількість годин
1.	Алгебраїчні рівняння і їх види. Рівняння в економіці. Найпростіші прийоми розв'язування рівнянь. Штучні прийоми (введення нової змінної).	2
2.	Однорідні та симетричні рівняння.	2
3.	Метод доповнення до повного квадрату.	2
4.	Ірраціональні та модульні рівняння.	2
5.	Теорема Безу та її наслідки. Схема Горнера.	2

6.	Розв'язування нерівностей різних типів, метод інтервалів.	2
7.	Розв'язування лінійних систем алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера (2,3 невідомі).	2
8.	Системи *n*-лінійних рівнянь з *n*- невідомими, метод Гаусса.	2
9.	Штучні прийоми розв'язування систем рівнянь	2
10.	Показникові рівняння.	2
11.	Логарифмічні рівняння.	2
12.	Показникові нерівності.	2
13.	Логарифмічні нерівності.	2
14.	Найпростіші тригонометричні рівняння.	2
15.	Способи розв'язування тригонометричних рівнянь.	2
16.	Тригонометричні нерівності, способи їх розв'язування.	2
17.	Розв'язування вправ.	2
18.	Контрольна робота.	2

Підбірка основних типів практичних завдань за вказаними підручниками:

№ п/п	№ заняття	№ підр.	вправи
1.	1-5	1	Р.ІІ, §1, №№ 4-7, 14-18 §3, №№ 1,3,8,10,14,16,17,18,21,28,30,32,34,36,40-51,53-55,57,61, 62,65,81-87,90-93. §4, №№ 9-22. §6, №№ 1-8. §7, №№ 1-60 (на вибір при закріплені тем 1-5)
2.	6	1	Р.ІІ, §1, №№ 8, 10, 14, 18, 19, 35, 40, 43, 44, 48, 54, 64, 71, 73. §2, №№ 5, 11, 16, 21. §3, №№ 5, 7, 9, 23
3.	7-9	1	Р.ІІІ, §1, №№ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 20 §2, №№ 1, 2, 5, 7, 10, 13, 16, 19, 21, 23, 31, 32, 33.
4.	10-13	1	Р.VI, §1, №№ 2, 3, 6, 7, 8, 14, 15, 18, 20, 26, 28, 34, 36, 40, 42, 49, 50. §3, №№ 2, 3, 4, 6, 7, 12, 15, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 47, 49, 53, 55, 57. §6, №№ 1, 2, 3, 5, 6, 11, 14, 18, 24. §7, №№ 1, 2, 5, 8, 11, 14, 19, 22, 24.
5.	14-17	2	Р.ІІ, §2-§5, вправи *А, Б, В,* стор. 126.

Пропонуємо перелік питань для попереднього контролю знань. Задані питання використовуються також для проведення заліку. При цьому їх потрібно розбити по складності на рівні. В запропонованих питаннях для попередього контролю знань вказано до якої групи по складності вони входять при проведені заліку (***А*** – мінімальний рівень, ***Б*** – підвищений рівень):

З а н я т т я   1 - 5 .

1. Що називається рівнянням, коренем рівняння, розв’язком рівняння? **(*А*)**
2. Що означає розв’язати рівняння? **(*А*)**
3. На які групи розбивають елементарні рівняння? **(*А*)**
4. Що називають областю допустимих значень? **(*А*)**
5. Які рівняння називаються рівносильними? **(*А*)**
6. Які можливі випадки при переході від заданих рівнянь до рівносильних? **(*Б*)**
7. Якими методами користуються під час розв’язування рівнянь? **(*А*)**
8. Алгоритм розв’язування рівнянь заміною змінної. **(*А*)**
9. Яке рівняння називається однорідним? **(*А*)**
10. Методи розв’язування однорідних рівнянь. **(*Б*)**
11. Які рівняння називаються симетричними третього порядку, четвертого? **(*А*)**
12. Яка заміна вводиться в зворотньо-симетричному рівнянні 4-го порядку? **(*Б*)**
13. Які рівняння називаються ірраціональними? **(*А*)**
14. Як знайти ОДЗ в ірраціональному рівнянні? **(*Б*)**
15. Методи розв’язування ірраціональних рівнянь. **(*Б*)**
16. Універсальний метод розв’язування рівнянь зі змінною під знаком модуля. **(*Б*)**
17. Сформулювати теорему Безу, та наслідки з теореми. **(*А*)**
18. Довести теорему Безу та наслідки з неї. **(*А*)**
19. Як знайти цілі та раціональні крені многочлена? **(*А*)**
20. Схема Горнера, суть цієї схеми. **(*Б*)**
21. Як рівняння використовуються в реальній дійсності? **(*Б*)**

З а н я т т я   6 .

22. Що називається нерівністю? **(*А*)**
23. Що означає розв’язати нерівність? **(*А*)**

24.Що називається областю допустимих значень нерівності? (***А***)
25.Які нерівності називаються рівносильними? (***А***)
26.Алгоритм методу інтервалів. (***А***)
27.Які нерівності називаються нерівностями з модулем? (***А***)
28.Алгоритм розв’язування нерівностей з модулем. (***Б***)
29.Які нерівності називаються ірраціональними? (***А***)
30.Схема розв’язування ірраціональних нерівностей. (***Б***)
31.Розв’язування ірраціональних нерівностей методом рівносильних перетворень. (***Б***)

Заняття 7-9.

32.Що називається системою рівнянь? (***А***)
33.Що означає розв’язати систему? (***А***)
34.Які системи називаються рівносильними? (***А***)
35.Які існують способи розв’язування лінійних систем рівнянь з двома змінними? (***А***)
36.Як задається система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими? (***Б***)
37.Що таке матриця, елементи матриці? (***А***)
38.Що називається визначником матриці? (***А***)
39.Як обчислити визначник третього порядку? (***Б***)
40.Суть формул Крамера. (***А***)
41.Як розв’язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса? (***А***)
42.Методи підстановки при розв’язанні нелінійних систем рівнянь. (***А***)
43.Однорідні системи та методи їх розв’язання. (***А***)
44.Як використовується теорема Вієта при розв’язанні систем? (***Б***)
45.Які системи називаються коловими? (***Б***)
46.Методи розв’язування колових систем. (***Б***)
47.Які методи використовують при розв’язанні симетричних систем? (***Б***)
48.Що називається системою нерівностей з однією змінною? (***А***)
49.Що називається розв’язком системи нерівностей? (***А***)

50.Які системи нерівностей називаються рівносильними? (*А*)

51.Яка схема розв'язання системи нерівностей з однією змінною? (*А*)

52.Як графічно зобразити розв'язок системи двох лінійних нерівностей з двома змінними? (*Б*)

53.Суть задачі лінійного програмування. (*Б*)

Заняття 10-13.

54.Які рівняння називаються трансцендентними? (*А*)

55.Методи розв'язування показникових рівнянь. (*А*)

56.Які рівняння називаються логарифмічними? (*А*)

57.Методи розв'язування логарифмічних рівнянь. (*А*)

58.Як розв'язуються показникові нерівності $a^{f(x)} >$ [illegible] і $a^{f(x)} <$ [illegible]?(*А*)

59.Як розв'язуються логарифмічні нерівності $\log_a f(x) \geq$ [illegible],

$\log_a f(x) \leq$ [illegible].(*А*)

60.Як звести до рівносильних систем нерівності $\log_{\varphi(x)} f(x) \geq \log_{\varphi(x)} h(x)$,

$\log_{\varphi(x)} f(x) \leq \log_{\varphi(x)} h(x)$.(*Б*)

Заняття 14-16.

61.Які рівняння називаються найпростішими тригонометричними? (*А*)

62.Способи розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь. (*А*)

63.Формули розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь.(*Б*)

64.Способи розв'язування тригонометричних рівнянь.(*Б*)

65.Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей. (*А*)

Для перевірки засвоєння практичних навичок і вмінь пропонуємо варіанти самостійних робіт (до 15 хв.). ***Бажано щоб варіантів було мінімум 6 і щоб вони включали всі пройдені типи вправ :***

Заняття 1-5.

СР №11 . **<u>Варіант 6.</u>** Розв'язати рівняння: а) $2x^4 + x^3 - 2x^2 - x = 0$,

б) $\left(\frac{x-[illegible]}{x}\right)^{[illegible]} - [illegible]\left(\frac{x-[illegible]}{x}\right) - [illegible] = [illegible]$, в) $x^2 + \frac{4x^2}{(x+[illegible])^2} = [illegible]$.

СР №12 .   **<u>Варіант 6.</u>**   Розв’язати рівняння:

1. $\sqrt{x+5}+1=$; **2**. $\sqrt{2x^2+\ x-\ }=x+$; **3**. $|1-\ x|-\ 2x+\ |=$;

4. $\sqrt{3x+}-\sqrt{x+}=$.

З а н я т т я   6 .

СР №13 .   **<u>Варіант 6.</u>**

1. Розв’язати дробово-раціональну нерівність: а) $\dfrac{x^2+\ x}{x+\ }\geq$;

2. Розв’язати нерівність з модулем: а) $|x+\ |<-5$; б) $|x^2-\ 7x-\ |>0$.

3. Розв’язати ірраціональну нерівність: а) $\sqrt{x-}<8$; б) $\sqrt{\dfrac{x+}{4x-}}\geq$.

З а н я т т я   7 - 9 .

СР №14 .   **<u>Варіант 6.</u>**   Розв’язати системи:

а) $\begin{cases} xy-x+y=7, \\ xy+x-y=13 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} x^2y+xy^2=6, \\ xy+x+y=5 \end{cases}$;   в) $\begin{cases} 3x-2y+7z=8, \\ x+y-5z=-3, \\ 2x+3y+3x=8 \end{cases}$

.

З а н я т т я   1 0 - 1 3 .

СР №15 .   **<u>Варіант 6.</u>**

1. Розв’язати показникові рівняння:

а) $16\cdot 0{,}25^{4-\frac{x}{4}}=\ ^{x+}$;   б) $2^{x+}-\ ^{x^2+\ x-}=\ ^{x^2+\ x-}-\ ^{x}$.

2. Розв’язати логарифмічні рівняння:

а) $\lg(-x)-7\lg x=\ \cdot\lg(x-\ )$;   б) $\lg 2x+\ g(x+\ )=\ g(2x-\ )$

СР №16.   **<u>Варіант 6.</u>**

1. Розв’язати показникові нерівності: а) $4^x\geq\ 4$; б) $\left(\dfrac{}{3}\right)^{\frac{x-}{x}}\leq$.

2. Розв’язати логарифмічні нерівності: а) $\log_{\frac{1}{3}}(\ +\ )>-1$;

б) $\log_{0,2}\left(\sqrt{x^2-\ x}\right)<\log_{0,2}(x-\ )$; .

З а н я т т я   1 4 - 1 6 .

СР №17.   **<u>Варіант 6.</u>**   1. Розв’язати тригонометричні рівняння:

а) ctg x · cos x –   ctg x –   cos x + 1 = 0; б) $\cos^2(\pi - x) - 2\cos x = 3$.

2. Розв’язати тригонометричні нерівності:

а) $\dfrac{1}{\mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \le \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;   б) $\sin x \cdot \cos 2x > \cos x \cdot \sin 2x + \frac{1}{2}$.

І, нарешті, наводимо зразок варіанту підсумкової контрольної роботи. ***Бажано, щоб кількість варіантів дорівнювала кількості студентів у групі(щоб індивідуалізувати роботу).***

КР №1 .   **<u>Варіант 25.</u>**

1. Розв’язати рівняння: а) $\dfrac{1}{x^2 - \ x + \ } + \dfrac{2}{x^2 - \ x + \ } = \dfrac{6}{x^2 - \ x + \ }$;

б) $\sqrt{3x + \ } - \sqrt{x + \ } = \ $;   в) $2^{3x} \cdot 7^{x-} = \ ^{x+}$;

г) $\lg^2 x^3 - 10\lg x + 1 = 0$;   д) $ctg\ x \cdot \cos x - ctg\ x - \cos x + \ = \ $.

2. Розв’язати нерівність: а) $2^{x+} - \ ^{x} \succ 13$;

б) $\log_2^2 (\ - \ ) - \log_2 (\ - \ ) + \ \le \ $; в) $\sin 5x \cdot \cos 3x \ge \sin 3x \cdot \cos 5x$;

3. Розв’язати систему: а) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2} \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 3y + 3z = 1 \\ 3x - y - 2z = -1 \end{cases}$.

4. Додаткові завдання:

а) розв’язати рівняння $\lg 3^{2x-1} = \lg 5^{3-\ }$;

б) розв’язати нерівність $\sin x - \sqrt{3}\cos x \le \ $;

в) скласти рівняння для оцінки виконання плану за якістю продукції.

Сорт	Ціна, грн.	За планом		Фактично	
		к-сть, шт.	сума, грн.	к-сть, шт.	сума, грн.
I	5	150	750	200	1000
II	3	200	600	150	450
III	2	100	200	300	600
Разом	x	450	1550	650	2050

г) розв'язати систему $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{xz}{x+z} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{yz}{y+z} = 4 \end{cases}$.

З метою систематизації проведеної викладачем роботи пропонуємо отримані результати фіксувати в "Картах тематичного планування" та "Картах тематичного контролю" [2].

Пропонована методика організації модульного контролю, вважаємо, буде корисною для всіх викладачів математики, які готують спеціалістів для фінансово-економічної сфери. Якщо враховувати, що такі спеціальності введено останнім часом майже у всіх навчальних закладах, то проблема оцінювання і контролю знань є актуальною і вирішення її в практиці роботи фінансово-економічних коледжів дозволить підвищити якість викладання математики викладачами та рівень засвоєння математики студентами.

1. Державний стандарт загальної середньої освіти в Україні: Освітня галузь "Математика"(проект). – К.: Генеза, 1997. – 63 с.
2. В.Швець, І.Дрьомова. Планування і організація тематичного контролю результатів навчання алгебри в основній школі // Математика в школі. – 2002. – №3. – С.25-29.
3. В.Швець, Г.Білянін. Програма з математики для фінансово-економічних коледжів. – Кам'янець-Подільський: Абетка, 2002. – 13 с.

Резюме. В статье изложена методика организации модульного (тематического) контроля результатов обучения студентов математике в финансово-экономических коледжах.

Summary. The article introduces the methods of module testing the results of studying Mathematics at business colledge.

Надійшла до друку 26.06.2002 р.

ПЕРСОНАЛЬНИЙ КОМП'ЮТЕР ЯК ЗАСІБ САМОКОНТРОЛЮ ПРИ ВИВЧЕННІ РОЗДІЛУ “КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ В ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ”

О.Б.Красножон, аспірант,
Бердянський державний педагогічний університет

Одним із провідних напрямків розвитку сучасної системи освіти в Україні є поступова комп'ютеризація усіх її ланок з метою підготовки комп'ютерно-грамотної генерації спеціалістів з усіх галузей народного господарства. Темп розвитку суспільства, його глобальна інформатизація і трансформація, зміна форм господарювання, впровадження сучасних, інтенсивних методів виробництва потребують розробки принципово нових і адекватних часу підходів до підготовки спеціаліста. Невід'ємним компонентом удосконалення системи освіти є вдосконалення і модернізація методик викладання окремих навчальних дисциплін, у тому числі і дисциплін математичного циклу.

Актуальною проблемою стає максимальне ущільнення навчального часу, ефективне його використання, запобігання непродуктивних витрат, більш змістовне насичення. При цьому неприпустимим є порушення об'єктивно існуючих, логічних зв'язків між окремими темами і розділами дисципліни, поверхове їх висвітлення та формалізм у засвоєнні студентами. Навчальна дисципліна є єдиною і неподільною за структурою, засвоєння якої досягається умовним суб'єктивним розбиттям на обмежені змістовно і за обсягом порції, які ми називаємо розділами, темами, параграфами тощо. Прогалина у засвоєнні будь-якої з цих порцій неминуче призведе до спотворення наступних, численних помилок і розчарувань.

Дослідження психологів довели, що усяка помилка має стійкий характер, і позбутися від неї можливо лише при докладанні значних зусиль як з боку викладача, так і з боку студента.

Розв'язанню проблеми інтенсифікації навчання значно сприяє наявність у студента навичок самостійної роботи, проявом яких є його здатність самостійно опрацювати і засвоїти на достатньому рівні запропонований навчальний матеріал. Діючи автономно, без допомоги і втручання викладача, студент повинен мати в арсеналі певні засоби здійснення самоконтролю, результати якого підказували б йому напрямок подальшого руху. Під час цього руху студента постійно супроводжують елементи наукового пошуку, які є безпосередніми чинниками розвитку розумової діяльності, формування і фіксації прийомів її здійснення.

Прийоми розумової діяльності грають важливу роль у навчанні студентів і, зокрема, в розв'язанні проблеми “вчити вчитися”. Розвиток розумових здібностей, у тому числі і розвиток мислення, є компонентом загальної задачі математичної освіти [2, с.18].

Пропонуємо як засіб самоконтролю розглянути персональний комп'ютер. Для студентів фізичних спеціальностей вищого педагогічного навчального закладу викладається курс “Алгебра і геометрія”. Одною з провідних змістових ліній цього курсу є питання зведення квадратичної форми до канонічного виду. Її практична значимість загальновідома: у дво- і тривимірному просторах вона дозволяє встановити вид відповідно кривої і поверхні другого порядку. У курсі “Алгебра і геометрія” розглядаються три методи зведення квадратичної форми до канонічного виду: метод ортогонального перетворення змінних (зведення форми до головних осей), метод Лагранжа і метод Якобі. Усі три методи достатньо громіздкі і потребують виконання значної кількості обчислювальних операцій. Як правило, після розгляду типових прикладів з кожного методу під час аудиторних занять решту завдань включають до розрахункових робіт. У процесі виконання розрахункової роботи студент може перевірити правильність отриманого розв'язку за допомогою комп'ютера і виявити помилки у своїх міркуваннях ще на початковому етапі їх виникнення. Суть усіх трьох методів однакова: знаходиться так званий канонічний базис, у якому квадратична форма має канонічний вид, тобто представляє собою однорідний многочлен (форму) другого степеня без членів з добутком змінних. Про існування такого базису стверджує відповідна теорема. Як відомо із загальної теорії, коефіцієнти квадратичної форми $a_{ij} = a(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, де $a(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ – значення білінійної симетричної форми $a(\vec{x}, \vec{y})$ на базисних векторах $\vec{e}_i$ та $\vec{e}_j$, не є інваріантами при невиродженому лінійному перетворенні змінних. Значення ж самої квадратичної форми $a(\vec{x}, \vec{x})$ на довільному векторі $\vec{x} \in \mathbb{R}_n$ є інваріантом при зазначеному перетворенні змінних і може бути перевірене безпосереднім обчисленням.

Комп'ютер дозволяє швидко обчислити матрицю S квадратичної форми $a(\vec{x}, \vec{x})$ у канонічному базисі $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$ за формулою $S = T^t \cdot A \cdot T$, де A – матриця квадратичної форми $a(\vec{x}, \vec{x})$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, T – матриця переходу від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ до базису $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$ (координати базисних векторів $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$, …, $\vec{e}\,'_n$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ розміщені в стовпцях матриці T). Якщо канонічний базис $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$ знайдений вірно, то матриця S буде діагональною матрицею порядку n. Кількість відмінних від нуля елементів головної діагоналі матриці S дорівнюватиме рангу квадратичної форми $a(\vec{x}, \vec{x})$. Ранг квадратичної форми, як і значення квадратичної форми на довільному векторі $\vec{x} \in \mathbb{R}_n$, є інваріантом при невиродженому лінійному перетворенні змінних.

Для довільної квадратичної форми $a(\vec{x}, \vec{x})$ існує єдина еквівалентна їй квадратична форма $a(\vec{x}, \vec{x})$ нормального виду (з точністю до порядку слідування і позначення змінних). Число додатних і число від'ємних членів у нормальному виді квадратичної форми $a(\vec{x}, \vec{x})$ називаються відповідно додатним і від'ємним індексом форми. Таким чином, нормальний вид квадратичної форми $a(\vec{x}, \vec{x})$ однозначно визначається своїми рангом і сигнатурою, оскільки перший дорівнює сумі додатного і від'ємного індексів, а друга – їх різниці.

Ефективну перевірку отриманого розв'язку можна здійснити за допомогою програмного засобу *Derive*. Детально можливості зазначеного програмного засобу та психолого-педагогічні передумови його ефективного використання у навчальному процесі викладені у виданні [1].

Якщо план розв'язання задачі знайдений, то реалізація його, як правило, не викликає труднощів у студентів. Слабким місцем у вузівській практиці є перевірка і доведення того, що отриманий розв'язок задовольняє вимогам задачі. Практика показує, що навіть старшокурсники не можуть перевірити розв'язання задачі. Трудності здійснення перевірки пов'язані з тим, що часто вона потребує значних витрат часу. Крім того, у методиці викладання математики, у вимогах програм, у підручниках та навчальних посібниках немає єдиного погляду відносно того, якою повинна бути перевірка розв'язку, чи завжди вона обов'язкова. Ми вважаємо, що вищий педагогічний навчальний заклад повинен сформувати у студентів потребу і навички у самоконтролі, у тому числі і при розв'язуванні задач [2, с. 130].

Вищесказане проілюструємо наступними прикладами.

Приклад 1. Знайти ортогональне перетворення, яке зводить квадратичну форму $9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4$, задану в ортонормованому базисі $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$, до канонічного виду. Записати канонічний вид квадратичної форми [3, с. 163].

Розв'язування. Корені характеристичного многочлена симетричної матриці $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ даної квадратичної форми обчислимо за допомогою комп'ютера (рис.1).

```
          [ 9 - λ    0      0      0   ]
          [   0    5 - λ    4     -2   ]
#1:       [   0      4    5 - λ    2   ]
          [   0     -2      2    8 - λ ]

              [ 9 - λ    0      0      0   ]
              [   0    5 - λ    4     -2   ]
#2:   DET     [   0      4    5 - λ    2   ]
              [   0     -2      2    8 - λ ]

       4          3           2
#3:   λ  - 27·λ  + 243·λ  - 729·λ

#4:   [λ = 0, λ = 9]

                  3
#5:   λ·(λ - 9)
```

Рис. 1

Зрозуміло, що серед коренів $\lambda_1 = 0$ і $\lambda_2 = 9$ характеристичного многочлена під #3 є кратні корені. З метою встановлення їх кратності розкладемо характеристичний многочлен на множники (#5). Отже, $\lambda_1 = 0$ – простий корінь, $\lambda_2 = 9$ – корінь кратності 3.

Для кореня $\lambda = 9$ запишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -4x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ -2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x_2 - 2x_3 + x_4 = 0,$$ загальний розв'язок якої

$\left(x_1; x_3 - \frac{1}{2}x_4; x_3; x_4\right)$. Фундаментальну систему розв'язків утворюють вектори $\vec{a}_1 = (1;0;0;0)$, $\vec{a}_2 = (0;1;1;0)$, $\vec{a}_3 = (0;-1;0;2)$.

Для кореня $\lambda = 0$ система лінійних алгебраїчних рівнянь матиме вид:

$$\begin{cases} 9x_1 = 0, \\ 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ -2x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 - x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_3 + 2x_4 = 0, \end{cases}$$ загальний розв'язок

якої $(0; 2x_4; -2x_4; x_4)$. Фундаментальна система розв'язків складається з вектора $\vec{a}_4 = (0;2;-2;1)$.

Ортогоналізуємо систему векторів $\vec{a}_1 = (1;0;0;0)$, $\vec{a}_2 = (0;1;1;0)$, $\vec{a}_3 = (0;-1;0;2)$: $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 = (1;0;0;0)$, $\vec{b}_2 = \vec{a}_2 = (0;1;1;0)$, $\vec{b}_3 = \alpha\vec{b}_1 + \beta\vec{b}_2 + \vec{a}_3$, $\alpha = -\dfrac{(\vec{a}_3,\vec{b}_1)}{(\vec{b}_1,\vec{b}_1)} = 0$, $\beta = -\dfrac{(\vec{a}_3,\vec{b}_2)}{(\vec{b}_2,\vec{b}_2)} = \dfrac{1}{2}$, $\vec{b}_3 = \dfrac{1}{2}\vec{b}_2 + \vec{a}_3 = \left(0;-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};2\right)$. Таким чином, базис $\vec{b}_1 = (1;0;0;0)$, $\vec{b}_2 = (0;1;1;0)$, $\vec{b}_3 = \left(0;-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};2\right)$, $\vec{b}_4 = \vec{a}_4 = (0;2;-2;1)$, є канонічним ортогональним базисом, у якому квадратична форма $9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4$ має канонічний вид. Для відшукання ортогонального лінійного перетворення змінних y_1, y_2, y_3, y_4 виконаємо нормування векторів ортогонального базису $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$, $\vec{b}_4$: $\vec{b}_1{}' = \dfrac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} = \vec{b}_1 = (1;0;0;0)$, $\vec{b}_2{}' = \dfrac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{b}_2 = \left(0;\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, $\vec{b}_3{}' = \dfrac{\vec{b}_3}{|\vec{b}_3|} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}_3 = \left(0;-\dfrac{\sqrt{2}}{6};\dfrac{\sqrt{2}}{6};\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, $\vec{b}_4{}' = \dfrac{\vec{b}_4}{|\vec{b}_4|} = \dfrac{1}{3}\vec{b}_4 = \left(0;\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$. Якщо обчислення виконані вірно, то матриця переходу

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{6} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{6} & -\dfrac{2}{3} \\ 0 & 0 & \dfrac{2\sqrt{2}}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

від ортонормованого базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ до ортонормованого базису $\vec{b}_1{}' = (1;0;0;0)$, $\vec{b}_2{}' = \left(0;\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, $\vec{b}_3{}' = \left(0;-\dfrac{\sqrt{2}}{6};\dfrac{\sqrt{2}}{6};\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, $\vec{b}_4{}' = \left(0;\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$ є ортогональною, і матиме місце рівність $T \cdot T^t = E$. Перевірку рівності $T \cdot T^t = E$ виконаємо за допомогою комп'ютера (рис. 2).

$$\#8:\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\#9:\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Рис. 2

Отже, матриця переходу T – ортогональна. Обчислена матриця T дозволяє записати ортогональне лінійне перетворення змінних y_1, y_2, y_3, y_4:

$x_1 = y_1$, $\quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} y_2 - \frac{\sqrt{2}}{6} y_3 + \frac{2}{3} y_4$, $\quad x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} y_2 + \frac{\sqrt{2}}{6} y_3 - \frac{2}{3} y_4$,

$x_4 = \frac{2\sqrt{2}}{3} y_3 + \frac{1}{3} y_4$. Для того, щоб перевірити остаточний розв'язок, обчислимо матрицю B даної квадратичної форми у базисі $\vec{b}_1{}' = (1;0;0;0)$, $\vec{b}_2{}' = \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $\vec{b}_3{}' = \left(0; -\frac{\sqrt{2}}{6}; \frac{\sqrt{2}}{6}; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, $\vec{b}_4{}' = \left(0; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ за формулою $B = T^t \cdot A \cdot T$. Якщо обчислення виконані вірно, добуток матриць $T^t \cdot A \cdot T$ дорівнюватиме діагональній матриці $B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, у якій елементами головної діагоналі є корені характеристичного многочлена матриці A.

Зауважимо, що розміщення власних значень матриці A даної квадратичної форми (для симетричної матриці вони завжди співпадають з коренями її характеристичного многочлена) на головній діагоналі матриці B визначається порядком слідування векторів канонічного ортонормованого базису.

Добуток матриць $T^t \cdot A \cdot T$ обчислимо за допомогою комп'ютера (рис. 3).

$$\#13: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\#14: \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Рис. 3

Обчислення, виконані комп'ютером, підтвердили правильність отриманого розв'язку. В ортонормованому базисі $\vec{b}_1', \vec{b}_2', \vec{b}_3', \vec{b}_4'$ дана квадратична форма має канонічний вид: $9y_1^2 + 9y_2^2 + 9y_3^2$.

Відповідь: $9y_1^2 + 9y_2^2 + 9y_3^2$, $x_1 = y_1$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} y_2 - \frac{\sqrt{2}}{6} y_3 + \frac{2}{3} y_4$,

$x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} y_2 + \frac{\sqrt{2}}{6} y_3 - \frac{2}{3} y_4$, $x_4 = \frac{2\sqrt{2}}{3} y_3 + \frac{1}{3} y_4$.

Приклад 2. Знайти канонічний вид, до якого зводиться наступна квадратична форма шляхом ортогонального перетворення, не обчислюючи самого цього перетворення:

$3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_3x_4 - 4x_4^2 + 4x_5^2 + 4x_5x_6 + x_6^2$ [3, с. 163].

Розв'язування. Для розв'язання поставленої задачі достатньо знайти власні значення матриці даної квадратичної форми. Вони і будуть коефіцієнтами у канонічному виді розглядуваної квадратичної форми. Обчислення власних значень зручно виконати за допомогою персонального комп'ютера (рис. 4):

$$\#80:\ \mathrm{DET}\begin{bmatrix} 3-\lambda & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\#81:\ \lambda^6 - 5\cdot\lambda^5 - 50\cdot\lambda^4 + 250\cdot\lambda^3 + 625\cdot\lambda^2 - 3125\cdot\lambda$$

$$\#82:\ \lambda\cdot(\lambda + 5)^2\cdot(\lambda - 5)^3$$

Рис. 4

Розклад характеристичного многочлену (#81) на множники (#82) дозволяє визначити його корені з урахуванням їх кратності: $\lambda_1 = 0$ – простий корінь, $\lambda_2 = 5$ – корінь кратності 3, $\lambda_3 = -5$ – корінь кратності 2.

Таким чином, квадратична форма $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_3x_4 - 4x_4^2 + 4x_5^2 + 4x_5x_6 + x_6^2$ деяким ортогональним перетворенням змінних зводиться до наступного канонічного виду: $5y_1^2 + 5y_2^2 + 5y_3^2 - 5y_4^2 - 5y_5^2$.

Відповідь: $5y_1^2 + 5y_2^2 + 5y_3^2 - 5y_4^2 - 5y_5^2$.

Задачі для самостійного розв'язування

Знайти ортогональне перетворення, яке зводить наступні квадратичні форми до канонічного виду. Записати канонічний вид і відповідне ортогональне перетворення (перетворення визначається не однозначно).

1) $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$;

2) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

3) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Відповіді:

1) $9y_1^2 -$ [illegible] $y_2^2 + 8y_3^2$; $\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_2 = -\frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_3 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3. \end{cases}$

2) $3y_1^2 -$ [illegible] $y_2^2 +$ [illegible] y_3^2; $\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 + \frac{\sqrt{6}}{6}y_3, \\ x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 - \frac{\sqrt{6}}{6}y_3, \\ x_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}y_1 - \frac{\sqrt{6}}{3}y_3. \end{cases}$

3) $5y_1^2 -$ [illegible] $-$ [illegible]; $\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 + \frac{\sqrt{6}}{6}y_3, \\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 + \frac{\sqrt{6}}{6}y_3, \\ x_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}y_1 - \frac{\sqrt{6}}{3}y_3. \end{cases}$

1. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів – К.: Техніка, 1997. – 303 с.
2. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математики: Метод. пособие. – К.: Рад. школа, 1983. – 192 с.
3. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М., «Наука», 1967, 384 с.

Резюме. Статья посвящена проблеме использования персонального компьютера в самоконтроле результатов работы студентов при изучении квадратичных форм в евклидовом пространстве.

Summary. Article is devoted to a problem of use of the personal computer in self-checking results of work of students at studying square-law forms in Euclidean space.

Надійшла до друку 05.07.2002 р.

ФОРМУВАННЯ ПРИЙОМІВ ЕВРИСТИЧНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ СТУДЕНТІВ ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕМИ: “ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ” З ВИКОРИСТАННЯМ НАВЧАЛЬНОЇ ПРОГРАМИ LIMIT

Максимова Т.С., асистент,
Автомобільно-дорожній інститут, філіал ДонНТУ, м.Горлівка

На сучасному етапі розвитку, суспільство є зацікавленим у тому, щоб його громадянин, який буде жити та працювати у третьому тисячолітті міг: гнучко адаптуватися в життєвих ситуаціях, які змінюються, самостійно набуваючи необхідні знання та застосовуючи їх на практиці для розв’язання різноманітних проблем; міг самостійно критично мислити, вміти бачити виникаючі у реальному житті труднощі та шукати шляхи їх раціонального подолання, використовуючи сучасні технології; бути здібним генерувати нові ідеї, творчо мислити; вміти грамотно працювати з інформацією, збирати факти, аналізувати, узагальнювати, встановлювати статистичні закономірності, робити висновки.

Чи буде відповідати цим вимогам випускник сучасної школи або вуза значною мірою залежить від результативності впровадження сучасних технологій навчання у навчальний процес. При цьому, на нашу думку не треба відмовлятися від традиційних технологій навчання.

Підчас викладання курсу “Вища математика” для студентів інженерно-технічних спеціальностей, а саме при проведенні практичних занять, раціональне поєднання традиційної форми навчання з використанням комп’ютерних технологій дозволить підвищити ефективність засвоєння учбового матеріалу, навчати студентів у відповідності з їх індивідуальними можливостями та складом характеру. Наприклад, якщо один студент засвоює матеріал з першого разу, то інший, сидячи за комп'ютером може проробити його кілька разів.

Використання комп'ютерних технологій перекладає основну функцію викладача на засоби навчання, тобто на ПК, зміщує акцент з викладача на студентів, які пізнають нові методи, на їх сумісну учбову діяльність. З іншого боку викладач зможе більше приділити уваги питанням творчого розвитку студентів. Можливість організації проміжного, загального, індивідуального контролю з теми, або з усього розділу за допомогою ПК сприятиме формуванню у студентів адекватної самооцінки рівня знань.

В якості навчальних програм доцільно використовувати комп'ютерні програми, які інтегрують в собі функції демонстратора, тренажера та контролера та містять систему задач за визначеним розділом курсу, яка направлена на актуалізацію знань, розвиток вмінь та навичок розв’язання задач, контроль знань студентів.

Нами створена програма такого типу – “Limit”, яка спрямована на формування у студентів знань про різні види невизначеностей та методи їх розкриття, формування навичок знаходження границі функції, розвитку варіативності мислення, творчого мислення, шляхом використання евристичних прийомів.

На відміну від існуючих програмних засобів, які у більшості випадків демонструють теоретичні факти або методи розв’язання задач на конкретних прикладах та контролюють засвоєння матеріалу у тестовій формі (або у вигляді системи задач, запитань з вірними відповідями та вказівками), створена нами програма поступово наближує до відповіді у процесі евристичного діалогу, коли акцентується увага студента на теоретичних фактах, деяких методах розв’язання задач і дається можливість самостійно знайти “свій” метод.

Програма складається з трьох розділів. Перший розділ – це актуалізація знань студентів. Вона містить декілька груп тестових завдань з варіантами відповідей однаковими для кожного питання групи. При виконанні цих завдань, студенту необхідно пригадати відповідні теоретичні факти, які будуть використовуватись при виконанні завдань другої частини програми.

Завдання другої – основної частини охоплюють усі види невизначеностей та методи їх розкриття. Програма на цьому етапі може працювати у декількох режимах, режимі розв’язання (ввід відповіді), режимі допомоги та режимі контролю. Ввівши вірну відповідь студент отримує можливість продивитись інші методи розв’язання задачі. Уразі виникнення труднощів, студент переключає програму у режим допомоги, коли на екрані з’являються назви підказок, свої для кожного завдання, він може перейти до однієї з них. Підказки містять відповідний теоретичний матеріал та систему питань, мета яких допомогти навчитися використовувати теоретичний матеріал на практиці, звернути увагу на умови його застосування; допомогти підійти до розв’язку завдання з різних боків та дістати відповідь самостійно. А головне навчитися ставити аналогічні запитання підчас самостійної роботи вдома та на занятті.

Це надасть можливість визначити загальні питання – пункти, відповідь на які дасть змогу знайти границю функції, тобто можна сказати “скласти” щось подібне до правила – орієнтира.

У режимі контролю роботи програми студент виконує тестові завдання та отримує оцінку своїх знань. Уразі незадовільного результату він може працювати з програмою далі та пройти контрольний тест ще раз.

Методика організації практичних занять за допомогою цієї комп'ютерної програми, яка пропонується нами, передбачає проведення двох занять за темами: “Методи розкриття невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $\infty \cdot 0$ на прикладі границь дробово-раціональних функцій, функцій, які містять ірраціональність”, “Застосування першої та другої важливої границь при обчисленні границь функцій. Інші види невизначеностей. Порівняння нескінченно малих величин”. Вона враховує те, що поняття границі функції є фундаментальним поняттям математичного аналізу. Такі поняття як неперервність, похідна, інтеграл ґрунтуються на цьому понятті. Дослідження поведінки функцій та побудова їх графіків відбувається теж за допомогою границь. При цьому особливу увагу слід приділити формуванню у студентів понять нескінченно малої та нескінченно великої величини, формуванню вміння застосовувати їх властивості при обчисленні границь, формуванню вміння застосовувати графіки елементарних функцій при обчисленні границь. А вміння робити тотожні перетворення при розкритті невизначеностей слід формувати підчас самостійної роботи студентів.

На першому практичному занятті актуалізація знань студентів може включати завдання на дослідження поведінки деяких елементарних функцій ($y = \frac{1}{x}$, $y = x^2$, $y = x^3$), знаходження їх границь при $x \to$ $x \to$ $x \to$ і т. ін. та виконання комп'ютерних тестових завдань:

1). Визначте, які з функцій є нескінченно малою величиною, нескінченно великою величиною при $x \to$ (x →

$$1.\ y = \frac{1}{(1-x)^2},\ x \to \qquad 2.\ y = x^3,\ x \to -\infty \qquad 3.\ y = 000000000,\ x \to$$

$$4.\ y = e^{2x},\ x \to -\infty \qquad 5.\ y = x^{100},\ x \to \qquad 6.\ y = \frac{1}{3^{-x}},\ x \to \infty$$

$$7.\ y = x,\ x \to \qquad 8.\ y = \sin x,\ x \to$$

Оберіть відповідний варіант відповіді:

А. Нескінченно велика величина В. Нескінченно мала величина С. Не відноситься ні до нескінченно малих, ні до нескінченно великих величин.

2). Визначте, які з границь є скінченні, які нескінченні, які не існують:

$$1.\ \lim_{x\to} \operatorname{arctg} x \qquad 2.\ \lim_{x\to} \frac{1}{8x} \qquad 3.\ \lim_{x\to\infty} \sqrt{10x} \qquad 4.\ \lim_{x\to} \sin\frac{1}{x}$$

$$5.\ \lim_{x\to} \frac{\sin x}{x} \qquad 6.\ \lim_{x\to} \cos x \qquad 7.\ \lim_{x\to} (1+\frac{1}{x})^x.$$

Оберіть відповідь із наведених:

А. Скінчена В. Нескінченна С. Не існує .

Використання евристик при розв’язанні цих задач (аналогія, вар’ювання задачі, розв’язання на картинці), оціночна діяльність буде сприяти формуванню навичок проведення евристичної діяльності студентами. Перед їх виконанням викладачем можуть бути зроблені рекомендації щодо використання евристик: “Побудуйте графіки відомих функцій...”, “Пригадайте схожі ситуації...”, “Спробуйте змінити умову до відомої ситуації. Як це вплине на відповідь?” і т. ін.

Розвиток навичок розкриття невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ відбувається при розв’язанні завдань [1]:

1). $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-\ }{6x^2-\ x+\ }$, коли потрібно визначити за рахунок чого виникає невизначеність та “позбавитися” від причини.

2). $\lim\limits_{x\to}\frac{x^3-\ ^2-\ +}{x^3+\ ^2-\ -}$, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{x-1}\right)$ за комп'ютером.

Після цього можна запропонувати студентам скласти правило – орієнтир. В даному випадку воно не буде точним покроковим приписанням, яке приведе до відповіді, а буде представляти собою рекомендації щодо відшукання метода розв`язання, використання відомого метода дещо у іншій ситуації. Його можна скласти таким чином:

1. $\left[\frac{0}{0}\right]$ “Виділити” в чисельнику та знаменнику множник, який прямує до 0:

– розкладанням на множники, групуванням, діленням многочлена на многочлен, застосуванням формул скороченого множення і т.ін;

– .... (пропуски заповнюються поступово при вивченні теми).

2. $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ..... .

3. $[\infty \cdot 0]$, ... намагатися звести до невизначеностей вигляду $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

У випадку невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ студентам можна запропонувати виконати завдання – $\lim\limits_{x\to} \frac{(x+\ )(x+\ )(x+\ )}{2x^4+\ -\ }$ за допомогою комп’ютера (Домашнє завдання повинно містити задачі, у яких степінь чисельника функції більша (дорівнює) за степінь знаменника.). Після його виконання треба перейти до розглядання вже “знайомих” невизначеностей на прикладі функцій, які містять ірраціональність та запропонувати студентам комп’ютерне завдання: $\lim\limits_{p\to} \frac{\sqrt[3]{2p-\ }-\sqrt{3p-\ }}{\sqrt{4p-\ }-\ }$.

Завдання для самостійної роботи вдома повинні бути направлені на закріплення отриманих знань та формування вміння застосовувати їх у нових ситуаціях (комбінувати прийоми і т.ін.) та заповнення пропусків у правилі – орієнтирі.

Друге практичне заняття можна повністю присвятити роботі з комп’ютерною програмою. На етапі актуалізації знань розглядається завдання:

Знайти границі:

1. $\lim\limits_{x\to} \frac{ax}{\sin ax}$ 2. $\lim\limits_{x\to} \frac{\operatorname{tg} ax}{ax}$ 3. $\lim\limits_{x\to} \frac{\sin ax}{x}$ 4. $\lim\limits_{x\to} \frac{x}{\operatorname{tg} ax}$

5. $\lim\limits_{x\to} (1+\frac{a}{x})^x$ 6. $\lim\limits_{x\to} (1+\ x)^{\frac{1}{x}}$ 7. $\lim\limits_{x\to} \frac{\ln(1+\ x)}{x}$ 8. $\lim\limits_{x\to} \frac{a^x-\ }{x}$.

Оберіть відповідь із наведених:

A. a B. $\frac{1}{a}$ C. e^a D. ln a E. 0 F. 1 G. $\frac{1}{\ln a}$ I. Інша відповідь.

(Як правило базові границі розглядаються на лекції.)

Прийоми розкриття невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$, $[0\cdot\infty]$, $[1^{\infty}]$ з використанням базових границь можуть бути розглянуті при знаходженні границь: $\lim\limits_{x\to} \frac{x^2}{1-\cos kx}$, $\lim\limits_{x\to} x(\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}\, x)$, $\lim\limits_{x\to}\left(\frac{x+}{x+}\right)^{x+}$, $\lim\limits_{x\to}(1+\mathrm{tg}\, x)^{\frac{3}{x}}$. Виконавши завдання студенти доповнюють правило-орієнтир, відмічаючи, що за рахунок тотожних перетворень, заміни, у випадку невизначеності, $\left[\frac{0}{0}\right]$ можна звести границю функції до однієї з відомих границь; невизначеність $[0\cdot\infty]$ потрібно зводити до невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; при знаходженні границі функції $f(x)^{g(x)}$, у випадку невизначеності $[1^{\infty}]$, загальним прийомом є представлення основи як $f(x) = 1 + f(x) - 1$, а показника як $g(x) = \frac{1}{1+f(x)-}\cdot(1+f(x)-)\cdot g(x)$ та використання другої важливої границі.

Порівняння нескінченно малих розглядається як один з методів розв'язання задач, які студенти виконують на цьому занятті.

Треба відмітити, що програма містить не тільки завдання наведені вище, що надасть можливість сильному студенту розглянути більш цікаві для нього завдання, звернути увагу на інші методи розв'язання, слабкий студент зможе у оптимальному для нього темпі розв'язувати задачі та продовжувати працювати з програмою самостійно після заняття. При такому підході студенти самостійно здобувають знання, оволодівають новими прийомами, тобто самостійно здійснюють пізнання.

Таким чином, дана комп'ютерна програма може бути розглянута як евристико-дидактична конструкція, яка сприятиме оволодінню студентами прийомів евристичної діяльності. Організація процесу навчання за допомогою цієї програми сприятиме формуванню дослідницьких вмінь, вміння використовувати матеріал у незнайомих ситуаціях, генерувати ідеї, тобто творчо мислити, що є важливим для фахівця інженерно-технічної спеціальності.

1. Вища математика: Збірник задач: Навч. Посібник / За ред. В.П.Дубовика, І.І.Юрика. – К.: А.С.К., 2001. – 480 с.

Резюме. В работе рассматривается обучающая программа, способствующая формированию приёмов эвристической деятельности у студентов; предложена методика организации практических занятий с её помощью.

Summary. The article considers the educational computer program helps to form the methods of evristical activity of students. The methodic of its using is shown.

Надійшла до друку 04.07.2002 р.

ВИКОРИСТАННЯ ФІЗИЧНИХ І ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗАКРІПЛЕННЯ ЗНАНЬ З ТЕМИ “КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА” ПРИ ВИКЛАДАННІ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН У ВИЩИХ ЗАКЛАДАХ ОСВІТИ І-ІІ РІВНІВ АКРЕДИТАЦІЇ

О.Л.Лещинський, канд. фіз.-мат. наук, викладач,
В.В.Тихонова, викладач,
Промислово-економічний коледж
Національного авіаційного університету, м.Київ
О.П.Томащук, канд. пед. наук, викладач,
Міжрегіональна Академія управління персоналом, м.Київ

Хоч їх і називають уявними, але від цього вони не перестають бути корисними і навіть необхідними для аналітичного вираження реальних величин.

Г.Лейбніц

У вищих закладах освіти І і ІІ-го рівнів акредитації викладання теми “Комплексні числа” пов’язане із розв’язанням низки проблем. Насамперед потрібно визначити, у межах якого курсу розглядати цю тему – “Математика” чи “Вища математика”. Інша проблема – яке місце в програмі відповідного курсу вона повинна займати.

На нашу думку, тему “Комплексні числа” доцільно викласти у межах курсу “Вища математика”. Адже він передбачає вивчення розділу “Числові множини”. І тому природно розгляд теми “Множина дійсних чисел” завершити викладанням матеріалу, пов’язаного із комплексними числами. Це буде узагальненням поняття числа.

Іншою проблемою при викладанні матеріалу, пов’язаного з комплексними числами, є підбір вправ і задач на його засвоєння і застосування. Для її розв’язання доцільно залучити міжпредметні зв’язки, зокрема між математикою і фізикою та електротехнікою. Використання задач із фізики та електротехніки на етапі вивчення комплексних чисел дозволить не лише добре засвоїти студентами основні поняття теми “Комплексні числа”, а й сприятиме формуванню у них позитивних мотивів навчання.

Сказане проілюструємо на прикладі використання комплексних чисел при розв’язуванні задач на розрахунок ланцюгів змінного струму. Стислий конспект лекції на вказану тему може мати такий вигляд.

Тема: Використання теорії комплексних чисел у задачах із фізики і електротехніки.

Дидактична мета: Спеціальним підбором задач теоретичного і практичного характеру проілюструвати застосування комплексних чисел у фізиці і електротехніці.

Виховна мета: Виховувати у студентів науково-обгрунтований погляд на факти і теоретичні положення вищої математики та електротехніки.

Заняття доцільно розпочати із проведення актуалізації, зазначивши, що наприкінці XIX століття комплексні числа знайшли своє застосування при розрахунку ланцюгів змінного струму. Для розрахунку ланцюгів постійного струму на той час вже існували зручні і прості способи, які спиралися на закон Ома і закони Кірхгофа. Це дозволяло за допомогою засобів елементарної алгебри розв’язувати різноманітні електротехнічні задачі. Багато таких задач вже тоді входили і зараз входять у підручники фізики та електротехніки.

Кінець XIX століття ознаменувався також дослідженням змінного струму. Вчені досліджували змінний синусоїдальний струм. Особливістю такого струму є те, що сила струму I у кожній з окремих ділянок ланцюга змінюється за синусоїдальним законом, тобто описується для довільного моменту часу t формулою вигляду

$$I = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi),$$

де I_m – постійне додатне число (амплітуда струму), ω – циклічна частота, φ – початкова фаза.

Електрорушійна сила (ЕРС) струму також змінюється за синусоїдальним законом, тобто описується формулою

$$E = E_m \cdot \sin(\omega t + \varphi),$$

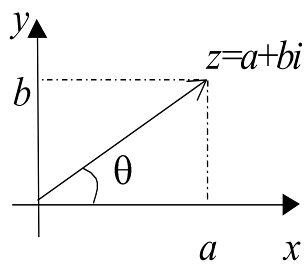
де E_m – постійне додатне число (амплітуда ЕРС), ω – циклічна частота, φ – початкова фаза.

У 1893 році американський електротехнік Чарльз Протеус Штейнмец (1865-1920) запропонував і детально розробив спосіб розв’язування задач на розрахунок ланцюгів змінного синусоїдального струму. Цей метод ґрунтується на застосуванні комплексних чисел і називається *методом комплексних амплітуд* або *символічним методом*.

Наступний фрагмент заняття необхідно присвятити ознайомленню студентів із поняттями **комплексної амплітуди і комплексу струму (ЕРС струму)**.

Тригонометрична форма комплексного числа $z=a+bi$ має вигляд

$$z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$$



(оскільки в електротехніці символ “*i*” іноді використовують для позначення силу струму, то надалі уявну одиницю *i* будемо позначати символом “*j*”).

$$|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2}.$$

Нехай сила струму I в ланцюгу змінюється за синусоїдальним законом, тобто описується формулою

$$I = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi),$$

де I_m – амплітуда струму, ω – циклічна частота, φ – початкова фаза.

Записавши тригонометричну форму комплексного числа у вигляді

$$z = |z| \cdot \cos\theta + j \cdot |z| \cdot \sin\theta,$$

одержимо $\operatorname{Re} z = |z| \cdot \cos\theta$, $\operatorname{Im} z = |z| \cdot \sin\theta$.

Можна побачити “формальну симетрію” у виразах

$$I = I_m \cdot \sin\boxed{(\omega t + \varphi)} \quad \text{і} \quad \operatorname{Im} z = |z| \cdot \sin\boxed{\theta},$$

тобто величину I можна вважати уявною частиною деякого комплексного числа $\dot{I} = I_m \cdot \left(\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)\right)$ або в показниковій формі $\dot{I} = I_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$.

$\dot{I}$ – величина (сила струму), що приймає комплексні значення.

Таким чином,

$$I = \operatorname{Im} \dot{I} = \operatorname{Im} \left(I_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}\right).$$

Величину $\dot{I}$ називають *комплексним струмом*, або *комплексом струму*.

Розглянемо показникову форму $\dot{I}$:

$$\dot{I} = I_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = I_m \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi}.$$

Позначимо добуток $I_m \cdot e^{j\varphi} = \dot{I}_m$. Його називають *комплексною амплітудою струму*.

Тоді має місце формула

$$\dot{I} = \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}.$$

Аналогічно мають місце формули для ЕРС змінного струму:

$E = E_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$,

$\dot{E} = E_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$ – комплекс ЕРС,

$\dot{E}_m = E_m \cdot e^{j\varphi}$ – комплексна амплітуда ЕРС,

$$\dot{E} = \dot{E}_m \cdot e^{j\omega t}.$$

Далі слід розглянути задачі на засвоєння студентами понять комплекс і комплексна амплітуда струму (ЕРС струму).

Задача 1. У ланцюгу тече змінний струм, величина якого I (в амперах) змінюється за синусоїдальним законом $I = 20\sin\left(100\,t + \frac{\pi}{2}\right)$. Знайти комплексну амплітуду і комплекс струму?

Розв'язання. $I_m = 20\,A$, ω=100 c^{-1}, φ=$\frac{\pi}{2}$.

Комплексна амплітуда струму:

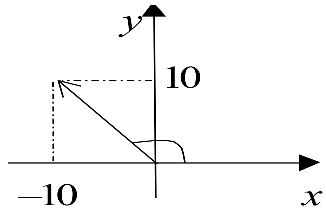
$$\dot{I}_m = 20e^{j\frac{\pi}{2}} = 20\left(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}\right) = 20j.$$

Комплекс струму:

$$\dot{I} = 20j \cdot e^{j100t}.$$

Задача 2. Комплексна амплітуда $\dot{E}_m$ ЕРС джерела змінного струму дорівнює –10+10*j*. Циклічна частота зміни ЕРС – ω=50 c^{-1}. Записати формулу для знаходження ЕРС в довільний момент часу.

Розв'язання. Для запису комплексної амплітуди $\dot{E}_m$ в показниковій формі знайдемо її модуль і аргумент:



$$\left|\dot{E}_m\right| = \sqrt{(-10)^2 + 10^2} = 10\sqrt{2},$$

$$\arg\dot{E}_m = \frac{3\pi}{4}, \quad \dot{E}_m = 10\sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}},$$

$$\dot{E} = \dot{E}_m \cdot e^{j\omega t} = 10\sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}} \cdot e^{j50t} = 10\sqrt{2}e^{j\left(50t+\frac{3\pi}{4}\right)}.$$

Вибираючи в $\dot{E}$ уявну частину, одержимо:

$$E = 10\sqrt{2}\sin\left(50\,t + \frac{3\pi}{4}\right).$$

Доцільно буде також розглянути матеріал, пов'язаний із **додаванням**

синусоїдальних струмів. Нехай в деякому ланцюгу змінного струму є дві ланки, які з'єднані паралельно. Нехай по ним проходять струми $I'(t)$ і $I'(t)$ однієї частоти ω. Тоді при об'єднанні цих ланок в один ланцюг по ньому буде проходити струм $I = I' + I'$. Цей факт можна вважати експериментально встановленим. У цій ситуації прийнято говорити, що відбулося додавання струмів. Що відбувається при цьому з комплексними амплітудами?

Нехай струми I', I' і I мають комплексні амплітуди відповідно $\dot{I}'_{...}$, $\dot{I}'_{...}$ і $\dot{I}_m$. Тоді

$$I = I' + I' = \mathrm{Im}\,\dot{I}' + \mathrm{Im}\,\dot{I}' = \mathrm{Im}\left(\dot{I}' + \dot{I}'\right) = \mathrm{Im}\left(\dot{I}'_{...} e^{j\omega t} + \dot{I}'_{...} e^{j\omega t}\right) = \mathrm{Im}\left(\left(\dot{I}'_{...} + \dot{I}'_{...}\right) e^{j\omega t}\right).$$

Очевидно, що I – періодична функція від часу t з частотою ω і

$$\dot{I}_m = \dot{I}'_{...} + \dot{I}'_{...}.$$

Отже, хоч при додаванні синусоїдальних струмів однієї і тієї ж частоти їх амплітуди, взагалі кажучи, не додаються, їх комплексні амплітуди додаються.

Задача 3. Знайти суму сил струмів однієї і тієї ж циклічної частоти $\omega = 50\ c^{-1}$, якщо відомо, що вони мають в амперах такі комплексні амплітуди: $\dot{I}'_{...} = 15 + 20j$, $\dot{I}'_{...} = 25 - 60j$.

Розв'язання. 1. Комплексна амплітуда сумарного струму:

$$\dot{I}_m = \dot{I}'_{...} + \dot{I}'_{...} = 40 - 40j = 40\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}.$$

2. $\dot{I} = 40\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j50t} = 40\sqrt{2}e^{j\left(50t - \frac{\pi}{4}\right)}$, $\quad I = \mathrm{Im}\,\dot{I} = 40\sqrt{2}\sin\left(50\,t - \frac{\pi}{4}\right)$.

Далі можна ознайомити студентів з поняттям **комплексного опору**. Нехай розглядається деякий ланцюг, який підключений до генератора з ЕРС, що змінюється за синусоїдальним законом із частотою ω. У цьому ланцюгу можуть бути активні опори, індуктивності, ємності. Згідно з Штейнмецом, кожній індуктивності величиною L поставлено у відповідність суто уявне число $R_L = j\omega L$, яке домовимося називати *комплексним* *опором котушки*, а кожній ємності величиною C – число $R_C = -\frac{1}{\omega} j$, яке називатимемо *комплексним опором конденсатора*. Крім того, якщо в ланцюгу є активний опір величиною R, то поставимо йому у відповідність дійсне число R, яке назвемо *комплексним опором активного опору*.

Якщо ланцюг, складений з *послідовно* з'єднаних реактивних опорів (резисторів, котушок, конденсаторів), то *комплексним опором цього ланцюга* називають комплексне число Z, що дорівнює сумі комплексних опорів складових елементів. Число Y, обернене до числа Z ($Y = \frac{1}{Z}$), при цьому називають *комплексною провідністю ланцюга*, величину $|Z|$ – *повним опором ланцюга*. Має місце таке співвідношення:

$$|Z| = |R + R_L + R_C| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Задача 4. У ланцюг послідовно увімкнені реостат з опором R=20 *Ом*, конденсатор ємністю C=0,000127 *Ф* і котушка з індуктивністю L=0,1275 *Гн*. Ланцюг підключили до генератора, що дає синусоїдальну ЕРС з частотою f=50 *Гц*. Обчислити комплексний і повний опори ланцюга.

Розв'язання. $\omega = 2\pi f \approx 314$ c^{-1}. Комплексний опір обчислимо за формулою

$$Z = R + R_L + R_C,$$

де $R_L = j\omega \approx 314 \cdot 0{,}1275 j$, $R_C = -\frac{1}{\omega} j \approx -\frac{1}{314} \cdot \frac{1}{0{,}000127} j$.

Отже, $Z = 20 + j\left(314 \cdot 0{,}1275 - \frac{1}{314} \cdot \frac{1}{0{,}000127}\right) \approx 20 + 15j$ *Ом*.

Повний опір ланцюга знаходимо за формулою

$$|Z| = |R + R_L + R_C| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \approx \sqrt{20^2 + 5^2} = 25 \text{ Ом}.$$

Нехай в ланцюг змінного струму *паралельно* увімкнені два елемента, що мають комплексні опори відповідно Z_1 і Z_2. Комплексним опором такого ланцюга домовимося називати число Z, яке визначається рівністю $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$, звідки $Z = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$.

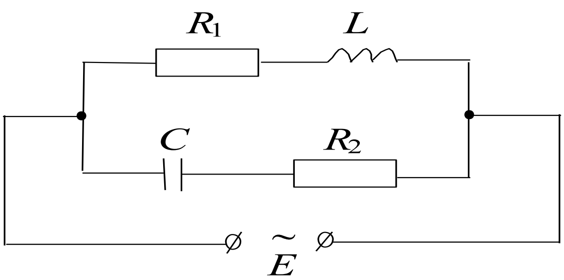
Через Y, Y_1, Y_2 позначимо відповідно комплексну провідність всього ланцюга, комплексну провідність першого і другого елементів. Тоді $Y=Y_1+Y_2$.

Задача 5. Ланцюг складається з двох паралельних ланок і має такі параметри: R_1=19,7 *Ом*, L=0,031 *Гн*, R_2=44 Ом, C=0,000096 *Ф*. Визначити комплексні опори кожної з ланок і повний опір всього ланцюга, якщо по ньому проходить струм з частотою f=50 *Гц*.

Розв'язання. $\omega=2\pi f\approx 314\ c^{-1}$; $R_L = j\omega L \approx 9{,}8j$, $R_C = -\frac{1}{\omega C} j \approx -33j$.

Знайдемо комплексні опори Z_1 і Z_2 першої і другої ланок:

$$Z_1= R_1+ R_L =19{,}7+9{,}8j, \qquad Z_2= R_2+ R_C =44-33j.$$



Комплексний опір всього ланцюга:

$$Z = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(19{,}7 + 9{,}8j) \cdot (44 - 33j)}{63{,}7 - 23{,}2j} \approx$$

$$\approx 15{,}4-9{,}04j.$$

Повний опір всього ланцюга:

$$|Z|=\sqrt{15{,}4^2 + 9{,}04^2} \approx 17{,}9\ Ом.$$

У домашнє завдання також потрібно включити задачі подібної тематики.

Задача 1. Запишіть у показниковій і алгебраїчній формах вираз для комплексної амплітуди струму, якщо $I_m = 5\ A$, φ=30°.

Задача 2. Комплексна амплітуда струму $\dot{I}_m=15e^{-j\frac{\pi}{9}}$. Запишіть миттєве значення сили цього струму в момент часу t, якщо його частота дорівнює ω.

Задача 3. Котушка має активний опір R=40 *Ом* і індуктивність L=0,01

Гн. Визначити повний опір котушки, якщо по ній проходить змінний струм з частотою f=100 *Гц*.

1. Балк М.Б. и др. Реальные применения мнимых чисел. – К.: Рад. шк., 1988. – 259 с.
2. Яглом Ф.М. Комплексные числа и их применения в геометрии. – М.: Физматгиз, 1963. – 192 с.

Резюме. В статье рассматриваются методы использования физических и электротехнических задач для мотивации и закрепления знаний студентов по теме "Комплексные числа".

Summary. The article deals with methods of using physical and electro-technical tasks for students' skills motivation and consolidation concerning the theme "Complex numbers".

Надійшла до друку 03.09.2002 р.

ЗМІСТ

ДО ВІДОМОСТІ АВТОРІВ
В ЗБІРНИКУ ПУБЛІКУЮТЬСЯ ОРИГІНАЛЬНІ РОБОТИ З ДИДАКТИКИ МАТЕМАТИКИ, РОЗВИВАЮЧОГО НАВЧАННЯ, ЕВРИСТИКИ, ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ІДЕЙ ТА МЕТОДІВ У НАВЧАННІ.
МОВА ПУБЛІКАЦІЇ – УКРАЇНСЬКА, РОСІЙСЬКА, АНГЛІЙСЬКА.

Редколегія зберігає за собою право відхиляти роботи без обговорення та рецензування.

Витрати на публікацію сплачуються автором.

Об`єм статті від 6 до 10 сторінок.

Бажано раніше узгоджувати назву та об`єм роботи, надіслав її коротку анотацію.

Для публікації необхідно представити рекомендацію кафедри та відгук члена редакційної ради.

Автор надає:

1) 1 екземпляр статті (яку набрано у WORD, на білім папері розміром 297х210 мм, підготовленої для репродуктування на резографі (чіткий та контрасний друк);
2) дискету з файлом своєї роботи.

Формули та малюнки теж набираються на комп`ютері. Малюнки розміщуються усередині тексту (не окремо!).

Поля: ліворуч - 25 мм, праворуч - 25 мм, зверху - 25 мм, знизу - 25 мм.

Номери сторінок не проставляти !

Через 1 інтервал друкується: назва роботи великими жирними літерами симетрично, далі - пропуск рядка і ініціали та прізвище автора (авторів), науковий ступень, вчене звання – курсивом, рядковими літерами, з симетричним розміщенням, потім на другому рядку місце роботи та адреса для спілкування (адреса вказується за бажанням авторів)- курсивом, рядковими літерами. Після цього - пропуск рядка і йде початок тексту роботи. Текст друкується через 1,5 інтервали. Пропуск спочатку абзацу - 7 літер. Посилання на літературу розташовуються номерами у квадратних дужках. Список літератури йде у кінці роботи після пропуску рядка через 1 інтервал, без додаткових назв. Оформлення бібліографії стандартне (ГОСТ 7.5-88). Після статті та списку літератури (якщо він є) треба додати резюме на двох мовах, відмінних від тієї, котрою написано статтю через 1 інтервал.

Екземпляр рукопису повинен бути підписаний автором. На звороті останнього аркуша автор повинен вказати своє прізвище, ім`я по батькові повністю, науковий ступень, вчене звання, місце роботи та посаду, наукового керівника (якщо він є), домашню та робочу адресу з індексом, домашній та робочий телефони, fax, E-mail (якщо є).

При пересиланні рукопис та дискету повинно розмістити не згинаючи поміж двома аркушами картону або покласти у папку.

МОЖЛИВЕ СПІЛКУВАННЯ ЕЛЕКТРОННОЮ ПОШТОЮ

РОБОТИ, ЯКІ НЕ ВІДПОВІДАЮТЬ ВКАЗАНИМ ВИМОГАМ, ПУБЛІКУВАТИСЯ НЕ БУДУТЬ!

Роботи надсилати за адресою: пр.Миру 29/63, Донецьк-15, 83015, Україна, Хорольській Олені Вікторівні.

Fax: (38)–(0622)-927112 (Для Скафи О.І.).

E-mail: skafa@univ.donetsk.ua

E-mail: horol@bio.donetsk.ua

Контактні телефони:

Науковий редактор - доц. Скафа Олена Іванівна

Тел.:(38)-(0622)-919244 (р.), (38)-(0622)-554429 (д.), код для СНД (0622).

Відповідальний секретар - ст.викл. Хорольська Олена Вікторівна

Тел.:(38)-(0622)-992375 (р.), (38)-(062)-3378985 (д.).

У ВАК України

Постановою Президії ВАК України від 10.11.99 №3-05 11 затверджено перелік наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися основні результати дисертаційних робіт. До розділу "Педагогічні науки" включено наш збірник наукових праць "Дидактика математики: проблеми і дослідження" (Бюлетень ВАК України, 1999, №6), який є продовженням видання "Евристика та дидактика точних наук" міжнародного збірника наукових робіт. Нумерація випусків продовжується.

Наукове видання

**ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ: ПРОБЛЕМИ І ДОСЛІДЖЕННЯ
МІЖНАРОДНИЙ ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ**

Випуск 18

Рекомендовано до друку вченою радою Донецького національного університету 29.11.2002 (протокол №10).

Редакція збірника:

Науковий редактор – канд. пед. наук, доц. Скафа Олена Іванівна.
Тел.: (38)-(0622)-919244 (р.) (38)-(0622)-554429 (д.), код для СНД (0622).
E-mail: skafa@univ.donetsk.ua

Відповідальний секретар – ст. викл. Хорольська Олена Вікторівна
Тел.: (38)-(0622)-992375 (р.), (38)-(062)-3378985 (д.).
E-mail: Horol@bio.donetsk.ua

Адреса редакції збірника: Кафедра вищої математики та методики викладання математики. Донецький національний університет, вул. Університетська, 24, Донецьк, 83055, Україна

Узгоджені матеріали надсилати за адресою:
Хорольській О.В., пр.Миру, 29/63, Донецьк-15, 83015, Україна

Підписано до друку 04.12.2002 р. Формат 60х90/16. Папір типографський. Друк Офсетний. Умовн. друк. арк. 10. Тираж 300 прим. Замовлення № 592

Видавництво Донецької фірми наукоємних технологій НАН України
(Фірми ТЕАН)
Україна, 83050, Донецьк, а/я 435. E-mail: tean@an.dn.ua
Надруковано: Центр інформаційних комп’ютерних технологій
Донецького національного університету,
83055, м.Донецьк, вул. Університетська, 24