

ISSN 2415-7058

Вестник Донецкого национального университета



НАУЧНЫЙ
ЖУРНАЛ

*Основан
в 1997 году*

Серия А
**Естественные
науки**

2 / 2019

Редакционная коллегия журнала «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки»

Главный редактор — д-р физ.-мат. наук, проф. **С.В. Беспалова**

Зам. главного редактора — д-р биол. наук, проф. **О.С. Горецкий**

Ответственный секретарь: канд. физ.-мат. наук **М.В. Фоменко**

Члены редколлегии: д-р хим. наук, проф. **А.С. Алемасова**; д-р экон. наук., проф. **В.Н. Андриенко**; д-р техн. наук, проф. **В.В. Белоусов**; доктор философии, профессор **С.В. Белый** (Тройский университет, США); д-р физ.-мат. наук, проф. **Б.В. Бондарев**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Вал.В. Волчков**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Вит.В. Волчков**; д-р биол. наук, проф. **А.З. Глухов**; д-р физ.-мат. наук, проф. **А.С. Гольцев**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Г.В. Горр**; д-р техн. наук, проф. **В.В. Данилов**; д-р физ.-мат. наук, проф., акад. НАН Беларуси **С.А. Жданок** (Беларусь); д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**; д-р физ.-мат. наук, доц. **С.А. Мельник** (Крымский федеральный университет, РФ); д-р физ.-мат. наук, проф. **А.Г. Милославский**; д-р хим. наук, проф. **В.М. Михальчук**; д-р физ.-мат. наук, доц. **И.А. Моисеенко**; д-р техн. наук, проф. **Ф.В. Недопекин**; д-р биол. наук, проф. **В.И. Соболев** (Крымский федеральный университет, РФ); д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**; д-р физ.-мат. наук, д-р техн. наук, проф. **В.К. Толстых**; д-р хим. наук, проф. **Т.Г. Тюрина**; д-р биол. наук, проф. **Н.Н. Ярошенко**.

The Editorial Board of the journal “Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences”

The Editor-in-Chief — Dr. of phys. and math., prof. **S.V. Bespalova**

The Deputy of the Editor-in-Chief — Dr. of biol., prof. **O.S. Goretskii**

Executive Secretary: Cand. of phys. and math. **M.V. Fomenko**

The Members of the Editorial Board: Dr. of chem., prof. **A.S. Alemasova**; Dr. of econ., prof. **V.N. Andrienko**; Dr. of tech., prof. **V.V. Belousov**; Dr. of Philosophy, prof. **S.V. Belyi** (Troy University, USA); Dr. of phys. and math., prof. **B.V. Bondarev**; Dr. of phys. and math., prof. **Val.V. Volchkov**; Dr. of phys. and math., prof. **Vit.V. Volchkov**; Dr. of biol., prof. **A.Z. Glukhov**; Dr. of phys. and math., prof. **A.S. Goltsev**; Dr. of phys. and math., prof. **G.V. Gorrr**; Dr. of tech., prof. **V.V. Danilov**; Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Zhdanok** (Belarus); Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**; Dr. of phys. and math., docent **S.A. Melnik** (Crimean Federal University, Russian Federation); Dr. of phys. and math., prof. **A.G. Miloslavsky**; Dr. of chem., prof. **V.M. Mikhal'chuk**; Dr. of phys. and math., docent **I.A. Moiseyenko**; Dr. of tech., prof. **F.V. Nedopiokin**; Dr. of biol., prof. **V.I. Sobolev** (Crimean Federal University, Russian Federation); Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**; Dr. of phys. and math., Dr. of tech., prof. **V.K. Tolstykh**; Dr. of chem., prof. **T.G. Tyurina**; Dr. of biol., prof. **N.N. Jaroshenko**.

Адрес редакции: ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

ул. Университетская, 24, г. Донецк, 83001

Тел: (062) 302-92-56, 302-09-92

E-mail: vestnikdonnu_a@mail.ru **URL:** <http://donnu.ru/vestnikA>

Научный журнал «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки» включен в **Перечень** рецензируемых научных изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (приказы МОН ДНР № 1134 от 01.11.2016 г. и № 1468 от 26.12.2017 г.) по следующим группам научных специальностей: 01.01.00 — Математика; 01.02.00 — Механика; 01.04.00 — Физика; 02.00.00 — Химические науки; 03.02.00 — Общая биология.

Журнал включен в перечень **РИНЦ** (Лицензионный договор № 378-06/2016 от 24.06.2016 г.). Информация о статьях отражается в Реферативном журнале и Базах данных **ВИНИТИ РАН** (договор о сотрудничестве от 11.04.2011 г.).

*Печатается по решению Ученого совета ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет».
Протокол № 6 от 02.07.2019 г.*

©ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», 2019

Памяти Г.Д. Суворова

Этот выпуск нашего журнала посвящен 100-летию со дня рождения замечательного математика Георгия Дмитриевича Суворова, внесшего огромный вклад в формирование образования и науки в Донбассе. Г.Д. Суворов был создателем отдела теории функций Института прикладной математики и механики АН УССР, а также организатором кафедры математического анализа и теории функций Донецкого государственного университета. Он приложил много усилий для становления и развития Донецкой математической школы.

Факультет математики и информационных технологий

Вестник Донецкого национального университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В 1997 ГОДУ

Серия А. Естественные науки

№ 2

Донецк 2019

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

<i>Бродский Я. С., Павлов А. Л. Георгий Дмитриевич Суворов</i>	<i>3</i>
<i>Будька В. С. Об операторах Дирака с δ'-взаимодействиями</i>	<i>8</i>
<i>Волчков В. В., Волчков Вит. В. Трансмутационные преобразования операторов свертки и их применение</i>	<i>14</i>
<i>Заставный В. П. Некоторые задачи геометрии масс в случае знакопеременной плотности</i>	<i>36</i>
<i>Иванов А. Ю. Задача внешнего освещения на некоторых множествах Борсука</i>	<i>62</i>
<i>Лиманский Д. В. Критерий слабой коэрцитивности системы минимальных дифференциальных операторов в анизотропных пространствах Соболева . .</i>	<i>68</i>
<i>Манов А. Д. Об одном обобщении теоремы о положительной определённости кусочно-линейной функции</i>	<i>77</i>
<i>Машаров П. А. О функциях с нулевыми интегралами по отрезкам</i>	<i>82</i>
<i>Белый С. В., Цекановский Э. Р. О параметре фон Неймана экстремального оператора Шрёдингера</i>	<i>91</i>

Bulletin of Donetsk National University

SCIENTIFIC JOURNAL

FOUNDED IN 1997

Series A. Natural Sciences

№ 2

Donetsk 2019

CONTENTS

Mathematics

<i>Brodsky Y. S., Pavlov A. L. George Dmitrievich Suворov</i>	<i>3</i>
<i>Budyka V. S. On Dirac operators with δ'-interactions</i>	<i>8</i>
<i>Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Transmutation transformations of convolution operators and its application</i>	<i>14</i>
<i>Zastavnyi V. P. Some problems of mass geometry in the case of signed density</i>	<i>36</i>
<i>Ivanov A. Yu. External illumination problem on some Borsuk's sets</i>	<i>62</i>
<i>Limanskii D. V. Weak coercivity criterion for a system of minimal differential operators in the anisotropic Sobolev spaces</i>	<i>68</i>
<i>Manov A. D. On a generalization of a theorem on positive definiteness of piecewise-linear function</i>	<i>77</i>
<i>Masharov P. A. On functions with zero integrals over segments</i>	<i>82</i>
<i>Belyi S. V., Tsekanovskii E. R. On von Neumann's parameter of extremal Shrödinger operator</i>	<i>91</i>

УДК 517.5

ГЕОРГИЙ ДМИТРИЕВИЧ СУВОРОВ

© 2019. Я. С. Бродский, А. Л. Павлов

В статье рассматриваются ключевые моменты жизни и научной деятельности известного советского математика Георгия Дмитриевича Суворова.

Ключевые слова: Георгий Дмитриевич Суворов, теория функций и отображений, Томский государственный университет, Донецк, институт прикладной математики и механики, донецкий коллоквиум по квазиконформным отображениям.

Введение. 17 мая математическая общественность отметила 100-летие со дня рождения известного советского российского и украинского математика, крупного специалиста в области теории функций и отображений члена-корреспондента АН УССР, доктора физико-математических наук, профессора Георгия Дмитриевича Суворова (1919–1984).

Г.Д. Суворов родился в г. Саратове. Отец Г.Д. Суворова, Дмитрий Егорович, воевал на фронтах гражданской войны. После демобилизации (1921) переехал в Енакиево (Донбасс), а затем в Макеевку, где работал на Петровском металлургическом заводе. Детство Г. Д. Суворова, хоть немного, но было связано с Донбасом, с Украиной.

В 1928 г. семья Г.Д. Суворова переехала в Тулу, где он поступил в Тульскую среднюю школу, затем продолжил обучение в Сталинской средней школе № 2 (г. Сталинск, ныне Новокузнецк). После ее окончания с отличием (1936) поступил на физико-математический факультет Томского государственного университета и окончил его по специальности «математика» с квалификацией «математик» и правом преподавания в высшей и средней школе в 1941 г.

Будучи студентом, Г.Д. Суворов отличался трудолюбием, увлеченностью и ответственным отношением к учебе, он стал одним из наиболее успевающих студентов факультета и оставался таким в течение всех 5 лет учебы.

С 7 июля 1941 г. Г.Д. Суворов был мобилизован в РККА. С января 1942 г. находился на фронте в составе мостостроительного отряда, затем служил в частях водолазных работ на Украине (р. Днепр) и в Германии (р. Одер). В мае 1946 г. был демобилизован в звании старшего лейтенанта. За военную службу был награжден тремя медалями.

С октября 1946 года Г. Д. Суворов учился в аспирантуре Томского государственного университета (ТГУ) по специализации «Теория функций комплексного переменного».



го» под руководством профессора Павла Парфентьевича Куфарева. Результатом научно-исследовательской работы этого периода стала кандидатская диссертация, посвящённая развёрнутой теории простых концов последовательности областей, сходящихся к ядру, защищённая в 1951 году. В последующих научных исследованиях Г. Д. Суворов установил некоторые метрические и топологические свойства, общие для конформных, квазиконформных, гармонических и других отображений, что легло в основу его докторской диссертации «Основные свойства некоторых классов топологических отображений плоских областей с переменными границами», защищённой в Институте математики СО АН СССР в марте 1961 года. и выдвинувшей Г. Д. Суворова в число ведущих специалистов в области теории отображений. В 1961 году он был удостоен премии ТГУ за научную работу. В период с 1951 по 1966 гг. Г. Д. Суворов был ассистентом, доцентом, затем профессором и заведующим кафедрой теории функций Томского университета. Он прошёл последовательно все ступени вузовской преподавательской деятельности.

Основные работы Г. Д. Суворова посвящены различным вопросам теории функций. В этой области ему принадлежит приоритет в создании метода исследования метрико-геометрических свойств плоских и пространственных отображений достаточно общих классов [1].

По мнению авторов публикации [2], «работы Г. Д. Суворова легли в основу нового научного направления в теории функций, посвященного изучению классов плоских и пространственных отображений с ограниченным интегралом Дирихле. В этом направлении были установлены глобальные двусторонние оценки искажения относительных расстояний, построена законченная теория простых концов последовательности областей, сходящихся к невырожденному ядру.

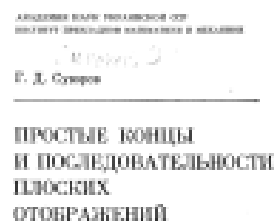
Г. Д. Суворов является создателем еще одного нового направления, лежащего на стыке теории функций и общей топологии. Это направление связано с топологическими аспектами граничного соответствия при конформном отображении. Основным объектом исследования здесь являются выделенные Г. Д. Суворовым так называемые конформно-инвариантные бикомпактные расширения плоской односвязной области. Он обнаружил, что конформно-инвариантных бикомпактных расширений области существует бесконечно много, и дал описание всей их совокупности в терминах теории структур».

А вот отзывы зарубежных математиков [3].

«Суворов внес большой вклад в теорию функций. Работал, в частности, над теорией топологических и метрических отображений в двумерном пространстве. Другой областью, над которой работал Суворов, была теория конформных отображений и квазиконформных отображений».

Георгий Дмитриевич большое внимание уделял педагогической деятельности. Он читал в университете курсы: «Теория функций действительного переменного», «Теория дифференциальных уравнений»; ряд спецкурсов. Обладал способностью точно, ясно и доступно излагать сложный материал. Студенты отзывались о Г.Д. Суворове как о «самом справедливом из справедливых».

В 1965 г. резко изменилась жизнь Г. Д. Суворова. В Донецке решением правительств УССР и СССР создаётся Донецкий научный центр и на базе педагогического институ-



Вот отзывы друзей

та — Донецкий государственный университет. Академия Наук Украины в 1965 г. избрала четырёх учёных действительными членами и десять — членами-корреспондентами АН УССР по Донецкому научному центру, в том числе математиков и механиков Лопатинского Я. Б. — академиком, а Гихмана И. И., Данилюка И. И., Космодамианского А. С., Суворова Г. Д. и Харламова П. В. — членами-корреспондентами.

В 1966 г. Георгий Дмитриевич создаёт отдел теории функций Донецкого Вычислительного центра АН УССР, преобразованного позже в Институт прикладной математики и механики АН УССР (ИПММ), и заведует им до конца своей жизни. Одновременно Г. Д. Суворов руководит кафедрой теории функций и математического анализа в Донецком университете.

Г. Д. Суворов приложил много усилий для формирования кадрового состава кафедры. К работе на кафедре математического анализа и теории функций Георгий Дмитриевич привлек преподавателей, работавших в пединституте (доц. Мирошниченко Я. С., ст. преп. Чаусовского Д. М., асс. Галло В. Ф.). По рекомендации Г. Д. Суворова была оставлена для работы на кафедре Н. И. Радбель, начавшая учёбу в педагогическом институте. Вскоре она успешно защитила кандидатскую диссертацию. Г. Д. Суворов принял для работы на кафедре доц. Тригуба Р. М., защитившего впоследствии докторскую диссертацию, после чего более 10 лет руководил кафедрой теории функций; доц. Паланта Ю. А., научные интересы которого относились к трём направлениям: теории операторов, гидроэкструзии, эвристическим методам в обучении математике. Он возглавлял кафедру шесть лет.



Понимая, на сколько сложным будет процесс преобразования провинциального Донецкого педагогического института в современный классический университет, реально оценивая состояние научно-педагогических кадров в области математики в Донецке, Георгий Дмитриевич принимает нетривиальное решение — предложить способным студентам-математикам старших курсов Томского университета перевестись в Донецкий университет. И вместе со своим учителем в Донецк приезжают доцент Овчинников И. С., аспирант Луфференко В. П., студенты Миклюков В. М., Кругликов В. И., Михайлов А. П., Суворов С. Г., Бальмин Д. Первые двое из перечисленных студентов защитили вначале кандидатские диссертации, а затем и докторские.

Особо нужно сказать о талантливом ученике Георгия Дмитриевича профессоре Миклюкове Владимире Михайловиче (1944 – 2013) — крупном специалисте в области математического анализа и теории функций, создателе научной лаборатории «Сверхмедленные процессы».

В Донецке продолжалась плодотворная научно-исследовательская деятельность Георгия Дмитриевича. По мнению специалистов, его работы в донецкий период интересны и значительны, они открыли новые пути в теории функций и поставили новые проблемы. Его результаты в созданных им направлениях, в основном с конца 1960-х годов, когда он был в Донецке, имеют особое значение.

В Донецкий период работы под руководством Г. Д. Суворова кандидатские диссертации защитили В. М. Миклюков, В. И. Кругликов, В. П. Луфференко, О. В. Иванов, Ю. В. Помельников, А. И. Гольдшмидт, В. Ф. Галло и др. Всего Георгий Дмитриевич подготовил 14 кандидатов наук, из которых четверо стали докторами.

Большая организационная работа проведена Г. Д. Суворовым в качестве председателя оргкомитета шести Донецких коллоквиумов по теории квазиконформных отображений, их обобщениям и приложениям, проведенных в 1968 – 1978 гг. отделом теории функций ИПММ АН УССР и кафедрой математического анализа и теории функций Донецкого государственного университета. Организаторы коллоквиума ставили целью — собрать специалистов, работающих в плане школы М. А. Лаврентьева по геометрической теории квазиконформных отображений и ее непосредственным обобщениям, рассмотреть современное состояние теории и обсудить ее проблематику на ближайшее будущее.

Г. Д. Суворов был неординарным человеком. Он обладал живым, пытливым умом, неиссякаемой энергией и самоотверженным трудолюбием. Встречи с ним были настоящей школой духовного роста для учеников и коллег. Большой эрудит и библиофил, Г. Д. Суворов хорошо знал древнюю и современную литературу, сам писал стихи. Им были собраны прекрасная библиотека художественной и научной литературы и книг по искусству, небольшая коллекция монет, а затем более обширная коллекция медалей. Помимо этого, Г. Д. Суворов собирал и старинные книги. Любил импровизации на пианино. Он был единственным математиком мира, кого выдающийся отечественный композитор Д. Б. Кабалевский, тогда председатель оргкомитета IX Международной конференции Международного общества по музейному воспитанию детей и юношества (Москва, 1970), пригласил участвовать в ее работе. Находясь на этой конференции, Г. Д. Суворов выступил с 45-минутным докладом «Общность функций искусства и науки в процессе образования и воспитания детей и юношества», который был опубликован отдельной брошюрой не только на русском, но и на английском, немецком и французском языках.

Георгий Дмитриевич Суворов скончался 12 октября 1984 года, похоронен в Донецке на Мушкетовском кладбище.

Прекрасным памятником Г. Д. Суворову стала его книга «Об искусстве математического исследования», изданная в 1999 г., через 15 лет после его кончины. Эта книга перекликается с известными сочинениями Ж. Адамара и Д. Пойа о психологии и методологии творческой работы в области математики.

«Творческий процесс математики похож на творческий процесс поэта, художника, композитора. . . . Это способность в единичном находить общее, основное и закономерное. . . . Нужно увидеть предчувствием, интуицией и облечь увиденное в стальные доспехи доказательства».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. А. Александров, В. И. Белый, В. Я. Гутлянский, И. И. Данилюк, Я. Б. Лопатинский. Георгий Дмитриевич Суворов (к пятидесятилетию со дня рождения)
http://umj.imath.kiev.ua/archiv/1969/03/umj_1969_03_6038_59778.pdf
2. Белинский П. П., Белый В. И., Гутлянский В. Я., Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Георгий Дмитриевич Суворов (к шестидесятилетию со дня рождения). — журнал «Успехи математических наук», март-апрель 1980 г., т. 35, вып. 2 (212).
3. J J O'Connor and E F Robertson. Georgii Dmitrievic Suvorov
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Suvorov.html>

Поступила в редакцию 14.05.2019 г.

Y. S. Brodsky, A. L. Pavlov

The key moments of life and scientific activity of the known soviet mathematician of George Dmitrievich Suvorov are examined in the article.

Keywords: George Dmitrievich Suvorov, theory of functions and reflections, Tomsk state university, Donetsk, institute of the applied mathematics and mechanics, Donetsk colloquium on quasi-conformal reflections.

Бродский Яков Соломонович

кандидат физико-математических наук, доцент
Донецкий национальный университет, г. Донецк

Brodsky Yakov Solomonovich

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor, Donetsk National University,
Donetsk

Павлов Александр Леонидович

кандидат физико-математических наук, доцент
Донецкий национальный университет, г. Донецк
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра высшей математики и методики преподавания математики

Pavlov Alexander Leonidovich

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Associate Professor, Donetsk National University,
Donetsk

УДК 517.984.46

ОБ ОПЕРАТОРАХ ДИРАКА С δ' -ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

© 2019. В. С. Будыка

В работе рассматривается матричный оператор Дирака $D_{X,\beta}$ с δ' -взаимодействиями. Получены условия максимальности индексов дефекта оператора $D_{X,\beta}$.

Ключевые слова: оператор Дирака, точечные взаимодействия, индексы дефекта.

Введение. Рассмотрим одномерный оператор Дирака, ассоциированный с дифференциальным выражением

$$D := -i c \frac{d}{dx} \otimes \begin{pmatrix} \mathbb{O}_p & \mathbb{I}_p \\ \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p \end{pmatrix} + \frac{c^2}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p \\ \mathbb{O}_p & -\mathbb{I}_p \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

в $L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})$. Здесь $c > 0$ обозначает скорость света. Пусть $X = \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{I} = (0, b)$, $b := \sup X \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < \infty$ строго возрастающая последовательность с $x_0 := 0$, $x_{n+1} > x_n$, $n \in \mathbb{N}$, $x_n \rightarrow b$. Пусть $d_n := x_n - x_{n-1} > 0$. Предположим также, что

$$\beta := \{\beta_n\}_{n=1}^\infty, \quad \beta_n = \beta_n^* \in \mathbb{C}^{p \times p}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

Следуя [6] (см. также [9]), определим семейство симметрических расширений, которые являются релятивистскими аналогами операторов Шредингера δ' -взаимодействиями (см. [7, 12]).

Для этого положим $f = \{f_1, f_2, \dots, f_{2p}\}^\top \in L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})$ и

$$f = \begin{pmatrix} f_I \\ f_{II} \end{pmatrix}, \text{ где } f_I := \{f_1 \ f_2 \ \dots \ f_p\}^\top, \quad f_{II} := \{f_{p+1} \ f_{p+2} \ \dots \ f_{2p}\}^\top.$$

Здесь $\top$ означает операцию транспонирования.

Семейство Гестези-Шеба операторов на интервале $(0, b)$ определено как замыкание операторов

$$\begin{aligned} D_{X,\beta}^0 &= D \upharpoonright \text{dom}(D_{X,\beta}^0), \\ \text{dom}(D_{X,\beta}^0) &= \left\{ f \in W_{\text{comp}}^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p}) : f_I \in AC_{\text{loc}}(\mathcal{I} \setminus X), \ f_{II} \in AC_{\text{loc}}(\mathcal{I}); \right. \\ &\quad \left. f_{II}(0+) = 0, \quad f_I(x_n+) - f_I(x_n-) = i\beta_n c f_{II}(x_n), \ n \in \mathbb{N} \right\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

т.е. $D_{X,\beta} = \overline{D_{X,\beta}^0}$. Легко видеть, что оператор $D_{X,\beta}$ симметричен, но не обязательно самосопряжен.

Операторы (2.3) называют операторами Дирака с точечными взаимодействиями или GS-реализациями. Они введены в работе Гестези и Шеба [6] для случая $p = 1$ и $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ (см. также [9]) и исследованы там в периодическом случае $X = \mathbb{Z}$. Спектральная теория таких операторов в случае $p = 1$ и произвольного X ($d_*(X) \geq 0$) была построена в [5]. Отметим в этой связи недавние работы [1–3], а также монографию [8], посвященные спектральной теории многомерного оператора Дирака.

В настоящей работе некоторые результаты из [5] и [11] распространяются на случай оператора $D_{X,\beta}$ с $p > 1$. Именно, находим условия на интенсивности $\{\beta_n\}_1^\infty$, гарантирующие максимальность индексов дефекта оператора $D_{X,\beta}$, т.е. $n_\pm(D_{X,\beta}) := \dim \mathfrak{N}_{\pm i}(D_{X,\beta}) := \dim \ker(D_{X,\beta}^* \mp iI) = p$.

Условия максимальности индексов дефекта оператора Дирака с δ -взаимодействиями изучены в работе [11].

Обозначения. $\mathcal{H}$ обозначает сепарабельное гильбертово пространство. Пусть $\mathbb{I}_p = \mathbb{I}_{\mathbb{C}^p}$ означают единичный и нулевой операторы в $\mathbb{C}^p$. В дальнейшем, $\text{dom}(T)$ обозначает область определения оператора T . Пусть $I \subset \mathbb{Z}$. $L^2(I; \mathcal{H}) := L^2(I) \otimes \mathcal{H}$ обозначает L^2 -пространство $\mathcal{H}$ -значных функций.

Пусть X — дискретное подмножество $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$. Введем пространства Соболева

$$W^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p}) := \{f \in L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p}) : f \in AC_{loc}(\mathcal{I} \setminus X), f' \in L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})\},$$

$$W_{comp}^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p}) := \{f \in W^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p}) : \text{supp } f \text{ компактен в } \mathcal{I}\}.$$

Операторы Дирака на конечном интервале с максимальными индексами дефекта. В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение, установленное в [5] ($p = 1$) и [4, 10] ($p > 1$).

Предложение 2.1. Пусть $D_{X,\beta}$ — реализация оператора Дирака в $L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{2p})$. Тогда оператор $D_{X,\beta}^* := (D_{X,\beta})^*$ сопряженный симметрическому оператору $D_{X,\beta}$ задается как

$$D_{X,\beta}^* = D \upharpoonright \text{dom}(D_{X,\beta}^*),$$

$$\text{dom}(D_{X,\beta}^*) = \left\{ f \in W^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^{2p}) : f_I \in AC_{loc}(\mathcal{I} \setminus X), f_{II} \in AC_{loc}(\mathcal{I}); \right. \\ \left. f_{II}(0+) = 0, \quad f_I(x_n+) - f_I(x_n-) = i\beta_n c f_{II}(x_n), \quad n \in \mathbb{N} \right\}. \quad (2.4)$$

При условии, что $|\mathcal{I}| < \infty$, построим $2p \times 2p$ -матричные реализации $D_{X,\beta}$ с максимальными индексами дефекта $n_\pm(D_{X,\beta}) = p$.

Теорема 2.1. Пусть $\beta := \{\beta_n\}_1^\infty \subset \mathbb{C}^{p \times p}$ — последовательность самосопряженных $p \times p$ -матриц, $\beta_n = \beta_n^*$, $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что выполнено следующее условие:

$$\sum_{n=2}^\infty d_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 + c \|\beta_k\|_{\mathbb{C}^{p \times p}})^2 < +\infty. \quad (2.5)$$

Тогда $n_\pm(D_{X,\beta}) = p$.

Доказательство. (i) Рассмотрим оператор

$$T_{X,\beta} := D_{X,\beta} - \frac{c^2}{2} \otimes \begin{pmatrix} \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p \\ \mathbb{O}_p & -\mathbb{I}_p \end{pmatrix} = -i c \frac{d}{dx} \otimes \begin{pmatrix} \mathbb{O}_p & \mathbb{I}_p \\ \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

так как очевидно, что $n_\pm(D_{X,\beta}) = n_\pm(T_{X,\beta})$. Достаточно показать, что при условии (2.5) уравнение $(T_{X,\beta}^* \pm i)F = 0$ имеет нетривиальное матричное $L^2(\mathcal{I}, \mathbb{C}^{2p \times p})$ -решение полного ранга, т.е. $\text{rank } F(x) = p$.

Ограничимся случаем $(T_{X,\beta}^* + i)F = 0$, который эквивалентен системе

$$\frac{d}{dx} F = \frac{1}{c} A F, \quad A = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_p & \mathbb{I}_p \\ \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Здесь

$$F = \begin{pmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^p \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2p \times p} \text{ и } F^j = \begin{pmatrix} F_{I,I}^j \\ F_{II,I}^j \end{pmatrix}, \quad F_I^j = \begin{pmatrix} f_1^j \\ \vdots \\ f_p^j \end{pmatrix}, \quad F_{II}^j = \begin{pmatrix} f_{p+1}^j \\ \vdots \\ f_{2p}^j \end{pmatrix},$$

$j \in \{1, \dots, p\}$. Уравнение (2.7) имеет следующие кусочно-гладкие $2p \times p$ -матричные решения

$$F = \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n, \quad F_n = \begin{pmatrix} F_{I,n} \\ F_{II,n} \end{pmatrix},$$

где

$$F_I = \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_{I,n}, \quad F_{I,n}(x) = \mathcal{U}_n e^{-(x_n-x)/c} + \mathcal{V}_n e^{(x_n-x)/c}, \quad x \in [x_{n-1}, x_n], \quad (2.8)$$

$$F_{II} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_{II,n}, \quad F_{II,n}(x) = \mathcal{U}_n e^{-(x_n-x)/c} - \mathcal{V}_n e^{(x_n-x)/c}, \quad x \in [x_{n-1}, x_n], \quad (2.9)$$

$$\{\mathcal{U}_n\}_1^{\infty} \subset \mathbb{C}^{p \times p}, \quad \{\mathcal{V}_n\}_1^{\infty} \subset \mathbb{C}^{p \times p}.$$

Согласно описанию $\text{dom}(D_{X,\beta}^*)$ (см. Предложение 2.1) каждая компонента F^j решения $F = \begin{pmatrix} F_I \\ F_{II} \end{pmatrix}$, $j \in \{1, \dots, p\}$, должна удовлетворять граничным условиям (2.4). Сначала найдем рекуррентные соотношения для матричных последовательностей $\{\mathcal{U}_n\}_1^{\infty}$, $\{\mathcal{V}_n\}_1^{\infty}$, которые обеспечивают выполнение этих условий.

Условие $F_{II,n}(x_0+) = \mathbb{O}_p$ дает $\mathcal{U}_1 e^{-d_1/c} - \mathcal{V}_1 e^{d_1/c} = \mathbb{O}_p$. Далее, согласно формулам (2.8), (2.9) условие

$$F_{II,n}(x_n+) = F_{II,n}(x_n-), \quad n \in \mathbb{N},$$

преобразуется в

$$\mathcal{U}_{n+1} e^{-d_{n+1}/c} - \mathcal{V}_{n+1} e^{d_{n+1}/c} = \mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

Кроме того, согласно формулам (2.8), (2.9) условие скачка

$$F_{I,n}(x_n+) - F_{I,n}(x_n-) = -i\beta_n c F_{II,n}(x_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

эквивалентно

$$\mathcal{U}_{n+1} e^{-d_{n+1}/c} + \mathcal{V}_{n+1} e^{d_{n+1}/c} - (\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n) = -i\beta_n c (\mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n). \quad (2.11)$$

Объединяя (2.10) и (2.11), приходим к следующим рекуррентным уравнениям

$$\mathcal{U}_{n+1} = \left(\mathcal{U}_n - i \frac{\beta_n c}{2} (\mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n) \right) e^{d_{n+1}/c}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.12)$$

$$\mathcal{V}_{n+1} = \left(\mathcal{V}_n - i \frac{\beta_n c}{2} (\mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n) \right) e^{-d_{n+1}/c}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.13)$$

для последовательностей $\{\mathcal{U}_n\}_1^{\infty}$ и $\{\mathcal{V}_n\}_1^{\infty}$ с начальными условиями

$$\mathcal{U}_1 = e^{d_1/c} \mathbb{I}_p \quad \text{and} \quad \mathcal{V}_1 = e^{-d_1/c} \mathbb{I}_p. \quad (2.14)$$

(ii) Докажем, что $\text{rank } F_n(x) = p$ для каждого $x \in [x_{n-1}, x_n]$ и $n \in \mathbb{N}$. Из (2.8) и (2.9) получаем

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} F_{I,n}^*(x) & F_{II,n}^*(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{I,n}(x) \\ F_{II,n}(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{U}_n^* e^{-(x_n-x)/c} + \mathcal{V}_n^* e^{(x_n-x)/c} & \mathcal{U}_n^* e^{-(x_n-x)/c} - \mathcal{V}_n^* e^{(x_n-x)/c} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \mathcal{U}_n e^{-(x_n-x)/c} + \mathcal{V}_n e^{(x_n-x)/c} \\ \mathcal{U}_n e^{-(x_n-x)/c} - \mathcal{V}_n e^{(x_n-x)/c} \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{U}_n^* \mathcal{U}_n e^{-2(x_n-x)/c} + \mathcal{U}_n^* \mathcal{V}_n + \mathcal{V}_n^* \mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n^* \mathcal{V}_n e^{2(x_n-x)/c} \\ &+ \mathcal{U}_n^* \mathcal{U}_n e^{-2(x_n-x)/c} - \mathcal{U}_n^* \mathcal{V}_n - \mathcal{V}_n^* \mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n^* \mathcal{V}_n e^{2(x_n-x)/c} \\ &= 2(\mathcal{U}_n^* \mathcal{U}_n e^{-2(x_n-x)/c} + \mathcal{V}_n^* \mathcal{V}_n e^{2(x_n-x)/c}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Из (2.15) следует, что для каждого $h \in \mathbb{C}^p$

$$\left\| \begin{pmatrix} F_{I,n}(x) \\ F_{II,n}(x) \end{pmatrix} h \right\|_{\mathbb{C}^p}^2 = 2e^{-2(x_n-x)/c} \|\mathcal{U}_n h\|_{\mathbb{C}^p}^2 + 2e^{2(x_n-x)/c} \|\mathcal{V}_n h\|_{\mathbb{C}^p}^2, \quad x \in [x_{n-1}, x_n]. \quad (2.16)$$

Для любого фиксированного $a \in [x_{n-1}, x_n]$ следует, что выполняется важная эквивалентность

$$F_n(a)h = 0 \iff \mathcal{U}_n h = \mathcal{V}_n h = 0. \quad (2.17)$$

Докажем по индукции, что $\text{rank } F_n(x) = p$ для каждого $x \in [x_{n-1}, x_n]$. Для $n = 1$ это следует из (2.14). Полагая $\text{rank } F_k(x) = p$ для каждого $x \in [x_{k-1}, x_k]$, докажем, что $\text{rank } F_{k+1}(x) = p$ для $x \in [x_k, x_{k+1}]$. Предполагая противное, находим $\hat{x} \in [x_k, x_{k+1}]$ и вектор $h \in \mathbb{C}^p$ такой, что $F_{k+1}(\hat{x})h = 0$. Объединяя это соотношение с эквивалентностью (2.17) (с $a = \hat{x}$ и $n = k + 1$), получаем $\mathcal{U}_{k+1} h = \mathcal{V}_{k+1} h = 0$.

В свою очередь, подставляя эти соотношения в (2.10) и (2.11), получаем

$$\mathcal{U}_k h = \mathcal{V}_k h = 0.$$

Согласно эквивалентности (2.17) эти соотношения эквивалентны $F_k(x)h = 0$ для $x \in [x_{k-1}, x_k]$, что противоречит предположению индукции. Таким образом, $\text{rank } F(x) = p$ для каждого $x \in \mathbb{R}_+$.

Следует также отметить, что попутно мы доказали, что матрицы $F_I(x)$ и $F_{II}(x)$ несингулярны для каждого $x \in \mathbb{R}_+$.

(iii) Осталось проверить, что при условии (2.5) выполнено включение $F_I, F_{II} \in L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{p \times p})$. Из (2.8) и (2.9) следует, что

$$\begin{aligned} \|F_k\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \|F_{k,n}\|_2^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{d_n} (\|\mathcal{U}_n\|_{\mathbb{C}^{p \times p}}^2 e^{-2x/c} + \|\mathcal{V}_n\|_{\mathbb{C}^{p \times p}}^2 e^{2x/c}) dx \\ &= c \sum_{n=1}^{\infty} (\|\mathcal{U}_n\|_{\mathbb{C}^{p \times p}}^2 (1 - e^{-2d_n/c}) + \|\mathcal{V}_n\|_{\mathbb{C}^{p \times p}}^2 (e^{2d_n/c} - 1)) \quad k = \{I, II\}. \end{aligned}$$

Так как $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = |\mathcal{I}| < +\infty$, $d_n \rightarrow 0$, то $(1 - e^{-2d_n/c}) \sim (e^{2d_n/c} - 1) \sim 2d_n/c$ при $n \rightarrow \infty$. Это дает неравенство $\|F_k\|_2 < +\infty$ при условии, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\|\mathcal{U}_n\|_{\mathbb{C}^{p \times p}}^2 + \|\mathcal{V}_n\|_{\mathbb{C}^{p \times p}}^2) d_n < +\infty. \quad (2.18)$$

Докажем по индукции следующие оценки

$$\|\mathcal{U}_{n+1}\|_{\mathbb{C}^{p \times p}}, \|\mathcal{V}_{n+1}\|_{\mathbb{C}^{p \times p}} \leq \exp((d_1 + \dots + d_{n+1})/c) \cdot \prod_{k=1}^n (1 + c \|\beta_k\|_{\mathbb{C}^{p \times p}}), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.19)$$

Для $n = 1$ эти оценки очевидны. Предположим, что (2.19) доказано при $n \leq m - 1$. Тогда применяя (2.12) при $n = m$, получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}_{m+1}\|_{\mathbb{C}^{p \times p}} &\leq \left(\|\mathcal{U}_m\|_{\mathbb{C}^{p \times p}} \left(1 + \frac{c \|\beta_m\|_{\mathbb{C}^{p \times p}}}{2} \right) + \frac{c \|\beta_m\|_{\mathbb{C}^{p \times p}}}{2} \|\mathcal{V}_m\|_{\mathbb{C}^{p \times p}} \right) e^{d_{m+1}/c} \\ &\leq \prod_{k=1}^{m-1} (1 + c \|\beta_k\|_{\mathbb{C}^{p \times p}}) \left[\left(1 + \frac{c \|\beta_m\|_{\mathbb{C}^{p \times p}}}{2} \right) + \frac{c \|\beta_m\|_{\mathbb{C}^{p \times p}}}{2} \right] e^{(d_1 + \dots + d_m + d_{m+1})/c} \\ &= \exp((d_1 + \dots + d_{m+1})/c) \cdot \prod_{k=1}^m (1 + c \|\beta_k\|_{\mathbb{C}^{p \times p}}). \end{aligned}$$

Это неравенство доказывает индуктивную гипотезу (2.19) для $\mathcal{U}_n$. Оценка для $\mathcal{V}_{m+1}$ доказывается аналогично. Таким образом, оба неравенства (2.19) выполнены. Объединяя (2.18) с (2.19) и предположением (2.5), заключаем, что $F_I, F_{II} \in L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{p \times p})$. $\square$

Следствие 2.1. Если выполнено условие (2.5), то любое самосопряженное расширение оператора $D_{X,\beta}$ имеет дискретный спектр.

Замечание 2.1. Очевидно, что условие (2.5) дает включение $\{d_n\} \in l^1(\mathbb{N})$, т.е. $|\mathcal{I}| < \infty$. Отметим в этой связи, что в противном случае, $|\mathcal{I}| = \infty$, реализация $D_{X,\beta}$ всегда самосопряженная (см. [4, 5, 10]).

Следствие 2.2. Если $\{\beta_n\}_1^\infty \in l^1(\mathbb{N}; \mathbb{C}^{p \times p})$, то оператор $D_{X,\beta}$ симметричен с индексами дефекта $n_\pm(D_{X,\beta}) = p$.

Следствие 2.3. Оператор $D_{X,\beta}$ симметричен с индексами дефекта $n_\pm(D_{X,\beta}) = p$ при условии

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} (1 + c \|\beta_n\|_{\mathbb{C}^{p \times p}})^2 < 1. \quad (2.20)$$

В частности, $n_\pm(D_{X,\beta}) = p$, если выполнено одно из следующих условий

- (i) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (d_{n+1}/d_n) = 0$ и $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\beta_n\|_{\mathbb{C}^{p \times p}} < \infty$;
- (ii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (d_{n+1}/d_n) =: (1/d) < 1$ и $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\beta_n\|_{\mathbb{C}^{p \times p}} < c(\sqrt{d} - 1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arrizabalaga N. Shell interactions for Dirac operators / N. Arrizabalaga, A. Mas, L. Vega // J. Math. Pures Appl. – 2014. – V. 102, № 4. – P. 617–639.
2. Behrndt J. On the spectral properties of Dirac operators with electrostatic δ -shell interactions / J. Behrndt, P. Exner, M. Holzmam, V. Lotoreichik // J. Math. Pures. – 2018. – V. 111. – P. 47–78.
3. Behrndt J. On Dirac operators in $\mathbb{R}^3$ with electrostatic and Lorentz scalar δ -shell interactions / J. Behrndt, P. Exner, M. Holzmam, V. Lotoreichik // Quantum Stud.: Math. Found. – 2019. – P. 1–20.
4. Budyika V.S. Nonrelativistic limit for $2p \times 2p$ -Dirac operators with point interactions on a discrete set / V. S. Budyika, M. M. Malamud, A. Posilicano // Russ. J. Math. Ph. – 2017. – V. 97, № 4. – P. 426–435.
5. Carlone R. On the spectral theory of Gesztesy-Seba realizations of 1-D Dirac operators with point interactions on discrete set / R. Carlone, M. Malamud, A. Posilicano // J. Differential Equations. – 2013. – V. 254. – P. 3835–3902.

6. Gesztesy F. New analytically solvable models of relativistic point interactions / F. Gesztesy, P. Šeba // Lett. Math. Phys. – 1987. – V. 13. – P. 345–358.
7. Kostenko A. S. 1-D Schrodinger operators with local point interactions on discrete set / A. S. Kostenko, M. M. Malamud // J. Differential Equations. – 2010. – V. 249. – P. 253–304.
8. Thaller B., The Dirac Equation / B. Thaller – Berlin: Texts and Monographs in Physics, Springer, 1992. – 357 p.
9. Альбеверио С., Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хёгг-Крон, Х. Хольден – Москва: МИР, 1991. – 568 с.
10. Будыка В. С. К спектральной теории одномерных матричных операторов Дирака с точечными матричными взаимодействиями / В. С. Будыка, М. М. Маламуд, А. Посиликано // ДАН. – 2018. – Т. 479, № 2. – С. 117–125.
11. Будыка В. С. Об индексах дефекта блочно-якобиевых матриц, связанных с операторами Дирака с точечными взаимодействиями / В. С. Будыка, М. М. Маламуд // Матем. заметки. – 2019. – Т. 106, № 6. – С. 675–679.
12. Костенко А. С. Матричный оператор Шрёдингера с δ -взаимодействиями / А. С. Костенко, М. М. Маламуд, Д. Д. Натягайло // Матем. заметки. – 2016. – Т. 100, № 1. – С. 59–77.

Поступила в редакцию 28.06.2019 г.

ON DIRAC OPERATORS WITH δ' -INTERACTIONS

V. S. Budyka

In the paper we consider the matrix Dirac operator $D_{X,\beta}$ with δ' -interactions. Conditions for the maximality of the deficiency indices of the operator $D_{X,\beta}$ are obtained.

Keywords: Dirac operator, point interactions, deficiency indices

Будыка Виктория Сергеевна

ст. преподаватель

Донецкая академия управления и государственной
службы, г. Донецк

budyka.vik@gmail.com

83001, ул. Челюскинцев, 157, 3-ий корпус ДонАУ-

иГС, кафедра высшей математики

+38(062)304-12-28

Budyka Viktoriya Sergeevna

Senior Lecturer, Donetsk Academy of Management
and Public Administration, Donetsk

УДК 517.444

ТРАНСМУТАЦИОННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

© 2019. *В. В. Волчков, Вит. В. Волчков*

Пусть дана пара операторов (A, B) . Оператор X называется оператором преобразования (или трансмутационным преобразованием) A в B , если на элементах подходящих функциональных пространств выполняется соотношение $XA = BX$. В работе приводится построение трансмутационных преобразований операторов свертки на различных однородных пространствах в оператор свертки на вещественной оси. Показано применение таких преобразований к различным задачам интегральной геометрии и теории периодических в среднем функций.

Ключевые слова: сплетающие операторы, преобразование Фурье, сферические гармоники, гипергеометрические функции, проблема Помпейю.

1. Введение. Линейные непрерывные операторы типа свертки являются основным классом линейных операторов, возникающим в гармоническом анализе. Во многих важных случаях их можно охарактеризовать также как линейные непрерывные операторы, коммутирующие со сдвигами (или свертками). Они включают, в частности, линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами и тесно связаны с теорией дифференциальных уравнений в частных производных (см. [1]).

Начиная с конца 19 века в работах Ф. Мелера, Е. Гейне, Д. Дельсарта, Б.М. Левитана, А.Я. Повзнера, В. Фока, Д.Л. Лионса, Х. Шебли, М. Фленстед-Иенсена, Т. Коорнвиндера, К. Тримеша и др. было установлено, что ряд фактов классического гармонического анализа имеют нетривиальные аналоги при замене обычных сдвигов на обобщенные. Эти обобщенные сдвиги строятся по различным дифференциальным операторам и включают, например, сдвиги Бесселя, Лежандра, Якоби и др. (см. обзоры [2, 3] с обширной библиографией, а также монографии [4, 5]). Одним из эффективных подходов для изучения соответствующих интегралов Фурье является метод трансмутационных преобразований дифференциальных операторов. Такие преобразования представляют собой аналог сплетающих операторов в теории подобия конечномерных матриц или теории представлений групп [6]. Напомним их общее определение (см. [5, гл. 1, § 1]). Пусть E – пространство функций (распределений) на $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$, $A_1, \dots, A_n$ и $B_1, \dots, B_n$ – дифференциальные операторы на E , и X – непрерывный эндоморфизм E . Говорят, что эндоморфизм X преобразует операторы $A_1, \dots, A_n$ в операторы $B_1, \dots, B_n$ (X является *оператором преобразования*), если на E выполнены равенства

$$A_j X = X B_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

(или $X A_j = B_j X, j = 1, \dots, n$). Автоморфизм X пространства E , удовлетворяющий (3.1), называется *трансмутационным преобразованием* операторов $A_1, \dots, A_n$ в $B_1, \dots, B_n$. Например, преобразование Абеля

$$X(f)(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{f(u)}{\sqrt{t^2 - u^2}} du, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

где $C_{\natural}^{\infty}(\mathbb{R})$ – пространство бесконечно дифференцируемых четных функций на $\mathbb{R}$, является трансмутационным преобразованием оператора Бесселя

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d}{dt}$$

в оператор дифференцирования $\frac{d^2}{dt^2}$.

Используя трансмутационное свойство (3.1) и классический гармонический анализ, многие авторы активно изучали гармонический анализ, связанный с различными дифференциальными операторами. В частности, была развита теория операторов обобщенного сдвига и обобщенной свертки, получены формулы обращения для обобщенного преобразования Фурье, а также обобщения теорем Винера-Пэли и Планшереля (см. [3, 5]). Построенный гармонический анализ и классические результаты о периодических в среднем функциях дают возможность исследовать периодические в среднем функции, связанные с дифференциальными операторами [5].

Можно рассматривать операторы преобразования не только для пары дифференциальных операторов (см. [7] и имеющиеся там ссылки). В недавних работах авторов данной статьи построен новый класс трансмутационных преобразований, которые связывают операторы свертки на различных однородных пространствах с оператором свертки на вещественной оси. Этот подход позволил решить широкий класс проблем интегральной геометрии и теории уравнений свертки, связанный со спектральным анализом и синтезом [8–15]. Среди таких проблем можно отметить различные варианты известной проблемы Помпейю, проблему Мореры, проблему Беренштейна-Гэя о существовании нетривиального решения системы уравнений свертки на симметрических пространствах, проблему спектрального синтеза для некоторых групп и др. Настоящая статья содержит описание основных идей и конструкций теории трансмутационных преобразований операторов свертки (§§ 3–7), а также краткий обзор полученных с их помощью результатов в интегральной геометрии и теории периодических в среднем функций (§§ 8–11). При ее написании частично использован материал статей [8, 9, 11, 13–15]. Отдельные аспекты теории детально рассмотрены в монографиях [10, 12], в которых можно найти дополнительные сведения и литературные указания.

2. Основные обозначения. Ниже будут встречаться следующие пространства функций и распределений на вещественно аналитическом многообразии $\mathcal{M}$: $C^m(\mathcal{M})$ ($m \in \mathbb{Z}_+$ или $m = \infty$) – пространство m раз непрерывно дифференцируемых функций; $C(\mathcal{M}) = C^0(\mathcal{M})$, $\mathcal{E}(\mathcal{M}) = C^{\infty}(\mathcal{M})$; $C_c(\mathcal{M})$ – функции из $C(\mathcal{M})$ с компактным носителем; $C_c^m(\mathcal{M}) = (C^m \cap C_c)(\mathcal{M})$, $\mathcal{D}(\mathcal{M}) = C_c^{\infty}(\mathcal{M})$; $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$ – пространство распределений на $\mathcal{M}$; $\mathcal{E}'(\mathcal{M})$ – пространство распределений на $\mathcal{M}$ с компактным носителем. Для носителя распределения T используется символ $\text{supp } T$. Если $\mathcal{M}$ является римановым многообразием с фиксированным началом o и $T \in \mathcal{E}'(\mathcal{M})$, определим $r(T)$ равенством $r(T) = \inf \{r > 0 : \text{supp } T \subset B_r\}$, где B_r – открытый геодезический шар радиуса r в $\mathcal{M}$ с центром в точке o .

Пусть $\mathcal{P}(-r, r)$ ($0 < r \leq +\infty$) – некоторое пространство функций или распределений на интервале $(-r, r)$. Символом $\mathcal{P}_{\natural}(-r, r)$ будем обозначать множество всех четных элементов из $\mathcal{P}(-r, r)$. Аналогично, если $\mathcal{P}(B_r)$ – некоторое пространство функций или распределений в шаре $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, то $\mathcal{P}_{\natural}(B_r)$ – совокупность всех элементов из $\mathcal{P}(B_r)$, инвариантных относительно ортогональной группы $O(n)$ в $\mathbb{R}^n$.

Преобразование Фурье $\hat{T}$ распределения $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством

$$\hat{T}(\zeta) = \langle T(x), e^{-i(x_1\zeta_1 + \dots + x_n\zeta_n)} \rangle, \quad \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Если $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и хотя бы одно из этих распределений имеет компактный носитель, то определена свертка $T_1 * T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, действующая по правилу

$$\langle T_1 * T_2, \varphi \rangle = \langle T_1(x), \langle T_2(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

3. Операторы преобразования свертки на $\mathbb{R}^n$. В этом разделе мы определим оператор, позволяющий свести ряд проблем для уравнений свертки в $\mathbb{R}^n$ к одномерному случаю.

Пусть $n \geq 2$, $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, $d\omega$ – элемент площади на $\mathbb{S}^{n-1}$, ρ и σ – полярные координаты точки $x \in \mathbb{R}^n$ ($\rho = |x|$, а если $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то $\sigma = x/\rho$). Обозначим $\mathcal{H}^{n,k}$ – пространство сферических гармоник степени k на $\mathbb{S}^{n-1}$, рассматриваемое как подпространство $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ (см. [16, гл. 4]), $d(n, k)$ – размерность $\mathcal{H}^{n,k}$, $\{Y_j^k\}_{j=1}^{d(n,k)}$ – фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{n,k}$. Положим $Y_1^0(\sigma) = 1/\sqrt{\omega_{n-1}}$ для любого $\sigma \in \mathbb{S}^{n-1}$, где $\omega_{n-1} = n\pi^{n/2}/\Gamma(1+n/2)$ – площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1}$. Определим $Y_j^k(x) = \rho^k Y_j^k(\sigma)$ при $x = \rho\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Используя это соотношение, продолжим Y_j^k до многочлена на $\mathbb{C}^n$.

Пусть $\mathcal{O}$ – непустое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ такое, что $\tau\mathcal{O} = \mathcal{O}$ для любого $\tau \in O(n)$. Ряд Фурье распределения $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ по сферическим гармоникам имеет вид

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(n,k)} f^{k,j}, \quad (3.2)$$

где распределение $f^{k,j}$ действует по правилу

$$\langle f^{k,j}, \psi \rangle = \left\langle f, \overline{Y_j^k(\sigma)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \psi(\rho\sigma') Y_j^k(\sigma') d\omega(\sigma') \right\rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}).$$

Отметим, что для любого $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ (соответственно, $f \in C^\infty(\mathcal{O})$) ряд в правой части (3.2) сходится к f в $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ (соответственно $C^\infty(\mathcal{O})$). Для всякого множества $\mathfrak{W}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ положим $\mathfrak{W}_{k,j}(\mathcal{O}) = \{f \in \mathfrak{W}(\mathcal{O}) : f = f^{k,j}\}$. Отметим, что $\mathfrak{W}_{0,1}(\mathcal{O})$ совпадает с множеством радиальных распределений из $\mathfrak{W}(\mathcal{O})$, т.е. $\mathfrak{W}_{0,1}(\mathcal{O}) = \mathfrak{W}_{\natural}(\mathcal{O})$.

Для $\lambda \in \mathbb{C}$, $\eta \in \mathbb{Z}_+$ определим функции

$$\Phi_{\lambda,\eta,k,j}(x) = 2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\omega_{n-1}} Y_j^k(x) \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\varkappa} \left(\mathbf{I}_{\frac{n}{2}+k-1}(z|x|)\right) \Big|_{z=\lambda}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\mathbf{I}_\nu(\zeta) = J_\nu(\zeta)/\zeta^\nu$, J_ν – функция Бесселя первого рода порядка ν , $\varkappa = \eta$, если $\lambda \neq 0$, и $\varkappa = 2\eta$, если $\lambda = 0$. Нетрудно проверить, что $(\Delta + \lambda^2)^{\eta+1} \Phi_{\lambda,\eta,k,j} = 0$ в $\mathbb{R}^n$, где Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$ (см. [17, часть 1, раздел 5.3]). Для $f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$, $z \in \mathbb{C}$ положим $\mathcal{F}_j^k(f)(z) = \langle f, \overline{\Phi_{z,0,k,j}} \rangle$. Если $f \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^n)$, то функция $\tilde{f}(z) = \mathcal{F}_1^0(f)(z)$ называется сферическим преобразованием распределения f . Согласно теореме Винера-Пэли [1, теорема 7.3.1], для любого $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^n)$ существует распределение $\Lambda(T) \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R})$ такое, что $\widehat{\Lambda(T)} = \tilde{T}$ и $r(\Lambda(T)) = r(T)$. Более того, отображение $\Lambda : \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R})$ является биекцией.

Для $f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$ и $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ положим

$$\langle \mathfrak{A}_{k,j}(f), \psi \rangle = \frac{(\omega_{n-1})^{-1}}{2^{n-2} \Gamma^2(n/2)} \int_0^\infty \lambda^{n+2k-1} \mathcal{F}_j^k(f)(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \psi(t) \cos(\lambda t) dt d\lambda.$$

Нетрудно убедиться, что $\mathfrak{A}_{k,j}(f) \in \mathcal{D}'_{\natural}(\mathbb{R})$. Оператор $\mathfrak{A}_{k,j}$ допускает продолжение на пространство $\mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$, $R \in (0, +\infty]$, по формуле $\langle \mathfrak{A}_{k,j}(f), \psi \rangle = \langle \mathfrak{A}_{k,j}(f\eta), \psi \rangle$, $f \in \mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$,

$\psi \in \mathcal{D}(-R, R)$, где $\eta \in \mathcal{D}_\eta(B_R)$ выбирается так, что $\eta = 1$ в $B_{r(\psi)+\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon \in (0, R - r(\psi))$. Тогда $\mathfrak{A}_{k,j}(f) \in \mathcal{D}'_\eta(-R, R)$ и $\mathfrak{A}_{k,j}(f|_{B_r}) = \mathfrak{A}_{k,j}(f)|_{(-r,r)}$ для всех $r \in (0, R]$.

Теорема 3.1. При $R \in (0, +\infty]$, $N \in \mathbb{Z}_+$ и $\nu = N + n + k + 2$ имеют место следующие утверждения.

- (i) Если $f \in \mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$, $T \in \mathcal{E}'_\eta(\mathbb{R}^n)$ и $r(T) < R$, то на интервале $(r(T) - R, R - r(T))$ справедливо равенство $\mathfrak{A}_{k,j}(f * T) = \mathfrak{A}_{k,j}(f) * \Lambda(T)$. В частности, имеет место свойство трансмутации $\mathfrak{A}_{k,j}(\Delta^N f) = (\mathfrak{A}_{k,j}(f))^{(2N)}$.
- (ii) Пусть $f \in \mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$, $r \in (0, R]$. Тогда $f = 0$ в B_r в том и только том случае, когда $\mathfrak{A}_{k,j}(f) = 0$ на $(-r, r)$.
- (iii) Если $f \in C^\nu_{k,j}(B_R)$, то $\mathfrak{A}_{k,j}(f) \in C^N_\eta(-R, R)$ и

$$f^{k,j}(x) = \frac{2^{1-k}\Gamma(n/2)(\omega_{n-1})^{1/2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2} + k)} \int_0^e (\mathfrak{A}_{k,j}f)(t) \frac{(\varrho^2 - t^2)^{\frac{n-3}{2}+k}}{\varrho^{n+k-2}} dt Y_j^k(\sigma), \quad \varrho \in (0, R).$$

- (iv) Отображение $\mathfrak{A}_{k,j}$ непрерывно из $\mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$ в $\mathcal{D}'_\eta(-R, R)$ и из $C^\nu_{k,j}(B_R)$ в $C^N_\eta(-R, R)$.
- (v) Если $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\mu \in \mathbb{Z}_+$, то $\mathfrak{A}_{k,j}(\Phi_{\lambda,\mu,k,j}) = u_{\lambda,\mu}$, где $u_{\lambda,\mu}(t) = \frac{(it)^\mu e^{i\lambda t} + (-it)^\mu e^{-i\lambda t}}{2}$ при $\lambda \neq 0$, $u_{\lambda,\mu}(t) = (-1)^\mu t^{2\mu}$ при $\lambda = 0$.

Трансмутационные преобразования $\mathfrak{A}_{k,j}$ впервые введены в работе [8]. Ряд других свойств этих операторов содержится в [10].

4. Операторы преобразования искаженной свертки на $\mathbb{C}^n$. Пусть $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$ и хотя бы одно из этих распределений имеет компактный носитель. Искаженная свертка $T_1 \star T_2$ определяется как распределение на $\mathbb{C}^n$, действующее по правилу

$$\langle T_1 \star T_2, \psi \rangle = \left\langle T_1(z), \left\langle T_2(w), \psi(z+w) e^{\frac{i}{2}\text{Im}\langle z,w \rangle} \right\rangle \right\rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n),$$

где $\langle z, w \rangle$ – эрмитово скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$. В этом параграфе мы построим аналог оператора $\mathfrak{A}_{k,j}$ для искаженной свертки.

При стандартном отождествлении $\mathbb{C}^n$ с $\mathbb{R}^{2n}$ имеет место равенство $\mathcal{H}^{2n,k} = \sum_{p+q=k} \mathcal{H}^{n,p,q}$, где $\mathcal{H}^{n,p,q}$ – пространство сферических гармоник бистепени (p, q) на $\mathbb{S}^{2n-1}$ [18, гл. 12]. Как известно [18, теоремы 12.2.7, 12.2.8], квазирегулярное представление унитарной группы $U(n)$ в $L^2(\mathbb{S}^{2n-1})$ является прямой суммой попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений, действующих на $\mathcal{H}^{n,p,q}$. Обозначим $d(n, p, q)$ – размерность $\mathcal{H}^{n,p,q}$, $\{S_l^{p,q}\}_{l=1}^{d(n,p,q)}$ – фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{n,p,q}$.

Пусть $\mathcal{O}$ – непустое открытое множество в $\mathbb{C}^n$ такое, что $\tau\mathcal{O} = \mathcal{O}$ для любого $\tau \in U(n)$. Всякому распределению $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ соответствует ряд Фурье

$$f \sim \sum_{p,q=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d(n,p,q)} f^{p,q,l},$$

где распределение $f^{p,q,l}$ действует по правилу

$$\langle f^{p,q,l}, \psi \rangle = \left\langle f, \overline{S_l^{p,q}(\sigma)} \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \psi(\varrho\sigma') S_l^{p,q}(\sigma') d\omega(\sigma') \right\rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}).$$

Для заданного класса $\mathfrak{W}(\mathcal{O})$ распределений на $\mathcal{O}$ определим класс $\mathfrak{W}_{p,q,l}(\mathcal{O})$ равенством $\mathfrak{W}_{p,q,l}(\mathcal{O}) = \{f \in \mathfrak{W}(\mathcal{O}) : f = f^{p,q,l}\}$.

Пусть ${}_1F_1(a; b; \zeta)$ ($a, \zeta \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$) – вырожденная гипергеометрическая функция Куммера [19, гл. 6]. Для $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu, p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, d(n, p, q)\}$ и $z = \varrho\sigma \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ положим

$$\phi_{\lambda,\mu,p,q,l}(z) = \sqrt{\omega_{2n-1}} S_l^{p,q}(\sigma) \left(\frac{d}{d\zeta} \right)^{\varkappa} \left(\varrho^{p+q} e^{-\frac{\varrho^2}{4}} {}_1F_1 \left(p + \frac{n - \zeta^2}{2}; n + p + q; \frac{\varrho^2}{2} \right) \right) \Big|_{\zeta=\lambda},$$

$$\Phi_{\lambda,\mu,p,q,l}(z) = 2^{n-1} \Gamma(n) \sqrt{\omega_{2n-1}} S_l^{p,q}(\sigma) \left(\frac{d}{d\zeta} \right)^{\varkappa} \left(\varrho^{p+q} \mathbf{I}_{n+p+q-1}(\zeta\rho) \right) \Big|_{\zeta=\lambda},$$

где $\varkappa = \mu$, если $\lambda \neq 0$, и $\varkappa = 2\mu$, если $\lambda = 0$. Нетрудно видеть, что эти функции допускают непрерывное продолжение в точку 0. Далее считаем, что они определены в нуле по непрерывности. Тогда $\phi_{\lambda,\mu,p,q,l}, \Phi_{\lambda,\mu,p,q,l} \in \mathcal{E}(\mathbb{C}^n)$. Имеют место равенства $(\mathfrak{L} - \lambda^2)^{\mu+1} \phi_{\lambda,\mu,p,q,l} = 0$, $(\Delta + \lambda^2)^{\mu+1} \Phi_{\lambda,\mu,p,q,l} = 0$, где $\mathfrak{L}$ – специальный оператор Эрмита (искаженный лапласиан) на $\mathbb{C}^n$, т.е.

$$\mathfrak{L} = \frac{|z|^2}{4} \text{Id} - \Delta + \sum_{k=1}^n \left(z_k \frac{\partial}{\partial z_k} - \bar{z}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right) \quad (\text{Id} - \text{тождественный оператор})$$

(см. [10, формулы (9.30), (12.35)]). Таким образом, функции $\phi_{\lambda,\mu,p,q,l}, \Phi_{\lambda,\mu,p,q,l}$ являются корневыми векторами указанных лапласианов. Для любого $f \in \mathcal{E}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$ положим $\mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda) = \langle f, \overline{\phi_{\lambda,0,p,q,l}} \rangle$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда $\mathcal{F}_l^{p,q}(f)$ является четной целой функцией переменной λ . Теоремы Винера-Пэли для преобразования $\mathcal{F}_l^{p,q}$ и классического преобразования Фурье (см. [8, теорема 8], [1, теорема 7.3.1]) показывают, что $\mathcal{F}_1^{0,0}(f)(\lambda)$ является преобразованием Фурье распределения из $\mathcal{E}'_1(\mathbb{R})$. Обозначим это распределение символом $\Lambda(f)$.

Пусть $f \in \mathcal{D}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$. Для $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ выберем $h \in \mathcal{D}_1(\mathbb{C}^n)$ так, что $h = 1$ в шаре $|z| < r(\psi) + \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$. Положим

$$\langle \mathfrak{A}_{p,q,l}(f), \psi \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \mu_j \mathcal{F}_l^{p,q}(fh)(\lambda_j) \int_{\mathbb{R}} \psi(t) \cos(\lambda_j t) dt,$$

где

$$\lambda_j = \sqrt{2p + n + 2j}, \quad \mu_j = \frac{2^{1-n-p-q}}{\omega_{2n-1}(n + p + q - 1)!} \binom{n + p + q + j - 1}{n + p + q - 1}.$$

Можно показать, что $\mathfrak{A}_{p,q,l}(f)$ корректно определено посредством равенства выше как распределение в $\mathcal{D}'_1(\mathbb{R})$. Кроме того, имеет место следующий результат.

Теорема 3.2. (i) *Отображение $\mathfrak{A}_{p,q,l}$ осуществляет гомеоморфизм между: а) $\mathcal{D}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$ и $\mathcal{D}'_1(\mathbb{R})$; б) $\mathcal{E}_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$ и $\mathcal{E}_1(\mathbb{R})$.*

(ii) *Пусть $f \in \mathcal{D}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$, $r > 0$. Тогда $f = 0$ в шаре $|z| < r$ в том и только том случае, когда $\mathfrak{A}_{p,q,l}(f) = 0$ на интервале $(-r, r)$.*

(iii) *Для $f \in \mathcal{D}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$, $T \in \mathcal{E}'_1(\mathbb{R})$ имеет место равенство $\mathfrak{A}_{p,q,l}(f \star T) = \mathfrak{A}_{p,q,l}(f) \star \Lambda(T)$.*

(iv) Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\mathfrak{A}_{p,q,l}(\phi_{\lambda,\mu,p,q,l}) = u_{\lambda,\mu}$.

Доказательство теоремы 3.2 в более общей формулировке имеется в [8], [10, гл. 12, § 12.5]. Там же можно найти ее применение и дальнейшие литературные указания.

5. Операторы преобразования "s"-свертки на гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$. Будем рассматривать для $\mathbb{H}^2$ модель Пуанкаре, реализованную на открытом единичном круге $\mathbb{D}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (см., например, [20, § 4 во введении]). Гиперболическое расстояние d между точками $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ и гиперболическая мера $d\mu$ вычисляются по формулам

$$d(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_2 - z_1|}{|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_2 - z_1|}, \quad d\mu(z) = \frac{i}{2} \frac{dz \wedge \bar{d}z}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Геодезический шар $B_r = \{z \in \mathbb{H}^2 : d(z, 0) < r\}$ совпадает с открытым евклидовым кругом из $\mathbb{R}^2$ с центром в нуле радиуса $\text{th } r$. Обозначим через $L_{\text{loc}}(B_r)$ класс локально интегрируемых по мере $d\mu$ функций в B_r .

Пусть $f \in L_{\text{loc}}(B_r)$, f^κ ($\kappa \in \mathbb{Z}$) – компоненты функции f при разложении её в ряд Фурье, т.е.

$$f^\kappa(z) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(z e^{-i\alpha}) e^{i\kappa\alpha} d\alpha, \quad z \in B_r.$$

Положим $C^{m,\kappa}(B_r) = \{f \in C^m(B_r) : f = f^\kappa\}$, $C_c^{m,\kappa}(B_r) = (C^{m,\kappa} \cap C_c)(B_r)$. Отображение $f \rightarrow f^\kappa$ распространяется на распределения по формуле $\langle T^\kappa, \psi \rangle = \langle T, \psi^{-\kappa} \rangle$, $T \in \mathcal{D}'(B_r)$, $\psi \in \mathcal{D}(B_r)$. Это позволяет ввести аналоги указанных классов для распределений следующим образом: $\mathcal{D}'_\kappa(B_r) = \{T \in \mathcal{D}'(B_r) : T = T^\kappa\}$, $\mathcal{E}'_\kappa(B_r) = (\mathcal{D}'_\kappa \cap \mathcal{E}')(B_r)$.

Зафиксируем число $s \in \mathbb{Z}$. Для функции $f \in C^\infty(\mathbb{H}^2)$ и распределения $T \in \mathcal{D}'_\kappa(\mathbb{H}^2)$ "s"-свертка определяется равенством

$$(f \overset{s}{\times} T)(w) = \left\langle T(z), f \left(\frac{w - z}{1 - z\bar{w}} \right) e_s(z, w) \right\rangle,$$

где $e_s(z, w) = (1 - z\bar{w})^s (1 - \bar{z}w)^{-s}$, $z, w \in \mathbb{D}$. Это определение можно распространить на распределения в $\mathbb{H}^2$ (см. [14]).

Пусть ρ, φ – полярные координаты точки $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Введем функции $\mathcal{H}_{\lambda,\kappa}^s(z) = H_{\lambda,\kappa}^s(\rho) e^{i\kappa\varphi}$, где

$$H_{\lambda,\kappa}^s(\rho) = \rho^{|\kappa|} (1 - \rho^2)^\nu F \left(\nu + s + \frac{|\kappa| - \kappa}{2}, \nu - s + \frac{|\kappa| + \kappa}{2}; |\kappa| + 1; \rho^2 \right),$$

$\nu = \nu(\lambda) = (1 - i\lambda)/2$ и F – гипергеометрическая функция Гаусса. Для $T \in \mathcal{E}'_\kappa(\mathbb{H}^2)$ положим $\mathcal{F}_s^\kappa(T)(\lambda) = \langle T, H_{\lambda,\kappa}^s(\rho) e^{-i\kappa\varphi} \rangle$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Существует единственная биекция $\Lambda_s : \mathcal{E}'_\kappa(\mathbb{H}^2) \rightarrow \mathcal{E}'_\kappa(\mathbb{R})$ такая, что $\widehat{\Lambda_s(T)} = \mathcal{F}_s^0(T)$, $r(\Lambda_s(T)) = r(T)$.

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq -1, -2, \dots$,

$$c_{\alpha,\beta}(\lambda) = \frac{2^{\alpha+\beta+1-i\lambda} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(i\lambda)}{\Gamma((i\lambda + \alpha + \beta + 1)/2) \Gamma((i\lambda + \alpha - \beta + 1)/2)}.$$

Далее будем рассматривать случай, когда $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, $\beta \in \mathbb{Z}$. Если $|\beta| > \alpha + 1$, то функция $(c_{\alpha,\beta}(-\lambda))^{-1}$ имеет только простые полюсы в верхней полуплоскости, расположенные в конечном множестве $\mathcal{P}_{\alpha,\beta} = \{i(|\beta| - \alpha - 1 - 2m) : m \in \mathbb{Z}_+, |\beta| - \alpha - 1 - 2m > 0\}$.

Обозначим $r_{\alpha,\beta}(\lambda) = -i \operatorname{Res}_{z=\lambda} (c_{\alpha,\beta}(z) c_{\alpha,\beta}(-z))^{-1}$, $\lambda \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}$. Если $|\beta| \leq \alpha + 1$, то $\mathcal{P}_{\alpha,\beta} = \emptyset$. Встречающиеся ниже суммы с пустым множеством индексов суммирования считаются равными нулю.

Пусть $\alpha = |\kappa|$, $\beta = 2s - \kappa$. Для $f \in \mathcal{E}'_{\kappa}(\mathbb{H}^2)$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ положим

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{A}_{\kappa}^s(f), \psi \rangle &= \frac{2^{2\alpha+2\beta-1}}{\pi^2} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_s^{\kappa}(f)(\lambda) |c_{\alpha,\beta}(\lambda)|^{-2} (\widehat{\psi}(\lambda) + \widehat{\psi}(-\lambda)) d\lambda + \\ &+ \frac{4^{\alpha+\beta}}{\pi} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_{\alpha,\beta}} r_{\alpha,\beta}(\lambda) \mathcal{F}_s^{\kappa}(f)(\lambda) (\widehat{\psi}(\lambda) + \widehat{\psi}(-\lambda)). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что $\mathfrak{A}_{\kappa}^s(f) \in \mathcal{D}'_{\natural}(\mathbb{R})$. Оператор $\mathfrak{A}_{\kappa}^s$ можно продолжить на пространство $\mathcal{D}'_{\kappa}(B_R)$, $R \in (0, +\infty]$, по формуле $\langle \mathfrak{A}_{\kappa}^s(f), \psi \rangle = \langle \mathfrak{A}_{\kappa}^s(f\eta), \psi \rangle$, $f \in \mathcal{D}'_{\kappa}(B_R)$, $\psi \in \mathcal{D}(-R, R)$, где η – произвольная функция из $C_c^{\infty,0}(B_R)$, равная единице в $B_{r(\psi)+\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon \in (0, R - r(\psi))$.

Обобщим определение функций $\mathcal{H}_{\lambda,\kappa}^s$ следующим образом:

$$\mathcal{H}_{\lambda,\kappa}^{s,\mu}(z) = \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^{\mu} \mathcal{H}_{\lambda,\kappa}^s(z), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \mu \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\mathcal{H}_{0,\kappa}^{s,\mu}(z) = \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^{2\mu} \mathcal{H}_{\lambda,\kappa}^s(z) \Big|_{\lambda=0}.$$

Теорема 3.3. При $R \in (0, +\infty]$, $N \in \mathbb{Z}_+$ и $n = N + \alpha + 3$ имеют место следующие утверждения.

- (i) Пусть $f \in \mathcal{D}'_{\kappa}(B_R)$, $r \in (0, R]$. Тогда $f = 0$ в B_r в том и только том случае, когда $\mathfrak{A}_{\kappa}^s(f) = 0$ на $(-r, r)$.
- (ii) Если $f \in \mathcal{D}'_{\kappa}(B_R)$, $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{H}^2)$ и $r(T) < R$, то на интервале $(r(T) - R, R - r(T))$ справедливо равенство $\mathfrak{A}_{\kappa}^s(f \overset{s}{\times} T) = \mathfrak{A}_{\kappa}^s(f) * \Lambda_s(T)$.
- (iii) Если $f \in C^{n,\kappa}(B_R)$, то $\mathfrak{A}_{\kappa}^s(f) \in C_{\natural}^N(-R, R)$ и $f_{\kappa}(\operatorname{th} \rho) = \int_0^{\rho} \mathfrak{A}_{\kappa}^s(f)(t) Q_{\alpha,\beta}(\rho, t) dt$, $\rho \in (0, R)$, где

$$\begin{aligned} Q_{\alpha,\beta}(\rho, t) &= \frac{2^{3/2} \Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} (\operatorname{sh} 2\rho)^{-\alpha} (\operatorname{ch} 2\rho - \operatorname{ch} 2t)^{\alpha - \frac{1}{2}} \cdot \\ &\cdot F \left(\alpha + \beta, \alpha - \beta; \alpha + \frac{1}{2}; \frac{\operatorname{ch} \rho - \operatorname{ch} t}{2 \operatorname{ch} \rho} \right). \end{aligned}$$

- (iv) Отображение $\mathfrak{A}_{\kappa}^s$ действует непрерывно из $\mathcal{D}'_{\kappa}(B_R)$ в $\mathcal{D}'_{\natural}(-R, R)$ и из $C^{n,\kappa}(B_R)$ в $C_{\natural}^N(-R, R)$.

- (v) Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\mathfrak{A}_{\kappa}^s(\mathcal{H}_{\lambda,\kappa}^{s,\mu}) = u_{\lambda,\mu}$.

Доказательство теоремы 3.3 было получено в работе [14] (см. также [13] относительно случая $\kappa = 0$). Отметим, что при $s = 0$ операторы $\mathfrak{A}_\kappa^s$ являются трансмутационными преобразованиями обычной свертки на гиперболической плоскости в свертку на вещественной оси.

6. Операторы преобразования " $\diamond$ " -свертки на $\mathbb{H}^2$. В этом разделе мы сформулируем аналог теоремы 3.3 для обобщенной свертки на гиперболической плоскости другого вида.

Определим " $\diamond$ " -свертку функции $f \in C^\infty(\mathbb{H}^2)$ и распределения $T \in \mathcal{D}'_b(\mathbb{H}^2)$ равенством

$$(f \diamond T)(z) = \left\langle T(w), f\left(\frac{z-w}{1-w\bar{z}}\right) \overline{e(w, z)} \right\rangle,$$

где $e(z, w) = (1 - |z|^2)^2(1 - z\bar{w})^{-2}$, $z, w \in \mathbb{D}$ (см. [15]). Стандартным приемом эта свертка распространяется на распределения в $\mathbb{H}^2$.

Пусть $\mathcal{H}_{\lambda, k}(z) = H_{\lambda, k}(\rho) e^{ik\varphi}$, где

$$H_{\lambda, k}(\rho) = \rho^{|k|} (1 - \rho^2)^\nu F\left(\nu + 2 + \frac{|k| - k}{2}, \nu + \frac{|k| + k}{2}; |k| + 1; \rho^2\right),$$

$\nu = \nu(\lambda) = (i\lambda - 1)/2$. Для $T \in \mathcal{E}'_k(\mathbb{H}^2)$, $k \in \mathbb{Z}$, положим

$$\mathcal{F}_k(T)(\lambda) = \langle T(z), (1 - |z|^2)^2 \overline{\mathcal{H}_{\bar{\lambda}, k}(z)} \rangle = \langle T(z), (1 - |z|^2)^2 H_{\lambda, k}(\rho) e^{-ik\varphi} \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Можно доказать существование и единственность биекции $\Lambda: \mathcal{E}'_b(\mathbb{H}^2) \rightarrow \mathcal{E}'_b(\mathbb{R})$ такой, что $\widehat{\Lambda(T)} = \mathcal{F}_0(T)$, $r(\Lambda(T)) = r(T)$.

Пусть $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha = |k|$, $\beta = 2 - k$. Для $f \in \mathcal{E}'_k(\mathbb{H}^2)$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ положим

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{A}_k(f), \psi \rangle &= \frac{2^{2\alpha+2\beta-1}}{\pi^2} \int_0^\infty \mathcal{F}_k(f)(\lambda) |c_{\alpha, \beta}(\lambda)|^{-2} (\widehat{\psi}(\lambda) + \widehat{\psi}(-\lambda)) d\lambda + \\ &+ \frac{4^{\alpha+\beta}}{\pi} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_{\alpha, \beta}} r_{\alpha, \beta}(\lambda) \mathcal{F}_k(f)(\lambda) (\widehat{\psi}(\lambda) + \widehat{\psi}(-\lambda)). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что $\mathfrak{A}_k(f) \in \mathcal{D}'_b(\mathbb{R})$. Оператор $\mathfrak{A}_k$ можно продолжить на пространство $\mathcal{D}'_k(B_R)$, $R \in (0, +\infty]$, по формуле $\langle \mathfrak{A}_k(f), \psi \rangle = \langle \mathfrak{A}_k(f\eta), \psi \rangle$, $f \in \mathcal{D}'_k(B_R)$, $\psi \in \mathcal{D}(-R, R)$, где η – произвольная функция из $C_c^{\infty, 0}(B_R)$, равная единице в $B_{r(\psi)+\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon \in (0, R - r(\psi))$.

Обобщая определение функций $\mathcal{H}_{\lambda, k}$, положим

$$\mathcal{H}_{\lambda, k}^\mu(z) = \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^\mu (\mathcal{H}_{\lambda, k}(z)), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \mu \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\mathcal{H}_{0, k}^\mu(z) = \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{2\mu} (\mathcal{H}_{\lambda, k}(z))|_{\lambda=0}.$$

Теорема 3.4. При $R \in (0, +\infty]$, $N \in \mathbb{Z}_+$ и $n = N + \alpha + 3$ имеют место следующие утверждения.

- (i) Пусть $f \in \mathcal{D}'_k(B_R)$, $r \in (0, R]$. Тогда $f = 0$ в B_r в том и только том случае, когда $\mathfrak{A}_k(f) = 0$ на $(-r, r)$.

- (ii) Если $f \in \mathcal{D}'_k(B_R)$, $T \in \mathcal{E}'_k(\mathbb{H}^2)$ и $r(T) < R$, то на интервале $(r(T) - R, R - r(T))$ справедливо равенство $\mathfrak{A}_k(f \diamond T) = \mathfrak{A}_k(f) * \Lambda(T)$.
- (iii) Если $f \in C^{n,k}(B_R)$, то $\mathfrak{A}_k(f) \in C^N_{\mathbb{H}}(-R, R)$ и $f_k(\text{th}\rho) = \int_0^\rho \mathfrak{A}_k(f)(t) Q_{\alpha,\beta}(\rho, t) dt$, $\rho \in (0, R)$, где

$$Q_{\alpha,\beta}(\rho, t) = \frac{2^{3/2-\alpha} \Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \frac{(\text{ch } \rho)^{2-\alpha}}{(\text{sh } \rho)^\alpha} (\text{ch } 2\rho - \text{ch } 2t)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cdot F\left(\alpha+\beta, \alpha-\beta; \alpha+\frac{1}{2}; \frac{\text{ch } \rho - \text{ch } t}{2 \text{ch } \rho}\right).$$

- (iv) Отображение $\mathfrak{A}_k$ действует непрерывно из $\mathcal{D}'_k(B_R)$ в $\mathcal{D}'_{\mathbb{H}}(-R, R)$ и из $C^{n,k}(B_R)$ в $C^N_{\mathbb{H}}(-R, R)$.
- (v) Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\mathfrak{A}_k(\mathcal{H}^\mu_{\lambda,k}) = u_{\lambda,\mu}$.

Доказательство теоремы 3.4 проводится методами работы [14] (см. также [15] относительно случая $k = 0$).

7. Операторы преобразования свертки на двухточечно-однородных пространствах. Как известно (см. [20, гл. 1, § 4, п. 2,3]), всякое риманово двухточечно-однородное пространство X изометрично одному из следующих пространств: 1) вещественному евклидову пространству $\mathbb{R}^n$; 2) гиперболическому пространству $\mathbb{H}^n_{\mathbb{K}}$ ($\mathbb{K}$ обозначает поля $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, или тело кватернионов $\mathbb{Q}$); 3) гиперболической плоскости Кэли $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}a}$; 4) евклидовой сфере $\mathbb{S}^n$; 5) проективному пространству $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$; 6) проективной плоскости Кэли $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}a}$. Случай $X = \mathbb{R}^n$ далее не рассматривается (см. § 3 выше).

Пусть $\mathfrak{X}_1$ – класс некомпактных пространств X , отличных от $\mathbb{R}^n$, а $\mathfrak{X}_2$ – класс компактных X . Если $X \in \mathfrak{X}_1$, условимся, что максимум секционной кривизны X равен -1 , а в случае $X \in \mathfrak{X}_2$ предположим, что минимум секционной кривизны X равен 1. Кроме того, будем считать, что вещественная размерность a_X пространства X не меньше 2. Пространства $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ имеют постоянную кривизну. Этот класс двухточечно-однородных пространств обозначим $\mathfrak{X}_3$.

Определим $\mathcal{X} = \{x \in X : d(o, x) < \text{diam } X\}$, где $d(\cdot, \cdot)$ – функция расстояния на X , o – фиксированная точка (начало) в X , $\text{diam } X = \sup_{x,y \in X} d(x, y)$. Тогда $\mathcal{X}$ можно рассмат-

ривать как риманово многообразие $(\mathcal{D}, ds^2)$, где область $\mathcal{D}$ задается следующим образом: 1) $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{K}}$: $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{K}^n : |x| < 1\}$; 2) $X = \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}a}$: $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^{16} : |x| < 1\}$; 3) $X = \mathbb{S}^n$: $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$; 4) $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$: $\mathcal{D} = \mathbb{K}^n$; 5) $X = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}a}$: $\mathcal{D} = \mathbb{R}^{16}$ (см. [10, часть 1, гл. 2, 3], где содержатся также явные формулы для римановой метрики ds^2). Далее будут использоваться указанные реализации для $\mathcal{X}$. Произвольная точка $x \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$ представима в виде $x = \varrho\sigma$, где $\varrho = |x|$, $\sigma = x/|x|$.

Расстояние до нуля на X в указанных выше моделях определяется равенствами $d(0, x) = \text{arth } |x|$, если $X \in \mathfrak{X}_1$, и $d(0, x) = \text{arctg } |x|$, если $X \in \mathfrak{X}_2$. Для вычисления расстояния между любыми двумя точками в X можно использовать эти формулы и условие инвариантности d относительно группы изометрий G пространства X . Соотношение для $d(0, x)$ показывает, что геодезический шар $B_R = \{x \in X : d(0, x) < R\}$ ($0 < R \leq \text{diam } X$) совпадает с открытым евклидовым шаром из $\mathbb{R}^{a_X}$ с центром в нуле и соответствующим радиусом. Будем обозначать через Ω функцию, обратную к функции $\Omega^{-1}(r) = d(0, r\mathbf{e})$, где $\mathbf{e} = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{a_X}$.

Положим $\alpha_X = -1 + a_X/2$, а $\beta_X = n/2 - 1, -1/2, 0, 1, 3$ соответственно в каждом из следующих пяти случаев: 1) $X = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n, X = \mathbb{S}^n$; 2) $X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$; 3) $X = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n, X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$; 4) $X = \mathbb{H}_{\mathbb{Q}}^n, X = \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$; 5) $X = \mathbb{H}_{\mathbb{C}a}^2, X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}a}^2$. Параметры α_X, β_X и $\rho_X = \alpha_X + \beta_X + 1$ просто выражаются через кратности корневых подпространств алгебры Ли группы G (см. [20, гл. 1, § 4, п. 2], [21, гл. 1, § 11]). Риманова мера на $\mathcal{X}$ имеет вид $d\mu(x) = (1 + \varepsilon_X |x|^2)^{-\rho_X - 1} dx$, где $\varepsilon_X = -1$, если $X \in \mathfrak{X}_1$, и $\varepsilon_X = 1$, если $X \in \mathfrak{X}_2$. Наличие здесь (и в формулах ниже) множителя ε_X является проявлением известной двойственности между пространствами компактного и некомпактного типа. Площадь сферы радиуса r в X связана с площадью b_X единичной сферы в $\mathbb{R}^{a_X}$ равенством $A_X(r) = b_X(\Omega(r))^{2\alpha_X + 1} (1 + \varepsilon_X \Omega^2(r))^{-\rho_X}$.

Пусть $\mathcal{H}_{a_X}^k$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) – пространство однородных гармонических многочленов степени k в $\mathbb{R}^{a_X}$. Положим $M_X(k) = 0$, если $X \in \mathfrak{X}_3$, и $M_X(k) = [k/2]$, если $X \notin \mathfrak{X}_3$. Для $m \in \{0, \dots, M_X(k)\}$, $X \notin \mathfrak{X}_3$ определим $\mathcal{H}_X^{k,m} = \{f \in \mathcal{H}_{a_X}^k : (Lf)(x) = 4\varepsilon_X(m - \beta_X)(k - m)(1 + \varepsilon_X |x|^2)f(x)\}$. В случае, когда $X \in \mathfrak{X}_3$, положим $\mathcal{H}_X^{k,m} = \mathcal{H}_{a_X}^k$. После отождествления $\mathcal{H}_X^{k,m}$ с пространством сужений его элементов на сферу $\mathbb{S}^{a_X-1} = \{x \in \mathbb{R}^{a_X} : |x| = 1\}$, $\mathcal{H}_X^{k,m}$ становится инвариантным подпространством квазирегулярного представления $\mathfrak{T}$ группы $K = G \cap O(a_X)$ на $L^2(\mathbb{S}^{a_X-1})$. Сужения $\mathfrak{T}^{k,m}$ представления $\mathfrak{T}$ на $\mathcal{H}_X^{k,m}$ являются попарно неэквивалентными неприводимыми унитарными представлениями, причем имеет место следующее разложение в ортогональную прямую сумму: $\mathfrak{T} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_X(k)} \mathfrak{T}^{k,m}$ (см. [10, часть 1, гл. 4]).

Пусть $d_X^{k,m}$ – размерность $\mathcal{H}_X^{k,m}$, $\{Y_j^{k,m}\}$ – фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}_X^{k,m}$ относительно поверхностной меры $d\omega$ на $\mathbb{S}^{a_X-1}$, $Y_1^{0,0} = 1/\sqrt{b_X}$. Всякое распределение $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ представимо в виде

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_X(k)} \sum_{j=1}^{d_X^{k,m}} f^{k,m,j}, \quad (3.3)$$

где ряд (3.3) сходится к f в $\mathcal{D}'(B_R)$ и распределение $f^{k,m,j}$ действует на пространстве основных функций $\mathcal{D}(B_R)$ по правилу

$$\langle f^{k,m,j}, \psi \rangle = \left\langle f, \overline{Y_j^{k,m}(\sigma)} \int_{\mathbb{S}^{a_X-1}} \psi(\varrho\sigma') Y_j^{k,m}(\sigma') d\omega(\sigma') \right\rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(B_R).$$

Для всякого множества $\mathfrak{W}(B_R) \subset \mathcal{D}'(B_R)$ положим $\mathfrak{W}_{k,m,j}(B_R) = \{f \in \mathfrak{W}(B_R) : f = f^{k,m,j}\}$.

Далее, введем функции на $\mathcal{X} \setminus \{0\}$, получающиеся при разделении переменных в полярных координатах в уравнении на собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами. Обозначим $\mathcal{N}_X(k) = (k+1)/2$ для $X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$, $\mathcal{N}_X(k) = k$ для $X \neq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$, $\alpha(k) = \alpha_X + k$, $\beta(k, m) = \beta_X + 2\mathcal{N}_X(k+1) - k - 2m - 2$. При отождествлении представлений $\mathfrak{T}^{k,m}$ с парами (k, m) , числа $\alpha(k)$ и $\beta(k, m)$ совпадают с параметрами обобщенных сферических функций типа (k, m) на симметрических пространствах ранга один (см. [21, гл. 3, с. 372]). Пусть $\nu_X(\lambda) = (\rho_X + i\lambda)/2$, если $X \in \mathfrak{X}_1$, и $\nu_X(\lambda) = (\rho_X + \lambda)/2$, если $X \in \mathfrak{X}_2$. Положим $\Phi_{\lambda}^{k,m,j}(x) = \sqrt{b_X} \Phi_{\lambda}^{k,m}(\varrho) Y_j^{k,m}(\sigma)$, $x \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$, где

$$\Phi_{\lambda}^{k,m}(\varrho) = \varrho^k (1 + \varepsilon_X \varrho^2)^{m+1-\mathcal{N}_X(k+1)} R_{m+1-\mathcal{N}_X(k+1)-\nu_X(-\lambda)}^{(\alpha(k), \beta(k,m))} \left(\frac{1 - \varepsilon_X \varrho^2}{1 + \varepsilon_X \varrho^2} \right),$$

$R_{\mu}^{(\alpha, \beta)}(t) = F(-\mu, \mu + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; (1-t)/2)$ – функции Якоби первого рода. Нетрудно видеть, что $\Phi_{\lambda}^{k,m,j}$ допускают непрерывное продолжение в точку $x = 0$. Доопределенные

по непрерывности в нуле, функции $\Phi_\lambda^{k,m,j}$ становятся вещественно аналитическими на $\mathcal{X}$ и $(L + \lambda^2 - \varepsilon_X \rho_X^2) \Phi_\lambda^{k,m,j} = 0$, где L – оператор Лапласа-Бельтрами на X (см. [10, доказательство теоремы 11.1]).

Для $f \in \mathcal{E}'_{k,m,j}(\mathcal{X})$ положим $\mathcal{F}_j^{k,m}(f)(\lambda) = \langle f, \overline{\Phi_\lambda^{k,m,j}} \rangle, \lambda \in \mathbb{C}$. Функция $\mathcal{F}_j^{k,m}(f)$ является четной целой функцией переменной λ . Если $f \in \mathcal{E}'_\natural(\mathcal{X})$, то будем писать $\tilde{f}(\lambda)$ вместо $\mathcal{F}_1^{0,0}(f)(\lambda)$, т.е. $\tilde{f}(\lambda) = \langle f, \Phi_\lambda^{0,0,1} \rangle$. Для евклидовых и гиперболических пространств $\tilde{f}$ совпадает со сферическим преобразованием распределения f [10, гл. 10]. Если X – компактно, то $\tilde{f}$ является аналитическим продолжением дискретного преобразования Фурье-Якоби (см. [10, гл. 11]). Теоремы Винера-Пэли для преобразования $\mathcal{F}_j^{k,m}$ и евклидова преобразования Фурье (см. [1, теорема 7.3.1], а также [10, гл. 10, 11]) показывают, что $\tilde{f}(\lambda)$ является преобразованием Фурье распределения из $\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R})$. Обозначим это распределение символом $\Lambda(f)$. Нам потребуется также функция $c_{\alpha,\beta}(\lambda)$, определенная в § 5. При $\alpha = \alpha_X, \beta = \beta_X$ она совпадает с известной функцией Хариш-Чандры для симметрических пространств некомпактного типа ранга один и играет важную роль в теории преобразования Фурье [10, гл. 10].

Пусть $\varkappa_l = \alpha(k) + \beta(k, m) + 1 + 2l$ ($l \in \mathbb{Z}_+$), $\mathfrak{S}_X(k, m) = \mathbb{C}$, если $X \in \mathfrak{X}_1$, и $\mathfrak{S}_X(k, m) = \{\varkappa_l\}_{l=0}^\infty$, если $X \in \mathfrak{X}_2$. При $\lambda = \varkappa_l$ функции $\Phi_\lambda^{k,m}$ на компактных пространствах X выражаются через многочлены Якоби степени l . Более того, если $X \in \mathfrak{X}_2$, то система функций $\{\Phi_{\varkappa_l}^{k,m,j}\}_{l=0}^\infty$ образует ортогональный базис в пространстве $L^2_{k,m,j}(\mathcal{X})$ (см. [10, предложение 11.9]).

Из теоремы Хана-Банаха и инъективности преобразования $\mathcal{F}_j^{k,m}$ следует, что линейная оболочка $\text{Lin}\{\Phi_\lambda^{k,m,j}, \lambda \in \mathfrak{S}_X(k, m)\}$ является плотным множеством в пространстве $\mathcal{E}_{k,m,j}(B_R)$ с топологией, индуцируемой $\mathcal{E}(B_R)$. Определим оператор $\mathfrak{A}_{k,m,j}$ на функциях $\Phi_\lambda^{k,m,j}$ равенством $\mathfrak{A}_{k,m,j}(\Phi_\lambda^{k,m,j})(t) = \cos(\lambda t), \lambda \in \mathbb{C}$. Оператор $\mathfrak{A}_{k,m,j}$ продолжается до гомеоморфизма $\mathcal{D}'_{k,m,j}(B_R)$ на $\mathcal{D}'_\natural(-R, R)$, который будет обозначаться той же буквой. В следующем утверждении содержатся основные свойства отображения $\mathfrak{A}_{k,m,j}$ [10, гл. 11].

Теорема 3.5. (i) *Отображение $\mathfrak{A}_{k,m,j}$ является гомеоморфизмом между $\mathcal{E}_{k,m,j}(B_R)$ и $\mathcal{E}'_\natural(-R, R)$.*

(ii) *Пусть $f \in \mathcal{D}'_{k,m,j}(B_R), r \in (0, R]$. Тогда $f = 0$ в B_r в том и только том случае, когда $\mathfrak{A}_{k,m,j}(f) = 0$ на $(-r, r)$.*

(iii) *Для любого $T \in \mathcal{E}'_\natural(B_R)$ на интервале $(r(T) - R, R - r(T))$ имеет место обобщенное трансмутационное свойство $\mathfrak{A}_{k,m,j}(f \times T) = \mathfrak{A}_{k,m,j}(f) * \Lambda(T), f \in \mathcal{D}'_{k,m,j}(B_R)$, где символом $\times$ обозначается свертка распределений на областях в X .*

(iv) *Пусть $f \in \mathcal{D}'_{k,m,j}(B_R), \psi \in \mathcal{D}(-R, R)$ и η – произвольная функция из $\mathcal{D}_\natural(B_R)$, равная единице в некоторой окрестности шара $\overline{B_{r(\psi)}}$. Тогда:*

1) *если $X \in \mathfrak{X}_1$, то*

$$\langle \mathfrak{A}_{k,m,j}(f), \psi \rangle = \frac{2^{2(\rho_X + 2k - 2m) - 1}}{\pi b_X} \int_0^\infty \frac{\mathcal{F}_j^{k,m}(f\eta)(\lambda) \langle \psi(t), \cos(\lambda t) \rangle}{|c_{\alpha(k), \beta(k, m)}(\lambda)|^2} d\lambda;$$

2) *если $X \in \mathfrak{X}_2$, то*

$$\langle \mathfrak{A}_{k,m,j}(f), \psi \rangle = \sum_{l=0}^\infty \frac{2\varkappa_l}{b_X l!} \frac{\Gamma(\alpha(k) + l + 1) \Gamma(\varkappa_l - l)}{\Gamma(\beta(k, m) + l + 1) \Gamma^2(\alpha(k) + 1)} \mathcal{F}_j^{k,m}(f\eta)(\varkappa_l) \langle \psi(t), \cos(\varkappa_l t) \rangle.$$

(v) Пусть $f \in \mathcal{D}'_q(-R, R)$, $\psi \in \mathcal{D}(B_R)$ и η – произвольная функция из $\mathcal{D}_q(-R, R)$, равная единице в некоторой окрестности отрезка $[-r(\psi), r(\psi)]$. Тогда

$$\langle \mathfrak{A}_{k,m,j}^{-1}(f), \psi \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \widehat{f\eta}(\lambda) \langle \psi, \Phi_\lambda^{k,m,j} \rangle d\lambda.$$

В работе [9] построены аналоги операторов $\mathfrak{A}_{k,m,j}$ для симметрических пространств X некомпактного типа без использования реализаций X . Отметим также, что Д. Зарайский получил аналог теоремы 3.5 для компактных пространств X во внешности шара B_R (см. [10, теорема 11.7]).

8. Проблема Помпейю. Пусть $M(n)$ – группа движений в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Для любых $\psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in M(n)$ определим распределение $g\psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ по формуле $\langle g\psi, f(x) \rangle = \langle \psi, f(g^{-1}x) \rangle$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Обозначим через $r(\psi)$ радиус наименьшего замкнутого шара, содержащего носитель ψ . Если $r(\psi) < R$, положим $M_{\psi,R} = \{g \in M(n) : \text{supp } g\psi \subset B_R\}$.

Пусть A – некоторое непустое множество индексов, $\Psi = \{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – семейство распределений из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ такое, что $r(\psi_\alpha) < R \leq +\infty$ для всех $\alpha \in A$. Будем говорить, что Ψ имеет *свойство Помпейю* в шаре B_R , если для любой $f \in C^\infty(B_R)$ из условия $\langle g\psi_\alpha, f \rangle = 0$ при всех $\alpha \in A$ и всех $g \in M_{\psi_\alpha,R}$ следует, что $f = 0$.

Наиболее интересный случай (соответствующий классической проблеме Помпейю) возникает, когда семейство Ψ состоит из единственного распределения ψ , совпадающего с характеристической функцией некоторого компакта E в $\mathbb{R}^n$. В этом случае E называется множеством Помпейю в шаре B_R , если соответствующее Ψ имеет свойство Помпейю в B_R .

Одним из важнейших приложений теоремы 3.1 является следующий результат.

Теорема 3.6. Пусть $n \geq 2$ и $\Psi = \{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – семейство распределений из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ такое, что $\inf_{\alpha \in A} r(\psi_\alpha) + \sup_{\alpha \in A} r(\psi_\alpha) < R$ для некоторого $R > 0$. Тогда Ψ имеет свойство Помпейю в шаре B_R тогда и только тогда, когда оно имеет свойство Помпейю в $\mathbb{R}^n$.

Следствие 3.1. Пусть E – непустое компактное множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть r_E – радиус наименьшего замкнутого шара в $\mathbb{R}^n$, содержащего E . Тогда, если E является множеством Помпейю в $\mathbb{R}^n$ и $R > 2r_E$, то E является множеством Помпейю в шаре B_R .

Отметим, что для любого $\varepsilon > 0$ из неравенства $R > (2 - \varepsilon)r_E$ не следует, вообще говоря, что E – множество Помпейю в B_R (см. [17, часть 4, теорема 1.6]). Аналоги следствия 3.1 при различных дополнительных ограничениях, связанных с регулярностью границы множества E , были получены в [22] и [17, часть 4]. Относительно других результатов по проблеме Помпейю см. [17, 23–26].

9. Проблема спектрального синтеза. Пусть $\mathcal{G}$ – некомпактная группа Ли, действующая транзитивно на гладком многообразии $\mathcal{M}$, gx – образ точки $x \in \mathcal{M}$ при отображении $g \in \mathcal{G}$,

$$(\mathfrak{T}_g f)(x) = f(g^{-1}x), \quad f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}). \quad (3.4)$$

Как известно, операторы $\mathfrak{T}_g$, $g \in \mathcal{G}$ образуют квазирегулярное представление группы $\mathcal{G}$.

Подпространство (замкнутое) $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}(\mathcal{M})$ называется *инвариантным относительно сдвигов*, если оно является инвариантным подпространством представления (3.4), то есть для любой функции $f \in \mathcal{U}$ все сдвиги $\mathfrak{T}_g f$, $g \in \mathcal{G}$ также принадлежат $\mathcal{U}$. Предположим, что $\mathcal{U}$ содержит корневые векторы некоторого дифференциального оператора, порожденного инфинитезимальными операторами представления $\mathfrak{T}_g$. Задача *спектрального синтеза* для подпространства $\mathcal{U}$ состоит в выяснении возможности аппроксимации элементов из

$\mathcal{U}$ линейными комбинациями корневых векторов, содержащихся в $\mathcal{U}$. Она представляет значительный самостоятельный интерес, а также тесно связана с теорией уравнений свертки, преобразованием Помпейю и рядом других вопросов современной математики (см. [10, 12, 23]).

Сложность и методы решения задачи спектрального синтеза существенно зависят от группы $\mathcal{G}$ и пространства $\mathcal{M}$. Первый нетривиальный случай был рассмотрен Л. Шварцем в 1947 году [27, § 7]. Он доказал, что всякое подпространство в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, инвариантное относительно сдвигов $f(x) \rightarrow f(x+h)$, $h \in \mathbb{R}$, совпадает с замыканием линейной оболочки содержащихся в нем экспоненциальных полиномов, то есть функций вида $p(x)e^{\lambda x}$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $p(x)$ – многочлен. Отметим, что экспоненциальный моном $x^m e^{\lambda x}$ является корневым вектором оператора дифференцирования $\frac{d}{dx}$, поскольку

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda \text{Id}\right)^{m+1} (x^m e^{\lambda x}) = 0.$$

В той же работе Л. Шварц предположил (см. [27, § 22]), что аналог его одномерного результата справедлив и для $\mathcal{M} = \mathcal{G} = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, если вместо $p(x)$ рассматривать многочлены n переменных, а $e^{\lambda x}$ заменить на функцию $e^{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}$ ($\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$). Дальнейшие исследования подтвердили предположение Шварца для некоторых классов инвариантных подпространств. В 1956 г. Б. Мальгранж [28] установил аналог теоремы Шварца для пространства решений $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ уравнений свертки вида $f * T = 0$, $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. В работах [29], [30] найдено экспоненциальное представление решений произвольной системы однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В 1973 г. Л. Браун, Б. М. Шрейбер и Б. А. Тейлор [31] получили положительный ответ на проблему Шварца для случая, когда $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, а $\mathcal{G}$ – группа движений пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Однако в общем случае гипотеза Шварца оказалась неверной. В 1975 г. Д. И. Гуревич [32] построил систему уравнений свертки

$$f * T_1 = f * T_2 = \dots = f * T_6 = 0, \quad T_1, \dots, T_6 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n), \quad n \geq 2,$$

пространство решений которой является ненулевым, но не содержит ни одного экспоненциального полинома. Позже были изучены пространства решений общих систем сверточных уравнений в $\mathbb{R}^n$ [23, 33]. При этом спектральный синтез получается как следствие обобщенного фундаментального принципа Эренпрейса-Паламодова [29], [30]. Вопрос же об описании всех инвариантных подпространств в случае $\mathcal{M} = \mathcal{G} = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ остается открытым.

Начиная с конца семидесятых годов двадцатого века задачу спектрального синтеза стали исследовать для римановых симметрических пространств $X = G/K$ некомпактного типа (здесь G – связная некомпактная полупростая группа Ли с конечным центром, K – её максимальная компактная подгруппа, см., например, [20]). Наиболее изученным является случай пространств X ранга один. Первые результаты в этом направлении принадлежат С. К. Багши и А. Ситараму [34]. Для любого подпространства $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}(X)$, инвариантного относительно сдвигов $\mathfrak{T}_g$, $g \in G$, они выяснили структуру пространства $\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}$, состоящего из K -инвариантных элементов в $\mathcal{U}$. Оказалось, что сферические функции φ_λ на X и их производные $\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^j \varphi_\lambda$, содержащиеся в $\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}$, порождают все пространство $\mathcal{U}_{\mathfrak{g}}$. В 1987 г. А. Ваврынчик [35] доказал теорему о спектральном синтезе для инвариантных

подпространств $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}(X)$, спектр которых не содержит нулей s -функции Хариш-Чандры. Аналогом экспоненциальных полиномов в этом случае являются плоские волны $e_{\lambda,b}$ на X и их λ -производные. Указанные функции являются корневыми векторами оператора Лапласа-Бельтрами на пространстве X . Доказательства в [35] используют технику преобразования Фурье на симметрических пространствах, разработанную С. Хелгасоном [21]. Полное описание инвариантных подпространств в $\mathcal{E}(X)$ было получено другими методами в работе [36]. Отметим, что методы из [36] позволяют изучить также строение инвариантных подпространств в некоторых функциональных пространствах, отличных от $\mathcal{E}(X)$ (см. [37], [38] и имеющиеся там ссылки). Для симметрических пространств ранга ≥ 2 ситуация становится гораздо сложнее. Отдельные частные результаты, касающиеся этого случая, а также пространств Деймека-Риччи содержатся в работах [34], [39]–[40].

Еще одним важным направлением в рассматриваемой тематике является задача спектрального синтеза для двустороннеинвариантных подпространств функций на некомпактных группах Ли $\mathfrak{G}$. В контексте общей постановки проблемы это соответствует случаю, когда $\mathcal{G} = \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$, $\mathcal{M} = \mathfrak{G}$ и $\mathcal{G}$ действует на $\mathcal{M}$ по правилу $(g_1, g_2)h = g_1 h g_2^{-1}$, $(g_1, g_2) \in \mathcal{G}$, $h \in \mathcal{M}$. Л. Эренпрейс и Ф. Маутнер [41] решили задачу спектрального синтеза для группы конформных автоморфизмов единичного круга, а И. Вейт [42] – для группы движений евклидовой плоскости. В работах [43], [44] другими методами найдено описание биинвариантных подпространств в некоторых пространствах на этих группах, состоящих из функций с ограничениями на рост. Подобные результаты для группы $SL(2, \mathbb{C})$ и простейшей разрешимой группы Ли установлены в [45], [46]. Приведем формулировку теоремы о спектральном синтезе, доказанную в [41].

Пусть $G = PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm 1\}$. Произвольный элемент $g \in G$ имеет вид

$$g = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1.$$

Для $\lambda \in \mathbb{C}$ и целых чисел m, n положим

$$u_{m,n}(g, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\bar{b}e^{i\theta} + \bar{a}|^{-2\lambda} \left(\frac{ae^{i\theta} + b}{\bar{b}e^{i\theta} + \bar{a}} \right)^m e^{-in\theta} d\theta.$$

Функции $u_{m,n}(g, \lambda)$ являются матричными элементами основной серии представлений группы G в базисе $\{e^{ip\theta}, p \in \mathbb{Z}\}$. При этом $L_G u_{m,n}(g, \lambda) = \lambda(1 - \lambda)u_{m,n}(g, \lambda)$, где L_G – оператор Лапласа на группе G (см. [41, формула (4.9)]).

Теорема 3.7. ([41, § 6]) Пусть $\mathcal{U}$ – собственное подпространство в $\mathcal{E}(G)$, инвариантное относительно двусторонних сдвигов $f(g) \rightarrow f(g_1 g g_2)$, $g_1, g_2 \in G$. Тогда $\mathcal{U}$ совпадает с наименьшим подпространством в $\mathcal{E}(G)$, которое содержит все функции

$$\left(\frac{d}{d\lambda} \right)^j u_{m,n}(g, \lambda) \in \mathcal{U}.$$

Одним из следствий этого результата является соответствующая теорема о спектральном анализе: всякое собственное биинвариантное подпространство $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}(G)$ содержит ненулевую функцию вида $\left(\frac{d}{d\lambda} \right)^j u_{m,n}(g, \lambda)$ при некоторых $\lambda \in \mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Доказательство указанных фактов основано на применении техники классического гармонического анализа на группе G , существенно использующей двустороннюю инвариантность $\mathcal{U}$.

В недавней статье авторов [13] было обнаружено, что аналог приведенной теоремы Эренпрейса-Маутнера о спектральном анализе остается в силе, если рассматривать подпространства $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}(G)$, инвариантные только относительно односторонних G -сдвигов и сопряжений из подгруппы вращений. В связи с этим, естественно, возник вопрос о справедливости теоремы 3.7 для подпространств $\mathcal{U}$ с такими свойствами. Сформулируем основной результат работы [14], в которой дан ответ на указанный вопрос.

Будем теперь рассматривать G как группу конформных автоморфизмов единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Для любого $g \in G$ существуют и определяются однозначно числа $\tau, z \in \mathbb{C}$, такие, что $|\tau| = 1$, $|z| < 1$ и $g(w) = \tau(w - z)(1 - \bar{z}w)^{-1}$ при всех $w \in \mathbb{D}$. Отождествим элемент $g \in G$ с парой (τ, z) . Обозначим через K группу поворотов плоскости $\mathbb{C}$. Тогда $K \subset G$ и для любого $g \in K$ имеем $g = (\tau, 0)$ при некотором $\tau \in \mathbb{C}$, $|\tau| = 1$.

Символом $\text{cl}_{\mathcal{X}} M$ будем обозначать замыкание множества M в топологическом векторном пространстве $\mathcal{X}$. Пусть также $\text{Lin } E$ – линейная оболочка заданного множества $E \subset \mathcal{X}$.

Теорема 3.8. Пусть $\mathcal{U}$ – ненулевое подпространство в $\mathcal{E}(G)$, инвариантное относительно сдвигов $f(g) \rightarrow f(kgh)$, $k \in K$, $h \in G$. Тогда

$$\mathcal{U} = \text{cl}_{\mathcal{E}(G)} \text{Lin} \{ \mathcal{H}_{\lambda, \kappa}^{s, \mu}(z) \tau^s \in \mathcal{U} : \lambda \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{Z}_+, s, \kappa \in \mathbb{Z} \}.$$

Доказательство теоремы 3.8 основано на результатах § 5 и теореме о спектральном синтезе в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ (см. [27]). Используя свойства операторов $\mathfrak{A}_{p, q, l}$ из § 4, можно получить теорему о спектральном синтезе для подпространств в $\mathcal{E}(\mathbb{C}^n)$, инвариантных относительно унитарной группы $U(n)$ и искаженных сдвигов, а также ее аналог для редуцированной группы Гейзенберга H_{red}^n . Сформулируем соответствующие результаты.

Определим функции $\Phi_{\lambda, \mu, p, q, l}^s$ ($s \in \mathbb{Z}$) с помощью соотношения

$$\Phi_{\lambda, \mu, p, q, l}^s(z) = \begin{cases} \phi_{\lambda, \mu, p, q, l}(\sqrt{-s} z), & s < 0 \\ \phi_{\lambda, \mu, p, q, l}(\sqrt{s} z), & s > 0 \\ \Phi_{\lambda, \mu, p, q, l}(z), & s = 0. \end{cases}$$

Теорема 3.9. Пусть $s \in \mathbb{Z}$, V – ненулевое подпространство в $\mathcal{E}(\mathbb{C}^n)$, инвариантное относительно унитарной группы $U(n)$ и сдвигов $f(z) \rightarrow f(z + w) e^{\frac{i}{2} s \text{Im} \langle z, w \rangle}$, $w \in \mathbb{C}^n$. Тогда

$$V = \text{cl}_{\mathcal{E}(\mathbb{C}^n)} \text{Lin} \{ \Phi_{\lambda, \mu, p, q, l}^s \in V : \lambda \in \mathbb{C}, \mu, p, q \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq l \leq d(n, p, q) \}.$$

Вещественная $(2n+1)$ -мерная группа Гейзенберга H^n представляет собой множество $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ с законом умножения

$$(z, t)(w, s) = \left(z + w, t + s + \frac{1}{2} \text{Im} \langle z, w \rangle \right), \quad z, w \in \mathbb{C}^n, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Факторизация H^n по подгруппе $\{(0, 2\pi k) : k \in \mathbb{Z}\}$ порождает редуцированную группу Гейзенберга H_{red}^n , функции на которой отождествляются с 2π -периодическими по переменной t функциями на H^n . Далее будем записывать элементы H_{red}^n в виде (z, t) , $z \in \mathbb{C}^n$, $-\pi \leq t < \pi$.

Теорема 3.10. Пусть $\mathcal{U}$ – ненулевое подпространство в $\mathcal{E}(H_{\text{red}}^n)$, инвариантное относительно сдвигов $f(z, t) \rightarrow f((z, t)(w, \alpha))$, $(w, \alpha) \in H_{\text{red}}^n$ и преобразований $f(z, t) \rightarrow f(\tau z, t)$, $\tau \in U(n)$. Тогда

$$\mathcal{U} = \text{cl}_{\mathcal{E}(H_{\text{red}}^n)} \text{Lin} \left\{ \Phi_{\lambda, \mu, p, q, l}^s(z) e^{ist} \in \mathcal{U} : \lambda \in \mathbb{C}, \mu, p, q \in \mathbb{Z}_+, s \in \mathbb{Z}, 1 \leq l \leq d(n, p, q) \right\}.$$

Частные случаи теорем 3.9, 3.11 (теоремы о спектральном анализе) были получены авторами в работе [8]. Там же приводятся некоторые более слабые результаты предшественников.

10. Теоремы типа Мореры в гиперболическом диске.

Пусть, как и выше, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, G – группа конформных автоморфизмов круга $\mathbb{D}$, $\gamma_\varrho = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \varrho\}$. В связи с классической теоремой Мореры в ряде работ (см., например, [17], [24]) рассматривался следующий вопрос. Верно ли, что при фиксированном $\varrho \in (0, 1)$ и $f \in C(\mathbb{D})$ условие

$$\int_{g(\gamma_\varrho)} f(z) dz = 0 \quad \forall g \in G \quad (3.5)$$

влечет голоморфность функции f ? В общем случае ответ отрицательный, однако при некоторых дополнительных предположениях голоморфность f имеет место. Одним из таких предположений является ограничение роста f при подходе к границе $\mathbb{D}$. Другой тип условий, обеспечивающих голоморфность f , связан с увеличением числа возможных значений ϱ в уравнении (3.5). Вопросы такого типа тесно примыкают к проблеме инъ-ективности преобразования Помпейю и привлекают внимание многих математиков (см. обзоры [23–25] с обширной библиографией, а также монографии [10, 12, 17]).

Для уравнения (3.5) вопрос о голоморфности f сводится к исследованию класса функций на гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$, имеющих нулевые интегралы по всем гиперболическим кругам одного фиксированного радиуса (см. [17, часть 5, гл. 4]). Принципиально иная картина возникает для уравнения вида

$$\int_{\gamma_\varrho} f(g(z)) dz = 0 \quad \forall g \in G. \quad (3.6)$$

Несмотря на внешнее сходство уравнений (3.6) и (3.5), в этом случае невозможна редукция к преобразованию Помпейю с инвариантной мерой. Сформулируем теорему о двух радиусах для решений уравнения (3.6), установленную Беренстейном и Паскуасом в работе [47].

Теорема 3.11. Пусть $\varrho_1, \varrho_2 \in (0, 1)$ фиксированы, и уравнения

$$P_z^{-1} \left(\frac{1 + \varrho_j^2}{1 - \varrho_j^2} \right) = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (3.7)$$

не имеют общего решения $z \in \mathbb{C}$ (здесь и далее P_z^ν – присоединенная функция Лежандра первого рода [19]). Тогда, если функция $f \in C(\mathbb{D})$ удовлетворяет (3.6) для любого $g \in G$ и $\varrho = \varrho_1, \varrho_2$, то f голоморфна в $\mathbb{D}$.

Как отмечено в работе [47], данное утверждение станет неверным, если уравнения (3.7) имеют общее решение $z \in \mathbb{C}$. В частности, если $\varrho \in (0, 1)$ фиксировано, то существует неголоморфная функция $f \in C(\mathbb{D})$, удовлетворяющая (3.6) для любого $g \in G$.

Доказательство теоремы 3.11 основано на применении преобразования Фурье на группе G и теоремы Шварца о спектральном анализе [27].

В работе [15] изучаются точные условия, при которых функция f , удовлетворяющая (3.6) при одном фиксированном ϱ , обязана быть голоморфной. Показано, что одним из таких условий является близость функции f при подходе к границе $\mathbb{D}$ к функции, голоморфной в $\mathbb{D}$. Тем самым обнаружено новое явление – устойчивость свойства голоморфности для функций, удовлетворяющих условию (3.6). Приведем основной результат из [15].

Для $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{D})$ и $R \in [0, 1)$ положим

$$M_R(f) = \int_{|z| \leq R} |f(z)| (1 - |z|)^{-3/2} dm(z),$$

где $dm(z)$ – мера Лебега на плоскости $\mathbb{C}$. Пусть также $\text{Hol}(\mathbb{D})$ – множество функций, голоморфных в $\mathbb{D}$.

Теорема 3.12. Пусть $\varrho \in (0, 1)$ фиксировано. Тогда выполнены следующие утверждения.

(i) Пусть $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{D})$ и

$$\int_{\gamma_g} f(g(z)) dz = 0 \quad (3.8)$$

для почти всех $g \in G$ по мере Хаара. Пусть также

$$\lim_{R \rightarrow 1} \frac{M_R(f - h)}{|\ln(1 - R)|} = 0 \quad (3.9)$$

для некоторой функции $h \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Тогда $f = h$ почти всюду в $\mathbb{D}$.

(ii) Для любой функции $h \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ существует неголоморфная вещественно-аналитическая в $\mathbb{D}$ функция f , для которой условие (3.8) выполнено при всех $g \in G$ и

$$\frac{M_R(f - h)}{|\ln(1 - R)|} = O(1) \quad \text{при} \quad R \rightarrow 1.$$

Первое утверждение теоремы 3.12 является теоремой типа Мореры на классе локально суммируемых функций, близких к голоморфным при подходе к границе круга в смысле условия (4.46). Второе утверждение теоремы 3.12 показывает, что класс функций f , определяемый в первом утверждении условием (4.46), нельзя расширить естественным образом.

Одним из следствий теоремы 3.12 является следующий результат [48].

Теорема 3.13. Пусть $\varrho \in (0, 1)$ фиксировано. Тогда выполнены следующие утверждения.

(i) Пусть $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$, удовлетворяет (3.6) и

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = o\left(\sqrt{1 - |z|}\right) \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow 1.$$

Тогда f голоморфна в $\mathbb{D}$.

- (ii) Существует неголоморфная функция $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$, для которой выполнено условие (3.6) и

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = O\left(\sqrt{1 - |z|}\right) \quad \text{при } |z| \rightarrow 1.$$

Доказательства теорем 3.12, 3.13 основаны на результатах § 6. Этими же методами можно получить полный ответ в проблеме о голоморфности непрерывной функции, удовлетворяющей условию (3.6) при $\varrho = \varrho_1, \varrho_2$. Сформулируем соответствующие результаты.

Пусть r – фиксированное положительное число, $h_r(\lambda) = P_{\frac{i\lambda-1}{2}}^{-1}(\operatorname{ch} 2r)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Известно, что h_r является четной целой функцией переменной λ , имеющей бесконечно много нулей. Подробные сведения о нулях h_r содержатся в следующем утверждении (см. [17, часть 2, гл. 2]).

Лемма 3.1. (i) Все нули h_r являются вещественными, простыми и расположены симметрично относительно точки $\lambda = 0$. При этом $h_r(0) > 0$.

- (ii) Пусть $\lambda_j = \lambda_j(r)$, $j = 1, 2, \dots$ – последовательность всех положительных нулей h_r , занумерованных в порядке возрастания. Тогда

$$r\lambda_j = \pi \left(\frac{5}{4} + j + q(r) \right) - \frac{3}{4\lambda_j} \operatorname{cth} 2r + O\left(\frac{1}{\lambda_j^3}\right), \quad j \rightarrow \infty,$$

где $q(r) \in \mathbb{Z}$ и не зависит от j . В частности, $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1-\varepsilon} < +\infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

- (iii) Имеет место оценка $\lambda_j^{3/2} |h'_r(\lambda_j)| \geq c > 0$, где константа c не зависит от j .

- (iv) Пусть $r_1, r_2 > 0$, $r_1 \neq r_2$. Предположим, что существует возрастающая последовательность $\{\xi_m\}$ положительных чисел, такая, что $h_{r_1}(\xi_m) = 0$ и $|h_{r_2}(\xi_m)| < \xi_m^{-9/2}$. Тогда $\{\xi_m\}$ лакуарна по Адамару, т.е. $\inf_m \xi_{m+1}/\xi_m > 1$.

Определим множества $N(r)$ и $N(r_1, r_2)$ равенствами $N(r) = \{\lambda > 0 : h_r(\lambda) = 0\}$, $N(r_1, r_2) = N(r_1) \cap N(r_2)$. Обозначим через Ω множество пар (r_1, r_2) положительных чисел со следующим свойством: для любого $m > 0$ существуют $\alpha \in N(r_1)$, $\beta \in N(r_2)$ такие, что $|\alpha - \beta| < (\alpha + \beta + 2)^{-m}$. Перечислим некоторые свойства множеств $N(r_1, r_2)$ и Ω (см. [17, часть 2, гл. 2, п. 2.4]): (i) если $N(r_1, r_2) \neq \emptyset$, то $(r_1, r_2) \in \Omega$; (ii) при любом $r_1 > 0$ множество $\{r_2 > 0 : N(r_1, r_2) \neq \emptyset\}$ является счетным и всюду плотным на $(0, +\infty)$; (iii) пара (r_1, r_2) принадлежит Ω в том и только в том случае, когда для любого $m \in \mathbb{N}$ существует $\xi_m \in N(r_1)$ такое, что $|h_{r_2}(\xi_m)| < (2 + \xi_m)^{-m}$; (iv) при любом $r_1 > 0$ пересечение множества $\{r_2 > 0 : (r_1, r_2) \in \Omega\}$ с любым интервалом $(\alpha, \beta) \subset (0, +\infty)$ является несчетным; (v) при любом $r_1 > 0$ множество $\{r_2 > 0 : (r_1, r_2) \in \Omega\}$ имеет нулевую лебегову меру на $(0, +\infty)$; (vi) если $(r_1, r_2) \in \Omega$ и $N(r_1, r_2) = \emptyset$, то число r_1/r_2 иррационально.

Как и выше, для $r > 0$ положим $B_r = \{z \in \mathbb{D} : |z| < \operatorname{thr}\}$, $\overline{B}_r = \{z \in \mathbb{D} : |z| \leq \operatorname{thr}\}$.

Теорема 3.14. Для $r_1, r_2 > 0$, $R > \max\{r_1, r_2\}$ имеют место следующие утверждения:

(i) Пусть $f \in C(B_R)$ и

$$\int_{\partial B_{r_j}} f(g(z)) dz = 0 \quad (3.10)$$

при всех $g \in G$ таких, что $g\overline{B}_{r_j} \subset B_R$, $j = 1, 2$. Тогда:

- (a) если $R > r_1 + r_2$ и $N(r_1, r_2) = \emptyset$, то f голоморфна в B_R ;
- (b) если $R = r_1 + r_2$, $N(r_1, r_2) = \emptyset$ и $f \in C^\infty(B_R)$, то f голоморфна в B_R ;
- (c) если $R = r_1 + r_2$, $N(r_1, r_2) = \emptyset$ и $(r_1, r_2) \in \Omega$, то f голоморфна в B_R ;
- (ii) Если $R = r_1 + r_2$ и $(r_1, r_2) \notin \Omega$, то для любого целого $m \geq 0$ существует неголоморфная функция $f \in C^m(B_R)$, удовлетворяющая условию (3.10).
- (iii) Если $R < r_1 + r_2$, то существует неголоморфная функция $f \in C^\infty(B_R)$, удовлетворяющая условию (3.10).
- (iv) Если $N(r_1, r_2) \neq \emptyset$, то существует непостоянная радиальная вещественно-аналитическая функция f на $\mathbb{D}$, для которой равенство (3.10) выполнено при всех $g \in G$, $j = 1, 2$.

Перечисленные выше свойства множеств $N(r_1, r_2)$ и Ω показывают, что все ситуации, описанные в утверждениях (i)–(iv) теоремы 3.14 реализуются при подходящих $r_1, r_2 > 0$.

В отличие от методов, использованных в [47], доказательство теоремы 3.14 основано на свойствах трансмутационных операторов, приведенных в § 6.

11. Проблемы Беренштейна-Гэя. Радиальное распределение $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ($n \geq 2$) называется *гиперболическим*, если выполнены два условия: 1) T – обратимое распределение, т.е., уравнение свертки $f * T = g$ имеет решение $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ при любом $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$; 2) существует константа $c > 0$ такая, что для любого нуля $\lambda \in \mathbb{C}$ сферического преобразования $\tilde{T}$ имеет место неравенство $|\operatorname{Im} \lambda| \leq c \ln(2 + |\lambda|)$.

В работе [49] был получен следующий локальный аналог известной теоремы о спектральном анализе на $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3.15. Пусть I – непустое множество индексов, $\{T_i\}_{i \in I}$ – семейство радиальных распределений из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда, если существует $i_0 \in I$ такое, что T_{i_0} является гиперболическим,

$$R > r(T_{i_0}) + \sup_{i \in I} r(T_i) \quad (3.11)$$

и $\{z \in \mathbb{C} : \tilde{T}_i(z) = 0 \ \forall i \in I\} = \emptyset$, то $\{f \in \mathcal{D}'(B_R) : f * T_i = 0 \text{ в } B_{R-r(T_i)} \ \forall i \in I\} = \{0\}$.

В связи с этим результатом К.А. Беренштейн и Р. Гэй поставили две проблемы [49, § 5].

Проблема 1. Выяснить необходимость условия обратимости распределения T_{i_0} в теореме 3.15.

Проблема 2. Получить аналог теоремы 3.15 для римановых симметрических пространств X ранга один.

Используя результаты из § 3, в работе [8] авторы доказали аналог теоремы 3.15 для произвольных радиальных распределений $T_i \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, если $R > r(T_i) + \inf_{j \in I} r(T_j)$

для любого $i \in I$ и $\{z \in \mathbb{C} : \tilde{T}_i(z) = 0 \ \forall i \in I\} = \emptyset$. Тем самым, помимо условия обратимости, было снято ограничение на нули $\tilde{T}_{i_0}$ и получены неулучшаемые условия на R , ослабляющие (3.11).

Решение проблемы 2 было получено в работе [11] с помощью трансмутационных операторов, построенных в § 7. Для формулировки основного результата из [11] введем некоторые обозначения. Пусть X – риманово двухточечно-однородное пространство (см. § 7). Обозначим через $\mathfrak{T}(X)$ совокупность всех семейств $\mathcal{T} = \{T_i\}_{i \in I}$, где I – фиксированное непустое множество индексов и $T_i \in \mathcal{E}'_q(\mathcal{X})$ при всех $i \in I$. Для $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(X)$ определим $r_*(\mathcal{T}) = \inf_{i \in I} r(T_i)$, $r^*(\mathcal{T}) = \sup_{i \in I} r(T_i)$, $R_{\mathcal{T}} = r_*(\mathcal{T}) + r^*(\mathcal{T})$, $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{Z}(\tilde{T}_i)$, где $\mathcal{Z}(\tilde{T}_i) = \{z \in \mathbb{C} : \tilde{T}_i(z) = 0\}$. Если $r(T_i) < R$ для любого $i \in I$, то введем класс

$$\mathcal{D}'_{\mathcal{T}}(B_R) = \{f \in \mathcal{D}'(B_R) : f \times T_i = 0 \text{ в } B_{R-r(T_i)} \forall i \in I\}.$$

Теорема 3.16. Пусть $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(X)$ и $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}} = \emptyset$. Тогда имеют место следующие утверждения.

- (i) Если $r_*(\mathcal{T}) + r(T_i) < R \leq \text{diam } X$ для всех $i \in I$, то $\mathcal{D}'_{\mathcal{T}}(B_R) = \{0\}$.
- (ii) Если $r(T_i) < r^*(\mathcal{T}) < +\infty$ для всех $i \in I$ и $R_{\mathcal{T}} \leq R \leq \text{diam } X$, то $\mathcal{D}'_{\mathcal{T}}(B_R) = \{0\}$.

Отметим, что условия на R в теореме 3.16 в общем случае ослабить нельзя. Кроме того, если $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}} \neq \emptyset$, то существует ненулевая функция $f \in \mathcal{D}'_{\mathcal{T}}(B_R) \cap C^\infty(B_R)$ при $R = \text{diam } X$ (см. [11]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1 / Л. Хермандер. – М.: Мир, 1986. – 340 с.
2. Левитан Б. М. Применение операторов обобщенного сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка / Б. М. Левитан. – Усп. мат. наук. – 1949. – Т. 4, № 1. – С. 3–112.
3. Koornwinder T. H. Special Functions: Group Theoretical Aspects and Applications. / R. A. Askey, T. H. Koornwinder, W. Schempp (Eds.). – Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1984. – P. 1–85.
4. Березанский Ю. М. Гармонический анализ в гиперкомплексных системах / Ю. М. Березанский, А. А. Калужный. – Киев: Наукова думка, 1992. – 352 с.
5. Trimèche K. Transmutation Operators and Mean-Periodic Functions Associated with Differential Operators / K. Trimèche. – New-York: Harwood Academic Publishers, 1988. – 276 p.
6. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп / Н. Я. Виленкин. – М.: Наука, 1991. – 576 с.
7. Ситник С. М. Обзор основных свойств операторов преобразования Бушмана-Эрдейи / С. М. Ситник. – Челябинский физико-математический журнал. – 2016. – Т. 1, № 4. – С. 63–93.
8. Волчков В. В. Уравнения свертки на многомерных областях и редуцированной группе Гейзенберга / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков. – Матем. сб. – 2008. – Т. 199, № 8. – С. 29–60.
9. Volchkov V. V. Convolution equations and the local Pompeiu property on symmetric spaces and on the phase space associated to the Heisenberg group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – D'Analyse Math. – 2008. – Т. 105. – P. 43–123.
10. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 672 p.
11. Волчков В. В. Об одной проблеме Беренштейна-Гэя и ее обобщениях / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков. – Известия РАН. Сер. матем. – 2010. – Т. 74, № 4. – P. 33–62.
12. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 p.
13. Волчков В. В. Спектральный анализ на группе конформных автоморфизмов единичного круга / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков. – Матем. сб. – 2016. – Т. 207, № 7. – P. 57–80.
14. Волчков В. В. Спектральный синтез на группе конформных автоморфизмов единичного круга / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков. – Матем. сб. – 2018. – Т. 209, № 1. P. 3–36.
15. Волчков В. В. Теоремы типа Мореры в гиперболическом диске / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков. – Известия РАН. Сер. матем. – 2018. – Т. 82, № 1. P. 34–64.
16. Стейн И. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн, Г. Вейс. – М.: Мир, 1974. – 333 с.

17. Volchkov V. V. Integral geometry and convolution equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
18. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$ / У. Рудин. – М.: Мир, 1984. – 456 с.
19. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Т.1 / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Мир, 1973. – 294 с.
20. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ / С. Хелгасон. – М.: Мир, 1987. – 735 с.
21. Helgason S. Geometric analysis on symmetric spaces / S. Helgason. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994 – 602 p.
22. Berenstein C. A. and Gay R. Le problème de Pompeiu local / C. A. Berenstein, R. Gay. – J. Analyse Math. – 1989. – V. 52. – P. 133–166.
23. Беренштейн К. А. Комплексный анализ и уравнения в свёртках. Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундам. направления. / К. А. Беренштейн, Д. Струппа. – ВИНТИ. – 1989. – Т. 54: – С. 5–111.
24. Zalcman L. A bibliographic survey of the Pompeiu problem / Approximation by solutions of partial differential equations / L. Zalcman. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. P. 185–194.
25. Zalcman L. Supplementary bibliography to "A bibliographic survey of the Pompeiu problem" / L. Zalcman. – Contemp. Math. Radon Transform and Tomography. – 2001. – V. 278. – P. 69–74.
26. Netuka I. Mean value property and harmonic functions / I. Netuka, J. Vesely. – Classical and modern potential theory and applications. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ, 1994. – P. 359–398.
27. Schwartz L. "Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques" / L. Schwartz. – Ann. Math. – 1947. – V. 48. – P. 857–928.
28. Malgrange B. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution / B. Malgrange. – Ann. Inst. Fourier. – 1956. – V. 6. – P. 271–368.
29. Паламодов В. П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами / В. П. Паламодов. – М.: Наука, 1967. – 488 с.
30. Ehrenpreis L. Fourier analysis in several complex variables / L. Ehrenpreis. – New York: Wiley-Interscience, 1970. – 504 с.
31. Brown L. Spectral synthesis and the Pompeiu problem / L. Brown, B. M. Schreiber, B. A. Taylor. – Ann. Inst. Fourier, Grenoble. – 1973. – V. 23. – № 3. – P. 125–154.
32. Гуревич Д. И. Контрпримеры к проблеме Л. Шварца / Д. И. Гуревич. – Функци. анализ и его прил. – 1975. – V. 9. – № 2. – P. 29–35.
33. Berenstein C. A. Interpolation problems in $\mathbb{C}^n$ with applications to harmonic analysis / C. A. Berenstein, B. A. Taylor. – J. Anal. Math. – 1980. – V. 38. – P. 168–254.
34. Bagchi S. C. Spherical mean periodic functions on semisimple Lie groups / S. C. Bagchi, A. Sitaram. – Pacific J. Math. – 1979. – V. 84. – P. 241–250.
35. Wawrzyńczyk A. Spectral analysis and synthesis on symmetric spaces / A. Wawrzyńczyk. – J. Math. Anal. and Appl. – 1987. – V. 127. – P. 1–17.
36. Платонов С. С. О спектральном синтезе на симметрических пространствах ранга 1 / С. С. Платонов. – Алг. и анал. – 1992. – V. 4. – P. 174–187.
37. Платонов С. С. Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на симметрических пространствах. III / С. С. Платонов. – Изв. РАН. Сер. матем. – 2002. – V. 66. – № 1. – P. 167–202.
38. Платонов С. С. Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на световом конусе в $\mathbb{R}^3$ / С. С. Платонов. – Матем. сб. – 2012. – V. 203. – № 6 – P. 101–130.
39. Кучмент П. А. О периодических в среднем функциях на симметрических пространствах / П. А. Кучмент. – Функци. анализ и его прил. – 1982. – V. 16. – № 3. – P. 68–69.
40. Peyrerimhoff N. Spherical spectral synthesis and two-radius theorems on Damek-Ricci spaces / N. Peyrerimhoff, E. Samiou. – Ark. Mat. – 2010. – V. 48. – P. 131–147.
41. Ehrenpreis L. Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups II / L. Ehrenpreis, F. Mautner. – Trans. Amer. Math. Soc. – 1957. – V. 84. – P. 1–55.
42. Weit Y. On Schwartz's theorem for the motion group / Y. Weit. – Ann. Inst. Fourier, Grenoble. – 1980. – V. 30. – № 1. – P. 91–107.
43. Рашевский П. К. Описание замкнутых инвариантных подпространств в некоторых функциональных пространствах / П. К. Рашевский. – Тр. ММО. – 1979. – V. 38. – P. 139–185.
44. Платонов С. С. Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на группе движений евклидовой плоскости / С. С. Платонов. – Сиб. матем. журн. – 1990. – V. 31. – № 3. – P. 135–146.
45. Платонов С. С. Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на группе $SL(2, \mathbb{C})$ / С. С. Платонов. – Тр. сем. по вект. и тенз. анал. – 1983. – V. 21. – P. 191–258.

46. Платонов С. С. Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на простейшей разрешимой группе Ли / С. С. Платонов. – Матем. зам. – 1984. – V. 35. – № 1. – P. 19–30.
47. Berenstein C.A. Morera and mean-value type theorems in the hyperbolic disk / C.A. Berenstein, D. Pascuas. – Israel J. Math. – 1994. – V. 86. – P. 61–106.
48. Volchkov V. V. A new characterization of holomorphic functions in the unit disk / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – Probl. Anal. Issues Anal. – 2018. – V. 7(25). – № 1. – P. 134–147.
49. Berenstein C.A. A local version of the two-circles theorem / C.A. Berenstein, R. Gay. – Israel J. Math. – 1986. – V. 55. – № 3. – P. 267–288.

Поступила в редакцию 14.05.2019 г.

TRANSMUTATION TRANSFORMATIONS OF CONVOLUTION OPERATORS AND ITS APPLICATION

V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov

Let a pair of operators (A, B) be given. An operator X is called a permutation operator (or a transmutation transform) A to B if the relation $XA = BX$ is satisfied on the elements of suitable function spaces. The paper presents the construction of transmutation transformations of convolution operators on various homogeneous spaces to a convolution operator on the real axis. The application of such transformations to various problems of integral geometry and the theory of mean periodic functions is shown.

Keywords: intertwining operators, Fourier transform, spherical harmonics, hypergeometric functions, Pompeiu problem.

Волчков Валерий Владимирович

доктор физико-математических наук, профессор
Донецкий национальный университет, г. Донецк
valeriyvolchkov@gmail.com
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Volchkov Valery Vladimirovich

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor,
Donetsk National University, Donetsk

Волчков Виталий Владимирович

доктор физико-математических наук, профессор
Донецкий национальный университет, г. Донецк
volna936@gmail.com
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Volchkov Vitaly Vladimirovich

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor,
Donetsk National University, Donetsk

УДК 517.1

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИИ МАСС В СЛУЧАЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТИ© 2019. *В. П. Заставный*

В работе для знакопеременной плотности рассмотрены и решены следующие задачи геометрии масс: критерий существования центра масс в случае нулевой массы, теорема о моментах инерции относительно плоских параллельных множеств, определение поверхности инерции (аналог эллипсоида инерции в случае положительной плотности), примеры пустых поверхностей инерции, критерий существования точки, у которой поверхность инерции является сферой или пустым множеством, задача о построении поверхности инерции в произвольной точке по известной центральной поверхности инерции и другие.

Ключевые слова: центр масс, момент инерции, ось и плоскость инерции, поверхность инерции, оператор инерции.

Введение. Основной объект геометрии масс это центр масс системы материальных точек и множеств. В классическом случае, когда масса распределена с положительной плотностью, основные задачи геометрии масс (центр масс, момент инерции, оси и плоскости инерции, эллипсоид инерции, гирационный эллипсоид) рассмотрены и решены давно, см. например учебники и монографии по механики: М.А. Айзерман [1, гл. V, §2], П. Аппель [2, гл. XVII], В.И. Арнольд [3, § 28], В.Г. Вильке [4, § 5.2], Я.Л. Геронимус [5, гл. IX], Г.В. Горр, А.В. Мазнев [7, §1.8], Н.Е. Жуковский [8, гл. IV], Т. Леви-Чевита, У. Амальди [10, гл. X], Э.Дж. Раус [11, гл. I], Г.К. Суслов [12, гл. XXV, XXVI], Н.Г. Четаев [13, гл. V, §1]. История формирования основных понятий геометрии масс изложена в монографии Г.В. Горр и др. [6, гл. 1].

В работе рассмотрен общий случай геометрии масс, когда масса распределена с некоторой плотностью (вообще говоря знакопеременной) по множеству с заданной на нем мерой (неотрицательной конечно-аддитивной или счетно-аддитивной функцией множеств). Получен критерий существования центра масс в случае нулевой массы (теорема 4.3). Доказана общая теорема 4.5 о моментах инерции относительно плоских параллельных множеств, доказательство которой не использует явное выражение расстояния от точки до множества и как следствия получены теоремы Лагранжа и Гюйгенса-Штейнера о моментах инерции относительно точки и прямой. Для произвольной плотности введены и изучены поверхности инерции. Основным инструментом исследования поверхностей инерции является оператор инерции (его собственные числа и вектора, а также квадратичная форма этого оператора). В случае строгой определенности квадратичной формы оператора инерции (например при положительной плотности) получается эллипсоид инерции, который впервые ввел Коши. В работе приведены примеры пустых поверхностей инерции (теорема 4.15), найден критерий того, что одна поверхность инерции получена из другой параллельным переносом (теорема 4.16). Получен критерий существования точки, у которой поверхность инерции является сферой или пустым множеством. В случае существования и единственности центра масс этот критерий (теорема 4.17) такой же как и для положительной плотности и отличается от критерия (теорема 4.18), когда центр масс не существует. Рассмотрена задача о построении поверхности инерции в произвольной точке

по известной центральной поверхности инерции. В случае существования и единственности центра масс получены такие же результаты как и в классическом случае (случай положительной плотности), например, критерий того, что прямая является осью инерции для двух различных точек (теорема 4.20), теорема Бине (теорема 4.21) и другие. В случае, когда центр масс не существует, аналогичная задача не решена, но приводится возможная схема исследования этой задачи. В конце работы приведены некоторые нерешенные задачи для собственных чисел оператора инерции.

1. Интеграл и масса. Пусть E – некоторое ограниченное множество в $\mathbb{R}^m$, а μ – некоторая мера на E (неотрицательная, конечно-аддитивная или счетно-аддитивная функция множеств). Интеграл от функции $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ по множеству E и по мере μ будем обозначать символом

$$\int_E f d\mu = \int_E f(M) d\mu(M). \quad (4.1)$$

Нас будут интересовать следующие классические случаи (но не только):

1. $E = \gamma$ – спрямляемая кривая в $\mathbb{R}^m$, μ – длина кривой и $\int_E f d\mu = \int_\gamma f dl$ – криволинейный интеграл 1-го рода (по длине кривой).
2. E – множество, измеримое по Жордану (или Лебегу) в $\mathbb{R}^m$, $\mu = \mu_m$ – m -мерная мера Жордана (или Лебега) и $\int_E f d\mu$ – интеграл Римана (или Лебега). При $m = 3$ получим $\mu = \mu_3$ – объем и $\int_E f d\mu = \iiint_E f dx dy dz$ – тройной интеграл по множеству E . При $m = 2$ получим $\mu = \mu_2$ – площадь и $\int_E f d\mu = \iint_E f dx dy$ – двойной интеграл по множеству E .
3. $E = S$ – поверхность в $\mathbb{R}^3$, μ – площадь поверхности и $\int_E f d\mu = \iint_S f ds$ – поверхностный интеграл 1-го рода (по площади поверхности).
4. μ – дискретная мера, сосредоточенная в конечном числе точек $A_1, \dots, A_n$ из E , $\mu(\{A_k\}) = 1$, и $\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^n f(A_k)$ – конечная сумма.

Предположим, что по множеству E распределена масса с μ -плотностью ρ (например, или линейная плотность, или объемная, или плоская, или поверхностная, или дискретная). Требуется определить $m(E)$ – массу множества E . Плотность ρ всегда предполагается вещественнозначной. Если ρ принимает как положительные так и отрицательные значения, то уместно говорить не о массе множества E , а о его заряде. Разбиваем E на более мелкие измеримые, попарно не пересекающиеся части:

$$\tau = \{E_k\}_{k=1}^n, \quad E = \bigsqcup_{k=1}^n E_k. \quad (4.2)$$

Пусть $r(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$ – евклидово расстояние между точками A и B .

Диаметр множества U – это наибольшее расстояние между точками этого множества, т.е.

$$d(U) := \sup\{r(A, B) : A, B \in U\}.$$

Если $A, B \in U$, то очевидно $|x(A) - x(B)| \leq r(A, B) \leq d(U)$.

Диаметр разбиения (4.2) – это наибольший диаметр множеств этого разбиения, т.е.

$$d(\tau) := \max\{d(E_k) : 1 \leq k \leq n\},$$

В каждой более мелкой части берем по одной точке $M_k \in E_k$. Тогда масса $m(E_k) \approx \rho(M_k)\mu(E_k)$ и

$$m(E) = \sum_{k=1}^n m(E_k) \approx \sum_{k=1}^n \rho(M_k)\mu(E_k) \xrightarrow{d(\tau) \rightarrow 0} \int_E \rho d\mu.$$

Таким образом, естественно считать, что масса (или заряд) множества E для ”хорошей” плотности (интегрируемой) определяется по формуле

$$m(E) := \int_E \rho(M) d\mu(M). \quad (4.3)$$

2. Центр масс.

2.1. Центр масс в случае конечной системы материальных точек.

Определение 4.1. Центром масс системы материальных точек

$$m_1 A_1, \dots, m_n A_n, \quad m_k \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (4.4)$$

называется такая точка Z , для которой имеет место равенство

$$m_1 \overrightarrow{ZA_1} + \dots + m_n \overrightarrow{ZA_n} = \overrightarrow{0}. \quad (4.5)$$

Теорема 4.1 (Существование и единственность). Пусть задана система материальных точек (4.4) с общей массой $m = m_1 + \dots + m_n \neq 0$. Тогда центр масс системы м.т. (4.4) существует и он единственный, а координаты $x(Z), y(Z), z(Z)$ центра масс Z вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} x(Z) &= \frac{1}{m}(m_1 x(A_1) + \dots + m_n x(A_n)), \\ y(Z) &= \frac{1}{m}(m_1 y(A_1) + \dots + m_n y(A_n)), \\ z(Z) &= \frac{1}{m}(m_1 z(A_1) + \dots + m_n z(A_n)), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $x(A_k), y(A_k), z(A_k)$ – координаты точек A_k . Кроме того, для любой точки O выполняется равенство

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{1}{m}(m_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + m_n \overrightarrow{OA_n}). \quad (4.7)$$

2.2. Определение центра масс множества с распределенной по нему массой с заданной плотностью.

2.2.1. Случай не нулевой массы. Для простоты считаем, что все множества из $\mathbb{R}^3$. Для определения центра масс множества E с распределенной по нему массой с μ -плотностью ρ поступаем следующим образом. Берем разбиение τ множества E на более мелкие измеримые, попарно не пересекающиеся части E_k , $1 \leq k \leq n$, (см. (4.2)). В каждой более мелкой части берем по одной точке $A_k(\tau) \in E_k$ и вычисляем массу каждой части

$$m_k(\tau) := m(E_k) = \int_{E_k} \rho d\mu.$$

Предположим, что общая масса $m(E) \neq 0$. Тогда

$$m_1(\tau) + \dots + m_n(\tau) = m(E_1) + \dots + m(E_n) = m(E) \neq 0$$

и, значит, существует $Z(\tau)$ – центр масс конечной системы материальных точек $m_1(\tau)A_1(\tau), \dots, m_n(\tau)A_n(\tau)$. Тогда центр масс множества E определим как предел центров масс:

$$Z := \lim_{d(\tau) \rightarrow 0} Z(\tau). \quad (4.8)$$

Сходимость в $\mathbb{R}^3$ эквивалентна покоординатной сходимости. Пусть $x_k(\tau), y_k(\tau), z_k(\tau)$ – координаты точек $A_k(\tau)$. Так как $m_1(\tau) + \dots + m_n(\tau) = m(E) \neq 0$, то из (4.6) вытекает, что координаты $x(\tau), y(\tau), z(\tau)$ центра масс $Z(\tau)$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \frac{1}{m(E)}(m_1(\tau)x_1(\tau) + \dots + m_n(\tau)x_n(\tau)), \\ y(\tau) &= \frac{1}{m(E)}(m_1(\tau)y_1(\tau) + \dots + m_n(\tau)y_n(\tau)), \\ z(\tau) &= \frac{1}{m(E)}(m_1(\tau)z_1(\tau) + \dots + m_n(\tau)z_n(\tau)). \end{aligned}$$

Покажем, что

$$\lim_{d(\tau) \rightarrow 0} x(\tau) = \frac{1}{m(E)} \int_E x(M) \rho(M) d\mu(M).$$

Это вытекает из следующих неравенств:

$$\begin{aligned} \left| m(E)x(\tau) - \int_E x(M) \rho(M) d\mu(M) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{E_k} (x_k(\tau) - x(M)) \rho(M) d\mu(M) \right| \leq \\ &\sum_{k=1}^n \int_{E_k} |x_k(\tau) - x(M)| \cdot |\rho(M)| d\mu(M) \leq \\ &\sum_{k=1}^n d(E_k) \int_{E_k} |\rho(M)| d\mu(M) \leq d(\tau) \int_E |\rho(M)| d\mu(M) \xrightarrow{d(\tau) \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Таким образом доказана теорема.

Теорема 4.2. Пусть задано множество E с распределенной по нему массой с μ -плотностью ρ и общей массой $m(E) \neq 0$ (см. (4.3)). Тогда центр масс Z множества E существует и его координаты однозначно определяются по формулам

$$x(Z) = \frac{1}{m(E)} \int_E x \rho d\mu, \quad y(Z) = \frac{1}{m(E)} \int_E y \rho d\mu, \quad z(Z) = \frac{1}{m(E)} \int_E z \rho d\mu. \quad (4.9)$$

Замечание 4.1. Если $m(E) \neq 0$ и Z – центр масс множества E , то равенства (4.9) эквивалентны одному векторному равенству

$$\left(\int_E (x - x(Z)) \rho d\mu, \int_E (y - y(Z)) \rho d\mu, \int_E (z - z(Z)) \rho d\mu \right) = \vec{0}. \quad (4.10)$$

В компактном виде это равенство переписывается следующим образом:

$$\int_E \overrightarrow{ZM} \rho(M) d\mu(M) = \overrightarrow{0}. \quad (4.11)$$

Отсюда следует, что для любой фиксированной точки $O \in \mathbb{R}^3$ имеет место равенство

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{1}{m(E)} \int_E \overrightarrow{OM} \rho(M) d\mu(M). \quad (4.12)$$

Равенства (4.11) и (4.12) являются аналогами соответственно равенств (4.5) и (4.7).

Из (4.10) вытекает, что для любого постоянного вектора $\overrightarrow{a}$ выполняется равенство

$$\int_E (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{ZM}) \rho(M) d\mu(M) = 0, \quad \forall \overrightarrow{a} \equiv \overrightarrow{const}. \quad (4.13)$$

Замечание 4.2. Случай конечной системы м.т. $m_1 A_1, \dots, m_n A_n$ формально получается из общего случая, если взять $E = \{A_1, \dots, A_n\}$, μ – дискретная мера, сосредоточенная в точках $A_1, \dots, A_n$ из E , $\mu(\{A_k\}) = 1$, а плотность определяется равенствами $\rho(A_k) = m_k$. Тогда

$$\int_U f \rho d\mu = \sum_{k: A_k \in U} f(A_k) \rho(A_k) = \sum_{k: A_k \in U} f(A_k) m_k.$$

2.2.2. Случай нулевой массы. Пусть задано множество E с распределенной по нему массой с μ -плотностью ρ и общей массой $m(E)$. Если $m(E) \neq 0$, то в качестве эквивалентного определения центра масс можно дать следующее: точка Z называется центром масс, если выполняется равенство (4.11). Это равенство можно взять в качестве определения центра масс в общем случае.

Определение 4.2. Точка Z называется центром масс множества E с распределенной по нему массой с μ -плотностью ρ , если выполняется равенство (4.11).

Рассмотрим задачу существования и единственности центра масс в смысле этого определения в случае нулевой массы.

Пусть $m(E) = 0$. Рассмотрим следующие три попарно не пересекающиеся измеримые множества

$$E_+ := \{x \in E : \rho(x) > 0\}, \quad E_- := \{x \in E : \rho(x) < 0\}, \quad E_0 := \{x \in E : \rho(x) = 0\}.$$

Очевидно $m(E_0) = 0$ и $m(E_+) = -m(E_-) \geq 0$.

1 случай. Если $m(E_+) = 0$, то $\mu(E_{\pm}) = 0$ и, значит, $\int_E f(M) \rho(M) d\mu(M) = 0$ для любой допустимой функции f . В этом случае равенству (4.11) удовлетворяет любая точка Z .

2 случай. Пусть $m(E_+) = m > 0$. В этом случае существуют и однозначно определены точки Z_+ и Z_- – центры масс соответственно множеств E_+ и E_- . Тогда для любой точки Z выполняются равенства

$$\begin{aligned} \int_E \overrightarrow{ZM} \rho(M) d\mu(M) &= \int_{E_+} \overrightarrow{ZM} \rho(M) d\mu(M) + \int_{E_-} \overrightarrow{ZM} \rho(M) d\mu(M) = \\ &= m \overrightarrow{ZZ_+} - m \overrightarrow{ZZ_-} = m \overrightarrow{Z_- Z_+}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Из этого равенства следует, что центр масс существует тогда и только тогда, когда $Z_+ = Z_-$ и в этом случае любая точка является центром масс.

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 4.3. Пусть задано множество E с распределенной по нему массой с μ -плотностью ρ и общей массой $m(E) = 0$. Тогда центр масс множества E не существует $\iff m(E_+) = -m(E_-) > 0$ и $Z_+ \neq Z_-$. В остальных случаях центр масс существует и им является любая точка, и значит равенства (4.11) и (4.13) выполняются для любой точки Z .

3. Момент инерции.

3.1. Момент инерции в дискретном случае. Пусть $r(M, B)$ – евклидово расстояние между точками $M, B \in \mathbb{R}^3$, D – некоторое множество в $\mathbb{R}^3$, а $r_D(M) := \inf_{B \in D} r(M, B)$ – расстояние от точки M до множества D .

Определение 4.3. Моментом инерции системы м.т. $m_1 A_1, \dots, m_n A_n$ относительно множества D называется величина

$$J_D := \sum_{k=1}^n r_D^2(A_k) m_k. \quad (4.15)$$

В качестве D чаще всего берут следующие множества:

1. D состоит из одной точки, т.е. $D = \{H\}$. Тогда $r_D^2(M)$ равно величине

$$r_H^2(M) = |\overrightarrow{HM}|^2 = (x(M) - x(H))^2 + (y(M) - y(H))^2 + (z(M) - z(H))^2.$$

В этом случае $J_D = J_H$ – момент инерции относительно точки H .

2. D – прямая l , проходящая через точку H параллельно единичному вектору $\vec{n}$ (т.е. $|\vec{n}| = 1$). Тогда

$$r_D^2(M) = r_l^2(M) = |\overrightarrow{HM} \times \vec{n}|^2. \quad (4.16)$$

В этом случае $J_D = J_l$ – осевой момент инерции относительно прямой l . В случае координатных осей величина $r_l^2(M)$ легко вычисляется:

- а) l – ось Ox , $r_l^2(M) = y^2(M) + z^2(M)$, осевой момент инерции J_x ;
- б) l – ось Oy , $r_l^2(M) = z^2(M) + x^2(M)$, осевой момент инерции J_y ;
- в) l – ось Oz , $r_l^2(M) = x^2(M) + y^2(M)$, осевой момент инерции J_z .

3. D – плоскость α , проходящая через точку H ортогонально единичному вектору $\vec{n}$ (т.е. $|\vec{n}| = 1$). Тогда

$$r_D^2(M) = r_\alpha^2(M) = (\overrightarrow{HM}, \vec{n})^2. \quad (4.17)$$

В этом случае $J_D = J_\alpha$ – момент инерции относительно плоскости α . В случае координатных плоскостей величина $r_\alpha^2(M)$ легко вычисляется:

- а) α – плоскость xOy , $r_\alpha^2(M) = z^2(M)$, момент инерции J_{xOy} ;
- б) α – плоскость yOz , $r_\alpha^2(M) = x^2(M)$, момент инерции J_{yOz} ;
- в) α – плоскость zOx , $r_\alpha^2(M) = y^2(M)$, момент инерции J_{zOx} .

3.2. Момент инерции в общем случае. Для определения момента инерции множества E с распределенной по нему массой с μ -плотностью ρ (не обязательно положительной) относительно множества D поступаем следующим образом. Берем разбиение τ множества

E на более мелкие измеримые, попарно не пересекающиеся части E_k , $1 \leq k \leq n$, (см. (4.2)). В каждой более мелкой части берем по одной точке $A_k(\tau) \in E_k$ и вычисляем массу каждой части $m_k(\tau) := m(E_k) = \int_{E_k} \rho d\mu$. Пусть $J_D(\tau)$ – момент инерции конечной системы материальных точек $m_1(\tau)A_1(\tau), \dots, m_n(\tau)A_n(\tau)$ относительно множества D . Тогда момент инерции множества E относительно множества D определим как предел моментов инерций:

$$J_D(E) := \lim_{d(\tau) \rightarrow 0} J_D(\tau). \quad (4.18)$$

Теорема 4.4. Пусть задано ограниченное множество E с распределенной по нему массой с μ -плотностью ρ . Тогда момент инерции $J_D(E)$ множества E относительно множества D существует и вычисляется по формуле

$$J_D(E) = \int_E r_D^2(M) \rho(M) d\mu(M). \quad (4.19)$$

Доказательство. Сначала отметим несколько простых свойств расстояний. Для любых $A, M \in \mathbb{R}^3$ и $B \in D$ выполняются неравенства

$$r_D(A) \leq r(A, B) \leq r(A, M) + r(M, B).$$

Поэтому $r_D(A) \leq r(A, M) + r_D(M)$ и, значит,

$$|r_D(A) - r_D(M)| \leq r(A, M), \quad \forall A, M \in \mathbb{R}^3.$$

Если E – ограниченное множество и $R(E)$ – радиус шара с центром в начале координат O , который содержит E , то для любой точки $A \in E$ выполняется неравенство $r_D(A) \leq r(A, O) + r_D(O) \leq R(E) + r_D(O)$.

При сделанных перед теоремой обозначениях имеем:

$$\begin{aligned} \left| J_D(\tau) - \int_E r_D^2(M) \rho(M) d\mu(M) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{E_k} (r_D^2(A_k(\tau)) - r_D^2(M)) \rho(M) d\mu(M) \right| \leq \\ &\sum_{k=1}^n \int_{E_k} |r_D^2(A_k(\tau)) - r_D^2(M)| |\rho(M)| d\mu(M) \leq \\ &\sum_{k=1}^n \int_{E_k} r(A_k(\tau), M) (r_D(A_k(\tau)) + r_D(M)) |\rho(M)| d\mu(M) \leq \\ &\sum_{k=1}^n d(E_k) (2R(E) + 2r_D(O)) \int_{E_k} |\rho(M)| d\mu(M) \leq \\ &d(\tau) (2R(E) + 2r_D(O)) \int_E |\rho| d\mu \xrightarrow{d(\tau) \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Следствие 4.1. Пусть множество E разбито на более мелкие измеримые, попарно не пересекающиеся части E_k , $1 \leq k \leq n$ (см. (4.2)). Тогда $J_D(E) = J_D(E_1) + \dots + J_D(E_n)$.

Доказательство сразу получается из аддитивности интеграла. $\square$

Отметим два простых равенства, которые сразу следуют из (4.19). Если O – начало координат, то

$$J_O(E) = \frac{1}{2}(J_x(E) + J_y(E) + J_z(E)) = J_{xOy}(E) + J_{yOz}(E) + J_{zOx}(E). \quad (4.20)$$

Пусть прямая l проходит через точку H параллельно единичному вектору $\vec{n}$, а плоскость α также проходит через точку H ортогонально вектору $\vec{n}$. Тогда $|\overrightarrow{HM} \times \vec{n}|^2 + (\overrightarrow{HM}, \vec{n})^2 = |\overrightarrow{HM}|^2 |\vec{n}|^2 = |\overrightarrow{HM}|^2$ и, значит,

$$I_l(E) + I_\alpha(E) = I_H(E). \quad (4.21)$$

3.3. Моменты инерции относительно параллельных плоских множеств. Теоремы Лагранжа и Гюйгенса-Штейнера. В известных доказательствах теорем Лагранжа и Гюйгенса-Штейнера используется явный вид расстояний от точки до точки и от точки до прямой. Указанные теоремы являются частным случаем следующей общей теоремы 4.5 о моменте инерции относительно произвольного плоского множества D , доказательство которой не использует явное выражение расстояния от точки до множества D . Кроме того, предполагается только существование центра масс, т.е. допускается случай нулевой массы (см. теорему 4.3).

Теорема 4.5. Пусть задано ограниченное множество E с распределенной по нему массой с μ -плотностью ρ . Пусть множество D_0 целиком лежит в плоскости α_0 , проходящей через Z . Тогда для множества D , которое получается из D_0 параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ в направлении, ортогональном плоскости α_0 справедлива формула

$$J_D(E) = J_{D_0}(E) + m(E)d^2(D, D_0) - 2 \int_E (\vec{a}, \overrightarrow{ZM}) \rho(M) d\mu(M), \quad (4.22)$$

где $d(D, D_0) = |\vec{a}|$ – расстояние между множествами D и D_0 . Если дополнительно плоскость α_0 проходит через центр масс множества E (при условии, что он существует), то

$$J_D(E) = J_{D_0}(E) + m(E)d^2(D, D_0), \quad (4.23)$$

Доказательство. Для любой точки $A \in D$ существует единственная точка $A_0 \in D_0$ такая, что $\overrightarrow{A_0A} = \vec{a}$, и это соответствие взаимно однозначное. Очевидно

$$|\overrightarrow{AM}|^2 = |\overrightarrow{AA_0} + \overrightarrow{A_0M}|^2 = |\overrightarrow{A_0M} - \vec{a}|^2 = |\overrightarrow{A_0M}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}, \overrightarrow{A_0M}) = |\overrightarrow{A_0M}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}, \overrightarrow{ZM}).$$

Здесь мы учли то, что $\overrightarrow{A_0M} = \overrightarrow{A_0Z} + \overrightarrow{ZM}$ и $\overrightarrow{A_0Z} \perp \vec{a}$ (это самый главный момент в доказательстве!). В силу отмеченного выше взаимно однозначного соответствия между множествами D и D_0 получаем

$$\inf_{A \in D} |\overrightarrow{AM}|^2 = \inf_{A_0 \in D_0} (|\overrightarrow{A_0M}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}, \overrightarrow{ZM})).$$

и, значит,

$$r_D^2(M) = r_{D_0}^2(M) + |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}, \overrightarrow{ZM}). \quad (4.24)$$

Отсюда и равенства (4.19) вытекает (4.22). Если дополнительно Z – центр масс множества E , то интеграл в (4.22) равен 0 (см. теорему 4.3 и равенство (4.13)). $\square$

В случае, когда D – точка, прямая, или плоскость, сразу получаются следующие теоремы Лагранжа, Гюйгенса-Штейнера и теорема 4.8.

Теорема 4.6 (Лагранжа). Пусть E – ограниченное множество с распределенной по нему массой с μ -плотностью ρ и предположим, что существует центр масс множества E . Если Z – центр масс множества E , то для произвольной точки S справедлива формула

$$J_S(E) = J_Z(E) + m(E)|\overrightarrow{SZ}|^2. \quad (4.25)$$

Теорема 4.7 (Гюйгенса-Штейнера). Пусть задано ограниченное множество E с распределенной по нему массой с μ -плотностью ρ и предположим, что существует центр масс множества E . Пусть прямая l_0 проходит через Z – центр масс множества E . Тогда для произвольной прямой $l \parallel l_0$ справедлива формула

$$J_l(E) = J_{l_0}(E) + m(E)d^2(l, l_0), \quad (4.26)$$

где $d(l, l_0)$ – расстояние между параллельными прямыми l и l_0 .

Теорема 4.8. Пусть задано ограниченное множество E с распределенной по нему массой с μ -плотностью ρ и предположим, что существует центр масс множества E . Пусть плоскость α_0 проходит через Z – центр масс множества E . Тогда для произвольной плоскости $\alpha \parallel \alpha_0$ справедлива формула

$$J_\alpha(E) = J_{\alpha_0}(E) + m(E)d^2(\alpha, \alpha_0), \quad (4.27)$$

где $d(\alpha, \alpha_0)$ – расстояние между параллельными плоскостями α и α_0 .

Замечание 4.3. Если $m(E) = 0$ и любая точка является центром масс E (см. теорему 4.3), то $J_D(E) = J_{D_0}(E)$, где множество D_0 целиком лежит в плоскости α_0 , а D – произвольное множество, которое получается из D_0 параллельным переносом в направлении, ортогональном плоскости α_0 . В частности $J_{S_1}(E) = J_{S_2}(E)$ для любых точек S_1, S_2 , и $J_{l_1}(E) = J_{l_2}(E)$ для любых параллельных прямых $l_1 \parallel l_2$.

Замечание 4.4. Если $m(E) = 0$ и центр масс E не существует (см. теорему 4.3), то $m(E_+) = -m(E_-) = m > 0$ и $Z_+ \neq Z_-$, где $Z_\pm$ – центр масс множества $E_\pm$. В этом случае интеграл в (4.22) равен $m(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{Z_-Z_+})$ (см. (4.14)). Пусть множество D целиком лежит в плоскости α , а множество $D_0^\pm$ целиком лежит в плоскости $\alpha_0^\pm$, проходящей через $Z_\pm$, и получается из D параллельным переносом в направлении, ортогональном плоскости α . Тогда

$$J_D(E) = J_D(E_+) + J_D(E_-) = J_{D_0^+}(E_+) + J_{D_0^-}(E_-) + m(d^2(D, D_0^+) - d^2(D, D_0^-)).$$

В частности, если l – произвольная прямая, а прямые l_0^+ и l_0^- параллельны прямой l и проходят соответственно через точку Z_+ и Z_- , то

$$J_l(E) = J_{l_0^+}(E_+) + J_{l_0^-}(E_-) + m(d^2(l, l_0^+) - d^2(l, l_0^-)). \quad (4.28)$$

3.4. Центробежный и сопряженный моменты инерции.

Определение 4.4. Пусть задано ограниченное множество E с распределенной по нему массой с μ -плотностью ρ . Центробежный и сопряженный моменты инерции множества E относительно точки H и двух единичных векторов $\vec{n}, \vec{m}$ ($|\vec{n}| = |\vec{m}| = 1$) определяются соответственно по формулам

$$J_{\vec{n}, \vec{m}, H}(E) := \int_E (\overrightarrow{HM}, \vec{n}) \cdot (\overrightarrow{HM}, \vec{m}) \rho(M) d\mu(M). \quad (4.29)$$

$$J_{\vec{n}, \vec{m}, H}^*(E) := \int_E (\overrightarrow{HM} \times \vec{n}, \overrightarrow{HM} \times \vec{m}) \rho(M) d\mu(M). \quad (4.30)$$

Очевидно, что момент инерции не изменится, если единичные вектора $\vec{n}, \vec{m}$ поменять местами. Из второй формулы в равенстве (4.32) и (4.21) вытекают равенства

$$\begin{aligned} J_{\vec{n}, \vec{m}, H}^*(E) &= (\vec{n}, \vec{m}) J_H(E) - J_{\vec{n}, \vec{m}, H}(E), \\ J_{\vec{n}, \vec{m}, H}^*(E) &= -J_{\vec{m}, \vec{n}, H}(E), \quad \vec{n} \perp \vec{m}, \\ J_{\vec{n}, \vec{n}, H}(E) &= J_\alpha(E), \\ J_{\vec{n}, \vec{n}, H}^*(E) &= J_H(E) - J_\alpha(E) = J_l(E). \end{aligned} \quad (4.31)$$

где плоскость $\alpha = \{\vec{n}, H\}$ ортогональна единичному вектору $\vec{n}$ и проходит через точку H , а прямая l параллельна вектору $\vec{n}$ и проходит через точку H .

Замечание 4.5. Для любых векторов $\vec{m}, \vec{b}, \vec{n} \in \mathbb{R}^3$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \vec{m} \times (\vec{b} \times \vec{n}) &= \vec{b} (\vec{m}, \vec{n}) - \vec{n} (\vec{m}, \vec{b}), \\ (\vec{b} \times \vec{n}, \vec{b} \times \vec{m}) &= (\vec{m}, \vec{n}) |\vec{b}|^2 - (\vec{b}, \vec{n}) (\vec{b}, \vec{m}). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Первая формула в равенстве (4.32) – это хорошо известная формула Лагранжа, а вторая формула следует из первой, если воспользоваться свойствами смешанного произведения.

4. Вспомогательные факты о квадратичных формах.

4.1. Квадратичная форма линейного самосопряженного оператора в $\mathbb{R}^3$. Матрицы квадратичной формы. В вещественном линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением рассмотрим линейный оператор $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, который является самосопряженным, т.е. равенство $(F\vec{n}, \vec{m}) = (\vec{n}, F\vec{m})$ выполняется для любых $\vec{n}, \vec{m} \in \mathbb{R}^3$. Квадратичной формой оператора F называется следующая функция

$$D(\vec{n}) = (F\vec{n}, \vec{n}), \quad \vec{n} \in \mathbb{R}^3. \quad (4.33)$$

Пусть $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ – некоторый базис в $\mathbb{R}^3$. Тогда любой вектор $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ однозначно представим в виде $\vec{n} = s_1 \vec{n}_1 + s_2 \vec{n}_2 + s_3 \vec{n}_3$, где s_1, s_2, s_3 – вещественные числа, которые называются координатами вектора $\vec{n}$ в заданном базисе. Тогда

$$D(\vec{n}) = \sum_{k,j=1}^3 s_k s_j a_{k,j} = (sA, s), \quad a_{k,j} = (F\vec{n}_k, \vec{n}_j), \quad s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3. \quad (4.34)$$

Очевидно вещественная матрица $A = (a_{k,j})$ является симметричной и называется матрицей квадратичной формы оператора F , соответствующей выбранному базису $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$, а равенство (4.34) называется представлением квадратичной формы в координатах этого базиса.

Теорема 4.9. Пусть $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ – некоторый базис в $\mathbb{R}^3$, а $A = (a_{k,j})$ – вещественная, симметричная матрица. Тогда для этого базиса матрица A является матрицей квадратичной формы некоторого линейного самосопряженного оператора $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, который однозначно определяется своими значениями на базисных векторах по следующим формулам:

$$F\vec{n}_k = \sum_{p=1}^3 b_{k,p}\vec{n}_p, \quad k = 1, 2, 3; \quad B = (b_{k,p}) = AG^{-1}, \quad G = (g_{p,j}), \quad g_{p,j} := (\vec{n}_p, \vec{n}_j). \quad (4.35)$$

Если исходный базис является ортонормированным, то $B = A$. Таким образом, любой линейный самосопряженный оператор $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ с помощью формулы (4.35) однозначно восстанавливается по своей матрице квадратичной формы в каком-нибудь базисе.

Следствие 4.2. Если для двух линейных самосопряженных операторов $F_1, F_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ равенство $(F_1\vec{n}, \vec{n}) = (F_2\vec{n}, \vec{n})$ выполняется для любого единичного вектора $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$, то это равенство выполняется для любого вектора и эти операторы совпадают, т.е. $F_1 = F_2$.

4.2. Связь между двумя матрицами квадратичной формы самосопряженного оператора. Пусть $A = (a_{k,j})$ – матрица квадратичной формы линейного самосопряженного оператора $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, соответствующая первому базису $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$, а $S = (s_{k,j})$ – соответствующая матрица для второго базиса $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3$. Тогда

$$A = CSC^*, \quad (4.36)$$

где $C = (c_{k,p})$ такая матрица, что для базисных векторов справедливы равенства

$$\vec{n}_k = \sum_{p=1}^3 c_{k,p}\vec{m}_p, \quad k = 1, 2, 3. \quad (4.37)$$

Матрица C называется матрицей перехода от координат вектора в первом базисе к координатам этого же вектора во втором базисе. Явный вид матрицы C можно найти из соотношений

$$C = G_1 G_{2,1}^{-1} = G_{1,2} G_2^{-1}, \quad (4.38)$$

где G_1, G_2 – матрицы Грама соответственно первого и второго базиса, $G_{2,1} := ((\vec{m}_p, \vec{n}_j))$ и $G_{1,2} := ((\vec{n}_k, \vec{m}_j))$. Очевидно $G_{2,1} = G_{1,2}^*$.

4.3. Теорема о существовании собственных чисел и векторов.

Теорема 4.10. У любого линейного самосопряженного оператора $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ собственные числа существуют, все они вещественные и их ровно три с учетом кратности. Собственные вектора, соответствующие разным собственным числам оператора F , ортогональны между собой. Существует ортонормированный базис из собственных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$, и количество базисных векторов, соответствующих одному собственному числу совпадает с кратностью этого числа. Если $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ – некоторый базис в $\mathbb{R}^3$, то множество собственных чисел оператора F совпадает со множеством собственных чисел матрицы AG^{-1} , где $A = (a_{k,j})$ – матрица квадратичной формы оператора F , соответствующая выбранному базису, т.е. $a_{k,j} = (F\vec{n}_k, \vec{n}_j)$ и $G = (g_{p,j})$ – матрица Грама этого базиса, т.е. $g_{p,j} := (\vec{n}_p, \vec{n}_j)$. Кроме того, если

$\vec{w} = \alpha_1 \vec{n}_1 + \alpha_2 \vec{n}_2 + \alpha_3 \vec{n}_3$ – собственный вектор оператора F для собственного числа λ , то $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – собственный вектор матрицы AG^{-1} того же собственного числа и наоборот.

4.4. Классы квадратичных форм. Квадратичные формы $D(\vec{n}) = (F\vec{n}, \vec{n})$, $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$, линейных самосопряженных операторов $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, в зависимости от принимаемых значений, делятся на следующие типы (классы):

1) $D(\vec{n})$ называется строго положительно определенной квадратичной формой, если $D(\vec{n}) > 0, \forall \vec{n} \in \mathbb{R}^3, |\vec{n}| \neq 0$, и называется строго отрицательно определенной, если $D(\vec{n}) < 0, \forall \vec{n} \in \mathbb{R}^3, |\vec{n}| \neq 0$. Такие квадратичные формы называются строго определенными.

2) $D(\vec{n})$ называется нестрого положительно определенной квадратичной формой, если $D(\vec{n}) \geq 0, \forall \vec{n} \in \mathbb{R}^3$, и $D(\vec{n}_0) = 0$ в некоторой точке $\vec{n}_0 \neq 0$. Аналогично, $D(\vec{n})$ – нестрого отрицательно определенная, если $D(\vec{n}) \leq 0, \forall \vec{n} \in \mathbb{R}^3$, и $D(\vec{n}_0) = 0$ в некоторой точке $\vec{n}_0 \neq 0$. Такие квадратичные формы называются нестрогими определенными (или полуопределенными).

3) Если квадратичная форма $D(\vec{n})$ принимает как положительные так и отрицательные значения, то она называется знакопеременной (неопределенной).

Так как любая вещественная симметричная матрица $A = (a_{k,j})$ при любом выборе базиса является матрицей квадратичной формы некоторого линейного самосопряженного оператора в $\mathbb{R}^3$ (см. теорему 4.9), то тип такой матрицы определяется как тип соответствующей квадратичной формы, т.е. определяется значениями, которые принимает функция

$$(sA, s) = \sum_{k,j=1}^3 s_k s_j a_{k,j}, \quad s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Очевидно все матрицы одной и той же квадратичной формы имеют одинаковый тип.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – все собственные числа линейного самосопряженного оператора $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (согласно теореме 4.10 они существуют, все они вещественные и их ровно три с учетом кратности). Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ – вещественный ортонормированный базис из собственных векторов (согласно теореме 4.10 он существует) и λ_k – собственное число, соответствующее собственному вектору $\vec{e}_k$, $k = 1, 2, 3$. Квадратичная форма в ортонормированном базисе из собственных векторов имеет простой вид:

$$D(\vec{n}) = (F\vec{n}, \vec{n}) = \sum_{k=1}^3 \lambda_k (x_k)^2, \quad (4.39)$$

$$\vec{n} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Из этого равенства видно, что характер определенности квадратичной формы зависит только от знаков собственных чисел оператора F . Поэтому справедлива следующая теорема:

Теорема 4.11. Пусть $D(\vec{n})$ – квадратичная форма линейного самосопряженного оператора $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – все его собственные числа. Тогда

1) Квадратичная форма строго положительно (отрицательно) определена $\iff$ все ее собственные значения $\lambda_k > 0$ ($\lambda_k < 0$), $k = 1, 2, 3$.

2) Квадратичная форма является знакопеременной $\iff$ среди всех ее собственных значений имеются хотя бы два числа разных знаков.

3) Квадратичная форма является полуопределенной $\iff$ число $\lambda = 0$ является собственным числом, а оставшиеся ненулевые собственные значения (если они есть) имеют один знак.

Не трудно заметить, что в теореме 4.11 вместо собственных чисел оператора F можно взять собственные числа какой-нибудь матрицы квадратичной формы.

Теорема 4.12 (Критерий Сильвестра строгой определенности). Пусть A – вещественная симметричная матрица и

$$\Delta_1 := a_{1,1}, \Delta_2 := \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}, \Delta_3 := \det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \quad (4.40)$$

ее главные миноры. Тогда:

- 1) Матрица A строго положительно определена $\iff \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$.
- 2) Матрица A строго отрицательно определена $\iff \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$.

5. Момент инерции относительно прямой как квадратичная форма самосопряженного оператора. Оператор инерции.

Теорема 4.13. Пусть задано ограниченное множество E с распределенной по нему массой с μ -плотностью ρ . Пусть l_1, l_2, l_3 – произвольные не лежащие в одной плоскости прямые, проходящие через точку H параллельно соответственно единичным векторам $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$. Тогда для произвольной прямой l , проходящей через точку H параллельно единичному вектору $\vec{n} = c_1\vec{n}_1 + c_2\vec{n}_2 + c_3\vec{n}_3$, выполняется равенство

$$J_l(E) = \sum_{k,j=1}^3 c_k c_j a_{k,j}, \text{ где } a_{k,j} := J_{\vec{n}_k, \vec{n}_j, H}^*(E). \quad (4.41)$$

Если $\vec{n}_k \perp \vec{n}_j$ при всех $k \neq j$, то $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$ и

$$J_l(E) = \sum_{k=1}^3 c_k^2 J_{l_k}(E) - \sum_{k,j=1, k \neq j}^3 c_k c_j J_{\vec{n}_k, \vec{n}_j, H}^*(E). \quad (4.42)$$

Матрица $A_H = A_{H; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3} = (J_{\vec{n}_k, \vec{n}_j, H}^*(E))$ называется матрицей инерции в точке H , соответствующая нормированному базису $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$.

Доказательство. Из равенства (4.16) получаем соотношения

$$r_l^2(M) = \left| \overrightarrow{HM} \times \vec{n} \right|^2 = \left| \sum_{k=1}^3 c_k \overrightarrow{HM} \times \vec{n}_k \right|^2 = \sum_{k,j=1}^3 c_k c_j (\overrightarrow{HM} \times \vec{n}_k, \overrightarrow{HM} \times \vec{n}_j).$$

Отсюда и равенства (4.19) вытекает равенство (4.41). Равенство (4.42) вытекает из (4.41) и равенства (4.31). $\square$

Любая матрица инерции является вещественной симметричной матрицей. Зафиксируем точку H и рассмотрим два нормированных базиса: $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ – первый базис и $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3$ – второй. Пусть A_H^1, A_H^2 – матрицы инерции в точке H соответственно для первого и второго нормированного базиса. По этим матрицам и соответствующим базисам однозначно определяются (см. теорему 4.9) линейные самосопряженные операторы $F_H^1, F_H^2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ такие, что для любого единичного вектора $\vec{n} = c_1\vec{n}_1 + c_2\vec{n}_2 + c_3\vec{n}_3 =$

$d_1\vec{m}_1 + d_2\vec{m}_2 + d_3\vec{m}_3$ выполняются равенства (см. равенство (4.41), где l – прямая, проходящая через точку H параллельно единичному вектору $\vec{n}$)

$$J_l(E) = \sum_{k,j=1}^3 c_k c_j a_{k,j}^1 = (F_H^1 \vec{n}, \vec{n}), |\vec{n}| = 1,$$

$$J_l(E) = \sum_{k,j=1}^3 d_k d_j a_{k,j}^2 = (F_H^2 \vec{n}, \vec{n}), |\vec{n}| = 1.$$

Отсюда следует, что равенство $(F_H^1 \vec{n}, \vec{n}) = (F_H^2 \vec{n}, \vec{n})$ выполняется для любого единичного вектора $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$. Тогда (см. следствие 4.2) это равенство выполняется для любого вектора и эти операторы совпадают, т.е. $F_H^1 = F_H^2$. Отсюда, учитывая теорему 4.9, сразу получается следующая теорема.

Теорема 4.14. В каждой точке H существует единственный линейный самосопряженный оператор $F_H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ с квадратичной формой

$$D_H(\vec{n}) := (F_H \vec{n}, \vec{n}), \vec{n} \in \mathbb{R}^3, \quad (4.43)$$

такой, что:

- 1) Для произвольной прямой l , проходящей через точку H параллельно единичному вектору $\vec{n}$, выполняется равенство $J_l(E) = D_H(\vec{n})$.
- 2) Каждая матрица инерции $A_H = A_{H;\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3} = (J_{\vec{n}_k,\vec{n}_j,H}^*(E))$, соответствующая нормированному базису $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ является матрицей квадратичной формы оператора F_H для этого базиса.
- 3) Оператор F_H однозначно определяется одной матрицей инерции A_H .

Определение 4.5. Оператор F_H из теоремы 4.14 будем называть оператором инерции в точке H .

Следствие 4.3. 1) Если $m(E) \neq 0$, а Z – центр масс множества E , то из теоремы Гюйгенса-Штейнера 4.7 вытекает следующая связь между квадратичными формами и операторами инерции для точек H и Z :

$$D_H(\vec{n}) = D_Z(\vec{n}) + m(E) \left| \vec{HZ} \times \vec{n} \right|^2 =$$

$$D_Z(\vec{n}) + m(E) \left(|\vec{HZ}|^2 |\vec{n}|^2 - (\vec{n}, \vec{HZ})^2 \right), \vec{n} \in \mathbb{R}^3, \quad (4.44)$$

$$F_H \vec{n} = F_Z \vec{n} + m(E) \left(|\vec{HZ}|^2 \vec{n} - (\vec{n}, \vec{HZ}) \vec{HZ} \right), \vec{n} \in \mathbb{R}^3.$$

2) Если $m(E) = 0$ и любая точка является центром масс E (см. теорему 4.3 и замечание 4.3), то $J_{l_1}(E) = J_{l_2}(E)$ для любых прямых $l_1 \parallel l_2$ и, значит, квадратичные формы и операторы инерции для произвольных точек H_1 и H_2 совпадают, т.е. $D_{H_1}(\vec{n}) = D_{H_2}(\vec{n})$, $F_{H_1} \vec{n} = F_{H_2} \vec{n}$, $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$.

3) Если $m(E) = 0$ и центр масс E не существует (см. теорему 4.3), то (см. равенство (4.28))

$$D_H(\vec{n}) = D_{Z_0}(\vec{n}) + m \left(\left| \vec{HZ}_+ \times \vec{n} \right|^2 - \left| \vec{HZ}_- \times \vec{n} \right|^2 \right), \vec{n} \in \mathbb{R}^3, \quad (4.45)$$

$$D_{Z_0}(\vec{n}) = D_{Z_+}^+(\vec{n}) + D_{Z_-}^-(\vec{n}),$$

где $m = m(E_+) = -m(E_-) > 0$ и $Z_+ \neq Z_-$, $Z_{\pm}$ – центр масс множества $E_{\pm}$, Z_0 – середина отрезка $[Z_-, Z_+]$, а $D_{Z_{\pm}}^{\pm}(\vec{n})$ – квадратичная форма в точке $Z_{\pm}$ для множества $E_{\pm}$.

6. Поверхность инерции.

6.1. Поверхность инерции. Гиационная поверхность инерции.

Определение 4.6. Пусть задано ограниченное множество E с распределенной по нему массой с μ -плотностью ρ . Поверхность инерции в точке H определяется следующим образом. Берем произвольный вектор $\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$. Проводим прямую l , проходящую через точку H параллельно вектору $\vec{n}$. Если момент инерции $J_l(E) \neq 0$, то на прямой l возьмем точку N так, чтобы

$$\overrightarrow{HN} = \frac{1}{\sqrt{|J_l(E)|}} \vec{n}. \quad (4.46)$$

Множество всех таких точек N и образует поверхность инерции σ_H . Очевидно σ_H распадается на две не пересекающиеся (возможно и пустые) части σ_H^+ и σ_H^- , для которых момент инерции $J_l(E)$ соответственно положительный или отрицательный.

Из этого определения вытекает, что поверхность σ_H симметрична относительно точки H и не пересекает прямые l , проходящие через точку H , относительно которых момент инерции равен нулю, т.е. $J_l(E) = 0$.

Уравнение поверхности инерции в точке получается следующим образом. Согласно теореме 4.14, в каждой точке H существует единственный линейный самосопряженный оператор $F_H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ с квадратичной формой $D_H(\vec{n}) = (F_H \vec{n}, \vec{n})$, $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$, которая обладает свойством: для произвольной прямой l , проходящей через точку H параллельно единичному вектору $\vec{n}$, выполняется равенство $J_l(E) = D_H(\vec{n})$. Берем любую точку $N \in \sigma_H$. Тогда для вектора (4.46) будет выполняться равенство

$$D_H(\overrightarrow{HN}) = D_H\left(\frac{1}{\sqrt{|J_l(E)|}} \vec{n}\right) = \frac{J_l(E)}{|J_l(E)|} = \pm 1.$$

И наоборот, если точка N удовлетворяет этому равенству, то $|\overrightarrow{HN}| \neq 0$ и, значит, она лежит на поверхности σ_H (в качестве единичного вектора надо взять $\vec{n} = \overrightarrow{HN}/|\overrightarrow{HN}|$). Таким образом уравнение поверхности σ_H имеет вид

$$N \in \sigma_H \iff D_H(\overrightarrow{HN}) = \pm 1. \quad (4.47)$$

Выбирая знаки $+$ или $-$, мы получим соответственно части σ_H^+ или σ_H^- .

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – все собственные числа линейного самосопряженного оператора F_H (согласно теореме 4.10 они существуют, все они вещественные и их ровно три с учетом кратности). Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ – вещественный ортонормированный базис из собственных векторов (согласно теореме 4.10 он существует) и λ_k – собственное число, соответствующее собственному вектору $\vec{e}_k$, $k = 1, 2, 3$. Тогда количество базисных векторов, соответствующих одному собственному числу совпадает с кратностью этого числа. Если собственное число простое, то базисный вектор, соответствующий этому собственному числу определяется однозначно, с точностью до направления (это верно, если например, все собственные числа различны). Тогда уравнение (4.47) в этом ортонормированном базисе из собственных векторов имеет очень простой вид: если

$\overrightarrow{HN} = x_1 \overrightarrow{e_1} + x_2 \overrightarrow{e_2} + x_3 \overrightarrow{e_3}$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, то

$$D_H(\overrightarrow{HN}) = (F_H \overrightarrow{HN}, \overrightarrow{HN}) = \sum_{k=1}^3 \lambda_k (x_k)^2,$$

$$N \in \sigma_H \iff \sum_{k=1}^3 \lambda_k (x_k)^2 = \pm 1. \quad (4.48)$$

Очевидно матрица инерции $A_H = A_{H; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}} = (J_{\overrightarrow{e_k}, \overrightarrow{e_j}, H}^*(E))$, соответствующая ортонормированному базису из собственных векторов $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ оператора F_H , является матрицей квадратичной формы оператора F_H для этого базиса и является диагональной, т.е. $J_{\overrightarrow{e_k}, \overrightarrow{e_j}, H}^*(E) = -J_{\overrightarrow{e_j}, \overrightarrow{e_k}, H}^*(E) = 0$ при $k \neq j$ и $\lambda_k = J_{\overrightarrow{e_k}, \overrightarrow{e_k}, H}^*(E) = J_{l_k}(E)$, где l_k – прямая, проходящая через точку H , параллельно вектору $\overrightarrow{e_k}$.

Определение 4.7. Ось инерции (главная ось) в точке H – это прямая, проходящая через H параллельно собственному вектору оператора F_H , а плоскость, проходящая через эту точку ортогонально собственному вектору называется плоскостью инерции. Ось (плоскость) инерции для центра масс, если он существует, называется центральной осью (плоскостью) инерции.

Оси инерции, соответствующие простым собственным числам, определяются однозначно.

Определение 4.8. Гириционная поверхность инерции σ_H^g в точке H определяется следующим образом. Если $\sigma_H = \emptyset$, то $\sigma_H^g := \emptyset$. Если $\sigma_H \neq \emptyset$ и $\overrightarrow{HM} = x_1 \overrightarrow{e_1} + x_2 \overrightarrow{e_2} + x_3 \overrightarrow{e_3}$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, то

$$M \in \sigma_H^g \iff \sum_{k: \lambda_k \neq 0} \frac{(x_k)^2}{\lambda_k} = \pm 1.$$

6.2. Случай неотрицательной плотности. Пусть E – ограниченное множество с распределенной по нему массой с неотрицательной μ -плотностью $\rho \geq 0$ и $m(E) > 0$. Тогда $J_l(E) \geq 0$ для любой прямой l . Поэтому квадратичная форма D_H всегда неотрицательна, а вопрос о ее строгой положительной определенности сводится к вопросу существования или не существования прямых l , для которых $J_l(E) = 0$. Не трудно доказать, что $J_l(E) = 0 \iff$ вся масса множества E сосредоточена на l , т.е. $m(E \setminus l) = 0$, что эквивалентно условию $m(E \cap l) = m(E)$. Если есть две различные прямые l_1 и l_2 , на каждой из которых сосредоточена вся масса множества E , то эти прямые пересекаются и вся масса множества E сосредоточена в их точке пересечения $H_0 = l_1 \cap l_2$. В этом случае $J_l(E) = 0 \iff$ прямая l проходит через точку H_0 . Таким образом:

- 1) Если масса множества E не сосредоточена ни на одной прямой, то для любой точки H квадратичная форма D_H строго положительно определена.
- 2) Если масса множества E сосредоточена на прямой l , но не в точке, то квадратичная форма D_H строго положительно определена $\iff H \notin l$.
- 3) Если масса множества E сосредоточена в одной точке, то для любой точки H квадратичная форма D_H не является строго положительно определенной.

6.3. Примеры пустых поверхностей инерции. Очевидно, поверхность инерции $\sigma_H = \emptyset \iff J_l(E) = 0$ для любой прямой l , проходящей через точку H .

- 1) Предположим, что множество $D \subset \mathbb{R}^3$ симметрично относительно точки H (например любая прямая, проходящая через эту точку). Тогда для любой точки $M \in \mathbb{R}^3$

выполняется равенство $r_D(M) = r_D(M')$, где M' – точка, симметричная точке M относительно точки H .

2) Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^3$ симметрично относительно точки H , т.е. $E' = E$, а мера μ симметрична на E относительно точки H , т.е. для любого измеримого подмножества $U \subset E$ выполняется равенство $\mu(U) = \mu(U')$, где U' – множество, симметричное множеству U относительно точки H . Эти условия выполняются, по крайней мере в случаях 1–4, приведенных в начале параграфа 1. Предположим, что плотность ρ является функцией, нечетной относительно H , т.е. $\rho(M) = -\rho(M')$ для любой точки $M \in E$.

Не сложно доказать следующую теорему.

Теорема 4.15. Пусть выполнены приведенные выше условия 1) и 2). Тогда $m(E) = 0$ и

$$J_D(E) = \int_E r_D^2(M) \rho(M) d\mu(M) = 0.$$

В частности $J_l(E) = 0$ для любой прямой l , проходящей через точку H и, значит, $\sigma_H = \emptyset$.

Пример 4.1. Пусть задана система двух материальных точек $1A, (-1)B$, $A \neq B$ (мера в каждой точке равна 1, а плотность $\rho(A) = -\rho(B) = 1$). Если H – середина отрезка $[A, B]$, то $\sigma_H = \emptyset$.

Пример 4.2. Пусть E – круг в $\mathbb{R}^2$ с центром в начале координат $O(0, 0)$, а масса распределена по его площади (μ – площадь) с плотностью $\rho(x, y) = x$. Тогда $\sigma_O = \emptyset$.

Пример 4.3. Пусть E – квадрат в $\mathbb{R}^2$ с центром в начале координат $O(0, 0)$, а масса распределена по его периметру (μ – длина) с плотностью $\rho(x, y) = x + y$. Тогда $\sigma_O = \emptyset$.

Пример 4.4. Пусть E – эллипсоид в $\mathbb{R}^3$ с центром в начале координат $O(0, 0, 0)$, а масса распределена по его объему (μ – объем) с плотностью $\rho(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$. Тогда $\sigma_O = \emptyset$.

6.4. Поверхности инерции, полученные параллельным переносом. Равенство двух операторов инерции F_{H_1} и F_{H_2} эквивалентно совпадению их квадратичных форм, т.е. $D_{H_1}(\vec{n}) = D_{H_2}(\vec{n})$, $\forall \vec{n}$, что в свою очередь эквивалентно тому, что поверхность инерции в точке H_2 получается из поверхности инерции в точке H_1 параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{H_1 H_2}$, т.е. $\sigma_{H_2} = \sigma_{H_1} + \overrightarrow{H_1 H_2}$.

Теорема 4.16. Пусть задано множество E с распределенной по нему массой с μ -плотностью ρ . Тогда:

- 1) Пусть $m(E) \neq 0$ и Z – центр масс E . Если $H_1 \neq H_2$, то $F_{H_1} = F_{H_2} \iff$ точки H_1 и H_2 симметричны относительно Z , т.е. $\overrightarrow{H_1 Z} = -\overrightarrow{H_2 Z}$. В частности $F_H = F_Z \iff H = Z$.
- 2) Если $m(E) = 0$ и любая точка является центром масс, то $F_{H_1} = F_{H_2}$ для любых точек H_1, H_2 .
- 3) Если $m(E) = 0$ и центр масс E не существует (см. теорему 4.3), то $F_{H_1} = F_{H_2} \iff H_1 = H_2$.

Доказательство. Докажем необходимость в утверждении 1). Пусть $H_1 \neq H_2$ и $F_{H_1} = F_{H_2}$. Тогда из равенства (4.44) следует, что для любого вектора $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ выполняется равенство $|\overrightarrow{H_1 Z} \times \vec{n}|^2 = |\overrightarrow{H_2 Z} \times \vec{n}|^2$. Беря в этом равенстве $\vec{n} = \overrightarrow{H_2 Z}$, получаем, что вектора $\overrightarrow{H_1 Z}$ и $\overrightarrow{H_2 Z}$ коллинеарны. Так как $H_1 \neq H_2$, то хотя бы один из этих векторов не нулевой, например, $\overrightarrow{H_2 Z} \neq \vec{0}$. Тогда $\overrightarrow{H_1 Z} = \alpha \overrightarrow{H_2 Z}$ и, значит для любого вектора $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$

выполняется равенство $\alpha^2 \left| \overrightarrow{H_2 Z} \times \vec{n} \right|^2 = \left| \overrightarrow{H_2 Z} \times \vec{n} \right|^2$. Если взять единичный вектор $\vec{n}$, ортогональный вектору $\overrightarrow{H_2 Z}$, то получим равенство $\alpha^2 = 1$. Случай $\alpha = 1$ не возможен, т.к. $H_1 \neq H_2$. Поэтому $\alpha = -1$. Необходимость доказана, а достаточность также вытекает из равенства (4.44).

Утверждение 2) вытекает из следствия 4.3 (утверждение 2).

Докажем необходимость в утверждении 3). Пусть $F_{H_1} = F_{H_2}$. Тогда из (4.45) следует, что для любого вектора $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ выполняется равенство

$$\left| \overrightarrow{H_1 Z_+} \times \vec{n} \right|^2 - \left| \overrightarrow{H_1 Z_-} \times \vec{n} \right|^2 = \left| \overrightarrow{H_2 Z_+} \times \vec{n} \right|^2 - \left| \overrightarrow{H_2 Z_-} \times \vec{n} \right|^2, \quad Z_- \neq Z_+.$$

Учитывая равенства $\overrightarrow{H_1 Z_+} = \overrightarrow{H_1 Z_-} + \overrightarrow{Z_- Z_+}$ и $\overrightarrow{H_2 Z_+} = \overrightarrow{H_2 Z_-} + \overrightarrow{Z_- Z_+}$, получаем, что $\left(\overrightarrow{H_2 H_1} \times \vec{n}, \overrightarrow{Z_- Z_+} \times \vec{n} \right) = 0, \forall \vec{n} \in \mathbb{R}^3$. Беря в этом равенстве $\vec{n} = \overrightarrow{H_2 H_1} + \overrightarrow{Z_- Z_+}$, получаем, что вектора $\overrightarrow{H_2 H_1}$ и $\overrightarrow{Z_- Z_+}$ коллинеарны. Так как $\overrightarrow{Z_- Z_+} \neq \vec{0}$, то $\overrightarrow{H_2 H_1} = \alpha \overrightarrow{Z_- Z_+}$ и, значит для любого вектора $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ выполняется равенство $\alpha \left| \overrightarrow{Z_- Z_+} \times \vec{n} \right|^2 = 0$. Если взять единичный вектор $\vec{n}$, ортогональный вектору $\overrightarrow{Z_- Z_+}$, то получим равенство $\alpha = 0$ и $H_1 = H_2$. Необходимость в утверждении 3) доказана, а достаточность очевидна. $\square$

Пример 4.5. Пусть $E := \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ – шар с центром в начале координат $O(0; 0; 0)$ радиуса $R > 0$. Пусть масса распределена по объему E (μ – объем) с плотностью $\rho(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, где функция f интегрируема на отрезке $[0, R]$. Очевидно каждое множество $E_{\pm}$ ((см. параграф 2.2.2)) симметрично относительно $O(0; 0; 0)$ (более того, каждое из них инвариантно относительно вращений вокруг точки $O(0; 0; 0)$). Поэтому для любой интегрируемой нечетной функции $h(x, y, z)$ выполняются равенства

$$\iiint_E h(x, y, z) \rho(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{E_{\pm}} h(x, y, z) \rho(x, y, z) dx dy dz = 0.$$

Отсюда следует, что точка $O(0; 0; 0)$ является центром масс E и он единственный, если $m(E) \neq 0$. Если $m(E) = 0$, то любая точка является центром масс (см. теорему 4.3). Переходя к сферическим координатам $x = t \cos \psi \cos \phi$, $y = t \cos \psi \sin \phi$, $z = t \sin \psi$, $-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq t \leq R$, и учитывая, что якобиан равен $I(t, \psi, \phi) = t^2 \cos \psi$, получаем

$$m(E) = \iiint_E \rho(x, y, z) dx dy dz = 4\pi \int_0^R t^2 f(t) dt. \quad (4.49)$$

Пусть D – произвольное множество, а F – произвольный оператор вращения вокруг O . Тогда момент инерции шара E с нашей плотностью относительно множества $F(D)$ равен

$$J_{F(D)} = \int_E r_{F(D)}^2(M) \rho(M) dM = \int_E r_D^2(N) \rho(N) dN = J_D. \quad (4.50)$$

Здесь мы сделали замену $M = F(N)$ и учли, что: 1) модуль якобиана при вращении равен 1, а шар E остается на месте; 2) при вращении вокруг O расстояния между точками не меняется, т.е. $r(F(N), F(B)) = r(N, B)$ и, значит значение плотности в нашем случае не меняется, т.е. $\rho(B(N)) = \rho(N)$, и для любой точки N справедливо равенство

$$\begin{aligned} r_{F(D)}(F(N)) &= \inf_{A \in F(D)} r(F(N), A) = \{A = F(B), B \in D\} = \\ &= \inf_{B \in D} r(F(N), F(B)) = \inf_{B \in D} r(N, B) = r_D(N). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Из равенства (4.50) вытекает, что момент инерции относительно прямой l , проходящей через начало координат O , в нашем случае не зависит от выбора этой прямой. Поэтому

$$\begin{aligned} J_l &= \frac{1}{3} (J_x + J_y + J_z) = \frac{2}{3} J_O = \\ &= \frac{2}{3} \iiint_E (x^2 + y^2 + z^2) f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz = \frac{8\pi}{3} \int_0^R t^4 f(t) dt. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Можем сделать следующие выводы:

- 1) Если интеграл (4.49) отличен от нуля, то начало координат O – единственный центр масс, а если интеграл (4.49) равен нулю, то все точки являются центрами масс и, значит применима теорема 4.16.
- 2) Если интеграл (4.52) отличен от нуля, то поверхность σ_O – сфера с центром в начале координат и радиуса $1/\sqrt{|J_l|}$, а если интеграл (4.52) равен нулю, то $\sigma_O = \emptyset$.
- 3) Если оба интеграла (4.49) и (4.52) равны нулю, то все точки являются центрами масс и $\sigma_H = \emptyset$ для любой точки H .
- 4) Если интеграл (4.49) равен нулю, а интеграл (4.52) отличен от нуля, то σ_H – сфера с центром в точке H радиуса $1/\sqrt{|J_l|}$.

6.5. Критерий существования точки, для которой поверхность инерции является сферой или пустым множеством. Рассмотрим следующую задачу (для неотрицательной плотности см. [8, часть V, § 10]). Пусть задано ограниченное множество E с распределенной по нему массой с μ -плотностью ρ . Найти точки H , для которых поверхность инерции σ_H является сферой или пустым множеством.

1) Рассмотрим случай, когда $m = m(E) \neq 0$. Пусть Z – центр масс E , а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – все собственные числа линейного самосопряженного оператора F_Z , и $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – соответствующий ортонормированный базис из собственных векторов в $\mathbb{R}^3$. Если $\vec{n} = \overrightarrow{HN} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{HZ} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ и $a = |\overrightarrow{HZ}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$, то из равенства (4.44) получаем

$$D_H(\vec{n}) = \sum_{k=1}^3 (\lambda_k + m(a^2 - (a_k)^2))(x_k)^2 - m \sum_{k,j=1, k \neq j}^3 a_k a_j x_k x_j. \quad (4.53)$$

Из этого равенства следует, что уравнение $D_H(\vec{n}) = \pm 1$ в ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ определяет сферу с центром в точке H или пустое множество $\iff$ выполняются два условия: 1) $a_k a_j = 0$, $k \neq j$; 2) $\lambda_k + m(a^2 - (a_k)^2) = \lambda$, $k = 1, 2, 3$. Первое условие означает, что хотя бы две координаты равны нулю. Пусть, например, $a_1 = a_2 = 0$. Тогда из второго условия вытекает, что $\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_3 = \lambda$ и $(a_3)^2 = a^2 = (\lambda_3 - \lambda_1)/m \geq 0$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4.17. Пусть $m = m(E) \neq 0$ и Z – центр масс множества E . Тогда точка H , у которой поверхность инерции σ_H является сферой или пустым множеством, существует тогда и только тогда, когда среди собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ оператора F_Z два собственных числа равны, а третье собственное число является наибольшим, если $m > 0$, или наименьшим, если $m < 0$. При выполнении этих условий точка H определяется равенством $\overrightarrow{HZ} = \pm \sqrt{\frac{\lambda_k - \lambda_j}{m}} \vec{e}_k$, $j \neq k$, где λ_k – третье собственное число, $\vec{e}_k$ – соответствующий ему единичный собственный вектор, а $\sigma_H = \emptyset$, если $\lambda_k = 0$, и σ_H – сфера радиуса $1/\sqrt{|\lambda_k|}$, если $\lambda_k \neq 0$.

Эта теорема является также простым следствием теоремы 4.20.

2) Если $m(E) = 0$ и любая точка является центром масс E , то (см. теорему 4.16) либо все поверхности инерции σ_H являются сферами с одинаковым радиусом, либо таких точек H не существует.

3) Если $m(E) = 0$ и центр масс E не существует (см. теорему 4.3), то $m = m(E_+) = -m(E_-) > 0$ и $Z_+ \neq Z_-$, где $Z_{\pm}$ – центр масс множества $E_{\pm}$. Пусть Z_0 – середина отрезка $[Z_-, Z_+]$, а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – все собственные числа линейного самосопряженного оператора F_{Z_0} , и $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – соответствующий ортонормированный базис из собственных векторов в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\overrightarrow{HZ_+} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$, $a = |\overrightarrow{HZ_+}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$ и $\overrightarrow{HZ_-} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$, $b = |\overrightarrow{HZ_-}| = \sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2}$. Если $\vec{n} = \overrightarrow{HN} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, то из равенства (4.45) вытекает

$$D_H(\vec{n}) = \sum_{k=1}^3 (\lambda_k + m(a^2 - (a_k)^2 - b^2 + (b_k)^2)) (x_k)^2 - m \sum_{k,j=1, k \neq j}^3 (a_k a_j - b_k b_j) x_k x_j. \quad (4.54)$$

Из этого равенства следует, что уравнение $D_H(\vec{n}) = \pm 1$ в ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ определяет сферу с центром в точке H или пустое множество $\iff$ выполняются два условия:

$$1) a_k a_j = b_k b_j, \quad k \neq j; \quad 2) \lambda_k + m(a^2 - (a_k)^2 - b^2 + (b_k)^2) = \lambda, \quad k = 1, 2, 3. \quad (4.55)$$

Лемма 4.1. Если выполнены условия (4.55), то точки H, Z_-, Z_+ лежат в плоскости инерции точки Z_0 .

Доказательство. Если σ_{Z_0} – пустое множество или сфера, то любая плоскость, проходящая через точку Z_0 является плоскостью инерции. В частности и плоскость α , проходящая через точки H, Z_-, Z_+ , так как она содержит точку Z_0 .

Пусть теперь σ_{Z_0} не является пустым множеством или сферой. Если $a_k \neq 0$ и $b_k \neq 0$ для всех $k = 1, 2, 3$, то из условий (4.55) вытекают равенства $a_k^2 = b_k^2$ для всех $k = 1, 2, 3$. Тогда $\lambda_k = \lambda$ при всех $k = 1, 2, 3$, но это противоречит предположению, что σ_{Z_0} не является пустым множеством или сферой. Поэтому хотя бы один из шести коэффициентов a_k и b_k равен 0. Пусть для определенности $b_3 = 0$. Если $a_3 = 0$, то лемма доказана, так как в этом случае точки H, Z_-, Z_+ лежат в плоскости, ортогональной вектору $\vec{e}_3$. Если $a_3 \neq 0$, то $a_1 = a_2 = 0$ и $b_1 b_2 = 0$. Тогда точки H, Z_-, Z_+ лежат в плоскости, ортогональной или вектору $\vec{e}_1$ или вектору $\vec{e}_2$. Лемма 4.1 доказана. $\square$

Пусть выполнены условия (4.55). По лемме 4.1 точки H, Z_-, Z_+ лежат в плоскости инерции точки Z_0 . Можно считать, что эта плоскость ортогональна вектору $\vec{e}_3$, т.е. $a_3 =$

$b_3 = 0$. Тогда условия (4.55) эквивалентны условиям:

$$a_1 a_2 = b_1 b_2, \quad m(a_1^2 - b_1^2) = \lambda_1 - \lambda_3, \quad m(a_2^2 - b_2^2) = \lambda_2 - \lambda_3, \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3.$$

Пусть $\overrightarrow{Z_0 Z_+} = c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2$ и $\overrightarrow{Z_0 \vec{H}} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$. Тогда $a_k = c_k - \alpha_k$ и $b_k = -c_k - \alpha_k$ при $k = 1, 2$, а условия (4.55) эквивалентны условиям:

$$c_2 \alpha_1 + c_1 \alpha_2 = 0, \quad -4m c_1 \alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_3, \quad -4m c_2 \alpha_2 = \lambda_2 - \lambda_3, \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3.$$

Эта система легко решается введением параметра t . Первое уравнение эквивалентно двум равенствам: $\alpha_1 = t c_1$, $\alpha_2 = -t c_2$. Второе и третье уравнения эквивалентны равенству $t = (\lambda_2 - \lambda_1) / (4m(c_1^2 + c_2^2)) = (\lambda_2 - \lambda_1) / (m|\overrightarrow{Z_- Z_+}|^2)$ и условию на коэффициенты:

$$\lambda_3 = \frac{c_1^2 \lambda_2 + c_2^2 \lambda_1}{c_1^2 + c_2^2}. \quad (4.56)$$

При выполнении этого условия точка H определяется однозначно: $\overrightarrow{Z_0 \vec{H}} = t(c_1 \vec{e}_1 - c_2 \vec{e}_2)$. Это равенство и равенство (4.56) имеют простой геометрический смысл. Пусть l_k – ось инерции, проходящая через точку Z_0 параллельно вектору $\vec{e}_k$, $k = 1, 2, 3$. Тогда $\lambda_k = J_{l_k}$. Пусть Z_+^{**} – точка, симметричная точке Z_+ относительно биссектрисы прямого угла, образованного осями l_1 и l_2 , а l_0 – прямая, проходящая через точки Z_0 и Z_+^{**} . Тогда $\overrightarrow{Z_0 Z_+^{**}} = \varepsilon(c_2 \vec{e}_1 + c_1 \vec{e}_2)$, $\varepsilon^2 = 1$, а равенство (4.56) эквивалентно равенству моментов инерции относительно прямых l_3 и l_0 , т.е. $J_{l_3} = J_{l_0}$. Пусть Z_+^* – точка, симметричная точке Z_+ относительно прямой l_1 . Тогда $\overrightarrow{Z_0 \vec{H}} = t \overrightarrow{Z_0 Z_+^*}$.

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 4.18. Пусть $m(E) = 0$ и центр масс E не существует, т.е. $m = m(E_+) = -m(E_-) > 0$ и $Z_+ \neq Z_-$, где Z_+ и Z_- – центры масс соответственно множеств E_+ и E_- . Пусть Z_0 – середина отрезка $[Z_-, Z_+]$. Тогда точка H , у которой поверхность инерции σ_H является сферой или пустым множеством, существует тогда и только тогда, когда выполняются два условия: 1) Точки Z_- и Z_+ лежат в плоскости инерции α точки Z_0 . 2) $J_l = J_{l_0}$, где l – та ось инерции в точке Z_0 , которая ортогональна α , а l_0 – прямая, проходящая через точки Z_0 и Z_+^{**} . Здесь Z_+^{**} – точка, симметричная точке Z_+ относительно биссектрисы прямого угла, образованного ортогональными осями инерции l_1 и l_2 в точке Z_0 , которые лежат в плоскости α .

При выполнении этих двух условий точка H лежит на прямой, проходящей через точки Z_0 и Z_+^* , где Z_+^* – точка, симметричная точке Z_+ относительно оси l_1 , и определяется однозначно равенством $\overrightarrow{Z_0 \vec{H}} = t \overrightarrow{Z_0 Z_+^*}$, $t = (J_{l_2} - J_{l_1}) / (m|\overrightarrow{Z_- Z_+}|^2)$. Пусть $\lambda := J_{l_1} + J_{l_2} - J_l$. Тогда $\sigma_H = \emptyset$, если $\lambda = 0$, и σ_H – сфера радиуса $1/\sqrt{|\lambda|}$, если $\lambda \neq 0$.

6.6. Построение поверхности инерции в произвольной точке по известной центральной поверхности инерции. Рассмотрим следующую задачу (для неотрицательной плотности см. [8, часть V, § 10]). Пусть задано ограниченное множество E с распределенной по нему массой с μ -плотностью ρ . Пусть $m = m(E) \neq 0$ и Z – центр масс E . Зная поверхность инерции σ_Z , требуется найти поверхность инерции σ_H произвольной точки $H \neq Z$.

6.6.1. Общий случай. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – все собственные числа линейного самосопряженного оператора F_Z , и $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – соответствующий ортонормированный базис из собственных векторов в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\overrightarrow{H \vec{Z}} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ и $a = |\overrightarrow{H \vec{Z}}| =$

$\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} > 0$. Тогда матрица инерции A_H в точке H для этого базиса равна (см. равенство (4.53))

$$A_H = \begin{pmatrix} \lambda_1 + m(a^2 - (a_1)^2) & -ma_1a_2 & -ma_1a_3 \\ -ma_2a_1 & \lambda_2 + m(a^2 - (a_2)^2) & -ma_2a_3 \\ -ma_3a_1 & -ma_3a_2 & \lambda_3 + m(a^2 - (a_3)^2) \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

Так как базис ортонормированный, то (см. теорему 4.10) собственные числа оператора F_H совпадают с собственными числами матрицы A_H , т.е. являются корнями уравнения $\det(A_H - \delta I) = 0$. Кроме того, если $\vec{w} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$ – собственный вектор оператора F_H для собственного числа δ , то $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – собственный вектор матрицы A_H того же собственного числа и наоборот. Легко проверить, что уравнение для нахождения собственных чисел $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ имеет вид (для удобства мы сделали замену $\beta = ma^2 - \delta$):

$$\begin{aligned} \Delta(\beta) := \det(A_H - \delta I) = \\ (\lambda_1 + \beta)(\lambda_2 + \beta)(\lambda_3 + \beta) - (\lambda_2 + \beta)(\lambda_3 + \beta)m(a_1)^2 - \\ (\lambda_1 + \beta)(\lambda_3 + \beta)m(a_2)^2 - (\lambda_1 + \beta)(\lambda_2 + \beta)m(a_3)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Это уравнение имеет ровно три вещественных корня (с учетом кратности) $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, и значит $\delta_k = ma^2 - \beta_k, k = 1, 2, 3$. Решая при фиксированном k уравнение $\alpha(A - \delta_k I) = 0$, находим ортонормированную систему собственных векторов $\alpha^k = (\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k), k = 1, 2, 3$, матрицы A_H . Тогда вектора $\vec{w}_k = \alpha_1^k \vec{e}_1 + \alpha_2^k \vec{e}_2 + \alpha_3^k \vec{e}_3$ образуют ортонормированный базис из собственных векторов оператора F_H . Таким образом, можно считать, что поверхность инерции σ_H найдена: если $\vec{HN} = x_1 \vec{w}_1 + x_2 \vec{w}_2 + x_3 \vec{w}_3$, то

$$N \in \sigma_H \iff \sum_{k=1}^3 \delta_k (x_k)^2 = \pm 1, \text{ где } \delta_k = ma^2 - \beta_k, k = 1, 2, 3. \quad (4.59)$$

Укажем формулу, по которой можно найти часть собственных векторов оператора F_H (а в некоторых случаях и все). Рассмотрим вектор

$$\overrightarrow{w(\beta)} = (\lambda_2 + \beta)(\lambda_3 + \beta)a_1 \vec{e}_1 + (\lambda_1 + \beta)(\lambda_3 + \beta)a_2 \vec{e}_2 + (\lambda_1 + \beta)(\lambda_2 + \beta)a_3 \vec{e}_3. \quad (4.60)$$

Не сложно проверить (см. формулу (4.44) для оператора инерции), что

$$F_H(\overrightarrow{w(\beta)}) = (ma^2 - \beta)\overrightarrow{w(\beta)} + \Delta(\beta) \vec{HZ}. \quad (4.61)$$

Отсюда следует, что если $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – корни уравнения (4.58), то $\overrightarrow{w(\beta_k)}$ является собственным вектором (если он не нулевой) оператора F_H , соответствующий собственному числу $\delta_k = ma^2 - \beta_k$. Вектор $\overrightarrow{w(\beta_k)}$, если он не нулевой, имеет простой геометрический смысл – это направляющий вектор нормали к поверхности S_{β_k} в точке H , где поверхность S_{β} , симметричная относительно точки Z , определяется следующим образом: если $\vec{MZ} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$, то

$$\begin{aligned} M \in S_{\beta} \iff (\lambda_1 + \beta)(\lambda_2 + \beta)(\lambda_3 + \beta) - (\lambda_2 + \beta)(\lambda_3 + \beta)m(x_1)^2 - \\ (\lambda_1 + \beta)(\lambda_3 + \beta)m(x_2)^2 - (\lambda_1 + \beta)(\lambda_2 + \beta)m(x_3)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Лемма 4.2. 1) $S_\beta = \mathbb{R}^3 \iff (\beta + \lambda_k)(\beta + \lambda_j) = 0$ при любых $k \neq j \iff$ при некоторых $k \neq j$ выполняются равенства $\beta = -\lambda_k = -\lambda_j$.

2) $\overrightarrow{w(\beta)} = \vec{0} \iff (\beta + \lambda_k)(\beta + \lambda_j)a_s = 0$ при любых различных k, j, s .

3) Если $S_\beta = \mathbb{R}^3$, то $\overrightarrow{w(\beta)} = \vec{0}$. Если дополнительно $a_k \neq 0$ для всех $k = 1, 2, 3$, то $S_\beta = \mathbb{R}^3 \iff \overrightarrow{w(\beta)} = \vec{0}$

4) Если $\overrightarrow{w(\beta)} \neq \vec{0}$, то $S_\beta \neq \mathbb{R}^3$ и, значит, S_β является поверхностью.

Очевидно $H \in S_{\beta_k}$ при $k = 1, 2, 3$.

Теорема 4.19. Пусть E – ограниченное множество с распределенной по нему массой с μ -плотностью ρ , $m(E) \neq 0$ и Z – центр масс E . Пусть $H \neq Z$ и $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – все корни уравнения (4.58). Тогда: 1) Если при некотором k вектор $\overrightarrow{w(\beta_k)} \neq \vec{0}$, то ось инерции в точке H , которая параллельна вектору $\overrightarrow{w(\beta_k)}$, является нормалью к поверхности S_{β_k} в точке H .

2) Если $\beta_k \neq \beta_j$ и оба вектора $\overrightarrow{w(\beta_k)}$ и $\overrightarrow{w(\beta_j)}$ не равны $\vec{0}$, то нормали к двум поверхностям S_{β_k} и S_{β_j} в точке H ортогональны между собой.

3) Если все числа β_k , $k = 1, 2, 3$, различны и все вектора $\overrightarrow{w(\beta_k)} \neq \vec{0}$, $k = 1, 2, 3$, то оси инерции в точке H определяются однозначно, ортогональны между собой и являются нормальными к трем поверхностям S_{β_k} , $k = 1, 2, 3$, в точке H .

Доказательство. Первое утверждение доказано перед теоремой. Второе утверждение вытекает из того, что собственные вектора самосопряженного оператора, соответствующие различным собственным векторам, ортогональны между собой. Третье утверждение вытекает из первых двух. $\square$

6.6.2. H лежит на центральной оси инерции. Если точка H находится на одной из осей инерции в точке Z , например $\overrightarrow{HZ} = a_3 \vec{e}_3$, то $a_s = 0$ при $s = 1, 2$ и $(a_3)^2 = a^2 > 0$. Тогда A_H является диагональной матрицей, а собственные числа и ортонормированные вектора оператора F_H равны $\delta_3 = \lambda_3$, $\vec{w}_3 = \vec{e}_3$ и $\delta_s = ma^2 + \lambda_s$, $\vec{w}_s = \vec{e}_s$ при $s = 1, 2$. Таким образом, в рассматриваемом случае одна ось инерции в точке H совпадает с той осью инерции в точке Z , на которой лежит точка H , а остальные оси инерции в точке H параллельны остальным осям инерции в точке Z . Числа $\beta_3 = ma^2 - \lambda_3$ и $\beta_s = -\lambda_s$ при $s = 1, 2$. Если дополнительно $\beta_3 \neq \beta_s = -\lambda_s$ при $s = 1, 2$, т.е. $\lambda_{1,2} \neq \lambda_3 - ma^2$, то $\overrightarrow{w(\beta_3)} = (\beta_3 + \lambda_1)(\lambda_2 + \beta_3)\vec{e}_3 \neq \vec{0}$, а поверхность S_{β_3} имеет вид:

$$S_{\beta_3} : \frac{ma^2}{ma^2 + \lambda_1 - \lambda_3} \cdot (x_1)^2 + \frac{ma^2}{ma^2 + \lambda_2 - \lambda_3} \cdot (x_2)^2 + (x_3)^2 = a^2. \quad (4.63)$$

Теорема 4.20. Пусть E – ограниченное множество с распределенной по нему массой с μ -плотностью ρ , $m(E) \neq 0$ и Z – центр масс E . 1) Если $H \neq Z$, то прямая HZ является осью инерции в точке $Z \iff$ прямая HZ является осью инерции в точке H . В этом случае остальные оси инерции в точке H параллельны остальным осям инерции в точке Z . 2) Если $H \neq M$, то прямая HM является осью инерции в точках H и $M \iff$ прямая HM проходит через точку Z .

Доказательство. Докажем утверждение 1). Необходимость и последнее утверждение доказаны перед теоремой. Докажем достаточность. Из равенства (4.44) вытекает, что $F_H(\overrightarrow{HZ}) = F_Z(\overrightarrow{HZ})$. Отсюда следует, что вектор $\overrightarrow{HZ}$ одновременно является или не является собственным вектором операторов F_H и F_Z .

Докажем утверждение 2). Надо доказать только необходимость. Если $H \neq M$ и прямая HM является осью инерции в точках H и M , то вектор $\overrightarrow{HM}$ является собственным вектором операторов F_H и F_M и соответствующие собственные числа этих операторов совпадают (оба они равны моменту инерции относительно прямой HM). Поэтому $F_H(\overrightarrow{HM}) = \lambda \overrightarrow{HM} = F_M(\overrightarrow{HM})$. Используя равенства (4.44) в точках H и M , получаем равенство $(|\overrightarrow{M\dot{Z}}|^2 + (\overrightarrow{H\dot{Z}}, \overrightarrow{M\dot{Z}}))\overrightarrow{H\dot{Z}} = (|\overrightarrow{H\dot{Z}}|^2 + (\overrightarrow{H\dot{Z}}, \overrightarrow{M\dot{Z}}))\overrightarrow{M\dot{Z}}$. Отсюда следует, что $\overrightarrow{H\dot{Z}} \parallel \overrightarrow{M\dot{Z}}$ и, значит, точка Z лежит на прямой HM . $\square$

6.6.3. H лежит в центральной плоскости инерции. Очевидно $a_k = 0 \iff$ точка H лежит в плоскости α_k , которая проходит через центр масс Z ортогонально вектору $\vec{e}_k$. В этом случае элементы k -го столбца и k -й строки матрицы A_H , кроме диагонального, равны 0, а диагональный элемент равен $\lambda_k + ma^2$. Поэтому $\vec{e}_k$ – собственный вектор оператора F_H , соответствующий собственному числу $\delta = \lambda_k + ma^2$, и значит α_k является плоскостью инерции и в точке H . Таким образом *любая центральная плоскость инерции α является плоскостью инерции в любой точке $H \in \alpha$.*

Отметим, что если все собственные числа оператора F_Z различны, то число $\beta = -\lambda_k$ является корнем уравнения (4.58) $\iff a_k = 0$.

6.6.4. σ_Z не поверхность вращения, а H не лежит в центральных плоскостях инерции. Если все собственные числа оператора F_Z различны и $a_k \neq 0$ при $k = 1, 2, 3$, то уравнение (4.58) имеет три различных вещественных корня $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, два из которых лежат между числами $-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3$, а третий принадлежит интервалу $(-\min \lambda_k, +\infty)$, если $m > 0$, или принадлежит интервалу $(-\infty, -\max \lambda_k)$, если $m < 0$. Очевидно, что все вектора $w(\beta_k) \neq \vec{0}$, $k = 1, 2, 3$. В рассматриваемом случае уравнение (4.62) поверхности S_{β_k} , $k = 1, 2, 3$, очевидно эквивалентно уравнению

$$S_{\beta_k} : \frac{m(x_1)^2}{\lambda_1 + \beta_k} + \frac{m(x_2)^2}{\lambda_2 + \beta_k} + \frac{m(x_3)^2}{\lambda_3 + \beta_k} = 1. \quad (4.64)$$

Не сложно понять, что одна из этих поверхностей является эллипсоидом, другая – двухполостным гиперboloидом, а третья – однополостным гиперboloидом. Отсюда и теоремы 4.19 получается теорема, которую для неотрицательной плотности доказал в 1813 Binet J.M. (см., например, [7, § 1.8]).

Теорема 4.21 (Binet). Пусть задано ограниченное множество E с распределенной по нему массой с μ -плотностью ρ , $m(E) \neq 0$ и Z – центр масс E . Предположим, что собственные числа оператора F_Z различны, а точка H не лежит ни в одной из трех центральных плоскостей инерции. Тогда оси инерции в точке H определяются однозначно, ортогональны между собой и являются нормальными к трем поверхностям S_{β_k} , $k = 1, 2, 3$, в точке H , одна из которых является эллипсоидом, другая является двухполостным гиперboloидом, а третья – однополостным гиперboloидом.

6.6.5. σ_Z – сфера или пустое множество. Если все собственные числа оператора F_Z равны одному числу λ (эквивалентно тому, что σ_Z – сфера или пустое множество), то $\beta_1 = \beta_2 = -\lambda$, $\beta_3 = ma^2 - \lambda$, и значит, $\delta_1 = \delta_2 = ma^2 + \lambda$, $\delta_3 = \lambda$. Тогда любая прямая, проходящая через Z , является осью инерции в точке Z . Поэтому (см. теорему 4.20) одна ось инерции в точке H совпадает с осью ZH , а остальные оси это произвольные прямые, проходящие через точку H ортогонально ZH . Таким образом, в рассматриваемом случае σ_H – это поверхность вращения вокруг оси ZH , а поверхность S_{β_3} – сфера с центром в точке Z , радиуса $a > 0$ (см. (4.63)).

6.6.6. σ_Z – поверхность вращения, но не сфера и не пустое множество. Если только два собственных числа равны между собой, например $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq \lambda_3$, то по крайней мере один корень уравнения (4.58) равен $\beta_1 = -\lambda$ и, значит, $\delta_1 = ma^2 + \lambda$. Этот корень простой, если точка H не лежит на оси инерции в точке Z , которая параллельна вектору $\vec{e}_3$. Это следует из равенства $\Delta'(-\lambda) = (\lambda - \lambda_3)m((a_1)^2 + (a_2)^2) \neq 0$.

6.6.7. Случай плоского множества. Не сложно доказать, что:

- 1) если E содержится в плоскости α и $H \in \alpha$, то одна из осей инерции в точке H ортогональна α ;
- 2) если E находится на прямой l и $H \in l$, то σ_H – поверхность вращения вокруг l .

6.6.8. Случай нулевой массы. Если $m(E) = 0$ и центр масс существует, то $\sigma_{H_2} = \sigma_{H_1} + \overrightarrow{H_1 H_2}$.

Если $m(E) = 0$ и центр масс не существует, то задача не исследована, но исследования можно провести аналогично случаю ненулевой массы. Пусть (см. теорему 4.3) $m = m(E_+) = -m(E_-) > 0$ и $Z_+ \neq Z_-$, где $Z_{\pm}$ – центр масс множества $E_{\pm}$. Пусть Z_0 – середина отрезка $[Z_-, Z_+]$, а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – все собственные числа оператора F_{Z_0} , и $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – соответствующий ортонормированный базис из собственных векторов в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\overrightarrow{H Z_+} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ и $\overrightarrow{H Z_-} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$. Тогда матрица инерции A_H в точке H для этого базиса равна (см. равенство (4.54))

$$A_H = A_{Z_0} + m(a^2 - b^2)I - m(A_{\vec{a}} - A_{\vec{b}}),$$

где A_{Z_0} – диагональная матрица с диагональными элементами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, I – единичная матрица, $a = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$, $b = \sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2}$, $\vec{a} := (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} := (b_1, b_2, b_3)$, а матрица $A_{\vec{c}}$ для $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ определяется по формуле

$$A_{\vec{c}} = \begin{pmatrix} c_1 c_1 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2 c_2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3 c_3 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что при любых $\vec{c}$ и $\vec{d}$ справедливо равенство $\vec{d} A_{\vec{c}} = (\vec{d}, \vec{c}) \vec{c}$. Оператор инерции в этом случае можно записать в виде

$$F_H \vec{n} = F_{Z_0} \vec{n} + m(|\overrightarrow{H Z_+}|^2 - |\overrightarrow{H Z_-}|^2) \vec{n} - m(\vec{n}, \overrightarrow{H Z_+}) \overrightarrow{H Z_+} + m(\vec{n}, \overrightarrow{H Z_-}) \overrightarrow{H Z_-}, \quad (4.65)$$

где $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$. Из этой формулы вытекает, что если α – плоскость инерции в точке Z_0 и $Z_-, Z_+ \in \alpha$, то α является плоскостью инерции в любой точке $H \in \alpha$.

6.6.9. Нерешенные экстремальные задачи. Пусть $\lambda_1(H), \lambda_2(H), \lambda_3(H)$ – все собственные числа оператора F_H . Найти экстремальные значения следующих функционалов:

1. $\lambda_1(H) \lambda_2(H) \lambda_3(H)$,
2. $\lambda_1(H) \lambda_2(H) + \lambda_2(H) \lambda_3(H) + \lambda_3(H) \lambda_1(H)$,
3. $\lambda_1(H) + \lambda_2(H) + \lambda_3(H)$,
4. $\lambda_1^2(H) + \lambda_2^2(H) + \lambda_3^2(H)$,
5. $(\lambda_1(H) - \lambda_2(H))^2 + (\lambda_2(H) - \lambda_3(H))^2 + (\lambda_3(H) - \lambda_1(H))^2$.

Если $m(E) \neq 0$, то можно воспользоваться уравнением (4.58) и теоремой Виета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзерман М.А. Классическая механика. – М.: Наука, – 1980. – 368 с.
2. Аппель П. Теоретическая механика. Том второй. Динамика системы. Аналитическая механика. – М.: Физматлит, – 1960. – 487 с.
3. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, – 1989. – 472 с.
4. Вильке В.Г. Теоретическая механика. – СПб.: Лань, – 2003. – 304 с.
5. Геронимус Я.Л. Теоретическая механика (очерки об основных положениях). – М.: Наука, – 1973. – 512 с.
6. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наукова думка, – 1978. – 296 с.
7. Горр Г.В., Мазнев А.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, – 2010. – 364 с.
8. Жуковский Н.Е. Теоретическая механика – Москва: Гостехиздат, – 1952. – 812 с.
9. Заставный В. П. Геометрия масс [Электронный ресурс]: учебное пособие / В. П. Заставный; ГОУ ВПО Донецкий национальный университет, Математический факультет, Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений. - Донецк: ДонНУ, 2017. - 103 с.
http://library.donnu.ru/el/ed/1977_GL72.pdf
10. Леви-Чевита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. Том первый. Кинематика. Принципы механики. Статика. Часть вторая. – М.: Изд.-во ин. лит., – 1952. – 326 с.
11. Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел. В 2-х томах. Т. I. – Москва: Наука. Главная редакция физ.-мат. лит., – 1983. – 464 с.
12. Суслов Г.К. Теоретическая механика. – М.: Гостехиздат, – 1946. – 670 с.
13. Четаев Н.Г. Теоретическая механика. – М.: Наука, – 1987. – 368 с.

Поступила в редакцию 14.04.2019 г.

SOME PROBLEMS OF MASS GEOMETRY IN THE CASE OF SIGNED DENSITY

V. P. Zastavnyi

In this paper we consider and solve the following problems of mass geometry for signed density: the criterion for existence of a center of mass in the case of zero mass, theorem on moment of inertia with respect to plane parallel sets, determination of the inertia surface (similarity to the inertia ellipsoid in the case of the positive density), examples of empty inertia surfaces, the criterion for existence of a point whose inertia surface is a sphere or an empty set, the problem of construction of an inertia surface at an arbitrary point with known central inertia surface and others.

Keywords: center of mass, moment of inertia, axis and plane of inertia, inertia surface, inertia operator.

Заставный Виктор Петрович

доктор физико-математических наук, доцент
Донецкий национальный университет, г. Донецк
zastavn@rambler.ru
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, ка-
федра математического анализа и дифференци-
альных уравнений
+38-095-5657264

Zastavnyi Viktor Petrovych

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Associate
Professor, Donetsk National University, Donetsk

УДК 517.5

ЗАДАЧА ВНЕШНЕГО ОСВЕЩЕНИЯ НА НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВАХ БОРСУКА

© 2019. А. Ю. Иванов

В статье автор решает задачу внешнего освещения при помощи параллельных пучков света для некоторых множеств Борсука.

Ключевые слова: Задача внешнего освещения, выпуклое множество, множество постоянной ширины, сферические отображения типа Гаусса, направление освещения.

Введение. Будем говорить, что направление, заданное прямой $l = \{\lambda y | \lambda \in \mathbb{R}\}$, освещает границу множества F в точке $x \in \partial F$, если существует такое положительное значение λ , что $x + \lambda y$ является внутренней точкой множества F .

В 1960 г. В. Г. Болтянским была поставлена, так называемая, задача внешнего освещения при помощи параллельных пучков, которая позже стала одной из центральных задач комбинаторной геометрии [1]. Данная задача заключается в нахождении минимального числа направлений необходимых для освещения границы всего множества. Это наименьшее число будем обозначать через $c(F)$.

Следует также отметить родственную задачу — задачу внешнего освещения при помощи точечных источников состоящую в нахождении наименьшего количества источников освещения необходимых для освещения каждой точки границы данного множества [2]. Будучи, в целом, не эквивалентными задачами для произвольных множеств они становятся равносильными в случае, если рассматриваемое множество замкнуто, ограничено и выпукло [1].

В работе автора [3] удалось получить точные значения числа $c(F)$ для множеств постоянной ширины граница которых имеет некоторые ограничения. Данное исследование основано на связи задачи внешнего освещения с не менее известной проблемой К. Борсука о разбиении множества на части меньшего диаметра представленной в следующей теореме 5.1.

Теорема 5.1. Для любого ограниченного тела $F \subset \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $a(F) \leq c(F)$.

где $a(F)$ минимальное количество частей множества F , диаметр которых строго меньше диаметра самого множества F , необходимых для покрытия всего множества F .

А также на работах автора [4] и [5], посвященных изучению проблемы Борсука на множествах постоянной ширины с нерегулярной границей. В работе [4] строится отображения типа Гаусса и разрабатывается связанная с ним техника позволяющая разбивать некоторые множества постоянной ширины на части меньшего диаметра.

В данной статье основываясь на теореме 1 распространяется основной результат работы автора [4] на случай задачи внешнего освещения.

Формулировка основного результата. Для того чтобы сформулировать основной результат данной статьи нам потребуется построить конструкцию отображения типа Гаусса, а также ввести несколько дополнительных обозначений.

На множестве постоянной ширины G определим функцию $\chi : G \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$, где $\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел. Для $x \in G$ положим $\chi(x)$ равной количеству диаметров множества G проходящих через точку x . Если множество таких диаметров бесконечно, будем обозначать $\chi(x) = \infty$. Построим теперь сферическое отображение типа Гаусса $\varsigma : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \partial G$, где $\mathbb{S}^{n-1}$ — сфера в $\mathbb{R}^n$ радиуса 1, следующим образом. Для $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ положим

$$\varsigma(\theta) = x, \text{ где } x, y \in \partial G, |x - y| = \text{diam} G \text{ и } x - y = \theta \text{diam} G, \quad (5.1)$$

т.е. x, y — диаметрально противоположные точки G в направлении θ .

Теорема 5.2. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — множество постоянной ширины, $EP = \{x | x \in \partial G : \chi(x) = \infty\}$, L — множество всех компонент связности множества $\Theta = \{\theta | \varsigma(\theta) \in EP\}$. Пусть также выполняются следующие условия:

(i) для любого $U \in L$

$$\sup_{\alpha, \beta \in U} |\alpha - \beta| < \sqrt{2} - \sigma$$

при некотором $\sigma > 0$, не зависящем от U ;

(ii) если $U, V \in L$ и $U \setminus \tilde{V} \neq \emptyset$, и $\tilde{V} \setminus U \neq \emptyset$, где $\tilde{V} = \{-\beta | \beta \in V\}$, то $\text{int}(\tilde{V}) \cap U = \emptyset$.

Тогда $c(G) = n + 1$

Вспомогательные утверждения. Далее нами будут использованы следующие стандартные обозначения. Символом (a, b) будем обозначать скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$. $cl(F)$, $\text{int}(F)$ и ∂F — замыкание множества $F \subset \mathbb{R}^n$, множество его внутренних точек и его граничное множество, соответственно.

Для доказательства теоремы 5.2 нам потребуются некоторые вспомогательные результаты, с доказательствами большинства, из которых, можно ознакомиться в работах автора [3, 4].

Для определенности будем полагать, что F является множеством постоянной ширины 1. Приведем основные свойства функции $\varsigma(\theta) : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \partial F$, введенной в (5.1).

Свойство 5.1. Для любого $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ существует единственное $x \in \partial F$ такое, что $\varsigma(\theta) = x$.

Свойство 5.2. Для любого $x \in \partial F$ существует $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ такое, что $\varsigma(\theta) = x$.

Свойство 5.3. ς — непрерывна на $\mathbb{S}^{n-1}$.

Свойство 5.4. Пусть M — компакт из $\mathbb{S}^{n-1}$, тогда $\varsigma(M)$ — компакт из ∂F .

Следующие утверждения характеризуют свойства множеств постоянной ширины в терминах отображения типа Гаусса.

Построим композицию определенных ранее функций $\chi^* = \chi \circ \varsigma$, таким образом, $\chi^* : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$, такая, что

$$\chi^*(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(\varsigma(\theta)), \quad (5.2)$$

Лемма 5.1. Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ — множество постоянной ширины 1, тогда для всех $x \in F$ выполняется неравенство $\chi(x) \geq 1$.

Определение 5.1. Пусть $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$, будем называть дугой $\theta_1 \tilde{\theta}_2$ — криволинейный отрезок наименьшей длины, соединяющий точки θ_1, θ_2 по $\mathbb{S}^{n-1}$.

Лемма 5.2. Пусть $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$ такие, что $\varsigma(\theta_1) = \varsigma(\theta_2)$, тогда для любого $\theta \in \theta_1\theta_2$ выполняется $\varsigma(\theta) = \varsigma(\theta_1)$.

Следствие 5.1. Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ – множество постоянной ширины 1, тогда для любого $x \in \partial F$, либо $\chi(x) = 1$, либо $\chi(x) = \infty$.

Лемма 5.3. Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ – фигура постоянной ширины 1, EP – множество особых точек F , L – множество всех компонент связности множества $\Theta = \{\theta | \varsigma(\theta) \in EP\}$. Тогда для любых $\theta_1 \in U, \theta_2 \in V$, где $U, V \in L (U \neq V)$ существует $\theta \in \theta_1\theta_2$ такое, что $\chi^*(\theta) = 1$.

Доказательство. Допустим, существуют такие $\theta_1 \in U, \theta_2 \in V$, где $U, V \in L (U \neq V)$, что для всех $\theta \in \theta_1\theta_2$ имеет место $\chi^*(\theta) \neq 1$, тогда из следствия 5.1 получаем $\chi^*(\theta) = \infty$. Из определения множеств U, V получаем $\theta_1\theta_2 \subset U$ и $\theta_1\theta_2 \subset V$. Получили противоречие с тем, что $U \neq V$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 5.4. Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ – фигура постоянной ширины 1, $\varsigma : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \partial F$ и $\chi^* : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ – функции, заданные в (5.1) и (5.2). Пусть также $X \subset \mathbb{S}^{n-1}$ – компактное множество, такое, что $\text{diam} X < 2$ и для любого $\alpha \in \partial X$ выполняется $\chi^*(\alpha) = 1$. Тогда $\text{diam} \varsigma(X) < 1$, где $\varsigma(X) = \{x | x = \varsigma(\alpha), \alpha \in X\}$.

Доказательство. Предположим что $\text{diam} \varsigma(X) = 1$, тогда существуют $x, y \in \varsigma(X) : |x - y| = 1$. Из определения множества $\varsigma(X)$ получаем, что $\exists \theta, \beta \in X : \varsigma(\theta) = x$ и $\varsigma(\beta) = y$.

Если $\chi^*(\theta) = \chi^*(\beta) = 1$, то из (5.1) следует, что $x - y = \theta$ и $y - x = \beta$. Значит, $\theta = -\beta$, тогда $|\theta - \beta| = |\theta - (-\theta)| = 2$. Это противоречит условию $\text{diam} X < 2$.

Если $\chi^*(\theta) = \infty, \chi^*(\beta) = 1$, положим $M = \{\alpha | \varsigma(\alpha) = x\}$. Из леммы 5.2 заключаем, что M – связное, а так как X – замкнутое выпуклое и для любого $\alpha \in \partial X$ выполняется $\chi^*(\alpha) = 1$, то $M \subset X$. Так как $y - x = \beta \Leftrightarrow x - y = (-\beta)$, то из (5.1) $(-\beta) \in M \Rightarrow (-\beta) \in X \Rightarrow |\beta - (-\beta)| = 2$, получили противоречие с $\text{diam} X < 2$.

Аналогично в случае $\chi^*(\theta) = \chi^*(\beta) = \infty$. Лемма доказана. $\square$

Следующее утверждение, полученное автором в работе [3], описывает взаимосвязь освещения параллельными пучками и отображений типа Гаусса.

Лемма 5.5. Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ – множество постоянной ширины 1, $\varsigma : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \partial F$ и $\chi^* : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ – функции, заданные в (5.1) и (5.2). Пусть также $X \subset \mathbb{S}^{n-1}$ – компактное множество, такое, что $\text{diam} X < 2$ и для любого $\alpha \in \partial X$ выполняется $\chi^*(\alpha) = 1$. Тогда существует направление l освещающее каждую точку множества $\varsigma(X) = \{x | x = \varsigma(\alpha), \alpha \in X\} \subset \partial F$.

Дополнительные построения. Для проведения конструктивного доказательства основного результата статьи нам потребуется построить систему подмножеств $(n - 1)$ -мерной сферы, образы которых при действии отображения ς имеют диаметры строго меньшие диаметра исходного множества.

Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ – множество, удовлетворяющее условиям теоремы 5.2, EP – множество особых точек F , L – множество всех компонент связности множества $\Theta = \{\theta | \varsigma(\theta) \in EP\}$. Обозначим $\sigma = \sqrt{2} - \sup_{U \in L} \sup_{\alpha, \beta \in U} |\alpha - \beta|$, тогда из условий теоремы 5.2 $\sigma > 0$. Пусть также для любого множества $V : \tilde{V} = \{-\beta | \beta \in V\}$.

Введем дополнительное множество L' такое, что $U \in L'$ тогда и только тогда, когда $U \in L$ и для всех $V \in L$ выполняется $\tilde{U} \not\subset V$. Таким образом, учитывая условия теоремы 5.2, для всех $U, V \in L'$ верно равенство $U \cap \text{int}(\tilde{V}) = \emptyset$.

Построим вспомогательные множества $K(U) = \bigcup_{\alpha \in \text{cl}(U)} (B_\nu(\alpha)) \cap \mathbb{S}^{n-1}$, где $B_\nu(x) =$

$\{y || y - x| \leq \nu\}$, а $\nu = \inf_{\alpha \in U} \left\{ \frac{\sigma}{4}, \frac{1}{2} \inf_{\beta \in V: V \neq U} |\alpha - \beta| \right\}$, тогда $\Theta \subseteq \bigcup_{U \in L \setminus L'} K(U) \bigcup_{U \in L'} U$ и для всех

$U \in L \setminus L'$ верно неравенство $\text{diam} K(U) \leq \sqrt{2} - \frac{\sigma}{2}$, так как $\text{diam} U \leq \sqrt{2} - \sigma$.

Пусть $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Построим множество $X(\theta, F) \subset \mathbb{S}^{n-1}$.

Проведем $(n - 1)$ мерную гиперплоскость X , такую, что θ — нормаль к X и $0 \in X$ (где точка 0 — центр $\mathbb{S}^{n-1}$). Пусть $M = \{\alpha | \alpha \in \mathbb{S}^{n-1} \cap X, \chi^*(\alpha) = \infty\}$, $M^* = \{U \in L' | \text{существует } \alpha \in M \cap U\}$.

Рассмотрим семейства множеств $\{U'\}_{U \in M^*}$ и $\{U^*\}_{U \in M^*}$, где $U' = \bigcup_{V \in L: V \subset \tilde{U}} K(\tilde{V}) \cup U$, а $U^* = \bigcup_{V \in L: V \subset \tilde{U}} K(V) \cup \tilde{U}$. По лемме 5.3 $\inf_{\alpha \in U', \beta \in V'} |\alpha - \beta| > 0$ (где $U' \neq V'$), а из следствия 5.1 для всякого $\alpha \in \text{int}[\bigcup_{\beta \in \partial U^*} B_{\nu/2}(\beta) \cap U^*]$ выполняется равенство $\chi^*(\alpha) = 1$.

Пусть $X^*(\theta, F) = [\mathbb{S}^{n-1} \cap \{\alpha | (\alpha, \theta) \geq 0\}] \bigcup_{U \in M^*} U^* \setminus [\bigcup_{U \in M^*} U']$. Положим теперь $X(\theta, F) = \text{cl}(X^*(\theta, F))$.

Из проведенного выше построения видно, что если $\alpha \in \partial X(\theta, F)$, то $(-\alpha) \in \partial X(\theta, F)$.

Положим

$$\varepsilon = \inf_{\alpha \in \partial X(\theta, F)} \left\{ \frac{1}{n+1}, \frac{\sigma}{8}, \frac{1}{4} \inf_{\beta \in \text{int} X(\theta, F): \chi^*(\beta) = \infty} |\alpha - \beta| \right\}.$$

Так как F удовлетворяет условиям теоремы 5.2, то из леммы 5.3 и построения семейства $\{U'\}_{U \in M^*}$ следует, что $\varepsilon > 0$.

Пусть теперь

$$X(\theta, F, \varepsilon) = \text{cl}(\mathbb{S}^{n-1} \setminus X^*(\theta, F, \varepsilon)),$$

где $X^*(\theta, F, \varepsilon) = \bigcup_{x \in \text{cl}(\mathbb{S}^{n-1} \setminus X(\theta, F))} B_\varepsilon(x) \cap \mathbb{S}^{n-1}$, а $B_\varepsilon(x) = \{y || y - x| \leq \varepsilon\}$.

Лемма 5.6. Пусть $X(\theta, F, \varepsilon)$ - множество, построенное выше, тогда

$$\text{diam} X(\theta, F, \varepsilon) < 2 = \text{diam} \mathbb{S}^{n-1}$$

и для всякого $\alpha \in \partial X(\theta, F, \varepsilon)$ выполняется равенство $\chi^*(\alpha) = 1$.

Доказательство. Из построения множества $X(\theta, F)$ видно, что все диаметральные точки множества $X(\theta, F) \cap \mathbb{S}^{n-1}$ принадлежат $\partial X(\theta, F)$, где $\text{diam} X(\theta, F) \leq \text{diam} \mathbb{S}^{n-1} = 2$. Однако $\partial X(\theta, F) \cap X(\theta, F, \frac{1}{2}\varepsilon) = \emptyset$, значит $\text{diam} X(\theta, F, \varepsilon) < \text{diam} X(\theta, F)$.

Из построения множества $X(\theta, F, \varepsilon)$ видно, что число ε выбирается так, что если $\alpha \in \text{int}(X(\theta, F, 2\varepsilon) \setminus X(\theta, F, \varepsilon))$, то $\varsigma(\alpha) \notin EP$ фигуры F . Таким образом, $\chi(\alpha) \neq \infty$ для всех $\alpha \in \partial X(\theta, F, \varepsilon)$. Тогда из следствия 5.1 непосредственно получаем требуемое утверждение. $\square$

Построенное, таким образом, $X(\theta, F, \varepsilon)$ не содержит в своей границе элементов множества Θ , кроме того, $\text{diam} X(\theta, F, \varepsilon) < 2 = \text{diam} \mathbb{S}^{n-1}$. Значит по лемме 5.5 существует направление l освещающее каждую точку множества $\varsigma(X(\theta, F, \varepsilon))$.

Построение системы векторов $\{\theta_i\}_{i=1}^n$. Пусть $\theta_1 \in \mathbb{S}^{n-1}$, тогда $X(\theta_1, F), X(\theta_1, F, \varepsilon_1)$ – множества из предыдущего пункта.

Находим $\theta_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$ такое, что $\theta_2 \in \partial X(\theta_1, F)$ и $(\theta_1, \theta_2) = \max_{\alpha \in \partial X(\theta_1, F)} (\alpha, \theta_1)$. Из условий на EP фигуры F , леммы 5.2, и условия (i) из теоремы 5.2, следует, что $(\theta_1, \theta_2) \leq$

$1 - A(\sigma)$, (где $A(\sigma) > 0$) а из условий выбора θ_2 получаем $(\theta_1, \theta_2) \geq 0$. Снова производим операцию построения множеств $X(\theta_2, F)$, $X(\theta_2, F, \varepsilon_2)$ согласно предыдущему пункту.

Затем производим эту операцию до момента нахождения θ_{n-1} .

Выпишем i -ую операцию.

Находим $\theta_i \in \mathbb{S}^{n-1}$ такое, что $\theta_i \in \partial X(\theta_{i-1}, F) \cap (\bigcap_{j=1}^{i-2} (X(\theta_j, F, \varepsilon_j) \setminus X(\theta_j, F, \frac{1}{2}\varepsilon_j))) = T_{i-1}$ и $(\theta_i, \theta_{i-1}) = \max_{\alpha \in T_{i-1}} (\alpha, \theta_{i-1})$. Строим множества $X(\theta_i, F)$, $X(\theta_i, F, \varepsilon_i)$ согласно предыдущему пункту.

Построим множества $X(\theta_n, F)$, $X(\theta_n, F, \varepsilon_n)$. Пусть $\varpi \in \mathbb{S}^{n-1}$ такое, что $\varpi \in \partial X(\theta_{n-1}, F) \cap (\bigcap_{j=1}^{n-2} (X(\theta_j, F, \varepsilon_j) \setminus X(\theta_j, F, \frac{1}{2}\varepsilon_j))) = T_{n-1}$ и $(\varpi, \theta_{n-1}) = \max_{\alpha \in T_{n-1}} (\alpha, \theta_{n-1})$. Строим множества $X(\varpi, F)$, $X(\varpi, F, \varepsilon_\varpi)$ согласно предыдущему пункту. Тогда если для всех $U \in L$ верно равенство $\bigcap_{i=1}^{n-1} X(\theta_i, F) \cap X(\varpi, F) \cap U = \emptyset$, то $\theta_n = \varpi$, а $X(\theta_n, F) = X(\varpi, F)$, $X(\theta_n, F, \varepsilon_n) = X(\varpi, F, \varepsilon_\varpi)$. Если же существует $U \in L$ (очевидно единственное) такое, что $\bigcap_{i=1}^{n-1} X(\theta_i, F) \cap X(\varpi, F) \cap U \neq \emptyset$, то $\theta_n \in \mathbb{S}^{n-1}$ выбираем так, что $(\theta_n, \theta_{n-1}) = \min_{\alpha \in V: V \in L, \varpi \in V} (\alpha, \theta_{n-1})$, множества $X(\theta_n, F)$, $X(\theta_n, F, \varepsilon_n)$ также строятся согласно предыдущему пункту.

Таким образом, для всех $U \in L$ выполняется равенство $\bigcap_{i=1}^n X(\theta_i, F) \cap U = \emptyset$.

Лемма 5.7. Пусть $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ - система векторов, построенная выше, тогда $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ - линейно независимые векторы.

Доказательство данного утверждения очевидным образом следует из построения системы векторов $\{\theta_i\}_{i=1}^n$.

Лемма 5.8. Пусть $X_0 = cl(\mathbb{S}^{n-1} \setminus [\bigcup_{i=1}^n X(\theta_i, F, \varepsilon_i)])$, тогда $diam X_0 < 2$ и для любого $\alpha \in \partial X_0$ выполняется равенство $\chi^*(\alpha) = 1$.

Доказательство. Предположим, что существует $\alpha \in \partial X_0$ такое, что $\chi^*(\alpha) = \infty$. Тогда, так как X_0 , $X(\theta_i, F, \varepsilon_i)$ - замкнутые множества, то из определения X_0 получаем, что существует $i \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $\alpha \in \partial X(\theta_i, F, \varepsilon_i)$. Из леммы 5.66 получили противоречие.

Допустим, что $diam X_0 = 2$, тогда так как X_0 - замкнутое множество, то существуют $\alpha, (-\alpha) \in X_0$. Значит $\alpha, (-\alpha) \notin int(X(\theta_i, F, \varepsilon_i))$ для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$.

Из леммы 5.7 $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ - линейно независимые векторы. Тогда существуют $\lambda_i \in \mathbb{R}^1$ такие, что $\alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i \theta_i$. Так как $\alpha, (-\alpha) \notin int(X(\theta_i, F, \varepsilon_i))$ для всякого $i \in \{1, \dots, n\}$ и учитывая, что $\bigcap_{i=1}^n X(\theta_i, F) \cap U = \emptyset$ для всех $U \in L$, то $\lambda_i \leq \varepsilon_i$. Далее имеем $(-\alpha) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \theta_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i^* \theta_i$, где $\lambda_i^* = -\lambda_i$, тогда $\lambda_i^* \geq -\varepsilon_i$. Таким образом, $-\varepsilon_i \leq \lambda_i^* \leq \varepsilon_i$. Так как $(-\alpha) \in \mathbb{S}^{n-1}$, то

$$|-\alpha|^2 = 1 = (-\alpha, -\alpha) \leq n^2 \left(\max_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i \right)^2 \leq \{ \text{из условий выбора } \varepsilon_i \} \leq \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1.$$

Получили противоречие – и лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 5.2. Так как фигура G удовлетворяет условиям теоремы 5.2, то можно построить множества $X_0, X(\theta_i, G, \varepsilon_i), i = \overline{1, n}$ аналогично введенной выше конструкции. Тогда из леммы 5.6 имеем $\text{diam} X(\theta_i, G, \varepsilon_i) < 2, i = \overline{1, n}$, а из леммы 5.8 $\text{diam} X_0 < 2$.

Пусть $K_0 = \{x | x = \varsigma(\alpha), \text{ где } \alpha \in X_0\}, K_i = \{x | x = \varsigma(\alpha), \text{ где } \alpha \in X(\theta_i, G, \varepsilon_i)\}, i = \overline{1, n}$, где ς функция, заданная в (5.1). По лемме 5.4 $\text{diam} K_i < 1, i = \overline{0, n}$, тогда благодаря лемме 5.5 существуют направления $l_i, i = \overline{0, n}$ освещающее каждую точку множества $\varsigma(K_i)$, соответственно.

Покажем, что $\bigcup_{i=0}^n K_i \supseteq \partial G$. Допустим, это не так, тогда существует $x \in \partial G$ такое, что для всякого $i = \overline{0, n}$ выполняется $x \notin K_i$. Из свойства 5.2 функции ς имеем $\varsigma(\theta) = x$ для каждого $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Так как $\bigcup_{i=1}^n X(\theta_i, G, \varepsilon_i) \cup X_0 = \mathbb{S}^{n-1}$, то θ принадлежит одному из множеств $X_0, X(\theta_i, G, \varepsilon_i), i = \overline{1, n}$. Значит существует $i \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $\theta \in K_i$. Получили противоречие.

Таким образом, существует $(n + 1)$ направление $l_i, i = \overline{0, n}$, которые освещают всю границу множества G . Значит удалось разбить границу множества на $n + 1$ часть, каждая из которых освещается одним направлением. Это означает, что $c(G) \leq n + 1$, а учитывая что $c(G) \geq a(G) = n + 1$ согласно теореме 5.1 и того, что множество G удовлетворяющее условиям теоремы 5.2 является множеством борсука [4], получаем искомый результат теоремы $c(G) = n + 1$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болтянский В.Г. Задача об освещении границы выпуклого тела /Болтянский В.Г.// Изв. МФАН СССР – 1960 – Т. 10 № 76
2. Болтянский В.Г. Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств / В. Г. Болтянский, П. С. Солтан // Кишинев: Штиинца, 1978. – С. 280.
3. Иванов А. Ю. Применение отображения типа Гаусса к задаче внешнего освещения / Иванов А. Ю. // Вестник ДонНУ. – 2017. – Т.2,Серия А. Естественные науки – С. 35-40.
4. Иванов А. Ю. Решение проблемы Борсука для некоторых множеств с нерегулярной границей / Иванов А. Ю. // Труды ИПММ. – 2011. – Т. 23. – С. 110-119.
5. Иванов А. Ю. Новые достаточные условия принадлежности множества классу Борсука/ Иванов А. Ю. // Труды ИПММ. – 2012. – Т. 25. – С. 100-106.

Поступила в редакцию 14.05.2019 г.

EXTERNAL ILLUMINATION PROBLEM ON SOME BORSUK'S SETS

A. Yu. Ivanov

In the article, the author solves the problem of external illumination by parallel fascicles of light for some Borsuk's sets.

Keywords: external illumination problem, convex set, a constant width's set, spherical Gauss type mappings, direction of illumination.

Иванов Александр Юрьевич

кандидат физико-математических наук
Донецкий национальный университет, г. Донецк
Ivanov.Alexander.Iurievich@gmail.com
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений, +38-095-5312025

Ivanov Alexandr Jurievich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Donetsk National University, Donetsk

УДК 517.983.36

КРИТЕРИЙ СЛАБОЙ КОЭРЦИТИВНОСТИ СИСТЕМЫ МИНИМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

© 2019. *Д. В. Лиманский*

Получен критерий слабой коэрцитивности системы $\{P_j(D)\}_1^N$ минимальных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в анизотропном пространстве Соболева $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$. Именно, доказано, что при некоторых условиях на символы $\{P_j(\xi)\}_1^N$ этих операторов слабая коэрцитивность системы $\{P_j(D)\}_1^N$ в пространстве $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ эквивалентна ее l -квазиэллиптичности.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, априорная оценка, квазиэллиптичность, слабая коэрцитивность, пространство Соболева.

Введение. Пусть Ω — произвольная область в $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty]$, $l := (l_1, \dots, l_n)$ — вектор с натуральными компонентами, $|\alpha : l| := \alpha_1/l_1 + \dots + \alpha_n/l_n$. Рассмотрим в $L^p(\Omega)$ систему дифференциальных операторов вида

$$P_j(x, D) = \sum_{|\alpha : l| \leq 1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha, \quad j \in \{1, \dots, N\}, \quad (6.1)$$

с локально ограниченными в Ω коэффициентами $a_{j\alpha}(\cdot)$. Пусть, далее,

$$P_j^l(x, D) := \sum_{|\alpha : l|=1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha$$

— l -главная часть оператора $P_j(x, D)$, а $P_j^l(x, \xi) := \sum_{|\alpha : l|=1} a_{j\alpha}(x) \xi^\alpha$ — его главный l -квазиоднородный символ. Напомним следующие определения.

Определение 6.1. [1, 2] Систему дифференциальных операторов вида (6.1) называют l -квазиэллиптической, если

$$(P_1^l(x, \xi), \dots, P_N^l(x, \xi)) \neq (0, \dots, 0), \quad (x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

и, в частности, эллиптической порядка l , или l -эллиптической, если $l_1 = \dots = l_n = l$.

Определение 6.2. [1] Система дифференциальных операторов вида (6.1) называется коэрцитивной в (анизотропном) пространстве Соболева $\dot{W}_p^l(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, если справедлива априорная оценка

$$\|f\|_{\dot{W}_p^l(\Omega)} := \sum_{|\alpha : l| \leq 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad (6.2)$$

в которой C_1 и C_2 не зависят от $f \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$.

Хорошо известно [1–4], что при некоторых ограничениях на коэффициенты $a_{j\alpha}(\cdot)$ и область Ω система (6.1) l -квазиэллиптика в точности тогда, когда она коэрцитивна в $\dot{W}_p^l(\Omega)$ при $p \in (1, \infty)$. При $p = 1$ и $p = \infty$ оценка (6.2) для l -квазиэллиптической системы утрачивает силу. Так, в случае $p = \infty$ М. М. Маламудом [5] было доказано, что из априорной оценки

$$\|Q(x, D)f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^\infty(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$$

вытекает тождество

$$Q^l(x, \xi) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(x) P_j^l(x, \xi), \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

для l -главных символов операторов $Q(x, D)$ и $P_j(x, D)$ (в случае операторов с постоянными коэффициентами и области $\Omega = \mathbb{R}^n$ это утверждение доказано еще ранее де Лю и Миркилом [6]). Отсюда следует, что l -квазиэллиптическая система является коэрцитивной в $\dot{W}_\infty^l(\Omega)$ лишь в исключительных случаях.

Тем не менее для l -квазиэллиптической системы $\{P_j(x, D)\}_1^N$ верна более слабая оценка

$$\sum_{|\alpha| < l} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\bar{\Omega}), \quad (6.3)$$

при $p \in (1, \infty)$ вытекающая из оценки (6.2), а при $p = \infty$ доказанная в [5]. Отметим также, что невозможность оценки вида (6.2) при $p = 1$ вытекает из результатов Орнштейна [7]. В то же время наличие оценки (6.3) при $p = 1$ доказано (для случая операторов с постоянными коэффициентами) в работах [8, 9].

Эти результаты делают естественным следующее введенное в [9] определение.

Определение 6.3. [9] Систему дифференциальных операторов вида (6.1) называют *слабо коэрцитивной* в (анизотропном) пространстве Соболева $\dot{W}_p^l(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, если справедлива оценка (6.3), в которой C_1 и C_2 не зависят от $f \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$.

В случае изотропного пространства Соболева $\dot{W}_p^l(\Omega)$, т. е. при $l_1 = \dots = l_n = l$, неравенство $|\alpha| < l$ в (6.3) принимает обычный вид: $|\alpha| < l$.

Для случая одного оператора еще ранее де Лю и Миркил [6] показали, что при $n \geq 3$ эллиптический оператор $P(D) = P_1(D)$ может быть охарактеризован при помощи априорных оценок в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 6.1 (де Лю и Миркила). [6] При $n \geq 3$ эллиптичность дифференциального полинома порядка $l \geq 2$ эквивалентна его слабой коэрцитивности в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$.

Условие $n \geq 3$ в теореме 6.1 существенно. Так, в [6] приведен принадлежащий Мальгранжу пример слабо коэрцитивного в $\dot{W}_\infty^2(\mathbb{R}^2)$, но не эллиптического оператора $P(D) = (D_1 + i)(D_2 + i)$.

В работе [10] автором и М. М. Маламудом теорема де Лю и Миркила была распространена на систему операторов с постоянными коэффициентами, а также был получен ее аналог для оператора $P(x, D)$ с переменными коэффициентами. Кроме этого, в той же работе дано полное описание слабо коэрцитивных в изотропном пространстве Соболева

$\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$ операторов от двух переменных и построены примеры широких классов слабо коэрцитивных, но не эллиптических операторов в шкале изотропных пространств $\dot{W}_p^l(\mathbb{R}^n)$ при $p \in [1, \infty]$.

Обратимся теперь к анизотропному случаю. В работе автора [11] рассматривался случай одного оператора $P(D_1, D_2)$ с постоянными коэффициентами от двух переменных с l -квазиоднородной главной частью, $l = (l_1, l_2)$, $l_1 > l_2$. Для такого оператора был доказан аналог теоремы де Лю и Миркила в случае, когда l_1 не делится на l_2 . В случае же, когда l_1 кратно l_2 , в [11] был построен пример широкого класса слабо коэрцитивных в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^2)$, но не l -квазиэллиптических операторов.

Пусть $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$. Не нарушая общности, можно считать, что $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_n$. Разобьем числа $l_1, \dots, l_n$ на m групп, отнеся в k -ю группу все равные между собой числа. Пусть в k -й группе n_k чисел, $n_1 + \dots + n_m = n$. Введем дополнительно обозначения:

$u_0 := 0$, $u_k := \sum_{j=1}^k n_j$, $k \in \{1, \dots, m\}$, так что в k -ю группу входят числа $l_{u_{k-1}+1}, \dots, l_{u_k}$.

Тогда $\mathbb{R}^n$ раскладывается в прямую сумму координатных подпространств

$$\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_m, \quad \text{где } E_k := \text{span} \{ \xi_{u_{k-1}+1}, \dots, \xi_{u_k} \}. \quad (6.4)$$

Обозначим через $[l_1, \dots, l_n]$ наименьшее общее кратное чисел $l_1, \dots, l_n \in \mathbb{N}$, через $(P[E])(\xi)$ — сужение полинома $P(\xi)$ на координатное подпространство E .

Следующая теорема является основным результатом работы (анонсирована в работах автора и М. М. Маламуда [9, 12] без доказательства).

Теорема 6.2. Пусть вектор $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ такой, что $l_1 \geq \dots \geq l_n$ и $[l_1, \dots, l_n] > l_1$, и пусть $\{P_j(D)\}_1^N$ — система дифференциальных операторов вида (6.1) с постоянными коэффициентами и линейно независимыми l -главными частями $\{P_j^l(D)\}_1^N$.

(i) Если система $\{P_j(D)\}_1^N$ является l -квазиэллиптической, то она слабо коэрцитивна в анизотропном пространстве $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ и выполнено условие:

$$\text{система полиномов } \{(P_j[E_k])(\xi)\}_1^N \text{ } l_{u_k} - \text{эллиптична, } k \in \{1, \dots, m\}, \quad (6.5)$$

где $E_1, \dots, E_m$ — координатные подпространства из разложения (6.4).

(ii) Обратно, если система $\{P_j(D)\}_1^N$ слабо коэрцитивна в анизотропном пространстве $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ и выполнено условие (6.5), то она l -квазиэллиптична.

Обозначения и вспомогательные утверждения.

Обозначения. Пусть $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ — множества соответственно действительных, целых и натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}_+^n := \mathbb{Z}_+ \times \dots \times \mathbb{Z}_+$ (n сомножителей). Далее,

$D_k := -i \frac{\partial}{\partial x_k}$, $D := (D_1, \dots, D_n)$; для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ полагают $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$. Если $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$,

то $|\alpha : l| := \frac{\alpha_1}{l_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{l_n}$. Пусть также $\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k$ для $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y =$

$(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Для вектора $r = (r_1, \dots, r_n)$ через $r[E]$ обозначим его сужение на координатное подпространство $E \subset \mathbb{R}^n$. Для натуральных чисел $m, n, \dots, p$ обозначим

через $[m, n, \dots, p]$ их наименьшее общее кратное. Пусть также $\delta_i^j := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ

Кroneckera, а 0_k — нулевой вектор $(0, \dots, 0)$ длины k . Символ $\Rightarrow$ обозначает равномерную сходимость.

Для дифференциального полинома $P(D) = \sum_{|\alpha:l| \leq 1} a_\alpha D^\alpha$ обозначим через $P(\xi) = \sum_{|\alpha:l| \leq 1} a_\alpha \xi^\alpha$ его символ, через $P^l(\xi) = \sum_{|\alpha:l|=1} a_\alpha \xi^\alpha$ — его главный l -квазиоднородный символ. Для координатного подпространства $E \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $(P[E])(\xi)$ сужение на E символа $P(\xi)$ оператора $P(D)$, а сужение на E самого оператора обозначим $(P[E])(D)$. Через $\text{span}\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ будет обозначаться линейная оболочка, натянутая на единичные орты координатных осей $\xi_1, \dots, \xi_k$.

Через $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ будет обозначаться алгебра мультипликаторов в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$; через $\mathcal{F}f = \hat{f}$ — преобразование Фурье (Фурье – Стильеса) функции (меры) f . Замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ финитных в Ω бесконечно дифференцируемых функций в норме $\|f\|_{W_p^l(\Omega)} := \sum_{|\alpha:l| \leq 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}$ пространства Соболева $W_p^l(\Omega)$ обозначается как $\dot{W}_p^l(\Omega)$.

Определение 6.4. [13] Пусть $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ограниченную измеримую (по Лебегу) функцию $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ называют мультипликатором в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, если оператор свертки

$$f \mapsto T_\Phi f =: \mathcal{F}^{-1} \Phi \mathcal{F} f$$

отображает $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$ и ограничен в $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Мультипликаторы в $L^p(\mathbb{R}^n)$ образуют алгебру $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$. Известно полное описание этой алгебры при $p = 1, 2, \infty$ (см. [13]). Нас интересует описание алгебры $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{R}^n)$, обозначаемой далее просто $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ или $\mathcal{M}$.

Предложение 6.1. [13] Алгебра $\mathcal{M}$ есть множество образов конечных борелевских мер в $\mathbb{R}^n$ относительно преобразования Фурье – Стильеса:

$$\Phi \in \mathcal{M} \iff \Phi(\xi) = \hat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} d\mu(x), \quad \mu(\mathbb{R}^n) < \infty. \quad (6.6)$$

При выполнении равенства (6.6) будем говорить, что функция $\Phi(\cdot)$ порождается конечной мерой μ .

Из предложения 6.1 следует, что все функции $\Phi \in \mathcal{M}$ ограничены и равномерно непрерывны в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, из свойств преобразования Фурье вытекает, что алгебра мультипликаторов $\mathcal{M}$ инвариантна относительно отражений $\Phi(\xi) \mapsto \Phi(-\xi)$, сдвигов $\Phi(\xi) \mapsto \Phi(\xi - \eta)$ ($\eta \in \mathbb{R}^n$), растяжений $\Phi(\xi) \mapsto \Phi(r\xi)$ ($r > 0$) и вращений $\Phi(\xi) \mapsto \Phi(\rho\xi)$ ($\rho = (\rho_{jk})_{n \times n}$ — ортогональный оператор в $\mathbb{R}^n$ с определителем $\det(\rho_{jk}) = 1$). Наконец, отметим, что $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ при $m < n$ (см. [13]).

Пусть $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ и $P(\xi) = \sum_{|\alpha:l| \leq 1} a_\alpha \xi^\alpha$ — полином от n переменных с l -квазиоднородной главной частью $P^l(\xi) = \sum_{|\alpha:l|=1} a_\alpha \xi^\alpha$. Пусть $d := [l_1, \dots, l_n]$ — наименьшее общее кратное чисел $l_1, \dots, l_n$. Обозначим также

$$m_k := \frac{d}{l_k}, \quad k \in \{1, \dots, n\}; \quad m := (m_1, \dots, m_n).$$

Ясно, что натуральные числа $m_1, \dots, m_n$ взаимно просты.

Соотношение $|\alpha : l| = \frac{\alpha_1}{l_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{l_n} = 1$, определяющее l -главную часть $P^l(\xi)$, можно переписать в виде $\langle \alpha, m \rangle := \alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_n m_n = d$. Для всех остальных мономов ξ^α , входящих в $P(\xi)$, справедливо соотношение $\langle \alpha, m \rangle < d$.

Справедливо следующее простое теоретико-числовое свойство.

Лемма 6.1. Пусть $l_1, \dots, l_n \in \mathbb{N}$ и $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_n$. Если $d = [l_1, \dots, l_n] > l_1$, то

$$d_1 > d - m_k, \quad k \in \{1, \dots, n\}, \quad (6.7)$$

где $d_1 := \max_{\langle \alpha, m \rangle < d} \langle \alpha, m \rangle$, $m_k := \frac{d}{l_k}$, $k \in \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. В случае $n = 2$ это утверждение вытекает из доказанной в [11] леммы 1. Действительно, как доказано в [11], уравнение $x_1 m_1 + x_2 m_2 = d - 1$ имеет целые неотрицательные решения и, значит, $d_1 = d - 1$. Но по условию $m_k = \frac{d}{l_k} > 1$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$, откуда и следует (6.7).

Пусть теперь $n > 2$. Так как $d > l_1$, то найдется число l_k , не делящее l_1 , т. е. $d' := [l_1, l_k] > l_1$. По доказанному выше, уравнение $\frac{x_1}{l_1} + \frac{x_k}{l_k} = \frac{d' - 1}{d'}$ имеет некоторое целое неотрицательное решение $x_1 = x_1^0$, $x_k = x_k^0$. Но тогда и уравнение $\frac{x_1}{l_1} + \dots + \frac{x_n}{l_n} = \frac{d' - 1}{d'}$ имеет целое неотрицательное решение $x_1 = x_1^0$, $x_k = x_k^0$ и $x_j = 0$ при $j \notin \{1; k\}$.

Поскольку d_1 — наибольшее значение ($< d$), при котором существует целое неотрицательное решение уравнения $\frac{x_1}{l_1} + \dots + \frac{x_n}{l_n} = \frac{d_1}{d}$, то $\frac{d' - 1}{d'} \leq \frac{d_1}{d}$. Но $d' > l_1$, поэтому $\frac{d' - 1}{d'} > \frac{l_1 - 1}{l_1}$. Отсюда получаем $\frac{d_1}{d} > 1 - \frac{1}{l_1}$, или $d_1 > d - \frac{d}{l_1} = d - m_1 > d - m_k$ для всех $k \in \{2, \dots, n\}$, что и требовалось доказать. $\square$

Приведем несколько утверждений, касающихся априорных оценок в L^∞ .

Лемма 6.2 (Эберлейна). [6] Пусть μ — конечная мера в $\mathbb{R}^n$ и $c = \mu(0)$. Тогда функция, тождественно равная c , равномерно приближается выпуклыми комбинациями сдвигов функции $M(\xi) := \hat{\mu}(\xi)$, порождаемой мерой μ , т. е.

$$\sum_{k=1}^q c_k M(\xi - \xi^k) \rightrightarrows c, \quad \text{где } c_k > 0, \quad \sum_{k=1}^q c_k = 1, \quad \xi^1, \dots, \xi^q \in \mathbb{R}^n.$$

Предложение 6.2. [6] Пусть $Q(D)$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ — дифференциальные полиномы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда априорная оценка

$$\|Q(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (6.8)$$

эквивалентна тождеству для их символов

$$Q(\xi) = \sum_{j=1}^N M_j(\xi) P_j(\xi) + M_{N+1}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (6.9)$$

где $\{M_j(\xi)\}_1^{n+1}$ — мультипликаторы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 6.3. [5, 6] Из справедливости априорной оценки (6.8) для дифференциальных полиномов $Q(D)$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ вида (6.1) вытекает тождество

$$Q^l(\xi) = \sum_{j=1}^N \lambda_j P_j^l(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (6.10)$$

для символов их l -главных частей $Q^l(\xi)$ и $P_j^l(\xi)$. При этом $\lambda_j = \mu_j(0)$, $j \in \{1, \dots, N\}$, где μ_j — конечные борелевские меры, порождающие мультипликаторы $M_j(\xi)$, $j \in \{1, \dots, N\}$ из тождества (6.9), справедливого в силу предложения 6.2.

Определение 6.5. Координатным подпространством в $\mathbb{R}^n$ размерности $k \in \{1, \dots, n\}$ называется линейное подпространство, натянутое на единичные орты координатных осей $\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_k}$, $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$, т. е. подпространство вида

$$A_k = \text{span} \{\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_k}\} = \{c_1 \xi_{j_1} + \dots + c_k \xi_{j_k}, \quad c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}\}. \quad (6.11)$$

Отметим, что подпространства A_k изоморфны $\mathbb{R}^k$, поэтому вместо пространства $\dot{W}_\infty^l(A_k)$ мы будем писать $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^k)$.

Определение 6.6. Пусть A_k — координатное подпространство вида (6.11). Сужением вектора $r = (r_1, \dots, r_n)$ на A_k будем называть вектор $\tilde{r} := r|_{A_k} := (r_{j_1}, \dots, r_{j_k})$.

Сужением полинома $P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ на A_k будем называть полином

$$\tilde{P}(\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_k}) := P(0, \dots, 0, \xi_{j_1}, 0, \dots, 0, \xi_{j_k}, 0, \dots, 0), \quad (6.12)$$

зависящий только от k переменных $\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_k}$, и обозначать $\tilde{P}(\xi) = (P|_{A_k})(\xi)$.

Дифференциальный оператор, символом которого является полином (6.12), будем называть сужением оператора $P(D)$ на A_k и обозначать $(P|_{A_k})(D)$.

Предложение 6.4. [6] Для произвольного координатного подпространства $A_k \subset \mathbb{R}^n$ вида (6.11) априорная оценка (6.8) сохраняется при сужении всех операторов на это подпространство.

Из предложений 6.2 и 6.4 вытекает следующее важное утверждение.

Предложение 6.5. Если система $\{P_j(D)\}_1^N$ слабо коэрцитивна в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$, то после сужения на произвольное координатное подпространство $A_k \subset \mathbb{R}^n$ вида (6.11) система $\{(P_j|_{A_k})(D)\}_1^N$ остается слабо коэрцитивной в $\dot{W}_\infty^{l'}(\mathbb{R}^k)$, где $l' = l|_{A_k}$.

Доказательство теоремы 6.2.

(i) Пусть система $\{P_j(D)\}_1^N$ l -квазиэллиптическая. Тогда она слабо коэрцитивна в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ (см. введение). Предположим, что условие (6.5) нарушено при некотором $k \in \{1, \dots, m\}$, т. е. символы суженных l -главных частей $\{(P_j^l|_{E_k})(\xi)\}_1^N = \{(P_j|_{E_k})^{l_{u_k}}(\xi)\}_1^N$ имеют общий нетривиальный нуль $\beta \in \mathbb{R}^{n_k} \setminus \{0\}$. Но тогда и символы исходных l -главных частей $\{P_j^l(\xi)\}_1^N$ также имеют общий нетривиальный нуль $(0_{n_1}; \dots; 0_{n_{k-1}}; \beta; 0_{n_{k+1}}; \dots; 0_{n_m})$, где $0_{n_j} := (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \{1, \dots, m\}$. Последнее свойство противоречит l -квазиэллиптичности системы $\{P_j(D)\}_1^N$.

(ii) Пусть теперь система $\{P_j(D)\}_1^N$ слабо коэрцитивна в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ и выполнено условие (6.5). Предположим противное, т. е. что система $\{P_j(D)\}_1^N$ не является l -квазиэллиптической, т. е. $P_j^l(\alpha) = 0$, $j \in \{1, \dots, N\}$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Ортогональными преобразованиями в пределах каждого подпространства E_k можно добиться, чтобы сужения вектора α на E_k имели вид $\alpha|_{E_k} = (0, \dots, 0, \gamma_k)$, $k \in \{1, \dots, m\}$. Ясно, что при таких преобразованиях слабая коэрцитивность системы $\{P_j(D)\}_1^N$ в $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ сохранится.

Пусть $i_1, \dots, i_s$ — индексы, для которых $\gamma_{i_j} \neq 0$. Сузим операторы $\{P_j(D)\}_1^N$ на подпространство $E := \text{span}\{\xi_{u_{i_1}}, \dots, \xi_{u_{i_s}}\}$. При этом суженная система $\{(P_j|_E)(D)\}_1^N$ будет слабо коэрцитивной в $\dot{W}_{\infty}^{l'}(\mathbb{R}^s)$, где $l' := l|_E$ (см. предложение 6.5), а вектор $\alpha|_E = (\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_s})$ с ненулевыми компонентами будет общим нетривиальным нулем символов l' -главных частей $\{(P_j|_E)^{l'}(\xi)\}_1^N$. Покажем, что $s \geq 2$. В самом деле, если допустить, что $s = 1$, это бы означало, что вектор α имеет вид

$$\alpha = (0_{n_1}; \dots; 0_{n_{i_1-1}}; 0, \dots, 0, \gamma_{i_1}; 0_{n_{i_1+1}}; \dots; 0_{n_m}), \quad \gamma_{i_1} \neq 0,$$

т. е. его сужение $\alpha|_{E_{i_1}} = (0, \dots, 0, \gamma_{i_1})$ на подпространство E_{i_1} является общим нетривиальным нулем символов $\{(P_j|_{E_{i_1}})^{l_{u_{i_1}}}(\xi)\}_1^N$, что противоречит условию (6.5).

Таким образом, не нарушая общности, можно считать, что для векторов $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ выполнены следующие условия:

- (а) $n \geq 2$ и $l_1 > l_2 > \dots > l_n$;
- (б) $\alpha_j \neq 0$ для всех $j \in \{1, \dots, n\}$.

Далее, положим

$$d := [l_1, \dots, l_n], \quad m_k := \frac{d}{l_k}, \quad k \in \{1, \dots, n\}, \quad m := (m_1, \dots, m_n), \quad d_1 := \max_{\langle \beta, m \rangle < d} \langle \beta, m \rangle;$$

$$P_j^{l-1}(\xi) := \sum_{\langle \beta, m \rangle = d_1} a_{j\beta} \xi^\beta, \quad \text{если} \quad P_j(\xi) = \sum_{\langle \beta, m \rangle < d} a_{j\beta} \xi^\beta, \quad j \in \{1, \dots, N\}.$$

Разложим каждый из символов $P_j(\xi)$ в сумму

$$P_j(\xi) = P^l(\xi) + P^{l-1}(\xi) + \dots, \quad j \in \{1, \dots, N\},$$

где многоточие соответствует сумме мономов $a_\beta \xi^\beta$, для которых $\langle \beta, m \rangle < d_1$.

Выберем дифференциальный моном $Q(D) := D^\nu = D_1^{\nu_1} \dots D_n^{\nu_n}$ с символом

$$Q(\xi) := \prod_{k=1}^n \left(\frac{\xi_k}{\alpha_k} \right)^{\nu_k}, \quad \text{где} \quad \langle \nu, m \rangle = d_1.$$

Он обладает очевидными свойствами: $Q(\alpha) = 1$ и $Q(t\xi) \equiv t^{d_1} Q(\xi)$, где $t > 0$.

В силу слабой коэрцитивности системы $\{P_j(D)\}_1^N$ в $\dot{W}_{\infty}^l(\mathbb{R}^n)$, справедлива априорная оценка (6.8), которая, ввиду предложения 6.2, равносильна тождеству

$$Q(\xi) = \sum_{j=1}^N M_j(\xi) P_j(\xi) + M_{N+1}(\xi) = \sum_{j=1}^N M_j(\xi) [P^l(\xi) + P^{l-1}(\xi) + \dots] + M_{N+1}(\xi), \quad (6.13)$$

где $\{M_j(\xi)\}_1^{N+1}$ — мультипликаторы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Покажем сначала, что $(P_1^{l-1}(\alpha), \dots, P_N^{l-1}(\alpha)) \neq (0, \dots, 0)$. В самом деле, предполагая противное, подставим $\xi := t\alpha$ в (6.13). Так как $P_j^l(t\alpha) = t^d P_j^l(\alpha) = 0$ и $P_j^{l-1}(t\alpha) = t^{d_1} P_j^{l-1}(\alpha) = 0$ для всех $j \in \{1, \dots, N\}$, после указанной подстановки в левой части (6.13) получим t^{d_1} , а в правой — величину $o(t^{d_1})$ (при $t \rightarrow +\infty$), так как функции $M_j(\xi)$ ограничены. Получили противоречие. Значит, после линейного преобразования системы $\{P_j(\xi)\}_1^N$ можно считать, что $P_j^{l-1}(\alpha) = \delta_1^j$, $j \in \{1, \dots, N\}$.

Далее, рассмотрим семейство $\mathcal{N}$ кривых $x(t) := (x_1(t), \dots, x_n(t))$ в $\mathbb{R}^n$ вида

$$x_k(t) := \alpha_k t^{m_k} + a_k, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad k \in \{1, \dots, n\}, \quad (6.14)$$

где a_k — произвольные числа, $t > 0$. Обозначим

$$\alpha t^m := (\alpha_1 t^{m_1}, \dots, \alpha_n t^{m_n}), \quad a := (a_1, \dots, a_n).$$

В тождестве (6.13) сделаем подстановку $\xi_k := x_k(t)$, где $x_k(t)$ — функции (6.14), применяя к каждому из полиномов формулу Тейлора в точке αt^m с приращением a . Так как для всех $j \in \{1, \dots, N\}$

$$P_j^l(\alpha t^m + a) = t^d P_j^l(\alpha) + \sum_{k=1}^n a_k t^{d-m_k} \frac{\partial P_j^l}{\partial \xi_k}(\alpha) + o(t^{d-m_1}) = o(t^{d_1}), \quad t \rightarrow +\infty$$

в силу предположения $P_j^l(\alpha) = 0$ и неравенств $d_1 > d - m_k$ (см. лемму 6.1), а также

$$\begin{aligned} P_j^{l-1}(\alpha t^m + a) &= t^{d_1} P_j^{l-1}(\alpha) + o(t^{d_1}) = t^{d_1} [\delta_1^j + o(1)], \quad t \rightarrow +\infty, \\ Q(\alpha t^m + a) &= t^{d_1} Q(\alpha) + o(t^{d_1}) = t^{d_1} [1 + o(1)], \quad t \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

то после упомянутой выше подстановки получим:

$$t^{d_1} [1 + o(1)] = t^{d_1} M_1(x(t)) + o(t^{d_1}), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (6.15)$$

Деля обе части (6.15) на t^{d_1} и затем переходя к пределу при $t \rightarrow +\infty$, будем иметь:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} M_1(x(t)) = 1 \quad \text{для всех } x(t) \in \mathcal{N}. \quad (6.16)$$

Покажем, что соотношение (6.16) невозможно. В самом деле, так как $Q^l(\xi) \equiv 0$ и справедливо тождество (6.10) (см. предложение 6.3), то

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j P_j^l(\xi) \equiv 0,$$

откуда $\lambda_j = 0$, $j \in \{1, \dots, N\}$, в силу линейной независимости l -главных символов $\{P_j^l(\xi)\}_1^N$. Значит, ввиду того же предложения 6.3, $\lambda_1 = \mu_1(0) = 0$, где μ_1 — конечная борелевская мера, порождающая мультипликатор $M_1(\xi)$. Тогда в силу леммы 6.2 выпуклые комбинации сдвигов функции $M_1(\xi)$ равномерно стремятся к $\mu_1(0) = 0$. Это означает, что

для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ найдутся числа $c_k > 0$, $\sum_{k=1}^q c_k = 1$ и векторы $\xi^1, \dots, \xi^q \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\left| \sum_{k=1}^q c_k M_1(\xi - \xi^k) \right| < \varepsilon \quad \text{для всех } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Подставляя в это неравенство функции $\xi_k = x_k(t)$ вида (6.14) и затем переходя к пределу при $t \rightarrow +\infty$, с учетом (6.16) имеем $\left| \sum_{k=1}^q c_k \right| < \varepsilon < 1$, что неверно, поскольку $\sum_{k=1}^q c_k = 1$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесов О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. – М.: Наука, 1996. – 480 с.
2. Волевич Л. Р. Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных / Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 312 с.
3. Бесов О. В. О коэрцитивности в анизотропном пространстве С. Л. Соболева / О. В. Бесов // Мат. сборник. – 1967. – Т. 73 (115), № 4. – С. 585–599.
4. Хёрмандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных / Л. Хёрмандер. – М.: ИЛ, 1959. – 132 с.
5. Маламуд М. М. Оценки для систем минимальных и максимальных дифференциальных операторов в $L_p(\Omega)$ / М. М. Маламуд // Труды ММО. – 1995. – Т. 56. – С. 206–261.
6. De Leeuw K. A priori estimates for differential operators in L_∞ norm / K. de Leeuw, H. Mirkil // Illinois J. Math. – 1964. – Vol. 8. – P. 112–124.
7. Ornstein D. A non-equality for differential operators in the L_1 norm / D. Ornstein // Arch. Rational Mech. Anal. – 1962. – Vol. 11. – P. 40–49.
8. Belinsky E. S. Multipliers in L_1 and estimates for systems of differential operators / E. S. Belinsky, M. Z. Dvejrjn, M. M. Malamud // Russian Journal of Math. Phys. – 2005. – Vol. 12, № 1. – P. 6–16.
9. Лиманский Д. В. О слабой коэрцитивности систем дифференциальных операторов в L^1 и L^∞ / Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд // Доклады Академии наук. – 2004. – Т. 397, № 4. – С. 453–458.
10. Лиманский Д. В. Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева / Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд // Мат. сборник. – 2008. – Т. 199, № 11. – С. 75–112.
11. Лиманский Д. В. О минимальных дифференциальных полиномах от двух переменных, слабо коэрцитивных в анизотропных пространствах Соболева / Д. В. Лиманский // Труды Института прикладной математики и механики. – 2016. – Т. 30. – С. 109–119.
12. Лиманский Д. В. Слабо коэрцитивные неквазиэллиптические системы дифференциальных операторов в $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ / Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 415, № 5. – С. 583–588.
13. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И. Стейн. – М.: Мир, 1973. – 344 с.

Поступила в редакцию 26.06.2019 г.

WEAK COERCIVITY CRITERION FOR A SYSTEM OF MINIMAL DIFFERENTIAL OPERATORS IN THE ANISOTROPIC SOBOLEV SPACES

D. V. Limanskii

The weak coercivity criterion for a system $\{P_j(D)\}_1^N$ of minimal differential operators with constant coefficients in the anisotropic Sobolev space $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ is obtained. Namely, it was proved that, under some conditions on the symbols $\{P_j(\xi)\}_1^N$ of these operators, the weak coercivity of the system $\{P_j(D)\}_1^N$ in the space $\dot{W}_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ is equivalent to its l -quasi-ellipticity.

Keywords: differential operator, a priori estimate, quasi-ellipticity, weak coercivity, Sobolev space

Лиманский Дмитрий Владимирович

кандидат физико-математических наук, доцент
Донецкий национальный университет, г. Донецк
4125aa@gmail.com
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений
+38-071-3058827

Limanskii Dmitrii Vladimirovich

PhD (Ph.D), Assoc. Prof.
Donetsk National University, Donetsk

УДК 517.15+517.518

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ О ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ОПРЕДЕЛЁННОСТИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

© 2019. А. Д. Манов

В данной работе мы доказываем теорему, являющуюся обобщением хорошо известной теоремы о положительной определённости кусочно-линейной функции с равномерными узлами.

Ключевые слова: положительно определенные функции, кусочно-линейные функции, абелевы группы.

Введение. Формулировка результата. Пусть G абелева группа. Комплекснозначная функция $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ называется положительно определённой на G ($f \in \Phi(G)$), если для любого $n \in \mathbb{N}$, и для любых элементов $\{x_i\}_{i=1}^n \subset G$, а также для любого набора комплексных чисел $\{c_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j} f(x_i - x_j) \geq 0.$$

Из определения выше вытекает, что если $f \in \Phi(G)$ и H подгруппа группы G , то f (её сужение) положительно определена на H . Если $H \neq G$, то несложно построить пример функции f на G , которая положительно определена на H , но $f \notin \Phi(G)$. В тоже время существуют функции на G для которых положительная определённость на группе G равносильна положительной определённости на некоторой собственной подгруппе H . Например, хорошо известна следующая теорема (см. [1, Задача 15, гл. XIX], [2], [3, Exercise 1.10.25]):

Теорема А. Пусть f кусочно-линейная функция на $\mathbb{R}$ с множеством узлов в целых точках. Тогда $f \in \Phi(\mathbb{R}) \iff f \in \Phi(\mathbb{Z})$.

Теоремы аналогичные теореме А, а также их обобщения на локально компактные абелевы группы (см., например, [4, А.7.1], [5] и ссылки в них) применяются в различных вопросах теории положительно определённых функций.

В частности, теорема А позволяет распространять некоторые утверждения, справедливые для функций из $\Phi(\mathbb{Z})$ (положительно определённых последовательностей), на функции из класса $\Phi(\mathbb{R})$, а также сводить задачи для одного класса к другому. Например, в статье Рудина [6] теорема Крейна о продолжении положительно определённых функций выводится из соответствующей теоремы для положительно определённых последовательностей (см. [6, Theorem 2.3]). Аналогично, неравенство Боаса-Каца можно получить из неравенства Фейера-Эгервари-Сасса для коэффициентов неотрицательных тригонометрических многочленов (см. работу А.С. Белова [7]). Отметим, что работа [7] в целом посвящена применению положительно определённых кусочно-линейных функций к решению экстремальных задач для положительно определённых функций.

Прежде чем сформулировать основной результат данной работы, зафиксируем некоторые обозначения. Если G локально компактная абелева группа, то символом m_G будем обозначать меру Хаара на G и $L_p(G) := L_p(G, m_G)$ при $1 \leq p \leq \infty$.

В данной работе мы докажем следующий аналог теоремы А.

Теорема 7.1. Пусть G абелева группа и H её локально компактная подгруппа. Пусть $g \in \Phi(G)$ и $f \in \Phi(H)$ такие, что $f(\cdot)g(x - \cdot) \in L_1(H) \cap C(H)$ для всех $x \in G$. Тогда следующая функция положительно определена на G :

$$F(x) := \int_H f(t)g(x - t)dm_H(t), \quad x \in G. \quad (7.1)$$

Достаточность в теореме А вытекает из теоремы 7.1, если взять $G = \mathbb{R}$, $H = \mathbb{Z}$ и $g(x) = (1 - |x|)_+$, $x \in \mathbb{R}$. Для этого достаточно заметить, что любую кусочно-линейную на $\mathbb{R}$ функцию f с множеством узлов в целых точках можно представить в виде (7.1):

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)g(x - k), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Замечание 7.1. Отметим, что в некоторых случаях условие $f(\cdot)g(x - \cdot) \in L_1(H) \cap C(H)$ в теореме 7.1 можно ослабить до $f(\cdot)g(x - \cdot) \in L_1(H)$ (см. замечание 7.3).

Замечание 7.2. Если H подгруппа группы G , то любую функцию $f \in \Phi(H)$ всегда можно продолжить до функции из $\Phi(G)$, доопределив её нулём (см., например, [3, Exercise 1.4.8]). Поэтому функцию F , заданную формулой (7.1), можно рассматривать, как некоторую свёртку функций $f, g \in \Phi(G)$ по подгруппе H . Если $H = G$, то F является обычной свёрткой функций f и g .

Вспомогательные факты и утверждения. Доказательство теоремы 7.1. Отметим следующие свойства функций из $\Phi(G)$. Пусть $f, f_k \in \Phi(G)$. Тогда:

- 1) $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \bar{f}, \operatorname{Re} f, f_1 f_2 \in \Phi(G)$, где $\lambda_k \geq 0$;
- 2) $|f(x)| \leq f(0)$, $f(-x) = \overline{f(x)}$, $x \in G$;
- 3) $|f(0)f(x + y) - f(x)f(y)|^2 \leq (f(0)^2 - |f(x)|^2)(f(0)^2 - |f(y)|^2)$, $x, y \in G$. (неравенство А. Вейля)

Свойства 1) – 3) хорошо известны (см., например, [3, 8]).

Пусть G локально компактная абелева группа. Символом $\widehat{G}$ обозначим двойственную к G группу, т. е. группу всех непрерывных гомоморфизмов $\gamma : G \rightarrow \mathbb{T}$. Здесь $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Если наделить группу $\widehat{G}$ топологией равномерной сходимости на компактах, то $\widehat{G}$ сама становится локально компактной абелевой группой. Пусть также $\langle x, \gamma \rangle := \gamma(x)$, $x \in G, \gamma \in \widehat{G}$.

Следующая теорема была доказана независимо А. Вейлем, Повзнером и Райковым в 1940 году.

Теорема 7.2. Пусть G – ЛКА группа. Тогда функция $f \in \Phi(G) \cap C(G)$ тогда и только тогда, когда существует конечная неотрицательная регулярная борелевская мера μ на $\widehat{G}$ такая, что

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \langle x, \gamma \rangle d\mu(\gamma), \quad x \in G.$$

Доказательство можно найти, например, в [3, 8–10]. Из теоремы 7.2 вытекает следующий критерий положительной определенности для непрерывных, интегрируемых функций (см., например, [3, Theorem 1.9.8, Theorem 1.9.12], [8]):

Следствие 7.1. Пусть G – ЛКА группа. Если $f \in C(G) \cap L_1(G)$, то $f \in \Phi(G) \iff \widehat{f}(\gamma) \geq 0, \gamma \in \widehat{G}$, где

$$\widehat{f}(\gamma) := \int_G \overline{\langle x, \gamma \rangle} f(x) dm_G(x), \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

Из следствия вытекает, что для любой функции $f \in \Phi(G) \cap C(G) \cap L_1(G)$ выполняется неравенство:

$$\int_G f(x) dm_G(x) \geq 0. \quad (7.2)$$

Замечание 7.3. Для некоторых групп G неравенство выше выполняется лишь в предположении, что $f \in \Phi(G) \cap L_1(G)$ (см. [3, Theorem 3.1.2]). В частности, если $G = \mathbb{R}^n$. Доказательство теоремы 7.1.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\{x_i\}_{i=1}^n \subset G$, $\{c_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}$. Рассмотрим функцию:

$$\psi(t) := \sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j g(x_i - x_j + t), \quad t \in G.$$

Из определения положительно определённых функций вытекает, что $\psi \in \Phi(G)$ (см. также [11]). Из условия $f(\cdot)g(x - \cdot) \in L_1(H) \cap C(H)$, $x \in G$ следует, что $f\bar{\psi} \in L_1(H) \cap C(H)$. Отсюда,

$$0 \leq \int_H f(t) \overline{\psi(t)} dm_H(t) = \sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j \int_H f(t) g(x_i - x_j - t) dm_H(t) = \sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j F(x_i - x_j).$$

Теорем 7.1 доказана. $\square$

Частные случаи теоремы 7.1. В этом разделе мы рассмотрим частные случаи теоремы 7.1, а также их некоторые следствия. Рассмотрим вначале случай, когда G локально компактная абелева группа и $H = G$. В этом случае формула (7.1) определяет обычную свёртку функций f и g , а условие $f(\cdot)g(x - \cdot) \in L_1(G)$, $x \in G$ гарантирует её существование. В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 7.3. Пусть G – ЛКА группа и $f, g \in \Phi(G) \cap C(G)$. Если $1 \leq p, q \leq +\infty$, $1/p + 1/q = 1$ и $f \in L_p(G)$, $g \in L_q(G)$, то $f * g \in \Phi(G) \cap C(G)$.

Пусть теперь H замкнутая подгруппа локально компактной группы G . Тогда меры Хаара m_G , m_H и $m_{G/H}$ можно нормировать так, что для любой функции $g \in C(G)$ с компактным носителем выполняется равенство (см., например, [9, 2.7.3]):

$$\int_{G/H} \left(\int_H g(x+t) dm_H(t) \right) dm_{G/H}(x) = \int_G g(x) dm_G(x). \quad (7.3)$$

Формула (7.3) называется формулой Вейля. Из теоремы 7.1 вытекает следующая

Теорема 7.4. Пусть G – ЛКА группа, $g \in \Phi(G) \cap C(G)$ и g имеет компактный носитель. Тогда для любой дискретной подгруппы H такой, что G/H компактна выполняется неравенство:

$$\int_G g(x) dm_G(x) \leq m_{G/H}(G/H) \int_H g(x) dm_H(x),$$

где меры Хаара нормированы так, чтобы выполнялось равенство (7.3).

Доказательство. Из теоремы 7.1 следует положительная определённость функции:

$$F(x) := \int_H \operatorname{Re} g(x+t) dm_H(t), \quad x \in G,$$

и значит, справедливо неравенство:

$$F(x) \leq |F(x)| \leq F(0) = \int_H \operatorname{Re} g(t) dm_H(t) = \int_H g(t) dm_H(t), \quad x \in G. \quad (7.4)$$

Так как группа G/H компактна, то мера $m_{G/H}(G/H)$ конечна. Интегрируя (7.4) по группе G/H получаем неравенство:

$$\int_G g(x) dm_G(x) = \int_G \operatorname{Re} g(x) dm_G(x) \leq m_{G/H}(G/H) \int_H g(x) dm_H(x)$$

□

Если $G = \mathbb{R}^n$ и $H = A\mathbb{Z}^n$, где A – невырожденная $n \times n$ матрица, то из теоремы 7.1 вытекает следующая

Теорема 7.5. Пусть A невырожденная $n \times n$ матрица и $f \in \Phi(\mathbb{Z}^n)$, $g \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ такие, что следующий ряд сходится абсолютно для всех $x \in \mathbb{R}^n$:

$$F(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)g(x - Ak). \quad (7.5)$$

Тогда $F \in \Phi(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 7.4. Отметим, что в случае $n = 1$ условие абсолютной сходимости ряда (7.5) можно ослабить. В этом случае достаточно сходимости симметричных частичных сумм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2 т. / В. Феллер. – Москва: Мир, 1984. – Т. 2. – 752 с.
2. Goldberg R. R. Restrictions of Fourier Transforms and Extension of Fourier Sequences / R. R. Goldberg // Journal of Approximation Theory. – 1970. – V. 3 – P. 149–155.
3. Sasvári Z. Positive Definite and Definitizable Functions / Z. Sasvári. – Berlin: Akad. Verl., 1994. – 208 p.
4. Graham C. C. Essays in Commutative Harmonic Analysis / C. C. Graham, O. C. McGehee. – New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1979. – 464 p.
5. Maclean A. Transforms of measures on quotients and spline functions / A. Maclean // Transactions of the American Mathematical Society. – 1980 – Vol. 261, № 1. – P. 287–296.
6. Rudin W. The extension problem for positive-definite functions / W. Rudin // Illinois J. Math. – 1963 – Vol. 7, № 3. – P. 532–539.
7. Белов А. С. О положительно определённых ломаных функциях и их применениях / А. С. Белов // Тр. МИАН. – 2013. – Т. 280 – С. 11–40.
8. Sasvári Z. Multivariate Characteristic and Correlation Functions / Z. Sasvári. – Berlin, Boston: De Gruyter, 2013. – 366 p.
9. Rudin W. Fourier Analysis on Groups / W. Rudin. – New York: Interscience, 1962. – 286 p.
10. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 2.: Структура и анализ компактных групп. Анализ на локально компактных абелевых группах / Э. Хьюитт, К. Росс. — Москва: Мир, 1975. — 900 с.
11. Zastavnyi V. P. On positive definiteness of some functions / V. P. Zastavnyi // Journal of Multivariate Analysis. – 2000. – Vol. 73. – P. 55 – 81.

Поступила в редакцию 27.06.2019 г.

**ON A GENERALIZATION OF A THEOREM ON POSITIVE DEFINITENESS OF
PIECEWISE-LINEAR FUNCTION**

A. D. Manov

In this paper we prove a theorem which is a generalization of a theorem on positive definiteness of piecewise-linear function.

Keywords: positive-definite functions, piecewise-linear functions, Abelian groups

Манов Анатолий Дмитриевич

аспирант

Донецкий национальный университет, г. Донецк

manov.ad@ro.ru

83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, ка-

федра математического анализа и дифференци-

альных уравнений

+38-066-2376421

Manov Anatoliy Dmitrievych

postgraduate student, Donetsk National University,
Donetsk

О ФУНКЦИЯХ С НУЛЕВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО ОТРЕЗКАМ© 2019. *П. А. Машаров*

Получено значение наименьшего радиуса шара, в котором из равенства нулю интегралов следует равенство нулю функции. Рассматриваются интегралы по единичным отрезкам первого и второго рода.

Ключевые слова: проблема Помпейю, экстремальный радиус Помпейю, свойства функции с нулевыми интегралами по отрезкам, локальный вариант проблемы Помпейю, радиус Помпейю для отрезка.

Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $M(n)$ — группа движений $\mathbb{R}^n$. Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю, если всякая локально суммируемая функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, для которой

$$\int_{\lambda A} f(x) dx = 0 \quad (8.1)$$

при всех $\lambda \in M(n)$, равна нулю почти всюду. Классическая проблема Помпейю состоит в описании класса $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ таких множеств A . В этой постановке указанная проблема была хорошо изучена в первой половине прошлого века. Ряд достаточных условий принадлежности $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ получили румынский математик Помпейю в 1929 году [1, 2] и другие [3–5].

Легко видеть, что даже на плоскости $\mathbb{R}^2$ не каждое множество имеет свойство Помпейю. В самом деле, пусть $\mathbb{B}_R^n = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| < R\}$, $R > 0$ — фиксировано и $f(x_1, x_2) = e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}$. Тогда, поскольку $\lambda \mathbb{B}_R^2$ является кругом радиуса R с центром в точке $y \in \mathbb{R}^2$, координаты которой зависят только от $\lambda \in M(2)$, интеграл (8.1) сводится к

$$\int_{|x-y| \leq R} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx = \frac{2\pi R}{|\alpha|} J_1(R|\alpha|) e^{i(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)},$$

где J_1 — функция Бесселя первого рода, $|\alpha|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$. Отсюда делаем вывод, что круг не является множеством Помпейю в $\mathbb{R}^2$, поскольку всякий раз, когда $R|\alpha|$ — нуль функции Бесселя J_1 , получаем, что существует ненулевая функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющая (8.1) для любого $\lambda \in M(n)$.

Для многих конкретных случаев известен ряд результатов, с помощью которых можно определить, имеет ли множество A свойство Помпейю или нет [6–9]. Отметим следующую теорему С. А. Вильямса [10]:

Пусть A — открытое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей, гомотопной сфере, и связным дополнением. Тогда если его замыкание $\bar{A} \notin \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то граница A является вещественно-аналитическим подмногообразием в $\mathbb{R}^n$.

Этот результат, в частности, показывает, что многие множества A с особенностями на границе (например, многогранники) принадлежат $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. В случае множества A с вещественно-аналитической границей ситуация сложнее. Примерами множеств $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ для любого $n \geq 2$ являются эллипсоид, отличный от шара, замыкание внутренности тора и другие [11].

Относительно недавно были получены примеры множеств Помпейю, граница которых не обязательно липшицева [12]. Одним из таких множеств является «снежинка Кох».

В случае, когда некоторое множество не обладает свойством Помпейю, наличие ненулевой функции с условием (8.1) дает возможность получить нетривиальные оценки плотности укладки произвольного компакта в $\mathbb{R}^n$ множествами вида λA , $\lambda \in M(n)$. Такие оценки получил Б. Д. Котляр [13]. Если же A имеет свойство Помпейю, то в силу теоремы Винера возможна аппроксимация в $L_1(\mathbb{R}^n)$ линейными комбинациями индикаторов множеств вида λA , $\lambda \in M(n)$ [14].

Ряд обобщений проблемы Помпейю связан с заменой тройки $(\mathbb{R}^n, M(n), dx)$ тройкой $(X, \mathcal{Z}, d\mu)$, где X — многообразие, $\mathcal{Z}$ — группа Ли, действующая транзитивно на X , $d\mu$ — инвариантная относительно $\mathcal{Z}$ мера на X . Одним из наиболее интересных примеров является случай, когда X — единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $\mathcal{Z}$ — группа конформных автоморфизмов X [15, 16].

Другие обобщения проблемы Помпейю возникают в связи с интегрированием по семействам множеств, которые инвариантны только относительно вращений. Наиболее полная теория в этом направлении соответствует тому, что известно под названием локальной проблемы Помпейю.

Упомянув о методике решения указанных задач, следует отметить, что наиболее сильные результаты из цитированных выше работ получены с помощью аппарата преобразования Фурье и других элементов гармонического анализа. Несмотря на достигнутые успехи, в ряде случаев такой подход является либо неприменимым, либо недостаточно тонким (например, при изучении локальных вариантов проблемы Помпейю). Приведем одну из возможных постановок локального варианта указанной проблемы.

Постановка задачи. Пусть функция f локально суммируема в шаре $\mathbb{B}_R^n$ и равенство (8.1) выполняется при всех $\lambda \in M(n)$ таких, что $\lambda A \subset \mathbb{B}_R^n$. Если из этого условия следует, что $f = 0$ п.в. в $\mathbb{B}_R^n$, будем говорить, что A является множеством Помпейю на шаре $\mathbb{B}_R^n$ и обозначать $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$. Если $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то для достаточно большого по сравнению с размерами множества A радиуса R выполняется $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$ [17–19].

Рассмотрим величину

$$\mathcal{R}(A) = \inf \{ R > 0 : A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n) \},$$

которую естественно называть экстремальным радиусом Помпейю (или просто радиусом Помпейю) для множества A .

В [19] поставлена следующая

Проблема 8.1. Для данного компактного $A \subset \mathbb{R}^n$ найти значение $\mathcal{R}(A)$.

Если точное значение $\mathcal{R}(A)$ найти не удаётся, то возникает

Проблема 8.2. Для данного компактного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ получить оценки величины $\mathcal{R}(A)$, уточняющие известные ранее.

Ряд результатов, содержащих оценки сверху для величины $\mathcal{R}(A)$, получены К. А. Бернштейном и Р. Гэм [17, 18], а также В. В. Волчковым [19, Глава 4, §1–2]. Наиболее полный библиографический обзор по проблеме Помпейю и близким к ней вопросам, включающими локальные варианты этой проблемы, состоит из [19–24].

Выше рассматривались случаи, когда компактное множество A имеет такую же размерность, что и пространство. Пусть теперь размерность множества A равна $m \leq n$, интеграл в (8.1) понимается как m -кратный, определение множества Помпейю в $\mathbb{B}_R^n$ остаётся прежним. Будем рассматривать совокупность $\mathcal{P}_{m,n}(\mathbb{B}_R^n)$ всех m -мерных множеств

Помпейю в $\mathbb{B}_R^n$ и величину

$$\mathcal{R}_{m,n}(A) = \inf\{R > 0: A \in \mathcal{P}_{m,n}(\mathbb{B}_R^n)\}.$$

Аналогично проблеме 8.1, в [25] поставлена следующая

Проблема 8.3. Для данного компактного $A \subset \mathbb{R}^m$ найти значение $\mathcal{R}_{m,n}(A)$.

Локальный вариант проблемы Помпейю для множеств положительной соразмерности напоминает теорему Мореры, в которой из нулевых интегралов по границам плоских множеств делается вывод о голоморфности функции. В [26] рассмотрена проблема Помпейю для шаров и сфер положительной соразмерности.

Рассмотрим некоторые примеры множеств A , для которых известно точное значение $\mathcal{R}_{n,n}(A)$.

1. Пусть A — правильный треугольник со стороной a . Тогда $\mathcal{R}_{2,2}(A) = a\sqrt{3}/2$ (В. В. Волчков, 1996, [27]).

2. Пусть A — правильный s -угольник со стороной длины l . Тогда

$$\mathcal{R}_{n,n}(A) = \begin{cases} l \operatorname{ctg}(\pi/2s)/2, & \text{если } s \text{ — нечетно;} \\ l\sqrt{1 + 4\operatorname{ctg}^2(\pi/s)}/2 & \text{если } s \text{ — четно} \end{cases}$$

(В. В. Волчков, 2000–2003, [19]).

3. Пусть A — треугольник Рело ширины 1 в $\mathbb{R}^2$. Тогда $\mathcal{R}_{2,2}(A) = 1$ (П. А. Машаров, 2001, [28]).

4. Пусть A — куб в $\mathbb{R}^n$ с ребром длины 1. Тогда $\mathcal{R}_{n,n}(A) = \sqrt{n+3}/2$ (В. В. Волчков, 1996, [29]).

5. Пусть A — полушар в $\mathbb{R}^n$ радиуса 1. Тогда $\mathcal{R}_{n,n}(A) = \sqrt{5}/2$ (В. В. Волчков, 1996, [19]).

6. Пусть $A(h)$ — сегмент шара единичного радиуса высоты h в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\mathcal{R}_{n,n}(A(h)) = \begin{cases} \sqrt{8h - 3h^2}/2, & 1 < h \leq 8/7; \\ h, & 8/7 < h < 2 \end{cases}$$

(П. А. Машаров, 2011, [30]).

7. Пусть $A(h)$ — невыпуклый четырёхугольник с вершинами в точках $(0; 0)$, $(\sqrt{3}/2; -1/2)$, $(\sqrt{3}/2 - h; 0)$, $(\sqrt{3}/2; 1/2)$, $h \in (0; \sqrt{3}/2)$. Тогда

$$\mathcal{R}_{2,2}(A(h)) = \begin{cases} \sqrt{3}/2 - h, & \text{если } h \in (0; \sqrt{3}/6); \\ \sqrt{h^2 + 1/4}, & \text{если } h \in [\sqrt{3}/6, \sqrt{3}/2) \end{cases}$$

(Н. С. Иванисенко, П. А. Машаров, 2014, [31]).

8. Пусть $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ — плоский квадрат со стороной 2. Тогда $\mathcal{R}_{2,3}(K) = \sqrt{41}/4$ (П. А. Машаров, 2017, [25]).

Известны также значения величины $\mathcal{R}_{n,n}(A)$ для случаев, когда A — плоский круговой сектор (П. А. Машаров, 2000, [32]), параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ (В. В. Волчков, 1998–2000, [29]), эллипсоид в $\mathbb{R}^n$ (В. В. Волчков, 2001, [19]), половина кругового конуса в $\mathbb{R}^3$ (Л. В. Елец, П. А. Машаров, 2009, [33]), замыкание разности двух плоских квадратов (П. А. Машаров, 2016, [34]).

В данной работе в качестве множества, для которого изучаются аналоги проблемы Помпейю, рассмотрен $l_0 = \{x \in \mathbb{R}^n: 0 \leq x_1 \leq 1; x_j = 0, j = 2, 3, \dots, n\}$ — единичный отрезок. Учитывая, что по отрезку возможны интегралы двух типов, рассмотрим соответствующие проблемы отдельно.

Пусть B — открытое множество, (x, y) — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что $l_0 \in \mathcal{P}_1(B)$, если для любой $f: B \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C(B)$ из условий

$$\int_{\lambda l_0} f(x) |dx| = 0 \quad (8.2)$$

для любого $\lambda \in \text{Mot}(l_0, B)$ следует, что $f \equiv 0$ в B . Интеграл в (8.2) понимается как криволинейный интеграл первого рода, то есть по длине кривой. В нём $|dx| = ds$ — элемент длины дуги кривой.

Аналогично, $l_0 \in \mathcal{P}_2(B)$, если для любой $f: B \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C(B)$ из условий

$$\int_{\lambda l_0} (f(x), dx) = 0 \quad (8.3)$$

для любого $\lambda \in \text{Mot}(l_0, B)$ следует, что $f \equiv 0$ в B . Интеграл в (8.3) понимается как криволинейный интеграл второго рода, по координатам, для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ $dx = (dx_1, \dots, dx_n)$. Аналогом проблемы 8.3 является следующая

Проблема 8.4. Для каждого $j \in \{1, 2\}$ и $n \geq 2$ найти величины

$$\mathcal{R}_j^n(l_0) = \inf\{R > 0: l_0 \in \mathcal{P}_j(\mathbb{B}_R^n)\}.$$

Замечание 8.1. Учитывая, что для любого $y \in \mathbb{R}^1$ выполняется

$$\int_0^1 \sin(2\pi(y+t)) dt = 0,$$

имеем $l_0 \notin \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^1) = \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^1)$, поэтому в формулировке проблемы 8.4 рассматриваются $n \geq 2$.

Вспомогательные обозначения и утверждения. Далее будем рассматривать действительное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $\mathbf{M}(n)$ — группу движений $\mathbb{R}^n$. Для непустых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ положим $\text{Mot}(A, B) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n): \lambda A \subset B\}$. Для $R > 0$, $r \in \mathbb{R}$ рассмотрим множества $\mathbb{B}_R^n = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| < R\}$, $\mathbb{S}_R^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| = R\}$ — шар и сфера соответственно в $\mathbb{R}^n$ радиуса R ; $\mathbb{B}_{r,R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n: r < |x| < R\}$ — шаровой слой, если $r \geq 0$, или шар в $\mathbb{R}^n$, если $r < 0$. Для произвольного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ под ∂A будем понимать множество граничных точек A , а под $\overline{A} = A \cup \partial A$ — замыкание A .

Для обозначения частной производной функции $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ по переменной x_j будем использовать запись $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, градиента функции u — $\vec{\text{grad}} u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$.

Сначала приведем некоторые утверждения из математического анализа, используемые в дальнейшем.

Утверждение 8.1 (Формула Грина, [35]). Пусть G — плоская область и её граница γ является кусочно-гладким контуром. Пусть область G может быть разбита на конечное число элементарных областей G_i с кусочно-гладкими границами γ_i , $i = 1, 2, \dots, k$.

Пусть, далее, в замкнутой области $\overline{G}$ заданы функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, непрерывные на $\overline{G}$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда справедлива формула

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma^+} P dx + Q dy.$$

Утверждение 8.2 (см. [35]). Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в плоской области G . Для того, чтобы криволинейный интеграл $\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy$ при произвольно фиксированных точках $A \in G$ и $B \in G$ не зависел от пути интегрирования $\widehat{AB} \subset G$, необходимо, а если область G односвязна, — то и достаточно, чтобы во всех точках области G выполнялось равенство $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Утверждение 8.3 (см. [35]). Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в плоской области G . Для того, чтобы криволинейный интеграл $\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy$ при фиксированных точках $A \in G$ и $B \in G$ не зависел от пути $\widehat{AB} \subset G$, необходимо и достаточно, чтобы выражение $P dx + Q dy$ являлось полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x, y)$ определенной в области G : $du = P dx + Q dy$.

Теперь перейдем к доказательству вспомогательных утверждений.

Лемма 8.1. Пусть $n = 2$, $R > \sqrt{3}/2$, $\vec{F} = (P, Q): \mathbb{B}_R^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ непрерывна в $\mathbb{B}_R^2$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ и для любого отрезка $AB \subset \mathbb{B}_R^2$ длины 1 выполняется $\int_{AB} (\vec{F}, d\vec{r}) = 0$. Тогда существует функция $u: \mathbb{B}_R^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, что $\text{grad } u = \vec{F}$.

Доказательство. Пусть T — равносторонний треугольник со стороной 1. Тогда для любого $\lambda \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_R^2)$ из аддитивности криволинейного интеграла второго рода получаем $\int_{\lambda(\partial T)} (\vec{F}, d\vec{r}) = 0$. Применяя утверждение 8.1, делаем вывод, что $\int_{\lambda T} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$. Так как для равностороннего треугольника T со стороной длины 1 величина $\mathcal{R}_{2,2}(T) = \sqrt{3}/2$, а по условию леммы $R > \sqrt{3}/2$, то $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$ в $\mathbb{B}_R^2$. Применяя утверждения 8.2 и 8.3, получаем, что $P dx + Q dy$ является в $\mathbb{B}_R^2$ полным дифференциалом, что и требовалось. $\square$

Лемма 8.2. Пусть $R > 1/2$ и функция $u: \overline{\mathbb{B}_R^n} \rightarrow \mathbb{R}^1$. Тогда $u = \text{Const}$ в множестве $\overline{\mathbb{B}_{1-R,R}^n}$ тогда и только тогда, когда для любого отрезка AB длины 1, лежащего в $\overline{\mathbb{B}_R^n}$, выполняется $u(B) = u(A)$.

Доказательство. Исходя из возможного расположения отрезка AB единичной длины в шаре $\overline{\mathbb{B}_R^n}$, концы всех таких отрезков заполняют $\overline{\mathbb{B}_{1-R,R}^n}$. Поэтому необходимость леммы очевидна.

Пусть теперь $P(R, 0, \dots, 0)$ и Q — произвольная точка из $\overline{\mathbb{B}_{1-R,R}^n}$. Осталось доказать, что $u(P) = u(Q)$.

Рассмотрим произвольную двумерную плоскость α , содержащую точки P, Q и $O(0, 0, \dots, 0)$, замкнутый круг $\mathbb{D}_R = \alpha \cap \overline{\mathbb{B}_R^n}$ (см. рис. 8.1, где окружности с центром в точке O радиусами R и $1 - R > 0$ изображены пунктирными линиями).

Проведем дугу γ_1 окружности с центром в точке P и радиуса 1, лежащую в $\mathbb{D}_R$. По условию леммы, в каждой точке этой дуги значения функции u совпадают со значением $u(P)$. Проведем дугу γ_2 окружности радиуса 1 с центром в точке P_2 предыдущей дуги, попавшей на внешнюю окружность $\partial \mathbb{D}_R$. Продолжим данную процедуру, каждый раз

выбирая точку на окружности, расположенную относительно предыдущего центра аналогичным образом, например, так, что более короткий переход от старого к новому центру по окружности $\partial\mathbb{D}_R$ осуществляется против хода часовой стрелки. Процедуру повторим до тех пор, пока новый центр не окажется на расстоянии менее $1/2$ от точки P . Заметим, что на полученных дугах значение функции u совпадает со значением $u(P)$.

Проведем теперь дугу μ_1 окружности радиуса 1 с центром в точке Q . Если эта дуга пересекла начерченные ранее дуги, то мы получили $u(Q) = u(P)$. Если не пересекла, проведем дугу μ_2 с центром в точке Q_1 предыдущей дуги, попавшую на окружность $\partial\mathbb{D}_R$. Поскольку начерченные на предыдущем этапе дуги «окаймили» с небольшими «просветами» всю внутреннюю окружность $\partial\mathbb{D}_R$, то последняя дуга пересечет по крайней мере одну из дуг предыдущего этапа, и мы снова получим $u(Q) = u(P)$, что и требовалось доказать. $\square$

Доказательство основных результатов.

Теорема 8.1. $\mathcal{R}_1^n(l_0) = 5/8$ для любого $n \geq 2$.

Доказательство. Пусть $n \geq 2$, $R > 5/8$, $f: \mathbb{B}_R^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f \in C(\mathbb{B}_R^n)$ и удовлетворяет (8.2) для любого $\lambda \in \text{Mot}(l_0, \mathbb{B}_R^n)$. Для $r \in (5/8; R)$ рассмотрим $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$: $\text{supp } \varphi \subset \mathbb{B}_{R-r}^n$. Тогда $F = \varphi * f \in C^\infty(\mathbb{B}_r^n)$ и удовлетворяет (8.2) для любого $\lambda \in \text{Mot}(l_0, \mathbb{B}_r^n)$. Используя параметризацию отрезка λl_0 с концами в точках y и $y + \omega$, это условие перепишем в виде

$$I_1(y, \omega) = \int_0^1 F(y + t\omega) dt = 0 \quad \forall (y, \omega) \in M'(\mathbb{B}_r^n), \quad (8.4)$$

где $M'(\mathbb{B}_r^n)$ — подмножество декартова произведения $\mathbb{B}_r^n \times \mathbb{S}_1^{n-1}$ таких пар (y, ω) , что точки y и $y + \omega$ одновременно принадлежат $\mathbb{B}_r^n$.

Так как $\mathbb{B}_r^n$ — открытое множество, для любого $(y, \omega) \in M'(\mathbb{B}_r^n)$ найдется $\varepsilon > 0$, что для любого $z \in \mathbb{B}_\varepsilon^n$ выполняется $(y + z, \omega) \in M'(\mathbb{B}_r^n)$, откуда $I_1(y + z, \omega) = 0$. Положив $z = h\omega$, $h \in \mathbb{B}_\varepsilon^1$, получаем $\int_0^1 F(y + (t + h)\omega) dt = 0$. Дифференцируя это равенство по h и полагая $h = 0$, получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \left(\omega_1 \frac{\partial F}{\partial x_1}(y + t\omega) + \dots + \omega_n \frac{\partial F}{\partial x_n}(y + t\omega) \right) dt = \\ &= \int_0^1 \frac{dF}{dt}(y + t\omega) dt = F(y + \omega) - F(y). \end{aligned}$$

Следовательно, для любых $(y, \omega) \in M'(\mathbb{B}_r^n)$ выполняется $F(y) = F(y + \omega)$. То есть для любого единичного отрезка $AB \subset \mathbb{B}_r^n$ получили $F(A) = F(B)$, откуда по лемме 8.2 следует $F = \text{Const}$ в $\mathbb{B}_{1-r, r}^n$.

Наибольшее расстояние от начала координат до единичного отрезка $l \subset \mathbb{B}_r^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$ равно $\sqrt{r^2 - (1/4)}$. Так как решением неравенства $\sqrt{r^2 - (1/4)} > 1 - r$ является $r > 5/8$, а функция F имеет нулевые интегралы по единичным отрезкам, получаем $F = 0$ в $\mathbb{B}_{1-r, r}^n$. Продолжив функцию F нулем вне $\mathbb{B}_r^n$, получаем, что она имеет нулевые интегралы по всем прямым, откуда $F = \varphi * f = 0$ в $\mathbb{B}_r^n$. Устремив $r \rightarrow R - 0$, получаем $f = 0$ в $\mathbb{B}_R^n$.

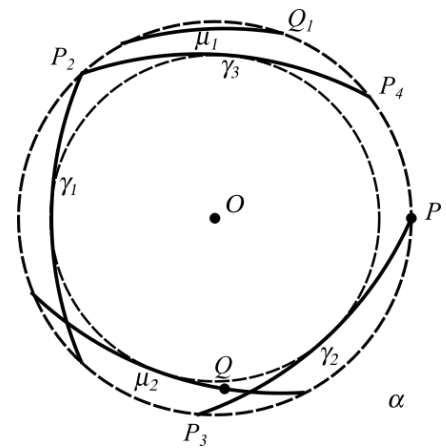


Рис. 8.1: Построения к доказательству леммы 8.2

Рассмотрим теперь $a = \sqrt{r^2 - (1/4)}$ и $b = 1 - r$. Тогда при $r < 5/8$ выполняется неравенство $a < b$. Учитывая формулу обращения для d -мерного преобразования Радона в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [36, Глава 1, Теорема 2.27]), существует радиальная функция f , для которой для любого $p \geq 0$ выполняется равенство

$$\int_{\xi(p)} f(x) |dx| = \begin{cases} \exp(1/((p-a)(b-p))), & a < p < b; \\ 0, & p \in [0; a] \cup [a; +\infty), \end{cases}$$

где $\xi(p)$ — прямая с расстоянием до начала координат равным p , $|dx|$ — мера на ней. Приведенный пример ненулевой функции f , удовлетворяющей (8.2) для любого $\lambda \in \text{Mot}(l_0, \mathbb{B}_R^n)$, завершает доказательство. $\square$

Теорема 8.2. Пусть $n = 2$, $R > 1/2$, функция $\vec{F} = (P, Q): \mathbb{B}_R^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ непрерывна в $\mathbb{B}_R^2$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ и для любого отрезка $AB \subset \mathbb{B}_R^2$ длины 1 выполняется $\int_{AB} (\vec{F}, d\vec{r}) = 0$.

Тогда если $R > 1$, то $\vec{F} = \vec{0}$. Если $R < 1$, то существует функция, не равная тождественно нулю, с указанным свойством.

Доказательство. Пусть $R > 1$. Тогда по лемме 8.1 существует такая функция $u: \mathbb{B}_R^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, что $\vec{\text{grad}} u = \vec{F}$. Отсюда и из условия имеем $0 = \int_{AB} (\vec{F}, d\vec{r}) = u(B) - u(A)$ для любых пар точек $A, B \in \mathbb{B}_R^2$, расстояние между которыми равно 1. Применяя лемму 8.2, получаем $u = \text{Const}$ в $\mathbb{B}_R^2$, значит $\vec{F} = \vec{\text{grad}} u = \vec{0}$.

Рассмотрим для $1/2 < R < 1$ функцию $g(t; \alpha, \beta) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \alpha; \\ e^{1/((t-\alpha)(t-\beta))}, & \alpha < t < \beta; \\ 0, & t \geq \beta. \end{cases}$

Тогда для бесконечно дифференцируемой $u(x, y) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}; \frac{1-R}{3}, \frac{2(1-R)}{3}\right)$ функция $\vec{F} = (P, Q) = \vec{\text{grad}} u$ удовлетворяет условию, поскольку $\int_{AB} P dx + Q dy = u(B) - u(A) = 0$. При этом $\vec{F}$ не равна нулю в точках $\frac{1-R}{3} < \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{2(1-R)}{3}$, так как исходя из определения функции g имеем $P = \frac{\partial u}{\partial x} = g'_t \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y} = g'_t \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0$. $\square$

Применение в теореме 8.2 стандартного принципа сглаживания приводит к

Следствие 8.1. Имеет место равенство $\mathcal{R}_2^2(l_0) = 1$.

Исходя из физического смысла криволинейного интеграла первого рода, имеем

Следствие 8.2. Если в шаре радиуса $R > 5/8$ распределен такой заряд Q , что для любых точек $A, B \in \mathbb{B}_R^n$: $|AB| = 1$ суммарный заряд по отрезку AB равен нулю, то $Q = 0$. Если $R < 5/8$, то существует ненулевое распределение заряда с указанным свойством.

Исходя из физического смысла криволинейного интеграла второго рода, получаем

Следствие 8.3. Если в круге $\mathbb{B}_R^2$ радиуса $R > 1$ для любых точек $A, B \in \mathbb{B}_R^2$: $|AB| = 1$ работа силы $\vec{F}$ по перемещению тела вдоль отрезка AB равна нулю, то $\vec{F} = \vec{0}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pompeiu D. Sur certains systems d'equation lineaires et sur une propriete integrale de fonctions de plusieurs variables / D. Pompeiu // C. R. Accd. Sci. Paris. – 1929. – V. 188. – P. 1138–1139.

2. Pompeiu D. Sur une propriete de fonctions continues dependant de deux variables reelles / D. Pompeiu // Bull. Sci. Accd. Royale Belgique. – 1929. – V. 15, № 5. – P. 265–269.
3. Nicolesco M. Sur un theoreme de Pompeiu / M. Nicolesco // Bull. Sci. Accd. Royale Belgique. – 1930. – V. 16, № 5. – P. 817–822.
4. Ilieff L. Sur un probleme de Pompeiu / L. Ilieff // Ann. Univ. Sofia Fac. Phys., Livre 1. – 1949. – V. 45. – P. 111–114.
5. Christov C. Sur laquation integrale generalisee de Pompeiu / C. Christov // Ann. Univ. Sofia Fac. Sci., Livre 1. – 1949. – V. 45. – P. 167–178.
6. Произволов В.В. Об интегралах, постоянных на конгруэнтных областях / В.В. Произволов // Мат. заметки. – 1977. – Т. 21, №2. – С. 183–186.
7. Заставный В. П. Теорема о нулях преобразования Фурье индикатора и ее применение / В. П. Заставный // Новосибирск: Ред. «Сиб. мат. журн.». – 1986. – 18 с. Деп. в ВИНТИ 29.10.87: № 701-в. 87.
8. Ebenfalt P. Some results on the Pompeiu problem / P. Ebenfalt // Ann. Acad. Sci. Ser. A. J. Math. – 1993. – V. 24. – P. 16–31.
9. Garofalo N. Asymptotic expansions for a class of Fourier integrals and applications to the Pompeiu problem / N. Garofalo, F. Segala // J. Anal. Math. – 1991. – v. 56. – p. 1–28.
10. Williams S. A. A partial solution of the Pompeiu problem / S. A. Williams // Math. Ann. – 1976. – V. 223. – P. 183–190.
11. Dalmasso R. A new result on the Pompeiu problem / R. Dalmasso // Trans. Amer. Math. Soc. – 2000. – V. 352. – P. 2723–2736.
12. Volchkov V. V. New result in integral geometry / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov // IMCP. – 2003. – V. 16.
13. Котляр Б. Д. Плотности упадок ограниченных множеств / Б. Д. Котляр // Сообщ. Акад. наук Грузинской ССР. – 1987. – Т. 126, №3. – С. 469–472.
14. Sitaram A. On an analogue of the Wiener Tauberian theorem for symmetric spaces of the non-compact type / A. Sitaram // Pacific J. Math. – 1988. – V. 133. – P. 197–208.
15. Benyamini Y. Harmonic analysis of spherical functions on $SV(1, 1)$ / Y. Benyamini, Y. Weit // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). – 1992. – V. 42. – P. 671–694.
16. Agranovsky M. L. Fourier transform on $SL_2(\mathbb{R})$ and Morera type theorem / M. L. Agranovsky // Sovo Math. Dokl. – 1978. – V. 19. – P. 1522–1525.
17. Berenstein C. A. Le probleme de Pompeiu locale / C. A. Berenstein // J. Anal. Math. – 1989. – V. 52. – P. 133–166.
18. Berenstein C. A. A local version of the two-circles theorem / C. A. Berenstein // Israel J. Math. – 1986. – V. 55. – P. 267–288.
19. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
20. Zalcman L. A bibliographic survey of Pompeiu problem. Approximation by solutions of partial differential equations / L. Zalcman; ed. B. Fuglede et al., 1992. – P. 185–194.
21. Zalcman L. Supplementary bibliography to 'A bibliographic survey of the Pompeiu problem'. In: Radon Transforms and Tomography / L. Zalcman // Contemp. Math. – 2001. – № 278. – P. 69–74.
22. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 671 p.
23. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – New York: Birkhäuser. – 2013. – 592 p.
24. Волчков В. В. Экстремальные задачи интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Математика сегодня. – 2001. – Вып. 12., № 1. – С. 51–79.
25. Машаров П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для квадрата в трёхмерном пространстве / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2017. – № 2. – С. 50–60.
26. Chang D. C. The Pompeiu problem for sets of higher codimension in Euclidean space and the Heisenberg group / D. C. Chang, W. Eby // Taiwanese Journal of Mathematics. – 2008. – V. 12. – pp. 2619–2640.
27. Волчков В. В. Об одной экстремальной задаче, связанной с теоремой Мореры / В. В. Волчков // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60, № 6. – С. 804–809.
28. Машаров П. А. Решение локального варианта проблемы Помпейю для треугольника Рело / П. А. Машаров // Вісник дніпропетровського університету. Математика. – 2001. – вип. 6. – С. 72–81.
29. Волчков В. В. Экстремальные задачи о множествах Помпейю / В. В. Волчков // Матем. сборник. – 1998. – Т. 189, № 7. – С. 3–22.

30. Машаров П. А. Об экстремальном радиусе Помпейю для шаровых сегментов, содержащих полушар / П. А. Машаров // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2011. – Т. 23. – С. 163–171.
31. Иванисенко Н. С. Локальный вариант проблемы Помпейю для невыпуклого четырехугольника / Н. С. Иванисенко, П. А. Машаров // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2014. – Т. 28. – С. 76–83.
32. Машаров П. А. Экстремальные задачи о множествах с локальным свойством Помпейю / П. А. Машаров // Доповіді НАН України. – 2001. – № 7. – С. 25–29.
33. Елец Л. В. Об одной экстремальной задаче о множествах Помпейю / Л. В. Елец, П. А. Машаров // Украинский математический журнал. – 2009. – Т. 61. – С. 61–72.
34. Машаров П. А. Радиус Помпейю для неодносвязного множества / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 1. – С. 87–97.
35. Кудрявцев Лев Д. Курс математического анализа : В 3 т. : [Учеб. для физ.-мат. и инж.-физ. специальностей вузов]. Т. 2 / Л. Д. Кудрявцев. – 2-е изд. – М. : Высш. шк., 1988. – 575 с.
36. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. Интегральная геометрия, инвариантные дифференциальные операторы и сферические функции : Пер. с англ. П. А. Кучмента. - М. : Мир, 1987 с.

Поступила в редакцию 25.06.2019 г.

ON FUNCTIONS WITH ZERO INTEGRALS OVER SEGMENTS

P. A. Masharov

The value of the smallest radius of the ball is obtained, in which zero of the integrals is equal to zero of the function. Integrals on unit segments of the first and second kind are considered.

Keywords: the Pompeiu problem, the extreme Pompeiu radius, the properties of functions with vanishing integrals by segments, the local Pompeiu problem, the Pompeiu radius for the segment.

Машаров Павел Анатольевич

кандидат физико-математических наук
Донецкий национальный университет, г. Донецк
pavelmasharov@gmail.com
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений
+38-050-5653907

Masharov Pavlo Anatoliyovych

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Donetsk National University, Donetsk

UDK 517.988.28

ON VON NEUMANN'S PARAMETER OF EXTREMAL SHRÖDINGER OPERATOR

© 2019. S. V. Belyi, E. R. Tsekanovskii

In this paper we study connections between extremal accretive quasi-self-adjoint dissipative extensions of a non-negative symmetric Shrödinger operator with deficiency indices $(1, 1)$ on $L_2[\ell, +\infty)$ and the moduli of their von Neumann's parameters. It is shown that the modulus of the corresponding von Neumann's parameter belongs to the interval $[\kappa_0, 1)$, where for $\kappa_0 \geq 0$ is obtained a new formula in terms of the values of the Weyl-Titchmarsh function $m_\infty(-0)$ and $m_\infty(i)$. An example that illustrates the obtained results is presented.

Keywords: Shrödinger operator, von Neumann's parameter, sectorial operators, extremal operator, Weyl-Titchmarsh function.

Introduction. In the current paper we set focus on non-self-adjoint Shrödinger operators on $L_2[\ell, +\infty)$ of the form

$$\begin{cases} T_h y = -y'' + q(x)y \\ hy(\ell) = y'(\ell) \end{cases} \quad (9.1)$$

where $\text{Im } h > 0$. We study a connection between the modulus of the von Neumann parameter of the extremal accretive operator T_h and its boundary value h . It is established that the modulus of the corresponding von Neumann's parameter belongs to the interval $[\kappa_0, 1)$, where for κ_0 is obtained an exact new formula in terms of the values of the Weyl-Titchmarsh function $m_\infty(-0)$, $m_\infty(i)$.

This paper is dedicated to the centenary of Georgiy Dmitrievich Suvorov, a Correspondent Member of the Ukrainian Academy of Sciences, a remarkable Human Being, mathematician, philosopher, educator, and enlightener. Despite of many singularities of life at that time, he was not among those who, using words of the famous poet Владимир Маяковский, "...видя безобразие обеими глазами, пишет о прелестях лирических утех". His apostolic service, support and help for students, post graduate students and colleagues especially to those who are in a big trouble was enormous. Once the great poet Александр Пушкин wrote: "И долго буду тем любезен я народу, что чувства добрые я лирой пробуждал, что в мой жестокий век восславил я свободу и милость к падшим призывал". These words completely relate to a wonderful life of G.D. and his many good deeds that will not be forgotten.

Preliminaries. Let $\dot{A}$ be a closed, densely defined, symmetric operator in a Hilbert space $\mathcal{H}$ with inner product (f, g) , $f, g \in \mathcal{H}$. Suppose also that $\dot{A}$ has the deficiency indices $(1, 1)$. Any non-symmetric operator T in $\mathcal{H}$ such that

$$\dot{A} \subset T \subset \dot{A}^*$$

is called (see [1]) a *quasi-self-adjoint extension* of $\dot{A}$.

Assume now that $T \neq T^*$ is a maximal dissipative extension of $\dot{A}$,

$$\text{Im}(Tf, f) \geq 0, \quad f \in \text{Dom}(T).$$

Since $\dot{A}$ is symmetric with the deficiency indices $(1, 1)$, its dissipative extension T is automatically quasi-self-adjoint [3], that is, $\dot{A} \subset T \subset \dot{A}^*$, and hence, (see [8])

$$g_+ - \kappa g_- \in \text{Dom}(T) \quad \text{for some } |\kappa| < 1, \quad (9.2)$$

where $g_{\pm} \in \text{Ker}(\dot{A}^* \mp iI)$ are normalized deficiency vectors of $\dot{A}$. Throughout this paper κ will be referred to as the *von Neumann parameter* of operator T .

Recall that a quasi-self-adjoint extension T of $\dot{A}$ in a Hilbert space $\mathcal{H}$ is called *accretive* [17] if $\text{Re}(Tf, f) \geq 0$ for all $f \in \text{Dom}(T)$. An operator T is called α -sectorial [16, 17] if there exists a value of $\alpha \in (0, \pi/2)$ such that

$$(\cot \alpha)|\text{Im}(Tf, f)| \leq \text{Re}(Tf, f), \quad f \in \text{Dom}(T). \quad (9.3)$$

An accretive operator T is called *extremal* if it is not α -sectorial for any $\alpha \in (0, \pi/2)$.

Quasi-self-adjoint extension of symmetric Schrödinger operator. Let $\mathcal{H} = L_2[\ell, +\infty)$ and $l(y) = -y'' + q(x)y$, where $q(x)$ is a real locally summable function. Suppose that the symmetric operator

$$\begin{cases} \dot{A}y = -y'' + q(x)y \\ y(\ell) = y'(\ell) = 0 \end{cases} \quad (9.4)$$

has deficiency indices (1,1) and is defined on the set D^* of functions locally absolutely continuous together with their first derivatives such that $l(y) \in L_2[\ell, +\infty)$ and the boundary conditions as in (9.4). Consider quasi-self-adjoint extensions of $\dot{A}$ defined on functions $y(x) \in D^*$ with the corresponding boundary conditions

$$\begin{cases} T_h y = l(y) = -y'' + q(x)y \\ h y(\ell) = y'(\ell) \end{cases}, \quad \begin{cases} T_h^* y = l(y) = -y'' + q(x)y \\ \bar{h} y(\ell) = y'(\ell) \end{cases}. \quad (9.5)$$

Let $\dot{A}$ be a symmetric operator of the form (9.4), generated by the differential operation $l(y) = -y'' + q(x)y$. Let also $\varphi_k(x, \lambda)$, ($k = 1, 2$) be the solutions of the following Cauchy problems:

$$\begin{cases} l(\varphi_1) = \lambda \varphi_1 \\ \varphi_1(\ell, \lambda) = 0 \\ \varphi_1'(\ell, \lambda) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} l(\varphi_2) = \lambda \varphi_2 \\ \varphi_2(\ell, \lambda) = -1 \\ \varphi_2'(\ell, \lambda) = 0 \end{cases}.$$

It is well known [18] that there exists a function $m_{\infty}(\lambda)$ for which

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi_2(x, \lambda) + m_{\infty}(\lambda)\varphi_1(x, \lambda)$$

belongs to $L_2[\ell, +\infty)$. This function $m_{\infty}(\lambda)$ is called the *Weyl-Titchmarsh function*. In [3, 5] the following function is associated to a dissipative operator T_h ($\text{Im } h > 0$)

$$W_{\Theta}(z) = \frac{\mu - h}{\mu - \bar{h}} \cdot \frac{m_{\infty}(z) + \bar{h}}{m_{\infty}(z) + h}, \quad (9.6)$$

where $\mu \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Also, it was established in [8] that if $W_{\Theta}(z)$ of the form (9.6) is associated with T_h and κ is the von Neumann parameter of T_h , then

$$|\kappa| = \frac{1}{|W_{\Theta, \mu, h}(i)|} = \left| \frac{\mu - \bar{h}}{\mu - h} \cdot \frac{m_{\infty}(i) + h}{m_{\infty}(i) + \bar{h}} \right| = \left| \frac{m_{\infty}(i) + h}{m_{\infty}(i) + \bar{h}} \right|. \quad (9.7)$$

It is known [18] that $-m_{\infty}(z)$ is a Herglotz-Nevanlinna function. Hence, taking into account that $\text{Im } h > 0$ and $\text{Im } m_{\infty}(i) < 0$ one can easily directly verify that indeed $|\kappa| < 1$ in (9.7).

The modulus of von Neumann's parameter in extremal case. Suppose that the symmetric operator $\dot{A}$ of the form (9.4) with deficiency indices (1,1) is non-negative, i.e., $(\dot{A}f, f) \geq 0$ for

all $f \in \text{Dom}(\dot{A})$. For the remainder of this paper we assume that $m_\infty(-0) < \infty$. Then according to [21, 22] we have the existence of the operator T_h , ($\text{Im } h > 0$) that is accretive and/or sectorial.

Now suppose T_h is a Schrödinger operator defined by (9.5). The following theorems are the main results of this paper.

Theorem 9.1. *Let $\dot{A}$ be a nonnegative symmetric Schrödinger operator of the form (9.4) with deficiency indices $(1, 1)$ in $\mathcal{H} = L^2[\ell, \infty)$. If a dissipative Schrödinger operator T_h , ($\dot{A} \subset T_h \subset \dot{A}^*$), of the form (9.5) with the modulus κ of its von Neumann's parameter is extremal, then $\kappa_0 \leq \kappa < 1$, where $\kappa_0 \geq 0$ is given by*

$$\kappa_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{|m_\infty(i)|^2 - 2m_\infty(-0)\text{Re } m_\infty(i) + m_\infty^2(-0)} + \text{Im } m_\infty(i)}{\sqrt{|m_\infty(i)|^2 - 2m_\infty(-0)\text{Re } m_\infty(i) + m_\infty^2(-0)} - \text{Im } m_\infty(i)}}. \quad (9.8)$$

Proof. To simplify further calculations we set

$$m_\infty(i) = a - ib, \quad b > 0, \quad m_\infty(-0) = m, \quad c = (a - m)^2, \quad d = c + b^2 > 0. \quad (9.9)$$

Then (9.7) yields

$$\begin{aligned} \kappa &= \left| \frac{m_\infty(i) + h}{m_\infty(i) + \bar{h}} \right| = \left| \frac{a - ib + \text{Re } h + i\text{Im } h}{a - ib + \text{Re } h - i\text{Im } h} \right| = \left| \frac{(a + \text{Re } h) + i(\text{Im } h - b)}{(a + \text{Re } h) - i(\text{Im } h + b)} \right| \\ &= \sqrt{\frac{(a + \text{Re } h)^2 + (\text{Im } h - b)^2}{(a + \text{Re } h)^2 + (\text{Im } h + b)^2}}, \end{aligned}$$

or

$$\kappa^2 = \frac{(a + \text{Re } h)^2 + (\text{Im } h - b)^2}{(a + \text{Re } h)^2 + (\text{Im } h + b)^2}. \quad (9.10)$$

Suppose that T_h is an extremal operator. Therefore (see [4, 19, 20]) $\text{Re } h = -m_\infty(-0) = -m$. Applying this to (9.10) and using (9.9) notations gives

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= \frac{(a - m)^2 + (\text{Im } h - b)^2}{(a - m)^2 + (\text{Im } h + b)^2} = \frac{c + (\text{Im } h)^2 - 2b \text{Im } h + b^2}{c + (\text{Im } h)^2 + 2b \text{Im } h + b^2} \\ &= \frac{(\text{Im } h)^2 - 2b \text{Im } h + d}{(\text{Im } h)^2 + 2b \text{Im } h + d}. \end{aligned}$$

Let us consider κ^2 as a function f of $x = \text{Im } h$, that is

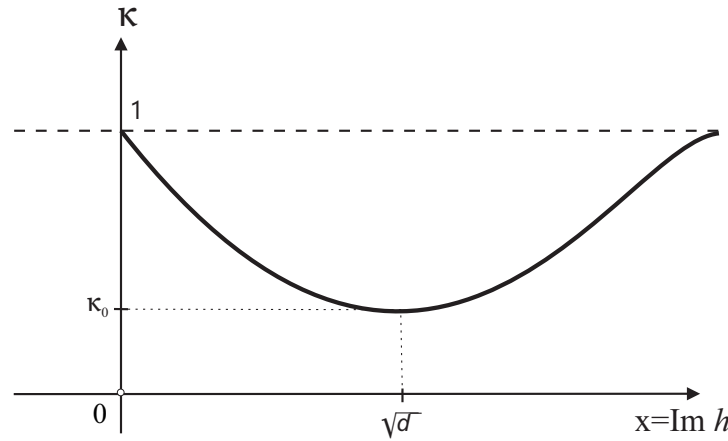
$$f(x) = \kappa^2(x) = \frac{x^2 - 2bx + d}{x^2 + 2bx + d}. \quad (9.11)$$

Taking the derivative of $f(x)$ in (9.11) and simplifying yields

$$f'(x) = \frac{4b(x^2 - d)}{(x^2 + bx + d)^2}.$$

Setting $f'(x) = 0$ and keeping in mind that $x = \text{Im } h > 0$ and $d > 0$ we obtain a critical number

$$x = \sqrt{d},$$


 Fig. 9.1: Extremal T_h

that can be checked to be a point of minimum of $f(x)$ for all $x > 0$. Also, direct substitution gives

$$f(\sqrt{d}) = (\sqrt{d} - b)/(\sqrt{d} + b).$$

Consequently,

$$(\sqrt{d} - b)/(\sqrt{d} + b) \leq \kappa^2 < 1,$$

and hence

$$\sqrt{(\sqrt{d} - b)/(\sqrt{d} + b)} \leq \kappa < 1,$$

or, after backward substitution and simplification,

$$\sqrt{\frac{\sqrt{|m_\infty(i)|^2 - 2m_\infty(-0)\operatorname{Re} m_\infty(i) + m_\infty^2(-0)} + \operatorname{Im} m_\infty(i)}{\sqrt{|m_\infty(i)|^2 - 2m_\infty(-0)\operatorname{Re} m_\infty(i) + m_\infty^2(-0)} - \operatorname{Im} m_\infty(i)}} \leq \kappa < 1. \quad (9.12)$$

Thus, if T_h is an extremal operator, then (9.12) holds, that is, the modulus κ of von Neumann's parameter of T_h is such that $\kappa_0 \leq \kappa < 1$, where κ_0 is given by (9.8). A sample graph of κ as a function of $\operatorname{Im} h$ is shown in Figure 9.1. $\square$

Now we will state and prove an inverse version of Theorem 9.1.

Theorem 9.2. *Let $\dot{A}$ be the same as in the statement of Theorem 9.1. If $\kappa_0 \leq \kappa < 1$, where $\kappa_0 \geq 0$ is given by (9.8), then there exists an extremal dissipative Schrödinger operator T_h , ($\dot{A} \subset T_h \subset \dot{A}^*$), of the form (9.5) with the modulus of its von Neumann's parameter equal to κ .*

Proof. Let T_h be a Schrödinger operator of the form (9.5) with the same potential as $\dot{A}$ in (9.4). All we need is to show that there exists a value of h that makes T_h an extremal dissipative quasi-self-adjoint extension of $\dot{A}$ whose modulus of von Neumann's parameter is equal to the given $\kappa \in [\kappa_0, 1)$. Note that equation (9.10) holds for any T_h with von Neumann's parameter κ . Setting

$$\operatorname{Re} h = -m_\infty(-0) = -m$$

in (9.10) will guarantee (see [4, 19, 20]) that T_h is extremal and yield (9.11), that is

$$\kappa^2 = \frac{x^2 - 2bx + d}{x^2 + 2bx + d}, \quad (9.13)$$

where $x = \operatorname{Im} h$. Modifying (9.13) leads to the quadratic equation

$$x^2 - 2b \left(\frac{1 + \kappa^2}{1 - \kappa^2} \right) x + d = 0. \quad (9.14)$$

We are going to show that equation (9.14) has at least one real positive solution. For the sake of simplicity we set

$$\xi = (1 + \kappa^2)/(1 - \kappa^2)$$

and note that when $\kappa \in [\kappa_0, 1)$ we have $\xi \in [\xi_0, +\infty)$, where

$$\xi_0 = \left(1 + \frac{\sqrt{d} - b}{\sqrt{d} + b} \right) / \left(1 - \frac{\sqrt{d} - b}{\sqrt{d} + b} \right) = \frac{\sqrt{d}}{b}.$$

Consider the discriminant of the quadratic equation (9.14) as a function of ξ

$$D(\xi) = 4b^2\xi^2 - 4d.$$

Then its derivative $D'(\xi) = 8b^2\xi$ is always positive on $\xi \in [\xi_0, +\infty)$ indicating that $D(\xi)$ is an increasing function of $\xi \in [\xi_0, +\infty)$. Moreover, the direct check reveals that

$$D(\xi_0) = 4b^2\xi_0^2 - 4d = 0,$$

and hence $D(\xi)$ takes positive values on $\xi \in (\xi_0, +\infty)$. Applying the quadratic formula to equation (9.14) and taking into account that $b > 0$ and $\xi > 0$, we obtain that

$$x = \frac{2b\xi \pm \sqrt{4b^2\xi^2 - 4d}}{2} \quad (9.15)$$

yields at least one positive real solution which we can use. Therefore, the value of h such that $\operatorname{Re} h = -m_\infty(-0)$ and $\operatorname{Im} h$ equal to the positive value of x from (9.15) is the one that makes T_h an extremal dissipative quasi-self-adjoint extension of $\dot{A}$. $\square$

The following example will provide an illustration to Theorems 9.1 and 9.2.

Example. Consider a minimal symmetric operator $\dot{A}$ of the form

$$\begin{cases} \dot{A}y = -y'' \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases} \quad (9.16)$$

in the Hilbert space $\mathcal{H} = L^2[1, \infty)$. It is known [18] that $\dot{A}$ has deficiency indices $(1, 1)$ and is nonnegative. Consider also an operator

$$\begin{cases} T_h y = -y'' \\ y'(1) = hy(1). \end{cases} \quad (9.17)$$

It has been shown in [5] that in this case

$$m_\infty(z) = -i\sqrt{z} \quad \text{and} \quad m_\infty(i) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

Consequently, $m_\infty(-0) = 0$ and $|m_\infty(i)| = 1$, and hence (9.8) yields

$$\kappa_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}}. \quad (9.18)$$

On the other hand, according to (9.7) we have the following formula representing the modulus of von Neumann's parameter of T_h in (9.17) for any h

$$\begin{aligned}\kappa &= \left| \frac{m_\infty(i) + h}{m_\infty(i) + \bar{h}} \right| = \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i + h}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i + \bar{h}} \right| = \left| \frac{1 - i + \sqrt{2} \operatorname{Re} h + \sqrt{2} \operatorname{Im} h i}{1 - i + \sqrt{2} \operatorname{Re} h - \sqrt{2} \operatorname{Im} h i} \right| \\ &= \sqrt{\frac{(1 + \sqrt{2} \operatorname{Re} h)^2 + (\sqrt{2} \operatorname{Im} h - 1)^2}{(1 + \sqrt{2} \operatorname{Re} h)^2 + (\sqrt{2} \operatorname{Im} h + 1)^2}}.\end{aligned}$$

If we want our operator T_h to be extremal, we set $\operatorname{Re} h = -m_\infty(-0) = 0$ (see [4, 19, 20]) in the above formula. Then we get

$$\kappa_{ext} = \sqrt{\frac{1 + (\sqrt{2} \operatorname{Im} h - 1)^2}{1 + (\sqrt{2} \operatorname{Im} h + 1)^2}} = \sqrt{\frac{1 + (\operatorname{Im} h)^2 - \sqrt{2} \operatorname{Im} h}{1 + (\operatorname{Im} h)^2 + \sqrt{2} \operatorname{Im} h}},$$

where κ_{ext} is the modulus of von Neumann's parameter of any extremal operator T_h of the form (9.17). Also, according to Theorem 9.1 κ_{ext} satisfies $\kappa_0 \leq \kappa_{ext} < 1$, where κ_0 is given by (9.18). We can also directly describe the extremal operator T_{h_0} whose von Neumann's parameter is κ_0 in (9.18). As we have shown this in the proof of Theorem 9.1, κ_0 corresponds to the critical value $\operatorname{Im} h = \sqrt{d}$, where d is defined in (9.9). Thus,

$$h_0 = -m_\infty(-0) + i\sqrt{d} = 0 + i\sqrt{(\operatorname{Re} m_\infty(i) - m_\infty(-0))^2 + (\operatorname{Im} m_\infty(i))^2} = i|m_\infty(i)| = i.$$

Thus, the extremal accretive operator

$$\begin{cases} T_i y = -y'' \\ y'(1) = iy(1), \end{cases} \quad (9.19)$$

has modulus of its von Neumann's parameter equal to κ_0 of the form (9.18).

Concluding remarks. Formula (9.8) describing κ_0 plays an important role in the theory of conservative linear systems with Schrödinger operator. This topic is going to be discussed further in an upcoming paper (in preparation).

THE BIBLIOGRAPHY

1. N. Akhiezer, I. Glazman, *Theory of linear operators*. Pitman Advanced Publishing Program, 1981.
2. Yu. Arlinskiĭ, Yu. Kovalev, E. Tsekanovskiĭ *Accretive and sectorial extensions of nonnegative symmetric operators*, Complex Anal. Oper. Theor, Vol. 6, no.3, (2012), 677–718.
3. Yu. Arlinskiĭ, S. Belyi, E. Tsekanovskiĭ *Conservative Realizations of Herglotz-Nevalinna functions*, Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 217, Birkhauser Verlag, 2011.
4. Yu. Arlinskiĭ, E. Tsekanovskiĭ, *M. Krein's research on semi-bounded operators, its contemporary developments, and applications*, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 190, (2009), 65–112.
5. Yu. Arlinskiĭ, E. Tsekanovskiĭ, *Linear systems with Schrödinger operators and their transfer functions*, Oper. Theory Adv. Appl., 149, 2004, 47–77.
6. S. Belyi, *Sectorial Stieltjes functions and their realizations by L-systems with Schrödinger operator*, Mathematische Nachrichten, vol. 285, no. 14-15, (2012), pp. 1729-1740.
7. K. A. Makarov, E. Tsekanovskiĭ, *On the Weyl-Titchmarsh and Livšic functions*. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 87, American Mathematical Society, (2013), 291–313.
8. S. Belyi, K. A. Makarov, E. Tsekanovskiĭ, *Conservative L-systems and the Livšic function*. Methods of Functional Analysis and Topology, **21**, no. 2, (2015), 104–133.
9. S. Belyi, K.A. Makarov, E. Tsekanovskiĭ, *A system coupling and Donoghue classes of Herglotz-Nevalinna functions*, Complex Analysis and Operator Theory, **10** (4), (2016), 835-880.

10. S. Belyi, E. Tsekanovskii, *On Sectorial L -systems with Shrödinger operator*, Differential Equations, Mathematical Physics, and Applications. Selim Grigorievich Krein Centennial, CONM, American Mathematical Society, Providence, RI (2019), pp. 59–76.
11. S. Belyi, E. Tsekanovskii, *Perturbations of Donoghue classes and inverse problems for L -systems*, Complex Analysis and Operator Theory, vol. 13 (3), (2019), pp. 1227–1311.
12. S. Belyi, E. Tsekanovskii, *Inverse Stieltjes like functions and inverse problems for systems with Schrodinger operator*. Operator Theory: Advances and Applications, vol. 197, (2009), 21–49.
13. S. Belyi, E. Tsekanovskii, *Stieltjes like functions and inverse problems for systems with Schrödinger operator*. Operators and Matrices, vol. 2, No.2, (2008), 265–296.
14. V. Derkach, M.M. Malamud, E. Tsekanovskii, *Sectorial Extensions of Positive Operators*. (Russian), Ukrainian Mat.J. **41**, No.2, (1989), pp. 151–158.
15. F. Gesztesy, E. Tsekanovskii, *On Matrix-Valued Herglotz Functions*. Math. Nachr. **218**, (2000), 61–138.
16. J. Goldstein, *Semigroups of linear operators and applications*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, New York, 1985.
17. T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, 1966.
18. M.A. Naimark, *Linear Differential Operators II*, F. Ungar Publ., New York, 1968.
19. E. Tsekanovskii, *Accretive extensions and problems on Stieltjes operator-valued functions relations*, Operator Theory: Adv. and Appl., **59**, (1992), 328–347.
20. E. Tsekanovskii, *Characteristic function and sectorial boundary value problems*. Research on geometry and math. analysis, Proceedings of Mathematical Insittute, Novosibirsk, **7**, 180–194 (1987)
21. E. Tsekanovskii, *Friedrichs and Krein extensions of positive operators and holomorphic contraction semigroups*. Funct. Anal. Appl. **15**, (1981), 308–309.
22. E. Tsekanovskii, *Non-self-adjoint accretive extensions of positive operators and theorems of Friedrichs-Krein-Phillips*. Funct. Anal. Appl. **14**, (1980), 156–157.

Received 14.05.2019 y.

О ПАРАМЕТРЕ ФОН НЕЙМАНА ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА

С. В. Белый, Э. Р. Цекановский

В настоящей работе мы изучаем связи между экстремальными акретивными квазисамосопряжёнными диссипативными расширениями неотрицательного симметрического оператора Шрёдингера с индексами дефекта $(1, 1)$ в $L_2[\ell, +\infty)$ и их параметрами фон Неймана. Нами показано, что модуль соответствующего такому расширению параметра фон Неймана принадлежит интервалу $[\kappa_0, 1)$, где для $\kappa_0 \geq 0$ получена новая формула в терминах значений функции Вейля-Титчмарша $m_\infty(-0)$ и $m_\infty(i)$. Приведен пример иллюстрирующий полученные результаты.

Ключевые слова: Оператор Шрёдингера, параметр фон Неймана, секториальный оператор, экстремальный оператор, функция Вейля-Титчмарша.

Belyi, Sergey Vladimirovich

PhD, professor
Department of Mathematics,
Troy University,
Troy, AL 36082, USA

Белый Сергей Владимирович

PhD, профессор
Тройский университет,
г. Трой, штат Алабама, 36082, США
sbelyi@troy.edu
+1-334-670-3467

Tsekanovskii, Eduard R.

Dr., Professor Emeritus,
Department of Mathematics
Niagara University,
Lewiston, NY 14109, USA

Цекановский Эдуард Р.

доктор физико-математических наук,
заслуженный профессор
Ниагарский университет, г. Люстон,
штат Нью-Йорк, 14109, США
tsekanov@niagara.edu

Научное издание

**Вестник Донецкого национального университета.
Серия А: Естественные науки
2019. – № 2**

Технические редакторы: *М. В. Фоменко, П. А. Машаров*

Свидетельство о регистрации СМИ Серия ААА № 000077 от 21.11.2016 г.

Адрес редакции:
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
ул. Университетская, 24,
83001, г. Донецк
Тел: (062) 302-92-56, 302-09-92
E-mail: vestnikdonnu_a@mail.ru
URL: <http://donnu.ru/vestnikA>

Подписано к печати 03.07.2019 г.
Формат 60 × 84/8. Бумага офсетная.
Печать — цифровая. Усл. печ. л. 11,9
Тираж 100 экз. Заказ №

Издательство ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
83001, г. Донецк, ул. Университетская, 24,
Тел: (062) 302-92-27.
Свидетельство о внесении субъекта издательской деятельности
в Государственный реестр
серия ДК № 1854 от 24.06.2004 г.