

ISSN 2415-7058 (Print)
ISSN 2415-7066 (Online)

Вестник Донецкого национального университета



НАУЧНЫЙ
ЖУРНАЛ
*Основан
в 1997 году*

Серия А
**Естественные
науки**

1/2024

Редакционная коллегия журнала «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки»

Главный редактор – д-р физ.-мат. наук, проф. *С.В. Беспалова*.

Зам. главного редактора – д-р биол. наук, проф. *О.С. Горецкий*.

Ответственный секретарь – канд. физ.-мат. наук *М.В. Фоменко*.

Члены редколлегии: д-р биол. наук, проф. *В.В. Акатов*, д-р хим. наук, проф. *А.С. Алемасова*; д-р биол. наук, проф. *В.Г. Артюхов*; канд. хим. наук, доц. *О.В. Баранова*; канд. хим. наук, доц. *С.Г. Бахтин*; д-р хим. наук, доц. *Н.И. Белая*; канд. хим. наук, доц. *А.В. Белый*; д-р философии, проф. *С.В. Белый*; д-р пед. наук, доц. *Т.В. Вардун*; д-р физ.-мат. наук, проф. *Вал.В. Волчков*; д-р физ.-мат. наук, проф. *Вит.В. Волчков*; д-р биол. наук, проф. *А.З. Глухов*; д-р физ.-мат. наук, проф. *А.С. Гольцев*; д-р биол. наук, доц. *С.Н. Горбов*; д-р физ.-мат. наук, проф. *Г.В. Горр*; д-р хим. наук, проф. *А.В. Гулевская*; д-р биол. наук, доц. *Т.В. Денисова*; д-р хим. наук, проф. *В.Д. Дяченко*; д-р физ.-мат. наук, проф. *В.П. Заставный*; д-р физ.-мат. наук, доц. *А.В. Зыза*; д-р геогр. наук, проф. *К.Ш. Казеев*; д-р биол. наук, проф. *В.Н. Калаев*; канд. биол. наук, доц. *Е.А. Калаева*; д-р физ.-мат. наук, проф. *С.А. Калоеров*; д-р биол. наук, с.н.с. *О.Е. Клименко*; д-р с-х наук, проф. *С.И. Колесников*; д-р физ.-мат. наук, доц. *Б.И. Коносевич*; канд. биол. наук *В.О. Корниенко*; д-р хим. наук, проф. *Т.П. Кустова*; д-р биол. наук, доц. *Е.В. Лопатина*; д-р хим. наук, проф. *В.М. Михальчук*; д-р физ.-мат. наук, доц. *И.А. Моисеенко*; д-р биол. наук, проф. *И.В. Мухина*; д-р физ.-мат. наук, доц. *Р.Н. Нескородев*; д-р биол. наук, проф. *В.Б. Павленко*; д-р биол. наук, доц. *С.В. Погодина*; канд. биол. наук, доц. *А.И. Сафонов*; д-р биол. наук, проф. *В.И. Соболев*; д-р техн. наук, проф. *В.И. Сторожев*; канд. мед. наук, доц. *В.В. Труш*; д-р хим. наук *Т.Г. Тюрин*; д-р биол. наук, доц. *М.Г. Холявка*; д-р хим. наук, доц. *И.Н. Щербаков*.

The Editorial Board of the journal “Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences”

The Editor-in-Chief – Dr. of phys. and math., prof. *S.V. Bepalova*.

The Deputy of the Editor-in-Chief – Dr. of biol., prof. *O.S. Goretskii*.

Executive Secretary – Cand. of phys. and math. *M.V. Fomenko*.

The Members of the Editorial Board: Dr. of biol., prof. *V.V. Akatov*; Dr. of chem., prof. *A.S. Alemasova*; Dr. of biol., prof. *V.G. Artyuhov*; Cand. of chem., docent *O.V. Baranova*; Cand. of chem., docent *S.G. Bahtin*; Dr. of chem., docent *N.I. Belaya*; Cand. of chem., docent *A.V. Belyj*; Dr. of philosophy, prof. *S.V. Belyi*; Dr. of Ped. docent *T.V. Varduni*; Dr. of phys. and math., prof. *Val.V. Volchkov*; Dr. of phys. and math., prof. *Vit.V. Volchkov*; Dr. of biol., prof. *A.Z. Glukhov*; Dr. of phys. and math., prof. *A.S. Goltsev*; Dr. of biol., docent *S.N. Gorbov*; Dr. of phys. and math., prof. *G.V. Gorr*; Dr. of chem., prof. *A.V. Gulevskaya*; Dr. of biol., docent *T.V. Denisova*; Dr. of chem., prof. *V.D. Dyachenko*; Dr. of phys. and math., prof. *V.P. Zastavnyj*; Dr. of phys. and math., docent *A.V. Zyza*; Dr. of geogr. prof. *K.Sh. Kazeev*; Dr. of biol., prof. *V.N. Kalaev*; Cand. of biol., docent *E.A. Kalaeva*; Dr. of phys. and math., prof. *S.A. Kaloerov*; Dr. of biol., s.r. *O.E. Klimenko*; Dr. of Agric. prof. *S.I. Kolesnikov*; Dr. of phys. and math., docent *B.I. Konosevich*; Cand. of biol. *V.O. Kornienko*; Dr. of chem., prof. *T.P. Kustova*; Dr. of biol., docent *E.V. Lopatina*; Dr. of chem., prof. *V.M. Mikhal'chuk*; Dr. of phys. and math., docent *I.A. Moiseyenko*; Dr. of biol., prof. *I.V. Muhina*; Dr. of phys. and math., docent *R.N. Neskorodev*; Dr. of biol., prof. *V.B. Pavlenko*; Dr. of biol., docent *S.V. Pogodina*; Cand. of biol., docent *A.I. Safonov*; Dr. of biol., prof. *V.I. Sobolev*; Dr. of tech., prof. *V.I. Storozhev*; Cand. of med., docent *V.V. Trush*; Dr. of chem. *T.G. Tyurina*, Dr. of biol., docent *M.G. Holyavka*, Dr. of chem., docent *I.N. Shcherbakov*.

Адрес редакции: ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
ул. Университетская, 24, г. Донецк, ДНР, РФ.

Тел: +7 (856) 302-92-56, 302-09-92. **E-mail:** vestnikdonnu_a@mail.ru **URL:** <http://donnu.ru/vestnikA>

С 09.04.2024 г. научный журнал «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки» (далее – Журнал) включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (**Перечень ВАК РФ**) по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

физико-математические науки: 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ, 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин, 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела;
химические науки: 1.4.3. Органическая химия, 1.4.4. Физическая химия;
биологические науки: 1.5.2. Биофизика, 1.5.5. Физиология человека и животных, 1.5.15. Экология, 1.5.19. Почвоведение.

Журнал включен в перечень **РИНЦ** (Лицензионный договор № 378-06/2016 от 24.06.2016 г.). Информация о статьях отражается в Реферативном журнале и Базах данных **ВИНИТИ РАН** (договор о сотрудничестве от 11.04.2011 г.).

*Издается по решению Ученого совета ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»
Протокол № 6 от 31.05.2024 г.*

© ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Механика

- Калоеров С.А., Полянский М.А.* Решение задачи о вязкоупругом состоянии многосвязной пьезопластики 3
- Калоеров С.А., Сероштанов А.В.* Решение задачи об изгибе многосвязной пьезополуплоскости с приближенным удовлетворением граничным условиям на прямолинейной границе 28
- Карасев Д.С., Сторожев С.В., Фоменко М.В.* Методика анализа спектра сдвиговых электроупругих волн в пьезоактивном слое с симметричной поперечной неоднородностью 42
- Нескородев Р.Н., Зыза А.В.* Один из способов интегрирования трехмерных уравнений теории упругости анизотропного тела, обладающего плоскостью упругой симметрии 50
- Сторожев В.И., Глухов А.А.* Дисперсия нормальных сдвиговых волн в функционально-градиентном трансверсально-изотропном слое 58

Химические науки

- Белюсова Е.Е., Хомутова Е.В., Яблочкова Н.В.* Синтез и физико-химические свойства пербората натрия 65
- Михайлова Н.В., Белая Н.И., Белый А.В., Конайленко В.А.* Эффекты сверхаддитивности композиций галловой и пара-кумаровой кислот в реакциях радикального окисления 75

Биологические науки

- Корниенко В.О., Авдеева К.А., Яццкий А.С.* Влияние сочетанного действия переменного магнитного поля и низкочастотной вибрации на ранние стадии онтогенеза и морфометрию кукурузы сахарной 85
- Корниенко В.О.* Ретроспективный анализ антропогенного загрязнения города Донецка. Вибрационно-акустическое зашумление 93
- Летухова В.Ю., Коршиков И.И., Потапенко И.Л.* Морфологическая дивергенция плодов близкородственных видов рода *Crataegus* в горной части Восточного Крыма 101
- Павлов В.Н., Легенький Ю.А., Беспалова С.В.* Использование магнитного хrapовика для перемещения магнитомаркированных клеток над полосовой доменной структурой 113
- Сыщиков Д.В., Агурова И.В., Березовский А.С., Трискиба С.Д.* Агрохимическая характеристика и биологическая активность почв ландшафтно-рекреационного парка «Донецкий кряж» 125
- Хох А.Н., Звягинцев В.Б.* Комплексный анализ хвои сосны обыкновенной (*Pinus sylvestris* L.) в г. Минске 133

CONTENTS***Mechanics***

- Kaloerov S.A., Polyansky M.A.* Solution of the problem on the viscoelastic state multi-connected piezo plate 3
- Kaloerov S.A., Seroshtanov A.V.* Solving the problem of bending a multi-connected piezo half-plane with approximate satisfaction of boundary conditions on a rectilinear boundary 28
- Karasev D.S., Storozhev S.V., Fomenko M.V.* Method for analysis of the spectrum of shear electroelastic waves in a piezoactive layer with symmetrical transverse inhomogeneity 42
- Neskorodev R.N., Zyza A.V.* One of the methods to integrate three-dimensional equations of the theory of elasticity of an anisotropic body with a plane of elastic symmetry 50
- Storozhev V.I., Glukhov A.A.* Dispersion of normal shear waves in a functional-gradient transversal-isotropic layer 58

Chemical sciences

- Belousova E.E., Khomutova E.V., Yablochkova N.V.* Synthesis and physical-chemical properties of sodium perborate 65
- Mikhaylova N.V., Belaya N.I., Belyi A.V., Konailenko V.A.* Effects of superaddictiveness of compositions of gallic and para-coumaric acids in radical oxidation reactions 75

Biological sciences

- Kornienko V.O., Avdeeva K.A., Yaitsky A.S.* The effect of the combined action of an alternating magnetic field and low-frequency vibration on the early stages of ontogenesis and morphometry of *Zea mays* L. 85
- Kornienko V.O.* A retrospective analysis of anthropogenic pollution of the city of Donetsk. Vibration and acoustic noise 93
- Letukhova V.Yu., Korshikov I.I., Potapenko I.L.* Fruits Morphological Divergence in Closely Related Species of *Crataegus* Genus in the Mountainous Part of the Eastern Crimea 101
- Pavlov V.N., Legenkiy Y.A., Bepalova S.V.* Using a magnetic ratchet to move magnetically labeled cells over the strip structure of magnetic domains 113
- Syshchykov D.V., Agurova I.V., Berezovskiy A.S., Triskiba S.D.* Agrochemical characteristics and biological activity of soils landscape and recreational park "Donetskiy Kryazh" 125
- Khokh A.N., Zvyagintsev V.B.* Comprehensive analysis of scotts pine needles (*Pinus sylvestris* L.) in Minsk 133

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЯЗКОУПРУГОМ СОСТОЯНИИ
МНОГОСВЯЗНОЙ ПЬЕЗОПЛАСТИНКИ**

© 2024. С. А. Калоеров, М. А. Полянский

Решена задача электромагнитовязкоупругости для пластин с произвольными отверстиями и трещинами. При этом комплексные потенциалы электромагнитоупругости представлены рядами по малому параметру с коэффициентами в виде неизвестных функций приближений; получены граничные условия для определения функций приближений и общие представления этих функций для многосвязной области, содержащие ряды Лорана с неизвестными коэффициентами, определение которых из граничных условий обобщенным методом наименьших квадратов сведено к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярного разложения. После определения функций приближений представлением коэффициентов упругой деформации временными операторами и их вычислением находятся основные характеристики электромагнитоупругого состояния пластинки в любой момент времени. Как частные случаи из приведенного решения следуют решения соответствующих задач электровязкоупругости (когда не учитываются магнитные свойства материала), магнитовязкоупругости (когда не учитываются электрические свойства материала) и вязкоупругости (когда не учитываются и электрические, и магнитные свойства материала). Численные исследования проведены для пластинки с одним или двумя эллиптическими отверстиями, с одним или двумя линейными включениями. Установлено, что с течением времени значения напряжений и индукций около контуров отверстий и трещин значительно изменяются, причем наибольшие изменения этих величин наблюдаются в первые 10 часов после приложения нагрузки, значительные изменения этих величин наблюдаются вплоть до 40–50 часов, хотя переход в стационарное состояние и после этого занимает много времени; при переходе в стационарное состояние значения напряжений и индукций около контуров отверстий и трещин претерпевают большие изменения; особенно значительны эти изменения в зонах невысоких концентраций напряжений и индукций; на значения и характер изменения этих величин значительно влияют физико-механические свойства материала и геометрические характеристики отверстий и трещин.

Ключевые слова: электромагнитовязкоупругость, комплексные потенциалы, метод малого параметра, временные операторы, обобщенный метод наименьших квадратов, коэффициенты интенсивности напряжений и индукций.

Введение. В различных отраслях современной науки и техники широкое применение получили элементы конструкций из пьезоматериалов [1–8]. При эксплуатации таких конструкций под действием различных механических сил и электромагнитных полей вблизи имеющихся в элементах отверстий и трещин возникают высокие концентрации напряжений, которые могут приводить к потере прочности конструкций, что нужно учитывать при их проектировании и эксплуатации. В связи с этим необходимо разрабатывать методы определения электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) тел из пьезоматериалов, что было начато в ряде фундаментальных работ [9–14]. Наибольшее распространение в качестве элементов конструкций получили тонкие пластинки, находящиеся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния. В работе [15] для определения ЭМУС пластин были введены комплексные потенциалы электромагнитоупругости плоской задачи, позволяющие исследовать мгновенное напряженно-деформированное состояние пьезопластин с произвольными отверстиями, трещинами. Но значения основных характеристик ЭМУС многосвязных пластин существенно из-

меняется после начала действия электромагнитных воздействий. Начало исследований вязкоупругого состояния пьезопластин было положено работой [16].

В данной статье в развитие идей [16] дано общее решение задачи электромагнитовязкоупругости для пьезопластинки с произвольными отверстиями и трещинами. Описаны результаты численных исследований для пластинки с одним или двумя отверстиями с жестко подкрепленными контурами, с одним или двумя линейными жесткими включениями. Установлены закономерности изменения ЭМУС пьезопластинки в зависимости от времени, от ее геометрических характеристик, физико-механических свойств ее материала и вида внешнего воздействия. Изучено влияние полного или частичного учета пьезосвойств материала на значения напряжений и индукций.

1. Решение плоской задачи электромагнитоупругости с использованием комплексных потенциалов. Рассмотрим отнесенную к прямоугольной декартовой системе координат электромагнитоупругую пластинку, занимающую многосвязную область S (рис. 1), ограниченную внешним контуром L_0 и контурами отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$). В общем случае на контурах пластинки заданы внешние усилия или перемещения, а также электромагнитные воздействия; во внутренних точках $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$ ($r = \overline{1, R}$) области S действуют сосредоточенные силы $P_r^0(X_r^0, Y_r^0)$, сосредоточенные электрические заряды Q_{er}^0 и магнитные диполи Q_{mr}^0 .

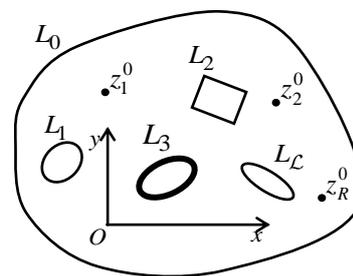


Рис. 1

Если внешний контур L_0 полностью уходит в бесконечность, то на бесконечности заданы напряжения $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$, угол жесткого поворота пластинки как целой ω_3^∞ , а также компоненты векторов индукций $D_x^\infty, D_y^\infty, B_x^\infty, B_y^\infty$ или напряженностей $E_x^\infty, E_y^\infty, H_x^\infty, H_y^\infty$ электромагнитного поля.

Если задачу по определению ЭМУС рассматриваемой пластинки решать с использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости [15], то она сводится к нахождению из соответствующих граничных условий функций $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \tag{1.1}$$

где μ_k – корни характеристического уравнения 8-го порядка

$$\begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix} = 0; \tag{1.2}$$

$l_{ij}(\mu)$ – полиномы

$$\begin{aligned} l_{4s}(\mu) &= s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22}, \\ l_{3g}(\mu) &= g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu - g_{22}, \\ l_{3p}(\mu) &= p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu - p_{22}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l_{2\beta}(\mu) &= -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22}, \\
 l_{2\nu}(\mu) &= -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22}, \\
 l_{2\chi}(\mu) &= -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22};
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

s_{ij} – коэффициенты деформации материала пластинки, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей; g_{ki} и p_{ki} – пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформации и напряженностей электрического и магнитного полей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях; β_{kl} , χ_{kl} и ν_{kl} – коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивости, измеренные при постоянных значениях напряжений.

Граничные условия (механические и электромагнитные) для определения комплексных потенциалов на контуре L_l имеют вид [15]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ikl} \Phi_k(t_k) = f_{il}(t), \tag{1.4}$$

в котором в случае механических граничных условий (при $i = 1, 2$)

$$\begin{aligned}
 (g_{1kl}, g_{2kl}) &= (1, -\mu_k), \\
 (f_{1l}(t), f_{2l}(t)) &= \mp \int_0^s (Y_{nl}, X_{nl}) ds + (c_{1l}, c_{2l}),
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

если на границе заданы усилия, и

$$\begin{aligned}
 (g_{1kl}, g_{2kl}) &= (p_k, q_k), \\
 (f_{1l}(t), f_{2l}(t)) &= (u_l^* + \omega_3 y - u_{0l}, u_l^* - \omega_3 x - v_{0l}),
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

когда на границе заданы перемещения u_l^* , v_l^* ; в случае электромагнитных граничных условий (при $i = 3, 4$)

$$\begin{aligned}
 (g_{3kl}, g_{4kl}) &= (-\nu_k, -\rho_k), \\
 (f_{3l}(t), f_{4l}(t)) &= \mp \int_0^s (D_{nl}, B_{nl}) ds + (c_{3l}, c_{4l}),
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

если на границе заданы векторы индукции поля,

$$\begin{aligned}
 (g_{3kl}, g_{4kl}) &= (r_k, h_k), \\
 (f_{3l}(t), f_{4l}(t)) &= (\varphi_l^*(t) - \varphi_0 + c_{3l}, \psi_l^*(t) - \psi_0 + c_{4l}),
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

когда на границе заданы потенциалы поля $\varphi_l^*(t)$, $\psi_l^*(t)$;

$$\begin{aligned}
 p_k &= s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} + (g_{11}\mu_k - g_{21})\nu_k + (p_{11}\mu_k - p_{21})\rho_k, \\
 q_k &= s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} + \left(g_{12} - \frac{g_{22}}{\mu_k} \right) \nu_k + \left(p_{12} - \frac{p_{22}}{\mu_k} \right) \rho_k; \\
 r_k &= g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})\nu_k - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\rho_k, \\
 h_k &= p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\nu_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k;
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}
 v_k &= \frac{\Delta_{1k}}{\Delta_{0k}}, \quad \rho_k = \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{0k}}, \quad \Delta_{0k} = \begin{vmatrix} l_{2\beta}(\mu_k) & l_{2\nu}(\mu_k) \\ l_{2\nu}(\mu_k) & l_{2\chi}(\mu_k) \end{vmatrix}, \\
 \Delta_{1k} &= \begin{vmatrix} -l_{3g}(\mu_k) & l_{2\nu}(\mu_k) \\ -l_{3p}(\mu_k) & l_{2\chi}(\mu_k) \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2k} = \begin{vmatrix} l_{2\beta}(\mu_k) & -l_{3g}(\mu_k) \\ l_{2\nu}(\mu_k) & -l_{3p}(\mu_k) \end{vmatrix};
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

c_{ij} , u_0 , v_0 , φ_0 , ψ_0 – постоянные, произвольные на одном из контуров; ω_3 – угол поворота пластинки как целой. Верхние знаки перед интегралами выбираются для внешнего контура области L_0 , нижние знаки – для контуров отверстий.

Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в областях S_k , ограниченных контурами L_{kl} , получаемыми из L_l аффинными преобразованиями (1.1). В общем случае они имеют вид [15]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{r=1}^R A_{kr}^0 \ln(z_k - z_{kr}^0) + \Phi_k^*(z_k). \tag{1.11}$$

Здесь Γ_k – постоянные, равные нулю для конечной области и определяемые для бесконечной области из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, v_k, \mu_k v_k, \rho_k, \mu_k \rho_k \right) \Gamma_k = \\
 = \left(\sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, 2\omega_3^\infty, -D_y^\infty, D_x^\infty, -B_y^\infty, B_x^\infty \right)
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

при задании на бесконечности компонент векторов индукции поля или из системы

$$\begin{aligned}
 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0 \right) \Gamma_k = \\
 = \left(\sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, 2\omega_3^\infty, -E_x^\infty, -E_y^\infty, -H_x^\infty, -H_y^\infty \right)
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

при задании на бесконечности компонент векторов напряженностей поля; A_{kl} – постоянные, определяемые из системы уравнений

$$\begin{aligned}
 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, p_k, q_k, v_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0 \right) i A_{kl} = \\
 = \left(\frac{Y_l}{2\pi}, -\frac{X_l}{2\pi}, 0, 0, -\frac{Q_{el}}{2\pi}, -\frac{Q_{ml}}{2\pi}, 0, 0 \right);
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

X_l , Y_l и Q_{el} , Q_{ml} – компоненты главного вектора внешних усилий и суммарные электрический и магнитный заряды на контурах L_l ; A_{kj}^0 – постоянные, определяемые из системы, получаемой из (1.14) заменой в ней A_{kl} , X_l , Y_l , Q_{el} , Q_{ml} соответственно на A_{kl}^0 и X_r^0 , Y_r^0 , Q_{er}^0 , Q_{mr}^0 ; $\Phi_k^*(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k , ограниченных контурами L_{kl} , получаемыми из L_l аффинными преобразованиями (1.1). Последние функции определяются из граничных условий (1.4).

Преобразуем некоторые уравнения систем (1.12) – (1.14) для более наглядного выделения в них элементов плоской задачи теории упругости анизотропного тела и

элементов учета пьезосвойств пластинки. С этой целью эти уравнения преобразуем так, чтобы они не содержали p_k и q_k .

В раскрытом виде характеристическое уравнение (1.2) имеет вид

$$l_{4s}(\mu) \left[l_{2\beta}(\mu) l_{2\chi}(\mu) - l_{2\nu}^2(\mu) \right] - l_{3g}(\mu) \left[l_{3g}(\mu) l_{2\chi}(\mu) - l_{3p}(\mu) l_{2\nu}(\mu) \right] - l_{3p}(\mu) \left[l_{3p}(\mu) l_{2\beta}(\mu) - l_{3g}(\mu) l_{2\nu}(\mu) \right] = 0. \quad (1.15)$$

Характеристическое уравнение (1.15) не может иметь вещественных корней [15, 17], в том числе и равных нулю, т. е. $\mu_k \neq 0$. В нем также $l_{2\beta}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k) \neq 0$, иначе это уравнение не содержало бы полинома $l_{4s}(\mu_k)$ с коэффициентами деформации и не соответствовало бы задаче электромагнитоупругости. Разделив обе части уравнения (1.15) на отличное от нуля $\mu_k \left(l_{2\beta}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k) \right)$, получим и такой вид характеристического уравнения:

$$s_{11}\mu_k^3 - 2s_{16}\mu_k^2 + (2s_{12} + s_{66})\mu_k - 2s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} + v_k \left(g_{11}\mu_k^2 - (g_{21} + g_{16})\mu_k + (g_{12} + g_{26}) - \frac{g_{22}}{\mu_k} \right) + \rho_k \left(p_{11}\mu_k^2 - (p_{21} + p_{16})\mu_k + (p_{12} + p_{26}) - \frac{p_{22}}{\mu_k} \right) = 0. \quad (1.16)$$

Исходя из выражений для p_k и q_k (1.9), имеем

$$q_k - \mu_k p_k = \frac{s_{22}}{\mu_k} - s_{26} + s_{16}\mu_k^2 - s_{11}\mu_k^3 + v_k \left(-\frac{g_{22}}{\mu_k} + g_{12} + g_{21}\mu_k - g_{11}\mu_k^2 \right) + \rho_k \left(-\frac{p_{22}}{\mu_k} + p_{12} + p_{21}\mu_k - p_{11}\mu_k^2 \right). \quad (1.17)$$

Подставив в последнее выражение значение $s_{11}\mu_k^3$ из уравнения (1.17), находим

$$q_k - \mu_k p_k = \frac{s_{22}}{\mu_k} - s_{26} + s_{16}\mu_k^2 - s_{11}\mu_k^3 + v_k \left(-\frac{g_{22}}{\mu_k} + g_{12} + g_{21}\mu_k - g_{11}\mu_k^2 \right) + \rho_k \left(-\frac{p_{22}}{\mu_k} + p_{12} + p_{21}\mu_k - p_{11}\mu_k^2 \right) = 2\frac{s_{22}}{\mu_k} - 3s_{26} + (2s_{12} + s_{66})\mu_k - s_{16}\mu_k^2 + v_k \left(-\frac{2g_{22}}{\mu_k} + 2g_{12} + g_{26} - g_{16}\mu_k \right) + \rho_k \left(-\frac{2p_{22}}{\mu_k} + 2p_{12} + p_{26} - p_{16}\mu_k \right). \quad (1.18)$$

В связи с этим четвертое уравнение системы (1.12) примет вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\mu_k} \left[1 - \frac{v_k}{s_{22}} \left(g_{22} - \frac{2g_{12} + g_{26}}{2} \mu_k + \frac{g_{16}}{2} \mu_k^2 \right) - \frac{\rho_k}{s_{22}} \left(p_{22} - \frac{2p_{12} + p_{26}}{2} \mu_k + \frac{p_{16}}{2} \mu_k^2 \right) \right] \Gamma_k = \frac{1}{2s_{22}} \left[2\omega_3^\infty + 3s_{26}\sigma_y^\infty + (2s_{12} + s_{66})\tau_{xy}^\infty + s_{16}\sigma_x^\infty \right]. \quad (1.19)$$

Преобразуем уравнение (1.19), учитывая первые три уравнения системы (1.12). Окончательно систему (1.12) запишем в виде

$$\begin{aligned}
 & 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \left[1 - \frac{v_k}{s_{22}} \left(g_{22} - \frac{2g_{12} + g_{26}}{2} \mu_k + \frac{g_{16}}{2} \mu_k^2 \right) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{\rho_k}{s_{22}} \left(p_{22} - \frac{2p_{12} + p_{26}}{2} \mu_k + \frac{p_{16}}{2} \mu_k^2 \right) \right], v_k, \mu_k v_k, \rho_k, \mu_k \rho_k \right\} \Gamma_k = \\
 & = \left\{ \sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, \frac{1}{2s_{22}} \left[2\omega_3^\infty + 3s_{26}\sigma_y^\infty + (2s_{12} + s_{66})\tau_{xy}^\infty + s_{16}\sigma_x^\infty \right], \right. \\
 & \quad \left. -D_y^\infty, D_x^\infty, -B_y^\infty, B_x^\infty \right\}. \tag{1.20}
 \end{aligned}$$

Если на бесконечности заданы векторы напряженностей поля, то по аналогии со случаем задания векторов индукций система уравнений (1.13) примет вид:

$$\begin{aligned}
 & 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \left[1 - \frac{v_k}{s_{22}} \left(g_{22} - \frac{2g_{12} + g_{26}}{2} \mu_k + \frac{g_{16}}{2} \mu_k^2 \right) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{\rho_k}{s_{22}} \left(p_{22} - \frac{2p_{12} + p_{26}}{2} \mu_k + \frac{p_{16}}{2} \mu_k^2 \right) \right], v_k, \mu_k v_k, \rho_k, \mu_k \rho_k \right\} \Gamma_k = \\
 & = \left\{ \sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, \frac{1}{2s_{22}} \left[2\omega_3^\infty + 3s_{26}\sigma_y^\infty + (2s_{12} + s_{66})\tau_{xy}^\infty + s_{16}\sigma_x^\infty \right], \right. \\
 & \quad \left. -E_x^\infty, -E_y^\infty, -H_x^\infty, -H_y^\infty \right\}. \tag{1.21}
 \end{aligned}$$

Заменяя в правых частях 3-го и 4-го уравнений системы (1.14) коэффициенты p_k и q_k их выражениями по формулам (1.9) и используя первые два ее уравнения, окончательно (1.14) запишем в виде

$$\begin{aligned}
 & 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2 \left(1 + \frac{v_k g_{11} + \rho_k p_{11}}{\mu_k s_{11}} \right), \frac{1}{\mu_k} \left(1 - \frac{v_k g_{22} - \rho_k p_{22}}{s_{22}} \right), v_k, r_k^0, \rho_k, h_k^0 \right\} i A_{kl} = \\
 & = \left\{ \frac{Y_l}{2\pi}, -\frac{X_l}{2\pi}, -\frac{s_{16}X_l + s_{12}Y_l + g_{21}Q_{el} + p_{21}Q_{ml}}{2\pi s_{11}}, \right. \\
 & \quad \left. \frac{s_{12}X_l + s_{26}Y_l + g_{12}Q_{el} + p_{12}Q_{ml}}{2\pi s_{22}}, -\frac{Q_{el}}{2\pi}, 0, -\frac{Q_{ml}}{2\pi}, 0 \right\}. \tag{1.22}
 \end{aligned}$$

Система для определения A_{kj}^0 получается из (1.22), если в ней заменить A_{kl} и X_l, Y_l, Q_{el}, Q_{ml} соответственно на A_{kl}^0 и $X_r^0, Y_r^0, Q_{er}^0, Q_{mr}^0$.

Таким образом, неизвестными в комплексных потенциалах (1.11) остаются только функции $\Phi_k^*(z_k)$. После определения этих функций из граничных условий на контурах пластинки комплексные потенциалы будут известными и по ним можно вычислять основные характеристики ЭМУС (напряжения, компоненты векторов индукций и напряженностей, перемещения и потенциалы поля). В частности, для основных напряжений и компонент векторов индукций и напряженностей имеют место формулы

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi_k'(z_k); \tag{1.23}$$

$$(D_x, D_y, E_x, E_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (v_k \mu_k, -v_k, r_k^0, \mu_k r_k^0) \Phi'_k(z_k); \quad (1.24)$$

$$(B_x, B_y, H_x, H_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\rho_k \mu_k, -\rho_k, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi'_k(z_k). \quad (1.25)$$

По основным напряжениям и компонентам векторов индукций можно найти также напряжения и компоненты векторов индукции и напряженностей на любых площадках с нормалью n и касательной s , используя формулы [17, 18]

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2(nx) + \sigma_y \cos^2(ny) + 2\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \sigma_s &= \sigma_x \cos^2(ny) + \sigma_y \cos^2(nx) - 2\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny) \\ \tau_{ns} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos(nx) \cos(ny) + \tau_{xy} (\cos^2(nx) - \cos^2(ny)); \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} D_n &= D_x \cos^2(nx) + D_y \cos^2(ny), \\ B_n &= B_x \cos^2(nx) + B_y \cos^2(ny). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Заметим, что по аналогии между теорией напряжений и теорией деформацией из последних равенств следуют важные при исследованиях деформаций соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \varepsilon_x \cos^2(nx) + \varepsilon_y \cos^2(ny) + \gamma_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \varepsilon_s &= \varepsilon_x \cos^2(ny) + \varepsilon_y \cos^2(nx) - \gamma_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \gamma_{ns} &= 2(\varepsilon_y - \varepsilon_x) \cos(nx) \cos(ny) + \gamma_{xy} (\cos^2(nx) - \cos^2(ny)). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Как частные случаи из приведенного решения задачи электромагнитоупругости (ЭМУ) следуют решения задач электроупругости (ЭУ), магнитоупругости (МУ) и теории упругости (ТУ). Эти решения получаются из приведенного решения, если в нем принять равными нулю соответственно p_{ij} , v_{ij} (в задаче ЭУ), g_{ij} , v_{ij} (в задаче МУ) или и те и другие (в задаче ТУ) [19]. Но для проведения численных исследований во всех этих случаях можно пользоваться программой решения общей задачи электромагнитоупругости, проводя вычисления для модельного материала с постоянными

$$g'_{ij} = \lambda_g g_{ij}, \quad p'_{ij} = \lambda_p p_{ij}, \quad v'_{ij} = \lambda_{gp} v_{ij}, \quad (1.29)$$

где λ_g , λ_p , λ_{gp} – пьезопараметры модельного материала. При этом для задач ЭМУ нужно принять $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} = 1$, а для других задач, как следует из вычислительных экспериментов, эти параметры нужно принять такими: $\lambda_g = 1$, $\lambda_p = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ для задач ЭУ; $\lambda_p = 1$, $\lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ для задач МУ; $\lambda_p = \lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ для задач ТУ.

Также заметим, что по указанной общей программе можно получать результаты по решению задачи электромагнитостатики для «абсолютно жесткой пластинки». В этом случае следует рассмотреть модельный упругий материал с постоянными $s'_{ij} = \lambda_s s_{ij}$ и при решении задачи электромагнитостатики принять $\lambda_s \leq 10^{-3}$.

2. Комплексные потенциалы электромагнитоупругости. Если пьезопластинка обладает вязкоупругими свойствами, то с течением времени после момента приложения внешних воздействий упругие постоянные, и прежде всего коэффициенты деформации ее материала, в уравнениях состояния изменятся, а, следовательно, изме-

няется и ЭМУС пластинки. И если общее мгновенно упругое решение задачи (решение для начального состояния) представляется произведением рациональной функции упругих постоянных на функции координат, то по принципу Вольтерра [20], заменив в решении упругие постоянные соответствующими временными операторами и определив воздействия получившихся операторных функций на функции координат, найдем ЭМУС пластинки в любой момент времени. Но для многосвязных пластин таких аналитических решений получить не удастся. В этом случае для определения ЭМУС вязкоупругой пьезопластики в некоторый момент времени можно соответствующими операторными преобразованиями найти значения упругих постоянных для различных моментов времени и решить для такого набора постоянных задачу электромагнитоупругости. Но это приводит к громоздким вычислительным процессам.

В случае многосвязной области удобнее разложить все решение задачи в ряд по малому параметру, связанному с изменением некоторой упругой постоянной и затем в этом решении, используя некоторое условие на совокупность упругих постоянных, выразить малый параметр через все упругие постоянные, заменить эти постоянные временными операторами, а, следовательно, и малый параметр совокупностью временных операторов и использовать это для определения ЭМУС в любой момент времени. В роли такого параметра может выступать изменение некоторого из коэффициентов упругих деформаций в уравнениях закона Гука.

Будем считать, что со временем после приложения внешних воздействий пьезосвойства пластинки меняются незначительно и ими можно пренебречь и изучить только упругие деформации, связанные с напряжениями. Тогда первые три уравнения связи относительных деформаций с напряжениями для ортотропной пластинки с главными направлениями вдоль осей координат имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_y + s_{13}\sigma_z, \\ \varepsilon_y &= s_{12}\sigma_x + s_{22}\sigma_y + s_{23}\sigma_z, \\ \varepsilon_z &= s_{13}\sigma_x + s_{23}\sigma_y + s_{33}\sigma_z,\end{aligned}\quad (2.1)$$

в котором для ортотропного материала с главными направлениями вдоль осей координат

$$\begin{aligned}s_{11} &= \frac{1}{E_1}, \quad s_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad s_{33} = \frac{1}{E_3}, \\ s_{12} &= -\frac{\nu_{n12}}{E_1} = -\frac{\nu_{n21}}{E_2}, \quad s_{13} = -\frac{\nu_{n13}}{E_1} = -\frac{\nu_{n31}}{E_3}, \quad s_{23} = -\frac{\nu_{n23}}{E_2} = -\frac{\nu_{n32}}{E_3};\end{aligned}\quad (2.2)$$

E_i , ν_{nij} – модули Юнга и коэффициенты Пуассона для соответствующих направлений.

Из приведенных выше постоянных наименьшие значения принимают коэффициенты Пуассона. В качестве малого параметра можно взять изменение с течением времени одного из этих коэффициентов, например ν_{n12} [21, 22], то есть разность

$$\lambda = \nu_{n12} - \nu_{n12}^0, \quad (2.3)$$

в которой ν_{n12}^0 – мгновенное начальное значение коэффициента Пуассона ν_{n12} . Здесь и далее, чтобы отличать коэффициенты Пуассона от коэффициентов электромагнитной индукции ν_{ij} , для коэффициентов Пуассона в индексах добавлена буква «п».

Из равенства (2.3), а затем из (2.1) находим выражения

$$\nu_{n12} = \nu_{n12}^0 + \lambda, \quad s_{12} = s_{12}^0 - \lambda s_{11}; \quad p_k = p_{k0} + \lambda p_{k1}; \quad q_k = q_{k0} + \lambda q_{k1}, \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} s_{12}^0 &= -v_{n12}^0 s_{11}, \\ p_{k0} &= \left(\mu_k^2 - v_{n12}^0 \right) s_{11} - s_{16} \mu_k + \left(g_{11} \mu_k - g_{21} \right) v_k + \left(p_{11} \mu_k - p_{21} \right) \rho_k, \\ q_{k0} &= -\mu_k v_{n12}^0 s_{11} + \frac{s_{22}}{\mu_k} - s_{26} + \left(g_{12} - \frac{g_{22}}{\mu_k} \right) v_k + \left(p_{12} - \frac{p_{22}}{\mu_k} \right) \rho_k, \\ p_{k1} &= -s_{11}; \quad q_{k1} = -s_{11} \mu_k. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Разложим входящие в выражения (1.11) постоянные Γ_k , A_{kl} , A_{kr}^0 и функции $\Phi_k^*(z_k)$ в ряды по малому параметру λ [16]

$$\Gamma_k = \sum_{j=0} \lambda^j \Gamma_{jk}; \quad A_{kl} = \sum_{j=0} \lambda^j A_{jkl}; \quad A_{kr}^0 = \sum_{j=0} \lambda^j A_{jkr}^0; \quad \Phi_k^*(z_k) = \sum_{j=0} \lambda^j \Phi_{jk}^*(z_k). \quad (2.6)$$

Учитывая эти соотношения, функцию (1.11) представим в виде

$$\Phi_k(z_k) = \sum_{j=0} \lambda^j \Phi_{jk}(z_k), \quad (2.7)$$

где функция приближений

$$\Phi_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{jkl} \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} A_{jkr}^0 \ln(z_k - z_{kr}^0) + \Phi_{jk}^*(z_k); \quad (2.8)$$

$\Phi_{jk}^*(z_k)$ – функции, голоморфные в областях S_k , ограниченных контурами L_{kl} .

Подставив с учетом равенств $s_{12} = s_{12}^0 - \lambda s_{11}$ и (2.5) разложения (2.6) в системы (1.20) – (1.22) и сравнив в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях λ , для определения постоянных Γ_{jk} , A_{jkl} получим следующие последовательности систем уравнений:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \left[1 - \frac{v_k}{s_{22}} \left(g_{22} - \frac{2g_{12} + g_{26}}{2} \mu_k + \frac{g_{16}}{2} \mu_k^2 \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\rho_k}{s_{22}} \left(p_{22} - \frac{2p_{12} + p_{26}}{2} \mu_k + \frac{p_{16}}{2} \mu_k^2 \right) \right], v_k, \mu_k v_k, \rho_k, \mu_k \rho_k \right\} \Gamma_{0k} = \\ = \left\{ \sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, \frac{1}{2s_{22}} \left[2\omega_3^\infty + 3s_{26} \sigma_y^\infty + \left(s_{66} - 2v_{n12}^0 s_{11} \right) \tau_{xy}^\infty + \right. \right. \\ \left. \left. + s_{16} \sigma_x^\infty \right], -D_y^\infty, D_x^\infty, -B_y^\infty, B_x^\infty \right\}; \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \left[1 - \frac{v_k}{s_{22}} \left(g_{22} - \frac{2g_{12} + g_{26}}{2} \mu_k + \frac{g_{16}}{2} \mu_k^2 \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\rho_k}{s_{22}} \left(p_{22} - \frac{2p_{12} + p_{26}}{2} \mu_k + \frac{p_{16}}{2} \mu_k^2 \right) \right], v_k, \mu_k v_k, \rho_k, \mu_k \rho_k \right\} \Gamma_{1k} = \\ = \left\{ 0, 0, 0, -\frac{s_{11}}{2s_{22}} \tau_{xy}^\infty, 0, 0, 0, 0 \right\}; \\ \Gamma_{jk} = 0 \quad (j \geq 2); \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
 & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2 \left[1 + \frac{v_k g_{11} + \rho_k p_{11}}{\mu_k s_{11}} \right], \frac{1}{\mu_k} \left[1 - \frac{v_k g_{22} - \rho_k p_{22}}{s_{22}} \right], \right. \\
 & \quad \left. v_k, r_k^0, \rho_k, h_k^0 \right\} i A_{0kl} = \\
 & = \left\{ \frac{Y_l}{2\pi}, -\frac{X_l}{2\pi}, -\frac{s_{16} X_l - v_{n12}^0 s_{11} Y_l + g_{21} Q_{el} + p_{21} Q_{ml}}{2\pi s_{11}}, \right. \\
 & \quad \left. \frac{-v_{n12}^0 s_{11} X_l + s_{26} Y_l + g_{12} Q_{el} + p_{12} Q_{ml}}{2\pi s_{22}}, -\frac{Q_{el}}{2\pi}, 0, -\frac{Q_{ml}}{2\pi}, 0 \right\}; \\
 & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2 \left[1 + \frac{v_k g_{11} + \rho_k p_{11}}{\mu_k s_{11}} \right], \frac{1}{\mu_k} \left[1 - \frac{v_k g_{22} - \rho_k p_{22}}{s_{22}} \right], \right. \\
 & \quad \left. v_k, r_k^0, \rho_k, h_k^0 \right\} i A_{1kl} = \\
 & = \{0, 0, -s_{11} Y_l, -s_{11} X_l, 0, 0, 0, 0\}, \\
 & A_{jkl} = 0 \quad (j \geq 2). \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

Аналогичные соотношения имеют место для A_{jkr}^0 . Они получаются из (2.10) заменой в них $A_{jkl}, X_l, Y_l, Q_{el}, Q_{ml}$ соответственно на A_{jkl}^0 и $X_r^0, Y_r^0, Q_{er}^0, Q_{mr}^0$.

Комплексные потенциалы приближений $\Phi_{jk}(z_k)$ должны удовлетворять соответствующим граничным условиям. Подставив (2.7) в граничные условия (1.4) и приравняв в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра λ , получим рекуррентную последовательность граничных условий для определения комплексных потенциалов приближений. Механические граничные условия для неподкрепленного контура получаем в виде

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k) \Phi_{jk}(t_k) = \delta_{j0}(c_{1l}, c_{2l}). \tag{2.11}$$

Если на контуре заданы перемещения, то получим

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_{k0}, q_{k0}) \Phi_{jk}(t_k) = & -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1 - \delta_{j0})(p_{k1}, q_{k1}) \Phi_{j-1,k}(t_k) + \\
 & + \delta_{j0}(u_{l*} - u_0, v_{l*} - v_0) + (\omega_{j3y}, -\omega_{j3x}). \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

Электромагнитные граничные условия принимают такой вид:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (v_k, \rho_k) \Phi_{jk}(t_k) = \delta_{j0}(c_{3l}, c_{4l}) \tag{2.13}$$

при задании на контуре электрической и магнитной индукций, и

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (r_k^0, h_k^0) \Phi_{jk}(t_k) = \delta_{j0}(\varphi_{l*} + c_{3l}, \psi_{l*} + c_{4l}), \tag{2.14}$$

если на контуре заданы электрические и магнитные потенциалы.

3. Определение вязкоупругого состояния пластинки по комплексным потенциалам. После определения из граничных условий функций приближений $\Phi_{jk}(z_k)$

можно найти полностью комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ для любого момента времени, а следовательно, и основные характеристики ЭМУС в любое время, заменив степени малого параметра λ^j временными операторами.

Учитывая, что относительное изменение объема параллелепипеда, построенного на осях главной системы координат, равно первому инварианту тензора деформаций ($\mathcal{G} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$), на основе соотношений (2.1) в случае ортотропного тела имеем

$$\mathcal{G} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (s_{11} + s_{12} + s_{13})\sigma_x + (s_{12} + s_{22} + s_{23})\sigma_y + (s_{13} + s_{23} + s_{33})\sigma_z. \quad (3.1)$$

При действии на тело гидростатического давления (всестороннего растяжения-сжатия), когда $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$, из последнего равенства получим равенство

$$\mathcal{G} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{K} p, \quad (3.2)$$

где

$$\frac{1}{K} = s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2s_{12} + 2s_{13} + 2s_{23}; \quad (3.3)$$

K – модуль объемной деформации тела для растяжения-сжатия, который со временем не изменяется [23–27].

Подставляя в (3.3) представления (2.2), получим

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3} - \frac{2\nu_{n12}}{E_1} - \frac{2\nu_{n13}}{E_1} - \frac{2\nu_{n23}}{E_2}. \quad (3.4)$$

В связи с тем, что в литературе отсутствуют значения модуля Юнга E_3 , коэффициентов Пуассона ν_{n13} , ν_{n23} и их реологические постоянные, примем [22]

$$s_{33} = (s_{11} + s_{22})/2; \quad s_{13} = s_{23} = s_{12}, \quad (3.5)$$

т. е.

$$\frac{1}{E_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right); \quad \frac{\nu_{n13}}{E_1} = \frac{\nu_{n23}}{E_2} = \frac{\nu_{n12}}{E_1}. \quad (3.6)$$

Тогда из (3.4) получим равенство

$$\frac{1}{K} = \frac{3}{2E_1} + \frac{3}{2E_2} - \frac{6\nu_{n12}}{E_1}, \quad (3.7)$$

из которого следует, что

$$\nu_{n12} = \frac{1}{6} \left(\frac{3}{2} + \frac{3E_1}{E_2} - \frac{E_1}{K} \right). \quad (3.8)$$

Заменив в последних формулах модули Юнга временными операторами (3.11) с учетом постоянства во времени K , для ν_{n12} получим операторные представления

$$\nu_{n12}^* = \frac{1}{6} \left(\frac{3}{2} + \frac{3E_1^*}{E_2^*} - \frac{E_1^*}{K^0} \right), \quad (3.9)$$

где K^0 – постоянное значение модуля объемной деформации (3.7), в котором E_i принимают значения E_i^0 ;

$$E_1^* = E_1^0 \left[1 - \delta_1^* \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_1^* - \delta_1^*) \right], \quad \frac{1}{E_2^*} = \frac{1}{E_2^0} \left[1 + \delta_2^* \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_2^*) \right]. \quad (3.10)$$

Если изменения технических постоянных со временем представить с помощью операторов Работнова Ю. Н. [24], то

$$\begin{aligned} E_i^* &= E_i^0 \left[1 - \delta_i^* \mathcal{D}_{\alpha^*}^* \left(-\beta_i^* - \delta_i^* \right) \right]; \\ \nu_{12}^* &= \nu_{12}^0 \left[1 + \delta^* \mathcal{D}_{\alpha^*}^* \left(-\beta^* \right) \right]; \\ G_{ij}^* &= G_{ij}^0 \left[1 - \delta_{ij}^* \mathcal{D}_{\alpha^*}^* \left(-\beta_{ij}^* - \delta_{ij}^* \right) \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

где E_i^0 , ν_{n12}^0 , G_{ij}^0 – мгновенные значения соответствующих постоянных (остальные ν_{nij} выражаются через ν_{n12});

$$\mathcal{D}_{\alpha^*}^*(\beta, t - \tau) = (t - \tau)^{\alpha^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n (t - \tau)^{n(1+\alpha^*)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha^*)]} \quad (3.12)$$

– оператор Работнова Ю. Н.; $\Gamma(1+\alpha^*)$ ($-1 < \alpha^* < 0$) – гамма-функция; δ_i^* , β_i^* и δ_{ij}^* , β_{ij}^* – реологические постоянные материала, связанные с изменением E_i и G_{ij} во времени; δ^* , β^* – реологические постоянные, связанные с изменением ν_{n12} во времени.

При этом, чтобы для пластинки определить степени малого параметра λ , следует учитывать (2.3). Заменяя в (2.3) ν_{n12}^* его временным оператором (3.9), получим [16]

$$\lambda = D_1 \cdot \mathcal{D}_{\alpha^*}^* \left(-\beta_1^* - \delta_1^* \right) + D_2 \cdot \mathcal{D}_{\alpha^*}^* \left(-\beta_2^* \right); \quad (3.13)$$

$$D_1 = \frac{\delta_1^*}{4} \left[\frac{E_1^0}{E_2^0} \frac{\delta_2^*}{\beta_1^* - \beta_2^* + \delta_1^*} + 1 - 4\nu_{n12}^0 \right]; \quad D_2 = \frac{\delta_2^*}{4} \frac{E_1^0}{E_2^0} \frac{\beta_1^* - \beta_2^*}{\beta_1^* - \beta_2^* + \delta_1^*}. \quad (3.14)$$

Исходя из формулы (2.3) и из свойств возведения оператора в степень, определяем

$$\lambda^j = \left(\nu_{n12}^* - \nu_{n12}^0 \right)^j = \left(\frac{\nu_{12}^0}{\beta_1^*} \right)^j \frac{1}{(j-1)!} \frac{\partial \mathcal{D}_{\alpha^*}^* \left(-\beta_1^* \right)}{\partial \left(-\beta_1^* \right)^{j-1}}. \quad (3.15)$$

Возведя λ по формуле (3.15) в степень j , получаем

$$\begin{aligned} \lambda^j &= \sum_{k=0}^j C_j^k D_1^{j-k} D_2^k \mathcal{D}_{\alpha^*}^{*j-k} \left(-\beta_1^* - \delta_1^* \right) \cdot \mathcal{D}_{\alpha^*}^{*k} \left(-\beta_2^* \right) = \\ &= \sum_{k=0}^j C_j^k D_1^{j-k} D_2^k \frac{\mathcal{D}_{\alpha^*}^{*k} \left(-\beta_2^* \right) - \mathcal{D}_{\alpha^*}^{*j-k} \left(-\beta_1^* - \delta_1^* \right)}{-\beta_2^* + \beta_1^* + \delta_1^*}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Вычислив λ^j по формуле (3.16) и подставив его, как и ранее, в выражение (2.7), определим функции $\Phi_k(z_k)$ и их производные, следовательно, и основные характеристики ЭМУС (1.23), (1.25) в любой момент времени.

4. Решение частных задач для бесконечной пластинки с отверстиями и прямолинейными разрезами. Рассмотрим бесконечную пьезопластинку с конечным числом отверстий. Контуры отверстий загружены самоуравновешенными внешними усилиями или жестко подкреплены, внутренние сосредоточенные воздействия отсутствуют. На бесконечности заданы σ_x^∞ , σ_y^∞ , τ_{xy}^∞ , компоненты векторов

напряженностей электромагнитного поля $E_x^\infty, E_y^\infty, H_x^\infty, H_y^\infty$ (или индукций $D_x^\infty, D_y^\infty, B_x^\infty, B_y^\infty$), угол поворота всей пластинки как целой $\omega_3^\infty = 0$. При решении задачи об ЭМУС такой пластинки криволинейные контуры отверстий будем аппроксимировать дугами эллипсов и берегами прямолинейных разрезов, которые будем рассматривать также эллипсами, одна из полуосей которых равна нулю. При таком подходе общая задача сводится к решению задачи электромагнитоупругости для пластинки с конечным числом эллиптических отверстий. В связи с этим рассмотрим отнесенную к прямоугольной декартовой системе координат электромагнитоупругую пластинку, занимающую многосвязную область S (рис. 2), ограниченную контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с полуосями a_l, b_l , имеющими в локальных системах координат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах эллипсов L_l и направлениями осей $O_l x_l$ вдоль полуосей a_l эллипсов их параметрические уравнения

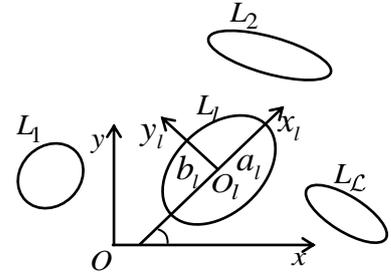


Рис. 2

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (4.1)$$

а в основной системе координат Oxy уравнения

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \quad (4.2)$$

где θ – параметр задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π ; x_{0l}, y_{0l} – координаты начала локальной системы $O_l x_l y_l$ в основной системе координат Oxy ; φ_l – угол между направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от Ox против часовой стрелки.

В данном случае комплексные потенциалы приближений (2.8) имеют вид

$$\Phi_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \Phi_{jkl}(z_k); \quad (4.3)$$

в котором Γ_{jk} – постоянные, вычисляемые по формулам (2.9); $\Phi_{jkl}(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k , ограниченных контурами L_{kl} , получаемыми из L_l аффинными преобразованиями (1.1). Для нахождения этих функций используем конформные отображения.

Отобразим конформно внешность единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности контуров L_{kl} по формулам [28]

$$z_k = z_{0kl} + R_{kl} (\zeta_{kl} + m_{kl} / \zeta_{kl}), \quad (4.4)$$

в которых

$$\begin{aligned} z_{0kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= [a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)] / 2, \\ m_{kl} &= [a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)] / 2R_{kl}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Тогда функции $\Phi_{kl}(z_k)$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$), голоморфные вне контуров L_{kl} и исчезающие на бесконечности, в областях переменных ζ_{kl} будут голоморфными вне кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ и

могут быть представлены рядами Лорана по отрицательным степеням ζ_{kl} , т. е.

$$\Phi_{jkl}(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{jkl n} \zeta_{kl}^{-n}. \text{ Поэтому для функций (4.3) и их производных имеем}$$

$$\Phi_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kln} a_{jkl n}, \quad (4.6)$$

$$\Phi'_{jkl}(t_k) = \Gamma_{jk} + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi'_{kln} a_{jkl n}, \quad (4.7)$$

где

$$\varphi_{kln} = \frac{1}{\zeta_{kl}^n}, \quad \varphi'_{kln} = -\frac{n}{R_{kl} \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}); \quad (4.8)$$

a_{kln} – произвольные постоянные, которые будем определять из граничных условий на контурах пластинки. Для многосвязных пластин этим условиям лучше удовлетворять в дифференциальной форме, чтобы в них не участвовали входящие в условия (1.4) произвольные постоянные. Дифференцируя условия (1.4) по дуге контура, получим

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ikl} \delta_{k,s} \Phi'_{jkl}(t_k) = \frac{df_{il}(t)}{ds} \quad (i = \overline{1, 4}). \quad (4.9)$$

При этом $\delta_{k,s} = \frac{dt_k}{ds} = \frac{x' + \mu_k y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$; x' , y' – производные переменных (4.2) по параметру

θ параметрического задания эллипсов (4.1); s – длина дуги контура.

Граничным условиям (4.9) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [29, 30]. Для этого выберем на каждом из контуров L_p ($p = \overline{1, \mathcal{L}}$) систему точек $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$ ($m = \overline{1, M_p}$), в которых удовлетворим граничным условиям. Получаем следующую систему уравнений для определения постоянных $a_{jkl n}$ zz:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(p_{k0}, q_{k0}, r_k^0, h_k^0 \right) \delta_{k,s} \varphi'_{kln} (t_{kpm}) a_{jkl n} + \right. \\ & \quad \left. + \left(\overline{p_{k0}}, \overline{q_{k0}}, \overline{r_k^0}, \overline{h_k^0} \right) \overline{\delta_{k,s} \varphi'_{kln} (t_{kpm}) a_{jkl n}} \right] = \frac{df_{ip}(t)}{ds} - \\ & - \sum_{k=1}^4 \left[\left(p_{k0}, q_{k0}, r_k^0, h_k^0 \right) \delta_{k,s} \Gamma_{jk} + \left(\overline{p_{k0}}, \overline{q_{k0}}, \overline{r_k^0}, \overline{h_k^0} \right) \overline{\delta_{k,s} \Gamma_{jk}} \right] - \\ & - \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \delta_j^0) \left[\left(p_{k1}, q_{k1}, r_k^0, h_k^0 \right) \delta_{k,s} \varphi'_{kln} (t_{kpm}) a_{j-1, kln} + \right. \\ & \quad \left. + \left(\overline{p_{k1}}, \overline{q_{k1}}, \overline{r_k^0}, \overline{h_k^0} \right) \overline{\delta_{k,s} \varphi'_{kln} (t_{kpm}) a_{j-1, kln}} \right] - \\ & - \sum_{k=1}^4 (1 - \delta_l^0) \left[\left(p_{k1}, q_{k1}, r_k^0, h_k^0 \right) \delta_{k,s} \Gamma_{j-1, k} + \right. \\ & \quad \left. + \left(\overline{p_{k1}}, \overline{q_{k1}}, \overline{r_k^0}, \overline{h_k^0} \right) \overline{\delta_{k,s} \Gamma_{j-1, k}} \right] \quad (p = \overline{1, \mathcal{L}}, \quad m = \overline{1, M_p}). \quad (4.10) \end{aligned}$$

Систему (4.10) будем решать методом сингулярного разложения [31, 32]. После нахождения псевдорешений этой системы функции $\Phi'_{jk}(z_k)$ и $\Phi'_k(z_k)$ будут известными и по ним можно вычислять основные характеристики ЭМУС (1.23), (1.25) в любой момент времени. Зная основные характеристики, можно найти также напряжения (1.26) и индукции (1.27) на произвольных площадках с нормалью n и касательной s , в случае необходимости и деформации (1.28). При этом, если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейный разрез-трещину, то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности напряжений, индукций и напряженностей (КИНИН) по формулам [33]

$$\begin{aligned} k_1^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[\mu_k^2 \sin^2 \varphi_l + \cos^2 \varphi_l + 2\mu_k \sin \varphi_l \cos \varphi_l \right] M_{kl}, \\ k_2^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[(1 - \mu_k^2) \cos \varphi_l \sin \varphi_l - \mu_k (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l) \right] M_{kl}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где

$$M_{kl} = -\frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln}. \quad (4.12)$$

Здесь верхний знак соответствует правому концу разреза в локальной системе координат $O_l x_l y_l$, нижний – к его левому концу.

Заметим, что для случая пластинки с одним отверстием или прямолинейным разрезом методом рядов получается точное аналитическое решение рассматриваемой задачи в виде

$$\Phi_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \frac{a_{jk11}}{\zeta_{k1}},$$

где a_{jk11} – коэффициенты, определяемые из решения системы 4-х (в задаче ЭМУ), 3-х (в задаче ЭУ или МУ) или 2-х (в задаче ТУ) линейных алгебраических уравнений.

5. Описание результатов численных исследований. Проведены численные исследования напряженно-деформированного состояния пьезопластин из следующих материалов: композит на основе $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ (материал М1) [15, 34, 35]; композит, упругие и электрические постоянные которого соответствуют кадмию селениду $CdSe$, а пьезомагнитные и магнитные – $BaTiO_3$ (М2) [15, 36]; композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют $PZT-4$, а пьезомагнитные и магнитные – $CoFe_2O_4$ -(М3) [15, 36]. При этом значения реологических постоянных α^* , β_1^* , β_2^* , δ_1^* , δ_2^* , как и в работах [22, 38], были найдены на основе анализа известных в литературе реологических постоянных и их изменений во времени постоянных E_i и G_{ij} .

При проведении расчетов количество приближений j по степеням малого параметра λ увеличивалось до тех пор, пока последующее приближение изменяло максимальные значения напряжений предыдущего приближения более, чем на 0,01 %. Для этого в рассмотренных случаях необходимо было оставлять от 5 до 10 приближений (степеней малого параметра λ). При этом количество членов в рядах (4.6) и (4.7) для каждого контура L_p и количество точек M_p на нем, в которых удовлетворились

граничные условия, увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности. При этом анализировались в случае свободного контура пластинки (первая основная задача) напряжения σ_n, τ_{ns} (чтобы они по модулю не превышали 10^{-3}), для жестко подкрепленного контура (вторая основная задача) деформации $\varepsilon_n, \gamma_{ns}$ (чтобы они по модулю не превышали 10^{-10}). Как показали исследования, для такого удовлетворения граничным условиям в рассмотренных задачах в зависимости от близости концентраторов напряжений друг к другу достаточно оставлять от 10 до 20 членов в рядах (4.6), (4.7) и на каждом контура выбирать около 300 точек. Для весьма близких расстояний между контурами в рядах оставалось до 100 членов и до 700 точек на каждом контуре, что приводило к переопределенной системе из $2 \times 4 \times 700$ уравнений.

Для растяжения усилиями $\sigma_y^\infty = p$ электромагнитоупругой пластинки с одним круговым отверстием ($b_1 = a_1$) с жестко подкрепленным контуром L_1 (рис. 3), с точностью до множителя p , в зависимости от времени начала приложения нагрузки, в табл. 1 приведены значения нормальных напряжений σ_n / p и σ_s / p соответственно на площадках, касательных и нормальных к контуру в двух наиболее характерных ее точках А и В, а на рис. 4 изображены графики изменения этих напряжений в точке А.

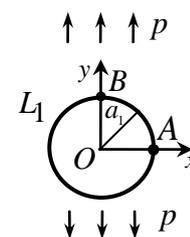


Рис. 3

Таблица 1
Значения напряжений в точках кругового отверстия
в зависимости от времени

Материал	Точка	Напряжение	t , час.									
			0	10	20	30	40	50	100	500	1000	1500
M1	A	σ_n	-0,031	-0,094	-0,107	-0,113	-0,117	-0,120	-0,127	-0,138	-0,141	-0,143
		σ_s	-0,011	-0,039	-0,045	-0,048	-0,050	-0,052	-0,056	-0,060	-0,061	-0,061
	B	σ_n	1,486	1,469	1,467	1,465	1,465	1,464	1,462	1,460	1,458	1,457
		σ_s	0,571	0,688	0,711	0,724	0,732	0,737	0,751	0,769	0,775	0,778
M2	A	σ_n	-0,021	-0,346	-0,377	-0,385	-0,387	-0,388	-0,388	-0,388	-0,388	-0,388
		σ_s	-0,007	-0,380	-0,479	-0,509	-0,518	-0,522	-0,524	-0,524	-0,524	-0,524
	B	σ_n	1,334	1,340	1,362	1,370	1,372	1,373	1,374	1,374	1,374	1,374
		σ_s	0,329	1,290	1,399	1,427	1,436	1,439	1,440	1,440	1,440	1,440
M3	A	σ_n	-0,038	-0,230	-0,262	-0,284	-0,301	-0,314	-0,350	-0,381	-0,382	-0,382
		σ_s	-0,013	-0,090	-0,097	-0,103	-0,108	-0,112	-0,128	-0,149	-0,150	-0,150
	B	σ_n	1,579	1,531	1,519	1,512	1,507	1,503	1,494	1,491	1,492	1,492
		σ_s	0,753	1,119	1,175	1,215	1,246	1,270	1,341	1,406	1,408	1,408

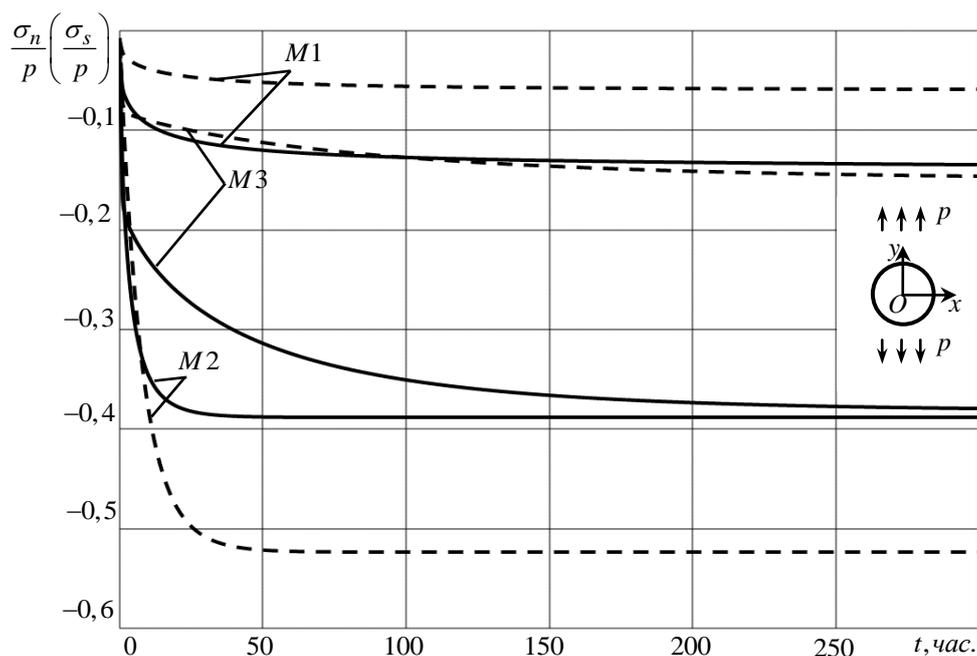


Рис. 4. Графики изменения во времени σ_n / p (сплошные линии) и σ_s / p (штриховые линии) в точке A пластинки с круговым отверстием.

Из данных табл. 1 и рис. 4 видно, что с течением времени около контура отверстия происходит значительное изменение напряженного состояния, причем наибольшие изменения значений напряжений происходят в первые 10 час., значительные изменения этих значений наблюдаются и позже, вплоть до 40–50 часов. После этого времени напряжения изменяются незначительно. Что же касается стационарного состояния, после которого напряженно-деформированное состояние не изменится, то в данном случае для пластинки из материалов М1, М2 и М3 оно устанавливается через 1000 час., 100 час., и 500 час. соответственно. При переходе в стационарное состояние максимальные напряжения по контуру отверстия (они наблюдаются в точке В) для пластинки из материала М1 составляют 4 %, из материала М2 – 3 %, из материала М3 – 7 %. При этом малые значения напряжений (в точке А) изменяются весьма значительно (для пластинки из М1 более 4 раз, из М2 – более 19 раз, из М3 – более 100 раз). Такого же порядка изменения значений напряжений наблюдаются в других точках контура. Это видно из рис. 5 и рис. 6, где в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси против часовой стрелки, изображены графики распределения соответственно напряжений σ_n и σ_s по всему контуру в начальном (сплошные линии) и в стационарном (штриховые линии) состояниях.

Большие изменения значений напряжений с течением времени наблюдаются и в случаях задач ЭУ, МУ и ТУ. Это видно из данных табл. 2, где для некоторых значений угла θ приведены значения напряжений для начального и стационарного времени. Как видно, для пластин из М2 и М3 значительно влияет учет магнитных свойств, для пластинки из М1 – учет электрических свойств. Причем эти влияния весьма значительны.

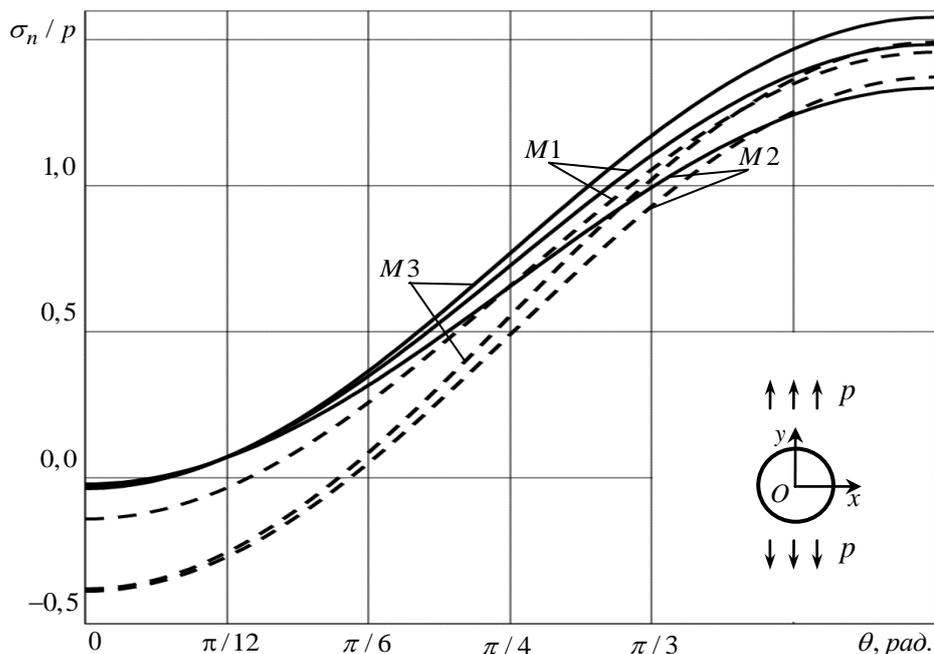


Рис. 5. Графики распределения σ_n / p по контуру кругового отверстия в пластинке из различных материалов в начальном (сплошные линии) и стационарном (штриховые линии) состояниях.

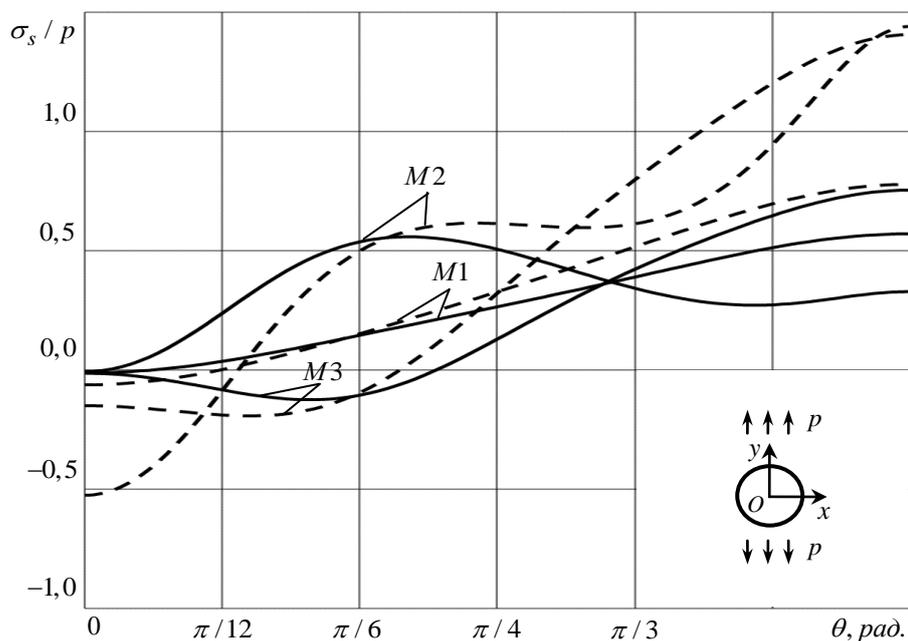


Рис. 6. Графики распределения σ_s / p вблизи контура кругового отверстия в пластинке из различных материалов в начальном (сплошные линии) и стационарном (штриховые линии) состояниях.

Следовательно, при исследованиях напряженно-деформированного состояния пьезопластин нельзя ограничиваться решением классической задачи ТУ, а нужно решать задачу ЭМУ. Более того, при действии электромагнитного поля в пластинке возникают значительные напряжения, которые можно определять только решением задачи

ЭМУ. Последнее видно из табл. 3, где для пластинки с одним круговым отверстием с жестко подкрепленным контуром приведены значения напряжений в случае действия на бесконечности электрического поля с напряженностью $E_y^\infty = \varepsilon$.

Таблица 2

Значения напряжений в некоторых точках пластинки с круговым отверстием в начальном и стационарном состояниях для различных задач

Материал	θ , рад.	Время	ЭМУ		ЭУ		МУ		ТУ	
			σ_n	σ_s	σ_n	σ_s	σ_n	σ_s	σ_n	σ_s
М1	0	нач.	-0,031	-0,011	-0,032	-0,011	-0,007	-0,002	-0,008	-0,003
		стац.	-0,143	-0,061	-0,144	-0,062	-0,127	-0,052	-0,128	-0,053
	$\pi/2$	нач.	1,486	0,571	1,486	0,572	1,480	0,482	1,480	0,483
		стац.	1,457	0,778	1,457	0,778	1,444	0,689	1,444	0,692
М2	0	нач.	-0,021	-0,007	-0,053	-0,023	-0,014	-0,005	-0,027	-0,012
		стац.	-0,388	-0,524	-0,523	-0,818	-0,390	-0,539	-0,683	-1,128
	$\pi/2$	нач.	1,334	0,329	1,373	0,419	1,348	0,306	1,448	0,413
		стац.	1,374	1,440	1,480	1,618	1,388	1,437	1,590	1,695
М3	0	нач.	-0,038	-0,013	-0,028	-0,011	0,097	0,026	0,113	0,039
		стац.	-0,382	-0,150	-0,600	-0,267	-0,398	-0,068	-0,598	-0,167
	$\pi/2$	нач.	1,579	0,753	1,726	0,864	1,557	0,294	1,661	0,393
		стац.	1,492	1,408	1,529	1,523	1,312	0,971	1,269	1,047

Таблица 3

Значения напряжений σ_n / ε в пластинке при действии $E_y^\infty = \varepsilon$

Материал	θ , рад.	t , час.									
		0	10	20	30	40	50	100	500	1000	1500
М1	0	5,39	5,24	5,22	5,20	5,19	5,19	5,17	5,15	5,14	5,13
	$\pi/2$	1,87	1,62	1,57	1,55	1,53	1,52	1,49	1,45	1,44	1,43
М2	0	0,16	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13
	$\pi/2$	0,16	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10
М3	0	11,61	10,82	10,67	10,56	10,49	10,43	10,28	10,19	10,19	10,19
	$\pi/2$	3,29	1,85	1,61	1,44	1,31	1,21	0,93	0,71	0,71	0,71

Существенно влияние на значения основных характеристик ЭМУС и их изменения во времени влияет количество отверстий. Это видно из данных табл. 4, табл. 5, где для случая действия усилий $\sigma_y^\infty = p$ на пластинку с двумя круговыми отверстиями ($a_2 = b_2 = b_1 = a_1$) с жестко подкрепленными контурами с точностью до множителя p приведены соответственно значения напряжений σ_n и σ_s вблизи контура левого отверстия в зависимости от угла θ и отношения c/a_1 , c – расстояние между контурами отверстий, в начальном и стационарном состояниях.

Из данных табл. 4, 5 видно, что напряжения в пластинке с течением времени изменяются, причем в зоне между включениями с уменьшением расстояния между ними напряжения значительно растут, а при переходе в стационарное состояние они претерпевают большие изменения. Наибольшие изменения напряжений наблюдаются в зоне перемычки, а максимальные изменения в точке при $\theta = 0$. Вдали от перемычки значения напряжений, как в начальном, так и в стационарном состоянии изменяются незначительно.

Таблица 4

Значения напряжений σ_n / p около контура левого отверстия в пластинке с двумя отверстиями в начальном и стационарном состояниях

Материал	θ , рад.	t, час.	c / a_1						
			∞	2	1	0,5	0,1	0,01	
М1	0	нач	-0,031	-0,185	-0,373	-0,629	-1,326	-3,06	
		стац	-0,143	-0,342	-0,593	-0,954	-2,026	-4,59	
	$\pi / 6$	нач	0,349	0,275	0,222	0,175	0,171	0,27	
		стац	0,257	0,173	0,119	0,082	0,135	0,31	
	$\pi / 2$	нач	1,486	1,458	1,432	1,409	1,386	1,38	
		стац	1,457	1,438	1,413	1,388	1,360	1,35	
	π	нач	-0,031	-0,071	-0,089	-0,103	-0,120	-0,13	
		стац	-0,143	-0,195	-0,220	-0,240	-0,263	-0,27	
М2	0	нач	-0,021	-0,114	-0,210	-0,349	-0,807	-1,85	
		стац	-0,388	-0,828	-1,344	-2,281	-9,046	-15,41	
	$\pi / 2$	нач	1,335	1,319	1,304	1,290	1,274	1,27	
		стац	1,374	1,397	1,382	1,347	1,263	1,26	
	π	нач	-0,021	-0,041	-0,050	-0,056	-0,064	-0,07	
		стац	-0,388	-0,480	-0,520	-0,553	-0,592	-0,59	
	М3	0	нач	-0,039	-0,231	-0,462	-0,774	-1,563	-3,66
			стац	-0,382	-0,714	-1,126	-1,726	-3,477	-8,01
$\pi / 2$		нач	1,579	1,546	1,513	1,485	1,459	1,45	
		стац	1,492	1,484	1,455	1,421	1,383	1,37	
π		нач	-0,039	-0,088	-0,110	-0,127	-0,146	-0,15	
		стац	-0,382	-0,467	-0,507	-0,538	-0,575	-0,59	

Таблица 5

Значения напряжений σ_s / p около контура левого отверстия в пластинке с 2-мя отверстиями в начальном и стационарном состояниях

Материал	θ , рад.	t, час.	c / a_1						
			∞	2	1	0,5	0,1	0,01	
М1	0	нач	-0,011	-0,065	-0,132	-0,222	-0,47	-1,08	
		стац	-0,061	-0,155	-0,274	-0,443	-0,94	-2,13	
	$\pi / 6$	нач	0,147	0,117	0,095	0,075	0,07	0,11	
		стац	0,153	0,109	0,079	0,057	0,08	0,16	
	$\pi / 2$	нач	0,571	0,559	0,549	0,540	0,53	0,53	
		стац	0,779	0,766	0,753	0,740	0,73	0,72	
	π	нач	-0,011	-0,025	-0,032	-0,037	-0,04	-0,05	
		стац	-0,061	-0,086	-0,097	-0,106	-0,12	-0,12	
	М2	0	нач	-0,007	-0,038	-0,070	-0,117	-0,27	-0,59
			стац	-0,524	-1,120	-1,820	-3,091	-12,04	-23,18
$\pi / 2$		нач	0,329	0,326	0,323	0,321	0,32	0,32	
		стац	1,440	1,462	1,449	1,417	1,34	1,31	
π		нач	-0,007	-0,014	-0,017	-0,019	-0,02	-0,02	
		стац	-0,524	-0,649	-0,702	-0,747	-0,80	-0,77	
М3	0	нач	-0,013	-0,079	-0,158	-0,265	-0,54	-1,25	
		стац	-0,150	-0,327	-0,542	-0,846	-1,69	-3,94	
	$\pi / 2$	нач	0,753	0,733	0,718	0,706	0,70	0,69	
		стац	1,408	1,382	1,355	1,330	1,30	1,30	
	π	нач	-0,013	-0,030	-0,038	-0,044	-0,05	-0,05	
		стац	-0,150	-0,195	-0,216	-0,233	-0,25	-0,26	

Для некоторых значений c/a_1 на рис. 7, рис. 8 для пластинки из материала М2 изображены графики распределения напряжений σ_n и σ_s вблизи контура левого отверстия в зависимости от угла θ в начальном (сплошные линии) и стационарном (штриховые линии) состояниях. Как видно, при сближении отверстий друг с другом существенные изменения значений напряжений происходят лишь в зоне между отверстиями, тогда как вне этой зоны сближение отверстий не приводит к заметным изменениям их значений; при переходе в стационарное состояние значения напряжений в зоне между отверстиями изменяются весьма значительно. Заметим, что в задаче ТУ (без учета пьезосвойств) изменения значений напряжений при сближении отверстий [37] менее значительны.

Как показывают расчеты, при уменьшении отношения b_1/a_1 полуосей эллипсов значения напряжений вблизи концов большой полуоси растут, стремясь к бесконечности, и при $b_1/a_1 \leq 10^{-3}$ эллипс можно считать линейным разрезом и для его концов считать КИНИН (коэффициенты интенсивности напряжений индукций и напряженностей).

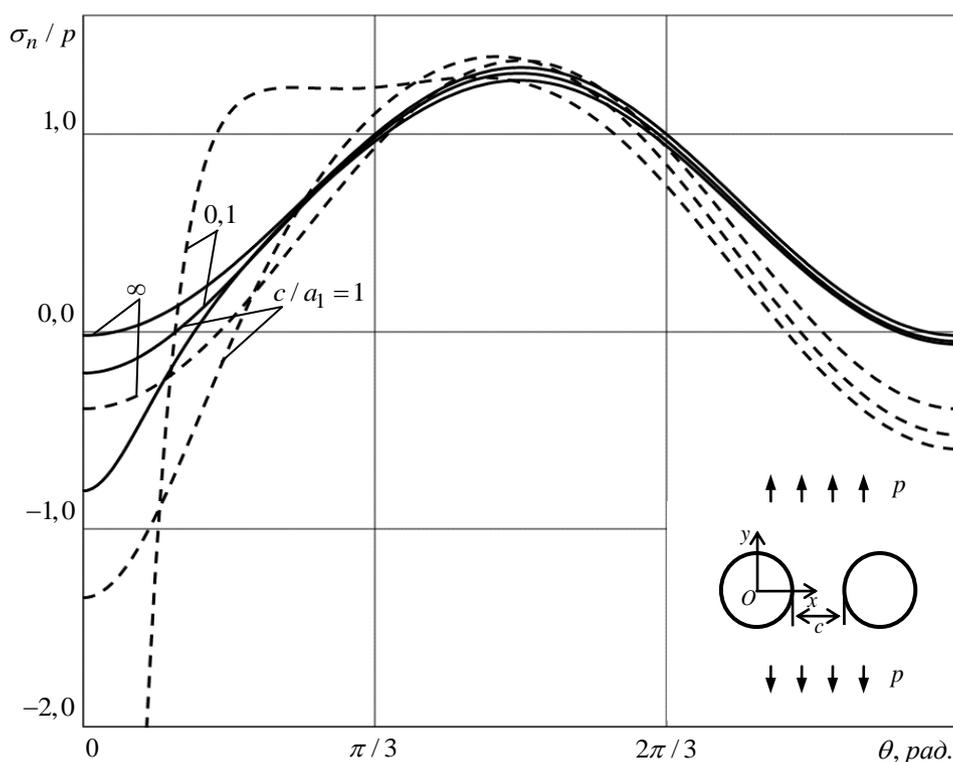


Рис. 7. Графики распределения σ_n / p около контура левого отверстия в пластинке из М2 с двумя круговыми отверстиями для некоторых значений c/a_1 в начальном (сплошные линии) и стационарном (штриховые линии) состояниях.

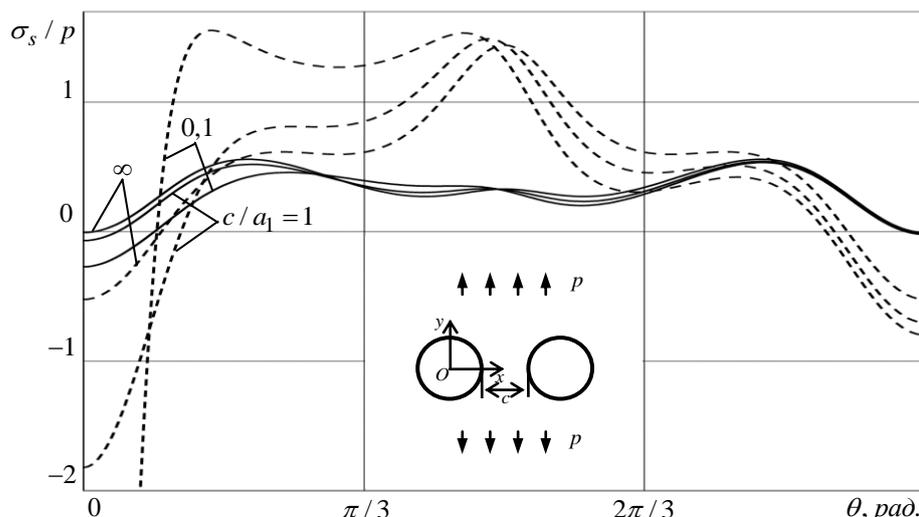


Рис. 8. Графики распределения σ_s / p около контура левого отверстия в пластинке из М2 с двумя круговыми отверстиями для некоторых значений c / a_1 в начальном (сплошные линии) и стационарном (штриховые линии) состояниях.

В табл. 6 для растяжения на бесконечности усилиями $\sigma_y^\infty = p$ пластинки с 2 жесткими линейными включениями длины $2l$ каждый в зависимости от c / l , где c – расстояние между внутренними вершинами включений (рис. 9), с точностью до множителя p приведены значения КИН для левого линейного включения в пластинках из различных материалов в начальном и стационарном состояниях. Как видно, при сближении линейных включений резко увеличивается КИН для внутренних вершин включений (k_1^+), тогда как для внешних вершин (k_1^-) он изменяется незначительно. При $c / l \geq 1$ (расстояниях между внутренними вершинами включений более половины их длин) влияние

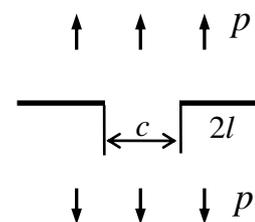


Рис. 9

Таблица 6

Значения КИН для концов левого линейного включения в пластинке с двумя включениями в начальном и стационарном состояниях

Материал	КИН	t , час.	c / l					
			∞	2	1	0,5	0,1	0,01
М1	k_1^-	нач.	0,059	0,061	0,062	0,064	0,068	0,072
		стац.	0,073	0,075	0,077	0,079	0,084	0,090
	k_1^+	нач.	0,059	0,062	0,066	0,073	0,106	0,227
		стац.	0,073	0,077	0,082	0,090	0,132	0,282
М2	k_1^-	нач.	0,024	0,025	0,025	0,026	0,028	0,029
		стац.	-0,124	-0,128	-0,131	-0,135	-0,143	-0,152
	k_1^+	нач.	0,024	0,025	0,027	0,029	0,043	0,092
		стац.	-0,124	-0,130	-0,138	-0,153	-0,224	-0,481
М3	k_1^-	нач.	0,068	0,070	0,071	0,073	0,078	0,083
		стац.	0,110	0,113	0,116	0,119	0,127	0,135
	k_1^+	нач.	0,068	0,071	0,075	0,083	0,121	0,260
		стац.	0,110	0,116	0,123	0,136	0,198	0,424

одного включения на напряженное состояние около другого незначительно и им можно пренебречь, При $c/l < 0,01$ оба включения можно считать одним включением удвоенной длины, для которого КИН получается из КИН для одного включения (данные из табл. 6 для $c/l = \infty$) умножением на $\sqrt{2}$. Это связано с тем, что КИН (в частности КИН) для трещины (линейного включения) пропорциональна корню квадратному от ее полудлины l [33], то есть $k_i^{\pm} = c_i^{\pm} \sqrt{l}$, где c_i^{\pm} – постоянные. Из данных табл. 6 также видно, что в случае жестких включений вдоль главного направления упругости при растяжении вдоль перпендикулярного направления КИН зависит от материала пластинки, тогда как в случае трещин эти КИН не зависят от материала [15, 37].

Выводы. Таким образом, с использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости и метода малого параметра решение задачи электромагнитоупругости для пьезопластинки приведено к определению комплексных потенциалов приближений из соответствующих граничных условий. Затем входящие в комплексные потенциалы приближений голоморфные в соответствующих областях неизвестные функции представлены рядами Лорана с неизвестными коэффициентами, для определения которых из граничных условий на контурах пластинки обобщенным методом наименьших квадратов получена переопределенная система линейных алгебраических уравнений, решаемая методом сингулярного разложения. Как частные случаи из приведенного решения получаются решения задач электроупругости, магнитоупругости и вязкоупругости без учета пьезосвойств материала пластинки. Для пластинки с одним или двумя отверстиями или трещинами с жестко подкрепленными контурами проведены численные исследования с установлением закономерностей изменения влияния времени, а также физико-механических свойств материала пластинки на ее напряженно-деформированное состояние. Получаемые при использовании данного подхода решения задачи значения основных характеристик ЭМУС в начальном состоянии совпадают с известными при решении задачи электромагнитоупругости без учета вязкоупругих свойств [15], а при учете вязкоупругих свойств они согласуются с результатами для анизотропных пластин [37, 38] и изотропных пластин [21], когда не учитываются пьезосвойства материала.

Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124012400354-0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практическое применение. – М.: Иностран. лит., 1949. – 717 с.
2. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. У. Мэсона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
3. Nan C.W. Magnetolectric effect in composites of piezoelectric and piezomagnetic phases // Phys. Rev. – 1994. – Vol. 50, № 22. – P. 6082–6088.
4. Rahmoune M., Benjeddou A., Ohayon R. New thin piezoelectric plate models // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 1998. – Vol. 9. – P. 1017–1029.
5. Магнитоэлектрические материалы / М.И. Бичурин, В.М. Петров, Д.А. Филиппов и др. – М.: Изд-во «Академия Естественных наук», 2006. – 296 с.
6. Пятаков А.П. Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение // Бюллетень МАГО. – 2006. – Т. 5, № 2. – С. 1–3.
7. Бочкарев С.А., Лекомцев С.В. Гидроупругая устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, выполненных из пьезоэлектрического материала // Вестн. Перм. нац.-исслед. политехн. ун-та. Механика. – 2019. – № 2. – С. 35–48. – doi: 10.15593/perm.mech/2019.2.04.
8. Шляхин Д.А., Кальмова М.А. Нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра // Вест. Перм. нац.-исслед. политехн. ун-та. Механика. – 2021. – № 2. – С. 181–190. – doi: 10.15593/perm.mech/2021.2.16.

9. Maxwell J.C. A Treatise on Electricity and Magnetism / In 2 vol.: Vol. II. – Oxford: Clarendon Press, 1873. – XXIV, 445 p.
10. Желудев И.С. Физика кристаллических диэлектриков. – М.: Наука, 1968. – 463 с.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 621 с.
12. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. – М.: Мир, 1986. – 160 с.
13. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
14. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
15. Калоеров С.А., Петренко А.В. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел. – Донецк: Юго-Восток. – 2011. – 232 с.
16. Калоеров С.А., Самодуров А.А. Задача электромагнитоупругости для многосвязных пластинок // Прикладная механика. – 2015. – Т. 51, № 6. – С. 23–41. = Kaloerov, S.A., Samodurov, A.A. Problem of Electromagnetoviscoelasticity for Multiply Connected Plates // International Applied Mechanics. – 2015. – Vol. 51, No 6. – P. 623–639.
17. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
18. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
19. Калоеров С.А. Задачи электроупругого, магнитоупругого и упругого изгиба тонких плит, как частные случаи задачи электромагнитоупругого изгиба // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2019. – № 3-4. – С. 58–79.
20. Работнов Ю.Н. Равновесие упругой среды с последствием // Прикладная математика и механика. – 1948. – Т. 12, № 1. – С. 53–62.
21. Калоеров С.А., Мироненко А.Б. Исследование вязкоупругого состояния пластинки с упругими эллиптическими или линейными включениями // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 2. – С. 88–98. = Kaloerov, S.A., Mironenko, A.B. Analyzing the viscoelastic state of a plate with elliptic or linear elastic inclusions // Int. Appl. Mech. – 2007. – Vol. 43, No. 2, – P. 198–208.
22. Калоеров С.А., Паршикова О.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки // Прикладная механика. – 2012. – № 3 (48). – С. 103–116. = Kaloerov S.A., Parshikova O.A. Thermoviscoelastic state of multiply connected anisotropic plates // Int. Appl. Mech. – 2012. – Vol. 48, No. 2. – P. 319–331.
23. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 338 с.
24. Работнов Ю.Н. Равновесие упругой среды с последствием // Прикл. математика и механика. – 1948. – Vol. 12, No. 1. – С. 53–62.
25. Ван Фо Фы Г. А. О концентрации напряжений в стеклопластиках / Концентрация напряжений. – К.: Наук. думка, 1965. – Вып. 1. – С. 17–23.
26. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
27. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
28. Калоеров С.А., Горянская Е.С. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – № 25. – С. 45–56. = Kaloerov, S.A., Goryanskaya, E.S. The two-dimensional stressed state of a multiconnected anisotropic body with cavities and cracks // Journal of Mathematical Sciences. – 1997. – Vol. 84, No. 6. – P. 1497–1504.
29. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
30. Форсайт Дж., Малькольм М, Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
31. Drmač Z., Veselić K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1322–1342.
32. Drmač Z., Veselić K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1343–1362.
33. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных сред // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62. = Kaloerov, S.A. Determining the intensity factors for stresses, electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media // International Applied Mechanics. – 2007. – Vol. 43, No. 6. – P. 631–637.
34. Yamamoto Y., Miya K. Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures. – Amsterdam: Elsevier Science-North Holland, 1987. – 450 p.
35. Tian W.-Y., Gabbert U. Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.

36. Hou P.F., Teng G.-H., Chen H.-R. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material // *Mech. Mater.* – 2009. – Vol. 41. – P. 329–338.
37. Калоеров С.А., Петренко О.А. Задача термовязкоупругости для кусочно-однородной анизотропной пластины // *Мат. методы та фіз.-мех. поля.* – 2012. – Т. 55, № 2. – С.131–143. (К_245). = Kaloerov, S.A., Petrenko, O.A. Problem of thermoviscoelasticity for a piecewise homogeneous anisotropic plate // *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. – 2013. – Vol. 192, No 6. – P. 634-649.
38. Каминский А.А. Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами / А.А. Каминский, Д.А. Гаврилов. – К.: Наук. думка, 1992. – 248 с.

Поступила в редакцию 07.05.2024 г.

SOLUTION OF THE PROBLEM ON THE VISCOELASTIC STATE MULTI-CONNECTED PIEZO PLATE

S. A. Kaloerov, M. A. Polyansky

The problem of electromagnetoviscoelasticity for plates with arbitrary holes and cracks has been solved. In this case, the complex potentials of electromagnetoelasticity are represented by series in a small parameter with coefficients in the form of unknown approximation functions; boundary conditions for determining the approximation functions and general representations of these functions for a multiply connected domain are obtained, containing Laurent series with unknown coefficients, the determination of which from the boundary conditions by the generalized least squares method is reduced to an overdetermined system of linear algebraic equations, solved by the singular value decomposition method. After determining the approximation functions by representing the elastic deformation coefficients by time operators and calculating them, the main characteristics of the electromagnetoelastic state of the plate at any time are found. As special cases, the above solution leads to solutions to the corresponding problems of electroviscoelasticity (when the magnetic properties of the material are not taken into account), magnetoviscoelasticity (when the electrical properties of the material are not taken into account) and viscoelasticity (when both the electrical and magnetic properties of the material are not taken into account). Numerical studies were carried out for a plate with one or two elliptical holes, with one or two linear inclusions. It has been established that over time, the values of stresses and inductions near the contours of holes and cracks change significantly, and the greatest changes in these values are observed in the first 10 hours after application of the load; significant changes in these values are observed up to 40–50 hours, although the transition to a stationary state and after that it takes a long time; upon transition to a stationary state, the values of stresses and inductions near the contours of holes and cracks undergo large changes; These changes are especially significant in areas of low stress and induction concentrations; the values and nature of changes in these quantities are significantly influenced by the physical and mechanical properties of the material and the geometric characteristics of holes and cracks.

Keywords: electromagnetoviscoelasticity, complex potentials, small parameter method, time operators, generalized least squares method, stress and induction intensity factors.

Калоеров Стефан Алексеевич

доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.

E-mail: kaloerov@mail.ru

Kaloerov Stefan Alekseevich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Theory Elasticity and Computational Mathematics named after. acad. A.S. Kosmodamian of Donetsk State University, Donetsk, DPR, RF.

Полянский Максим Алексеевич

аспирант кафедры теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.

E-mail: m4xpolyan@yandex.ru

Polyansky Maxim Alekseevich

postgraduate student of the Department of Elasticity Theory and Computational Mathematics named after. acad. A.S. Kosmodamian of Donetsk State University, Donetsk, DPR, RF.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ МНОГОСВЯЗНОЙ ПЬЕЗОПОЛУПЛОСКОСТИ С ПРИБЛИЖЕННЫМ УДОВЛЕТВОРЕНИЕМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЯМ НА ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕ

© 2024. С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов

С использованием комплексных потенциалов теории изгиба тонких пьезоплит решена задача об изгибе полуплоскости с произвольно расположенными относительно друг друга и относительно прямолинейной границы отверстиями и трещинами. При этом функции, голоморфные вне отверстий и трещин, разложены в ряды Лорана, а функции, голоморфные в нижних полуплоскостях, выбраны в виде функций, голоморфных вне воображаемых симметричных контуров в верхних полуплоскостях. Определение коэффициентов указанных рядов обобщенным методом наименьших квадратов сведено к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярного разложения. Описаны результаты численных исследований для полуплоскости с круговым отверстием, в том числе выходящим на прямолинейную границу (случай полуплоскости с выемом), полуплоскости с круговым отверстием и краевой трещиной из нее в перемычке, в том числе выходящей на прямолинейную границу (случай полуплоскости с круговым отверстием и разрезом между отверстием и границей полуплоскости). Исследованы закономерности изменения электромагнитоупругого состояния плиты в зависимости от геометрических характеристик отверстий и трещин, их взаиморасположения. Установлено, что с приближением отверстия или трещины к прямолинейной границе значения моментов в точках перемычки резко возрастают, незначительно изменяясь в других зонах полуплоскости. Большая концентрация моментов наблюдается и в точках прямолинейной границы вблизи перемычки. Значения этих моментов особенно велики в задаче для полуплоскости с круговым отверстием, имеющим краевую трещину в перемычке. На значения изгибающих моментов значительно влияет учет пьезосвойств материала, особенно в зонах высокой концентрации изгибающих моментов, поэтому в этих случаях нельзя ограничиваться решением задачи теории упругости об изгибе плиты, а нужно решать задачу электромагнитоупругости.

Ключевые слова: тонкая пьезоплита, полуплоскость, отверстия, трещины, перемычка, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов, концентрация изгибающих моментов, коэффициенты интенсивности моментов.

Введение. Тонкие пластинки с отверстиями и трещинами из пьезоматериалов получили широкое применение в качестве элементов различных конструкций современной науки и техники [1–9]. Зачастую эти отверстия и трещины оказываются вблизи прямолинейной границы, что приводит к возникновению около них высокой концентрации напряжений и к разрушению таких элементов. Все это нужно учитывать при проектировании и эксплуатации таких конструкций. В работах [10–15] предложены различные методы определения электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) пьезоплит простой геометрической формы из материалов простейшей микроструктуры.

Для определения же ЭМУС многосвязных плит с отверстиями и трещинами наиболее достоверные результаты получаются при использовании комплексных потенциалов теории изгиба электромагнитоупругих тонких плит [16, 17]. Эти функции позволяют проводить широкомасштабные исследования напряженного состояния и в случаях, когда отверстия и трещины располагаются вблизи прямолинейной границы плит, рассматриваемых в виде многосвязных полуплоскостей. В этом случае при удовлетворении граничным условиям на прямолинейной границе используется метод интегралов типа Коши [18, 19], а при удовлетворении граничным условиям на контурах отверстий и трещин наиболее простым, в то же время наиболее эффективным, является

обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК) [20]. Но при таком решении задачи отверстия и трещины не могут выходить на прямолинейную границу полуплоскости.

В данной работе решена задача об изгибе многосвязной полуплоскости с произвольными отверстиями и трещинами, которые в частных случаях не только сами могут пересекаться, но и пересекать прямолинейную границу. При этом используются комплексные потенциалы теории изгиба тонких пьезоплит, а граничные условия на всех контурах, в том числе на прямолинейной границе, удовлетворяются ОМНК. Описаны результаты численных исследований ЭМУС плиты для случаев полуплоскости с круговым отверстием, с круговым отверстием и краевой трещиной из него в перемычке, рассмотрены случаи полуплоскости с круговым выемом, с круговым отверстием и разрезом между ним и полуплоскостью.

1. Постановка и решение задачи. Рассмотрим пьезоплиту в виде нижней полуплоскости S с отверстиями с контурами L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) (рис. 1), отнесенную к прямоугольной системе координат Oxy с началом в произвольной точке полуплоскости на расстоянии h^+ от ее границы L^+ и осью Ox , параллельной этой границе. Будем считать контуры L_l эллипсами с полуосями a_l, b_l . Тогда их уравнения в системе Oxy записываются в виде

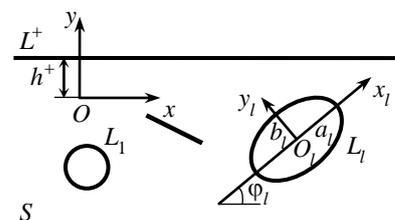


Рис. 1

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta;$$

φ_l – угол между положительными направлениями оси Ox и оси $O_l x_l$ локальной системы координат $O_l x_l y_l$ с началом в центре эллипса L_l и осью $O_l x_l$ вдоль полуоси a_l , отсчитываемый от положительного направления Ox против часовой стрелки; x_{0l}, y_{0l} – координаты начала локальной системы $O_l x_l y_l$ в основной системе Oxy ; θ – параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π . В частном случае эллипсы могут переходить в прямолинейные разрезы, пересекать прямолинейную границу и пересекаться между собой, совокупности их дуг могут аппроксимировать криволинейные контуры отверстий произвольной конфигурации. Прямолинейная граница L^+ не нагружена, на контурах L_l действуют механические изгибающие моменты $m_l(t)$, поперечные силы $p_l(t)$, моменты электрической индукции $m_{dl}(t)$ и магнитной индукции $m_{bl}(t)$ так, что их главные векторы и главные моменты на каждом из них равны нулю. На бесконечности полуплоскость не нагружена или изгибается механическими моментами M_x^∞ и моментами индукций $M_{dx}^\infty, M_{bx}^\infty$; моменты $M_y^\infty, H_{xy}^\infty, M_{dy}^\infty, M_{by}^\infty$ в силу незагруженности прямолинейной границы равны нулю.

Если задачу по определению ЭМУС рассматриваемой полуплоскости решать с использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости [16, 17], то она

сводится к нахождению функций $W'_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (2)$$

где μ_k – корни известного характеристического уравнения 8-го порядка, из граничных условий

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ik} W'_k(t_k) = f_i(t) \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (3)$$

в которых

$$\begin{aligned} (g_{1k}, g_{2k}, g_{3k}, g_{4k}) &= (p_k / \mu_k, q_k, d_{yk}, b_{yk}), \\ (f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)) &= \left(\int_0^s (m(s) dy + f(s) dx) - cx + c_1, \right. \\ &\left. \int_0^s (m(s) dx - f(s) dy) + cy + c_2, - \int_0^s m_d(s) ds + c_3, - \int_0^s m_b(s) ds + c_4 \right); \\ f(s) &= \int_0^s p(s) ds, \end{aligned}$$

если контур загружен внешними воздействиями в виде механических изгибающих моментов $M_n = m(s)$ и поперечных усилий $N_n = p(s)$, изгибающих индукционных моментов $M_{dn} = m_d(s)$, $M_{bn} = m_b(s)$, и

$$\begin{aligned} (g_{1k}, g_{2k}, g_{3k}, g_{4k}) &= (1, \mu_k, d_{yk}, b_{yk}), \\ (f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)) &= \left(c_3, c_4, - \int_0^s m_d(s) ds + c_5, - \int_0^s m_b(s) ds + c_6 \right), \end{aligned}$$

когда контур плиты жестко подкреплен; p_k, q_k, d_{yk}, b_{yk} – известные постоянные [16]; c – вещественные, c_i – комплексные постоянные.

Комплексные потенциалы $W'_k(z_k)$ определены в многосвязных нижних полуплоскостях S_k , получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями (2) и ограниченных прямолинейными границами L_k^+ и контурами L_{kl} , соответствующими границе L^+ и контурам L_l при этих аффинных преобразованиях. В общем случае эти функции имеют вид

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} [a_{kln} \Phi_{kln}(z_k) + b_{kln} \Phi_{kln}^+(z_k)], \quad (4)$$

в котором Γ_k – постоянные, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений 8-го порядка

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(p_k, q_k, r_k, d_{xk}, d_{yk}, b_{xk}, b_{yk}, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_k = \left(-M_x^\infty, 0, 0, -M_{dx}^\infty, 0, -M_{bx}^\infty, 0, 0 \right);$$

r_k, d_{xk}, b_{xk} – известные постоянные, зависящие от коэффициентов деформации материала, пьезоэлектрических и пьезомагнитных модулей деформации и напряженностей, коэффициентов диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивостей; a_{kln}, b_{kln} – неизвестные коэффициенты разложений функций в ряды Лорана;

$$\varphi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n}, \quad \varphi_{kln}^+(z_k) = \frac{1}{(\zeta_{kl}^+)^n};$$

ζ_{kl} – переменные, определяемые из конформных отображений [21]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right)$$

внешностей единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности контуров L_{kl} ;

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}; \end{aligned}$$

ζ_{kl}^+ – переменные, определяемые из конформных отображений [18, 19]

$$z_k = \overline{z_{kl}} - (\overline{\mu_k} - \mu_k) h^+ + \overline{R_{kl}} \left(\zeta_{kl}^+ + \frac{\overline{m_{kl}}}{\zeta_{kl}^+} \right)$$

внешностей единичных кругов $|\zeta_{kl}^+| \geq 1$ на внешности контуров L_{kl}^+ верхней (относительно границы L_k^+) полуплоскости S_k^+ , симметричных относительно прямолинейных границ L_k^+ контурам L_{kl} .

Неизвестные постоянные a_{kln}, b_{kln} ($k = \overline{1, 4}; l = \overline{1, \mathcal{L}}, n = 1, 2, \dots$) определим из граничных условий на прямолинейной границе L^+ и на контурах отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$). Для многосвязных областей эти условия удобнее использовать в дифференциальной форме, которая не будет содержать указанные выше комплексные постоянные c_l . При дифференцировании по дуге контуров области на основе (3) эти условия имеют вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ik} \delta_{k,s} W_k''(t_k) = \frac{df_i(t)}{ds}, \quad (5)$$

где $\delta_{k,s} = \frac{dt_k}{ds} = \frac{x' + \mu_k y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$; x' , y' – производные переменных (1) по параметру θ параметрического задания эллипсов; s – длина дуги контура, обходимого против часовой стрелки, причем для прямолинейной границы L^+ , где $f_i(t) = 0$ и производная $\delta_{k,s} = 1$, правая часть уравнений $\frac{df_l(t)}{ds} = 0$.

Граничным условиям (5) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [22, 23]. Для этого выберем на прямолинейной границе L^+ и контурах отверстий L_p ($p = \overline{1, \mathcal{L}}$) заданной области S систему точек $M_m(x_m, y_m)$ ($m = \overline{1, M}$), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (4). Тогда для определения неизвестных постоянных a_{kln} и b_{kln} получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ik} \delta_{k,s} \left[\varphi'_{kln}(t_{km}) a_{kln} + \varphi'_{kln}{}^+(t_{km}) b_{kln} \right] = \\ = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ik} \delta_{k,s} \Gamma_k \left(i = \overline{1, 4}; m = \overline{1, M} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Кроме уравнений (6), для каждого контура отверстия должны выполняться уравнения

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 i a_{k1l} = 0 \quad (p = \overline{1, \mathcal{L}}), \quad (7)$$

следующие из условия однозначности прогиба при полном обходе контуров отверстий L_p .

Систему (6), дополненную уравнениями (7), будем решать с использованием сингулярных разложений [24, 25]. После нахождения псевдорешений этой системы постоянные a_{kln} и b_{kln} , а, следовательно, и функции $W'_k(z_k)$, будут известными и по ним можно вычислять основные характеристики ЭМУС (моменты механические изгибающие, крутящий, индукций и перерезывающие силы на основных площадках). В частности, для механических моментов и моментов индукций (векторов индукций) имеют место формулы

$$\begin{aligned} (M_x, M_y, H_{xy}) &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k) W_k''(z_k); \\ (M_{dx}, M_{dy}, M_{bx}, M_{by}) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (d_{xk}, d_{yk}, b_{xk}, b_{yk}) W_k''(z_k); \end{aligned}$$

Зная основные характеристики, можно найти также моменты на произвольных площадках с нормалью n и касательной s , используя формулы

$$\begin{aligned} M_n &= M_x \cos^2 nx + M_y \cos^2 ny + 2H_{xy} \cos nx \cos ny, \\ M_s &= M_x \cos^2 ny + M_y \cos^2 nx - 2H_{xy} \cos nx \cos ny, \end{aligned}$$

$$H_{ns} = (M_y - M_x) \cos nx \cos ny + H_{xy} (\cos^2 nx - \cos^2 ny).$$

$$M_{dn} = M_{dx} \cos^2 nx + M_{dy} \cos^2 ny,$$

$$M_{bn} = M_{bx} \cos^2 nx + M_{by} \cos^2 ny.$$

При этом, если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейный разрез-трещину, то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности моментов (КИМ), в частности, на основе известных формул [26]

$$k_{1M}^{\pm} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[p_k \sin^2 \varphi_l + q_k \cos^2 \varphi_l - 2r_k \sin \varphi_l \cos \varphi_l \right] M_k,$$

$$k_{2M}^{\pm} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[(q_k - p_k) \cos \varphi_l \sin \varphi_l + r_k (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l) \right] M_k,$$

в которых

$$M_k = \mp \frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln}.$$

Как частные случаи из приведенного решения задачи электромагнитоупругости (ЭМУ) следуют решения задач электроупругости (ЭУ), магнитоупругости (МУ) и теории упругости (ТУ). Эти решения получаются из приведенного решения, если в нем принять равными нулю соответственно пьезомагнитные модули деформации и напряженностей p_{ij} , коэффициенты магнитной и электромагнитной восприимчивостей v_{ij} (в задаче ЭУ), пьезоэлектрические модули деформации и напряженностей g_{ij} коэффициенты электромагнитной восприимчивостей v_{ij} (в задаче МУ) или и те и другие (в задаче ТУ). Но для проведения численных исследований во всех этих случаях можно пользоваться программой решения общей задачи электромагнитоупругости, проводя вычисления для модельного материала с постоянными [27]

$$g'_{ij} = \lambda_g g_{ij}, \quad p'_{ij} = \lambda_p p_{ij}, \quad v'_{ij} = \lambda_{gp} v_{ij},$$

где λ_g , λ_p , λ_{gp} – пьезопараметры модельного материала. При этом для задач ЭМУ нужно принять $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} = 1$, а для других задач, как следует из вычислительных экспериментов, эти параметры нужно принять такими: $\lambda_g = 1$, $\lambda_p = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ для задач ЭУ; $\lambda_p = 1$, $\lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ для задач МУ; $\lambda_p = \lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ для задач ТУ.

2. Описание результатов численных исследований. Были проведены исследования для плит из материалов: 1) композит на основе BaTiO_3 - CoFe_2O_4 (материал М1) [28, 29]; 2) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия CdSe , а пьезомагнитные и магнитные – BaTiO_3 (материал М2) [30]. Физико-механические постоянные этих материалов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Физико-механические
постоянные материалов

Величина	Материалы	
	М1	М2
$s_{11}/s_0 = s_{33}/s_0$	7,165	22,260
s_{22}/s_0	6,797	14,984
$s_{44}/s_0 = s_{66}/s_0$	19,912	47,481
s_{55}/s_0	19,802	69,204
$s_{12}/s_0 = s_{23}/s_0$	-2,337	-6,437
s_{13}/s_0	-2,736	-11,942
$g_{16}/g_0 = g_{34}/g_0$	2,028	109,22
$g_{21}/g_0 = g_{23}/g_0$	-0,496	-4,333
g_{22}/g_0	1,157	8,016
$p_{16}/p_0 = p_{34}/p_0$	1,850	268,318
$p_{21}/p_0 = p_{23}/p_0$	0,576	17,778
p_{22}/p_0	1,186	31,206
$\beta_{11}/\beta_0 = \beta_{33}/\beta_0$	0,156	19,612
β_{22}/β_0	0,137	10,612
$\nu_{11}/\nu_0 = \nu_{33}/\nu_0$	-0,190	213,404
ν_{22}/ν_0	-0,185	-5,534
$\chi_{11}/\chi_0 = \chi_{33}/\chi_0$	0,336	0,590
χ_{22}/χ_0	0,119	0,575

$$s_0 = 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad g_0 = 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \text{ м}^2, \quad p_0 = 10^{-5} \text{ МТл}^{-1},$$

$$\beta_0 = 10^3 \text{ МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}, \quad \nu_0 = 10^{-1} \text{ МКл} \cdot \text{м} \cdot \text{МА}^{-1}, \quad \chi_0 = 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{МТл}^{-2}.$$

При проведении исследований количество членов в бесконечных рядах (4) для каждого отверстия L_p и «коллокационных точек» M_p на этих контурах и на «коллокационном отрезке» прямолинейной границы, для которых составлялись уравнения (6), увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах отверстий и на прямолинейной границе не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (модуль абсолютной погрешности не превышал 10^{-3}). В описываемых ниже случаях для такого удовлетворения граничным условиям необходимо было в указанных рядах оставлять от 10 до 120 членов, на каждом из контуров отверстий и на «коллокационном отрезке» прямолинейной границы брать от 100 до 500 «коллокационных точек». В качестве «коллокационного отрезка» прямолинейной границы выбирался отрезок длины от 1 до 4 диаметров отверстия (длины трещины) по каждую сторону от точки перемычки. Как показывают исследования, за этим отрезком не наблюдаются существенные изменения концентрации моментов (следовательно, и напряжений), то есть значения этих величин здесь практически такие же как в полуплоскости без отверстий и трещин.

В табл. 2 для задач ЭМУ и ТУ изгиба моментами $M_x^\infty = m_x$ полуплоскости из различных материалов с внутренним круговым отверстием радиуса a_1 (рис. 2) с точностью до множителя m_x приведены значения изгибающих моментов в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения c/a_1 , где c – длина перемычки между контуром отверстия и границей полуплоскости. При этом характерными были точки $A(0, -a_1)$, $B(a_1, 0)$, $C(0, a_1)$, $D(0, a_1 + c/2)$, $O(0, a_1 + c)$, $L(a_1, a_1 + c)$, $M(2a_1, a_1 + c)$. Вариант $c/a_1 = 0$, соответствует случаю, когда контур отверстия выходит на границу полуплоскости (касается прямолинейной границы), при $c/a_1 < 0$ контур отверстия пересекает границу полуплоскости, то есть имеет место полуплоскость с круговым выемом различной глубины, например, при $c/a_1 = -1$ центр кругового выема оказывается на прямолинейной границе и выемом является полукруг. Как показывают расчеты, для полуплоскости из материала М1, близкого по упругим свойствам к изотропному материалу, значения изгибающих моментов в задачах ЭМУ и ТУ оказываются весьма близкими, отличаясь друг от друга лишь в точке B , и то менее чем на 2%. Поэтому значения величин в остальных точках приведены лишь для задачи ЭМУ. На рис. 3 для полуплоскости из более пьезоактивного материала М2, для некоторых значений c/a_1 изображены графики распределения M_s/m_x по контуру

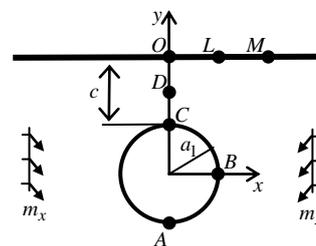


Рис. 2

Таблица 2
Значения изгибающих моментов в некоторых точках полуплоскости с круговым отверстием в зависимости от c/a_1

Материал	Точка	Момент	Задача	c/a_1							
				2	1	0,1	0,01	-0,01	-0,1	-0,5	-1
М1	A	M_x	ЭМУ	1,854	1,894	2,061	2,152	2,200	2,167	2,021	1,814
			ТУ	0,228	0,224	0,193	0,175	0,166	0,164	0,150	0,001
	B	M_y	0,224	0,219	0,189	0,172	0,164	0,161	0,148	0,020	
	C	M_x	ЭМУ	1,898	2,059	4,388	12,83	–	–	–	–
	D	M_x	ЭМУ	1,335	1,662	4,287	12,80	–	–	–	–
	O	M_x	ЭМУ	1,230	1,536	4,240	12,79	–	–	–	–
	L	M_x	ЭМУ	1,154	1,218	0,777	0,326	0,085	0,088	0,058	0,001
M	M_x	ЭМУ	1,041	0,966	0,686	0,581	0,532	0,552	0,650	0,801	
М2	A	M_x	ЭМУ	1,847	1,886	2,054	2,144	2,181	2,158	2,014	1,802
			ТУ	1,753	1,791	1,939	2,016	2,047	2,026	1,896	1,714
	B	M_y	ЭМУ	0,600	0,589	0,506	0,458	0,438	0,430	0,393	0,020
			ТУ	0,217	0,212	0,184	0,169	0,163	0,160	0,147	0,023
	C	M_x	ЭМУ	1,876	2,023	4,356	12,66	–	–	–	–
			ТУ	1,800	1,964	4,180	12,01	–	–	–	–
	D	M_x	ЭМУ	1,328	1,657	4,266	12,63	–	–	–	–
			ТУ	1,341	1,654	4,105	11,99	–	–	–	–
	O	M_x	ЭМУ	1,322	1,625	4,244	12,62	–	–	–	–
			ТУ	1,246	1,553	4,073	11,98	–	–	–	–
	L	M_x	ЭМУ	1,133	1,160	0,682	0,249	0,060	0,026	-0,006	0,020
			ТУ	1,147	1,184	0,714	0,299	0,123	0,088	0,058	0,023
	M	M_x	ЭМУ	1,006	0,949	0,711	0,616	0,579	0,588	0,671	0,813
			ТУ	1,021	0,941	0,704	0,620	0,588	0,601	0,696	0,830

отверстия в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от оси Ox против часовой стрелки, причем сплошные линии относятся к задаче ЭМУ, пунктирные – к задаче ТУ.

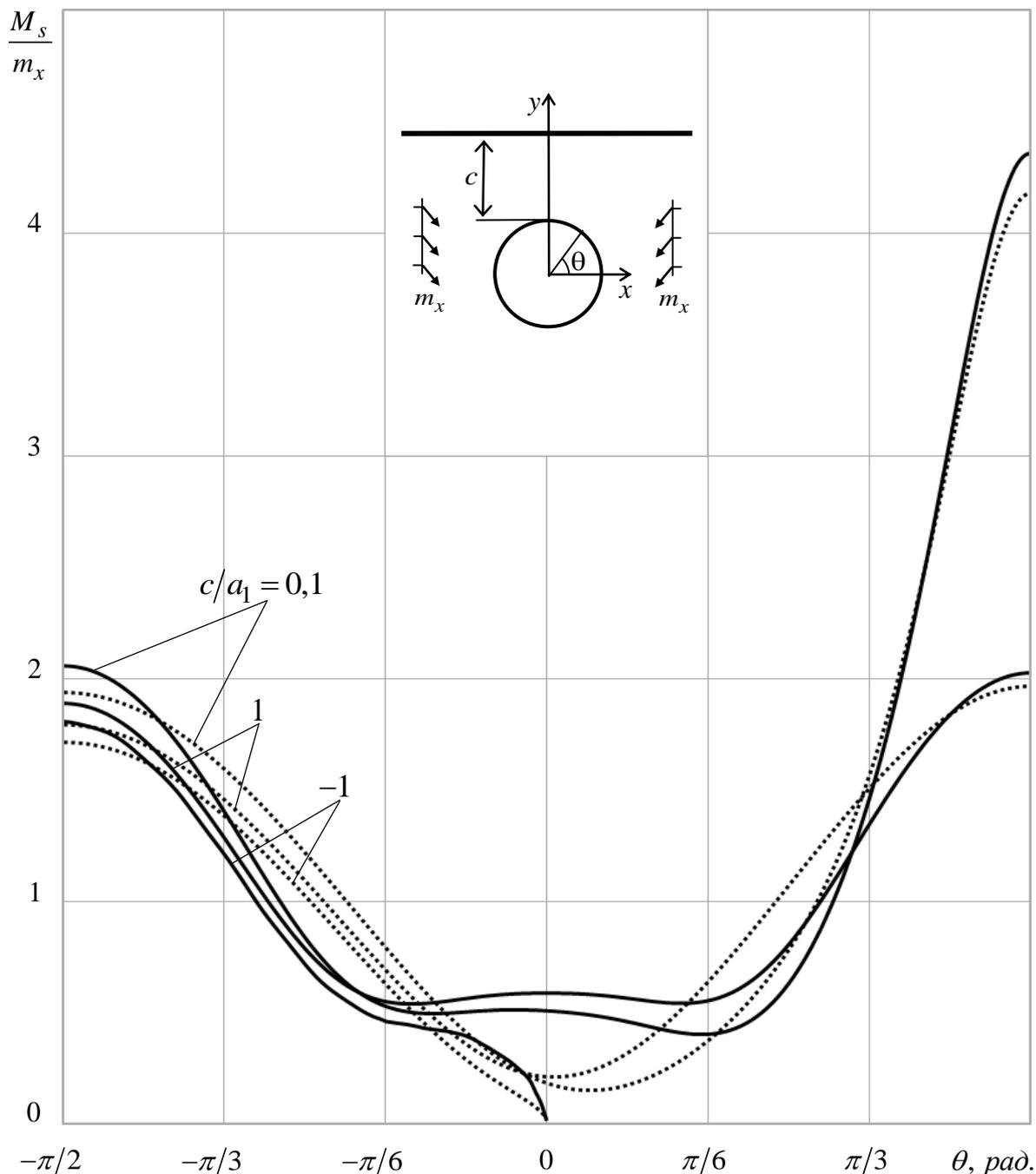


Рис. 3. Графики распределения моментов M_s/m_x около контура кругового отверстия в полуплоскости из М2. Сплошные линии относятся к задаче ЭМУ, штриховые – к задаче ТУ.

Как следует из данных табл. 2 и рис. 3, с приближением отверстия к прямолинейной границе значения моментов в точках перемены и прямолинейной границы вблизи перемены резко возрастают, незначительно изменяясь в остальных

точках. На значения изгибающих моментов значительно влияет учет пьезосвойств материала (ср. значения моментов в задачах ЭМУ и ТУ), особенно в зоне перемычки между отверстием и прямолинейной границей. В точках высокой концентрации напряжений значения моментов в задачах ЭМУ и ТУ отличаются друг от друга около 15 %. Поэтому при исследованиях концентрации напряжений (следовательно, и моментов) в элементах конструкций из пьезоматериалов нельзя ограничиваться решением задачи ТУ, а нужно решать задачу ЭМУ.

В табл. 3 для изгиба моментами $M_x^\infty = m_x$ полуплоскости из материала М2 с круговым отверстием радиуса a_1 и вертикальной краевой трещиной из контура отверстия длины $l_2 = a_1$ в перемычке (рис. 4) с точностью до множителя m_x в зависимости от c/a_1 , где c – длина перемычки между вершиной трещины и границей полуплоскости, приведены значения КИМ для вершины трещины и изгибающих моментов M_x/m_x в некоторых характерных точках полуплоскости. При этом характерными точками были $A(0, -a_1)$, $B(a_1, 0)$, $F(0, 2a_1)$, $D(0, 2a_1 + c/2)$, $O(0, 2a_1 + c)$, $L(a_1, 2a_1 + c)$, $M(2a_1, 2a_1 + c)$. На рис. 5 для некоторых значений c/a_1 изображены графики распределения моментов M_s/m_x по контуру отверстия для полуплоскости из материала М2.

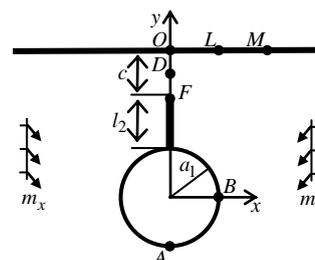


Рис. 4

Таблица 3

Значения КИМ k_1 для конца трещины и моментов M_x/m_x в некоторых точках полуплоскости из М2 с круговым отверстием и краевой трещиной в зависимости от c/a_1

Точка	Величина	Задача	c/a_1							
			0,9	0,7	0,5	0,3	0,1	0	-0,1	-0,5
F	k_1^+	ЭМУ	1,422	1,474	1,562	1,742	2,354	–	–	
		ТУ	1,469	1,523	1,614	1,798	2,429	–	–	
A	M_x	ЭМУ	1,969	1,984	2,005	2,036	2,097	2,582	2,486	2,311
		ТУ	1,864	1,877	1,896	1,924	1,979	2,343	2,323	2,203
B	M_y	ЭМУ	0,611	0,605	0,596	0,583	0,562	0,528	0,526	0,502
		ТУ	0,220	0,218	0,215	0,211	0,204	0,174	0,173	0,170
D	M_x	ЭМУ	1,993	2,283	2,789	3,915	9,004	–	–	
		ТУ	1,975	2,259	2,754	3,859	8,844	–	–	
O	M_x	ЭМУ	2,007	2,299	2,809	3,948	9,122	–	–	
		ТУ	1,736	1,969	2,379	3,301	7,502	–	–	
L	M_x	ЭМУ	1,164	1,147	1,106	1,025	0,866	-0,061	0,251	0,317
		ТУ	1,187	1,163	1,117	1,039	0,892	0,122	0,103	0,117
M	M_x	ЭМУ	0,959	0,934	0,903	0,861	0,793	0,407	0,535	0,594
		ТУ	0,961	0,934	0,900	0,855	0,783	0,433	0,436	0,496

Как следует из данных табл. 3 и рис. 5, приближение кругового отверстия с краевой трещиной к границе полуплоскости ведет к весьма существенному росту концентрации изгибающих моментов в точках перемычки, около контура отверстия и около прямолинейной границы вблизи перемычки. Выход трещины на прямолинейную границу (случай разреза между контуром отверстия и границей полуплоскости) резко снижает значения моментов в точках перемычки и незначительно изменяет их вблизи прямолинейной границы. Незначительное уменьшение значений моментов наблюдается и с уменьшением длины разреза.

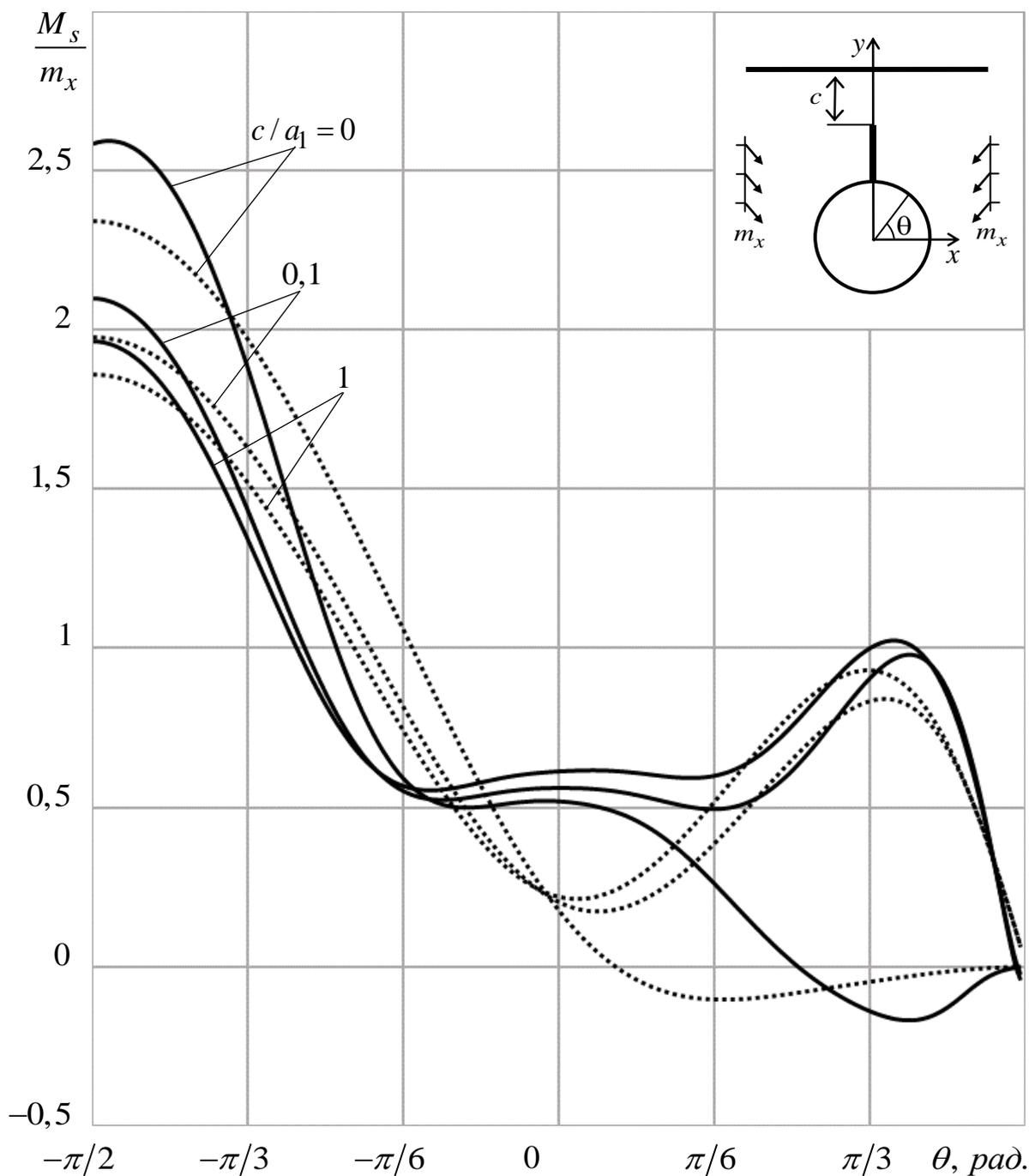


Рис. 5. Графики распределения моментов M_s/m_x около контура кругового отверстия в полуплоскости из материала М2 с краевой трещиной для некоторых значений отношения c/a_1 . Сплошные линии относятся к задаче ЭМУ, пунктирные – к задаче ТУ.

Выводы. Таким образом, дано решение задачи об изгибе тонкой многосвязной пьезополуплоскости с произвольно расположенными относительно друг друга и относительно прямолинейной границы отверстиями и прямолинейными трещинами, в том числе пересекающимися друг друга и прямолинейную границу. Для решения задачи

использованы комплексные потенциалы теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит [16], их разложение в ряды Лорана, удовлетворение граничным условиям на контурах отверстий, трещин и на прямолинейной границе обобщенным методом наименьших квадратов. Описаны результаты численных исследований для полуплоскости с круговым отверстием, с круговым отверстием и краевой трещиной. В численных исследованиях рассмотрены случаи полуплоскости с выемом на границе, с отверстием и прямолинейным разрезом между его контуром и границей полуплоскости. Изучены закономерности изменения электромагнитоупругого состояния плиты в зависимости от материала плиты и геометрических характеристик отверстий и трещин. Для полуплоскости с внутренними отверстиями и трещинами получаемые результаты с высокой точностью совпадают с аналогичными результатами [19], получаемыми при решении задачи методом, когда граничные условия на прямолинейной границе удовлетворяются точно с использованием метода интегралов типа Коши.

Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124012400354-0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практическое применение / У. Кэди. – М.: Иностр. лит., 1949. – 720 с.
2. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
3. Магнитоэлектрические материалы / М. И. Бичурин, В. М. Петров, Д. А. Филиппов, Г. Сринивасан, С. В. Нан. – М.: Акад. естествознания, 2006. – 296 с.
4. Пятаков А. П. Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение / А. П. Пятаков // Бюл. Рос. магнит. о-ва. – 2006. – Т. 5, № 2. – С. 1–3.
5. Multiferroic magnetoelectric composites: Historical perspective, status, and future directions / C.-W. Nan, M. I. Bichurin, S. Dong, D. Viehland, G. Srinivasan // J. Appl. Phys. – 2008. – Vol. 103, No. 3. – P. 031101.
6. Tian R. Magnetolectric properties of piezoelectric-piezomagnetic composites with elliptical nanofibers / R. Tian, J. Liu, X. Liu // Acta Mechanica Solida Sinica. – 2020. – Vol. 33. – P. 368–380.
7. Srinivas S. The effective magnetoelectric coefficients of polycrystalline multiferroic composites / S. Srinivas, Y. L. Jiang // Acta Mater. – 2005. – Vol. 53. – P. 4135–4142.
8. Бочкарев С. А. Гидроупругая устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, выполненных из пьезоэлектрического материала / С. А. Бочкарев, С. В. Лекомцев // Вестник Перм. науч.-исслед. политех. ун-та. Механика. – 2019. – № 2. – С. 35–48.
9. Шляхин Д. А., Нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра / Д. А. Шляхин, М. А. Кальмова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 2. – С. 181–190. – doi: 10.15593/perm.mech/2021.2.16
10. Eringen A. C. Electrodynamics of Continua I / A. C. Eringen, G. A. Maugin. – New York: Springer, 1990. – 436 p.
11. Librescu L. Electromagnetically conducting elastic plates in a magnetic field: modeling and dynamic implications / L. Librescu, D. Hasanyan, DR Ambur // International journal of non-linear mechanics. – 2004. – Vol. 39, No. 5. – P. 723–739.
12. Shen W. A transversely isotropic magneto-electro-elastic circular Kirchhoff plate model incorporating microstructure effect / W. Shen, G. Zhang, S. Gu, Y. Cong // Acta Mechanica Solida Sinica. – 2022. – Vol. 35, No. 2. – P. 185–197.
13. Ieşan D. On the bending of piezoelectric plates with microstructure / D. Ieşan // Acta Mech. – 2008. – Vol. 198, No. 3. – P. 191–208.
14. Xu S.-P. Bending of piezoelectric plates with a circular hole / S.-P. Xu, W. Wang // Acta Mech. – 2009. – Vol. 203. – P. 127–135.
15. Gales C. On the bending of plates in the electromagnetic theory of microstretch elasticity / C. Gales, N. Baroiu // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2014. – Vol. 94, No. 1-2. – P. 55–71.

16. Калоеров С. А. Основные соотношения прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С. А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2022. – № 1. – С. 20–38.
17. Калоеров С. А. Исследование электромагнитоупругого состояния конечной многосвязной тонкой плиты / С. А. Калоеров, А. В. Сероштанов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2023. – № 4. – С. 34–44.
18. Калоеров С. А. Напряженное состояние анизотропной полуплоскости с конечным числом эллиптических отверстий / С. А. Калоеров // Прикладная механика. – 1966. – Т. 2, № 10. – С. 75–82.
19. Калоеров С. А. Решение задач теории упругости для многосвязных полуплоскости и полосы / С. А. Калоеров, Е. С. Глушанков, А. Б. Мироненко // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2023. – № 4. – С. 23–37.
20. Калоеров С. А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С. А. Калоеров, О. А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 103–116.
21. Калоеров С. А. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С. А. Калоеров, Е. С. Горянская // Теорет. и прикл. механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 45–56.
22. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры / В. В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
23. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
24. Drmaç Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmaç, K. Veselić // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1322–1342.
25. Drmaç Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 / Z. Drmaç, K. Veselić // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1343–1362.
26. Калоеров С. А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих анизотропных сред / С. А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.
27. Калоеров С. А. Задачи электроупругого, магнитоупругого и упругого изгиба тонких плит, как частные случаи задачи электромагнитоупругого изгиба / С. А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2019. – № 3-4. – С. 58–79.
28. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Pt A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.
29. Yamamoto Y. Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures / Y. Yamamoto, K. Miya. – Amsterdam: Elsevier Sci. North Holland, 1987. – 450 p.
30. Hou P. F. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material / P. F. Hou, G.-H. Teng, H.-R. Chen // Mech. Materials. – 2009. – Vol. 41. – P. 329–338.

Поступила в редакцию 07.05.2024 г.

**SOLVING THE PROBLEM OF BENDING A MULTI-CONNECTED
PIEZO HALF-PLANE WITH APPROXIMATE SATISFACTION
OF BOUNDARY CONDITIONS ON A RECTILINEAR BOUNDARY**

S.A. Kaloerov, A.V. Seroshtanov

Using the complex potentials of the bending theory of thin piezo plates, the problem of bending a half-plane with holes and cracks arbitrarily located relative to each other and relative to a rectilinear boundary is solved. In this case, the functions holomorphic outside holes and cracks are decomposed into Laurent series, and the functions holomorphic in the lower half-planes are selected as functions holomorphic outside the imaginary symmetric contours in the upper half-planes. The determination of the coefficients of these series by the generalized least squares method is reduced to an overridden system of linear algebraic equations solved by the singular value decomposition method. The results of numerical investigations are described for a half-plane with a circular hole, including the output to a rectilinear boundary (the case of a half-plane with a recess), a half-plane with a circular hole and an edge crack from it in a jumper, including the output to a rectilinear boundary (the case of a half-plane with a circular hole and a crack between the hole and the boundary of the half-plane). The regularities of changes in the electro-magneto-elastic state of the plate depending on the geometric characteristics of holes and cracks, their mutual locations are investigated. It has been established that as the hole or crack approaches the rectilinear boundary, the values of the moments at the points of the jumper increase sharply, slightly changing in other zones

of the half-plane. A large concentration of moments is also observed at the points of the rectilinear boundary near the jumper. The values of these moments are especially large in the problem for a half-plane with a circular hole with an edge crack in the jumper. The values of bending moments are significantly affected by taking into account the piezoelectric properties of the material, especially in zones of high concentration of bending moments, therefore, in these cases, one cannot limit oneself to solving the problem of elasticity theory of plate bending, and one must solve the problem of electro-magneto-elasticity.

Keywords: thin piezo plate, half-plane, holes, cracks, jumper, complex potentials, generalized least squares method, concentration of bending moments, moment intensity coefficients.

Калоеров Стефан Алексеевич

доктор физико-математических наук, профессор;
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.

E-mail: kaloerov@mail.ru

Kaloerov Stefan Alekseevich

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor;
Donetsk State University, Donetsk, DPR, RF.

Сероштанов Александр Владимирович

аспирант, младший научный сотрудник;
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.

E-mail: aleks.serosht@gmail.com

Seroshtanov Aleksandr Vladimirovich

Postgraduate student, Junior Researcher;
Donetsk State University, Donetsk, DPR, RF.

МЕТОДИКА АНАЛИЗА СПЕКТРА СДВИГОВЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В ПЬЕЗОАКТИВНОМ СЛОЕ С СИММЕТРИЧНОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

© 2024. Д.С. Карасев, С.В. Сторожев, М.В. Фоменко

Представлена схема получения дисперсионных соотношений, описывающих спектры нормальных электроупругих волн в волноводе в виде слоя функционально-градиентной анизотропной пьезокерамики класса *bmm* с описываемой экспоненциальными зависимостями симметричной по толщине неоднородностью физико-механических свойств. Реализуемый подход базируется на выделении составляющих волновода в виде полуслоев с зеркальными картинками экспоненциальной неоднородности по толщине, на интегрировании уравнений распространения электроупругих волн сдвига в выделенных компонентах с применением метода Эйлера либо численно-аналитического векторно-матричного итерационного алгоритма и получении дисперсионных функций в качестве следствий из электромеханических краевых условий на внешних граничных плоскостях волновода и на поверхности контакта выделяемых компонентов слоя.

Ключевые слова: слой функционально-градиентной пьезокерамики, симметричная экспоненциальная неоднородность по толщине, электроупругие сдвиговые нормальные волны, дисперсионные соотношения, интегрирование систем волновых уравнений, численно-аналитическая методика, итерационный векторно-матричный алгоритм.

Введение и цели исследования. Новые модификации создаваемых на базе аддитивных технологий пьезокерамических функционально-градиентных материалов являются перспективными для инновационных технических решений в акустоэлектронике, приборостроении и целом ряде других современных научно-технических отраслей [1–6]. Комплекс связанных с этим актуальных вопросов, помимо прочего, включает исследования закономерностей распространения электроупругих волн в разнотипных волноводах из таких материалов [7, 8], и, в первую очередь, описание дисперсионных спектров анализируемых волн. В этой связи, целью представляемых в данной работе исследований является разработка теоретической численно-аналитической методики получения дисперсионных соотношения для находящихся обширное применение в высокотехнологичных приложениях нормальных связанных сдвиговых электроупругих волн применительно к волноводам в виде горизонтально-поляризованного пьезокерамического слоя-пластины с симметричной по толщине неоднородностью физико-механических свойств, описываемой экспоненциальными функциями.

Получение аналитических описаний для волновых полей. Рассматривается пространственное электроупругое тело в виде функционально-градиентного плоскопараллельного слоя, для геометрии которого в декартовых координатах $Ox_1x_2x_3$ вводится описание

$$V = V^{(+)} \cup V^{(-)}, \quad V^{(+)} = \{(x_2, x_3) \in R^2, x_1 \in [0, h]\}, \quad V^{(-)} = \{(x_2, x_3) \in R^2, x_1 \in [-h, 0]\}. \quad (1)$$

Материалами его компонент $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$ являются линейно-поляризованные вдоль оси Ox_3 анизотропные пьезокерамические материала класса *bmm* гексагональной системы с переменными вдоль координатного направления Ox_1 модулями упругости, параметрами плотности, пьезоэлектрическими и диэлектрическими параметрами, описываемыми двумя вариантами экспоненциальных функциональных распределений:

$$\begin{aligned} c_{ij}^{(\pm)}(x_1) &= c_{ij0} \exp(\pm \lambda x_1), \quad e_{ij}^{(\pm)}(x_1) = e_{ij0} \exp(\pm \lambda x_1), \\ \varepsilon_{ij}^{(\pm)}(x_1) &= \varepsilon_{ij0} \exp(\pm \lambda x_1), \quad \rho^{(\pm)}(x_1) = \rho_0 \exp(\pm \lambda x_1), \end{aligned} \quad (2)$$

либо

$$\begin{aligned} c_{ij}^{(\pm)}(x_1) &= c_{ij0} \exp(\pm \lambda x_1), \quad e_{ij}^{(\pm)}(x_1) = e_{ij0} \exp(\pm \lambda x_1), \quad \varepsilon_{ij}^{(\pm)}(x_1) = \varepsilon_{ij0} \exp(\pm \lambda x_1), \\ \rho^{(\pm)}(x_1) &= \rho_{0\lambda} \exp(\pm \lambda x_1) + \rho_{0\mu} \exp(\pm \mu x_1). \end{aligned} \quad (3)$$

Системы уравнений, описывающие связанное электроупругое динамическое деформирование в компонентах волновода при распространении в них вдоль оси Ox_2 электроупругих, поляризованных коллинеарно Ox_3 нормальных SH -волн, имеют исходный вид

$$\partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} - \rho(x_1) \ddot{u}_3 = 0, \quad \partial_1 D_1 + \partial_2 D_2 = 0, \quad \partial_j = \partial / \partial x_j \quad (j = \overline{1, 2}); \quad (4)$$

$$\sigma_{13} = c_{44}(x_1) \partial_1 u_3 + e_{15}(x_1) \partial_1 \varphi, \quad \sigma_{23} = c_{44}(x_1) \partial_2 u_3 + e_{15}(x_1) \partial_2 \varphi; \quad (5)$$

$$D_1 = -\varepsilon_{11}(x_1) \partial_1 \varphi + e_{15}(x_1) \partial_1 u_3, \quad D_2 = -\varepsilon_{11}(x_1) \partial_2 \varphi + e_{15}(x_1) \partial_2 u_3, \quad (6)$$

где, соответственно, $u_3(x_1, x_2, t)$, $\varphi(x_1, x_2, t)$ – комплексные функции волновых упругих перемещений и потенциала квазистатического электрического поля; σ_{13} , σ_{23} – комплексные функции напряжений сдвига; D_1 , D_2 – комплексные функции индукции квазистатического электрического поля. С учетом представлений (5), (6), уравнения (4) первоначально преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \partial_1 (c_{44} \partial_1 u_3) + c_{44} \partial_2^2 u_3 + \partial_1 (e_{15} \partial_1 \varphi) + e_{15} \partial_2^2 \varphi - \rho \ddot{u}_3 &= 0, \\ \partial_1 (e_{15} \partial_1 u_3) + e_{15} \partial_2^2 u_3 - \partial_1 (\varepsilon_{11} \partial_1 \varphi) - \varepsilon_{11} \partial_2^2 \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

и после введения представлений

$$u_3(x_1, x_2, t) = u_{30\pm}(x_1) \exp(-i(\omega t - kx_2)), \quad \varphi(x_1, x_2, t) = \varphi_{0\pm}(x_1) \exp(-i(\omega t - kx_2)), \quad (8)$$

для комплексных амплитудных характеристик волн с круговой частотой ω и волновым числом k , уравнения (7) для компонентов волновода $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$, в случае описания их физико-механических характеристик соотношениями (2), соответственно принимают вид

$$\begin{aligned} c_{440} \mu''_{30\pm}(x_1) + e_{150} \rho''_{0\pm}(x_1) + (\rho_0 \omega^2 - c_{440} k^2) u_{30\pm}(x_1) - e_{150} k^2 \varphi_{0\pm}(x_1) \pm \\ \pm \lambda (c_{440} \mu'_{30\pm}(x_1) + e_{150} \rho'_{0\pm}(x_1)) = 0, \\ e_{150} \mu''_{30\pm}(x_1) - \varepsilon_{110} \rho''_{0\pm}(x_1) - e_{150} k^2 u_{30\pm}(x_1) + \varepsilon_{110} k^2 \varphi_{0\pm}(x_1) \pm \lambda (e_{150} \mu'_{30\pm}(x_1) - \varepsilon_{110} \rho'_{0\pm}(x_1)) = 0; \end{aligned} \quad (9)$$

а в случае свойств, задаваемых соотношениями (3), записываются в виде

$$\begin{aligned} c_{440} \mu''_{30\pm}(x_1) + e_{150} \rho''_{0\pm}(x_1) + (\rho_{0\lambda} \omega^2 - c_{440} k^2) u_{30\pm}(x_1) - e_{150} k^2 \varphi_{0\pm}(x_1) \pm \\ \pm \lambda (c_{440} \mu'_{30\pm}(x_1) + e_{150} \rho'_{0\pm}(x_1)) = -\rho_{0\mu} \omega^2 \exp(\pm \gamma x_1) u_{30\pm}(x_1), \\ e_{150} \mu''_{30\pm}(x_1) - \varepsilon_{110} \rho''_{0\pm}(x_1) - c_{440} k^2 u_{30\pm}(x_1) + \varepsilon_{110} k^2 \varphi_{0\pm}(x_1) \pm \lambda (e_{150} \mu'_{30\pm}(x_1) - \varepsilon_{110} \rho'_{0\pm}(x_1)) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\gamma = \mu - \lambda$.

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений (9) интегрируются с применением метода Эйлера, в результат чего могут быть записаны представления

$$u_{30\pm}(x_1) = a_{1\pm} e^{\delta_{1\pm} x_1} + a_{2\pm} e^{\delta_{2\pm} x_1} + a_{3\pm} e^{\delta_{3\pm} x_1} + a_{4\pm} e^{\delta_{4\pm} x_1}, \quad (11)$$

$$\varphi_{0\pm}(x_1) = a_{1\pm} \tau_{1\pm} e^{\delta_{1\pm} x_1} + a_{2\pm} \tau_{2\pm} e^{\delta_{2\pm} x_1} + a_{3\pm} \tau_{3\pm} e^{\delta_{3\pm} x_1} + a_{4\pm} \tau_{4\pm} e^{\delta_{4\pm} x_1}. \quad (12)$$

Здесь $a_{j\pm}$ ($j = \overline{1, 4}$) – произвольные постоянные коэффициенты; $\delta_{j\pm}$ ($j = \overline{1, 4}$) – корни характеристических полиномиальных уравнений четвертой степени

$$\det \begin{pmatrix} c_{440}\delta^2 \pm \lambda c_{440}\delta + (\rho_0\omega^2 - c_{440}k^2) & e_{150}\delta^2 \pm \lambda e_{150}\delta - e_{150}k^2 \\ e_{150}\delta^2 \pm \lambda e_{150}\delta - e_{150}k^2 & -\varepsilon_{110}\delta^2 \mp \lambda \varepsilon_{110}\delta + \varepsilon_{110}k^2 \end{pmatrix} = \mathcal{G}_{\pm}(\delta)((c_{440}\varepsilon_{110} + e_{150}^2)\mathcal{G}_{\pm}(\delta) + \rho_0\varepsilon_{110}\omega^2) = 0, \quad (13)$$

где

$$\mathcal{G}_{\pm}(\delta) = \delta^2 \pm \lambda\delta - k^2.$$

Соответственно

$$\begin{aligned} \delta_{j\pm} &= (\mp\lambda + (-1)^j(\lambda^2 + 4k^2)^{1/2})/2 \quad (j = \overline{1, 2}); \\ \delta_{j\pm} &= (\mp\lambda + (-1)^j(\lambda^2 - 4((\rho_0\varepsilon_{110}\omega^2)(c_{440}\varepsilon_{110} + e_{150}^2)^{-1} - k^2)^{1/2})/2 \quad (j = \overline{3, 4}), \end{aligned} \quad (14)$$

откуда следует

$$\delta_{1+} = -\delta_{2-}, \quad \delta_{2+} = -\delta_{1-}, \quad \delta_{3+} = -\delta_{4-}, \quad \delta_{4+} = -\delta_{3-}, \quad (15)$$

$$\tau_{j+} = \tau_{j-} = \tau = e_{150}/\varepsilon_{110} \quad (j = \overline{1, 4}). \quad (16)$$

В процессе интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида (10) с применением схемы предложенного в работах [9–13] итерационного алгоритма они преобразуются к матричному виду

$$(\underline{A}_{1\pm}\partial_1^2 + \underline{A}_{2\pm}\partial_1 + \underline{A}_{3\pm})\underline{\Phi}_{\pm}(x_1) = \underline{B}_{\pm} \exp(\gamma x_1)\underline{\Phi}_{\pm}(x_1), \quad (17)$$

где

$$\underline{\Phi}_{\pm}(x_1) = \begin{pmatrix} u_{30\pm}(x_1) \\ \varphi_{0\pm}(x_1) \end{pmatrix}; \quad (18)$$

$\underline{A}_{1\pm}, \underline{A}_{2\pm}, \underline{A}_{3\pm}, \underline{B}_{\pm}$ – матрицы второго порядка с постоянными элементами вида:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{1\pm} &= \begin{pmatrix} c_{440} & e_{150} \\ e_{150} & -\varepsilon_{110} \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_{2\pm} = \begin{pmatrix} \pm \lambda c_{440} & \pm \lambda e_{150} \\ \pm \lambda e_{150} & \mp \lambda \varepsilon_{110} \end{pmatrix}, \\ \underline{A}_{3\pm} &= \begin{pmatrix} \rho_{0\lambda}\omega^2 - c_{440}k^2 & -e_{150}k^2 \\ -e_{150}k^2 & \varepsilon_{110}k^2 \end{pmatrix}, \quad \underline{B}_{\pm} = \begin{pmatrix} -\rho_{0\mu}\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (19)$$

Для искомых вектор-функций $\underline{\Phi}_{\pm}(x_1)$ вводятся представления

$$\underline{\Phi}_{\pm}(x_1) = \underline{\Phi}_{0\pm}(x_1) + \underline{\Phi}_{1\pm}(x_1) + \underline{\Phi}_{2\pm}(x_1) + \dots + \underline{\Phi}_{n\pm}(x_1) + \dots \quad (20)$$

в которых

$$(\underline{A}_{1\pm}\partial_1^2 + \underline{A}_{2\pm}\partial_1 + \underline{A}_{3\pm})\underline{\Phi}_{0\pm}(x_1) = 0, \quad (21)$$

$$(\underline{A}_{1\pm}\partial_1^2 + \underline{A}_{2\pm}\partial_1 + \underline{A}_{3\pm})\underline{\Phi}_{1\pm}(x_1) = e^{\pm\gamma x_1} \underline{B}_{\pm} \underline{\Phi}_{0\pm}(x_1), \dots, \quad (22)$$

$$(\underline{A}_{1\pm}\partial_1^2 + \underline{A}_{2\pm}\partial_1 + \underline{A}_{3\pm})\underline{\Phi}_{n\pm}(x_1) = e^{\pm\gamma x_3} \underline{B}_{\pm} \underline{\Phi}_{n-1,\pm}(x_3), \dots$$

При решении задач начального приближения (21) также применяется метод Эйлера, в результате реализации которого, в данном случае, с введением функций

$$\mathcal{G}_{\pm}(\tilde{\delta}) = \tilde{\delta}^2 \pm \lambda\tilde{\delta} - k^2 \quad (23)$$

записываются полиномиальные характеристические уравнения четвертой степени относительно параметра $\tilde{\delta}$

$$\mathcal{G}_{\pm}(\tilde{\delta})((c_{440}\varepsilon_{110} + e_{150}^2)\mathcal{G}_{\pm}(\tilde{\delta}) + \rho_{0\lambda}\varepsilon_{110}\omega^2) = 0$$

с корнями

$$\tilde{\delta}_{j\pm} = (\mp\lambda + (-1)^j(\lambda^2 + 4k^2)^{1/2})/2 \quad (j = \overline{1, 2}); \quad (24)$$

$$\tilde{\delta}_{j\pm} = (\mp\lambda + (-1)^j(\lambda^2 - 4((\rho_{0\lambda}\varepsilon_{110}\omega^2)(c_{440}\varepsilon_{110} + e_{150}^2)^{-1} - k^2)^{1/2})/2 \quad (j = \overline{3, 4}),$$

также обладающими свойствами (15). В итоге, базисные частные решения (21) также представляются в тождественном по структуре к (11), (12) виде

$$\underline{\Phi}_{0j\pm}(x_1) = \underline{\zeta}_{0j\pm} \exp(\tilde{\delta}_{j\pm}x_1), \quad \underline{\zeta}_{0j\pm} = (\varepsilon_{110}, e_{150})^T. \quad (25)$$

В результате последующего применения итерационного алгоритма (20) с выбором $\underline{\Phi}_{nj\pm}(x_1)$ в виде

$$\begin{aligned} \underline{\Phi}_{1j\pm}(x_1) &= \underline{\zeta}_{1j\pm} \exp((\tilde{\delta}_{j\pm} \pm \gamma)x_1), \quad \underline{\Phi}_{2j\pm}(x_1) = \underline{\zeta}_{2j\pm} \exp((\tilde{\delta}_{j\pm} \pm 2\gamma)x_1), \dots, \\ \underline{\Phi}_{nj\pm}(x_1) &= \underline{\zeta}_{nj\pm} \exp((\tilde{\delta}_{j\pm} \pm n\gamma)x_1), \end{aligned}$$

можно получить рекуррентные соотношения

$$\underline{\zeta}_{nj\pm} = \underline{Q}_{nj\pm}^{-1} \underline{B}_{\pm} \underline{\zeta}_{n-1,j\pm}, \quad \underline{Q}_{nj\pm} = \underline{A}_1(\tilde{\delta}_{j\pm} \pm n\gamma)^2 + \underline{A}_2(\tilde{\delta}_{j\pm} \pm n\gamma) + \underline{A}_3, \quad \underline{Q}_{nj+} = \underline{Q}_{nj-}.$$

Таким образом, базисные решения уравнения (17) имеют явные аналитические представления вида

$$\underline{\Phi}_{j\pm}(x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{\zeta}_{nj\pm} \exp((\tilde{\delta}_{j\pm} \pm n\gamma)x_1) = \begin{pmatrix} \Phi_{j\pm}^{(1)}(x_1) \\ \Phi_{j\pm}^{(2)}(x_1) \end{pmatrix} \quad (j = \overline{1, 4}), \quad (26)$$

в которых

$$\underline{\zeta}_{nj\pm} = \underline{Q}_{nj\pm}^{-1} \underline{B}_{\pm} \underline{Q}_{n-1,j\pm}^{-1} \underline{B}_{\pm} \dots \underline{Q}_{1j\pm}^{-1} \underline{B}_{\pm} \underline{\zeta}_{0j\pm}, \quad \underline{\zeta}_{nj+} = \underline{\zeta}_{nj-}.$$

Соответственно, в этом случае для дальнейших исследований можно использовать представления

$$u_{30\pm}(x_1) = \tilde{a}_{1\pm}\Phi_{1\pm}^{(1)}(x_1) + \tilde{a}_{2\pm}\Phi_{2\pm}^{(1)}(x_1) + \tilde{a}_{3\pm}\Phi_{3\pm}^{(1)}(x_1) + \tilde{a}_{4\pm}\Phi_{4\pm}^{(1)}(x_1), \quad (27)$$

$$\varphi_{0\pm}(x_1) = \tilde{a}_{1\pm}\Phi_{1\pm}^{(2)}(x_1) + \tilde{a}_{2\pm}\Phi_{2\pm}^{(2)}(x_1) + \tilde{a}_{3\pm}\Phi_{3\pm}^{(2)}(x_1) + \tilde{a}_{4\pm}\Phi_{4\pm}^{(2)}(x_1). \quad (28)$$

Формулировка основных дисперсионных соотношений. Задача исследования дисперсионных спектров сдвиговых электроупругих волн в рассматриваемых волноводах в виде пьезоактивного слоя с симметричной поперечной неоднородностью включает условие идеального электромеханического сопряжения его составляющих $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$ в контактной плоскости

$$(u_{30+}(x_1))_{x_1=0} = (u_{30-}(x_1))_{x_1=0}, \quad (29)$$

$$(\sigma_{130+}(x_1))_{x_1=0} = (\sigma_{130-}(x_1))_{x_1=0}, \quad (30)$$

$$(\varphi_{0+}(x_1))_{x_1=0} = (\varphi_{0-}(x_1))_{x_1=0}, \quad (31)$$

$$(D_{10+}(x_1))_{x_1=0} = (D_{10-}(x_1))_{x_1=0}, \quad (32)$$

где

$$\sigma_{130\pm}(x_1) = \exp(\pm\lambda x_1) (a_{1\pm}(c_{440} + e_{150}\tau)\delta_{1\pm}e^{\delta_{1\pm}x_1} + a_{2\pm}(c_{440} + e_{150}\tau)\delta_{2\pm}e^{\delta_{2\pm}x_1} + a_{3\pm}(c_{440} + e_{150}\tau)\delta_{3\pm}e^{\delta_{3\pm}x_1} + a_{4\pm}(c_{440} + e_{150}\tau)\delta_{4\pm}e^{\delta_{4\pm}x_1}), \quad (33)$$

$$D_{10\pm}(x_1) = \exp(\pm\lambda x_1) (a_{1\pm}(e_{150} - \varepsilon_{110}\tau)\delta_{1\pm}e^{\delta_{1\pm}x_1} + a_{2\pm}(e_{150} - \varepsilon_{110}\tau)\delta_{2\pm}e^{\delta_{2\pm}x_1} + a_{3\pm}(e_{150} - \varepsilon_{110}\tau)\delta_{3\pm}e^{\delta_{3\pm}x_1} + a_{4\pm}(e_{150} - \varepsilon_{110}\tau)\delta_{4\pm}e^{\delta_{4\pm}x_1}), \quad (34)$$

а также задание одного из четырех частных вариантов однородных краевых электромеханических условий на противоположных плоских гранях слоя: грани свободны от механических напряжений и покрыты тонкими короткозамкнутыми электродами

$$(\sigma_{13}(x_1, x_2, t))_{x_1=\pm h} = 0, \quad (\varphi(x_1, x_2, t))_{x_1=\pm h} = 0; \quad (35)$$

грани жестко закреплены и покрыты тонкими короткозамкнутыми электродами

$$(u_3(x_1, x_2, t))_{x_1=\pm h} = 0, \quad (\varphi(x_1, x_2, t))_{x_1=\pm h} = 0; \quad (36)$$

грани жестко закреплены и граничат с вакуумом (разреженным газом)

$$(u_3(x_1, x_2, t))_{x_1=\pm h} = 0, \quad (D_1(x_1, x_2, t))_{x_1=\pm h} = 0; \quad (37)$$

грани свободны от механических напряжений и граничат с вакуумом (разреженным газом)

$$(\sigma_{13}(x_1, x_2, t))_{x_1=\pm h} = 0, \quad (D_1(x_1, x_2, t))_{x_1=\pm h} = 0. \quad (38)$$

В случае описания неоднородности соотношениями (2), с учетом априори оговариваемых исходных вариантов свойств симметрии волновых движений по толщине зеркально симметричного относительно срединной плоскости по физико-механическим и геометрическим свойствам слоя-волновода и принимая во внимание соотношения (15), (16), можно сделать вывод о выполнении равенств для коэффициентов $a_{j\pm}$ ($j = \overline{1, 4}$):

– для симметричных нормальных сдвиговых волн

$$a_{1+} = a_{2-}, \quad a_{2+} = a_{1-}, \quad a_{3+} = a_{4-}, \quad a_{4+} = a_{3-}; \quad (39)$$

– для антисимметричных нормальных сдвиговых волн

$$a_{1+} = -a_{2-}, \quad a_{2+} = -a_{1-}, \quad a_{3+} = -a_{4-}, \quad a_{4+} = -a_{3-}. \quad (40)$$

При переходе в представлениях (11), (12) с учетом (39) либо (40) к множеству коэффициентов a_{j+} ($j = \overline{1, 4}$), и с использованием любой из эквивалентных пар контактных условий, например пары условий (29), (30), по схеме решения порождаемой этими условиями системы линейных алгебраических уравнений второго порядка, реализуется перевыражение коэффициентов a_{3+} , a_{4+} через a_{1+} , a_{2+} . При этом автоматически выполняется вторая пара контактных условий, и искомые дисперсионные соотношения $\Delta(\omega, k) = 0$ формируются как равенства нулю функциональных определителей для систем линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_{1+} , a_{2+} , следующих из соответствующих оговоренных краевых условий типа (35)–(38) на одной из внешних граней слоя.

В частности, для симметричных нормальных сдвиговых электроупругих волн в неоднородном пьезокерамическом слое, грани которого свободны от механических напряжений и покрыты тонкими короткозамкнутыми электродами, согласно описанной процедуре можно найти

$$\begin{aligned}
 a_{3+} &= ((\delta_{1+} - \delta_{4+})/(\delta_{4+} - \delta_{3+}))a_{1+} + ((\delta_{2+} - \delta_{4+})/(\delta_{4+} - \delta_{3+}))a_{2+}, \\
 a_{4+} &= ((\delta_{1+} - \delta_{3+})/(\delta_{3+} - \delta_{4+}))a_{1+} + ((\delta_{2+} - \delta_{3+})/(\delta_{3+} - \delta_{4+}))a_{2+}; \\
 \Delta(\omega, k) &= \det \|\eta_{pq}\| = 0 \quad (p, q = \overline{1, 2}), \\
 \eta_{11} &= e^{\delta_{1+}h} + ((\delta_{1+} - \delta_{4+})/(\delta_{4+} - \delta_{3+}))e^{\delta_{3+}h} + ((\delta_{1+} - \delta_{3+})/(\delta_{3+} - \delta_{4+}))e^{\delta_{4+}h}, \\
 \eta_{12} &= e^{\delta_{2+}h} + ((\delta_{2+} - \delta_{4+})/(\delta_{4+} - \delta_{3+}))e^{\delta_{3+}h} + ((\delta_{2+} - \delta_{3+})/(\delta_{3+} - \delta_{4+}))e^{\delta_{4+}h}, \\
 \eta_{21} &= \delta e^{\delta_{1+}h} + ((\delta_{1+} - \delta_{4+})/(\delta_{4+} - \delta_{3+}))\delta_{3+}e^{\delta_{3+}h} + ((\delta_{1+} - \delta_{3+})/(\delta_{3+} - \delta_{4+}))\delta_{4+}e^{\delta_{4+}h}, \\
 \eta_{22} &= \delta e^{\delta_{2+}h} + ((\delta_{2+} - \delta_{4+})/(\delta_{4+} - \delta_{3+}))\delta_{3+}e^{\delta_{3+}h} + ((\delta_{2+} - \delta_{3+})/(\delta_{3+} - \delta_{4+}))\delta_{4+}e^{\delta_{4+}h}.
 \end{aligned}$$

Аналогичной является схема получения дисперсионных соотношений для исследуемых нормальных электроупругих сдвиговых волн в случае описания неоднородности материала слоя соотношениями (3). Здесь, с учетом аналогичных (15) соотношений для величин $\tilde{\delta}_{j\pm}$ ($j = \overline{1, 4}$), а также выражений (26), используются связи коэффициентов \tilde{a}_{j+} и \tilde{a}_{j-} ; затем для \tilde{a}_{j+} ($j = \overline{1, 4}$) альтернативно ставятся условия выполнения контактных условий (29), (30) либо (31), (32) в которых

$$\begin{aligned}
 \sigma_{130\pm}(x_1) &= \exp(\pm\lambda x_1) (a_{1\pm}(c_{440}\partial_1\Phi_{1\pm}^{(1)}(x_1) + e_{150}\partial_1\Phi_{1\pm}^{(2)}(x_1)) + \\
 & a_{2\pm}(c_{440}\partial_1\Phi_{2\pm}^{(1)}(x_1) + e_{150}\partial_1\Phi_{2\pm}^{(2)}(x_1)) + \\
 & + a_{3\pm}(c_{440}\partial_1\Phi_{3\pm}^{(1)}(x_1) + e_{150}\partial_1\Phi_{3\pm}^{(2)}(x_1)) + a_{4\pm}(c_{440}\partial_1\Phi_{4\pm}^{(1)}(x_1) + e_{150}\partial_1\Phi_{4\pm}^{(2)}(x_1))), \quad (27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{10\pm}(x_1) &= \exp(\pm\lambda x_1) (a_{1\pm}(e_{150}\partial_1\Phi_{1\pm}^{(1)}(x_1) - \varepsilon_{110}\partial_1\Phi_{1\pm}^{(2)}(x_1)) + \\
 & a_{2\pm}(e_{150}\partial_1\Phi_{2\pm}^{(1)}(x_1) - \varepsilon_{110}\partial_1\Phi_{2\pm}^{(2)}(x_1)) + \\
 & + a_{3\pm}(e_{150}\partial_1\Phi_{3\pm}^{(1)}(x_1) - \varepsilon_{110}\partial_1\Phi_{3\pm}^{(2)}(x_1)) + a_{4\pm}(e_{150}\partial_1\Phi_{4\pm}^{(1)}(x_1) - \varepsilon_{110}\partial_1\Phi_{4\pm}^{(2)}(x_1))), \quad (28)
 \end{aligned}$$

и в форме решения системы линейных алгебраических уравнений второго порядка находятся выражения коэффициентов a_{3+} , a_{4+} через a_{1+} , a_{2+} , а затем в форме функционального определителя для матрицы системы однородных алгебраических уравнений относительно a_{1+} , a_{2+} , следующей из соответствующей пары оговариваемых краевых условий вида (35)–(38) на одной из граней слоя, определяется аналитическое представление искомой дисперсионной функции.

Заключение. Итогом представленных исследований является разработка численно-аналитической методики получения дисперсионных соотношений, описывающих спектры нормальных электроупругих волн в волноводе в виде слоя функционально-градиентной анизотропной пьезокерамики класса бтп с симметричной относительно срединной плоскости неоднородностью физико-механических свойств по толщине, описываемой экспоненциальными зависимостями. Реализуемый подход базируется на выделении составляющих волновода в виде полуслоев с зеркальными картинками экспоненциальной неоднородности по толщине, на аналитическом интегрировании уравнений распространения электроупругих волн сдвига в выделенных компонентах с применением метода Эйлера либо с использованием численно-аналитического векторно-матричного итерационного алгоритма, и на получении дисперсионных функций из электромеханических краевых условий на внешних граничных плоскостях волновода и поверхности контакта выделяемых компонентов слоя.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (номер госрегистрации 124012400354-0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. FGM: Design, processing and applications / Y. Miyamoto, W. A. Kaysser, B. H. Rabin et al. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 434 p.
2. Setter, N. Piezoelectric material and devices / N. Setter. – Lausanne, Switzerland: Swiss Federal Institute of Technology, 2002. – 518 p.
3. Birman, V. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures / V. Birman, L. W. Byrd // Appl. Mech. Rev. – 2007. – Vol. 60, No. 5. – P. 195–216.
4. Heywang, W. Piezoelectricity, evolution and future of a technology / W. Heywang, K. Lubitz, W. Wersing. – Berlin: Springer, 2008. – 581 p.
5. Uchino, K. Advanced Piezoelectric Materials. – Cambridge: Woodhead Publishing, 2011. – 696 p.
6. Lugovaya, M. A. Complex material properties of porous piezoelectric ceramics / M. A. Lugovaya, A. A. Naumenko, A. N. Rybyanets, S. A. Shcherbinin // Ferroelectrics. – 2015. – Vol. 484, Iss. 1. – P. 87–94.
7. Tanaka, S. Piezoelectric acoustic wave devices based on heterogeneous integration technology / S. Tanaka // Proceedings 2014 IEEE International Frequency Control Symposium (FCS) (Taipei, Taiwan). – 2014. – P. 1–4. – doi: 10.1109/FCS.2014.6859994.
8. Yang, J. Dynamic anti-plane problems of piezoceramics and applications in ultrasonics – a review / Jiashi Yang, Ji Wang // Acta Mechanica Solida Sinica. – 2008. – Vol. 21, Iss. 3. – P. 207–220. – <https://doi.org/10.1007/s10338-008-0824-3>.
9. Болнокин, В. Е. Анализ модели распространения сдвиговых упругих волн в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном геомассиве / В. Е. Болнокин, А. А. Глухов, В. И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022 – № 3 (80). – С. 14–19. – doi: 10.24412/0136-4545-2022-3-14-19. – EDN: BOBAVC.
10. Глухов, А. А. Интегрирование системы уравнений распространения произвольно ориентированных трехпарциальных поверхностных волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве / А. А. Глухов, В. И. Сторожев, В. А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022 – № 4 (81). – С. 15–22. – doi: 10.24412/0136-4545-2022-4-15-22. – EDN: JBNEKR.
11. Карасев, Д. С. Интегрирование уравнений распространения связанных электроупругих сдвиговых волн в полупространстве функционально-градиентной пьезокерамики / Д. С. Карасев, С. В. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022 – № 4 (81). – С. 47–52. – doi: 10.24412/0136-4545-2022-4-47-52. – EDN: RAPMNU.
12. Глухов, А. А. Анализ модели распространения поверхностных релеевских волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве с приграничной локализованной зоной неоднородности / А. А. Глухов, В. И. Сторожев, В. А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 2 (83). – С. 26–38. – doi: 10.24412/0136-4545-2023-2-26-38. – EDN: ETYFCH.
13. Карасев, Д. С. Интегрирование уравнений распространения локализованных сдвиговых электроупругих волн в функционально-градиентной пьезокерамике с двойной экспоненциальной неоднородностью / Д. С. Карасев, С. В. Сторожев, В. А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 2 (83). – С. 48–55. – doi: 10.24412/0136-4545-2023-2-48-55. – EDN: SPYBC.

Поступила в редакцию 22.05.2024 г.

METHOD FOR ANALYSIS OF THE SPECTRUM OF SHEAR ELECTROELASTIC WAVES IN A PIEZOACTIVE LAYER WITH SYMMETRICAL TRANSVERSE INHOMOGENEITY

D.S. Karasev, S.V. Storozhev, M.V. Fomenko

A scheme for obtaining dispersion relations describing the spectra of normal electroelastic waves in a waveguide in the form of a layer of functional-gradient anisotropic piezoceramics of class 6 mm with a thickness-symmetrical inhomogeneity of physical and mechanical properties described by exponential dependences is presented. The approach being implemented is based on identifying the components of the waveguide in the form of half-layers with mirror patterns of exponential inhomogeneity in thickness, on integrating the equations for the propagation of electroelastic shear waves in the selected components using the Euler method or a numerical-analytical vector-matrix iterative algorithm and obtaining dispersion functions as consequences of the electromechanical boundary conditions on the outer boundary planes of the waveguide and on the contact surface of the selected layer components.

Key words: layer of functional-gradient piezoceramics, symmetrical exponential inhomogeneity in thickness, electroelastic shear normal waves, dispersion relations, integration of systems of wave equations, numerical-analytical technique, iterative vector-matrix algorithm.

Карасев Дмитрий Сергеевич

аспирант кафедры теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: vektor8899@ya.ru.

Karasev Dmitry Sergeevich

Postgraduate, Chair of Elasticity Theory and Computational Mathematics named after Academician A.S. Kosmodamiansky,
Donetsk State University,
Donetsk, DPR, RF.

Сторожев Сергей Валериевич

доктор технических наук, доцент,
ведущий научный сотрудник ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: s.v.storozhev@donnasa.ru.

Storozhev Sergey Valerievich

Doctor of Technical Science, Docent,
Leading Researcher, Donetsk State University,
Donetsk, DPR, RF.

Фоменко Максим Владимирович

кандидат физико-математических наук;
ученый секретарь научно-исследовательской части,
старший научный сотрудник ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: maxim_fom@mail.ru

Fomenko Maksim Vladimirovich

Candidate of Phisico-Mathematical Sciences;
Scientific Secretary of the Research Department,
Senior Researcher, Donetsk State University,
Donetsk, DPR, RF.

ОДИН ИЗ СПОСОБОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА, ОБЛАДАЮЩЕГО ПЛОСКОСТЬЮ УПРУГОЙ СИММЕТРИИ

© 2024. *Р.Н. Нескородев, А.В. Зыза*

В работе предложен способ интегрирования трехмерных уравнений теории упругости анизотропного тела, обладающего плоскостью упругой симметрии. Найдены представления для перемещений и напряжений, удовлетворяющие уравнениям равновесия. Для случаев изгиба и растяжения-сжатия анизотропной пластины получены выражения для напряжений и перемещений, удовлетворяющие однородным граничным условиям на плоских гранях.

Ключевые слова: анизотропное тело, плоскость упругой симметрии, комплексные потенциалы, проекционно-сеточный метод, финитные функции.

Введение. В работе [1] на основе однородных решений изложены аналитические и численно-аналитические методы решения краевых задач трехмерной теории упругости для однородных и поперечно-неоднородных изотропных пластин. Анализ метода однородных решений в краевых задачах трехмерной теории упругости однородных по толщине изотропных плит посвящена обзорная статья [2]. В работе [3] найдены комплексные потенциалы, точно удовлетворяющие трехмерным уравнениям теории упругости ортотропного тела. Построение решения задачи для ортотропной пластинки проведено путем использования проекционно-сеточного метода по поперечной координате. В качестве базисных выбирались функции с конечными носителями. Построены выражения для напряжений и перемещений, удовлетворяющие однородным граничным условиям на плоских гранях.

В данной работе предложен способ интегрирования трехмерных уравнений теории упругости анизотропного тела, обладающего плоскостью упругой симметрии. Для случаев изгиба и растяжения-сжатия анизотропной пластины получены выражения для напряжений и перемещений, удовлетворяющие однородным граничным условиям на торцевых плоскостях пластины.

Постановка задачи и построение решения. Рассматривается упругое тело, которое занимает область Ω с граничной поверхностью $\partial\Omega$ трехмерного евклидова пространства R^3 . Оно является анизотропным, имеющим плоскость упругой симметрии и отнесенным к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$. Плоскость Ox_1x_2 совмещена с плоскостью упругой симметрии, а ось Ox_3 направлена по нормали к этой плоскости. Точка с координатами (x_1, x_2, x_3) образует переменную $T = x_1 + \mu x_2 + \alpha x_3$. Постоянные μ и α будут определены ниже в процессе решения уравнений равновесия. Для решения задач о напряженно-деформированном состоянии тела необходимо проинтегрировать уравнения равновесия в перемещениях для материала с плоскостью упругой симметрии. Эти уравнения имеют вид

$$\sum_{n=1}^3 P_{mn} u_n = 0 \quad (m = \overline{1,3}). \quad (1)$$

Здесь операторы P_{mn} представляются в форме

$$\begin{aligned} P_{11} &= L_{11} + A_{55}\partial_3^2, & P_{12} &= P_{21} = L_{12} + A_{45}\partial_3^2, & P_{13} &= P_{31} = L_{13}\partial_3, \\ P_{22} &= L_{22} + A_{44}\partial_3^2, & P_{23} &= P_{32} = L_{23}\partial_3, & P_{33} &= L_{33} + A_{33}\partial_3^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} L_{11} &= A_{11}\partial_1^2 + 2A_{16}\partial_1\partial_2 + A_{66}\partial_2^2, & L_{12} &= A_{16}\partial_1^2 + (A_{12} + A_{66})\partial_1\partial_2 + A_{26}\partial_2^2, \\ L_{22} &= A_{66}\partial_1^2 + 2A_{26}\partial_1\partial_2 + A_{22}\partial_2^2, & L_{33} &= A_{55}\partial_1^2 + 2A_{45}\partial_1\partial_2 + A_{44}\partial_2^2, \\ L_{13} &= (A_{13} + A_{55})\partial_1 + (A_{63} + A_{45})\partial_2, & L_{23} &= (A_{63} + A_{45})\partial_1 + (A_{23} + A_{44})\partial_2. \end{aligned}$$

В соотношениях (2) величины A_{ij} – модули упругости, входящие в уравнения обобщенного закона Гука; $\partial_k = \partial / \partial x_k$ ($k = \overline{1,3}$).

Функции перемещений $u_n(x_1, x_2, x_3)$ представляются в форме

$$u_n(x_1, x_2, x_3) = \delta_n \Psi(T), \quad (3)$$

где $\Psi(T)$ – произвольная функция линейной формы $T = x_1 + \mu x_2 + \alpha x_3$; δ_n – постоянные величины.

После подстановки представлений (3) в уравнения (1) получается однородная систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{n=1}^3 p_{mn} \delta_n \frac{d^2 \Psi}{dT^2} = 0 \quad (m = \overline{1,3}). \quad (4)$$

Элементы p_{mn} получаются из соотношений (2) заменой в операторах P_{mn} величин L_{mn} , ∂_1 , ∂_2 , ∂_3 соответственно на l_{mn} , 1 , μ , α .

Однородная система (4) имеет решение, если ее определитель равен нулю

$$\Delta(\alpha, \mu) = |p_{mn}| = 0. \quad (5)$$

Постоянные величины δ_n выбираются таким образом, чтобы при подстановке представлений (3) в систему (4) два уравнения удовлетворялись тождественно, а третье давало бы условие (5). Очевидно, в качестве таких величин нужно взять алгебраические дополнения к элементам m -й строки матрицы системы (5). В этом случае все уравнения системы (4), кроме m -го, удовлетворяются тождественно, а m -е уравнение примет вид (5).

Раскрывая определитель, представим его в виде полинома по степеням параметра α

$$\Delta(\alpha, \mu) = \alpha^6 Q_0 + \alpha^4 Q_2 + \alpha^2 Q_4 + \alpha^0 Q_6 = 0. \quad (6)$$

Здесь через $Q_i(\mu)$ обозначены величины

$$Q_0 = A_{33}(A_{44}A_{55} - A_{45}^2), \quad Q_6 = l_{33}(l_{11}l_{22} - l_{12}^2),$$

$$Q_2 = 2A_{45}l_{13}l_{23} - A_{44}l_{13}^2 - A_{55}l_{23}^2 + (A_{44}A_{55} - A_{45}^2)l_{33} + A_{33}(A_{44}l_{11} + A_{55}l_{22} - 2A_{45}l_{12}),$$

$$Q_4 = 2l_{12}l_{13}l_{23} - l_{22}l_{13}^2 - l_{11}l_{23}^2 + l_{33}(A_{44}l_{11} + A_{55}l_{22}) - 2A_{45}l_{33}l_{12} + A_{33}(l_{11}l_{22} - l_{12}^2).$$

Для $m=1$ представления (3) будут такими

$$\begin{aligned} u_1 &= (p_{22}p_{33} - p_{23}p_{32})\Psi_1(T) = \left[l_{22}l_{33} + (A_{33}l_{22} + A_{44}l_{33} - l_{23}^2)\alpha^2 + A_{44}A_{33}\alpha^4 \right] \Psi_1, \\ u_2 &= (p_{31}p_{23} - p_{21}p_{33})\Psi_1(T) = \left[-l_{21}l_{33} + (l_{13}l_{23} - A_{33}l_{21} - A_{45}l_{33})\alpha^2 - A_{45}A_{33}\alpha^4 \right] \Psi_1, \\ u_3 &= (p_{21}p_{32} - p_{31}p_{22})\Psi_1(T) = \left[(l_{21}l_{32} - l_{31}l_{22})\alpha + (A_{45}l_{32} - A_{44}l_{31})\alpha^3 \right] \Psi_1; \end{aligned} \quad (7)$$

для $m=2$

$$\begin{aligned} u_1 &= (p_{32}p_{13} - p_{12}p_{33})\Psi_2(T) = \left[-l_{12}l_{33} + (l_{32}l_{31} - A_{33}l_{12} - A_{45}l_{33})\alpha^2 - A_{45}A_{33}\alpha^4 \right] \Psi_2, \\ u_2 &= (p_{11}p_{33} - p_{13}p_{31})\Psi_2(T) = \left[l_{11}l_{33} + (A_{33}l_{11} + A_{55}l_{33} - l_{13}^2)\alpha^2 + A_{55}A_{33}\alpha^4 \right] \Psi_2, \\ u_3 &= (p_{21}p_{31} - p_{11}p_{32})\Psi_2(T) = \left[(l_{12}l_{31} - l_{11}l_{32})\alpha + (A_{45}l_{31} - A_{55}l_{32})\alpha^3 \right] \Psi_2; \end{aligned} \quad (8)$$

для $m=3$

$$\begin{aligned} u_1 &= (p_{12}p_{23} - p_{22}p_{13})\alpha\Psi_3(T) = \left[(l_{12}l_{32} - l_{22}l_{13})\alpha + (A_{45}l_{32} - A_{44}l_{13})\alpha^3 \right] \alpha\Psi_3, \\ u_2 &= (p_{21}p_{31} - p_{11}p_{23})\alpha\Psi_3(T) = \left[(l_{21}l_{31} - l_{11}l_{23})\alpha + (A_{45}l_{31} - A_{55}l_{23})\alpha^3 \right] \alpha\Psi_3, \\ u_3 &= (p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21})\alpha\Psi_3(T) = \left[(l_{11}l_{22} - l_{12}^2) + (A_{44}l_{11} + A_{55}l_{22} - 2A_{45}l_{12})\alpha^2 + \right. \\ &\quad \left. + (A_{44}A_{55} - A_{45}^2)\alpha^4 \right] \alpha\Psi_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Каждая функция $\Psi_m(T)$ ($m=1,2,3$), входящая в представления (7)–(9), удовлетворяет уравнению (4).

Очевидно, что определитель (6) можно обратить в ноль бесконечным числом способов, меняя параметры μ и α .

Предлагается величины μ определять при малом значении параметра α . Если положить $\alpha=0$, то значения параметра μ определяются из условия

$$\Delta(0, \mu) = Q_6 = (l_{11}l_{22} - l_{12}^2)l_{33} = 0. \quad (10)$$

Определяются шесть комплексно-сопряженных корней μ_k , $\bar{\mu}_k$ ($k=\overline{1,3}$).

Считается, что параметры μ_1 и μ_2 удовлетворяют уравнению $l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = 0$, а μ_3 является корнем уравнения $l_{33} = 0$.

Для определения параметров α используется уравнение (6). Из этого уравнения следует, что каждому значению параметра $\mu = \mu_k$ соответствует шесть параметров $\pm\alpha_{kp}$ ($p=\overline{1,3}$). Для получения шести параметров α_{kp} , значения параметров μ_k следует изменить на малую величину, например, μ_k положить равным $\mu_k(1-\varepsilon)$, где ε – малая величина.

Для найденных таким образом параметров $\mu = \mu_k$ и $\alpha = \pm \alpha_{kp}$ уравнения (1) удовлетворяются тождественно и решение может быть записано в виде суммы соответствующих функций и их сопряженных значений

$$\begin{aligned} u_n &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \sum_{p=1}^3 \delta_{nkp} (\psi_{kp} + \varphi_{kp}) \quad (n=1,2), \\ u_3 &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \sum_{p=1}^3 \delta_{3kp} (\psi_{kp} - \varphi_{kp}). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь функции $\psi_{kp} = \psi_{kp}(T_{kp}^+)$, $\varphi_{kp} = \varphi_{kp}(T_{kp}^-)$, $T_{kp}^\pm = z_k \pm \alpha_{kp} x_3$, $z_k = x_1 + \mu_k x_2$.

В качестве параметров δ_{nkp} приняты коэффициенты к функциям (7) – (9)

$$\begin{aligned} \delta_{11p} &= P_{22}P_{33} - P_{23}P_{32}, \quad \delta_{21p} = P_{31}P_{23} - P_{21}P_{33}, \\ \delta_{31p} &= P_{21}P_{32} - P_{31}P_{22}, \quad P_{mn} = P_{mn}(\mu_1, \alpha_{1p}), \\ \delta_{12p} &= P_{32}P_{13} - P_{12}P_{33}, \quad \delta_{22p} = P_{11}P_{33} - P_{13}P_{31}, \\ \delta_{32p} &= P_{21}P_{31} - P_{11}P_{32}, \quad P_{mn} = P_{mn}(\mu_2, \alpha_{2p}), \\ \delta_{13p} &= (P_{12}P_{23} - P_{22}P_{13})\alpha_{3p}, \quad \delta_{23p} = (P_{21}P_{31} - P_{11}P_{23})\alpha_{3p}, \\ \delta_{33p} &= (P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21})\alpha_{3p}, \quad P_{mn} = P_{mn}(\mu_3, \alpha_{3p}). \end{aligned} \quad (12)$$

Выражения для напряжений запишутся так

$$\begin{aligned} \sigma_i &= (A_{i1}\partial_1 + A_{i6}\partial_2)u_1 + (A_{i6}\partial_1 + A_{i2}\partial_2)u_2 + A_{i3}\partial_3u_3 = \\ &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \sum_{p=1}^3 s_{ikp} (\psi'_{kp} + \varphi'_{kp}) \quad (i=1,2,3,6); \end{aligned} \quad (13)$$

$$s_{ikp} = (A_{i1} + A_{i6}\mu_k)\delta_{1kp} + (A_{i6} + A_{i2}\mu_k)\delta_{2kp} + A_{i3}\delta_{3kp}\alpha_{kp}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_i &= A_{i5}\partial_3u_1 + A_{i4}\partial_3u_2 + (A_{i5}\partial_1 + A_{i4}\partial_2)u_3 = \\ &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \sum_{p=1}^3 s_{ikp} (\psi'_{kp} - \varphi'_{kp}) \quad (i=4,5), \end{aligned} \quad (15)$$

$$s_{ikp} = A_{i5}\delta_{1kp}\alpha_{kp} + A_{i4}\delta_{2kp}\alpha_{kp} + (A_{i5} + A_{i4}\mu_k)\delta_{3kp}. \quad (16)$$

Полученные представления для напряжений (13) и (15), а также перемещений (11) используются для построения алгоритма решения задач изгиба и растяжения-сжатия пластин.

Задачи изгиба и растяжения-сжатия пластин. Рассматривается многосвязная пластина толщиной $2h$, отнесенная к декартовой системе координат, так что ее срединная плоскость совпадает с плоскостью Ox_1x_2 , а ось Ox_3 направлена по нормали к этой плоскости. Пластина ограничена внешней $\partial\Omega_0$ и рядом внутренних цилиндрических поверхностей $\partial\Omega_\nu$. Образующие этих поверхностей нормальны

основаниям пластины. Последние называют торцевыми плоскостями или плоскими гранями. Внешние усилия действуют на боковой поверхности пластины, а плоские грани свободны от нагрузки, то есть

$$\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0 \quad \text{при} \quad x_3 = \pm h. \quad (17)$$

При построении решения используется идея финитных функций по переменной x_3 [4]. Для этого на отрезке $x_3 \in [-h, h]$ вводятся подобласти $\Omega_{-1} = [-h, 0)$ и $\Omega_1 = [0, h]$. На этих подобластях строятся базисные функции с носителями, равными Ω_{-1} и Ω_1 . Так, функции ψ_{kp} и φ_{kp} , через которые выражаются перемещения и напряжения задаются с аргументами $z_k + \alpha_{kp}(x_3 + h)$ и $z_k - \alpha_{kp}(x_3 + h)$ соответственно в подобласти Ω_{-1} и с аргументами $z_k + \alpha_{kp}(x_3 - h)$ и $z_k - \alpha_{kp}(x_3 - h)$ в подобласти Ω_1 .

Далее функции ψ_{kp} и φ_{kp} будем представлять в форме

$$\begin{aligned} \psi_{kp} [z_k + \alpha_{kp}(x_3 + h)] &= -\gamma_{kp} \Psi_k [z_k + \alpha_{kp}(x_3 + h)], \\ \varphi_{kp} [z_k - \alpha_{kp}(x_3 + h)] &= -r_{kp} \Psi_k [z_k - \alpha_{kp}(x_3 + h)] \quad (k = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (18)$$

в подобласти Ω_{-1} ;

$$\begin{aligned} \psi_{kp} [z_k + \alpha_{kp}(x_3 - h)] &= r_{kp} \Psi_k [z_k + \alpha_{kp}(x_3 - h)], \\ \varphi_{kp} [z_k - \alpha_{kp}(x_3 - h)] &= \gamma_{kp} \Psi_k [z_k - \alpha_{kp}(x_3 - h)] \quad (k = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (19)$$

в подобласти Ω_1 .

Здесь r_{kp} и γ_{kp} постоянные, которые определяются из граничных условий (17).

Представления для напряжений в подобласти Ω_{-1} будут такими

$$\begin{aligned} \sigma_i &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \sum_{p=1}^3 s_{ikp} \left[-\gamma_{kp} \Psi'_k (I_{kp}^+) - r_{kp} \Psi'_k (I_{kp}^-) \right] \quad (i = 1, 2, 3, 6), \\ \sigma_i &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \sum_{p=1}^3 s_{ikp} \left[-\gamma_{kp} \Psi'_k (I_{kp}^+) + r_{kp} \Psi'_k (I_{kp}^-) \right] \quad (i = 4, 5), \end{aligned} \quad (20)$$

$$I_{kp}^+ = z_k + \alpha_{kp}(x_3 + h), \quad I_{kp}^- = z_k - \alpha_{kp}(x_3 + h).$$

В подобласти Ω_1 представления для напряжений примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_i &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \sum_{p=1}^3 s_{ikp} \left[r_{kp} \Psi'_k (T_{kp}^+) + \gamma_{kp} \Psi'_k (T_{kp}^-) \right] \quad (i = 1, 2, 3, 6), \\ \sigma_i &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \sum_{p=1}^3 s_{ikp} \left[r_{kp} \Psi'_k (T_{kp}^+) - \gamma_{kp} \Psi'_k (T_{kp}^-) \right] \quad (i = 4, 5), \end{aligned} \quad (21)$$

$$T_{kp}^+ = z_k + \alpha_{kp}(x_3 - h), \quad T_{kp}^- = z_k - \alpha_{kp}(x_3 - h).$$

Анализ представлений (20) и (21) показывает, что в сечениях $x_3 = -h_*$ и $x_3 = h_*$ ($0 < h_* \leq h$) напряжения σ_i ($i = 1, 2, 3, 6$) кососимметричны относительно срединной

плоскости, а при $i = 4, 5$ симметричны, что соответствует задаче изгиба пластин. Если в представлениях (20) принять величины r_{kp} и γ_{kp} с обратным знаком, то придем к задаче растяжения-сжатия пластин.

Это обстоятельство позволяет решать задачи изгиба и растяжения-сжатия только в подобласти Ω_1 . В подобласти Ω_{-1} компоненты перемещений и напряжений определяются в соответствии с симметрией или антисимметрией относительно срединной плоскости.

Рассмотрим вопрос определения постоянных r_{kp} и γ_{kp} . Удовлетворяя условиям (17) находим уравнения

$$\begin{aligned}\sigma_3|_{x_3=h} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \sum_{p=1}^3 s_{3kp} (r_{kp} + \gamma_{kp}) \psi_k(z_k) = 0, \\ \sigma_3|_{x_3=-h} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \sum_{p=1}^3 s_{3kp} (-\gamma_{kp} - r_{kp}) \psi_k(z_k) = 0, \\ \sigma_i|_{x_3=h} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \sum_{p=1}^3 s_{ikp} (r_{kp} - \gamma_{kp}) \psi_k(z_k) = 0, \\ \sigma_i|_{x_3=-h} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \sum_{p=1}^3 s_{ikp} (-\gamma_{kp} + r_{kp}) \psi_k(z_k) = 0 \quad (i = 4, 5).\end{aligned}\tag{22}$$

Приравнявая выражения при одинаковых функциях нулю, получим системы уравнений

$$s_{3k1}(r_{k1} + \gamma_{k1}) + s_{3k2}(r_{k2} + \gamma_{k2}) + s_{3k3}(r_{k3} + \gamma_{k3}) = 0;\tag{23}$$

$$s_{4k1}(r_{k1} - \gamma_{k1}) + s_{4k2}(r_{k2} - \gamma_{k2}) + s_{4k3}(r_{k3} - \gamma_{k3}) = 0,$$

$$s_{5k1}(r_{k1} - \gamma_{k1}) + s_{5k2}(r_{k2} - \gamma_{k2}) + s_{5k3}(r_{k3} - \gamma_{k3}) = 0 \quad (k = \overline{1, 3}).\tag{24}$$

Решение уравнения (23) можно записать в следующем виде

$$r_{k1} + \gamma_{k1} = \Delta_{1k} a_{0k}, \quad r_{k2} + \gamma_{k2} = \Delta_{2k} a_{0k}, \quad r_{k3} + \gamma_{k3} = \Delta_{3k} a_{0k},\tag{25}$$

где

$$\Delta_{1k} = s_{3k2} a_{1k} - s_{3k3} a_{2k}, \quad \Delta_{2k} = s_{3k3} a_{3k} - s_{3k1} a_{1k}, \quad \Delta_{3k} = s_{3k1} a_{2k} - s_{3k2} a_{3k},$$

$$a_{0k} = \left(\Delta_{1k}^2 + \Delta_{2k}^2 + \Delta_{3k}^2 \right)^{-1/2}, \quad a_{1k}, a_{2k}, a_{3k} - \text{произвольные постоянные.}$$

Из уравнений (24) можно получить

$$r_{k1} - \gamma_{k1} = \eta_{1k} b_{0k}, \quad r_{k2} - \gamma_{k2} = \eta_{2k} b_{0k}, \quad r_{k3} - \gamma_{k3} = \eta_{3k} b_{0k},\tag{26}$$

где

$$\eta_{1k} = s_{4k2} s_{5k3} - s_{4k3} s_{5k2}, \quad \eta_{2k} = s_{4k3} s_{5k1} - s_{4k1} s_{5k3}, \quad \eta_{3k} = s_{4k1} s_{5k2} - s_{4k2} s_{5k1},$$

$$b_{0k} = a_{4k} \left(\eta_{1k}^2 + \eta_{2k}^2 + \eta_{3k}^2 \right)^{-1/2}, \quad a_{4k} - \text{произвольная постоянная.}$$

Из соотношений (25) и (26) находятся

$$r_{k1} = (\Delta_{1k} a_{0k} + \eta_{1k} b_{0k}) / 2, \quad \gamma_{k1} = (\Delta_{1k} a_{0k} - \eta_{1k} b_{0k}) / 2,$$

$$\begin{aligned} r_{k2} &= (\Delta_{2k} a_{0k} + \eta_{2k} b_{0k}) / 2, & \gamma_{k2} &= (\Delta_{2k} a_{0k} - \eta_{2k} b_{0k}) / 2, \\ r_{k3} &= (\Delta_{3k} a_{0k} + \eta_{3k} b_{0k}) / 2, & \gamma_{k3} &= (\Delta_{3k} a_{0k} - \eta_{3k} b_{0k}) / 2. \end{aligned} \quad (27)$$

При таких значениях постоянных (27), граничные условия (17) на плоских гранях удовлетворяются тождественно.

Заключение. Таким образом, в трехмерной постановке найдено решение уравнений равновесия в перемещениях (11) для анизотропного тела, имеющего плоскость упругой симметрии через произвольные функции ψ_{kp} и ϕ_{kp} обобщенных комплексных переменных T_{kp}^{\pm} . Для задач изгиба и растяжения-сжатия пластин найдены представления, удовлетворяющие граничным условиям на плоских гранях. Окончательные структуры решения задач о напряженно-деформированном состоянии пластин можно записать для подобласти Ω_1 в форме для перемещений

$$\begin{aligned} u_n &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \sum_{p=1}^3 \delta_{nkp} \left[r_{kp} \psi_k \left(T_{kp}^+ \right) + \gamma_{kp} \psi_k \left(T_{kp}^- \right) \right] \quad (n=1, 2), \\ u_3 &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \sum_{p=1}^3 \delta_{3kp} \left[r_{kp} \psi_k \left(T_{kp}^+ \right) - \gamma_{kp} \psi_k \left(T_{kp}^- \right) \right] \end{aligned}$$

и напряжений (21).

Произвольные функции $\psi_k \left(T_{kp}^{\pm} \right)$ определяются из граничных условий на боковой поверхности пластины.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» при финансовой поддержке Азово-Черноморского математического центра (Соглашение от 29.02.2024 № 075-02-2024-1446).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алтухов Е.В. Равновесие и установившиеся колебания изотропных пластин / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2014. – 436 с.
2. Алтухов Е.В. Однородные решения краевых задач трехмерной теории упругости изотропных тел. Однородные плиты / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Вестник ДонНУ. Сер. А.: Естественные науки. – 2017. – № 3. – С. 34 – 79.
3. Нескородев Н.М. Построение однородных решений трехмерных задач теории упругости для ортотропного тела / Н.М. Нескородев // Теорет. и прикладная механика. – 1986. – Вып. 17. – С. 3-7.
4. Марчук Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г.И. Марчук, В.И. Агошков. – М.: Наука, 1981. – 416 с.

Поступила в редакцию 14.05.2024 г.

ONE OF THE METHODS TO INTEGRATE THREE-DIMENSIONAL EQUATIONS OF THE THEORY OF ELASTICITY OF AN ANISOTROPIC BODY WITH A PLANE OF ELASTIC SYMMETRY

R.N. Neskorojev, A.V. Zyza

The paper proposes a method for integrating three-dimensional equations of the theory of elasticity of an anisotropic body with a plane of elastic symmetry. For the cases of bending and stretching-compression of an anisotropic plate, expressions for stresses and displacements satisfying homogeneous boundary conditions on flat faces are obtained.

Keywords: anisotropic body, plane of elastic symmetry, complex potentials, projection-grid method, finite functions.

Нескородев Роман Николаевич

доктор физико-математических наук, доцент;
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный
университет», г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: nrromn72@mail.ru

Neskorodev Roman Nikolaevich

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Docent;
Donetsk State university, Donetsk, DPR, RF.

Зыза Александр Васильевич

доктор физико-математических наук, доцент;
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный
университет», г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: z9125494@mail.ru

Zyza Alexander Vasilievich

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Docent;
Donetsk State University, Donetsk, DPR, RF.

ДИСПЕРСИЯ НОРМАЛЬНЫХ СДВИГОВЫХ ВОЛН В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОМ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ СЛОЕ© 2024. *В.И. Сторожев, А.А. Глухов*

Представлена методика исследования дисперсионных характеристик нормальных горизонтально поляризованных сдвиговых упругих волн, распространяющихся вдоль произвольно ориентированного направления в плоскости слоя из функционально-градиентного трансверсально-изотропного материала с различными экспоненциальными законами изменения модулей упругости и параметра плотности по толщине слоя. Приведены примеры расчетной реализации методики.

Ключевые слова: функционально-градиентный трансверсально-изотропный слой, экспоненциальная неоднородность по толщине, нормальные сдвиговые упругие волны, дисперсионные уравнения, расчетный анализ спектров, влияние параметров неоднородности.

Введение и цели исследования. Создаваемые на базе применения аддитивных технологий 3D печати конструкционные элементы из новых модификаций функционально-градиентных материалов [1, 2] получают все более широкое и эффективное применение во многих современных научно-технических отраслях – от электроники и приборостроения, до

При этом прочностные проектные расчеты, связанные с оценками воздействий на такие конструкции высокочастотных динамических нагружений, а также анализ ряда их функциональных характеристик при использовании таких элементов в качестве волноводов упругих волн [3], предполагают исследование закономерностей распространения волн деформаций в различных типах конструкционных элементов из непрерывно-неоднородных функционально-градиентных анизотропных материалов и, прежде всего, изучение структурных особенностей дисперсионных спектров нормальных упругих волн различных типов. При этом, несмотря на наличие цикла исследований, касающихся проблем распространения нормальных сдвиговых волн в конструкционных элементах в виде неоднородных пластин (слоя) [4–7], различные аспекты актуальной проблемы учета анизотропии и разнотипной непрерывной неоднородности материалов этих конструкций при изучении дисперсионных свойств нормальных сдвиговых упругих волн остаются неизученными. В этой связи, целью данной работы является разработка численно-аналитической методики получения дисперсионных соотношений для нормальных горизонтально поляризованных сдвиговых упругих волн, распространяющихся вдоль произвольно ориентированного направления в плоскости слоя из функционально-градиентного трансверсально-изотропного материала с различными экспоненциальными законами изменения модулей упругости и параметра плотности по толщине слоя, а также анализ отдельных случаев расчетной реализации методики.

Постановка задачи и получение основных дисперсионных соотношений. Рассматривается упругий волновод в виде функционально-градиентного трансверсально-изотропного слоя, занимающего в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ область

$$V = \{(x_1, x_2) \in R^2, 0 \leq x_3 \leq h\}, \quad (1)$$

и составленного из трансверсально-изотропного материала, обладающего свойствами поперечной экспоненциальной неоднородности. Представления для модулей упругости $c_{ij}(x_3)$ и плотности $\rho(x_3)$ материала слоя соответственно имеют вид

$$c_{ij}(x_3) = c_{ij0} \exp(\lambda_c x_3), \quad \rho(x_3) = \rho_0 \exp(\lambda_\rho x_3), \quad (2)$$

где λ_c, λ_ρ – действительные значения параметров неоднородности. Уравнение стационарного динамического деформирования волновода в случае распространяющихся вдоль координатного направления Ox_1 сдвиговых горизонтально поляризованных волн с циклической частотой ω , волновым числом k и комплексной функцией напряженности

$$u_2(x_1, x_3, t) = u_{20}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)) \quad , \quad (3)$$

для рассматриваемого случая трансформируются в уравнение для определения комплексной амплитудной функции $u_{20}(x_3)$, имеющее вид

$$e^{\lambda_c x_3} (c_{440} \partial_3^2 u_{20}(x_3) + c_{440} \lambda_c \partial_3 u_{20}(x_3) - c_{660} k^2 u_{20}(x_3)) + e^{\lambda_\rho x_3} \rho_0 \omega^2 u_{20}(x_3) = 0, \quad (4)$$

$$\partial_3 = \partial / \partial x_3,$$

и после введения переобозначений

$$u_{20}(x_3) = f(x_3), \quad \alpha = \lambda_c, \quad \beta = -c_{660} k^2 / c_{440}, \quad \gamma = -\rho_0 \omega^2 / c_{440}, \quad \lambda = \lambda_c - \lambda_\rho, \quad (5)$$

записываемое в форме

$$f'' + \alpha f' + \beta f = \gamma e^{-\lambda x_3} f. \quad (6)$$

Для интегрирования (6) может быть применена схема описываемого в работах [8–12] итерационного алгоритма, в рамках которого

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_p + \dots, \quad (7)$$

$$f_0'' + \alpha f_0' + \beta f_0 = 0, \quad f_1'' + \alpha f_1' + \beta f_1 = \gamma e^{-\lambda x_3} f_0, \quad \dots, \quad (8)$$

$$f_p'' + \alpha f_p' + \beta f_p = \gamma e^{-\lambda x_3} f_{p-1} \quad (p = \overline{1, \infty}).$$

Соответственно, записывая $f_0(x_3)$ в форме

$$f_0(x_3) = C_1 e^{\delta_1 x_3} + C_2 e^{\delta_2 x_3}, \quad \delta_j = -(\alpha / 2) + (-1)^j ((\alpha / 2)^2 - \beta)^{1/2} \quad (j = \overline{1, 2}), \quad (9)$$

с произвольными коэффициентами c_j , далее строятся два базисных частных решения $f^{(j)}(x_3)$ уравнения (6), отвечающие выбору $f_{0j} = A_{0j} e^{\delta_j x_3}$, $f_{pj} = A_{pj} e^{(\delta_j - p\lambda)x_3}$, где согласно алгоритму (7)

$$A_{pj} = \gamma ((\delta_j - p\lambda)^2 + \alpha(\delta_j - p\lambda) + \beta)^{-1} A_{p-1,j}, \quad A_{0j} = 1, \quad (10)$$

или

$$f^{(j)}(x_3) = e^{\delta_j x_3} + \sum_{p=1}^{\infty} A_{pj} e^{(\delta_j - p\lambda)x_3} \quad (11)$$

$$A_{pj} = \gamma^p \prod_{q=1}^p ((\delta_j - q\lambda)^2 + \alpha(\delta_j - q\lambda) + \beta)^{-1}. \quad (12)$$

Соответствующие выражения для амплитудных функций динамических напряжений в исследуемых волновых полях могут быть записаны в форме

$$\sigma_{12}(x_3) = ikc_{660} \exp(\lambda_c x_3) u_{20}(x_3) = ikc_{660} \exp(\lambda_c x_3) (C_1 f^{(1)}(x_3) + C_2 f^{(2)}(x_3)), \quad (13)$$

$$\sigma_{23}(x_3) = c_{440} \exp(\lambda_c x_3) u'_{20}(x_3) = c_{440} \exp(\lambda_c x_3) (C_1 (f^{(1)}(x_3))' + C_2 (f^{(2)}(x_3))'), \quad (14)$$

$$(f^{(j)}(x_3))' = \delta_j e^{\delta_j x_3} + \sum_{p=1}^{\infty} (\delta_j - p\lambda) A_{pj} e^{(\delta_j - p\lambda)x_3}. \quad (15)$$

Применительно к рассматриваемому волновому процессу рассматриваются следующие варианты граничных условий на гранях слоя $x_3 = 0$, $x_3 = h$:

жесткое закрепление обеих граней

$$u_{20}(0) = u_{20}(h) = 0; \quad (16)$$

обе грани свободны

$$\sigma_{230}(0) = \sigma_{230}(h) = 0; \quad (17)$$

грань $x_3 = 0$ свободна, а грань $x_3 = h$ жестко закреплена

$$\sigma_{230}(0) = u_{20}(h) = 0; \quad (18)$$

грань $x_3 = 0$ жестко закреплена, а грань $x_3 = h$ свободна

$$u_{20}(0) = \sigma_{230}(h) = 0. \quad (19)$$

В частном случае $\lambda_p = \lambda_c$ выражение для $u_{20}(x_3)$ будет иметь вид

$$u_{20}(x_3) = A_1 \exp(\zeta_1 x_3) + A_2 \exp(\zeta_2 x_3), \quad (20)$$

где

$$\zeta_q = -\lambda_c / 2 + (-1)^{q+1} ((\lambda_c / 2)^2 - \chi)^{1/2}, \quad \chi = (\rho_0 \omega^2 - c_{660} k^2) / c_{440}. \quad (21)$$

Дисперсионное уравнение для нормальных волн исследуемого типа в случае задания на гранях слоя крайних условий (16) может быть записано в форме

$$F_1(\omega, k) = \begin{vmatrix} f^{(1)}(0) & f^{(2)}(0) \\ f^{(1)}(h) & f^{(2)}(h) \end{vmatrix} = 0, \quad (22)$$

а в частном случае $\lambda_p = \lambda_c$

$$F_1(\omega, k) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \exp(\zeta_1 h) & \exp(\zeta_2 h) \end{vmatrix} = \exp(-(\lambda_c / 2)h) (\exp(i\mathcal{G}h) - \exp(-i\mathcal{G}h)) = 0, \quad (23)$$

$$\mathcal{G} = (\chi - (\lambda_c / 2)^2)^{1/2},$$

откуда следует

$$\sin(\mathcal{G}h) = 0, \quad \mathcal{G}_p = p\pi / h, \quad (p = \overline{1, \infty}). \quad (24)$$

Соответственно, для мод рассматриваемых волн в данном частном случае следуют представления

$$\omega = \varphi_p^{(1)}(k, \lambda, h, \rho_0, c_{440}, c_{660}) = ((c_{440} / \rho_0) ((c_{660} / c_{440}) k^2 + (\lambda_c / 2)^2 + (p\pi / h)^2))^{1/2} \quad (p = \overline{1, \infty}), \quad (25)$$

а при переводе (25) в безразмерную форму с введением параметров приведенной нормированной частоты $\bar{\omega} = (\rho_0 \omega^2 h^2 / c_{440})^{1/2}$ и нормированного волнового числа $\bar{k} = kh$

$$\bar{\omega} = \bar{\varphi}_p^{(1)}(k, \lambda, h, \rho_0, c_{440}, c_{660}) = (\Delta_c \bar{k}^2 + (\Delta_\lambda / 2)^2 + (p\pi)^2)^{1/2}, \Delta_c = c_{660} / c_{440}, \Delta_\lambda = \lambda_c h. \quad (26)$$

Из выражений (26) следует, что значения приведенных частот запирания $\bar{\omega}_p^* = ((\Delta_\lambda / 2)^2 + (p\pi)^2)^{1/2}$ бегущих нормальных волн в исследуемом спектре с ростом значения параметра неоднородности λ_c увеличиваются, однако уравнение асимптоты для этих мод $\bar{\omega} = \Delta_c^{1/2} \bar{k}$ в коротковолновом высокочастотном диапазоне от параметра неоднородности не зависит.

Дисперсионное уравнение для случая краевых условий (17) может быть записано в форме

$$F_2(\omega, k) = \begin{vmatrix} (f^{(1)}(0))' & (f^{(2)}(0))' \\ (f^{(1)}(h))' & (f^{(2)}(h))' \end{vmatrix} = 0, \quad (27)$$

а в частном случае $\lambda_\rho = \lambda_c$

$$\begin{aligned} F_2(\omega, k) &= \begin{vmatrix} \varsigma_1 & \varsigma_2 \\ \varsigma_1 \exp(\varsigma_1 h) & \varsigma_2 \exp(\varsigma_2 h) \end{vmatrix} = \varsigma_1 \varsigma_2 (\exp(\varsigma_2 h) - \exp(\varsigma_1 h)) = \\ &= \varsigma_1 \varsigma_2 \exp(-(\lambda / 2)h) (\exp(i\mathcal{G}h) - \exp(-i\mathcal{G}h)) = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

и, в свою очередь,

$$\varsigma_1 = 0, \varsigma_2 = 0, \sin(\mathcal{G}h) = 0. \quad (29)$$

Для случая краевых условий (18) дисперсионное уравнение может быть представлено в виде

$$F_3(\omega, k) = \begin{vmatrix} (f^{(1)}(0))' & (f^{(2)}(0))' \\ f^{(1)}(h) & f^{(2)}(h) \end{vmatrix} = 0, \quad (30)$$

а в частном случае $\lambda_\rho = \lambda_c$

$$F_3(\omega, k) = \begin{vmatrix} \varsigma_1 & \varsigma_2 \\ \exp(\varsigma_1 h) & \exp(\varsigma_2 h) \end{vmatrix} = \varsigma_1 \exp(\varsigma_2 h) - \varsigma_2 \exp(\varsigma_1 h) = 0. \quad (31)$$

Наконец, для случая краевых условий (19) дисперсионное уравнение имеет форму

$$F_4(\omega, k) = \begin{vmatrix} f^{(1)}(0) & f^{(2)}(0) \\ (f^{(1)}(h))' & (f^{(2)}(h))' \end{vmatrix} = 0, \quad (32)$$

а в частном случае $\lambda_\rho = \lambda_c$

$$F_3(\omega, k) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \varsigma_1 \exp(\varsigma_1 h) & \varsigma_2 \exp(\varsigma_2 h) \end{vmatrix} = \varsigma_2 \exp(\varsigma_2 h) - \varsigma_1 \exp(\varsigma_1 h) = 0.$$

Результаты численных исследований. Описываемые выражениями (26) фрагменты действительных ветвей спектра на диаграммах дисперсионных кривых для функционально-градиентного слоя со значениями параметров c_{440} , c_{660} , ρ_0 ,

отвечающими керамике «цирконат-титанат свинца» $c_{440} = 2.49 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $c_{660} = 2.39 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\rho_0 = 7.51 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, и, соответственно, с $\Delta_c = 0.96$, для случаев $\lambda_c = 0$, $\lambda_c = 4$ и $\lambda_c = 10$ представлены на рис. 1. Введенные на рисунке обозначения p_j для дисперсионных кривых соответствуют номерам j рассчитываемых мод и дополняются соответствующими данными о величинах λ_c .

Данные аналогичных расчетов для неоднородного слоя со значениями параметров c_{440} , c_{660} , ρ_0 , отвечающими монокристаллическому цинку $c_{440} = 3.78 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $c_{660} = 6.86 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\rho_0 = 7.13 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, и, соответственно, с $\Delta_c = 1.81$, для случаев $\lambda_c = 0$, $\lambda_c = 4$ и $\lambda_c = 10$ представлены на рис. 2.

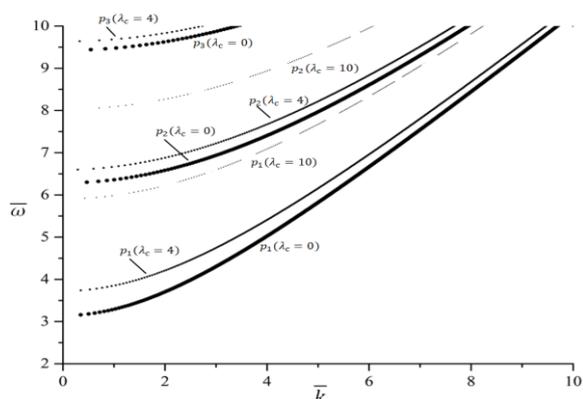


Рис. 1

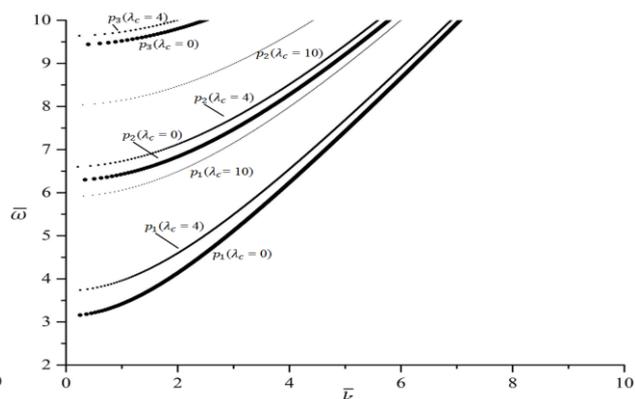


Рис. 2

Наконец, данные расчетов для неоднородного слоя со значениями параметров c_{440} , c_{660} , ρ_0 , отвечающими монокристаллу сульфида кадмия $c_{440} = 3.78 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $c_{660} = 6.86 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\rho_0 = 7.13 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, и, соответственно, с $\Delta_c = 0.112$, для случаев $\lambda_c = 0$, $\lambda_c = 4$ и $\lambda_c = 10$ представлены на рис. 3.

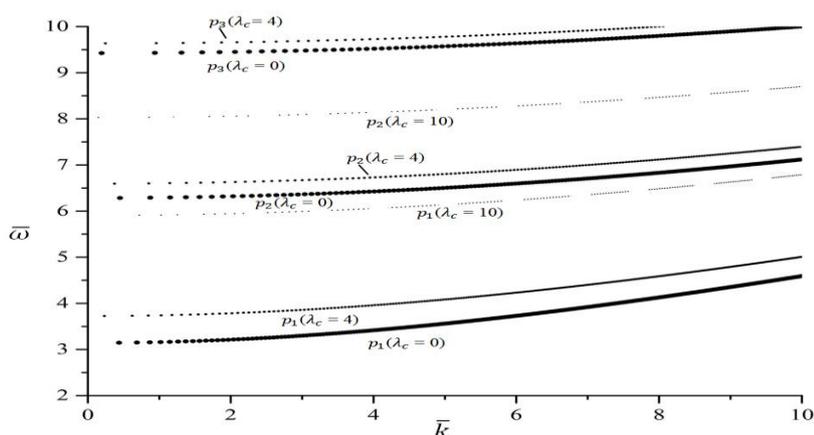


Рис. 3

Представленные расчетные результаты иллюстрируют меру роста значений нормированных частот запертия для бегущих нормальных волн в исследуемом спектре с ростом значения параметра неоднородности λ_c , а также соответствующие

степени различия в траекториях дисперсионных кривых. Приведенные данные иллюстрируют и увеличение фазовых скоростей бегущих волн из соответствующих ветвей спектра с ростом параметра неоднородности.

Заключение. В результате представленных в работе исследований разработана численно-аналитическая методика получения основных дисперсионных соотношений, являющихся основой для анализа спектральных характеристик нормальных горизонтально поляризованных сдвиговых упругих волн, распространяющихся вдоль произвольно ориентированного направления в плоскости слоя из функционально-градиентного трансверсально-изотропного материала с различными экспоненциальными законами изменения модулей упругости и параметра плотности по толщине слоя. В рамках вычислительных экспериментов на основе описанной методики проанализирована мера роста значений нормированных частот запираения для бегущих нормальных волн в исследуемом спектре с ростом значения параметра неоднородности λ_c , а также получена оценка степени различия в траекториях соответствующих дисперсионных кривых, указывающей на увеличение фазовых скоростей бегущих волн из соответствующих ветвей спектра с ростом параметра неоднородности.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (номер госрегистрации 124012400354-0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Birman, V. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures / V. Birman, L.W. Byrd // Appl. Mech. Rev. – 2007. – Vol. 60, No. 5. – P. 195–216.
2. Miyamoto, Y. FGM: Design, processing and applications / Y. Miyamoto, W. A. Kaysser, B. H. Rabin et al. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 434 p.
3. Упругие волноводы: история и современность / В. В. Мелешко, А. А. Бондаренко, С. А. Довгий, А. Н. Трофимчук, Г. Я. ван Хейст // Математические методы и физико-механические поля. – 2008. – Т. 51, № 2. – С. 86–104.
4. Sahu, S. A. SH-Waves in Viscoelastic Heterogeneous Layer over Half-Space with Self-Weight / S. A. Sahu, P. K. Saroj, N. Dewangan // Arch. Appl. Mech. – 2014. – Vol. 84, No. 2. – P. 235–245.
5. Kumar, S. Propagation of SH-Type Waves in Inhomogeneous Anisotropic Layer Overlying an Anisotropic Viscoelastic Half-Space / S. Kumar, P. C. Pal, S. Bose // Int. J. Eng. Sci. Tech. – 2014. – Vol. 6, No. 4. – DOI: 10.4314/ijest.v6i4.3
6. Sultana, R. Study of SH-type wave propagating in an anisotropic layer sandwiched between an orthotropic medium and an in-homogeneous half-space / R. Sultana, S. Gupta // Journal of Physics Conference Series. – 2015. – Vol. 662, No. 1. – P. 012002.
7. Kumar, S. Propagation of SH-wave in a corrugated viscous sandy layer sandwiched between two elastic half-spaces / S. Kumar // Journal Waves in Random and Complex Media – 2017 – Vol. 27, Iss. 2 – P. 213–240.
8. Болнокин, В. Е. Анализ модели распространения сдвиговых упругих волн в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном геомассиве / В. Е. Болнокин, А. А. Глухов, В. И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 3 (80). – С. 14–19. – DOI: 10.24412/0136-4545-2022-3-14-19. – EDN: BOBVC.
9. Глухов, А. А. Интегрирование системы уравнений распространения произвольно ориентированных трехпарциальных поверхностных волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве / А. А. Глухов, В. И. Сторожев, В. А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 4 (81). – С. 15–22. – DOI: 10.24412/0136-4545-2022-4-15-22. – EDN: JBNEKR.
10. Глухов, А. А. Волны Лява в структуре «однородный изотропный слой на трансверсально-изотропном полупространстве с двойной экспоненциальной неоднородностью» / А. А. Глухов, В. И. Сторожев, В. А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 1 (82). – С. 32–39. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-1-32-39. – EDN: ENGOVX.
11. Глухов, А. А. Анализ модели распространения поверхностных релеевских волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве с приграничной локализованной зоной неоднородности

/ А. А. Глухов, В. И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 2 (83). – С. 26–38. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-2-26-38. – EDN: EYUFCH.

12. Глухов, А. А. Локализованные волны сдвига в поперечно-неоднородном анизотропном слое между неоднородными полупространствами / А. А. Глухов, И. А. Моисеенко, В. И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 3(84). – С. 93–101. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-3-93-101. – EDN: UUH6XN.

Поступила в редакцию 22.05.2024 г.

DISPERSION OF NORMAL SHEAR WAVES IN A FUNCTIONAL-GRADIENT TRANSVERSAL-ISOTROPIC LAYER

V.I. Storozhev, A.A. Glukhov

A technique for studying the dispersion characteristics of normal horizontally polarized shear elastic waves propagating along an arbitrarily oriented direction in the plane of a layer made of a functional-gradient transversally isotropic material with different exponential laws of change in the elastic modulus and density parameter along the thickness of the layer is presented. Examples of computational implementation of the methodology are given.

Keywords: functional-gradient transversely isotropic layer, exponential inhomogeneity in thickness, normal shear elastic waves, dispersion equations, computational analysis of spectra, influence of inhomogeneity parameters.

Сторожев Валерий Иванович

доктор технических наук, профессор;
заведующий кафедрой теории упругости и
вычислительной математики им. акад.
А.С. Космодамианского, главный научный
сотрудник ФГБОУ ВО «Донецкий
государственный университет»,
г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: stvistvi@mail.ru

Storozhev Valeriy Ivanovich

Doctor of Technical Sciences, Professor,
Head of Chair of Elasticity Theory and Computational
Mathematics named after Academician
A.S. Kosmodamiansky, Chief researcher,
Donetsk State University, Donetsk, DPR, RF.

Глухов Антон Александрович

аспирант кафедры теории упругости и
вычислительной математики им. акад.
А.С. Космодамианского, младший научный
сотрудник ФГБОУ ВО «Донецкий
государственный университет»,
г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: antonglukhov2012@yandex.com

Glukhov Anton Alexandrovich

Postgraduate of the Chair of Elasticity Theory and
Computational Mathematics named after Academician
A.S. Kosmodamiansky, Junior researcher,
Donetsk State University,
Donetsk, DPR, RF.

СИНТЕЗ И ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЕРБОРАТА НАТРИЯ© 2024. *Е.Е. Белоусова, Е.В. Хомутова, Н.В. Яблочкова*

Предложены оптимальные условия синтеза пербората натрия при химическом взаимодействии тетрабората натрия, пероксида водорода и гидроксида натрия в пероксидной среде. На основании данных химического анализа и физико-химических исследований проведена его идентификация, установлено, что стехиометрический состав $\text{NaBO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ зависит от концентрации исходных реагентов и температуры синтеза. Методами термогравиметрического, рентгенофазового анализа и ИК-спектроскопии проведены термоаналитические исследования четырехводного кристаллогидрата, определены условия его термической устойчивости и образования перборатов с меньшим содержанием кристаллогидратной воды. Физико-химическими методами изучено взаимодействие пербората натрия с биологически активным гидроксиапатитом кальция и рекомендованы составы для коррекции цвета зубов.

Ключевые слова: физико-химические исследования, химический состав, перборат натрия, термическая устойчивость, гидроксиапатит кальция, коррекция цвета зубов, стоматологические композиции.

Введение. В настоящее время актуальным и своевременным в стоматологии, косметике, бытовой химии и текстильной промышленности является направление по поиску отбеливающих и дезинфицирующих материалов, не обладающих токсическим действием, но оказывающих желаемый результат в зависимости от целевого назначения. К таким веществам, на наш взгляд, можно отнести пербораты некоторых биогенных s-элементов (натрия, калия, кальция), разработке способа синтеза которых уделяется особое внимание с целью достижения высококачественных параметров по составу, чистоте и свойствам [1–4]. При этом достаточно перспективным является создание материалов для коррекции цвета зубов, которые бы оказывали не только внешний, но и терапевтический эффект. Биологически активный гидроксиапатит кальция, известный по своим свойствам как заменитель костной ткани, может служить основой таких стоматологических композиций [5–8]. Поэтому целью данной работы являлось: оптимизация условий синтеза пербората натрия, идентификация состава, физико-химическое исследование термических свойств и его поведения в составе композиции с гидроксиапатитом кальция.

Экспериментальная часть. Материалы и методы исследования.

Исходные вещества. Для синтеза в качестве исходного борсодержащего сырья был использован очищенный методом перекристаллизации кристаллогидрат тетрабората натрия состава $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$. Количество молей кристаллогидратной воды контролировали термогравиметрическим методом. Гидроксид натрия должен содержать основного вещества не менее 98 мас.%, а массовая доля пероксида водорода должна составлять при синтезе не менее 20 %.

ИК-спектроскопический анализ. Инфракрасные (ИК) спектры образцов в матрице из KBr записывали на ИК-спектрометре с преобразователем Фурье

FTIR “Spectrum BXII” (Perkin-Elmer) в области волновых чисел $\nu = 400 - 4000 \text{ см}^{-1}$ ($\delta = \pm 0,8 \text{ см}^{-1}$).

Рентгенофазовый анализ. Рентгенофазовый анализ (РФА) проводили на дифрактометре ДРОН – 3М. Скорость вращения счетчика при обзорной съемке для установления фазового состава образцов составляла 2 град/мин. Определение фазового состава проводили с помощью программы Match (ICDD).

Дифференциально-термический анализ. Дифференциально-термический анализ (ДТА) проводили на дериватографе Q-1500D системы Paulik-Paulik-Erdey, в динамическом режиме нагрева в диапазоне температур 20–850 °С ($\delta = \pm 10 \text{ °С}$) в алундовых тиглях без крышки в среде неподвижного воздуха. Скорость нагревания составляла $5 \text{ °С} \cdot \text{мин}^{-1}$. Как образец сравнения использовали оксид алюминия.

Методика эксперимента. В основу метода синтеза было положено взаимодействие тетрабората натрия (буры) и гидроксида натрия в перексиде водорода согласно реакции:

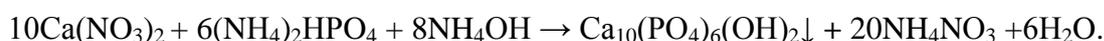


В известных методах [1–4] получения перборатов натрия целевой продукт получается с определенным количеством нежелательных для использования в медицине примесей исходного борсодержащего сырья и карбоната натрия. Это связано с введением избыточного количества щелочи, которое негативно влияет на полноту протекающей в суспензии реакции, в результате которой образуется смесь из перборатов натрия разной водности и не прореагировавших исходных борсодержащих соединений (метабората натрия или буры). Бесконтрольное введение гидроксида натрия может привести к нежелательному его избыточному содержанию в конечном продукте, а также карбонату натрия, образующегося в процессе синтеза. Использование 60–90 мас.% пероксида водорода также не технологично, на наш взгляд, поскольку работа с такой высокой концентрацией требует соблюдения определенных правил техники безопасности.

В связи с этим при исследовании условий синтеза пербората натрия медицинского назначения определялись оптимальные соотношения исходных компонентов с учетом таких важных факторов как: приготовление начальных растворов буры и щелочи различной концентрации; выбор интервала концентраций пероксида водорода и его количества для получения концентрированного раствора; порядок введения исходного сырья в реактор. При этом следует добиваться получения однородного раствора, но не суспензии, как в известных методиках. Гидроксид натрия следует вводить строго в стехиометрическом количестве. Приготовленная смесь исходных растворов выдерживалась при комнатной температуре с фиксированием времени выпадения кристаллического продукта. Было также изучено влияние процесса охлаждения раствора пербората натрия для ускорения его кристаллизации. Полученный осадок отделялся фильтрованием, высушивался при комнатной температуре и идентифицировался его состав.

Синтезированный продукт исследовался методом дифференциально-термического анализа с последующим изучением его поведения в стоматологической композиции с гидроксиапатитом кальция.

Биологически активный гидроксиапатит кальция был получен по ранее разработанной методике [9] путем осаждения его из растворов нитрата кальция ($\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$) и гидрофосфата аммония $(\text{NH}_4)_2\text{HPO}_4$ в аммиачной среде по реакции :



Полученный гидроксипатит кальция после фильтрования высушивался на воздухе с последующей термической обработкой при температуре 800 °С и идентифицировался методом рентгенофазового анализа.

Измерения значений рН проводилось на иономере “И-160” при $298 \pm 0,5$ К (ошибка 0,05 ед. рН) со стеклянными электродами, отградуированными по стандартному буферному раствору.

Обсуждение результатов. Поскольку к веществам медицинского назначения предъявляются особые требования по чистоте и составу, то при выборе оптимальных условий синтеза придерживались следующих критериев оценки целевого продукта: стехиометрический состав, технологичность, возможность получения продукта за один синтез массой не менее 0,5 килограмма.

Результаты данных исследований приведены в таблице 1, где указаны условия синтеза, включающие влияние концентрации буры и щелочи, концентрацию и количество пероксида водорода, порядок смешивания исходных веществ в ходе синтеза с учетом их агрегатного состояния (твердое вещество или раствор), температуру синтеза и выдерживания при ней конечного продукта. При этом фиксировалось время образования пербората натрия, его дисперсность и выход.

По данным рентгенофазового анализа и времени кристаллизации целевого продукта следует считать, что синтез, когда реагирующие вещества при смешивании образуют суспензию (опыт 1) при стехиометрическом количестве пероксида водорода и комнатной температуре, не приводит к ожидаемому результату. Возможно, что термическая обработка такой суспензии, как приведено в работе [2], может и приводит к синтезу пербората натрия, однако стехиометрический состав такого соединения вызывает сомнение.

Использование высоких концентраций исходных реагентов в перекисных растворах (опыты 2 и 3) также не целесообразно из-за образования продукта в аморфном состоянии, который на воздухе достаточно длительно переходит в кристаллическое состояние, а на рентгенограмме этого образца фиксируются незначительной интенсивности рефлексии примесных фаз.

Снижение концентрации ниже оптимальной 2М буры и 4М щелочи имеет негативное влияние на процесс кристаллизации, как и понижение температуры раствора. Порядок смешивания исходных веществ существенно не влияет на конечный результат, но с технологической точки зрения целесообразно растворять буру в перексиде водорода и добавлять в полученный раствор сухую щелочь, чем смешивать исходные растворы. Пероксид водорода можно использовать в стехиометрическом соотношении или в 3–5-кратном избытке, а его концентрация может варьироваться от 20 до 30 %.

Таким образом оптимальными, на наш взгляд, являются следующие условия синтеза пербората натрия $\text{NaBO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ (опыт 5): концентрация буры составляет 2–4 моль/л, а щелочи 4–8 моль/л, пероксида водорода 30 % и 3-х кратный избыток, температура синтеза комнатная (20–25 °), порядок смешивания следующий: в насыщенный раствор буры при перемешивании добавляется твердый гидроксид натрия и полученный раствор выдерживается в течение суток при комнатной температуре. Образование осадка наблюдается после 6 часов. Однако для полного соаждения пербората натрия рекомендуется выдерживание его в маточном растворе в течение суток. Выход конечного продукта составляет 87–90 %.

Таблица 1

Зависимость фазового состава пербората натрия от условий его синтеза

№ опыта	Концентрация C_m (моль/л) при мольном соотношении $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7:\text{NaOH} = 1:2$		H_2O_2		Порядок смешивания исходных веществ и агрегатное состояние смеси	Т, °С синтеза	Время кристаллизации NaBO_3	Качественный состав осадков по данным РФА
	C_B	C_{Na}	ω , %	V (объем)				
1	5	10	25	По стехиометрии	Добавление H_2O_2 в смесь сухих веществ. Суспензия.	20÷25 °С	24 часа	$\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ аморфное состояние
2	4	8	20	В 2,5 раз больше	Добавление H_2O_2 в смесь сухих веществ. Раствор.	—/—	—/—	перборат натрия с примесью, аморфное состояние
3	4	8	25	В 2,5 раз больше	Добавление H_2O_2 в смесь сухих веществ. Раствор.	—/—	—/—	$\text{NaBO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ аморфный, на воздухе переходит в кристаллический
4	2	5	30	Избыток в 3 раза	Смешаны растворы буры и щелочи в H_2O_2 . Раствор.	20÷25 °С (24 часа) 10 °С (24 часа).	10 °С (24 часа)	$\text{NaBO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ кристаллический
5	2	4	30	Избыток в 3 раза	В раствор буры добавлена сухая щелочь. Раствор.	—/—	20÷25 °С (24 часа)	—/—
6	2	5	30	Избыток в 5 раз	Смешаны исходные растворы. Раствор.	7 суток при 10 °С	24 часа	$\text{NaBO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ мелкодисперсный
7	1	1	30	Избыток в 3–5 раз	Добавление H_2O_2 в смесь сухих веществ. Раствор.	72 часа при 20÷25 °С	24 часа	—/—

Для идентификации полученного пербората натрия использовался метод химического, рентгенофазового анализа и ИК-спектроскопия.

Результаты химического анализа подтверждают состав, предложенный следующей формулой: $\text{NaBO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$.

Найдено(%)	Na	B	H_2O
	14,88	7,08	46,70
Вычислено(%)	14,94	7,14	46,75

В результате изменения условий высушивания синтезированного продукта наблюдалось образование пербората натрия с разным количеством кристаллогидратной воды, что было установлено физико-химическими методами анализа.

Физико-химические исследования пербората натрия. Поскольку перборат натрия можно использовать как отбеливатель в разных целях, то практический интерес представляет его термическая устойчивость.

Результаты термогравиметрического анализа представлены на рис. 1 и в таблице 2.

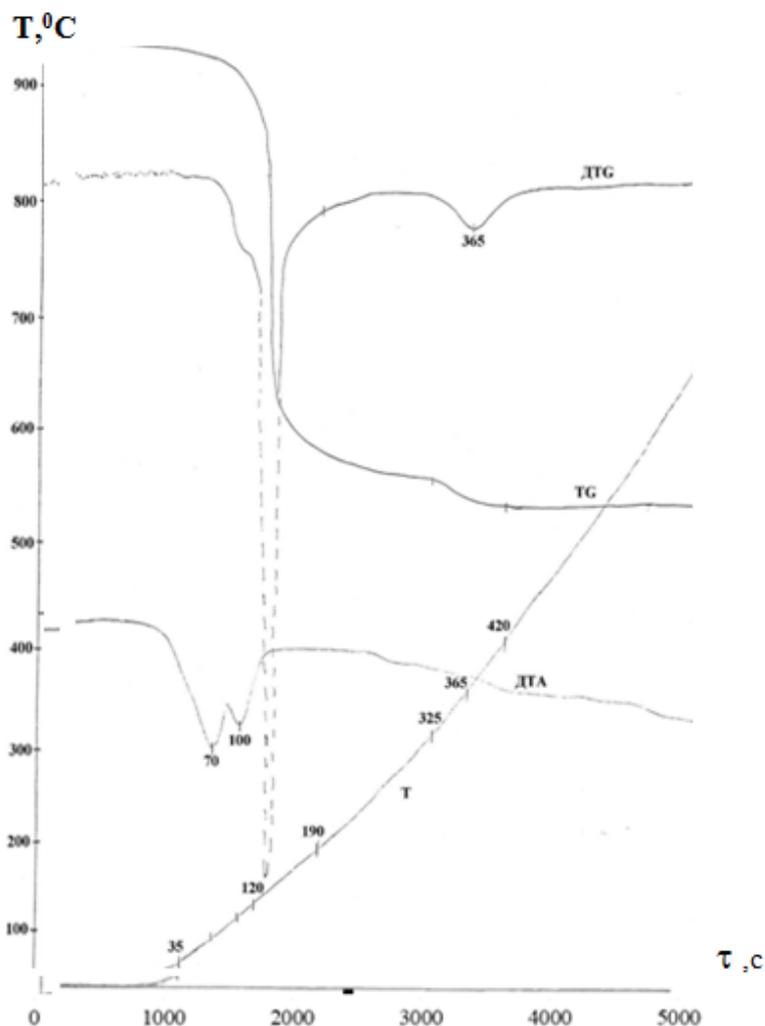


Рис. 1. Дериватограмма пербората натрия $\text{NaBO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$

Таблица 2

Потеря массы образцов в заданных температурных интервалах

Температурный интервал разложения, °C	Потери массы в данном интервале, мг/г	Потери массы по стадиям, %	Потери массы в молях
35-120-190	487,8	48,8	3,5
190-325	39,1	3,9	0,23
325-365-420	36,5	3,7	0,22

Количественные расчеты, представленные в таблице 2, показали, что при термической обработке до температуры 800 °C возникают процессы разложения, которые фиксируются двумя ярко выраженными эндоэффектами на кривой ДТА при

70 и 120 °С и слабо выраженным эндоэффектом в интервале 325–420 °С с минимумом при 365 °С (рис. 1). Этим эндоэффектам отвечает снижение массы в указанных интервалах температур, которое подтверждается перегибами на кривой ТГ и двумя эндоэффектами на кривой ДТГ.

Расчетные данные показали, что в интервале температур 35–190 °С удаляется 48,8 % вещества, что соответствует удалению 3,5 молей воды. В интервале 190–325 °С удаляется 0,23 молей воды, а в интервале 325–400 °С – оставшиеся 0,22 моля воды. Причем перборат-анион сохраняется устойчивым до температуры 100 °С – это подтверждается данными ИКС и РФА (рис. 2 и 3). В ИК-спектре этого образца фиксируются полосы при 1173 и 1239 см⁻¹, которые относятся к колебаниям пероксогруппы В-О-О-В.

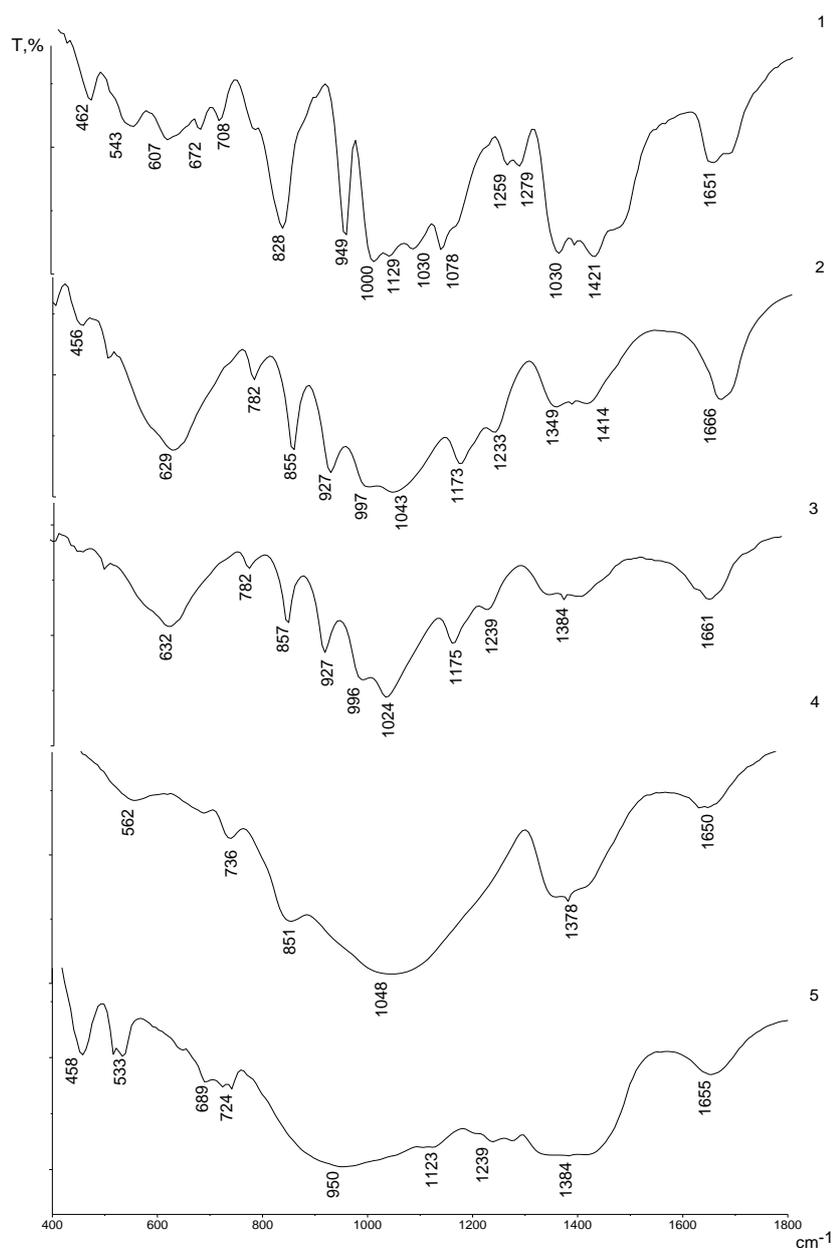
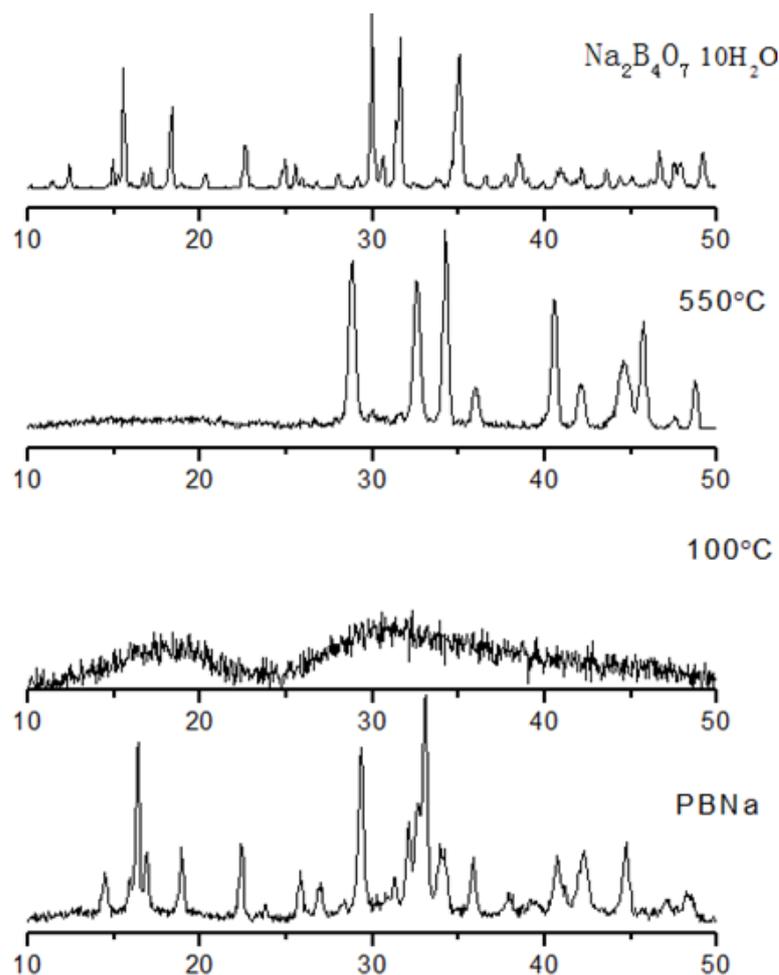


Рис. 2. ИК – спектры: $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ (1); $\text{NaBO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ при температуре: 25°С (2) ; 60°С (3); 100°С (4); 550°С(5).

Рис. 3. Рентгенограммы $\text{NaBO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$

Выше температуры $120\text{ }^\circ\text{C}$ начинается процесс разложения пероксогруппы. Этот процесс наблюдается до $420\text{ }^\circ\text{C}$, что фиксируется потерей массы в интервале температур $120\text{--}420\text{ }^\circ\text{C}$. Это подтверждается данными РФА и ИК спектроскопии. По данным РФА, если образец прокалывать при $100\text{ }^\circ\text{C}$ до постоянной массы, то перборат натрия разлагается, что подтверждается уменьшением интенсивности рефлексов пербората натрия, а некоторые характерные для него рефлексy исчезают совсем, то есть он переходит в рентгеноаморфное состояние. В ИК-спектре полосы поглощения этого образца становятся размытыми, а в образце, обезвоженном при $60\text{ }^\circ\text{C}$ до постоянной массы, колебания пероксогруппы В-О-О-В в области 1239 см^{-1} четко фиксируется. Также фиксируются колебания при 1660 см^{-1} , которые относятся к деформационным колебаниям воды, и валентные колебания воды при $1349\text{--}1414\text{ см}^{-1}$, что подтверждает присутствие кристаллогидратной воды в этом образце.

В ИК- спектре образца, обезвоженного при $100\text{--}200\text{ }^\circ\text{C}$, исчезают колебания при $1173\text{--}1239\text{ см}^{-1}$, остаются слабоинтенсивные рефлексy при 1378 см^{-1} и 1650 см^{-1} . При $365\text{ }^\circ\text{C}$ полностью исчезает кристаллогидратная вода, что сопровождается перестройкой структуры и переходом пербората натрия в метаборат натрия при $420\text{ }^\circ\text{C}$, то есть идет процесс кристаллизации, который на кривой ДТА не фиксируется экзоэффектом. Форма ИК -спектра образца, обработанного при $550\text{ }^\circ\text{C}$ в течение двух часов, полностью изменяется, а на рентгенограмме появляются новые рефлексy, относящиеся к метаборату натрия NaBO_2 (рис. 3).

Перборат натрия кристаллизуется в триклинной сингонии, размеры элементарных ячеек которого уменьшаются по мере удаления кристаллогидратной воды. Данные ИК-спектроскопии подтверждают индивидуальность пербората натрия стехиометрического состава, в котором отсутствует тетраборат натрия в виде примеси (рис.2). Подтверждением этого является отсутствие в ИК -спектре характеристичных полос поглощения буры. Полосы поглощения в области низких волновых чисел 400–800 см^{-1} относятся к колебаниям Na-O-B группировок, а в области 900–1100 см^{-1} – к колебаниям B-O-B валентных группировок. Колебания в области 1173–1239 см^{-1} являются характерными для пероксидной группы B-O-O-B, которые отсутствуют у простых боратов. Колебания в области 1680 см^{-1} относятся к деформационным, а в области 3460 см^{-1} – к валентным колебаниям кристаллогидратной воды пербората натрия.

Физико-химическое исследование поведения пербората натрия в композиции с гидроксиапатитом кальция. Поскольку перборат натрия находит широкое применение как отбеливающий компонент в промышленности, а также встречается информация по использованию его в стоматологической практике, то целесообразным было изучить взаимодействие его с гидроксиапатитом кальция, который используется как в зубных порошках, так и в медицине. Для этого были приготовлены смеси из синтезированных пербората натрия и гидроксиапатита кальция при следующих массовых соотношениях $\omega_{\text{ПБ Na}} : \omega_{\text{ГА}} = 10:90; 30:70; 50:50$. Приготовленные смеси выдерживались при комнатной температуре при 20–25 °С в течении суток, а также при нагревании до 40 °С.

По данным рентгенофазового анализа уже при комнатной температуре наблюдаются изменения рефлексов на рентгенограммах (рис.4-А). Фиксируется значительное уменьшение интенсивности рефлексов пербората натрия в составе с его содержанием 50 мас.%, а также их отсутствие в составах с 10 и 30 мас.% пербората. Эти результаты дают возможность предположить, что гидроксиапатит кальция оказывает каталитическое действие на разложение пербората натрия. Повышение термообработки смеси до 40 °С и выше подтверждает наше предположение об интенсивном разложении пербората натрия и взаимодействии его продукта разложения метабората натрия NaBO_2 с гидроксиапатитом кальция с образованием твердого раствора на основе гидроксиапатита. Об этом свидетельствуют слабой интенсивности рефлексы пербората натрия в составе, где массовая его доля 50 % и отсутствие рефлексов на рентгенограммах состава 30 мас. % пербората при температурах 40–60 °С (рис 4-Б). При 100 °С рефлексы пербората натрия полностью исчезают, а рефлексы гидроксиапатита кальция по своей интенсивности не изменяются. Данные ИК-спектроскопии согласуются с результатами рентгенофазового анализа и подтверждают разложение пербората натрия в присутствии гидроксиапатита кальция при комнатной и более высокой температуре.

Таким образом, гидроксиапатит кальция положительно влияет на процесс разложения пербората натрия, проявляя характерную для него каталитическую активность, с выделением кислорода при температуре тела человека. Композиция $\omega_{\text{ПБ Na}} : \omega_{\text{ГА}} = 30:70$ была опробована на зубах, которые были изъяты во время лечения и имели темный цвет. Наполнение полости такого зуба данной композицией дало положительный результат. Через сутки наблюдалось визуальное изменение цвета – процесс обесцвечивания. Через трое суток наблюдался эффект срастания гидроксиапатита с костной тканью, из-за высокой его биологической совместимости.

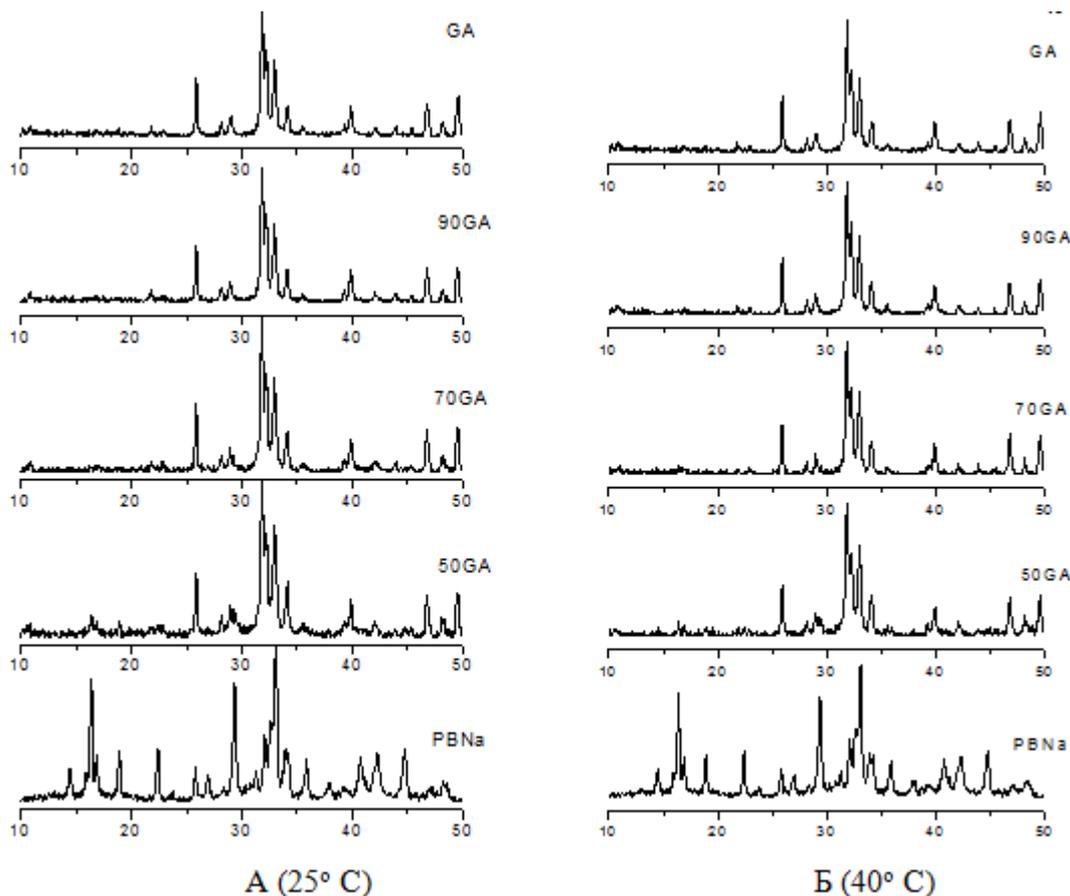


Рис. 4. Рентгенограммы смеси $\text{NaBO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ и $\text{Ca}_{10}(\text{PO}_4)_6\text{OH}_2$

Выводы. Оптимизированы условия синтеза пербората натрия в пероксидном растворе, стехиометрический состав которого зависит от концентрации и чистоты тетрабората натрия, гидроксида натрия, пероксида водорода, порядка их смешивания и температуры синтеза. На основании данных химического, рентгенофазового, ИК – спектроскопического методов анализа идентифицирован состав полученного по разработанной методике пербората натрия $\text{NaBO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$.

Физико-химическими методами (ДТА, РФА и ИКС) изучено поведение пербората натрия при нагревании, установлены интервалы ступенчатой дегидратации, температура разложения и идентифицирован продукт его термолитического разложения – метаборат натрия.

Установлено, что гидроксиапатит кальция положительно влияет на процесс разложения пербората натрия с выделением кислорода, проявляя характерную для него каталитическую активность, при комнатной и более высокой температуре. Предложены составы стоматологических композиций для коррекции цвета зубов.

Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124012400342-7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Патент 2581906 С2. Композиции, образующие перкислоту / Бойд Т. Дж., Сюй Г., Адамс Р., Пирс Р., Миллер С., Ван Хун, Вискио Д. (US).– №2014129476/10; Заявлено 10.02.2016. Бюл. №4; Оpubл. 20.04.2016. Бюл. № 11. – 6 с.
2. АС. №1279952 С25 В 1/32. Способ получения перекисных борсодержащих соединений щелочных металлов / Мартынюк Ю.Л., Захарова С.А., Горин Ю.В.(СССР).– №3892357; Заявлено 30.04.1985; Оpubл. 31.12.1986. Бюл. № 48. – 4 с.

3. Патент 2575834 С2. Способ глушения скважин и вязкоупругий состав для его осуществления / Окроелидзе Г.В., Некрасова И.Л., Гаршина О.В., Хвощин П.А., Мустаев Р.М., Зубенин А.Н.(RU).– №2014154574/03; Заявлено 31.12.2014; Оpubл. 20.02.2016. Бюл.№ 5. –6 с.
4. Mekillop A. Sodium perborate and sodium percarbonate: further application organic synthesis / A. Mekillop, W.R.Sanderson // J.Chem.Soc., Perkin Trans. – 2000. – Vol. 1. – P. 471– 476.
5. Патент 52391. Засіб для внутрішнього вибілювання дисколорованих зубів. / Р.Е. Хоружая, М.Е. Хоружий, Є.Г. Хоружий, К.Є. Білоусова, В.В. Савченко, С.М. Багрій (Україна). - № u201001900 от 22.02.2010, МПК А61К6/00 А61К9/14 А61К33/4; Оpubл. 25.08.2010, Бюл.№ 16. – 6 с
6. Патент 52394. Засіб для купірування геморагічного синдрому після травматичного видалення зубів./ Р.Е. Хоружая, М.Е. Хоружий, Є.Г. Хоружий, К.Є. Білоусова, Д.К. Каліновський (Україна). (Україна). – № u201003594 от 29.03.2010, МПК А61К9/14 А61К33/06 А61К33/40; Оpubл. 25.08.2010, Бюл.№ 16. – 6 с.
7. Патент 53468. Засіб для внутрішньозубного вибілювання постраждалих після ендодонтичного лікування зубів. . Р.Е. Хоружая, М.Е. Хоружий, Є.Г. Хоружий, К.Є. Білоусова (Україна).- № u201003594 от 29.03.2010, МПК А61К6/00 А61К9/14 А61К33/06 А61К33/40; Оpubл. 11.10.2010, Бюл.№ 19. – 6 с.
8. Хоружая Р.Е. Сочетанное применение холисалы и гидроксиапатитовой композиции при лечении альвеолита / Р.Е. Хоружая, М.Е. Хоружий, Д.К. Калиновский Е.Е. Белоусова // Современная стоматология. – 2011.– № 3 (57).– С. 25–28.
9. Патент 2088521 кл. С01В 25 /32. Способ получения гидроксилатапата / Розанцев Г.М., Гетьман Е.И., Белоусова Е.Е. (Российская Федерация).– №93 93032767; Заявлено 23.06.1993; Оpubл. 27.05.1997. Бюл.№ 24. –6 с.

Поступила в редакцию 18.04.2024 г.

SYNTHESIS AND PHYSICAL-CHEMICAL PROPERTIES OF SODIUM PERBORATE

E.E. Belousova, E.V. Khomutova, N.V. Yablochkova

Optimal conditions for the synthesis of sodium perborate are proposed through the chemical interaction of sodium tetraborate, hydrogen peroxide and sodium hydroxide in a peroxide environment. Based on the data of chemical analysis and physicochemical studies, its identification was carried out, it was established that the stoichiometric composition of $\text{NaBO}_3 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ depends on the concentration of the initial reagents and the synthesis temperature. Using thermogravimetric, X-ray phase analysis and IR spectroscopy methods, thermoanalytical studies of tetrahydrate crystalline hydrate were carried out, the conditions for its thermal stability and the formation of perborates with a lower content of crystalline hydrate water. The interaction of sodium perborate with biologically active calcium hydroxyapatite was studied using physicochemical methods and compositions for correcting the color of teeth were recommended.

Keywords: physico-chemical studies, chemical composition, sodium perborate, thermal stability, calcium hydroxyapatite, tooth color correction, dental compositions.

Белоусова Екатерина Евгеньевна

Кандидат химических наук, доцент;
доцент кафедры неорганической химии
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный
университет», г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: kat.belousova.dgu@mail.ru

Belousova Ekaterina Evgenievna

Candidate of Chemical Sciences, docent;
Associate Professor of Department of Inorganic
Chemistry,
Donetsk State University, Donetsk, DPR, RF.

Хомутова Екатерина Валерьевна

Кандидат биологических наук;
И.о. директора ФГБНУ «Институт физико-
органической химии и углехимии им.
Л.М. Литвиненко», г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: ek.khomutova75@andex.ru

Khomutova Ekaterina Valerievna

Candidate of Biological Sciences;
acting director,
L.M. Litvinenko institute of physical organic and coal
chemistry, Donetsk, DPR, RF.

Яблочкова Наталья Васильевна

Кандидат химических наук, доцент;
заведующий кафедрой неорганической химии
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный
университет», г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: n.iablochkova@donnu.ru

Yablochkova Natalia Vasilyevna

Candidate of Biological Sciences, docent;
Head of the Department of Inorganic Chemistry,
Donetsk State University, Donetsk, DPR, RF.

ЭФФЕКТЫ СВЕРХАДДИТИВНОСТИ КОМПОЗИЦИЙ ГАЛЛОВОЙ И ПАРА-КУМАРОВОЙ КИСЛОТ В РЕАКЦИЯХ РАДИКАЛЬНОГО ОКИСЛЕНИЯ

© 2024. *Н.В. Михайлова, Н.И. Белая, А.В. Белый, В.А. Конайленко*

Методами фотоколориметрии, ЯМР-спектроскопии и квантовой химии исследованы кинетика и механизм реакции композиций галловой и пара-кумаровой кислот с радикалом 2,2'-дифенил-1-пикрилгидразилом в бензоле. Максимальные антирадикальные синергические эффекты проявили смеси галловой и пара-кумаровой кислот в соотношения 10 : 90 об.%. Возможный механизм синергизма заключается в образовании из продуктов первичного превращения фенолоксилов (феноксильных радикалов) фенольных димеров, способных взаимодействовать с гидразильным радикалом быстрее, чем исходные антиоксиданты. Квантово-химическим полуэмпирическим методом PM6 установлено, что наиболее вероятно образование орто,орто-СС-димеров, молекулы которых содержат О–Н-группы с низкой энергией гомолитического разрыва связи.

Ключевые слова: галловая кислота, антирадикальная активность, синергизм, 2,2'-дифенил-1-пикрилгидразил.

Введение. Фенолкарбоновые кислоты являются широко известными фенольными антиоксидантами природного происхождения [1]. В растительных тканях, как правило, содержится несколько таких соединений в определенных соотношениях, которые сформировались в процессе эволюции при взаимодействии с окружающей средой. Действие смеси фенолкарбоновых кислот, полученных экстракцией из растительного сырья, не всегда представляет собой аддитивную величину из-за наличия антагонистических и синергических взаимодействий компонентов. В настоящее время препараты на основе природных фенолов доказали свою эффективность при лечении злокачественных новообразований [2], эндокринных [3] и сердечно-сосудистых заболеваний [4] заболеваний, профилактики и лечении состояний, связанных с окислительным стрессом и/или воспалением [5, 6].

Механизмы синергического действия природных фенольных соединений пока не установлены достоверно. К возможным причинам синергизма можно отнести [7–9]: регенерацию окисленных форм более сильного антиоксиданта более слабым антиоксидантом; образование межмолекулярных комплексов антиоксидантов, проявляющих более высокую антиоксидантную активность, чем у исходных соединений; образование димеров и аддуктов и/или новых фенольных продуктов с большей антиоксидантной способностью, чем у смеси исходных соединений; различия в растворимости и фазовом распределении антиоксидантов.

Цель данной работы – исследование эффектов синергизма и идентификация механизма действия композиций галловой (Ar_1OH) и п-кумаровой (Ar_2OH) кислот в реакциях с N-центрированным радикалом 2,2'-дифенил-1-пикрилгидразилом ($DPPH^{\bullet}$) в бензоле при температуре 293 ± 2 К.

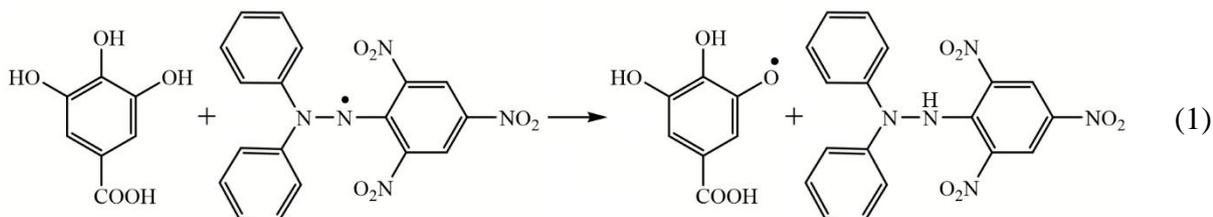
Методика эксперимента. Антиоксиданты, относящиеся к группе растительных фенолкарбоновых кислот (галловая кислота (> 98 %, «Acros Organics», Бельгия), пара-кумаровая кислота (> 98 %, «Acros Organics», Бельгия)), и модельный радикал $DPPH^{\bullet}$ (≥ 96 %, «Sigma-Aldrich», США) использовали без предварительной очистки. Бензол и диметилсульфоксид очищали по известной методике [10].

Исследования проводили методом фотоколориметрии на спектрофотометре СФ-2000 (ЗАО «ОКБ Спектр», Россия) при температуре 293 ± 2 К и концентрации реагирующих веществ $10^{-5} - 10^{-3}$ моль·л⁻¹. Композиции Ar₁ОН – Ar₂ОН в разных соотношениях растворяли в определенном объеме бензола (при необходимости для улучшения растворимости добавляли ДМСО), а затем аликвоту этого раствора смешивали с раствором DPPH[•] в бензоле. Суммарная концентрация смеси Ar₁ОН – Ar₂ОН в бензольном растворе составляла $7,95 \cdot 10^{-4}$ моль·л⁻¹, а радикала DPPH[•] – $1,59 \cdot 10^{-4}$ моль·л⁻¹. После смешения реагентов измеряли оптическую плотность раствора смеси и с помощью молярного коэффициента светопоглощения ($\varepsilon = 6,27 \cdot 10^2$ л·моль⁻¹·мм⁻¹) по закону Бугера–Ламберта–Бера рассчитывали концентрацию радикала. Кинетический эксперимент повторяли не менее 3 раз.

Регистрировали ¹Н ЯМР-спектры фенольных соединений и их смесей с радикалом DPPH[•] в ДМСО-d₆ на спектрометре Bruker Avance-II-400 («Bruker», Германия) с рабочей частотой 400 МГц при T = 298 К. Концентрация фенолов и радикала в смеси составляла соответственно 0,11 и 0,025 моль·л⁻¹.

Термохимические характеристики реагентов и продуктов реакции DPPH[•] с фенолоксидными соединениями рассчитывали полуэмпирическим методом РМ 6 в программе Gaussian 09 [11]. Поиск основных конформеров осуществляли в рамках ограниченного метода rPM6 – для систем с закрытыми оболочками и неограниченного uPM6 – для систем с открытыми оболочками. Для расчетов использовали структуру, соответствующую минимальной полной энергии на кривой оптимизации и имеющую только положительные частоты колебаний. Все полученные результаты относятся к основному состоянию и стандартным условиям (T = 298 К, p = 1 атм.). Первоначально расчеты проводили в газовой фазе и далее использовали в качестве основы для полной оптимизации геометрии реагентов и продуктов реакции с учетом влияния растворителя (бензола), используя метод проводникового поляризуемого континуума (CPCM) [12].

Анализ результатов. Из полученных кинетических кривых расходования DPPH[•] видно (рис. 1), что галловая кислота активно взаимодействует с радикалом. Известно [13–15], что в бензоле как неполярном растворителе реакция протекает по механизму отрыва атома водорода:



п-Кумаровая кислота в заданных условиях не проявляет заметной активности с DPPH[•], но при этом в определенной концентрации в смеси с галловой кислотой способна усиливать её антирадикальное действие, проявляя функции синергиста (рис. 1).

Для определения наиболее эффективных композиций варьировались соотношение галловой и пара-кумаровой кислот при постоянной суммарной концентрации смеси. Величину синергического эффекта (SE) оценивали по увеличению антирадикальной активности (АРА) смеси по сравнению с аддитивным действием галловой и п-кумаровой кислот, используя время превращения радикала DPPH[•] на 3/4 ($\tau_{3/4}$) (на 75 %):

$$SE = \frac{\tau_{3/4(\text{адд})} - \tau_{3/4(\text{см})}}{\tau_{3/4(\text{адд})}} = \frac{\Delta\tau_{3/4}}{\tau_{3/4(\text{адд})}} \cdot 100\%$$

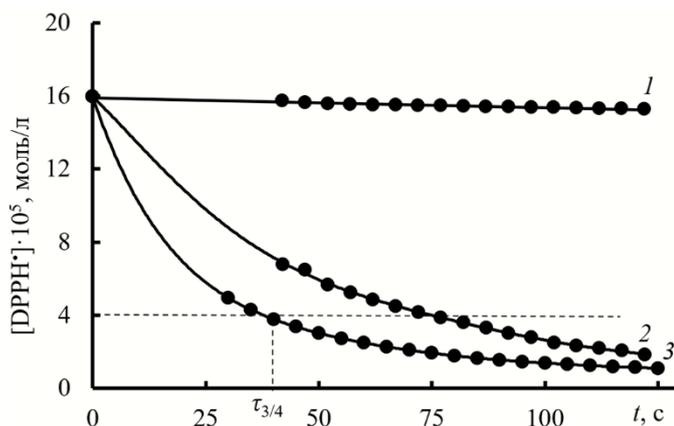


Рис. 1. Кинетические кривые расходования DPPH^\bullet в реакции с п-кумаровой кислотой ($C = 1,59 \cdot 10^{-4}$ моль·л $^{-1}$) (1), галловой кислотой ($C = 6,36 \cdot 10^{-4}$ моль·л $^{-1}$) (2) и их смесью (3) (20:80 %). Растворитель – бензол. $T = 293 \pm 2$ К

где $\tau_{3/4(\text{см.})}$ – время превращения DPPH^\bullet на 3/4 в реакции со смесью галловой и п-кумаровой кислот; $\tau_{3/4(\text{адд.})}$ – время превращения DPPH^\bullet на 3/4 в предположении, что действие смеси аддитивно; $\tau_{3/4(\text{Ar}_1\text{OH})}$ – время превращения DPPH^\bullet на 3/4 в реакции с галловой кислотой; $\tau_{3/4(\text{Ar}_2\text{OH})}$ – время превращения DPPH^\bullet на 3/4 в реакции с п-кумаровой кислотой.

Применение такой характеристики как $\tau_{3/4}$ позволит исследовать влияние на эффекты синергизма продуктов окисления фенолов на глубоких стадиях превращения гидразильного радикала. Проведение реакции в бензоле дает возможность рассматривать в реакции только неионизированные формы фенольных соединений, а также имитировать жироподобные среды. Использование фенольных антиоксидантов (и их композиций) в избытке по сравнению с DPPH^\bullet обеспечит образование вторичных продуктов в реакции с феноксильными радикалами кислот [7, 16].

Показано, что в смеси галловой и п-гидроксibenзойной кислот величина SE достигает 87 % при соотношении 80:20 % (рис. 2). Причиной установленного синергизма смеси антиоксидантов может быть образование в условиях избытка композиции вторичных продуктов превращения фенольных кислот – димерных фенолов [7–9].

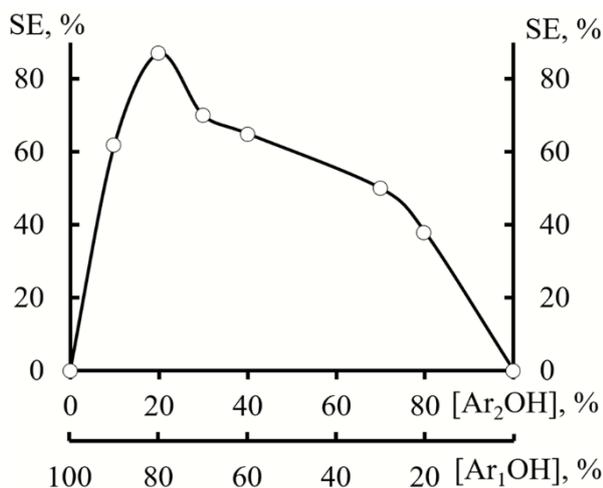
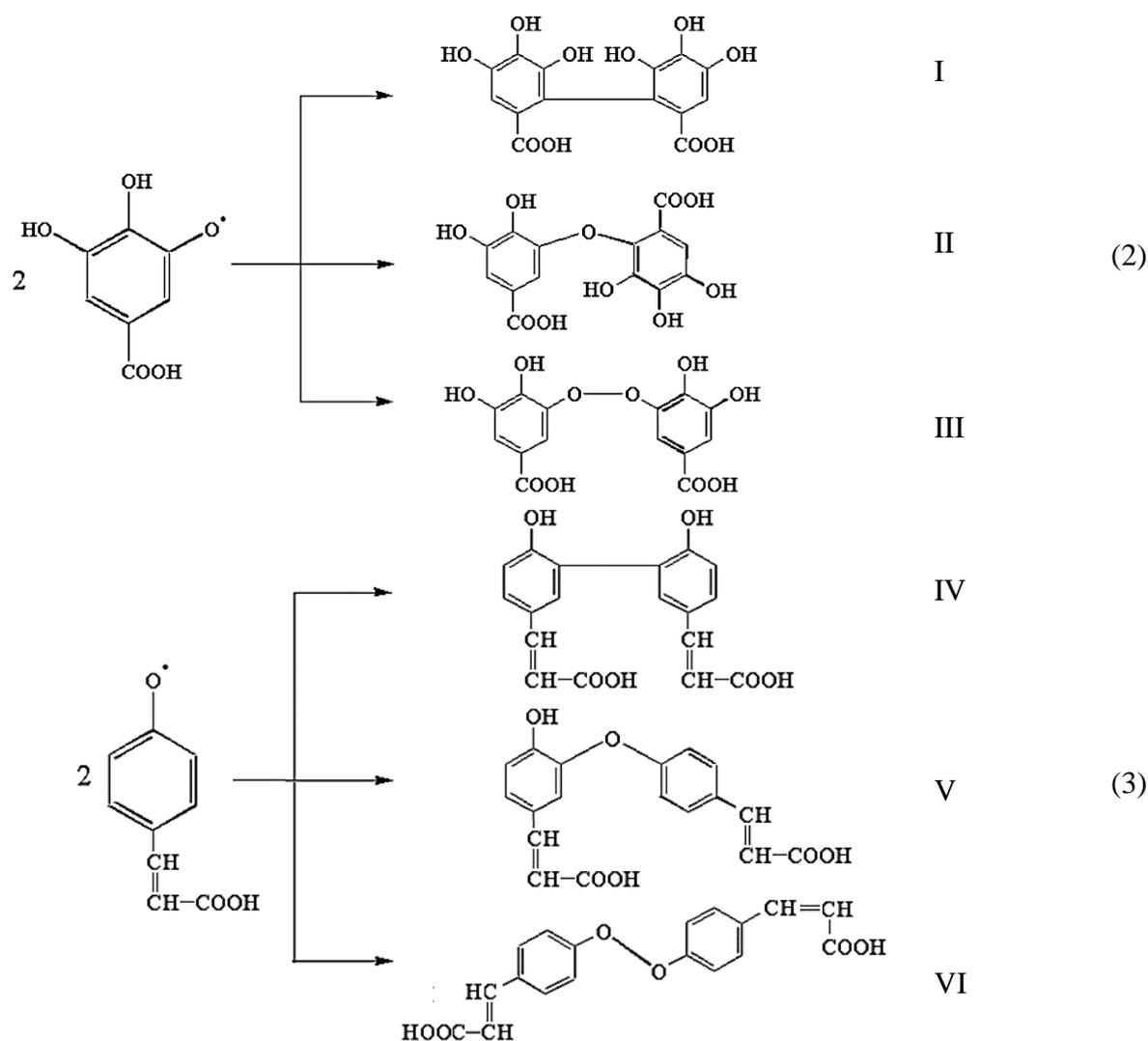
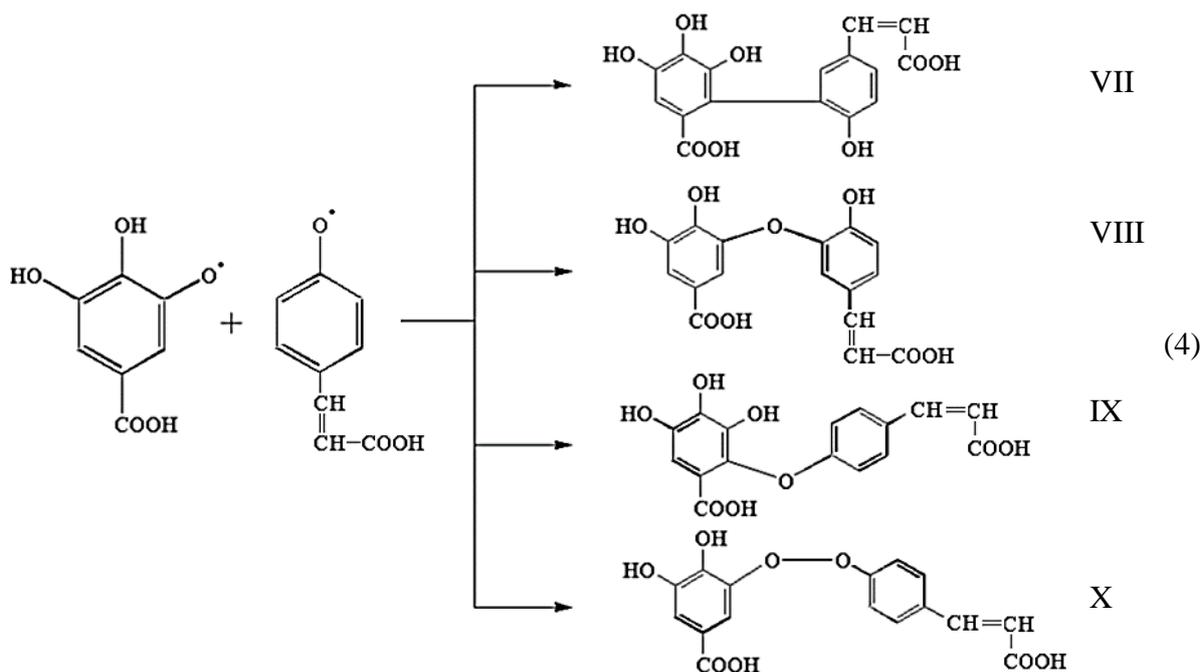


Рис. 2. Зависимость величин синергического эффекта (SE , %) в реакции с DPPH^\bullet от состава смеси галловая кислота – п-кумаровая кислота (суммарная концентрация смеси – $7,95 \cdot 10^{-4}$ моль·л $^{-1}$) Растворитель – бензол. $T = 293 \pm 2$ К

Авторами ранее установлено [17], что в реакции с DPPH[•] вторичными продуктами превращения природных фенолов являются димерные соединения, формирующиеся в результате рекомбинации феноксильных радикалов, образующихся по реакции (1). Согласно литературным данным [7, 16], рекомбинация феноксилов происходит в две стадии: на первой, обратимой, стадии образуется кето-димер, а затем на второй стадии, если в ароматическом кольце при атоме С, по которому происходит димеризация, нет заместителя, возможна быстрая енолизация (диенон–фенольная перегруппировка) кето-димера с образованием димерного фенольного соединения. Фенольные димеры могут быть однородного типа (I–III, IV–VI), когда в реакцию вступают одинаковые феноксины. Например:



В смеси кислот возможно образование димеров как однородного (реакция 2 и 3), так и смешанного типов (VII–X) (реакция 4). Логично, что димеры, содержащие большее число О–Н-групп, чем исходный антиоксидант, должны проявлять и большую антирадикальную активность в реакции с DPPH[•].



При этом [7], случай синергизма, когда менее слабый антиоксидант (паракумаровая кислота) способен восстанавливать окисленную форму более сильного антиоксиданта (галловой кислоты) не учитывался, так как АРА некоторых смесей была выше чем у галловой кислоты ($\tau_{3/4(\text{см})} < \tau_{3/4(100\%)\text{Ar}_1\text{OH}}$) при ее концентрации в системе, равной 100 %, что говорит об образовании в синергической системе соединения с реакционной способностью выше, чем у наиболее сильного антиоксиданта композиции.

Идентифицировали фенольные димеры экспериментально методом ^1H ЯМР-спектроскопии при условии избытка фенолоксида в реакционной смеси (рис. 3).

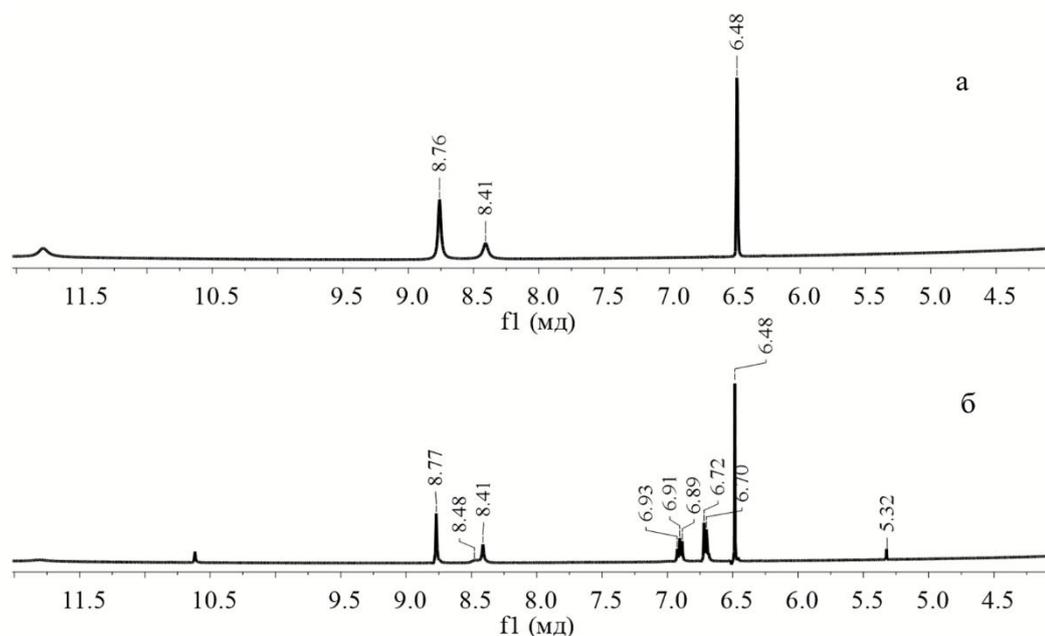


Рис. 3. ^1H ЯМР-спектры: а) галловой кислоты ($C = 0.22 \text{ моль}\cdot\text{л}^{-1}$); б) смеси галловой кислоты ($C = 0.11 \text{ моль}\cdot\text{л}^{-1}$) с DPPH ($C = 0.025 \text{ моль}\cdot\text{л}^{-1}$) через 3 минуты после реакции. $T = 298 \pm 2 \text{ K}$, DMCO-d_6

На примере галловой кислоты видны (рис. 3) основные закономерности смещения химического сдвига протона ^1H фенольных групп до и после реакции с радикалом. Так, после реакции с DPPH^\bullet на спектрах заметно появление сигналов, смещенных в область больших химических сдвигов (6.93–6.70 м.д.) и характерных для О–Н-групп, по которым идет димеризация в орто-положении. Это объясняется образованием внутримолекулярных водородных связей в образующихся фенольных димерах. Аналогичные закономерности наблюдаются для п-кумаровой кислоты.

Наиболее вероятные структуры образующихся димеров были установлены квантово-химическим полуэмпирическим методом PM6, хорошо зарекомендовавшим себя при расчете структур фенольных соединений [18, 19]. Для этого рассчитывали термодинамические параметры реакции димеризации феноксильных радикалов галловой и пара-кумаровой кислот по уравнениям:

$$\Delta_r H_{298} = 2H_{\text{ArO}^\bullet} - H_{\text{dimer}},$$

где H_{ArO^\bullet} – энтальпия феноксирадикала кислоты; H_{dimer} – энтальпия димера.

$$\Delta_r S_{298} = 2S_{\text{ArO}^\bullet} - S_{\text{dimer}},$$

где S_{ArO^\bullet} – энтропия феноксирадикала кислоты; S_{dimer} – энтропия димера.

$$\Delta_r G_{298} = 2G_{\text{ArO}^\bullet} - G_{\text{dimer}},$$

где G_{ArO^\bullet} – энергия Гиббса феноксирадикала кислоты; G_{dimer} – энергия Гиббса димера.

На основе полученных данных было определено (табл. 1), что процесс димеризации в бензоле является самопроизвольным ($\Delta_r G_{298} < 0$) и экзотермическим ($\Delta_r H_{298} < 0$), кроме случая образования ОО–димеров. Анализ величин $\Delta_r H_{298}$, $\Delta_r S_{298}$, $\Delta_r G_{298}$ позволил установить, что наиболее стабильными структурами являются о,о-СС–димеры как однородного, так и смешанного типов (рис. 4). Менее устойчивы СО–димеры, величины $\Delta_r H_{298}$ и $\Delta_r G_{298}$ которых возрастают у всех изученных соединений, образованных как из одинаковых феноксилов, так и феноксирадикалов разных кислот. Структуры ОО–димеров, как видно, крайне неустойчивы и, по-видимому, будут распадаться на исходные радикалы [20].

Таблица 1

Термодинамические параметры реакции (2)–(4) образования фенольных димеров из феноксилов галловой и пара-кумаровой кислот, рассчитанные полуэмпирическим методом PM6 в среде бензола

Фенольный димер	Димер	$\Delta_r H_{298}$, кДж·моль ⁻¹	$\Delta_r G_{298}$, кДж·моль ⁻¹	$\Delta_r S_{298}$, Дж·моль ⁻¹ ·К ⁻¹
Ar ₁ O– Ar ₁ O	о,о-СС–	-168	-106	-209
	о-СО–	-91	-29	-208
	ОО–	140	191	-181
Ar ₁ O– Ar ₂ O	о,о-СС–	-203	-146	-190
	о-СО–	-136	-81	-183
	ОО–	146	198	-176
Ar ₂ O– Ar ₂ O	о,о-СС–	-185	-128	-193
	о-СО–	-117	-58	-198
	о-ОС–	-112	-58	-180
	ОО–	154	207	-178

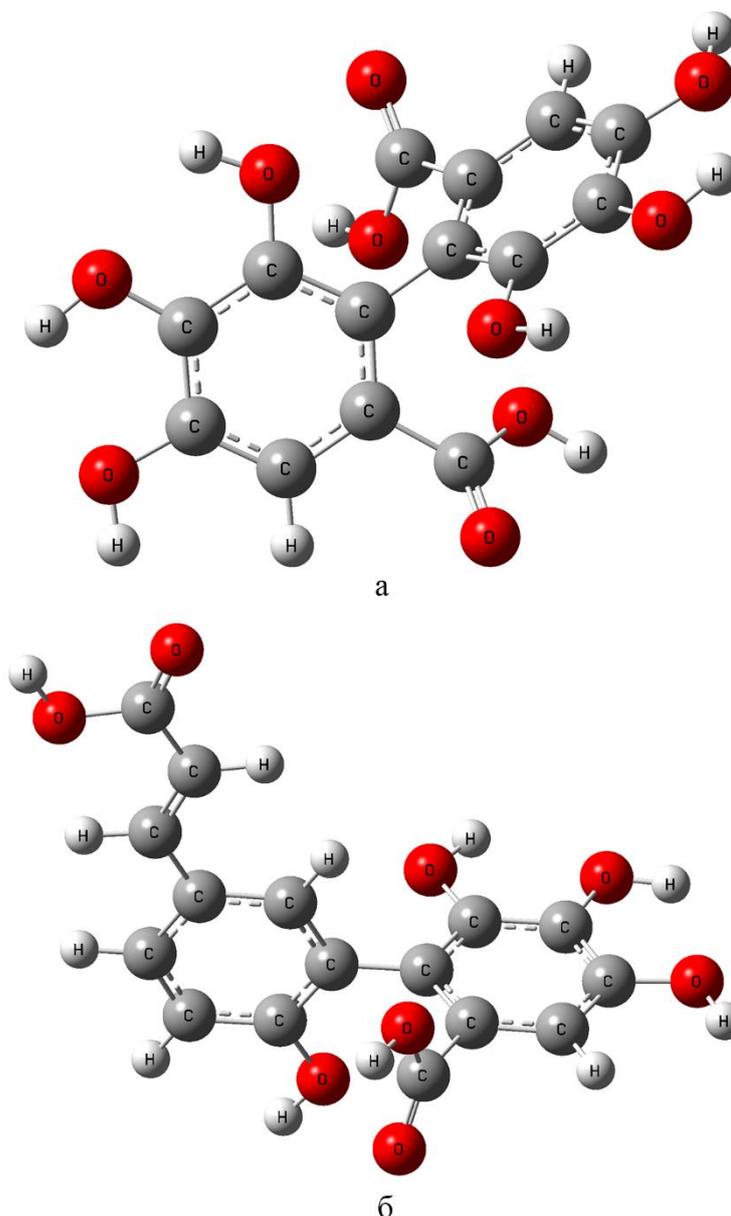


Рис. 4. Структуры о,о'-СС – димеров однородного (а) и смешанного (б) типов, оптимизированные методом РМ6 в среде бензола

Для наиболее стабильных димеров рассчитывали энергии гомолитического разрыва (прочности) О–Н-связей фенольных групп как характеристики, отвечающие за АРА молекул фенолокислот и образующихся из них димеров (табл. 2):

$$D_{O-H} = (H_{ArO\cdot} + H_H) - H_{ArOH},$$

где $H_{ArO\cdot}$ – энтальпия феноксирадикала кислоты; H_H – энтальпия атома водорода; H_{ArOH} – энтальпия фенолокислоты или образовавшегося димера.

Таблица 2

Наименьшие энергии гомолитического разрыва О–Н-связей фенольных групп о,о-СС-димеров, рассчитанные полуэмпирическим методом PM6 в среде бензола

Соединение	D_{O-H} , кДж·моль ⁻¹
Ar ₁ OH	292
Ar ₂ OH	305
Ar ₁ O – Ar ₁ O	290
Ar ₂ O – Ar ₂ O	304
Ar ₁ O – Ar ₂ O	290

Проведено сравнение наименьших прочностей О–Н-связей молекул фенольных кислот с аналогичными величинами в продуктах их радикального превращения. Установлено, что димеры имеют более низкие прочности О–Н-связи, чем у соответствующих кислот в смеси, а значит, фенольные димеры способны проявлять более высокую АРА по отношению к DPPH[•]. Низкие энергии гомолитического разрыва О–Н-связей фенольных групп характерны как для димеров однородного, так и смешанного типов.

Выводы. Установлен синергический антирадикальный эффект смеси галловой и пара-кумаровой кислот в реакции с радикалом DPPH[•] в среде бензола. Максимальный синергический эффект, равный 87 %, получен при их соотношении 20 : 80 % соответственно. Причиной синергического эффекта является образование фенольных димеров в реакции синергической композиции фенолокислот с радикалом DPPH[•]. Наличие димерных соединений подтверждено методом ЯМР-спектроскопии. По величинам $\Delta_r H_{298}$ и $\Delta_r G_{298}$ реакции димеризации феноксилов кислот установлены наиболее вероятные структуры о,о-СС-димеров однородного и смешанного типов. Указанные структуры имеют низкие прочности О–Н-связей фенольных групп, что подтверждает их высокие восстанавливающие способности в реакции с гидразильным радикалом.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (регистрационный номер 124051400022-7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vermerris W. Phenolic Compound Biochemistry / W. Vermerris, R. Nicolson. – Dodrecht: Springer, 2006. – 276 p.
2. Combination Of Compounds Derived From Gallic Acid For The Treatment Of Cancer [Text] / Fiorentino S. et al. Patent US 20150313925 A1. (2015).
3. Methods Of Using Pomegranate Extracts For Treating Diabetes Related Atherosclerotic Complications In Humans [Text] / Aviram M. et al. Patent US 7727563 B2 (2010).
4. Methods And Compositions Employing Pomegranate Extracts And Fementation Products Of Statin-producing Fungi [Text] / Guo P. et al. Patent US 20070104730 A1 (2007).
5. Phenolic Compositions Derived From Apple Skin And Uses Thereof [Text] / Rupasinghe H. et al. Patent US 9101649 B2 (2015).
6. Pharmaceutical Compositions, Methods Of Formulation Thereof And Methods Of Use Thereof [Text] / Lansky E. et al. Patent US 20080234361 A1 (2008).
7. Денисов, Е.Т. Ингибирование цепных реакций / Е.Т. Денисов, В.В. Азатян. – Черноголовка: ИПХФ РАН, 1997. – 267 с
8. Olszowy-Tomczyk M. Synergistic, Antagonistic and Additive Antioxidant Effects in the Binary Mixtures / M. Olszowy-Tomczyk // Phytochem. Rev. – 2020. – Vol. 19. – P. 63–103.
9. Peyrat-Maillard M.N. Antioxidant Activity of Phenolic Compounds in 2,2'-Azobis (2-amidinopropane) Dihydrochloride (AAPH)-Induced Oxidation: Synergistic and Antagonistic Effects / M.N. Peyrat-Maillard, M.E. Cuvelier, C. Berset // JAOCS. – 2003. – Vol. 80, No. 10. – P. 1007–1012.

10. Armarego W.L.F. Purification of Laboratory Chemicals. Fifth Edition / W.L.F. Armarego, C.L.L. Chai. – Amsterdam: Elsevier Science, 2003. – 608 p.
11. M.J. Frisch, G.W. Trucks, H.B. Schlegel, G.E. Scuseria, M.A. Robb, J.R. Cheeseman, G. Scalmani, V. Barone, B. Mennucci, G.A. Petersson, H. Nakatsuji, M. Caricato, X. Li, H.P. Hratchian, A.F. Izmaylov, J. Bloino, G. Zheng, J.L. Sonnenberg, M. Hada, M. Ehara, K. Toyota, R. Fukuda, J. Hasegawa, M. Ishida, T. Nakajima, Y. Honda, O. Kitao, H. Nakai, T. Vreven, J.A. Montgomery, Jr., J.E. Peralta, F. Ogliaro, M. Bearpark, J.J. Heyd, E. Brothers, K.N. Kudin, V.N. Staroverov, T. Keith, R. Kobayashi, J. Normand, K. Raghavachari, A. Rendell, J.C. Burant, S.S. Iyengar, J. Tomasi, M. Cossi, N. Rega, J.M. Millam, M. Klene, J.E. Knox, J.B. Cross, V. Bakken, C. Adamo, J. Jaramillo, R. Gomperts, R.E. Stratmann, O. Yazyev, A.J. Austin, R. Cammi, C. Pomelli, J.W. Ochterski, R.L. Martin, K. Morokuma, V.G. Zakrzewski, G.A. Voth, P. Salvador, J.J. Dannenberg, S. Dapprich, A.D. Daniels, O. Farkas, J.B. Foresman, J.V. Ortiz, J. Cioslowski, D.J. Fox, Gaussian 09 (Revision D.01), Gaussian, Inc., Wallingford CT. – 2013.
12. Barone V. Quantum Calculation of Molecular Energies and Energy Gradients in Solution by a Conductor Solvent Model / V. Barone, M. Cossi // J. Phys. Chem. A. – 1998. – Vol. 102, No. 11. – P. 1995–2021.
13. Белая Н.И. Механизм антирадикального действия природных фенолпропаноидов в полярных неионизирующих средах / Н.И. Белая, А.В. Белый, А.А. Давыдова // Кинетика и катализ. – 2020. – Т. 61, № 6. – С. 789–796.
14. Litwinienko G. Solvent Effects on the Rates and Mechanisms of Reaction of Phenols with Free Radicals / G. Litwinienko, K.U. Ingold // Acc. Chem. Res. – 2007. – Vol. 40, No. 3. – P. 222–230.
15. Foti M.C. Reaction of Phenols with the 2,2-Diphenyl-1-picrylhydrazyl Radical. Kinetics and DFT Calculations Applied To Determine ArO–H Bond Dissociation Enthalpies and Reaction Mechanism / M.C. Foti, C. Daquino, I.D. Mackie, G.A. DiLabio, K.U. Ingold // J. Org. Chem. – 2008. – Vol. 73. – P. 9270–9282.
16. Рогинский В.А. Фенольные антиоксиданты. Реакционная способность и эффективность / В.А. Рогинский. – М.: Наука, 1988. – 247 с.
17. Белая Н.И. Спектрокинетическое исследование продуктов превращения природных фенолов в радикальных реакциях / Н.И. Белая, А.В. Белый, О.М. Заречная, И.Н. Щербаков, А.И. Помещенко, О.А. Горбань // Кинетика и катализ. – 2019. – Т. 60, № 1. – С. 33–43.
18. Marković Z.S. PM6 and DFT study of free radical scavenging activity of morin / Z.S. Marković, D. Milenković, J. Đorović, J.M. Dimitrić Marković, V. Stepanić, B. Lučić, D. Amić // Food Chem. – 2012. – Vol. 134. – P. 1754–1760.
19. Amić D. PM6 Study of Free Radical Scavenging Mechanisms of Flavonoids: Why Does O–H Bond Dissociation Enthalpy Effectively Represent Free Radical Scavenging Activity? / D. Amić, V. Stepanić, B. Lučić, Z. Marković, J.M. Dimitrić Marković // J. Mol. Model. – 2013. – Vol. 19, No. 6. – P. 2593–2603.
20. Худяков И.В. Обратимая рекомбинация радикалов / И.В. Худяков, П.П. Левин, В.А. Кузьмин // Успехи химии. – 1980. – Т. 49, № 10. – С. 1990–2031.

Поступила в редакцию 20.05.2024 г.

EFFECTS OF SUPERADDICTIVENESS OF COMPOSITIONS OF GALLIC AND PARA-COUMARIC ACIDS IN RADICAL OXIDATION REACTIONS

N.V. Mikhaylova, N.I. Belaya, A.V. Belyi, V.A. Konailenko

The kinetics and mechanism of the reaction of compositions of gallic and para-coumaric acids with the 2,2'-diphenyl-1-picrylhydrazyl radical in benzene were studied using photocolometry, NMR spectroscopy and quantum chemistry. The maximum antiradical synergistic effects were demonstrated by mixtures of gallic and para-coumaric acids in a ratio of 10 : 90 vol.%. A possible mechanism of synergy is the formation of phenolic dimers from the products of the primary transformation of phenolic acids (phenoxy radicals), which can interact with the hydrazyl radical faster than the original antioxidants. Using the PM6 quantum-chemical semi-empirical method, it was established that the most probable is the formation of ortho, ortho-CC dimers, the molecules of which contain O–H groups with low energy of homolytic bond cleavage.

Keywords: gallic acid, antiradical activity, synergism, 2,2'-diphenyl-1-picrylhydrazyl.

Михайлова Наталия Вадимовна

инженер молодежной научной лаборатории по исследованию реакционной способности органических соединений, магистр первого года обучения, ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: natasha.mikhaylova.2001@mail.ru

Mikhaylova Nataliya Vadimovna

Engineer of the youth scientific laboratory for the study of the reactivity of organic compounds, First Year Master's Degree student, Donetsk State University, Donetsk, DPR, Russia.

Белая Наталья Ивановна

доктор химических наук, доцент; профессор кафедры физической химии ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: n.iv.belaya@mail.ru

Belaya Natalya Ivanovna

Doctor of Chemical Sciences, Docent; Professor at the Department of Physical Chemistry, Donetsk State University, Donetsk, DPR, Russia.

Белый Александр Владимирович

кандидат химических наук, доцент; доцент кафедры физической химии ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: belyj@donnu.ru

Belyi Alexandr Vladimirovich

Candidate of Chemical Sciences, Docent; Associate Professor at the Department of Physical Chemistry, Donetsk State University, Donetsk, DPR, Russia.

Конайленко Владислав Артемович

лаборант молодежной научной лаборатории по исследованию реакционной способности органических соединений, студент 4 года обучения ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: vlad.konaylenko@gmail.com

Konailenko Vladislav Artemovich

laboratory assistant of the youth scientific laboratory for the study of the reactivity of organic compounds, 4-year student, Donetsk State University, Donetsk, DPR, Russia.

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 577.3

DOI: 10.5281/zenodo.12532471

EDN: RDWDDF

ВЛИЯНИЕ СОЧЕТАННОГО ДЕЙСТВИЯ ПЕРЕМЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ И НИЗКОЧАСТОТНОЙ ВИБРАЦИИ НА РАННИЕ СТАДИИ ОНТОГЕНЕЗА И МОРФОМЕТРИЮ КУКУРУЗЫ САХАРНОЙ

© 2024. В.О. Корниенко, К.А. Авдеева, А.С. Яицкий

В работе определены экологически безопасные параметры физических факторов, при которых наблюдали стимулирующие ответные реакции растений. Для выборки 6 и 10 переменное магнитное поле нейтрализовало ингибирующее действие вибрации частотой 8 и 13 Гц. Для выборок 8, 14 и 16 переменное магнитное поле усиливало стимулирующее действие вибрации. При влиянии ПеМП и вибрации 55 Гц совместное действие факторов снижает ростовые показатели. Наиболее ценные, с точки зрения экологической безопасности, это выявленные параметры физических факторов, приводящие к гибели части выборки, значительному торможению ростовых процессов выживших организмов, а также снижению биологической продуктивности. При оценке полученных данных критическими для растений оказались вибрации с частотой 5 Гц, 8 Гц, 13 Гц, а также сочетанное действие ПеМП и вибрации 5 и 16 Гц.

Ключевые слова: экологическая безопасность; кукуруза сахарная; переменное магнитное поле; магнитная индукция; онтогенез; морфометрия.

Введение. Живые системы в процессе своего эволюционного развития выработали различные механизмы взаимодействия с физическими факторами различной природы. Одним из таких факторов является магнитное поле как естественного, так и антропогенного происхождения. Такой антропогенный фактор имеет практический интерес, как с точки зрения экологии, так и сельского хозяйства [1–3]. В первую очередь это связано с тем, что переменное магнитное поле оказывает достаточно выраженное действие на морфологические, физиологические, биохимические и биофизические характеристики многих растений.

В рамках отечественной научной школы кафедры биофизики под руководством профессора С.В. Беспаловой, биофизические механизмы реагирования биосистем на действие переменного магнитного и электромагнитного полей изучали П.К. Хиженков, М.В. Нецветов и В.О. Корниенко [1–4]. В результате, как обобщение, выявлена сложная зависимость морфометрических параметров растений от прикладываемого магнитного поля с различными характеристиками (амплитуда, частота, экспозиция), которая прослеживается как в лабораторных условиях, так и *in situ*. Выявленные стимулирующие эффекты имеют практическое применение для агропромышленного комплекса.

Целью настоящей работы было исследование влияния переменного сочетанного действия физических факторов – переменного магнитного поля и низкочастотной вибрации на морфометрические показатели и онтогенез семян кукурузы сахарной «Пролетарская» (элита).

Задачи:

1. Оценка влияния сочетанного действия переменного магнитного поля частотой

30 Гц и низкочастотной вибрации в широком диапазоне на начальные стадии онтогенеза кукурузы сахарной «Пролетарская» (элита).

2. Оценка влияния сочетанного действия переменного магнитного поля частотой 30 Гц и низкочастотной вибрации в широком диапазоне на морфометрию надземной части и корневой системы кукурузы сахарной «Пролетарская» (элита).

3. Оценка влияния сочетанного действия переменного магнитного поля частотой 30 Гц и низкочастотной вибрации на биомассу надземной части и корневой системы кукурузы сахарной «Пролетарская» (элита).

Материалы и методы. Объект исследования – семена кукурузы сахарной «Пролетарская» (элита). Семена кукурузы сахарной помещали в диэлектрический контейнер и располагали в межполюсном пространстве катушек (рис. 1). Экспозиция в переменном магнитном поле семян кукурузы сахарной составляла 60 минут. Семена помещали в контейнер только в сухом состоянии для того, чтобы после обработки они могли транспортироваться как в условиях лаборатории с возможностью длительного хранения, так и к месту использования на сельскохозяйственных угодьях при посадочных работах. Необходимые параметры переменного магнитного поля (амплитуда, частота и тип необходимого сигнала) задавались на генераторе сигналов специальной формы Г6 28, с помощью источника тока с высоким выходным сопротивлением (ИТУН) работающего в ключевом режиме. Контроль выходных параметров на самих катушках осуществляли с помощью осциллографа. Обработка семян кукурузы сахарной происходила при постоянном значении магнитной индукции ПемП (1 мТл), частоте 30 Гц с типом сигнала синусоида.



Рис. 1. Внешний вид устройства по обработке семян кукурузы сахарной переменным магнитным полем
Обозначения: 1 – две катушки; 2 – осциллограф; 3 – генератор сигналов специальной формы Г6 28;
4 – источник тока с высоким выходным сопротивлением (ИТУН) работающий в ключевом режиме

После обработки ПеМП проводили дополнительную обработку вибрацией на виброустановке (рис. 2) также в сухом состоянии с экспозицией равной 60 минут.



Рис. 2. Внешний вид вибрационной установки для обработки семян кукурузы сахарной
Примечания: установка состоит из генератора сигналов специальной формы Г6 28 и динамика, а также контейнера для семян растений.

В результате проведения всех серий эксперимента были сформированы выборки, представленные в таблице 1.

Таблица 1
 Схема обработки семян кукурузы сахарной

Название группы	Описание группы
1	Контрольная группа растений без влияния физических факторов
2	ПеМП (В=1 мТл; f=30 Гц)
3	Вибрация f=5 Гц
4	ПеМП (В=1 мТл; f=30 Гц) + Вибрация f=5 Гц
5	Вибрация f=8 Гц
6	ПеМП (В=1 мТл; f=30 Гц) + Вибрация f=8 Гц
7	Вибрация f=10 Гц
8	ПеМП (В=1 мТл; f=30 Гц) + Вибрация f=10 Гц
9	Вибрация f=13 Гц
10	ПеМП (В=1 мТл; f=30 Гц) + Вибрация f=13 Гц
11	Вибрация f=16 Гц
12	ПеМП (В=1 мТл; f=30 Гц) + Вибрация f=16 Гц
13	Вибрация f=21 Гц
14	ПеМП (В=1 мТл; f=30 Гц) + Вибрация f=21 Гц
15	Вибрация f=34 Гц
16	ПеМП (В=1 мТл; f=30 Гц) + Вибрация f=34 Гц
17	Вибрация f=55 Гц
18	ПеМП (В=1 мТл; f=30 Гц) + Вибрация f=55 Гц

После всех обработок образцы помещались в ростовую камеру, при этом подложкой для семян служила влажная фильтровальная бумага. Полив осуществлялся только дистиллированной водой с целью исключения дополнительных факторов влияния. Контрольные партии семян находились вне действия физических факторов при прочих равных условиях. Семена прорастивали при температуре +20 °С. Энергию

прорастания и всхожесть семян определяли в сроки, указанные в ГОСТ 12038-84 [5]. После завершения эксперимента оценивали онтогенез растений, а также морфометрию надземной части и корневой системы как среднюю длину стебля и главного корня в каждой из выборок ($L_{\text{ср.}}$). Для удобства сравнения результаты, полученные в опытных выборках, относили к контрольным: $\text{Длина} = L_{\text{ср.}} \text{ опыт} / L_{\text{ср.}} \text{ контроль}$. Все полученные результаты обрабатывались методами вариационной статистики с использованием пакета компьютерных программ «Statistica».

Результаты и обсуждения. *Онтогенетические исследования кукурузы сахарной под действием сочетанного действия физических факторов.* При оценке влияния сочетанного действия физических факторов учитывали развитие выборки, считая, что положительным эффектом является выход проростка в фазу coleoptile и 1–2 листа (рис. 3).

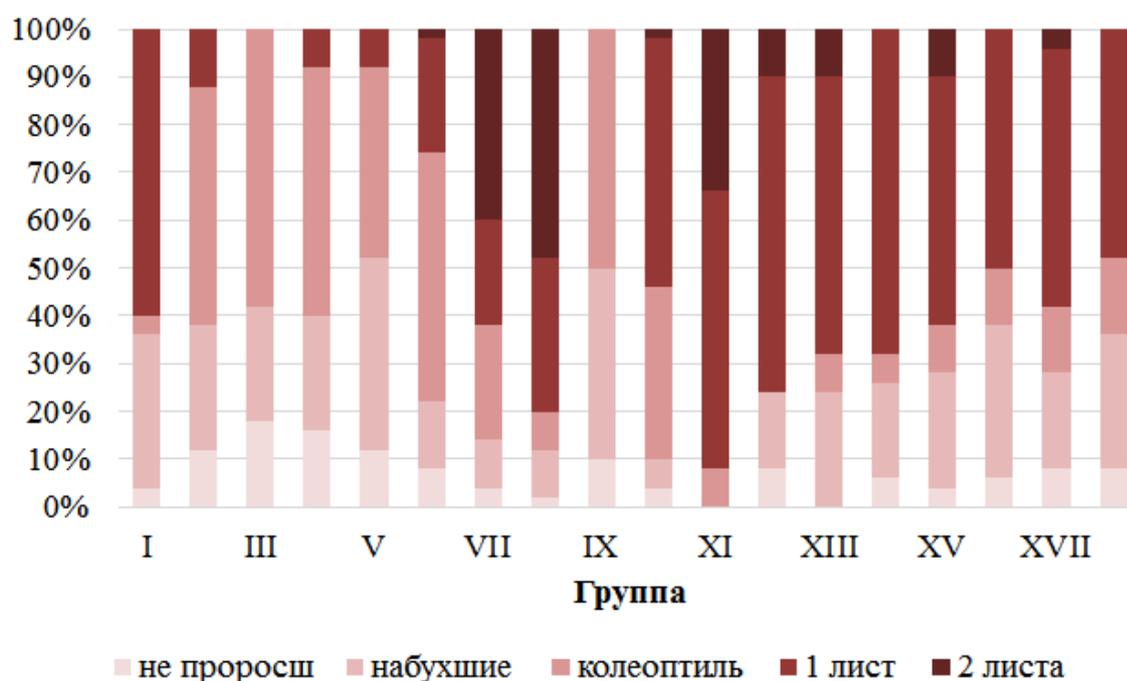


Рис. 3. Онтогенетические изменения в проростках кукурузы сахарной на 8 сутки эксперимента в зависимости от схемы обработки (см. табл. 1)

В ходе исследований установили, что на развитие организма положительно повлияли следующие схемы обработки: 6 (+22 %), 7 (+34 %), 8 (+38 %), 10 (+41 %), 11 (+56 %), 12 (+19 %), 13 (+19 %), 14 (+16 %), 15 (+13 %), 17 (+13 %). С 6 по 11 схемы наблюдается нарастание положительного эффекта с максимумом +56 % для выборки обработанной только вибрацией 16 Гц, затем имеется спад до 13–19 % в зависимости от схемы обработки. Нейтральный эффект во всех повторностях (с учетом отклонений от среднего и перекрытия диапазона) выявили в схемах 2, 3, 4, 16, 18. Ингибирующим действием обладали низкочастотные вибрации $f=8$ Гц (-25 %) и $f=13$ Гц (-22 %).

Морфометрия кукурузы сахарной под действием сочетанного действия физических факторов. Оценивая морфометрию надземной части растений и корневой системы по сравнению с контрольной группой, можно отметить, что имеется корреляция с полученными данными по развитию организма в зависимости от схемы обработки (рис. 4).

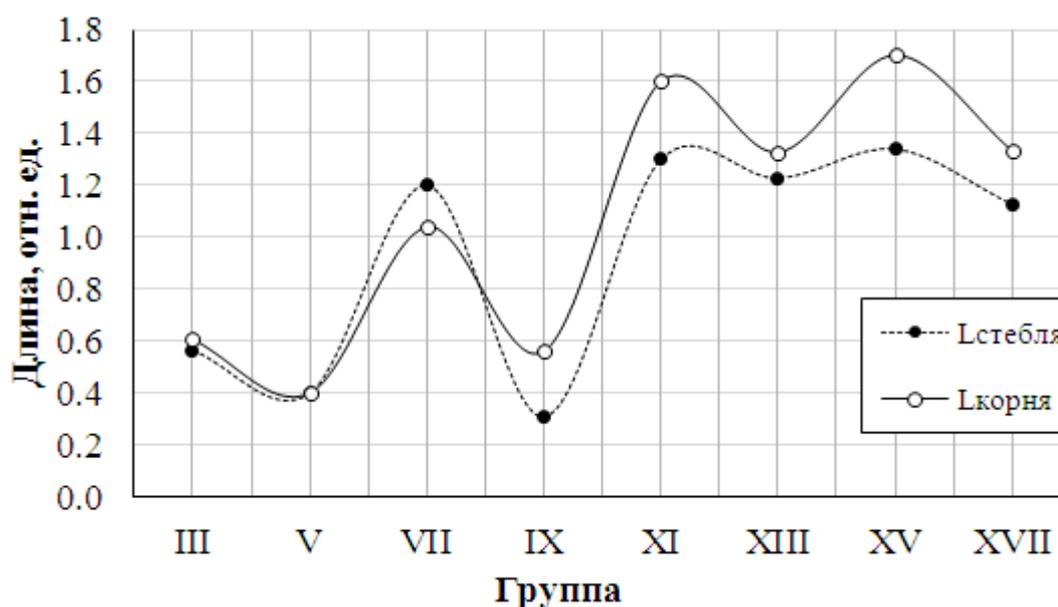


Рис. 4. Относительные значения длины надземной части (проростков) и корневой системы (главного корня) кукурузы сахарной по сравнению с контрольной группой на 8 сутки эксперимента в зависимости от частоты вибрации (схемы обработки см. табл. 1)

Так ингибирующее действие зафиксировано для образцов обработанных только низкочастотной вибрацией (рис. 4) со значениями $f=5$ Гц (Лстебля -44% , Лкорня -39%), $f=8$ Гц (Лстебля -60% , Лкорня -60%) и $f=13$ Гц (Лстебля -69% , Лкорня -44%) и при сочетанном действии ПемП и вибраций (рис. 5) $f=5$ Гц (Лстебля -24% , Лкорня -51%) и $f=16$ Гц (Лстебля -30%).

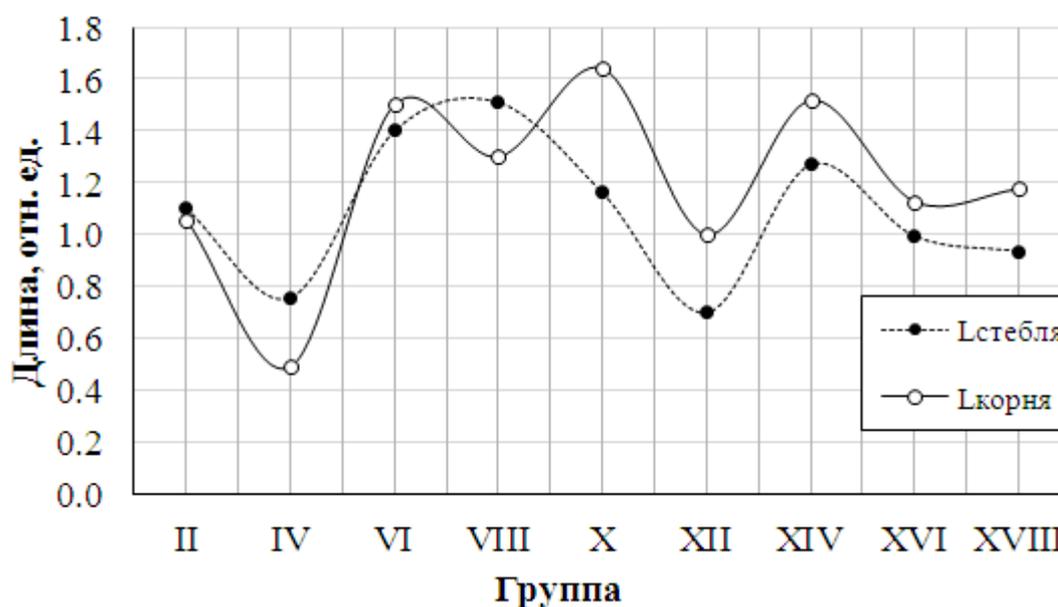


Рис. 5. Относительные значения длины надземной части (проростков) и корневой системы (главного корня) кукурузы сахарной по сравнению с контрольной группой на 8 сутки эксперимента при сочетанном действии ПемП и вибрации (схемы обработки см. табл. 1)

Положительные эффекты проявились в следующих схемах обработки семян растений: 6 группа (Лстебля $+40\%$, Лкорня $+50\%$), 7 группа (Лстебля $+20\%$), 8 группа

(Лстебля +50 %, Лкорня +30 %), 10 группа (Лстебля +16 %, Лкорня +64 %), 11 группа (Лстебля +30 %, Лкорня +60 %), 13 группа (Лстебля +23 %, Лкорня +33 %), 14 группа (Лстебля +27 %, Лкорня +52 %), 15 группа (Лстебля +34 %, Лкорня +70 %), 16 группа (Лкорня +13 %), 17 группа (Лстебля +13 %, Лкорня +33 %).

Биомасса наземной части и корневой системы также связана с развитием организма, и коррелировала для групп как со стимулирующими откликами от действия физических факторов, так и в случае ингибирующего их действия (рис. 6). Для выборок подвергшихся только низкочастотным вибрациям, характерных, например, для техногенно трансформированных территорий, выявили значительное снижение биомассы: при $f=5$ Гц (Мстебля -34 %, Мкорня -29 %), при $f=8$ Гц (Мстебля -42 %, Мкорня -37 %) и $f=13$ Гц (Мстебля -47 %, Мкорня -37 %). Также при сочетанном действии факторов для некоторых групп происходило незначительное снижение массы – группа 4 (Мстебля -17 %, Мкорня -21 %) и 12 (Мстебля -17 %). Влияние только переменного магнитного поля с частотой 30 Гц имело нейтральный характер (рис. 6).

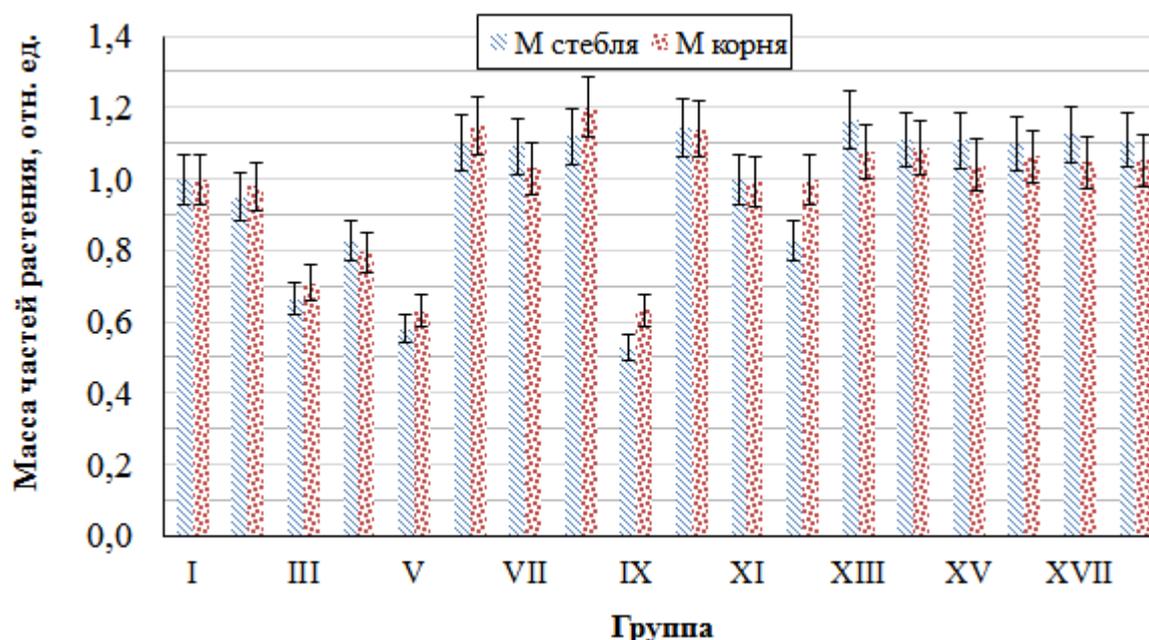


Рис. 6. Масса стебля и корня проростков в зависимости от схемы обработки (см. табл. 1)

При сопоставлении первой части эксперимента (онтогенез растений) со второй (по оценке морфометрии и значениям биомассы), достоверно определили экологически безопасные параметры физических факторов:

только влияние вибрации

а) $f=10$ Гц, развитие организма по фазам онтогенеза +34 %, развитие морфометрии надземной части +20 %, развитие корневой системы имело нейтральный характер (+4 %), общая биомасса выборки имела небольшой прирост +7 %;

б) $f=16$ Гц, развитие организма по фазам онтогенеза +56 %, развитие морфометрии надземной части +30 %, развитие корневой системы +60 %, общая биомасса не отличалась от контроля;

в) $f=21$ Гц, развитие организма по фазам онтогенеза +19 %, развитие морфометрии надземной части +23 %, развитие корневой системы +33 %, общая биомасса выборки имела небольшой прирост +13 %;

г) $f=34$ Гц, развитие организма по фазам онтогенеза +13 %, развитие морфометрии надземной части +34%, развитие корневой системы +70 %, общая биомасса выборки имела небольшой прирост +8 %;

д) $f=55$ Гц, развитие организма по фазам онтогенеза +13 %, развитие морфометрии надземной части +13 %, развитие корневой системы +33 %, общая биомасса выборки имела небольшой прирост +9%.

сочетанное влияние ПемП и вибрации

е) магнитная индукция 1 мТл, частота сигнала 30 Гц, тип сигнала синусоида и вибрация 8 Гц – развитие организма по фазам онтогенеза +22 %, развитие морфометрии надземной части +40 %, развитие корневой системы +50 %, общая биомасса выборки имела небольшой прирост +12 %;

ж) магнитная индукция 1 мТл, частота сигнала 30 Гц, тип сигнала синусоида и вибрация 10 Гц – развитие организма по фазам онтогенеза +38 %, развитие морфометрии надземной части +50 %, развитие корневой системы +30 %, общая биомасса выборки имела небольшой прирост +15 %;

з) магнитная индукция 1 мТл, частота сигнала 30 Гц, тип сигнала синусоида и вибрация 13 Гц – развитие организма по фазам онтогенеза +41%, развитие морфометрии надземной части +16%, развитие корневой системы +64%, общая биомасса выборки имела небольшой прирост +14%;

и) магнитная индукция 1 мТл, частота сигнала 30 Гц, тип сигнала синусоида и вибрация 21 Гц – развитие организма по фазам онтогенеза +16 %, развитие морфометрии надземной части +27 %, развитие корневой системы +52 %, общая биомасса выборки имела небольшой прирост +10 %;

к) магнитная индукция 1 мТл, частота сигнала 30 Гц, тип сигнала синусоида и вибрация 34 Гц – развитие организма по фазам онтогенеза имело нейтральный характер, развитие корневой системы +13 %, общая биомасса выборки имела небольшой прирост +8 %;

л) магнитная индукция 1 мТл, частота сигнала 30 Гц, тип сигнала синусоида и вибрация 55 Гц – развитие организма по фазам онтогенеза имело нейтральный характер, развитие корневой системы +18 %, общая биомасса выборки имела небольшой прирост +9 %;

Заключение. Определены экологически безопасные параметры физических факторов, при которых наблюдали стимулирующие ответные реакции растений. Для выборки 6 и 10 переменное магнитное поле нейтрализовало ингибирующее действие вибрации частотой 8 и 13 Гц. Для выборок 8, 14 и 16 переменное магнитное поле усиливало стимулирующее действие вибрации. При влиянии ПемП и вибрации 55 Гц совместное действие факторов снижает ростовые показатели.

Наиболее ценные, с точки зрения экологической безопасности, это выявленные параметры физических факторов, приводящие к гибели части выборки, значительному торможению ростовых процессов выживших организмов, а также снижению биологической продуктивности. При оценке полученных данных критическими для растений оказались вибрации с частотой 5 Гц, 8 Гц, 13 Гц, а также сочетанное действие ПемП и вибрации 5 и 16 Гц.

Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124012400345-8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нецветов М. В. Взаимодействие биологических систем с переменными магнитными полями, электрическими токами и механическими колебаниями как экологическими факторами: автореф. дис. канд. биол. н.: 03.00.16 / Донецкий национальный ун-т. – Донецк, 2002. – 150 с.

2. Корниенко В. О., Котюк П. Ф., Яицкий А. С. Влияние сочетанного действия переменного магнитного поля и низкочастотной вибрации на рост и развитие кукурузы сахарной (*Zea mays* L.) / В. О. Корниенко, П. Ф. Котюк, А. С. Яицкий // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и Технические Науки. – 2022. – № 09. – С. 15-21.
3. Корниенко В. О., Котюк П. Ф., Яицкий А. С. Влияние переменного магнитного поля (1-14 мТл) на рост и развитие кукурузы сахарной / В. О. Корниенко, П. Ф. Котюк, А. С. Яицкий // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и Технические Науки. – 2021. – № 11. – С. 17-23.
4. Хиженков П. К. Структурированные магнитные жидкости / П. К. Хиженков, М. В. Нецветов, И.М. Макмак. – Донецк: ДонФТИ НАН Украины, 2008. – 140 с.
5. ГОСТ 12038-84. Семена сельскохозяйственных культур. Методы анализа: сб. ГОСТов. М.: ИПК Издательство стандартов, 2004. 47 с.

Поступила в редакцию 20.05.2024 г.

THE EFFECT OF THE COMBINED ACTION OF AN ALTERNATING MAGNETIC FIELD AND LOW-FREQUENCY VIBRATION ON THE EARLY STAGES OF ONTOGENESIS AND MORPHOMETRY OF *ZEА MAYS* L.

V. Kornienko, K. Avdeeva, A. Yaitsky

The work identifies environmentally safe parameters of physical factors under which stimulating plant responses were observed. For samples 6 and 10, an alternating magnetic field neutralized the inhibitory effect of vibration with a frequency of 8 and 13 Hz. For samples 8, 14 and 16, the alternating magnetic field enhanced the stimulating effect of vibration. Under the influence of an alternating magnetic field and 55 Hz vibration, the combined effect of factors reduces growth rates. The most valuable, from the point of view of environmental safety, are the identified parameters of physical factors that lead to the death of a part of the sample, a significant inhibition of the growth processes of surviving organisms, as well as a decrease in biological productivity. When evaluating the data obtained, vibrations with a frequency of 5 Hz, 8 Hz, 13 Hz, as well as the combined effect of an alternating magnetic field and vibrations of 5 and 16 Hz, turned out to be critical for plants.

Keywords: environmental safety; *Zea mays* L.; alternating magnetic field; magnetic induction; ontogenesis; morphometry.

Корниенко Владимир Олегович

кандидат биологических наук, заведующий научно-исследовательской частью, доцент кафедры биофизики; ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.

Kornienko Vladimir Olegovich

candidate of biological sciences, head of Research Department, associate professor of Biophysics Department; Donetsk State University, Donetsk, DPR, Russian Federation.

Авдеева Ксения Александровна

младший научный сотрудник, ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.

Avdeeva Kseniya Aleksandrovna

junior researcher, Donetsk State University, Donetsk, DPR, Russian Federation.

Яицкий Андрей Степанович

старший преподаватель кафедры биологии, экологии и методики обучения ФГБОУ ВО «Самарский государственный социально-педагогический университет», г. Самара, РФ.

Yaitsky Andrey Stepanych

senior lecturer of Biology, Ecology and Methods of Teaching Department, Samara State University of Social Sciences and Education, Samara, Russian Federation.

РЕТРОСПЕКТИВНЫЙ АНАЛИЗ АНТРОПОГЕННОГО ЗАГРЯЗНЕНИЯ ГОРОДА ДОНЕЦКА. ВИБРАЦИОННО-АКУСТИЧЕСКОЕ ЗАШУМЛЕНИЕ

© 2024. В.О. Корниенко

В работе исследовано зашумление территории города Донецка в период с 1995 до 2023 год. Выявлены автомагистрали со значительным превышением уровня шума в среднем от 30 до 50 %. В условиях города уровень акустического шума составляет в среднем 78 ± 3 дБА. Установлено, что в центральной части города большой вклад в уровень вибрационно-акустического загрязнения вносит интенсивность транспортного потока и длительность светового цикла, при удалении от центральных автомагистралей дополнительным фактором служит наличие значительных дефектов дорожного покрытия, отсутствие светового цикла и как следствие увеличение скорости автопотока, а также повышение доли тяжелого грузового транспорта. Уровень звукового давления коррелирует с интенсивностью автопотока в степенной зависимости ($R^2=0.85$). Превышение максимумов на территории города составляют для центральных улиц от 30 до 50 %. Дополнительно оценены вибрационные спектры, распространяющиеся от источника шума к фитоценозам и древесным растениям в частности. Установили, что диапазон частот зарегистрированных вибраций переданных деревьям от автомагистралей располагается в промежутке от единиц (15 Гц) до 1 кГц, при этом максимумы в спектрах приходятся на частоты до 200 Гц.

Ключевые слова: акустический шум, техногенная вибрация, экологический фактор, древесные растения, экологическая безопасность, организм и среда, Донецк.

Введение. Современный Донецк – город-герой, который требует принятия решений по улучшению экологической обстановки: озеленению улиц научно обоснованным видовым составом растений с учетом региональных особенностей [1], восстановлению экологических коридоров, созданию современных зелёных зон и т.д.

Антропогенное влияние на экосистемы, в том числе и от вибрационно-акустического зашумления, как физического фактора, это неизбежность современного города [2–12], тем не менее, урбоэкологические подходы и сбалансированность между экологическими, социальными и экономическими факторами могут обеспечить его устойчивое развитие [13].

Известно, что от 30 до 40 % горожан проживают в условиях шумового дискомфорта [14], который становится причиной различных заболеваний и ведет к ухудшению качества жизни [15, 16]. Основным источником вибрационно-акустического зашумления города является транспорт – автомобильный (~83–84 % [14, 15]) и в значительно меньшей степени железнодорожный [17]. В составе автопотока доля легковых автомобилей значительно превышает остальные виды транспорта [18–21]. Уровень вибрационно-акустического зашумления территории зависит от ряда факторов [17]: интенсивности транспортного потока, наличия дефектов дорожных покрытий, тяжелого грузового транспорта, отсутствия бордюрных ограждений, ширины дорожного полотна, длительности светового цикла (это интервал времени, в течение которого каждый из светофорных сигналов появляется на дисплее), типа застройки вдоль автомагистралей, а также уровня жизнеспособности линейных насаждений [11; 19–21].

С точки зрения факториальной экологии, оценка вибрационно-акустического загрязнения территории и его влияния на живые системы через природные среды является актуальной проблемой. Так в условиях городской среды движение автотранспорта и железнодорожного транспорта приводит к вибрациям почвы, которые

распространяются на деревья придорожных зеленых полос [22–26]. Особенностью вибраций транспортного происхождения является их продолжительность во времени, регулярность, а также сочетание с химическими загрязнителями почвы и воздуха. Следовательно, увеличение интенсивности транспортных потоков неизбежно приводит к усилению сочетанного воздействия на флору химическими веществами и вибрацией [22, 23, 25]. Учитывая это, возникают вопросы о наличии и интенсивности вибрационного и акустического воздействия транспорта на деревья. Одной из задач, которые необходимо решить, является исследование относительной устойчивости деревьев разных видов к вибрационно-акустическому фактору, передаваемому растениям, как через почву, так и по воздуху.

Цель работы: провести ретроспективный анализ вибрационно-акустического зашумления города Донецка.

Материалы и методы. Территория исследования в городе Донецке имела широкий диапазон и состояла из 30 крупных автомагистралей: пр. П. Коммунар, ул. Челюскинцев, ул. Артема, бул. Шевченко, ул. Красноармейская, ул. Университетская, ул. Петровского, ул. 50летия СССР, ул. Щорса, пр. Ильича, ул. Светлого Пути, ул. Горького, ул. Кобзева, пр. Маяковского, пр. Ленинский, ул. Постышева, пл. Конституции, ул. Такаченко, пр. Киевский, пл. Бакинских Комиссаров, пр. Дзержинского, ул. Б. Магистральная, ул. Пухова (мкр. Боссе), пр. Комсомольский, ул. Р. Люксембург, ул. Ватутина, пл. Буденного, бул. Пушкина (пересечения с основными автомагистралями), ул. Куйбышева, пр. Мира.

Уровень звукового давления (дБА) измеряли с помощью цифрового шумомера Venetech GM1351 на высоте 1,5 метра над уровнем проезжей части и в среднем 7–7,5 метров от ближайшей полосы, а вибрационные спектры с помощью портативного осциллографа на почве, бордюре и дереве. Результаты сравнивали с санитарно-гигиеническим нормативом [27].

Схема проведения эксперимента имела несколько периодов:

1. Ретроспективный анализ зашумления территории по данным архивных записей 1995–1999 гг.
2. Ретроспективный анализ зашумления территории по данным архивных записей 2000–2004 гг.
3. Ретроспективный анализ зашумления территории по данным архивных записей 2009–2013 гг. и анализ вибрационных спектров (рис. 1) по данным собственных исследований.

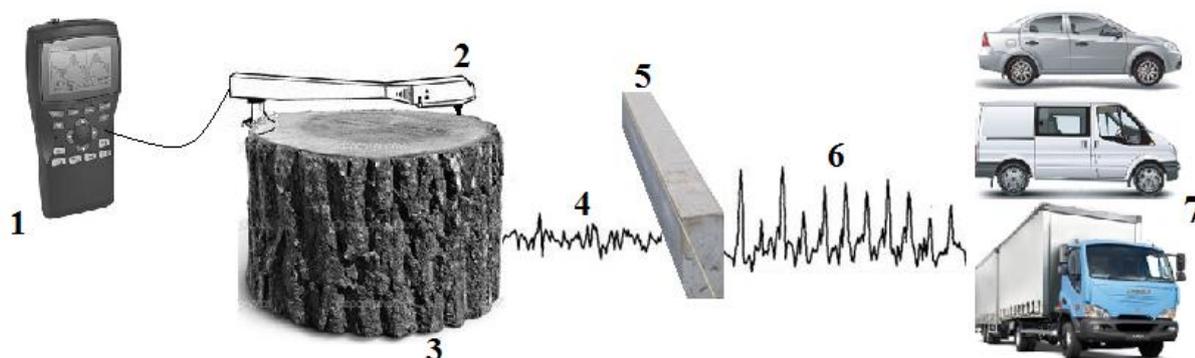


Рис. 1. Схема проведения исследований по оценке вибрационных спектров от источника зашумления

Обозначения: 1 – ручной осциллограф; 2 – звукозаписывающее устройство; 3 – объект исследования; 4 – вибрация после прохождения через бордюр; 5 – бордюр; 6 – вибрация индуцируемая транспортом и передаваемая с почвы через корневую систему на дерево; 7 – условный источник вибрационно-акустического загрязнения территории.

4. Анализ зашумления территории и вибрационных спектров по данным собственных исследований 2014–2018 гг.

5. Анализ зашумления территории и вибрационных спектров по данным собственных исследований 2019–2023 гг.

Интенсивность движения автотранспорта вдоль исследуемых участков на всех территориях исследования оценивалась по количеству единиц автотранспорта определённого типа, проезжающих мимо точки измерения за единицу времени [28].

Для статистической обработки данных использовали программы «Statistica 8» (StatSoft Inc.) и «Excel 2010» (Microsoft Corporation). В том случае, когда вибрационный сигнал сложный по частоте или амплитуде, для его расшифровки применялась обработка с использованием метода быстрого преобразования Фурье в программе «MathCad».

Результаты и обсуждение. В результате оценки шумового загрязнения территории города Донецка, установили, что в среднем с 1995 по 2023 год значение акустического шума лежит в пределах $78 \pm 3,0$ дБА (рис. 2).

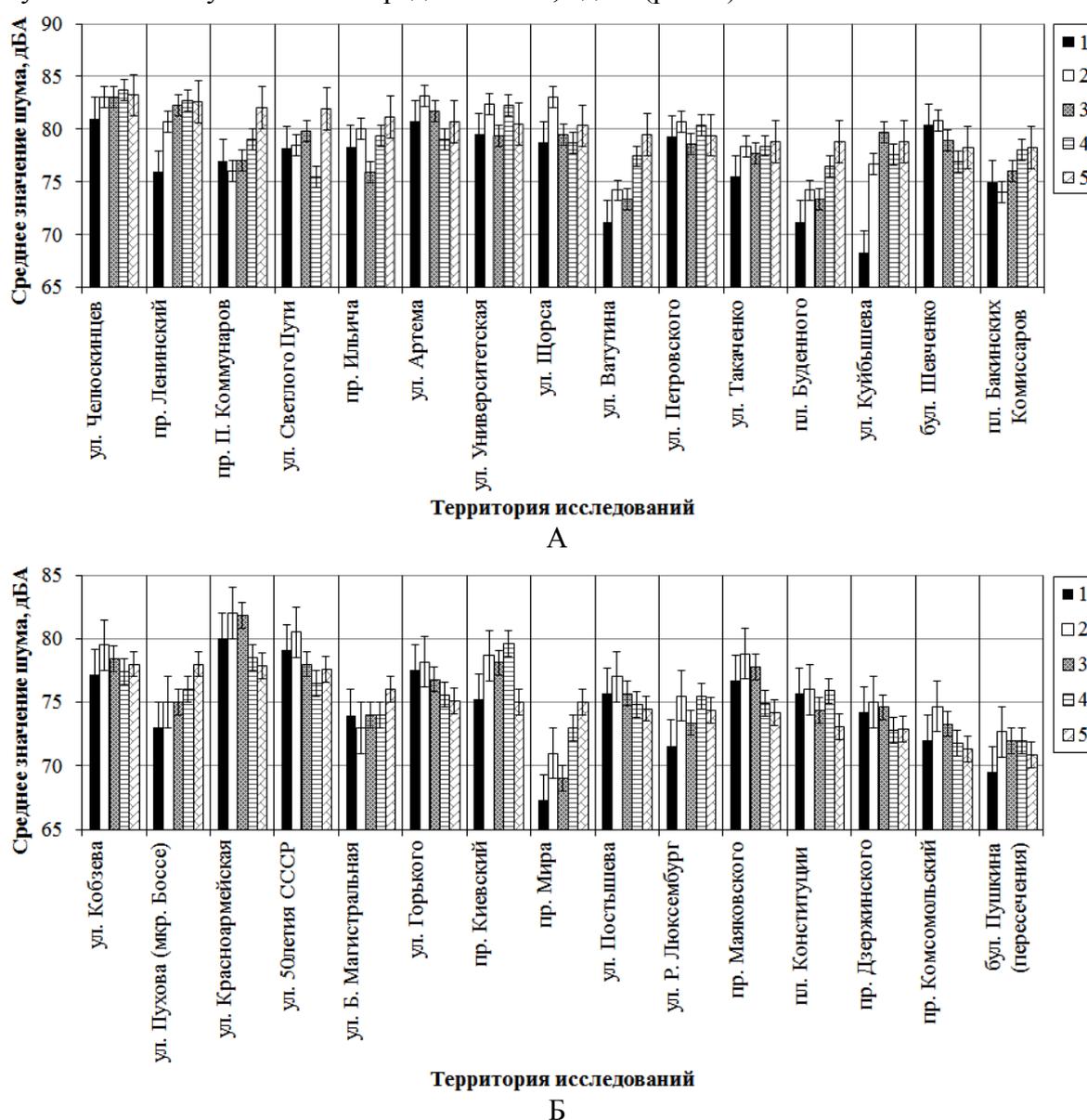


Рис. 2. Зашумление территории города Донецка

Примечания: 1 – 1995–1999 гг.; 2 – 2000–2004 гг.; 3 – 2009–2013 гг.; 4 – 2014–2018 гг.; 5 – 2019–2023 гг.

При детальном рассмотрении зашумленности территории выявили, что в центральной части города большой вклад вносит интенсивность транспортного потока и длительность светового цикла, при удалении от центральных автомагистралей дополнительным фактором служит наличие значительных дефектов дорожного покрытия, отсутствие светового цикла и как следствие увеличение скорости автопотока, а также повышение доли тяжелого грузового транспорта. На многих автомагистралях превышение уровня шума в будние дни с 8:00 до 19:00 (в связи с обстановкой) в среднем составляет:

- 45–51 % (по мере убывания – ул. Челюскинцев; пр. Ленинский; пр. П. Коммунаров; ул. Светлого Пути; пр. Ильича; ул. Артема; ул. Университетская; ул. Щорса; ул. Ватутина);

- 41–44 % (по мере убывания – ул. Петровского; ул. Такаченко; пл. Буденного; ул. Куйбышева; бул. Шевченко; пл. Бакинских Комиссаров; ул. Кобзева; ул. Пухова (мкр. Боссе); ул. Красноармейская; ул. 50летия СССР);

- 35–38 % (по мере убывания – ул. Б. Магистральная; ул. Горького; пр. Киевский; пр. Мира; ул. Постышева; ул. Р. Люксембург; пр. Маяковского);

- 29–33 % (по мере убывания – пл. Конституции; пр. Дзержинского; пр. Комсомольский; бул. Пушкина (пересечения)).

При оценке уровня звукового давления и интенсивности транспортного потока (рис. 3) на исследуемых территориях, установили, что связь между параметрами носит степенной характер ($R^2 = 0,85$).

При сравнении характера и состава движения в различных районах города можно отметить следующее:

- основная масса транспортного потока сформирована из легковых автомобилей;
- в границах движения по ул. Артёма (1-я линия) в структуре транспортного потока практически отсутствуют большегрузные автомобили (кроме коммунальных автомобилей), что связано с действующим ограничением их въезда, а среди общественного транспорта преобладают маршрутные такси и муниципальный транспорт (троллейбусы маршрута № 2, крупногабаритные автобусы маршрута № 2);

- в границах движения по ул. Университетской (2-я линия города) в структуре транспортного потока присутствует значительное количество большегрузных автомобилей, однако в процентном соотношении по сравнению с легковыми автомобилями их доля невелика;

- по ул. Челюскинцев в общий уровень вибрационно-акустического зашумления вносит свой вклад железнодорожный транспорт.

Шум находится в пределах нормы, когда он как по эквивалентному, так и по максимальному уровню не превышает установленные нормативные значения. Поскольку в центральной части города жилые дома расположены в непосредственной близости от дороги, то в качестве нормы допустимого уровня шума взят

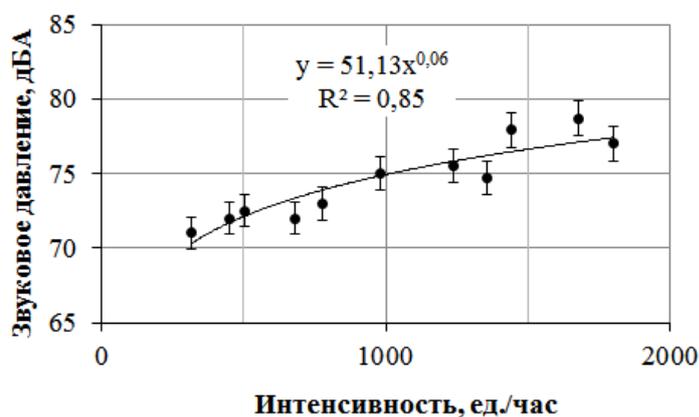


Рис. 3. Зависимость средних значений звукового давления (дБА) от интенсивности транспортного потока (ед./час) города Донецка

установленный в СНиПе 23-03-2003 «Защита от шума» максимальный уровень шума, равный 70 дБА.

В результате исследований установили, что с 1995 по 2023 год идёт постепенное увеличение максимумов звукового давления (рис. 4). Это также связано с новыми антропогенными источниками шума в условиях Донбасса.

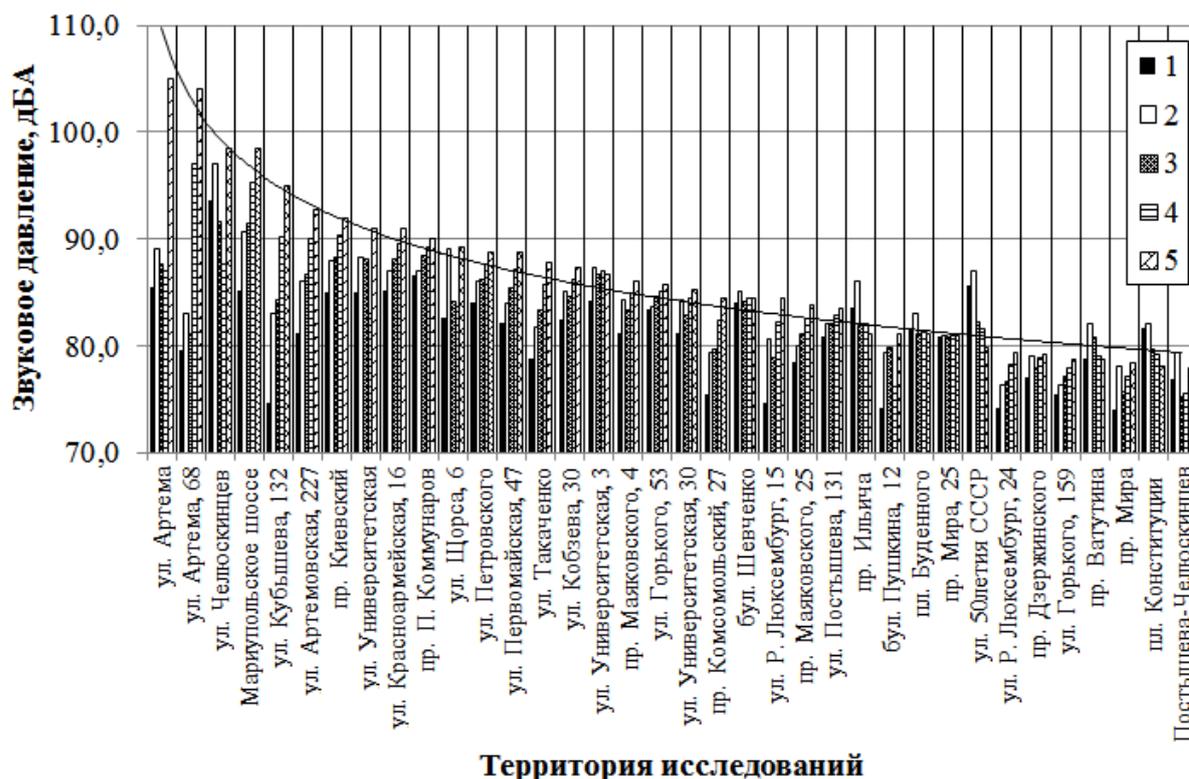


Рис. 4. Средние значения максимумов зашумления на территории города Донецка

Максимумы лежат в диапазоне от 77 до 105 дБА. Наибольшее превышение допустимого максимального уровня шума отметили на автомагистралях – ул. Артема (50 %), ул. Челюскинцев и Мариупольское шоссе (41 %) и ул. Университетская, ул. Красноармейская и пр. П. Коммунар (30 %).

Дополнительно к шумовому загрязнению был оценён диапазон частот зарегистрированных вибраций переданных деревьям от автомагистралей. Установлено, что он располагается в промежутке от 15 до 300–400 Гц и редко до 1 кГц. При этом максимумы в спектрах приходятся на частоты до 200 Гц (рис. 5). Для некоторых типов автотранспорта наблюдали также вибрации с более высокими частотами [23, 25, 26].

Неравномерное распределение относительной амплитуды сигнала по частотам на усредненных спектрах свидетельствует о разнообразии источников вибрации, что характерно для автомобилей отечественного и российского производства. Это может быть связано с техническими характеристиками и состоянием автомобилей, а также с состоянием дорожного покрытия. Для внедорожников характерна высокая относительная амплитуда как на низких – ~15, ~60 Гц, так и на более высоких частотах 150–165 Гц. В отличие от обычных легковых автомобилей внедорожники индуцируют вибрации растений регистрируемые и на частотах выше 200 Гц: , 200–300, ~350, ~450, ~500, ~550 и ~800 Гц.

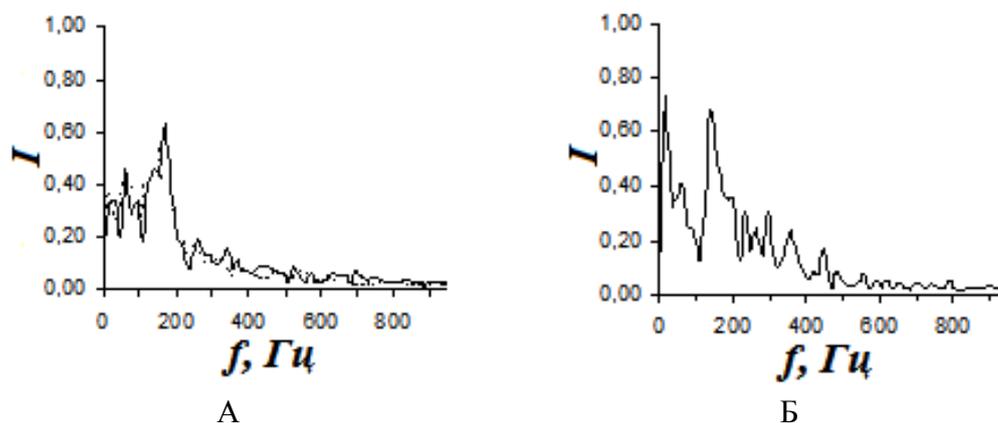


Рис. 5. Амплитудные спектры вибраций (*I*) деревьев *Populus nigra* L. и *Populus pyramidalis* от движения автотранспорта

Обозначения: а – легковые российского/советского производства; б – внедорожники.

В результате выполненного анализа данных амплитудно-частотных характеристик вибраций от автомобилей проезжающих вдоль автомагистралей установили, что спектры зависят от расположения корней деревьев и типа корневой системы. Спектр вибраций, регистрируемых на ограждающем линейные насаждения бордюре, отличается от вибраций на почве и растениях, как следствие имеется некий фильтрационный фактор, который может иметь важное значение в экологической безопасности территории. Известно, что в снижении шума и вибраций значительную роль имеет тип кроны и её архитектура, а также волокна стволов деревьев. Кроны лиственных деревьев поглощают 26 % падающей на них звуковой энергии, а отражают и рассеивают 74 % этой энергии [29]. Различные виды деревьев и кустарников обладают различной звукопоглощающей способностью, а древесные волокна в свою очередь существенно отличаются по модулю упругости и плотности, а значит и в различной степени гасящих вибрации разных частот. Всё это даёт возможность подбора более эффективных видов растений для зеленых полос.

Заключение. В работе исследовано зашумление территории города Донецка в период с 1995 до 2023 год. Выявлены автомагистрали со значительным превышением уровня шума в среднем от 30 до 50 %. В условиях города уровень акустического шума составляет в среднем 78 ± 3 дБА. Установлено, что в центральной части города большой вклад в уровень вибрационно-акустического загрязнения вносит интенсивность транспортного потока и длительность светового цикла, при удалении от центральных автомагистралей дополнительным фактором служит наличие значительных дефектов дорожного покрытия, отсутствие светового цикла и как следствие увеличение скорости автопотока, а также повышение доли тяжелого грузового транспорта. Уровень звукового давления коррелирует с интенсивностью автопотока в степенной зависимости ($R^2=0.85$). Превышение максимумов на территории города составляют для центральных улиц от 30 до 50 %. Дополнительно оценены вибрационные спектры, распространяющиеся от источника шума к фитоценозам и древесным растениям в частности. Установили, что диапазон частот зарегистрированных вибраций переданных деревьям от автомагистралей располагается в промежутке от единиц (15 Гц) до 1 кГц, при этом максимумы в спектрах приходятся на частоты до 200 Гц.

Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124051400023-4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корниенко В.О., Хархота Л.В. Мониторинг состояния древесных растений центральной части города Донецка // Самарский научный вестник. – 2023. – Т. 12, № 2. – С. 46-51. doi: 10.55355/sn2023122107
2. Беспалова С.В., Романчук С.М., Чуфицкий С.В., Перебейнос В.В., Готин Б.А. Флуориметрический анализ влияния шламовых загрязнителей на фитопланктон // Биофизика. – 2020. – Т. 65. № 5. – С. 994-1002. – DOI: 10.31857/S0006302920050178
3. Беспалова С.В., Чуфицкий С.В., Романчук С.М., Кривякин А.С. Биомониторинг поверхностных вод в условиях антропогенной нагрузки на примере реки Кальмиус // Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки. – 2018. – № 3-4. – С. 137-145. – EDN: VSNTJC
4. Мирненко Э. И. Таксономическое разнообразие фитопланктона реки Кальмиус и водохранилищ, расположенных на ней // Трансформация экосистем. – 2022. – Т. 5. – №2 (16). – С. 63-73. – DOI: 10.23859/estr-220204
5. Мирненко Э.И. Диатомовый анализ водохранилищ, расположенных на р. Кальмиус // Самарский научный вестник. 2023. – Т. 12, № 1. – С. 82-86. – DOI: 10.55355/sn2023121112
6. Сафонов А.И., Алемасова А.С., Зиньковская И.И., Вергель К.Н., Юшин Н.С., Кравцова А.В., Чалигава О. Морфогенетические аномалии бриобионтов в условиях геохимически контрастной среды Донбасса // Геохимия. – 2023. – Т. 68, № 10. – С. 1032-1044. – DOI: 10.31857/S0016752523100114
7. Алемасова А.С., Сафонов А.И. Тяжелые металлы в фитосубстратах - индикаторы антропогенного загрязнения воздуха в промышленном регионе // Лесной вестник. – 2022. – Т. 26, № 6. – С. 5-13. – DOI: 10.18698/2542-1468-2022-6-5-13
8. Сафонов А. И. Новые виды растений в экологическом мониторинге Донбасса // Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки. – 2020. – № 1. – С. 96–100. – EDN: QKKMNH
9. Корниенко В. О. Влияние природно-климатических факторов на механическую устойчивость и аварийность древесных растений на примере *Juniperus virginiana* L. // Бюллетень Государственного Никитского ботанического сада. – 2020. – № 134. – С. 93-100. – DOI: 10.36305/0513-1634-2020-134-93-100
10. Корниенко В.О., Калаев В.Н. Влияние природно-климатических факторов на механическую устойчивость и аварийность деревьев березы повислой в г. Донецке // Лесоведение. – 2022. – № 3. – С. 321-334. – DOI: 10.31857/S0024114822020073
11. Кольченко О. Р., Корниенко В. О. Эколого-биологическая характеристика *Acer platanoides* L. в условиях г. Донецка // Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки. – 2019. – № 3-4. – С. 151-162. – EDN: PAUIGC
12. Корниенко В. О., Калаев В. Н. Экологическое значение биомеханических свойств древесных растений на примере *Juniperus virginiana* L. // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Химия. Биология. Фармация. – 2018. – № 1. – С. 97-103. – EDN: UORZMG
13. Гагарина Е. С. Зеленая инфраструктура и экосистемные услуги в устойчивом развитии городов // Architecture and Modern Information Technologies. – 2023. – №1 (62). – С. 228-247. – DOI: 10.24412/1998-4839-2023-1-228-247
14. Терентьева Л. С. Геоэкологическая оценка акустического загрязнения примагистральных территорий (на примере г. Воронежа): автореф. дис. ... канд. геогр. наук. – Воронеж, 2008. – 22 с.
15. Прожорина Т. А., Куролап С. А., Суханов П. А. Исследование влияния лесополосы на формирование уровня автотранспортного шума примагистральных территорий города Воронежа // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Естественные и точные науки. – 2022. – Т. 16, № 1. – С. 102-109. – DOI: 10.31161/1995-0675-2022-16-1-102-109
16. Влияние загрязнения окружающей среды на состояние здоровья населения: взаимосвязь дисэлементоза с различной патологией сердечно-сосудистой системы : монография / Г. А. Игнатенко, Д. О. Ластков, А. В. Дубовая [и др.] ; под редакцией С. Т. Кохана, Г. А. Игнатенко, А. В. Дубовой; Забайкальский государственный университет. – Чита : ЗабГУ, 2021. – 231 с. – EDN: RPKUAM
17. Нецветов М.В., Хиженков П.К., Сулова Е.П. Введение в вибрационную экологию. – Донецк: Вебер, 2009. – 164 с.
18. Корниенко В.О., Приходько С.А., Яицкий А.С. Оценка жизненного состояния древесных насаждений в условиях урбанизированной среды // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и технические науки. – 2020. – № 03/2. – С. 14-19. – EDN: GWBRPR
19. Корниенко В.О., Калаев В.Н. Эколого-биологические особенности и механическая устойчивость древесных растений, используемых в озеленении города Донецка. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2021. – С. 107 с. – EDN: HCFNFD

20. Корниенко В.О., Яицкий А.С. Экологические последствия шумового загрязнения города Донецка // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и технические науки. – 2022. – № 11/2. – С. 28-34. – DOI: 10.37882/2223-2966.2022.11-2.13
21. Корниенко В. О., Яицкий А. С. Жизнеспособность древесных растений в условиях зашумления городской территории (на примере г. Донецка) // Естественные и технические науки. – 2022. – № 12 (175). – С. 166-170. – EDN: JZVTE
22. Никулина В.Н., Корниенко В.О., Роменский М.В., Нецветов М.В. Вибрационное воздействие движения трамваев и железнодорожного транспорта на деревья // Актуальні проблеми ботаніки та екології: Матер. міжнар. конф. молодих учених (13-16 серпня 2008 р., м. Кам'янець-Подільський). – К., 2008. – С. 177-178.
23. Никулина В.Н., Корниенко В.О., Панкова Я.С., Щербинина В.К. Влияние вибраций на растительные и животные организмы // Актуальні проблеми ботаніки та екології. Матеріали міжнародної конференції молодих учених (13–16 серпня 2008 р., м. Кам'янець-Подільський). – К., 2008. – С. 175–176.
24. Нецветов М., Сулова Е., Никулина В., Корниенко В. Механическая устойчивость деревьев к антропогенным вибрационным нагрузкам // Фізичні методи в екології, біології та медицині. Програма і збірник тез II міжнародної конференції. 2-6 вересня 2009 р., Львів-Ворохта. – С. 22-23.
25. Корниенко В. О., Роменский М.В., Нецветов М.В. Вибрации растений, индуцированные естественными источниками и автомобильным транспортом // Актуальные вопросы теоретической и прикладной биофизики, физики и химии. «БФФХ-2008»: Материалы IV Всеукраинской научно-технической конференции. – Севастополь: СевНТУ, 2008. – С. 155-157.
26. Корнієнко В. О., Нецветов М. В., Нікуліна В. М., Сулова О. П. Дослідження стійкості дерев до вібрацій // Вісник Львів. ун-ту Серія фіз. 2009. – Вип. 44. – С. 185–193.
27. ГОСТ Р 53187-2008 Акустика. Шумовой мониторинг городских территорий. М.: Издательство стандартов, 2009. – 15 с.
28. ГОСТ 20444-85 Шум. Транспортные потоки. Методы измерения шумовой характеристики. – М.: Издательство стандартов, 1985. – 20 с.
29. Половинкина Ю.С. Шумовое загрязнение окружающей среды урбанизированных территорий (на примере города Волгограда) // Научный журнал КубГАУ. – 2012. – №76 (02). – С. 584-593. – EDN: OWTVVH

Поступила в редакцию 21.05.2024 г.

A RETROSPECTIVE ANALYSIS OF ANTHROPOGENIC POLLUTION OF THE CITY OF DONETSK. VIBRATION AND ACOUSTIC NOISE.

V.O. Kornienko

The paper studies noise pollution in the city of Donetsk from 1995 to 2023. Highways with significant excess noise levels by an average of 30 to 50% are identified. In urban conditions, the average acoustic noise level is 78 ± 3 dB. It has been established that in the central part of the city, the greatest contribution to the level of vibration-acoustic pollution is made by the intensity of the traffic flow and the duration of the light cycle; when moving away from the central highways, an additional factor is the presence of significant road surface defects, the absence of a light cycle and, as a result, an increase in the speed of the traffic flow, as well as an increase in the share of heavy trucks. The sound pressure level correlates with the intensity of the traffic flow in a power-law dependence ($R^2=0.85$). The excess of maximums in the city for the central streets is from 30 to 50%. Additionally, the vibration spectra propagating from the noise source to phytocenoses and woody plants in particular are estimated. It was established that the frequency range of recorded vibrations transmitted to trees from highways is located in the interval from units (15 Hz) to 1 kHz, with the maxima in the spectra occurring at frequencies up to 200 Hz.

Keyword: acoustic noise, vibration, environmental factor, woody plants, environmental safety, organism and environment, Donetsk.

Корниенко Владимир Олегович
кандидат биологических наук, заведующий научно-исследовательской частью, доцент кафедры биофизики; ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.

Kornienko Vladimir Olegovich
candidate of biological sciences, head of Research Department, associate professor of Biophysics Department; Donetsk State University, Donetsk, DPR, Russian Federation

МОРФОЛОГИЧЕСКАЯ ДИВЕРГЕНЦИЯ ПЛОДОВ БЛИЗКОРОДСТВЕННЫХ ВИДОВ РОДА CRATAEGUS В ГОРНОЙ ЧАСТИ ВОСТОЧНОГО КРЫМА

© 2024. В. Ю. Летухова, И. И. Коршиков, И. Л. Потапенко

Изучена изменчивость натуральных и расчетных метрических характеристик плодов трех близкородственных таксонов рода *Crataegus*: *C. orientalis* Pall. ex Bieb., *C. pojarkovae* Kossyich и *C. tournefortii* Griseb. Их таксономический статус в ботанической литературе носит дискуссионный характер. Для анализа сходства и различия плодов этих таксонов-применяли методы статистического анализа: корреляционный, дисперсионный, также был использован критерий идентичности Животовского. При сравнительном анализе изменчивости плодов в ценопопуляциях *C. orientalis*, *C. tournefortii* и *C. pojarkovae* было установлено, что по большинству исследуемых показателей они достоверно отличаются. Не обнаружено гибридных форм этих морфологически дивергентных таксономических единиц. *C. pojarkovae* в его единственном местообитании в Крыму имеет низкую репродуктивную и экспансивную активность и сохраняет в поколениях типичные для этого вида морфопризнаки. На основании полученных результатов сделан вывод, что *C. pojarkovae* и *C. tournefortii* можно отнести к категории самостоятельных видов.

Ключевые слова: *Crataegus orientalis*; *Crataegus pojarkovae*; *Crataegus tournefortii*; Восточный Крым; морфометрическая изменчивость плодов; популяции.

Введение. Систематика растений – не схоластическая наука, а искусство, и ее эффективность возрастает при условии достаточно обильного материала для исследований [1]. Дискуссионные вопросы в определении ранга таксона разрешаются при использовании биоморфологических и более точных современных аналитических методов [2, 3]. В вопросах таксономического статуса отдельных представителей рода *Crataegus* Tourn. ex L. в Крыму с использованием только традиционных описательных методов, нет однозначного мнения, их число по данным В. Н. Голубева [4] составляет 17 видов, по данным Н. Н. Цвелева [5] – 22 вида, а по данным А. В. Ены [6] – 12 видов. Это может быть связано с отсутствием у отдельных видов репродуктивной изоляции, что приводит к скрещиванию между собой с образованием жизнеспособных гибридов. Таковым, например, является происхождение *Crataegus tournefortii* Griseb, образованным в результате гибридизации *C. orientalis* Pall. ex Bieb. × *C. pentagyna* Waldst. et Kit. К. I. Christensen [7] классифицирует его как *C. orientalis* subsp. *orientalis*, хотя по мнению Н. Н. Цвелева [5] это маловероятно, поскольку А. Н. R. Grisebach, хорошо знал *C. orientalis* и не мог описать его вторично. Неоднозначным остается также статус описанного в 1964 году боярышника Поярковой (*C. pojarkovae* Kossyich) в единственном местообитании в Крыму – Карадагском заповеднике. Н. Н. Цвелев [5] классифицирует его как самостоятельный вид. Более детальное описание морфологических особенностей *C. pojarkovae* и *C. orientalis* в Карадагском заповеднике [8] позволили сделать вывод, что это два самостоятельных вида, хотя это не согласуется с признанной в Европе классификацией К. I. Christensen [7].

Более точно классифицировать статус *C. pojarkovae* и *C. tournefortii* можно на основании сравнительной популяционной биометрии с видом, не вызывающим сомнения, например, *C. orientalis*. Таксономический подход, основанный на анализе степени сходства и различия между организмами на основе биометрии, который

рассматривают как статистический тип систематики, не утратил своей актуальности, не смотря на массовое применение количественной оценки генетических расстояний между таксонами [9]. Полиморфизм, или наличие в популяциях групп особей с дискретными морфопризнаками, которые именуют морфами, как правило, обычное явление для перекрестно опыляемых видов растений. В подобных исследованиях предлагается использовать не столько натурные морфометрические показатели, сколько расчетные или феномаркеры. Это объясняется тем, что размеры плодов и их масса зависит от условий произрастания растений и урожайности, а вот форма плодов, характеризующаяся определенными соотношениями длины, ширины и толщины, является значительно более константной для групп особей. Консервативность популяционных и видовых расчетных показателей позволила разработать методы фенетики, которые давно продуктивно используются в популяционном и таксономическом анализе [10]. Главная задача фенетики – поиск экологически стабильных фенотипов в популяциях и их использование как маркеров для определения структуры популяции и межпопуляционных различий с использованием генетических подходов [11]. Амплитуда варьирования морфопризнаков специфична и шире у вегетативных, чем генеративных органов [12], а межпопуляционная изменчивость, наоборот, у последних выше [13]. С позиции статистической теории эволюции не существует морфологических стандартов индивидуумов любого вида, так генетическая гетерогенность популяций проявляется в фенотипической изменчивости ее особей [14].

Морфологическое проявление одних признаков отличается высокой самостоятельностью [13], а изменчивость других признаков может характеризоваться высокими корреляционными связями [15]. По этой причине М. Г. Романовский [16] предлагает для описания фенотипической структуры популяций древесных растений использовать признаки-корреляции. Если выяснить частоту встречаемости в популяциях дискретных вариантов феномаркеров, поддерживающих устойчивый полиморфизм, то можно рассчитать их частоты, степень сходства и отличий популяций по этим признакам [17]. Анализ изменчивости количественных признаков в популяциях позволяет реально установить формовую или видовую направленность естественного отбора [18].

В Карадагском заповеднике *C. orientalis* и *C. pojarkovae* пространственно не изолированы и совместно произрастают в одних экотопах, а *C. tournefortii* встречается в местах распространения первого вида. Применяв вышеизложенные подходы в анализе фенотипической изменчивости показателей плодоношения можно выяснить степень отличий узкоареальных *C. pojarkovae* и *C. tournefortii* от широкоареального *C. orientalis*, что и было целью работы.

Материалы и методы. По данным гербария Московского университета (MW) [19] и гербария Карадагской научной станции (РНЕО) была построена карта распространения трех таксонов боярышников в Горном Крыму (рис. 1).

На территории Карадагского заповедника *C. pojarkovae* отмечен на высоте от 20 до 320 м н.у.м., однако больше всего растений встречается на высоте 100–200 м н.у.м. (здесь сосредоточено 65 % объема выборки). *C. pojarkovae* произрастает на открытых степных склонах, входит в состав кустарниковых сообществ, также отмечен в составе дубово-кустарниковых редколесий. Везде встречается единично или небольшими группами в виде кустов или деревьев. Из сопутствующих видов наиболее обычны: *Crataegus orientalis* Pall. ex Bieb., *Rosa corymbifera* Borkh., *Carpinus orientalis* Mill., *Prunus spinosa* L., *Pyrus elaeagrifolia* Pall., *Quercus pubescens* Willd. [20, 21]. Образцы плодов были случайным образом собраны с 12 деревьев *C. pojarkovae* на всей территории Карадага.

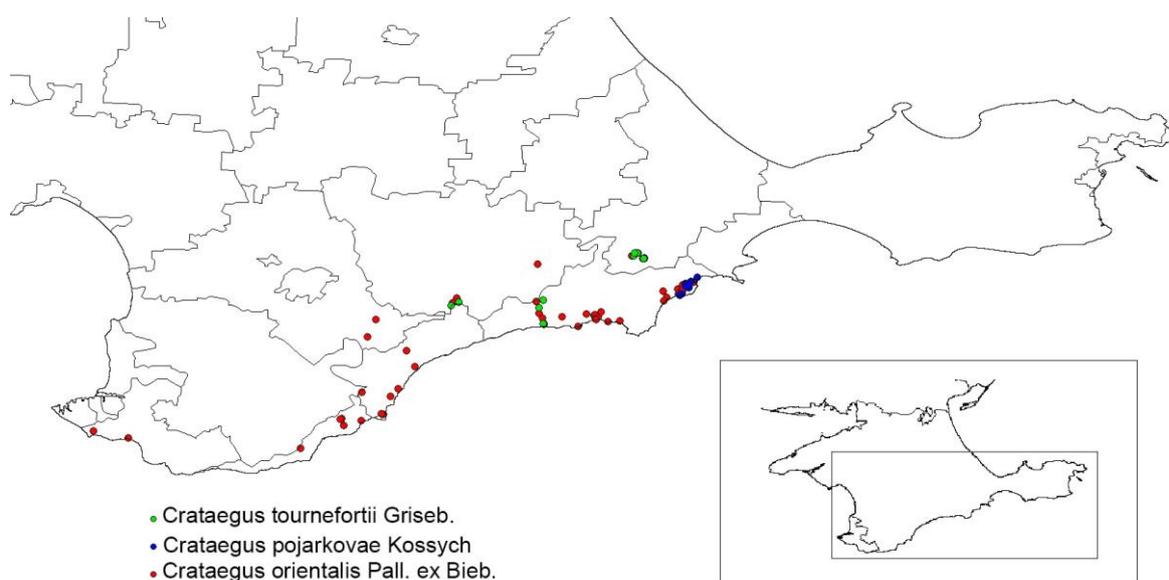


Рис. 1. Распространение *Crataegus orientalis*, *C. pojarkovae* и *C. tournefortii* в Горном Крыму.

C. tournefortii в Крыму встречается в восточной части предгорий Крымских гор. Он отмечен в Белогорском районе, в окрестностях г. Старый Крым и в городском округе Судак. Везде популяции малочисленны [19, 20]. На хребте Агармыш деревья *C. tournefortii* произрастают на склонах юго-западной экспозиции, на высоте 400–450 м н.у.м. [22], а вблизи реки Чурук-Су встречаются на высоте 330–340 м н.у.м. на открытых остепнённых участках и на пологих склонах в кустарниковых зарослях с сомкнутостью крон от 0,4 до 0,7 совместно с такими видами как: *Carpinus orientalis*, *Cornus mas* L., *Crataegus orientalis*, *C. rhipidophylla* Gand., *Ligustrum vulgare* L., *Pyrus elaeagnifolia*, *Rosa corymbifera*., *Swida australis* (С.А. Мей.) Pojark ex Grossh. и др. [23]. Плоды были собраны с 11 деревьев *C. tournefortii*, произрастающих на двух локалитетах старокрымской популяции (7 деревьев на хребте Агармыш и 4 дерева – вблизи реки Чурук-Су).

C. orientalis в Крыму имеет более широкое распространение. Его ценопопуляции встречаются на Южном Берегу Крыма и в предгорьях Крымских гор в светлых лесах, на полянах, опушках и в кустарниковых редколесьях. Плоды для исследований были собраны с 11 деревьев: на Карадаге – в местах его совместного произрастания с *C. pojarkovae* (4 дерева), в окрестностях г. Старый Крым, где этот вид произрастает совместно с *C. tournefortii* (4 дерева), а также на хребте Узун-Сырт (3 дерева).

Все образцы плодов были собраны во второй половине сентября в 2021 году. С каждого дерева отбирали по 25 плодов, а с деревьев *C. pojarkovae* из-за низкой урожайности до 25 плодов. Морфопараметры плодов и семян изучали у каждого растения. Для оценки морфологической дивергенции плодов боярышников использовали следующие признаки: длина (L) и диаметр (D) плода, масса плода, количество косточек в плоде, длина каждой косточки, общая масса всех косточек в плоде, а также были рассчитаны: общая длина косточек в одном плоде, отношение длины/диаметра плода, длина косточки/длина плода, масса косточек/масса плода. Морфометрические параметры, такие как длина плода, диаметр плода, длина косточки измеряли с помощью штангенциркуля с точностью 0,02 мм. Взвешивание плодов и косточек проводили на весах OHAUS SCOUT II. Предварительную обработку и анализ

данных проводили с помощью Microsoft Office Excel 2010. В статистическом анализе использовали программу R версии 4.1.0. Были применены следующие методы: t-критерий Стьюдента, корреляционный анализ Пирсона, дисперсионный анализ.

Результаты. *C. orientalis* и *C. tournefortii*, а также *C. orientalis* и *C. pojarkovae* в горной части Восточного Крыма произрастают совместно (рис. 1) в однотипных растительных сообществах, и их ареалы перекрываются, несмотря на то, что для подвида характерна экологическая, географическая (и как следствие репродуктивная) изоляция [24, 25]. При этом таксоны заметно различимы между собой морфологически. У *C. pojarkovae* помимо кустарниковой формы встречаются небольшие одноствольные деревца, в то время как *C. orientalis* и *C. tournefortii* – всегда многоствольные кустарники. При этом *C. tournefortii* в отличие от *C. orientalis* имеет округлую почти шаровидную форму кроны. Также эти таксоны различаются по количеству и величине колючек: у *C. orientalis* они самые многочисленные и крупные (до 10 см длины), у *C. tournefortii* длина колючек достигает 4–5 см и их меньше, *C. pojarkovae* характеризуется наименьшим количеством колючек вплоть до их полного отсутствия. Наиболее темную окраску побегов и листьев имеет *C. tournefortii*, наиболее светлую – *C. pojarkovae*. Характерная особенность этих боярышников та, что они имеют разную окраску плодов (рис. 2). У *C. tournefortii* плоды темно-красного цвета, у *C. orientalis* окраска плодов варьирует от светло-оранжевой до ярко-красной, у *C. pojarkovae* плоды лимонно-желтые. Описанные признаки следует отнести к таксоноспецифичным, так как они сохраняются в череде поколений, а также при искусственном размножении.

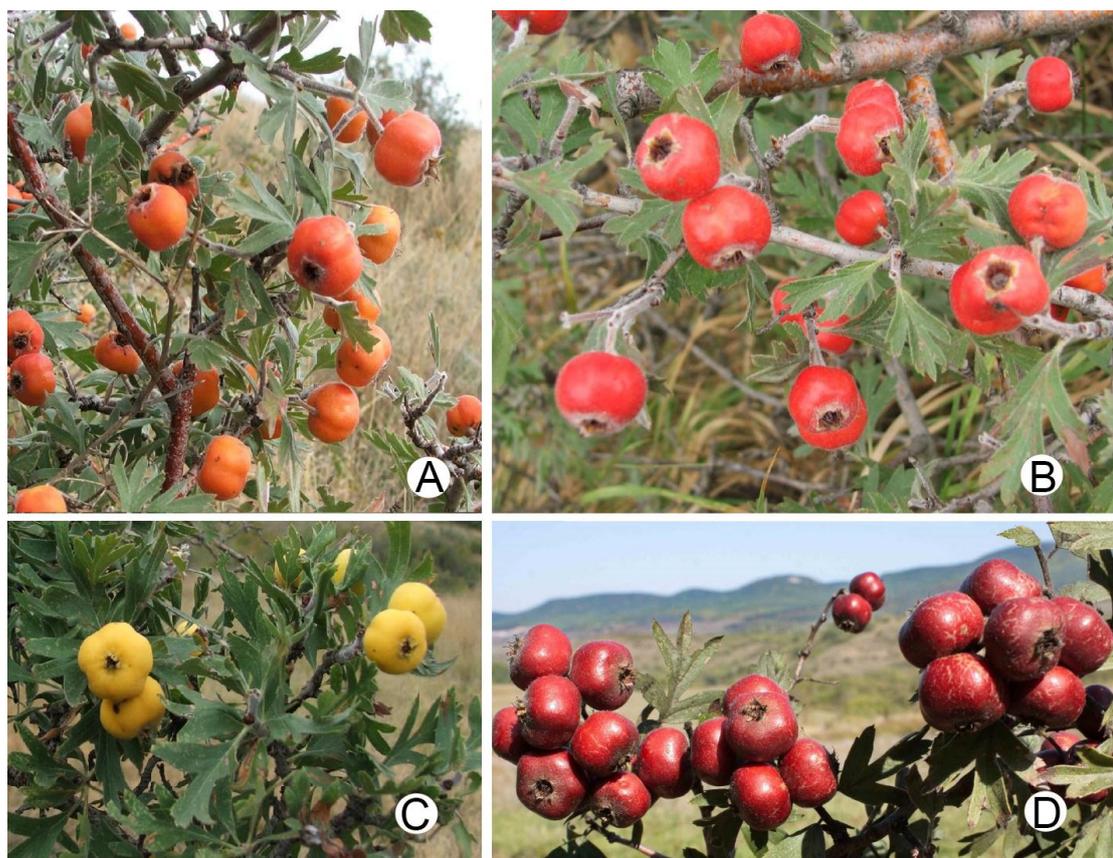


Рис. 2. Внешний вид плодов боярышников: А, В – *Crataegus orientalis*; С – *Crataegus pojarkovae*; D – *Crataegus tournefortii*.

Три таксона *Crataegus* в горной части Восточного Крыма также отличались по репродуктивному успеху. Высокая урожайность отмечена у деревьев *C. orientalis*, средняя – у *C. tournefortii* и низкая – у *C. pojarkovae*. Доля плодов с тремя косточками минимальной была у *C. tournefortii* – 3,3%, а максимальной – 8 % у *C. orientalis*. У *C. pojarkovae* большинство плодов имели 4 косточки (55,8 %), а у *C. orientalis* и *C. tournefortii* это плоды с пятью косточками, соответственно 53,4 % и 58 % (табл. 1).

Таблица 1
Показатели урожайности и семеношения у трех таксонов *Crataegus* в горной части Восточного Крыма

Таксон	Урожайность (средняя), балл	Величина выборки, плодов	Количество плодов с разным числом косточек					
			3		4		5	
			п	%	п	%	п	%
<i>Crataegus orientalis</i>	3–5 (4,27)	275	22	7,99	106	38,55	147	53,46
<i>Crataegus pojarkovae</i>	1–3 (1,58)	224	12	5,36	125	55,80	87	38,84
<i>Crataegus tournefortii</i>	2–5 (3,27)	274	9	3,29	106	38,69	159	58,03

Исследования изменчивости индивидуальных морфологических показателей у представителей трех таксоноспецифических единиц *Crataegus*, свидетельствуют, что наибольшая средняя длина плодов была у *C. pojarkovae* – 11,30 мм, толщина у *C. orientalis* – 13,39 мм (табл. 2), а наименьшие плоды характерны для *C. tournefortii* (L=9,83 мм, D =11,65 мм). Уровень изменчивости плодов в общей их выборке по таксону (CV^1) был как для этих, так и для других показателей меньше, чем у деревьев (CV^2) всех трёх таксонов. Несмотря на то, что плоды *C. pojarkovae* были самыми крупными, особенно по сравнению с плодами *C. tournefortii*, среднее количество косточек, их длина и масса в плоде были достоверно меньше, чем в плодах двух других таксонов. Расчетные показатели, такие как длина/толщина плода наибольшими были у *C. pojarkovae*, а длина косточки/длина плода и масса косточки/масса плода, наоборот, достоверно наименьшими. Для абсолютных метрических показателей плода и расчетных индексов характерен, в большинстве случаев, низкий уровень изменчивости у всех анализируемых таксономических единиц. Низкий уровень изменчивости отмечен и для количества косточек в плоде. Повышенный и даже высокий уровень изменчивости, как правило, свойственен остальным натурным и расчетным показателям в отношении косточек в плоде. Натурные показатели в большей мере зависят от природно-климатических и фитоценологических условий, чем расчетные, поэтому среди них часто и выделяют соответствующие фены [11].

Таблица 2
Средние значения морфологических параметров и их индексов у растений трех таксонов *Crataegus* в горной части Восточного Крыма

Признак	Таксон								
	<i>Crataegus orientalis</i>			<i>Crataegus pojarkovae</i>			<i>Crataegus tournefortii</i>		
	M±m	CV^1	CV^2	M±m	CV^1	CV^2	M±m	CV^1	CV^2
Длина плода, мм	10,46±0,32 ^{1,2}	9,78	7,54	11,30±0,78 ^{1,3}	15,32	12,82	9,83±0,31 ^{2,3}	10,49	8,07
Диаметр плода, мм	13,39±0,40 ²	12,19	7,63	13,08±0,95 ³	15,74	13,11	11,65±0,43 ^{2,3}	13,25	9,23
Длина / диаметр плода	0,79±0,02 ^{1,2}	7,65	6,4	0,87±0,04 ¹	9,94	8,19	0,85±0,03 ²	7,89	6,96

Продолжение табл. 2

Масса плода, г	1,65± 0,10 ²	27,11	15,5	1,76± 0,28 ³	34,9	27,99	1,29± 0,09 ^{2,3}	26,53	16,69
Количество косточек в плоде	4,45± 0,21	14,36	12,17	4,32± 0,29 ³	13,28	12,6	4,57± 0,20 ³	12,33	11,05
Длина косточки, г	4,61± 0,25 ¹	15,15	13,65	4,29± 0,49 ^{1,3}	23,02	22,11	4,62± 0,29 ³	17,34	16,09
Общая длина косточек в одном плоде	20,34± 0,70 ¹	20,84	17,39	17,83± 1,18 ^{1,3}	26,56	25,24	20,57± 0,71 ³	20,0	17,61
Масса косточек в плоде	0,33± 0,03 ¹	28,83	24,85	0,27± 0,06 ^{1,3}	47,17	44,05	0,32± 0,04 ³	31,33	28,59
Длина косточки/длина плода	0,44± 0,02 ¹	13,61	11,75	0,38± 0,04 ^{1,3}	19,19	18,13	0,47± 0,03 ³	15,91	13,87
Масса косточек/масса плода	0,21± 0,02 ^{1,2}	25,52	18,85	0,15± 0,02 ^{1,3}	31,31	30,53	0,26± 0,02 ^{2,3}	29,51	23,63

Примечание: CV¹ – коэффициент вариации для индивидуальной изменчивости; CV² – коэффициент вариации для популяционной изменчивости; ¹ – достоверно значимые различия (p<0,05) между соответствующими показателями *Crataegus orientalis* и *C. pojarkovae*; ² – достоверно значимые различия (p<0,05) между соответствующими показателями *C. orientalis* и *C. tournefortii*; ³ – достоверно значимые различия (p<0,05) между соответствующими показателями *C. pojarkovae* и *C. tournefortii*.

Все три таксона при попарном сравнении существенно отличаются по средней массе плодов по t-критерию Стьюдента, а также этому показателю свойственен высокий уровень вариабельности. Амплитуда варьирования средней длины плода у растений *C. orientalis* составляет 9,61–11,76 мм, у *C. pojarkovae* – 9,78–13,42 мм, у *C. tournefortii* – 8,22–10,69 мм. Толщина плодов у растений этих таксонов варьирует в следующих пределах: *C. orientalis* – 11,54–15,68 мм, *C. pojarkovae* – 11,07–15,69 мм, *C. tournefortii* – 9,16–13,63 мм. Среднее значение соотношения длины и толщины плода у растений всех трех таксонов было меньше единицы и варьировало в пределах: *C. orientalis* – 0,75–0,83, *C. pojarkovae* – 0,83–0,94, *C. tournefortii* – 0,79–0,90. Показатель L/D плода применялся для выяснения структуры популяций других видов, например, *Cerasus fruticosa* Pall. на Южном Урале [26].

Среднее количество косточек в одном плоде у трех таксонов варьирует в пределах 4,32–4,57 шт., а их длина – 4,29–4,62 мм. Характерно, что по этим двум показателям *C. tournefortii* существенно превосходит *C. pojarkovae*, хотя плоды первого явно меньше как по длине, так и по толщине. По этим двум показателям, особенно длине косточек, *C. tournefortii* и *C. orientalis* значительно отличаются. Вариабельность этих двух показателей, как правило, средняя и только у *C. pojarkovae* длина косточек характеризуется повышенной изменчивостью.

Массы косточек в одном плоде *C. orientalis* и *C. tournefortii* близки: соответственно 0,33 г и 0,32 г, а у *C. pojarkovae* меньше – 0,27 г. Доля мякоти в плоде наибольшая по сравнению с долей косточек именно у *C. pojarkovae* – в 6,6 раза, тогда как у *C. orientalis* – в 5 раз и *C. tournefortii* – в 4 раза. Очевидно, что *C. pojarkovae* имеет перспективы для практической селекции с целью получения сортов с высоким удельным весом мезокарпия. Кроме того, плоды *C. pojarkovae* отличаются высокой вариабельностью общей массы косточек, что также может быть значимо в селекции.

Средняя длина косточек в одном плоде у трех изучаемых таксонов довольно изменчивый показатель. Пределы варьирования этого показателя у *C. orientalis* – 3,90–5,44 мм, *C. pojarkovae* – 2,91–5,04 мм, *C. tournefortii* – 3,66–5,24 мм. Общая средняя длина всех косточек в одном плоде также заметно варьирует. Например, у *C. orientalis* этот показатель изменялся в пределах от 21,05 мм до 26,4 мм, у *C. pojarkovae* – 16,31–24,28 мм, а у *C. tournefortii* – 19,60–25,68 мм. У всех трех таксонов длина косточки статистически значимо коррелирует с длиной плода ($p < 0,05$), по шкале Чеддока у *C. pojarkovae* была отмечена заметная корреляция ($r = 0,595$), у *C. orientalis* и *C. tournefortii* корреляция была умеренной (соответственно, $r = 0,470$ и $r = 0,490$).

При попарном сравнении расчетных показателей плодов трех таксонов *Crataegus* Восточного Крыма согласно Животовскому [27] достоверные отличия по критерию выявлены в 8 случаях из 9 (табл. 3).

Таблица 3

Достоверные отличия при попарном сравнении таксонов *Crataegus* горной части Восточного Крыма по расчетным показателям плодов согласно критерию идентичности Животовского

Признак	<i>C. orientalis</i> – <i>C. pojarkovae</i>	<i>C. orientalis</i> – <i>C. tournefortii</i>	<i>C. pojarkovae</i> – <i>C. tournefortii</i>
Длина/диаметр плода	23,32***	16,32***	13,96**
Масса косточек/масса плода	17,96***	29,04***	30,94***
Общая длина косточек в одном плоде	13,13**	5,85	17,22***

Примечание: различия достоверны по χ^2 (хи-квадрату) при P: * $< 0,05$; ** $< 0,01$; *** $< 0,001$.

Результаты двухфакторного дисперсионного анализа позволили установить разницу между видами (фактор А) и локалитетами (фактор В) (табл. 4). Показатели влияния фактора А варьируют от 2,51 % до 31,57 %. Влияние фактора В менее выражено (от 0,52 % до 11,10 %). Исследуемые таксоны отличаются между собой по целому комплексу признаков. Все три таксона статистически значимо различались между собой по четырем морфометрическим параметрам и расчетным индексам: длина плода, длина/диаметр плода, длина косточки/длина плода, масса косточки/масса плода. *C. pojarkovae* и *C. tournefortii* различались между собой по всем десяти морфометрическим показателям, *C. orientalis* и *C. pojarkovae* достоверно различались по семи параметрам. Меньше всего было отмечено различий между *C. orientalis* и *C. tournefortii*: они достоверно отличались между собой по шести морфометрическим параметрам и расчетным индексам. Апостериорное сравнение локалитетов показали только различие Узун-Сырт от других локалитетов.

Таблица 4

Результаты двухфакторного дисперсионного анализа (критерий Фишера) морфометрических показателей р. *Crataegus* с апостериорным сравнением видов и локалитетов (критерий Тьюки)

Признак	А		В		Различия при апостериорном сравнении видов	Различия при апостериорном сравнении локалитетов
	F	η^2 , %	F	η^2 , %		
Длина плода	88,68***	17,86	23,78***	4,79	o-p***, o-t***, p-t***	Узун-Сырт-Карадаг*** Узун-Сырт-Старый Крым***
Диаметр плода	90,33***	17,19	50,99***	9,71	o-t***, p-t***	Узун-Сырт-Карадаг*** Узун-Сырт-Старый Крым***

Продолжение табл. 4

Длина/диаметр плода	100,6 ^{***}	20,06	16,6 ^{***}	3,32	o-p ^{***} , o-t ^{***} , p-t ^{***}	Узун-Сырт-Карадаг ^{***} Узун-Сырт-Старый Крым ^{***}
Масса плода	82,48 ^{***}	15,72	58,26 ^{***}	11,10	o-t ^{***} , p-t ^{***}	Узун-Сырт-Карадаг ^{***} Узун-Сырт-Старый Крым ^{***}
Количество косточек в плоде	7,46 ^{***}	1,90	2,24	0,57	p-t ^{***}	–
Длина косточки	9,94 ^{***}	2,51	2,02	0,52	o-p ^{***} , p-t ^{***}	–
Общая длина косточек в одном плоде	24,99 ^{***}	6,04	4,78 ^{**}	1,16	o-p ^{***} , p-t ^{***}	–
Масса косточек в плоде	18,62 ^{***}	4,57	4,63 [*]	1,14	o-p ^{***} , p-t ^{***}	Узун-Сырт-Карадаг [*] Узун-Сырт-Старый Крым [*]
Длина косточки/длина плода	109,33 ^{***}	21,70	10,31 ^{***}	2,04	o-p ^{***} , o-t ^{***} , p-t ^{***}	Узун-Сырт-Карадаг ^{***} Узун-Сырт-Старый Крым ^{***}
Масса косточек/масса плода	189,45 ^{***}	31,57	26,61 ^{***}	4,43	o-p ^{***} , o-t ^{***} , p-t ^{***}	Узун-Сырт-Карадаг ^{***} Узун-Сырт-Старый Крым ^{***}

Примечание: А – различия между видами, df=2; В – различия между локалитетами, df=2; F – критерий Фишера; η^2 – сила влияния фактора; достоверность различий: *** – на 99,9% уровне значимости, ** – на 99 % уровне значимости; * – на 95 % уровне значимости; “–” – различия незначимы. Достоверные различия при апостериорном сравнении (тест Тьюки-Крамера): (o-p) – между *C. orientalis* и *C. pojarkovae*; (o-t) – между *C. orientalis* и *C. tournefortii*; (p-t) – между *C. pojarkovae* и *C. tournefortii*; «–» – различия отсутствуют.

Обсуждение. К. I. Christensen [7] указывает, что *C. pojarkovae* произрастает только в Крыму. Однако в списке природных боярышников Армении М. Sargsyan приводит *C. pojarkovae*, указывая, что у этого вида в плоде 4–5 косточек. Вид был обнаружен в Армении в среднем и верхнем горных поясах, на высоте 1200–2000 м н.у.м., в аридном редколесье, по каменистым склонам, по опушке леса в следующих районах: Ереванском, Дарелегисском, Гегамском, Мегринском [28, 29]. Согласно последним данным *C. pojarkovae* отмечен и во флоре Азербайджана [30], в частности, в Шахбузском районе Нахичеваня, в среднегорном и высокогорном поясах, на высоте 1300–2000 м н.у.м., в редколесьях. Sargsyan указывает отличия подвида *C. orientalis* subsp. *pojarkovae*, согласно описаниям [7], от собственно *C. pojarkovae*, а также от *C. orientalis* – это отсутствие олиствленных колючек; окраски плодов желтые, а не оранжевые; форма плодов округло-овальная или грушевидная, а не ребристая и приплюснутая с полюсов. Она указывает, что *C. pojarkovae* вполне самостоятельный вид с константными признаками.

Плоды у *C. pojarkovae* по К. I. Christensen отчетливо грушевидные, и соотношение длина/диаметр у них 1,0–1,2, они имеют желто-оранжевую окраску, которая после высыхания становится оранжевой. Такое соотношение не свойственно плодам растения *C. pojarkovae*, произрастающих на Карадаге: из всей выборки (224 шт.) только девять плодов имели индекс длина плода/диаметр плода 1. Также, по нашим

наблюдениям, плоды эллипсоидные, иногда грушевидные, слегка ребристые, а их окраска лимонно-желтая.

Из исследуемых нами видов наиболее широкий ареал имеет *C. orientalis* [31]. В Крыму этот вид также наиболее широко распространен (рис. 1). К. I. Christensen [7] указывает, что плоды у *C. orientalis* имеют длину 8–15 мм и диаметр 7–15 мм. Соотношение длина/диаметр: 0,9–1,4, форма – почти шаровидная, грушевидная, яйцевидная или широко-цилиндрическая. Плоды более-менее шерстистые и имеют окраску от желто-оранжевого до темно-красного цвета. Согласно нашим наблюдениям, индекс длина/диаметр у плодов *C. orientalis* всегда меньше 1, плоды сильно сплюснутые, ребристые (рис. 2А–Б). Количество косточек в плоде этого вида по К. I. Christensen – от 2 до 5 шт., в наших исследованиях – от 3 до 5 шт.

C. tournefortii имеет близкий ареал с *C. orientalis*. По нашим данным [32] *C. tournefortii* произрастает в Восточном Крыму в окрестностях с. Родники (Белогорский район) и г. Старый Крым (Кировский район). По данным гербария Московского университета (MW) этот вид также был найден в районе Городского округа Судак [19]. Число хромосом у вида $2n(4x)=68$. По описаниям К. I. Christensen [7], который рассматривает его как *C. orientalis* subsp. *orientalis*, длина плодов у *C. tournefortii* в 0,9–1,1 раза больше диаметра, в наших исследованиях это соотношение у плодов *C. tournefortii* в Крыму в подавляющем большинстве случаев не превышало единицы (исключение составило 4 плода из выборки в 274 шт.). Плоды имеют шаровидную или сплюснуто-шаровидную форму, реже грушевидную, темно-красные, кирпично-красные или оранжевые [7]. В Крыму окраска плодов темно-красная, форма сплюснуто-шаровидная (рис. 2Г). Количество косточек в плоде по К. I. Christensen – 4–5 шт., у растений крымских популяций – также 4–5 шт.

При анализе межпопуляционной изменчивости трех таксонов, произрастающих горной части Восточного Крыма, установлено, что они достоверно отличаются между собой по большинству качественных и количественных (расчетных) признаков. Это не согласуется с описаниями и трактовке таксономических статусов *C. pojarkovae* и *C. tournefortii* по К. I. Christensen [7].

По предположению К. I. Christensen триплоид у *C. orientalis* subsp. *pojarkovae* ($2n(3x)=51$) является результатом однонаправленной гибридизации между тетраплоидным *C. orientalis* subsp. *orientalis* и неизвестным диплоидным видом с желтоватыми грушевидными плодами.

С позиций современной систематики *C. pojarkovae* и *C. tournefortii* можно отнести в категорию самостоятельных видов, которые имеют свои дискретные ареалы, популяционную структуру, таксономически значимые морфопризнаки, а их изменчивость статистически достоверно отличается от популяций близкородственных видов смежных ареалов в Горном Крыму. И главное – отсутствие интрогрессивной гибридизации при произрастании в одних местообитаниях с близкородственным видом *C. orientalis*, то есть наличие у *C. pojarkovae* и *C. tournefortii* механизмов репродуктивной изоляции. Естественно, их довольно сложно выявить при изучении количественно ограниченных гербарных коллекций.

Рассматривать *C. pojarkovae* как зародившийся вид, как разновидность или подвид *C. orientalis* не является целесообразным, так как эти таксоны пространственно не изолированы и в их территориально единой популяции на Карадаге отсутствуют переходные гибридные формы. Можно допустить, что *C. pojarkovae* формировался как вид в Закавказье вследствие географической изоляции, а в последующие времена вид

был зоохорно занесен на Карадаг, где в течение длительного времени произрастал совместно с *C. orientalis*, не терял при этом своих таксономических признаков. В Крыму *C. pojarkovae* не проявляет экспансивной активности и локализован пока на Карадаге, что может быть свидетельством его экзогенного происхождения в Крыму. Это также связано с низкой долей жизнеспособных семян в урожае *C. pojarkovae*, в отличие от *C. orientalis*.

Близкородственные виды *Crataegus* в ограниченном ареале Крыма, согласно взглядам С. Н. Горошкевич [33] можно рассматривать и как общие единицы эволюционного процесса, если они репродуктивно совместимы. Однако в случае исследуемых нами трех таксонов такой совместимости не прослеживается.

Выводы. Произведенного нами анализа изменчивости количественных и качественных фенотипических признаков трех таксонов рода *Crataegus* в горной части Восточного Крыма вполне достаточно для выделения *C. pojarkovae* и *C. tournefortii* в ранг самостоятельных видов. Для уточнения можно применять и методы геносистематики, которые постоянно совершенствуются от аллозимов до сиквенирования участков ДНК. В целом сравнительный анализ изменчивости количественных и качественных морфологических признаков в популяциях спорных таксонов не утратил своей значимости и способствует определению их статуса.

Работа выполнена в рамках темы государственного задания Карадагской научной станции им. Т. И. Вяземского – природного заповедника РАН, № 124030100098-0 на УНУ ГПЗ Карадагский."

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Камелин Р. В. Систематика растений как искусство / Р. В. Камелин // *Turczaninowia*. – 2016. – Т. 19. – Вып. 4. – С. 18–24. – DOI: 10.14258/turczaninowia.19.4.2
2. Коршиков И. И. Аллозимная изменчивость в популяциях *Pinus sylvestris* и *Pinus cretacea* на Украине / И. И. Коршиков, Л. А. Калафат, С. Н. Тунда, Т. И. Великородько // *Бот. журн.* – 2004. – Т. 89, № 5. – С. 812–820.
3. Зайченко С. Г. Биоморфология и таксономия растений на примере кавказских *Minuartia* s.l. (Caryophyllaceae) / С. Г. Зайченко, А. С. Зернов // *Журнал общей биологии*. – 2021. – Т. 82, № 5. – С. 368–381. – DOI: 10.31857/S0044459621040060
4. Голубев В. Н. Биологическая флора Крыма / В. Н. Голубев. – Ялта, 1996. – 120 с.
5. Род Боярышник – *Crataegus* L. / Н. Н. Цвелев // *Флора Восточной Европы*. – СПб., 2001. – Т. 10. – С. 557–586.
6. Ена А. В. Природная флора Крымского полуострова / А. В. Ена. – Симферополь: Н. Орианда, 2012. – 232 с.
7. Christensen K. I. Revision of *Crataegus* sect. *Crataegus* and nothosect. *Crataeguineae* (Rosaceae – Maloideae) in the Old World / K. I. Christensen // *System. Bot. Monographs*. – 1992. – Vol. 35. – P. 1–199.
8. Летухова В. Ю. Анализ таксономии некоторых видов рода *Crataegus* (Rosaceae) флоры Крыма / В. Ю. Летухова, И. Л. Потапенко, Н. М. Федорончук // *Укр. бот. журн.* – 2014. – Т. 71, № 2. – С. 182–187.
9. Боркин Л. Я. Что такое типология: видовой уровень проблемы / Л. Я. Боркин // *Методологические проблемы эволюционной теории*. – Тарту, 1984. – С. 11–13.
10. Яблоков Л. В. Введение в фенетику популяций. Новый подход к изучению природных популяций / Л. В. Яблоков, Н. И. Ларина. – М., 1985. – 158 с.
11. Яблоков Л. В. Популяционная биология / Л. В. Яблоков. – М., 1987. – 204 с.
12. Мамаев С. А. Формы внутривидовой изменчивости древесных растений (на примере семейства Pinaceae на Урале) / С. А. Мамаев – М., 1973. – 284 с.
13. Злобин Ю. А. Структура фитопопуляций / Ю. А. Злобин // *Успехи современной биологии*. – 1996. – Т. 116, № 2. – С. 133–146.
14. Тимофеев-Ресовский Н. В. Очерк учения о популяции / Н. В. Тимофеев-Ресовский, А. В. Яблоков, Н. В. Глотов. – М., 1973. – 277 с.
15. Махнев А. К. Внутривидовая изменчивость и популяционная структура берез секции *Albae* и *Nanae* / А. К. Махнев. – М., 1987. – 128 с.

16. Романовский М. Г. Полиморфизм древесных растений по признакам-корреляциям / М. Г. Романовский // Генетика. – 1988. – Т. 24, № 7. – С. 1241–1249.
17. Животовский Л. А. Популяционная биометрия / Л. А. Животовский. – М., 1991. – 271 с.
18. Vulmer M. Francis Galton: pioneer of heredity and biometry / M. Vulmer. – Baltimore, 2003. – 357 p.
19. Global Biodiversity Information Facility. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://doi.org/10.15468/dl.gw72a8>.
20. Красная книга Республики Крым. Растения, водоросли и грибы / отв. ред. А. В. Ена, А. В. Фатерыга. – Симферополь: ООО «ИТ АРИАЛ», 2015. – 480 с.
21. Летухова В. Ю. Сучасний стан, збереження та відновлення популяції глоду Пояркової (*Crataegus pojarkovae* Kossyach): Автореф. дис. ... канд. біол. наук / В. Ю. Летухова. – Ялта, 2010. – 20 с.
22. Летухова В. Ю. Современное состояние популяции боярышника Турнефора (*Crataegus tournefortii* Griseb) в окрестностях г. Старый Крым (Украина, Крым) / В. Ю. Летухова, И. Л. Потапенко // Природничий альманах. Біологічні науки. – 2011. – Вып. 15. – С. 83–89.
23. Летухова В. Ю. Новая популяция *Crataegus tournefortii* в Юго-Восточном Крыму / В. Ю. Летухова, И. Л. Потапенко // Экосистемы, их оптимизация и охрана. – 2014. – Вып. 11. – С. 138–143.
24. Завадский К. М. Вид и видообразование / К. М. Завадский. – Л., 1968. – 404 с.
25. Майр Э. Популяции, виды и эволюция / Эрнст Майр. – М., 1974. – 460 с.
26. Кучерова С. В. Фенотипическая изменчивость по массе плодов и семян *Cerasus fruticosa* (Rosaceae) на Южном Урале / С. В. Кучерова, В. П. Путенихин // Бот. журн. – 2014. – Т. 99, № 1. – С. 70–82.
27. Животовский Л. А. Показатель сходства популяций по полиморфным признакам / Л. А. Животовский // Журн. общ. биологии. – 1979. – Т. 40, № 4. – С. 587–602.
28. Саркисян М. В. Род *Crataegus* (Rosaceae) в Южном Закавказье / М. В. Саркисян // Takhtajania. – 2011. – Вып. 1. – С. 110–117.
29. Sargsyan M. The genus *Crataegus* (Rosaceae) in Armenia (an updated review) / M. Sargsyan // Biosystems Diversity. – 2022. – Vol. 30, No. 3. – P. 270–273. – DOI: 10.15421/012229.
30. Ibrahimov A. Taxonomy of the wild species of genus *Crataegus* (Rosaceae): An updated review for the flora of Nakhchivan Autonomous Republic (Azerbaijan) / A. Ibrahimov, A. Matsyura, K. Jankowski // Biosystems Diversity. – 2020. – Vol. 28. – P. 445–454. – DOI: 10.15421/012057.
31. Plants of the World Online. Kew: Facilitated by the Royal Botanic Gardens. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.plantsoftheworldonline.org>.
32. Летухова В. Ю. Новые данные о популяциях редкого охраняемого вида *Crataegus tournefortii* Griseb. в Юго-Восточном Крыму / В. Ю. Летухова, И. Л. Потапенко // Бюллетень ГНБС. – 2015. – Вып. 116. – С. 27–33.
33. Горошкевич С. Н. Уровни организации генетического разнообразия (на примере лесных древесных растений) / С. Н. Горошкевич // Сохранение лесных генетических ресурсов Сибири: мат-лы 4-го Межд. совещания. – Барнаул, 2015. – С. 40–42.

Поступила в редакцию 22.04.2024 г.

FRUITS MORPHOLOGICAL DIVERGENCE IN CLOSELY RELATED SPECIES OF CRATAEGUS GENUS IN THE MOUNTAINOUS PART OF THE EASTERN CRIMEA

V. Yu. Letukhova, I. I. Korshikov, I. L. Potapenko

The variability of natural and calculated fruits parameters of three closely related taxa of the genus *Crataegus* was studied: *C. orientalis* Pall. ex Bieb., *C. pojarkovae* Kossyach, and *C. tournefortii* Griseb. Their taxonomic status in the botanical literature is a contentious issue. To analyze the fruits similarity and difference of these taxa methods of statistical analysis were applied: correlation, dispersion, as well as Zhivotovsky's identity test. The comparative analysis of *C. orientalis*, *C. pojarkovae*, and *C. tournefortii* fruits shows, that they differ significantly in most of the studied parameters. No hybrids of these taxa have been found. *C. pojarkovae* has a low expansive activity and retains in generations morphotraits typical of this species. Based on the obtained results, we concluded that *C. pojarkovae* and *C. tournefortii* can be assumed as distinct species.

Keywords: *Crataegus orientalis*, *Crataegus pojarkovae*, *Crataegus tournefortii*, Eastern Crimea, fruit morphometric variability, populations.

Летухова Виктория Юрьевна

Кандидат биологических наук; старший научный сотрудник, Карадагская научная станция им. Т.И. Вяземского – Природный заповедник РАН, г. Феодосия, Крым, РФ.

E-mail: letukhova@gmail.com

Letukhova Viktoria

Candidate of Biological Sciences; Senior Researcher, Vyazemsky Karadag Scientific Station – Nature Reserve of RAS, Feodosia, Crimea, RF.

Потапенко Ирина Леонидовна

Кандидат биологических наук; старший научный сотрудник, Карадагская научная станция им. Т.И. Вяземского – Природный заповедник РАН, г. Феодосия, Крым, РФ.

E-mail: ira_potapenko@mail.ru

Potapenko Irina

Candidate of Biological Sciences; Senior Researcher, Vyazemsky Karadag Scientific Station – Nature Reserve of RAS, Feodosia, Crimea, RF.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАГНИТНОГО ХРАПОВИКА ДЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ МАГНИТОМАРКИРОВАННЫХ КЛЕТОК НАД ПОЛОСОВОЙ ДОМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

© 2024. В.Н. Павлов, Ю.А. Легенький, С.В. Беспалова

Методом численного моделирования исследовано распределение градиентов магнитных полей рассеяния полосовой доменной структуры при наложении управляющего магнитного поля. Экспериментально исследованы особенности движения магнитомаркированных клеток над поверхностью феррит-гранатовой пленки с полосовой доменной структурой под действием внешнего переменного магнитного поля. Установлено, что скорость направленного поступательного движения магнитомаркированных клеток возрастает с увеличением частоты управляющего поля не монотонным образом и наблюдается для частот меньших некоторой максимальной частоты.

Ключевые слова: магнитомаркированные биоклетки, транспортировка магнитомаркированных клеток, полосовая структура магнитных доменов.

Введение. Постановка задачи. Точные манипуляции отдельными биологическими клетками или биомолекулами с целью их зондирования, сортировки или локализации в заданных областях пространства представляют большой фундаментальный и практический интерес [1–5]. В таких областях исследований, как целевая доставка лекарств или тканевая инженерия, от этого зависит эффективность выполнения поставленных задач. Для осуществления возможности управлять движением биоклеток и биомолекул с помощью магнитных полей применяют прикрепление к ним магнитных наночастиц (магнитную маркировку биологических объектов). В экспериментах, связанных с этой темой, достаточно часто используют наночастицы оксидов железа и микрошарики из немагнитных материалов, покрытых такими наночастицами. Одним из перспективных способов реализации устройств, манипулирующих отдельными парамагнитными микрошариками и магнитомаркированными клетками, является использование доменных структур в феррит-гранатовых пленках [1, 2]. Целью данной работы было моделирование распределения магнитного поля и его градиента над поверхностью феррит-гранатовой пленки с полосовой структурой магнитных доменов и экспериментальная проверка возможности осуществления управляемого движения магнитомаркированных клеток (на примере дрожжевых клеток) над подложкой из феррит-гранатовой плёнки с полосовой доменной структурой.

Описание модели. С помощью метода конечных элементов в пакете программ COMSOL Multiphysics 6.0 моделировалась конфигурация магнитного силового поля, действующего на парамагнитную клетку, расположенную на расстоянии r от поверхности тонкой магнитной плёнки (ТМП) железиттриевого феррит-граната (ЖИГ) с полосовой доменной структурой.

Геометрия. Предполагается, что внутри горизонтально расположенной ТМП (рис. 1), толщиной h_s и намагниченностью домена M_s , сформирована полосовая доменная структура, имеющая период P_s . Плёнка находится во внешнем магнитном поле \mathbf{H} , имеющем компоненты $H_x(t)$ и $H_y(t)$ (t – время) в общем случае не зависящие друг от друга.

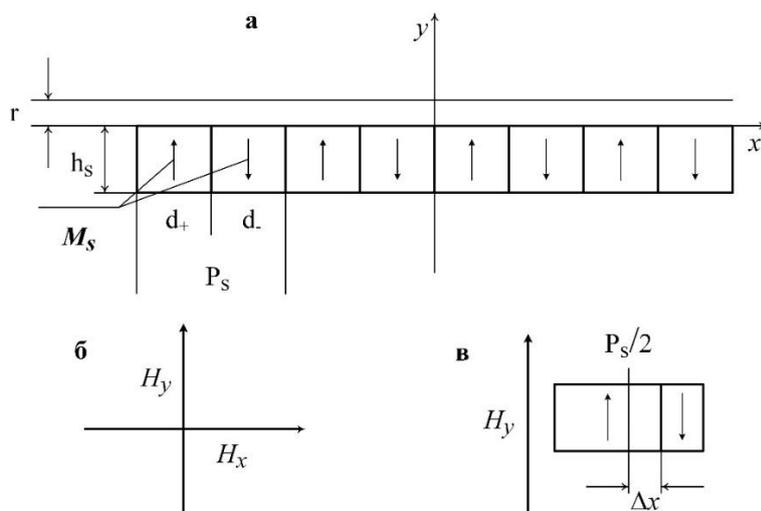


Рис. 1. а) ТМП в разрезе. Показано расположение осей координат. Ось x располагается на поверхности ТМП, перпендикулярно границам доменов. Ось y перпендикулярна плоскости ТМП. h_s – расстояние от поверхности ТМП линии, на которой строятся графики распределения сил, действующих на клетку. d_+ d_- – ширина домена сонаправленного и соответственно, противоположно направленного вертикальной составляющей H_y внешнего магнитного поля. б) Направление составляющих H_x и H_y вектора внешнего магнитного поля \mathbf{H} . в) Смещение x границы домена под действием вертикальной составляющей вектора магнитного поля \mathbf{H} относительно среднего положения $P_s/2$ (при $H_y = 0$).

Смещение доменной границы под действием вертикально намагничивающего поля описывалось моделью Коу и Энца, приведённой в [1]. В обозначениях, принятых в этой статье, имеем:

$$\Delta x = \frac{d_+ - d_-}{2} = \frac{1}{2} \frac{\pi h_s}{\ln(\operatorname{ch}(\pi h_s / P_s))} \frac{H_y}{M_s}. \quad (1)$$

Там же описаны границы применимости этой модели.

Магнитные силы, действующие на частицу вблизи поверхности ТМП. Как известно на частицу, обладающую индуцированным магнитным моментом, в магнитном поле с индукцией \mathbf{B}_0 , действует сила [2]:

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{\mu_0} \Delta \chi V_P (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{B}_0. \quad (2)$$

Это выражение можно переписать в виде:

$$\mathbf{F}_m = \Delta \chi V_P \mathbf{G},$$

где $\Delta \chi$ – разность магнитных восприимчивостей среды и частицы, а

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{B}_0 \quad (3)$$

– силовая функция, характеризующая величину силы, действующей на магнитную частицу единичного объёма и с магнитной восприимчивостью $\chi=1$ в заданной точке пространства. μ_0 магнитная постоянная, V_P объём частицы.

После преобразований, приведенных в [2] получим для многодоменной сферической частицы:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2\mu_0} \nabla (B_0^2). \quad (4)$$

Горизонтальная составляющая вектора внешнего магнитного поля H_x , практически не влияет на положение доменной границы, но позволяет подавлять или

усиливать магнитное поле, создаваемое доменами с противоположно направленными M_s над их доменными границами (см. рис. 1). Суть процесса, в общих чертах, иллюстрирует рис. 2.

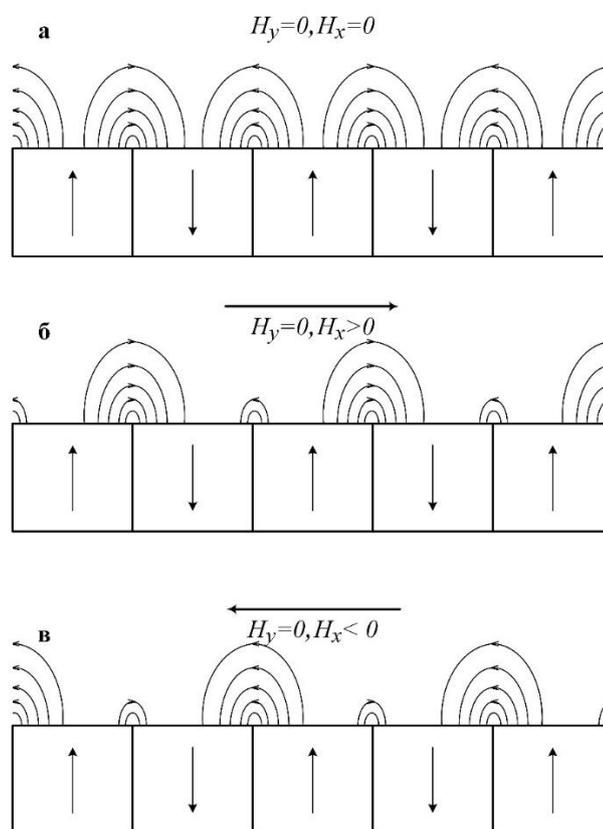


Рис. 2. Распределение силовых линий индукции магнитного поля над доменными границами ТМП с полосовой доменной структурой. **а)** В случае отсутствия внешнего магнитного поля. Поля рассеяния, создаваемые доменами над границами доменов одинаковы по величине и имеют противоположные направления горизонтальных составляющих вектора индукции полей рассеяния. При этом границы доменов одинаково притягивают парамагнитные частицы. **б)** Горизонтальная составляющая отлична от нуля и направлена вправо по рисунку. При этом внешние поля, создаваемые доменами, сонаправленные H_x , – усиливаются, направленные противоположно, – ослабляются. (Притягивают правые границы.) **в)** Горизонтальная составляющая отлична от нуля и направлена влево по рисунку. (Притягивают левые границы.)

Результаты моделирования. Расчёт производился исходя из следующих условий: $h_s = 6.8$ мкм; $P_s = 14$ мкм; $M_s = 6800$ А/м, что соответствовало реально измеренным параметрам образца ТМП ЖИГ, на котором проводились исследования движения магнитомаркированных клеток.

Рис. 3 показывает расчетное распределение силовой функции G и полей рассеяния полосовой доменной структуры вблизи поверхности плёнки для случая отсутствия внешних магнитных полей. Изменение цвета фона рисунка обозначает величину модуля вектора силовой функции G . Стрелки указывают направление притяжения. Также показаны силовые линии и направление вектора индукции магнитного поля B .

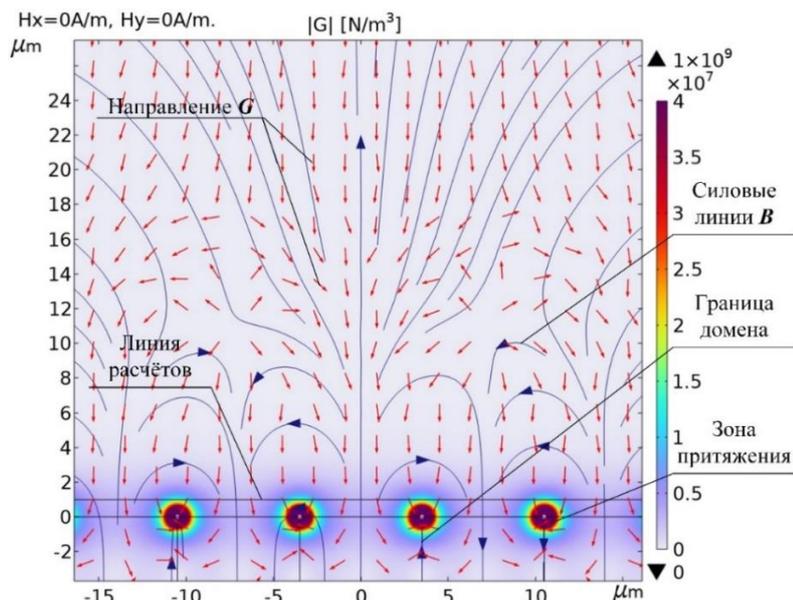


Рис. 3. Распределение силовой функции G и полей рассеяния полосовой доменной структуры вблизи поверхности ТМП ЖИГ для случая отсутствия внешних магнитных полей.

Как видно из рис. 3, границы доменов являются центрами сильного притяжения для парамагнитных объектов. Величину изменения модуля силовой функции G на расстоянии 1 мкм от поверхности ТМП демонстрирует рис. 4.

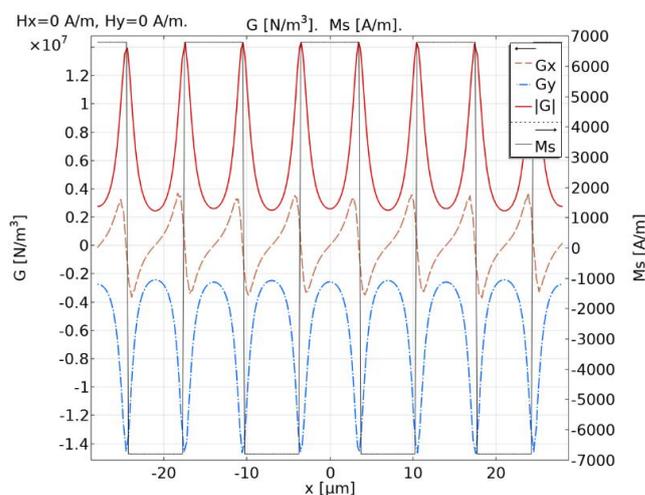


Рис. 4. Изменение модуля силовой функции G на расстоянии 1 мкм от поверхности ТМП (сплошная линия). Прямоугольная кривая, – распределение M_s вдоль линии графика. Переход от положительного значения M_s , к отрицательному, обозначает границу домена. Пунктирная и штрихпунктирная кривые, показывают составляющие G по осям x и y соответственно.

Рис. 5 показывает распределение векторов B и G вблизи поверхности ТМП при наличии внешних магнитных полей.

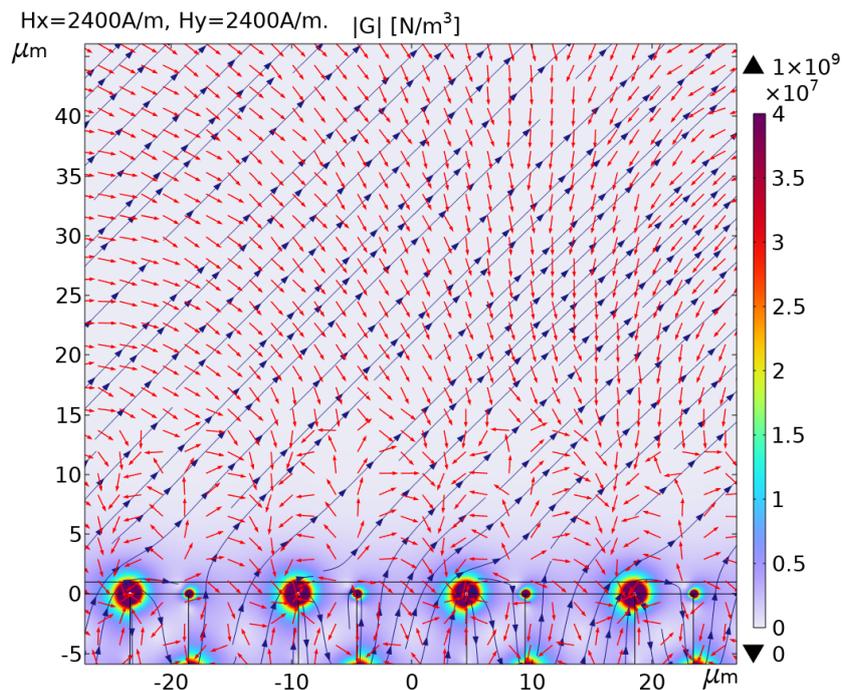


Рис. 5. Распределение силовой функции G и полей рассеяния полосовой доменной структуры вблизи поверхности ТМП ЖИГ для случая наличия внешних магнитных полей при $H_x = H_y = 2400$ А/м.

Как видно из рис. 5 и 6 результирующее магнитное поле имеет наклон 45° относительно поверхности ТМП вдали от поверхности, но вблизи поверхности сильно искажено за счет суперпозиции внешнего поля с полями рассеяния доменов. Границы доменов сместились под действием вертикальной составляющей внешнего магнитного поля H_y , при этом, за счет наличия H_x , соседние границы становятся не равнозначными (согласно с рис. 2 одна из границ подавлена, соседняя усилена горизонтальной составляющей H_x).

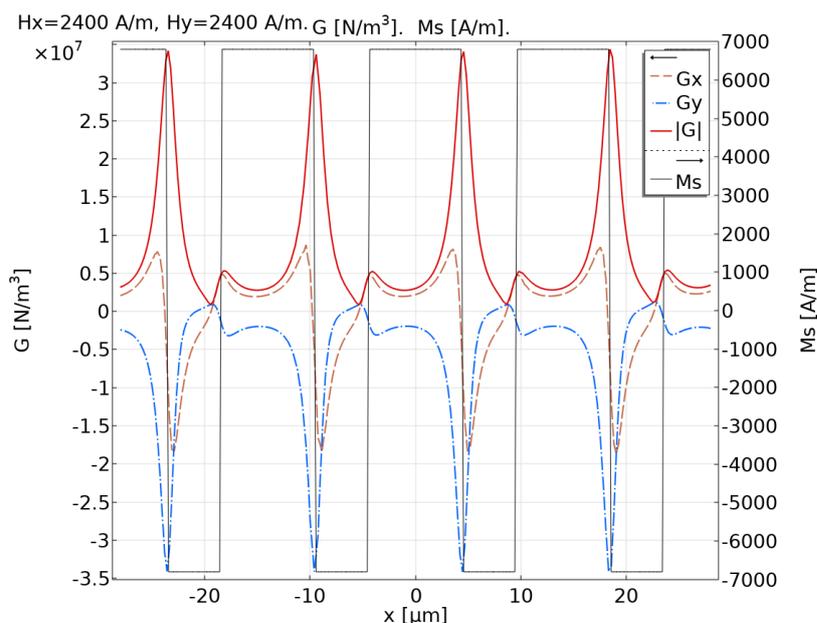


Рис. 6. Изменение модуля, и составляющих силовой функции G на расстоянии 1 мкм от поверхности ТМП для случая $H_x = H_y = 2400$ А/м.

При рассмотрении графика, приведенного на рис. 6, можно заметить, что $|G|$ на одних границах увеличился более чем в два раза, на других упал почти до нуля по сравнению со случаем с нулевым внешним полем. Изменение направления горизонтальной составляющей внешнего магнитного поля на противоположное меняет границы местами. Т.е. граница, бывшая слабой, – становится центром притяжения для парамагнитных частиц, а сильная граница, становится слабой. Этот случай демонстрируют графики на рис. 7, 8.

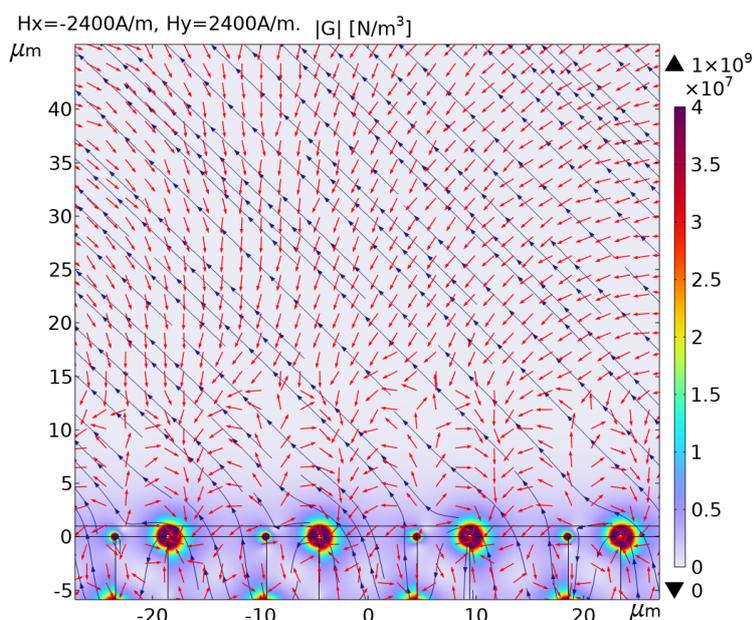


Рис. 7. Распределение силовых полей вблизи поверхности ТМП ЖИГ при $H_x = -2400$ А/м. $H_y = 2400$ А/м.

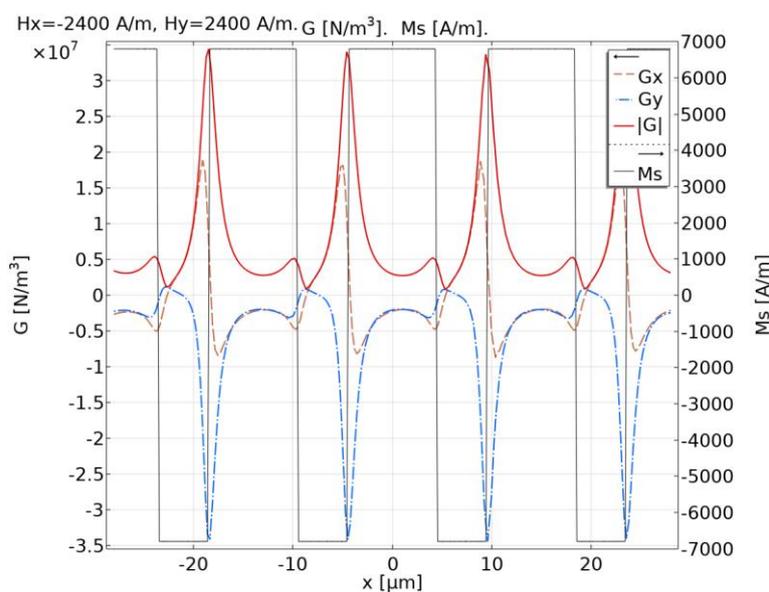


Рис. 8. Изменение модуля, и составляющих силовой функции G на расстоянии 1 мкм от поверхности ТМП для случая $H_x = -2400$ А/м. $H_y = 2400$ А/м.

Магнитный храповик. Как показано в предыдущем разделе силой притяжения границ доменов можно управлять, изменяя величину и направление H_x . Изменение

направления H_x , приводит к изменению роли границ как центров притяжения. Перемещение границ возможно изменением H_y .

Механизм действия магнитного храповика. Механизм перемещения клеток с использованием эффекта храповика иллюстрируют диаграммы, представленные на нижеприведенных рисунках. Рис. 9 показывает изменения со временем внешних управляющих полей с частотой 1 Гц. Рис. 10 показывает реакцию на это воздействие доменных границ, а также перемещение клетки.

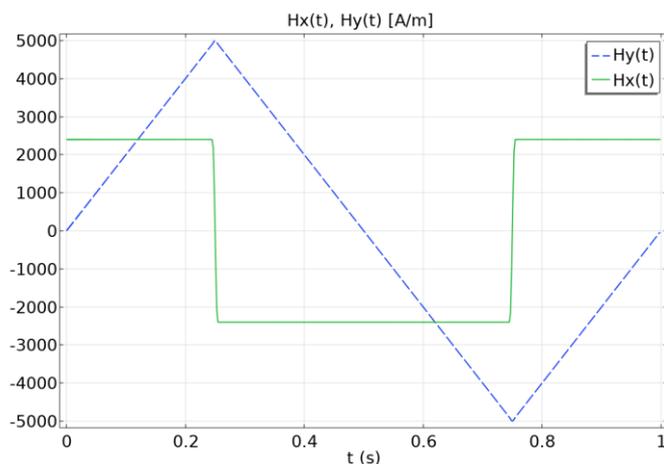


Рис. 9. Зависимость от времени составляющих внешнего магнитного поля частотой 1 Гц, управляющего перемещением клеток над поверхностью ТМП ЖИГ.

Итак, рассмотрим один период колебаний внешнего управляющего поля. В начальный момент времени, $t=0$ с, $H_x=-2400$ А/м, $H_y=0$. В этот момент активна правая граница первого слева домена (рис. 10, кадр 0 с) и клетка притянута к ней.

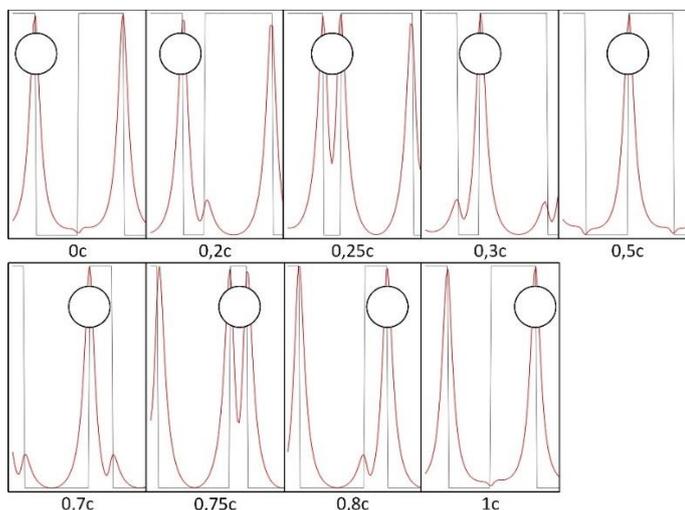


Рис. 10. Перемещение магнитомаркированной клетки границей домена на один период полосовой доменной структуры – P_s .

С течением времени $H_x=-2400$ А/м, а H_y линейно растёт, заставляя границу и удерживаемую ею клетку двигаться вправо (см. рис. 10, кадр 0,2 с). В момент времени $t=0,25$ с, H_y достигает своего максимума. При этом расстояние между границами минимально и в этот момент происходит падение H_x до нуля, при этом клетка

располагается между границами, а после установления $H_x=2400$ А/м, притягивается левой границей второго домена и продолжает своё движение уже вместе с ней (см. рис. 10, 0,3 с). Начиная с этого момента H_y линейно уменьшается (см. рис. 9) до момента $t=0,75$ с, где происходит очередная инверсия H_x , перехват клетки правой границей и линейное увеличение H_y сдвигающего границу домена и удерживаемую ею клетку вправо. Далее процесс повторяется циклически.

Описание эксперимента. Для подтверждения картины, которую показало моделирование процесса перемещения магнитомаркированных клеток над полосовой доменной структурой ТМП ЖИГ под действием управляющих магнитных полей

Получение суспензии магнитных наночастиц магнетита и магнитомаркированных клеток. В качестве модельных объектов для исследования особенностей движения магнитомаркированных биоклеток в градиентных магнитных полях, созданных над поверхностью ТМП ЖИГ с полосовой доменной структурой, в настоящей работе были использованы дрожжевые клетки, магнитомаркированные наночастицами магнетита со стабилизирующей цитратной оболочкой.

Магнитные наночастицы магнетита, стабилизированные цитратом, для магнитной маркировки дрожжевых клеток были получены по методике, описанной в работе [6].

Для магнитной маркировки использовался коммерческий штамм сухих пекарских дрожжей *S. cerevisiae* «Кристалл». Процедура получения суспензии дрожжевых клеток маркированных наночастицами магнетита Fe_3O_4 , заключалась в следующем. Изначально навеску сухих дрожжей суспендировали в дистиллированной воде при комнатной температуре и центрифугировали в течение 5 минут при 2500 об/мин. Затем биомасса отмытых клеток дрожжей *S. cerevisiae* суспендировалась с наночастицами Fe_3O_4 с цитратным покрытием в дистиллированной воде при комнатной температуре в течении 120 минут при непрерывном перемешивании. Соотношение объемов магнитомаркирующей суспензии и биомассы клеток дрожжей: 300 мкл наночастиц магнетита на 3 мл суспензии клеток. Затем биомассу магнитомаркированных дрожжевых клеток трехкратно отмывали дистиллированной водой. В результате этой процедуры получены парамагнитные дрожжевые клетки – YFC-клетки, покрытые наночастицами Fe_3O_4 -Cit. Объемная магнитная восприимчивость таких клеток, измеренная методом «весов Фарадея» (см. работу [7]) оказалась равной $\chi = (1,2 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$.

Подготовка образца суспензии магнитомаркированных дрожжевых клеток для минимизации адгезии клеток на поверхности ТМП ЖИГ. 10 мкл магнитомаркированных клеток с концентрацией $2 \cdot 10^4$ клеток/мл помещались в пробирку Эппендорфа, содержащую 1 мл дистиллированной воды и 20 мкл поверхностно активного вещества (10 % раствор додецилсульфата натрия). Получившаяся суспензия взбалтывалась мешалкой в течении 2 минут.

Экспериментальная установка для исследования особенностей перемещения магнитомаркированных клеток в поле доменных структур ТМП ЖИГ. Контейнер для экспериментов, представляет собой основание из феррит-гранатовой плёнки состава $(YSmLuCa)_3(FeGe)_5O_{12}$, на которое наклеена шайба из немагнитного материала высотой 0,5 мм. В контейнер помещена ранее подготовленная суспензия магнитомаркированных клеток. Сверху контейнер закрыт покровным стеклом. Всё это вместе, закреплено в держателе, который плотно вставляется в магнитную систему трёх взаимно-ортогональных катушек, установленных на предметный стол поляризованного микроскопа. Катушки подключены к усилителям, управляемым двухканальным генератором сигналов произвольной формы. Плёнки, используемые для изготовления контейнера, могут иметь разные параметры, в

зависимости от условий эксперимента. В нашем случае перед экспериментом на плёнке формировалась полосовая доменная структура с периодом $P_S = (6.7 - 9)$ мкм.

Результаты исследований. Эксперименты показали, что при отсутствии внешних полей клетки притягиваются к границам доменов, что соответствует результатам нашего моделирования.

В дальнейших экспериментах управляющее горизонтальное поле, прикладывалось перпендикулярно полосовой доменной структуре. Увеличение его индукции приводило сначала к появлению колебаний магнитомаркированных клеток в пределах ширины домена, а затем к неуправляемому перескоку клеток между границами доменов.

Дополнительное приложение синфазного вертикального поля синусоидальной формы приводило к изменению ширины доменов, синхронизированному по времени с изменением горизонтального поля. При этом наблюдалось неуправляемое движение клеток между границами доменов и перескоки между доменами.

Введение фазового сдвига 90° между горизонтальной и вертикальной составляющей поля, приводило к управляемому скачкообразному перемещению клеток. Изменение направления движения на противоположное осуществлялось переключением знака фазового сдвига между вертикальной и горизонтальной составляющей управляющего поля.

Величина индукции горизонтального поля, при котором наблюдалось устойчивое поступательное движение составила 2–3 мТ, максимальная величина индукции вертикального поля в данных исследованиях составляла 4,5 мТ. При таком поле изменялся период полосовой доменной структуры, но сама структура не разрушалась. Устойчивое поступательное движение магнитомаркированных клеток наблюдалось, начиная с индукции управляющего поля $1,5 \div 2$ мТ и частотах до 4 Гц.

Применение меандра для управления горизонтальным полем повышает эффективность управления клетками. Движение становится чётким, уменьшается количество колеблющихся клеток. При этом выбор в качестве формы, управляющей вертикальным полем синусоиды, или треугольника мало изменяет видимые параметры движения клеток.

Скорость поступательного движения клеток зависит от частоты управляющего сигнала. Следует отметить, что при увеличении частоты от 0 до 3 Гц скорость скачкообразного поступательного движения клеток – возрастает. При этом, начиная с некоторого значения частоты, клетки перестают реагировать на изменения управляющих полей. Это, скорее всего, связано с зависимостью скорости отклика клетки от её размеров и величины магнитной восприимчивости. В нашем случае этот эффект проявился, начиная с частоты 4–5 Гц.

На рис. 11, для примера, показан результат эксперимента с ТМП ЖИГ, имеющей период полосовой структуры 6,7 мкм. В контейнер, сформированный на плёнке, помещён образец, подготовленный согласно разделу "Подготовка образца". В образец для наглядности добавлены магнитные микросферы диаметром 5 мкм.

Управляющие поля имели следующие параметры: H_x (направлено «слева направо» по рисунку), – форма меандр, пиковое значение 2390 А/м, H_y (направлено перпендикулярно плоскости рисунка «снизу – вверх»), – форма треугольник, пиковое значение 1830 А/м, частота изменения полей выбрана 1 Гц. Фазовые соотношения полей H_x и H_y показаны на рис. 9.

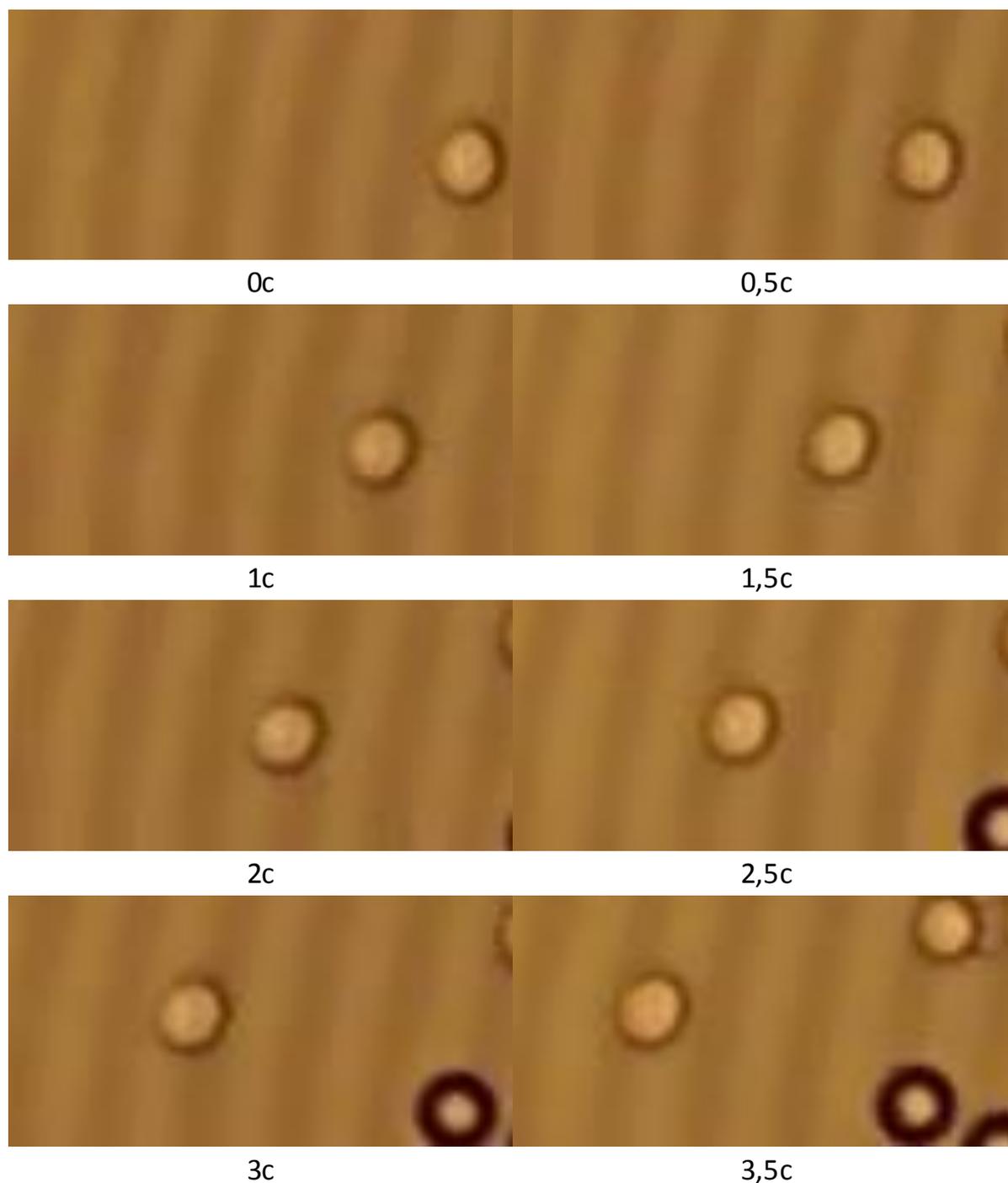


Рис. 11. Движение магнитомаркированной клетки над ПДС под действием управляющих магнитных полей.

Рис. 11 демонстрирует последовательное перемещение магнитомаркированных клеток под действием вышеописанных магнитных полей в течение 3,5 периодов. При этом клетки сместились за 3,5 секунд на 3,5 периодов доменной структуры.

На рис. 11 отображены моменты изменения положения клетки от границы к границе. Изменение ширины доменов со временем не отображалось, ввиду ограниченности объёма статьи. В начальный момент движения (0 с), клетка прикреплена к правой границе (по рисунку) светлого домена. Синхронное изменение

полей H_x и H_y вызывает перескок клетки с правой границы на левую границу светлого домена (0.5 с). Очередное изменение полей вызывает уменьшение тёмного домена и перескок клетки с его правой границы на левую (1 с). Далее процесс повторяется.

Выводы. Методом численного моделирования в пакете программ COMSOL Multiphysics 6.0 моделировалась конфигурация магнитного силового поля, действующего на парамагнитную клетку, расположенную на расстоянии r от поверхности тонкой магнитной плёнки (ТМП) железоиттриевого феррит-граната (ЖИГ) с полосовой доменной структурой. Установлено, что при приложении управляющих магнитных полей, имеющих горизонтальную и вертикальную составляющие, можно смоделировать захват парамагнитных клеток на границы доменов и их перемещение перпендикулярно направлению границ полосовых доменов по механизму «магнитного храповика».

Экспериментально показано, что при определенном сочетании параметров управляющего магнитного поля наблюдается устойчивое и управляемое скачкообразное движение дрожжевых клеток, магнитомаркированных наночастицами магнетита, над поверхностью ТМП ЖИГ с полосовой доменной структурой перпендикулярно границам полосовых доменов. Найдены условия, позволяющие эффективно управлять движением клеток на поверхности ТМП ЖИГ. Уставлено, что приложение управляющих магнитных полей различных частот позволяет осуществлять движение магнитомаркированных клеток с разной скоростью, зависящей от частоты не линейным образом. Более подробное исследование режимов движения и скоростных характеристик магнитомаркированных клеток намечено провести в дальнейших исследованиях.

Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124012400345-8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Colloidal transport on magnetic garnet films / P. Tierno, F. Sagués, T.H. Johansen at al. // Phys. Chem. Chem. Phys. – 2009. – Vol. 11. – P. 9615–9625.
2. Bidirectional particle transport and size selective sorting of Brownian particles in a flashing spatially periodic energy landscape / F. Martinez-Pedrero, H. Massana-Cid, T. Ziegler at al. // Phys. Chem. Chem. Phys. – 2016. – Vol. 18. – P. 26353–26357.
3. Tierno P., Straube A.V. Transport and selective chaining of bidisperse particles in a travelling wave potential // Eur. Phys. J. E. – 2016. – Vol. 39, No. 54. – P.1–7.
4. Hydrodynamic synchronization and clustering in ratcheting colloidal matter / S.G. Leyva, R.L. Stoop, I. Pagonabarraga // Sci. Adv. – 2022. – Vol.8, eabo4546. – P. 1–8.
5. Straube A., Tierno P. Synchronous vs. Asynchronous Transport of a Paramagnetic Particle in a Modulated Ratchet Potential // EPL. – 2013. – Vol. 103. – P. 28001-p1-p6.
6. Магнитофоретические свойства фетальных фибробластов человека, маркированных суперпарамагнитными наночастицами оксида железа, стабилизированными цитратом / В.В. Турчин, Ю.А. Лёгенький, [...], С.В. Беспалова, Э.Я. Фисталь // Гены & Клетки. – 2017. – Т. XII, № 1. – С. 47–53.
7. Влияние низкочастотного переменного магнитного поля на жизнеспособность магнитомаркированных клеток *SACCHAROMYCES CEREVISIAE* / С.В. Беспалова, Д.В. Кладько, Ю.А. Легенький и др. // Актуальные вопросы биологической физики и химии. – 2019. – Т. 4, № 3. – С. 335–339.

Поступила в редакцию 21.05.2024 г.

USING A MAGNETIC RATCHET TO MOVE MAGNETICALLY LABELED CELLS OVER THE STRIP STRUCTURE OF MAGNETIC DOMAINS

V.N. Pavlov, Y.A. Legenkiy, S.V. Bespalova

The distribution of gradients of magnetic scattering fields gradients of the strip domain structure under the superposition of a control magnetic field has been investigated by the numerical modeling method. The peculiarities of the motion of magnetically labeled over the surface of a ferrite-garnet film with a strip domain structure under the action of an external alternating magnetic field have been experimentally investigated. It is found that the speed of the directed translational motion of magnetically labeled cells increases with increasing frequency of the control field in a non-monotonic manner and is observed for frequencies smaller than some maximum frequency.

Keywords: magnetically labeled biocells, transportation of magnetically labeled cells, strip structure of magnetic domains.

Павлов Владимир Николаевич

ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»,
г. Донецк, ДНР, РФ.

Pavlov Vladimir Nikolaevich

Donetsk State University,
Donetsk, DPR, Russian Federation.

Легенький Юрий Анатольевич

ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»,
г. Донецк, ДНР, РФ.

Legenkiy Yuri Anatolevich

Donetsk State University,
Donetsk, DPR, Russian Federation.

Беспалова Светлана Владимировна

доктор физико-математических наук, профессор;
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»,
г. Донецк, ДНР, РФ.

Bespalova Svetlana Vladimirovna

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor;
Donetsk State University,
Donetsk, DPR, Russian Federation.

АГРОХИМИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА И БИОЛОГИЧЕСКАЯ АКТИВНОСТЬ ПОЧВ ЛАНДШАФТНО-РЕКРЕАЦИОННОГО ПАРКА «ДОНЕЦКИЙ КРЯЖ»

© 2024. Д.В. Сыщиков, И.В. Агурова, А.С. Березовский, С.Д. Трискиба

В статье приведена комплексная агрохимическая оценка почв ландшафтно-рекреационного парка «Донецкий кряж»: изучены основные агрохимические показатели, а также их микробиологическая и ферментативная активность. В результате проведенных исследований по ряду агрохимических показателей таких как содержание элементов минерального питания, гумуса, поглотительной способности почв, биологической и ферментативной активности данные почвы охарактеризованы как крайне бедные. Это дает основание рассматривать почвы как образования, в которых замедлены почвообразовательные процессы, что в дальнейшем может способствовать усилению деградации, приводящей к истощению почвы, потере структурированности и снижению агрономически ценных показателей.

Ключевые слова: элементы минерального питания, гумус, поглотительная способность, ферменты, микроорганизмы, почвенное дыхание

Введение. Особо охраняемые природные территории практически во всех странах мира относятся к объектам общенационального достояния страны, а наличие таких объектов является гарантом и источником восстановительного потенциала земель, растительного и животного мира [1].

Изучение ряда химических показателей почв, их ферментативной и микробиологической активности является неотъемлемой частью мониторинга состояния особо охраняемых природных территорий. Кроме того, подобные исследования, как показывают ряд авторов, дают возможность проследить смену древесных пород, определить возможные причины изменений видового состава живого напочвенного покрова [2, 3].

В настоящее время деградация земель в Донецкой Народной Республике (ДНР) затрагивает и почвенный покров особо охраняемых территорий, негативно сказываясь на агрохимических характеристиках.

В настоящее время на территории ДНР насчитывается 39 особо охраняемых территорий. Ландшафтно-рекреационный парк «Донецкий кряж» расположен в Амвросиевском (с. Артемовка) и Шахтерском районах (с. Сауровка), общая площадь составляет 7463,5 га. Территория парка уникальна и представляет собой типичную местность разнотравно-типчачово-ковыльной степи с массивами овражного леса в устьях балок, а также с участками искусственно созданных лесных культур в условиях степи [4].

Целью исследований было проведение комплексной оценки состояния почвенного покрова ландшафтно-рекреационного парка «Донецкий кряж».

Материал и методика исследований. Объектом исследований являлись почвы и ценозы почвенных микроорганизмов на территории ландшафтно-рекреационного парка «Донецкий кряж».

Плакорный участок со степной растительностью, режим абсолютного заповедания (окрестности с. Петровское, Шахтерский район, 47°56'47.8"N 38°38'07.4"E). Общее проективное покрытие 95–100%, доминирует *Festuca valesiaca*

Schleich. ex Gaudin (95 % от общего проективного покрытия), встречаются *Elytrigia repens* (L.) Desv. Ex Nevski., *Achillea pannonica* L., *Hierochloe repens* (Host) P. Beauv., *Amygdalus nana* L.

Чернозем обыкновенный маломощный малогумусный.

А – 0–12 см. Свежий, коричневый, зернистый, слабо уплотненный. Новообразований и включений не отмечено. Много корней. Переход в горизонт В ясный, ровный по цвету и структуре.

В – Влажный, светло-коричневый, кубовидный, плотный. Новообразований и включений не отмечено. Редкие корни. Каменистость (70 %). Прослежен до глубины 28 см.

Определение видов растений проводилось согласно классических «Определителей» [5].

Описание почвенных разрезов проводили согласно общепринятым методикам [6, 7]. Отбор почвенных образцов проводили по почвенным горизонтам в трехкратной повторности из каждого горизонта отдельно из трех пробных разрезов на каждом участке [8].

Исследование гранулометрического состава почвенных горизонтов проведено в соответствии с ГОСТ 12536–2014 [9]. При расчете содержания АЦА (доли агрономически ценных агрегатов (АЦА, %), агрегатное состояние почв относили к неудовлетворительному, если фракция 0,25–10 мм составляет <40 %, хорошему – при доле АЦА 40–60 % и отличному – при доле АЦА > 60 %. Коэффициент структурности ($K_{стр}$) определяли как отношение (по массе) суммы агрегатов размером 0,25–10 мм к сумме агрегатов диаметром >10 и <0,25 мм:

$$K_{стр} = \sum(0,25-10) / \sum(>10, <0,25)$$

Агрегатное состояние почвы считается отличным, если $K_{стр} > 1,50$, хорошим – при $K_{стр} = 0,67-1,50$ и неблагоприятным – при $K_{стр} < 0,67$ [10, 11].

Определение актуальной и потенциальной кислотности, суммы обменных оснований и степени засоления проводили общепринятыми методами [12, 13]. Содержание органического вещества определялось по методу Тюрина со спектрофотометрическим окончанием по Орлову-Гриндель [13]. Концентрация аммонийного азота (обменного аммония) определялась колориметрически с реактивом Несслера [13]. Содержание нитратного азота – по методу Грандваль-Ляжу [13]. Определение подвижных форм фосфора проводили согласно методу Чирикова [13]. Активность уреазы исследовалась по [14], фосфатазы по методу Галстяна и Арутюняна [15].

При изучении микробоценоза разных почвенных горизонтов образцы отбирались из свежевыкопанного почвенного разреза. Образцы почвы, отобранные для микробиологического анализа, диспергировали путем растирания почвы, извлекали корни растений и включения. Для посева готовили почвенную суспензию (10 г почвы в 100 мл стерильной водопроводной воды). Потом готовили необходимое для посева разведение. Почвенную суспензию высевали на твердые питательные среды: крахмало-аммиачный агар (для выделения общего количества микроорганизмов и стрептомицетов), среду Чапека (для выделения микромицетов) и среду Эшби (для выделения азотобактера). Подсчет колоний проводили на 7–10-е сутки исследований [8, 16].

Определение интенсивности базального дыхания проводили по методу Галстяна, субстрат-индуцированного – с внесением в пробу почвы раствора глюкозы из расчета 10 мг глюкозы/г почвы [14, 17].

Статистическая обработка экспериментальных данных проводилась по общепринятым методам параметрической статистики на 95 % уровне значимости по Б.А. Доспехову [18].

Анализ результатов. Гранулометрический состав почв определяет многие стороны процесса новообразования и хозяйственного и их использования. Важнейшие водные, воздушные и тепловые свойства почв зависят от их механического состава [19]. При изучении гранулометрического состава изученных почв получены данные, которые свидетельствуют о различиях в процентном соотношении разнообразных по диаметру фракций в горизонтах А и В (рис. 1).

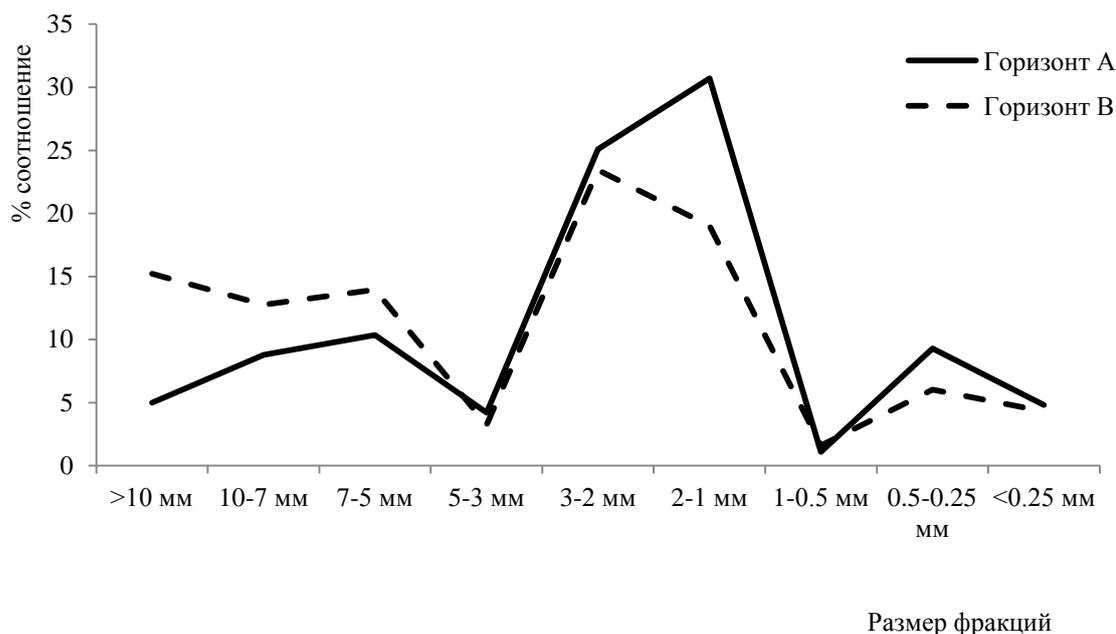


Рис. 1. Гранулометрический состав почв РЛП «Донецкий кряж»

Анализ данных показывает, что если в горизонте А преобладающей является гравийная фракция (3–1 мм), то в горизонте В – каменистая (> 3 мм), на долю песка в горизонте А приходится 15,21 %, в горизонте В – 11,93 %.

Агрономически ценными считаются агрегаты размерами 10–0,5 мм, поскольку именно они придают почвенной структуре ее уникальный вид и определяют почвенное плодородие [11, 20]. По содержанию АЦА агрегатное состояние почв относят к отличному – при доле АЦА > 60 % (для горизонта А доля АЦА составляет 94,55 %, горизонта В – 95,27 %). При расчете коэффициента структурности и оценивании агрегатного состояния по этому признаку агрегатное состояние оценено как отличное ($K_{стр}$ для горизонта А – 9,11, горизонта В – $K_{стр} = 4,09$).

При изучении основных агрохимических характеристик почв ландшафтно-рекреационного парка «Донецкий кряж» установлено, что их следует отнести к незасоленным (содержание солей <0,3 г /100 г почвы) с нейтральной реакцией среды ($pH_{акт} - 6,58 - 6,72$).

Способность почвенного поглощающего комплекса (ППК) к сорбции и обмену катионов играет чрезвычайно важную роль в генезисе почв, формировании их свойств и уровня плодородия, в связи с чем этот показатель является одним из определяющих плодородие и влияющих на скорость почвообразовательного процесса. Высокая

поглотительная способность является залогом прочного удерживания катионов в структуре минеральных и гумусовых коллоидов [21]. По содержанию суммы обменных оснований данные почвы значительно уступают типичным черноземам и контрольным участкам заповедных территорий, где большинство авторов фиксируют сумму обменных оснований, которая варьирует в пределах 35–40 мг-экв на 100 г почвы [21]. Так, содержание суммы обменных оснований изученных нами почв крайне низко и не превышает 18 ммоль экв/100 г почвы. Кроме того, черноземные почвы характеризуются высокой степенью насыщенности почв основаниями (более 90 %), а в нашем случае этот показатель не превышает 80 % (табл. 1).

Таблица 1
Агрохимическая характеристика почв ландшафтно-рекреационного парка «Донецкий кряж»

Показатель	Горизонт А	Горизонт В
Актуальная кислотность	6,58	6,72
Общая засоленность, г/100 г почвы	0,050±0,002	0,091±0,003
Обменная кислотность, ммоль экв/100 г почвы	0,255±0,014	0,149±0,004
Гидролитическая кислотность, ммоль экв/100 г почвы	5,05±0,051	3,73±0,053
Сумма обменных оснований, ммоль экв/100 г почвы	17,88±0,179	14,94±0,263
Обменный кальций, ммоль экв/100 г почвы	14,05±0,18	11,34±0,16
Обменный магний, ммоль экв/100 г почвы	2,86±0,07	2,19±0,09
Степень насыщенности почв основаниями, %	78,0	80,0
Гумус, %	1,19±0,03	0,80±0,02
Обменный аммоний, мг/100 г почвы	0,7±0,11	1,28±0,04
Нитратный азот, мг/100 г почвы	0,03±0,004	0,01±0,002
Подвижные фосфаты, мг/100 г почвы	10,29±0,37	7,97±0,71

В составе ППК изученных контрольных участков преобладают обменные катионы кальция и магния, что является генетическим признаком данной почвы. Соотношение магния к кальцию в среднем – 1:5, что соотносится с литературными данными по изученности содержания обменного магния и кальция в ППК почв агроценозов различной степени нарушенности.

По содержанию гумуса почвы ландшафтно-рекреационного парка «Донецкий кряж» отнесены к слабо гумусированным, с очень низким содержанием аммонийной и нитратной форм азота. Для обменного аммония характерна приуроченность к нижележащему горизонту, содержание гумуса и нитратного азота с глубиной снижается, что характерно также и для распределения подвижных фосфатов. Вероятнее всего, полученные данные, касающиеся распределения аммонийного азота, объясняются преимущественной локализацией корневых систем именно в пределах верхнего горизонта, где и происходит активное поглощение его соединений. Горизонт А характеризуется повышенным содержанием обменного фосфора, для горизонта В характерно среднее содержание подвижных фосфатов.

Почвенные микроорганизмы составляют значительную часть любой экологической системы, включающей почву, и активно участвуют в ее жизнедеятельности. Обладая широкой экологической приспособляемостью, почвенные микроорганизмы выполняют громадную работу по деструкции попадающих в почву веществ, регулируя состав воздушного потока почв, содержание и доступность биогенных веществ, необходимых для роста и развития растений [22]. Нами показано, что наибольшая численность микроорганизмов характерна для гумусо-аккумулятивного горизонта чернозема обыкновенного. Также в нем, как это и характерно для зональных почв, количество микроорганизмов постепенно уменьшалось при прохождении вниз по почвенному профилю. Наряду с этим, можно говорить о

биологической деградации данной почвы, поскольку по шкале оценки степени обогащенности почв микроорганизмами при посеве на питательные среды, предложенной Д.Г. Звягинцевым [23] она относится к «очень бедным», не превышая 520 тыс. КОЕ/г почвы. Отмеченная закономерность характерна для всех исследованных эколого-трофических групп почвенных микроорганизмов, однако следует отметить, что вклад микроскопических грибов в формирование микробного сообщества чернозема обыкновенного был наиболее низким (табл. 2). Доминирующим видом микромицетов в горизонте А являлся *Aspergillus fumigatus* Fresen., одиночно встречались *Mucor racemosus* Bull., *M. corticola* Hagem., *Trichoderma viride* Pers., *Mortierella alpina* Reuget, тогда как в нижележащем генетическом горизонте отмечено увеличение числа доминирующих видов в ценозе – *Aspergillus ustus* (Bainier) Thom&Church и *Penicillium spinulosum* Thom, а также сменой одиночно встречающихся видов – *Penicillium camemberti* Thom, *Mortierella alpina*, *M. racemosus*.

Широко используемым в исследованиях информативным показателем микробиологической активности почвы является дыхание микроорганизмов. Интенсивность дыхания относится к лабильным признакам, но в то же время она тесно связана с суммарной биологической активностью. По мнению ряда авторов, интенсивность почвенного дыхания – информативный показатель изменения скоростей процессов в сезонной динамике при изменении метеорологических условий, а также при загрязнении почв и др. [24, 25]. Определение респираторной активности микроорганизмов также позволило установить развитие процессов биологической деградации почв, поскольку чернозем обыкновенный характеризовался средней степенью биологической активности, оцененной по интенсивности базального дыхания (16 мг CO₂ / 100 г почвы за сутки), несколько снижающейся в нижележащих почвенных горизонтах, что связано с уменьшением количества микроорганизмов в физиологически активном состоянии (табл. 2). Исследование интенсивности субстрат-индуцированного дыхания показало, что большая часть микробоценоза находится в потенциально активном состоянии и при снижении напряженности негативных экологических факторов, вызывающих снижение потенциальной активности микробного сообщества почвы, может переходить в активное состояние.

Таблица 2

Биологическая активность почв ландшафтно-рекреационного парка «Донецкий кряж»

Показатель	Горизонт А	Горизонт В
Общее количество микроорганизмов, тыс. КОЕ/г почвы	520,8 ± 27,24	352,6 ± 15,23
Количество стрептомицетов, тыс. КОЕ/г почвы	130,4 ± 11,6	102,9 ± 7,82
Количество микромицетов, тыс. КОЕ/г почвы	56,9 ± 4,84	33,6 ± 2,77
Количество азотобактера, %	56,7 ± 3,92	42,8 ± 5,54
Базальное дыхание, мг CO ₂ /100 г почвы за сутки	16,5 ± 0,58	13,2 ± 0,88
Субстрат-индуцированное дыхание, мг CO ₂ /100 г почвы за сутки	76,2 ± 2,03	34,2 ± 0,33
Активность уреазы, мг NH ₃ /10 г почвы за сутки	13,1 ± 0,32	8,8 ± 0,89
Активность фосфатазы, мг P ₂ O ₅ /10 г почвы за сутки	13,97 ± 0,52	8,93 ± 0,14

Ферментативная активность почв – интегральный показатель функциональной активности почвенной биоты и ее способности к разнообразным биохимическим превращениям, который относительно стабилен, характеризуется малой ошибкой, простотой определения, высокой чувствительностью к внешним воздействиям [26]. Активность уреазы может рассматриваться в качестве одного из важнейших показателей биологической активности и качества почв, поскольку образующийся в

результате ферментативной реакции катион NH_4^+ является непосредственным источником азотного питания растений [27–29]. Обогащенность почвы подвижными фосфатами зависит от интенсивности минерализации их органических соединений, в то время как о потенциальной интенсивности и направленности процессов биохимической мобилизации фосфора в почве можно судить по уровню активности фосфатазы [30].

Анализ полученных данных показал, что в генетических горизонтах чернозема обыкновенного согласно шкале Гапонюка и Малахова уровень активности фосфатазы высокий, постепенно снижающийся при прохождении вниз по почвенному профилю [14]. Полученные нами данные хорошо согласуются как с достаточно низким содержанием подвижных фосфатов в почвах ландшафтно-рекреационного парка «Донецкий кряж» (табл. 1, 2), так и с исследованиями других авторов, которыми показано, что при недостатке в почве доступного фосфора происходит дополнительное выделение ферментов микроорганизмами и растениями, что ведет к увеличению фосфатазной активности [31–33]. Наряду с этим, для уреазы не было установлено отрицательной корреляционной зависимости между активностью фермента и уровнем обеспеченности почв аммонийным азотом. По шкале сравнительной оценки биологической активности почвы интенсивность функционирования уреазы была оценена как средняя в горизонте А и слабая – в горизонте В.

Выводы. В почвах ландшафтно-рекреационного парка «Донецкий кряж» преобладает агрономически ценная фракция, содержание которой варьирует от 94,55 % до 95,27 %, свидетельствуя об отличной структуре горизонтов чернозема. Величина коэффициента структурности изменяется от 4,09 до 9,11, что также говорит об отличной оструктуренности черноземов. Кроме того, для данных почв характерны нейтральная реакция среды и отсутствие засоления, что, безусловно, благоприятно сказывается на росте и развитии растений. Однако, по содержанию элементов минерального питания и органического вещества данные почвы следует охарактеризовать как крайне бедные, что наряду с низкой поглотительной способностью и слабым уровнем биологической активности дает основание рассматривать почвы как образования, в которых замедлены почвообразовательные процессы, что в будущем может способствовать развитию деградационных процессов, приводящих к дальнейшему истощению почвы, потере структурированности и снижению агрономически ценных показателей.

Работа выполнена в рамках госзадания ФГБНУ Донецкий ботанический сад по теме FREG-2023-0002 «Качественные и функциональные характеристики почв сельскохозяйственных угодий в степной зоне и пути восстановления их биологической продуктивности» (регистрационный номер 123101300198-3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Общие экологические условия почвенного парка «Медеу» / Ф.Е. Козыбаева, Г.Б. Бейсева, Г.А. Сапаров, Ж.С. Саркулова, Н.Ж. Ажикина // International independent scientific journal. – 2021. – № 33. С. 3–13.
2. Характеристика почв особо охраняемой природной территории Уральского учебно-опытного лесхоза «Соколиный камень» / Л.П. Абрамова, Л.Ф. Ахматова, А.Е. Досманова, А.В. Яковлева // Современное состояние и перспектива развития сети особо охраняемых природных территорий в промышленно развитых регионах: материалы II Всероссийской конференции, посвященной 25-летию природного парка «Нумто». – Екатеринбург, 2022. – С. 12–18.
3. Кузнецова И.А. Мониторинг состояния особо охраняемых природных территорий Свердловской области / И.А. Кузнецова, Д.В. Веселкин, М.Г. Головатин. – Екатеринбург: издательство Уральского федерального университета им. Б.Н. Ельцина, 2017. – 170 с.
4. Стрябкова А.П. Особо охраняемые природные территории в пределах административно-территориальных единиц Донецкой Народной Республики / А.П. Стрябкова, А.Г. Молодан,

- А.З. Глухов // Донецкие чтения 2021: образование, наука, инновации, культура и вызовы: материалы VI Междунар. конф. (Донецк, 26-27 октября 2021 г.). – Т. 3. – Донецк, 2021. – С. 162–167.
5. Определитель высших растений Украины / Доброчаева Д.Н., Котов М.И., Прокудин Ю.Н. [и др.]. – К.: Наукова думка, 1987. – 548 с.
 6. Методические рекомендации по морфологическому описанию почв / сост. Дюкарев А.Г., Пологова Н.Н., Герасько Л.И. – Томск: Изд-во СО РАН, 1999. – 39 с.
 7. Розанов Б.Г. Морфология почв / Б.Г. Розанов. – М.: Академический проект, 2004. – 432 с.
 8. Методы почвенной микробиологии и биохимии / под ред. Звягинцева Д.Г. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 304 с.
 9. ГОСТ 12536-2014 Грунты. Методы лабораторного определения гранулометрического (зернового) и микроагрегатного состава. – Взамен ГОСТ 12536-79; введ. 2015-07-01. – М.: Стандартинформ, 2019. – 23 с.
 10. Теории и методы физики почв / под ред. Е.В. Шеина, Л.О. Карпачевского. – М.: Гриф и К, 2007. – 616 с.
 11. Влияние типа землепользования на физические свойства черноземов лесостепной зоны Западной Сибири / И.Н. Курганова, В.О. Лопес де Гереню, Е.Н. Смоленцева, М.П. Семенова, В.И. Личко, Б.А. Смоленцев // Почвоведение. – 2021. – № 9. – С. 106-1075.
 12. Аринушкина Е.В. Руководство по химическому анализу почв / Е.В. Аринушкина. – М.: Изд-во МГУ, 1970. – 487 с.
 13. Практикум по агрохимии / Под ред. Минеева В.Г. – М.: Изд-во МГУ, 2001. – 689 с.
 14. Казеев К.Ш. Биологическая диагностика и индикация почв: методология и методы исследований / К.Ш. Казеев, С.И. Колесников, В.Ф. Вальков. – Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 2003. – 216 с.
 15. Хазиев Ф.Х. Методы почвенной энзимологии / Ф.Х. Хазиев. – Москва: Наука, 2005. – 252 с.
 16. Руководство к практическим занятиям по микробиологии / под ред. Егорова Н.С.. – М.: Изд-во МГУ, 1995. – 224 с.
 17. Благодатская Е.В. Оценка устойчивости микробных сообществ в процессе разложения поллютантов в почве / Е.В. Благодатская // Почвоведение. – 1996. – № 11. – С. 1341-1346.
 18. Доспехов Б.А. Методика полевого опыта (с основами статистической обработки результатов исследований) / Б.А. Доспехов. – М.: Агропромиздат, 1985. – 351 с.
 19. Гукалов В.Н. Гранулометрический состав почв аграрных ландшафтов / В.Н. Гукалов // Экологические проблемы развития агроландшафтов и способы повышения их продуктивности: материалы Междунар. науч. экологической конференции (Краснодар, 27-29 марта 2018 г.). – Краснодар: Кубанский государственный аграрный университет им. И.Т. Трубилина, 2018. – С. 276–281.
 20. Шейн Е.В. Курс физики почв / Е.В. Шейн. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2005. – 432 с.
 21. Вальков В.Ф. Почвоведение: Учебник для вузов / В.Ф. Вальков, К.Ш. Казеев, С.И. Колесников. – М.: ИКЦ «МарТ», Ростов н/Д: Издательский центр «МарТ», 2006. – 496 с.
 22. Казакова Н.А. Микробный ценоз почв как индикатор трансформации почвенного покрова / Н.А. Казакова, Н.А. Ильина // Международный научно-исследовательский журнал. – 2013. – № 6 (13). – Ч. 1. – С. 30-31.
 23. Звягинцев Д.Г. Биологическая активность почв и шкалы для оценки некоторых ее показателей / Д.Г. Звягинцев // Почвоведение. – 1978. – № 6. – С. 48-54.
 24. Ананьева Н.Д. Оценка устойчивости микробных комплексов почв к природным и антропогенным воздействиям / Н.Д. Ананьева, Е.В. Благодатская, Т.С. Демкина // Почвоведение. – 2002. – № 5. – С. 580-587.
 25. Благодатская Е.В. Активность и биомасса почвенных микроорганизмов в изменяющихся условиях окружающей среды / Е.В. Благодатская, М.В. Семенов, А.В. Якушев. – М.: Товарищество научных изданий КМК, 2016. – 243 с.
 26. Поляк Ю.М. Почвенные ферменты и загрязнение почв: биодegradация, биоремедиация, биоиндикация / Ю.М. Поляк, В.И. Сухаревич // Агрохимия. – 2020. – № 3. – С. 83-93.
 27. Исследование ферментативной активности дерново-подзолистых почв / Н.И. Дроздова, В.Г. Свириденко, А.В. Хаданович, О.А. Панфиленко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2010. – № 3 (60). – С. 84–88.
 28. Поволоцкая Ю.С. Общее представление о почвенных ферментах / Ю.С. Поволоцкая // International Journal of Humanities and Natural Sciences. – 2020. – Vol. 1–1 (40). – P. 21–23.
 29. Utobo E.B. Soil enzymes as bioindicators of soil ecosystem status / E.B. Utobo, L. Tewari // Applied Ecology and Environmental Research. – 2015. – Vol. 13, No. 1. – P.147–169.
 30. Куликова А.Х. Ферментативная активность почвы в зависимости от системы удобрения / А.Х. Куликова, С.А. Антонова, А.В. Козлов // Вестник Ульяновской государственной сельскохозяйственной академии. – 2017. – №4 (40). – С. 36–43.

31. Наими О.И. Фосфатный режим и активность фосфатазы в черноземе обыкновенном при возделывании нута / О.И. Наими, О.С. Безуглова, Е.А. Полиенко // Агрехимический вестник. – 2020. – № 3. – С. 25–29.
32. Динамика ферментативной активности чернозема обыкновенного под посевами подсолнечника / О.И. Наими, М.Н. Дубинина, В.А. Матюгин, В.А. Лыхман // Вестник Донского государственного аграрного университета. – 2023. – №1 (47). – С. 53–61.
33. Швартау В.В. Вплив ортофосфату на активність кислих фосфатаз коренів проростків озимої пшениці / В.В. Швартау, М.П. Стахів // Физиология и биохимия культурных растений. – 2007. – Т. 39, № 3. – С. 207-211.

Поступила в редакцию 17.05.2024 г.

AGROCHEMICAL CHARACTERISTICS AND BIOLOGICAL ACTIVITY OF SOILS LANDSCAPE AND RECREATIONAL PARK “DONETSKIY KRYAZH”

D.V. Syshchykov, I.V. Agurova, A.S. Berezovskiy, S.D. Triskiba

The article provides a comprehensive agrochemical assessment of the landscape and recreational park “Donetskiy Kryazh” soils: the main agrochemical indexes, as well as their microbiological and enzymatic activity, have been studied. As a result of carried out researches on a number of agrochemical indexes such as the content of mineral nutrition elements, humus, soil absorption capacity, biological and enzymatic activity, these soils are characterized as extremely poor. This gives reason to consider soils as formations in which soil formation processes are slowed down, which can further contribute to increased degradation, leading to soil depletion, loss of structure and a decrease in agronomically valuable indexes.

Keywords: mineral nutrition elements, humus, absorption capacity, enzymes, microorganisms, soil respiration

Сыщикова Дмитрий Валерьевич

Кандидат биологических наук,
ведущий научный сотрудник лаборатории
почвенно-экологических исследований
ФГБНУ «Донецкий ботанический сад»,
г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: 2007dmitry@rambler.ru

Syshchykov Dmitry

Candidate of Biological Sciences,
leading researcher at the laboratory of soil-ecological
research,
FSBSI “Donetsk Botanical Garden”,
Donetsk, DPR, RF.

Агурова Ирина Владимировна

Кандидат биологических наук,
ведущий научный сотрудник лаборатории
почвенно-экологических исследований
ФГБНУ «Донецкий ботанический сад»,
г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: ir.agur@mail.ru

Agurova Irina

Candidate of Biological Sciences,
leading researcher at the laboratory of soil-ecological
research,
FSBSI “Donetsk Botanical Garden”,
Donetsk, DPR, RF.

Березовский Андрей Сергеевич

младший научный сотрудник лаборатории
почвенно-экологических исследований
ФГБНУ «Донецкий ботанический сад»,
г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: berezovskiias@list.ru

Berezovskiy Andrey

junior researcher at the laboratory of soil-ecological
research,
FSBSI “Donetsk Botanical Garden”,
Donetsk, DPR, RF.

Трискиба Сергей Дмитриевич

младший научный сотрудник лаборатории
почвенно-экологических исследований
ФГБНУ «Донецкий ботанический сад»,
г. Донецк, ДНР, РФ.

Triskiba Sergey

junior researcher at the laboratory of soil-ecological
research,
FSBSI “Donetsk Botanical Garden”,
Donetsk, DPR, RF.

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ ХВОИ СОСНЫ ОБЫКНОВЕННОЙ (*PINUS SYLVESTRIS* L.) В Г. МИНСКЕ

© 2024. А. Н. Хох, В. Б. Звягинцев

В работе приведены результаты сравнительного исследования хвои сосны обыкновенной из разных районов города Минска. Установлено, что для исследованных территорий характерен широкий диапазон колебаний индекса флуктуирующей асимметрии (от 2 до 6), т.е. влияние антропогенных факторов оценивается от слабого до критического уровней. Доказано, что ухудшение качества среды, помимо нарушения билатеральных признаков, непосредственно воздействует на морфолого-анатомические параметры хвои. С помощью БИК-спектроскопии и формального независимого моделирования аналогий классов построены классификационные модели, позволяющие осуществить дифференциацию хвои по уровню антропогенной нагрузки. Средняя точность разработанной классификационной SIMCA-модели составила $85,4 \pm 6,2$ (%) – на обучающей выборке и $84,0 \pm 4,9$ (%) – на валидационной. Полученные результаты могут быть использованы при биоиндикационных исследованиях качества окружающей городской среды.

Ключевые слова: сосна обыкновенная, хвоя, морфолого-анатомические параметры, флуктуирующая асимметрия, БИК-спектры, SIMCA, антропогенные факторы.

Введение. Резко возросшее в последние десятилетие антропогенное давление на городскую среду приводит к негативным изменениям структуры, продуктивности и функционирования хвойных насаждений, что проявляется на всех уровнях организации: от молекулярно-генетического до организменного [1]. При этом различные виды хвойных по-разному приспосабливаются к изменениям качества среды обитания, регулируя соответствующим образом метаболизм и морфолого-анатомическую структуру. Для диагностики их состояния могут быть использованы характеристики ассимилирующих органов, которые обладают высокой чувствительностью и стабильностью ответной реакции на комплексное воздействие неблагоприятных факторов как природного, так и антропогенного характера [2], а потому могут служить адекватными индикаторами при оценке экологической ситуации [3, 4].

Обширные и разноплановые экспериментальные исследования посвящены изучению функционирования ассимилирующих органов сосны обыкновенной (*Pinus sylvestris* L.), насаждения которой играют важную роль в оздоровлении экологической обстановки городской среды, участвуя в очищении атмосферы, распределении и ассимиляции загрязняющих веществ. Предметом этих исследований чаще всего является изучение морфо-биометрических, анатомических, физиолого-биохимических показателей, в том числе состояния фотосинтезирующего аппарата, химического состава как отдельно, так и в разных сочетаниях.

Приведем краткий анализ некоторых из имеющихся литературных источников.

По результатам многочисленных экспериментов В. Т. Ярмишко (1997) доказано, что у сосны обыкновенной с усилением антропогенного воздействия происходит уменьшение длины, ширины и толщины хвои [5].

В работе Р. Rautio (1998) говорится о том, что в районе действия металлургических предприятий с увеличением концентрации тяжелых металлов сокращается продолжительность жизни хвои [6].

В исследовании белорусских ученых О. В. Поворовой и В. А. Ливинской (2019) установлено, что в районах сочетанного действия продуктов сгорания топлива автомашин и

поллютантов промышленного происхождения по сравнению с контролем (на примере г. Могилева, Беларусь) наблюдается уменьшение числа устьиц в хвое *P. sylvestris* L. [7].

В статье И. С. Коротченко и А. Н. Алексеевой (2021) установлено, индекс флуктуирующей асимметрии (далее – ИФА) хвои *P. sylvestris* L., произрастающей в различных районах Красноярска, значительно выше, чем в лесном массиве того же региона, имеет значимую корреляционную связь с уровнем автотранспортной и промышленной нагрузки [8].

В работе Е. М. Тарасовой (2018) с помощью метода ИК-Фурье спектроскопии исследованы образцы хвои сосны обыкновенной из районов с различной антропогенной нагрузкой г. Твери. Показано, что в ИК-спектрах образцов хвои разных лет жизни из зоны с высокой антропогенной нагрузкой и фоновой зоны наблюдается относительное увеличение интенсивности полос поглощения со временем [9].

Цель данного исследования – провести сравнительный анализ сосновых насаждений, произрастающих в районах г. Минска с разным уровнем и характером антропогенной нагрузки, на основе оценки комплекса показателей хвои.

Несмотря на значительный объем и разнообразие публикаций в данной области, проблема, поднимаемая в статье, не лишена научной новизны и практической значимости, так как проведена для конкретной территории, характеризующейся своими особенностями антропогенной нагрузки на *P. sylvestris* L.

Материал и методика исследований. Объектом исследования являлась хвоя 2-го года жизни, отобранная в конце вегетационного периода (вторая половина августа) 2023 года на территории г. Минска (пункты отбора №№ 1–17), а также на фоновой (контрольной) территории государственного природоохранного учреждения «Березинский биосферный заповедник» (пункты отбора №№ 18–21, пункт отбора № 21 в дальнейшем был исключен, так как ИФА для него составил 2) с ветвей 1-го порядка в средней части по всему диаметру кроны. В исследование включены 12 000 пар хвоинок с 400 деревьев.

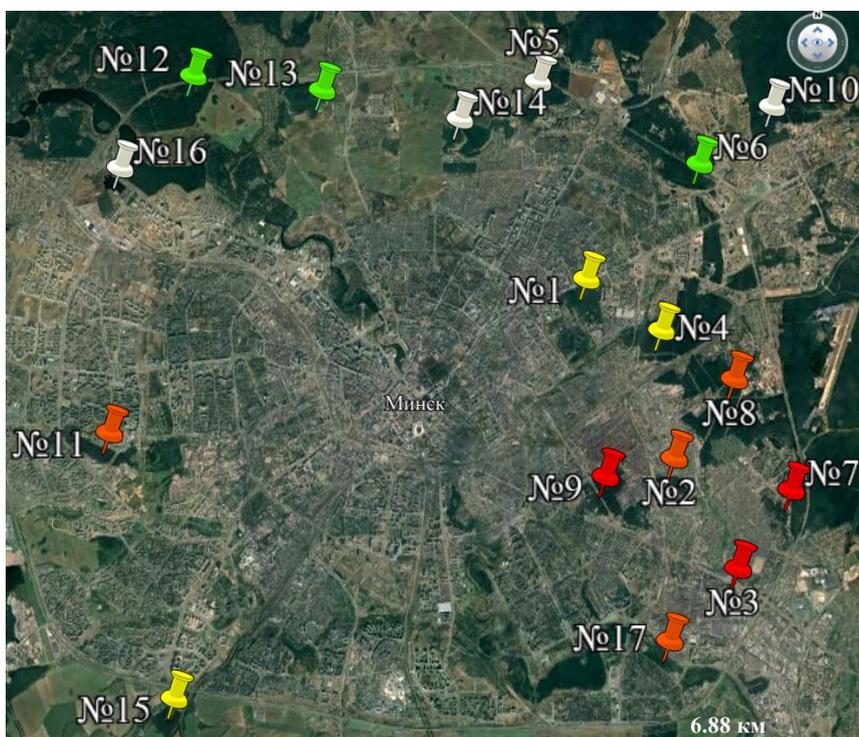


Рис. 1. Схема расположения объектов исследования: балл ИФА = 2 – белый, балл ИФА = 3 – зеленый, балл ИФА = 4 – желтый, балл ИФА = 5 – оранжевый, балл ИФА = 6 – красный

Отобранные образцы хвои сканировались на планшетном сканере, после чего с помощью программы MCview (LOMO-Microsystems, РФ) по отсканированным изображениям рассчитывались длина левой и правой хвоинки в паре с точностью до 0,01 мм. Изготовление тонких поперечных срезов для изучения морфолого-анатомических параметров (далее – МАП), расчеты площади хвои, количества устьиц в 1 мм^2 , а также ИФА проводились, как изложено в работе Хох А.Н., Звягинцева В.Б. (2021) [10].

Статистическая обработка МАП проводилась с использованием SPSS v.20.0 (IBM, USA). Применялись следующие методы: одномерная описательная статистика, t-критерий Стьюдента, однофакторный дисперсионный анализ (ANOVA). Различия считали достоверными при $p < 0,05$.

После изучения МАП, хвоя высушивалась при 30–35 °С до остаточной влажности не более 7 %, после чего образцы с одного дерева (по 5 пар) отдельно для каждого балла ИФА измельчались в агатовой ступке, затем порошок помещался в чашку Петри из оптического прозрачного стекла и осуществлялась запись БИК-спектров диффузного отражения с использованием БИК-спектрометра MicroNIR OnSite с диодно-матричным детектором (VIAMI, США) в диапазоне 10526–6060 см^{-1} с разрешением 2 см^{-1} после усреднения накопленных спектрограмм, содержащих 64 сканирования. Все последующие вычислительные эксперименты проводились на производных второго порядка БИК-спектров с использованием пакета программ The Unscrambler X v.10.4.1 (CAMO, США). Процедуры классификации БИК-спектров были проведены с использованием метода главных компонент (далее – PCA) [11]. Классификационные модели строились при помощи формального независимого моделирования аналогий классов далее – SIMCA) [13]. Как при проведении PCA, так и при построении классификационных моделей использовался алгоритм нелинейного итерационного проецирования при помощи чередующихся наименьших квадратов (NIPALS) [13].

Результаты исследований и их обсуждение. В таблице 1 представлены полученные средние значения длины хвои на исследованных пунктах отбора (далее – ПО) и рассчитанный ИФА.

Таблица 1

Средние значения длины хвои и стабильность развития

№ПО	L_1 , мм	L_2 , мм	$L_{\text{среднее}}$, мм	ИФА	Балл*	№ПО	L_1 , мм	L_2 , мм	$L_{\text{среднее}}$, мм	ИФА	Балл		
1	M_x	59,50	59,42	59,46	0,0059	4	11	M_x	54,69	54,40	54,54	0,0079	5
	$\pm SD$	19,89	19,93	19,91				$\pm SD$	18,10	18,00	18,05		
2	M_x	58,59	58,33	58,46	0,0068	5	12	M_x	59,57	59,44	59,50	0,0050	3
	$\pm SD$	15,81	15,77	15,79				$\pm SD$	16,89	16,87	16,88		
3	M_x	46,53	46,21	46,37	0,0093	6	13	M_x	58,26	58,14	58,20	0,0050	3
	$\pm SD$	20,72	20,55	20,63				$\pm SD$	13,12	13,09	13,11		
4	M_x	66,42	66,26	66,34	0,0057	4	14	M_x	74,30	74,13	74,21	0,0036	2
	$\pm SD$	25,23	25,19	25,21				$\pm SD$	15,95	15,92	15,93		
5	M_x	72,20	71,99	72,10	0,0034	2	15	M_x	58,86	58,75	58,80	0,0058	4
	$\pm SD$	17,30	17,25	17,27				$\pm SD$	15,44	15,43	15,43		
6	M_x	61,34	61,22	61,28	0,0046	3	16	M_x	64,33	64,22	64,28	0,0035	2
	$\pm SD$	14,26	14,25	14,25				$\pm SD$	16,98	16,95	16,96		
7	M_x	55,14	54,75	54,94	0,0092	6	17	M_x	58,48	58,20	58,34	0,0084	5
	$\pm SD$	22,21	22,05	22,13				$\pm SD$	12,61	12,56	12,58		
8	M_x	61,17	60,95	61,06	0,0069	5	18	M_x	81,97	81,98	81,98	0,0024	1
	$\pm SD$	15,95	15,89	15,92				$\pm SD$	24,93	24,92	24,93		

Продолжение таблицы 1

9	M_x	51,54	51,18	51,36	0,0092	6	19	M_x	73,66	73,51	73,59	0,0024	1
	$\pm SD$	20,93	20,80	20,87				$\pm SD$	20,14	20,10	20,12		
10	M_x	68,73	68,51	68,62	0,0035	2	20	M_x	67,39	67,32	67,35	0,0019	1
	$\pm SD$	21,43	21,37	21,40				$\pm SD$	23,56	23,53	23,55		

Примечание: M_x – среднее арифметическое значение, SD – среднее квадратичное отклонение; *оценка влияния антропогенного фактора: 1 – норма, 2 – слабое, 3 – умеренное, 4 – высокое, 5 – очень высокое, 6 – критическое [11].

Как можно видеть, на территории г. Минска ни в одном случае балл ИФА не соответствовал норме. Он был равен 2 на ПО № 5, № 10, № 14 и № 16, 3 – на ПО № 6, № 12 и № 13, 4 – на ПО № 1, № 4 и № 15, 5 – на ПО № 2, № 8, № 11 и № 17, 6 – на ПО № 3, № 7 и № 9. Анализируя территориальное расположение ПО, отмечена связь между рассчитанными балами ИФА и уровнем загрязнения атмосферного воздуха г. Минска [14].

Далее отдельно по каждому ПО рассчитывались МАП хвои (их перечень представлен в таблице 2). После чего по каждому параметру была проведена проверка нормальности распределения с помощью W -теста Шапиро-Уилка; установлено, что данные подчиняются закону нормального распределения, поэтому для их анализа применяли параметрические методы. С учетом полученных результатов оценки стабильности развития, рассчитанные показатели МАП были сгруппированы в 6 групп, соответствующих баллу ИФА. В таблице 2 представлены полученные результаты.

Таблица 2

Рассчитанные показатели ($M_x \pm SD$)

Морфолого-анатомический параметр	Балл ИФА=1 (контроль)	Балл ИФА=2	Балл ИФА=3	Балл ИФА=4	Балл ИФА=5	Балл ИФА=6
Длина, мм	74,31±13,69	69,8±8,82***	59,66±8,88***	61,53±12***	58,1±7,65***	50,89±12,5***
Ширина, мм	1,58±0,15	1,56±0,13***	1,55±0,13***	1,56±0,18*	1,61±0,13***	1,64±0,11***
Толщина, мм	0,75±0,17	0,74±0,16	0,74±0,14	0,74±0,15	0,75±0,15	0,74±0,16
Площадь хвои, мм ²	267,72 ±52,29	247,66 ±35,75***	210,98 ±34,5***	219,29 ±47,68***	211,82 ±32,32***	186,82 ±47,83***
Площадь поперечного сечения ($S_{пс}$), мм ²	0,93±0,15	0,91±0,12**	0,9±0,13***	0,91±0,15*	0,95±0,13*	0,95±0,14*
Площадь центрального цилиндра ($S_{цц}$), мм ²	0,27±0,03	0,27±0,03	0,23±0,03	0,33±0,04***	0,29±0,03***	0,41±0,04***
$S_{цц}/S_{пс}$	0,31±0,09	0,32±0,07	0,27±0,07***	0,4±0,1***	0,33±0,07***	0,47±0,09***
Длина устьиц, мкм	61,67±9,11	60,83 ±7,46*	60,39 ±9,02*	59,83 ±8,79***	54,39 ±7,91***	50,92 ±7,23***
Ширина устьиц, мкм	44,6±4,89	43,72±6,05*	46,81±6,4*	41,19±5,9***	41,6±4,37***	36,9±5,44***
Количество устьиц, шт./мм ²	84,7 ±19,62	86,04 ±16,55	85,41 ±19,96	85,66 ±19,29	101,2 ±16,92***	73,63 ±15,72***
Диаметр смоляных каналов, мкм	133,35 ±15,96	131,95 ±14,6	135,63 ±18,91*	138,11 ±18,87***	166,88 ±13,79***	177,42 ±13,28***
Количество смоляных каналов	8,9 ±1,99	8,99 ±1,75	9,03 ±1,78	10,03 ±1,75***	9,94 ±1,49***	10,2 ±1,74***

Примечание: M_x – среднее арифметическое значение, SD – среднее квадратичное отклонение; * – $p \leq 0,05$, ** – $p \leq 0,01$, *** – $p \leq 0,001$, уровень значимости рассчитан по сравнению с контролем

Сравнительный анализ МАП хвои показал, что у хвои с ростом антропогенной нагрузки, с увеличением ИФА происходит уменьшение длины и площади в среднем в 1,24 раза, что свидетельствует о снижении аккумулирующей сосновых насаждений города [15]. Кроме того, уменьшается длина и ширина устьиц в среднем в 1,1 раза, а диаметр и количество смоляных каналов при этом увеличивается также в среднем в 1,1 раза. Если рассматривать количество устьиц как показатель работы устьичного аппарата, то можно отметить следующую тенденцию: при переходе ИФА от 2 до 4 количество устьиц плавно увеличивается, затем при ИФА=5 происходит резкое увеличение, после чего при ИФА=6 количество устьиц снижается (на 28 % по сравнению с ИФА=5). Следовательно, при уровнях антропогенной нагрузки от слабого до очень высокого происходит активизация механизмов адаптации для того, чтобы устьица в условиях загрязнения могли выполнять свои основные функции. Однако когда уровень загрязнения становится критическим, количество устьиц снижается, что может привести к нарушениям в работе устьичного аппарата и, как следствие, к гибели как хвои, так и непосредственно всего растения. В целом, анализируя данные таблицы 1, можно видеть, что контрольные образцы хвои и образцы, отобранные на территории г. Минска, существенно различаются между собой. При этом для ИФА=2 количество МАП, для которых выявлены статистически достоверные различия, составило 6, для ИФА=6 – 11. Отметим, что по длине и площади хвои уровень значимости для ИФА=2–6 составил $p < 0,0001$. Единственный МАП, для которого не было выявлено статистически значимых различий по сравнению с контролем, – это толщина хвои, что согласуется с ранее полученными результатами [10]. При этом ряд ученых отмечает, что в техногенных условиях наряду с уменьшением длины и ширины происходит уменьшение и толщины хвои [5; 16].

Однофакторный дисперсионный анализ ANOVA показал значительные различия между исследуемыми группами ($F_{\text{среднее}} = 382,8$, $p < 0,001$; исключение: толщина хвои $F = 1,42$, $p = 0,21$). Для оценки значимости различий между средними значениями групп проведен апостериорный анализ с использованием теста Тьюки [17]. Полученные результаты представлены в таблице 3.

Таблица 3

Различия между группами по индексу флуктуирующей асимметрии (тест Тьюки)

Сравниваемые ИФА	Длина, мм	Ширина, мм	Площадь хвои, мм ²	Площадь поперечного сечения (Spс), мм ²	Площадь центрального цилиндра (Spц), мм ²	Spц/Spс	Длина устьиц, мкм	Ширина устьиц, мкм	Количество устьиц, шт./мм ²	Диаметр смоляных каналов, мкм	Количество смоляных каналов
1 и 2	4,5*	0,03*	20,4*	0,024*	0,002	0,008	0,84	0,9	-1,3	1,4	0,09
1 и 3	14,6*	0,03*	56,4*	0,03*	0,04*	0,04*	1,3	-2,2*	-0,8	-2,3	-0,14
1 и 4	12,7*	0,02	48,4*	0,02	-0,06*	-0,09*	1,83*	3,4*	-0,96	-4,7*	-1,13*
1 и 5	16,2*	-0,03*	56,2*	-0,01	-0,02*	-0,02*	7,3*	3,0*	-16,4*	-33,5*	-1,04*
1 и 6	23,4*	-0,05*	81,4*	-0,02	-0,14*	-0,15*	10,7*	7,7*	11,7*	-44,1*	-1,31*
2 и 3	10,1*	0,005	35,9*	0,01	0,04*	0,05*	0,45	-3,1*	0,63	-3,7*	0,04
2 и 4	8,3*	0,005	27,9*	0,003	-0,06*	-0,08*	0,99	2,5*	0,38	-6,2*	-1,03*
2 и 5	11,7*	-0,05*	35,8*	-0,04*	-0,02*	0,009	6,4*	2,1*	-15,1*	-34,9*	-0,95*
2 и 6	18,9*	-0,08*	60,9*	-0,04*	-0,14*	-0,14*	9,9*	6,8*	12,4*	-45,5*	-1,2*
3 и 4	-1,8*	0,001	-8,1*	0,009	-0,09*	-0,12*	0,6	5,6*	-0,25	-2,5	-0,99*
3 и 5	1,6	-0,06*	-0,2	-0,05*	-0,05*	-0,05*	5,9*	5,2*	-15,8*	-31,3*	-0,91*
3 и 6	8,7*	-0,08*	24,9*	-0,05*	-0,17*	-0,19*	9,5*	9,9*	11,8*	-41,8*	-1,17*
4 и 5	3,4*	-0,05*	7,86*	-0,04*	0,04*	0,07*	5,4*	0,4	-15,5*	-28,8*	0,09
4 и 6	10,6*	-0,07*	33*	-0,04*	-0,08*	-0,06*	8,91*	4,3*	12,3*	-39,3*	-0,17
5 и 6	7,2*	0,002	25,1*	0,005	-0,12*	-0,13*	3,5*	4,7*	27,6*	-10,5*	-0,26

Примечание. * – разность средних значима на уровне 0,05

В ходе работы также были получены и проанализированы БИК-спектры хвои. Спектры исследуемых образцов, усредненные по каждому дереву, имели несущественные различия, а потому прямое сравнение не позволило осуществить их дифференциацию. Для решения поставленной задачи был выбран метод главных компонент. РСА является линейным и аддитивным, выполняет простое геометрическое представление объектов и переменных в пространстве меньшей размерности. Графическое представление объектов позволяет изучить структуру совокупности и определить наличие классов (групп) [11]. Результаты РСА отображены в пространстве трех первых главных компонент (РС-1 – 87 %, РС-2 – 12 %, РС-3 – 1 %) (рис. 2).

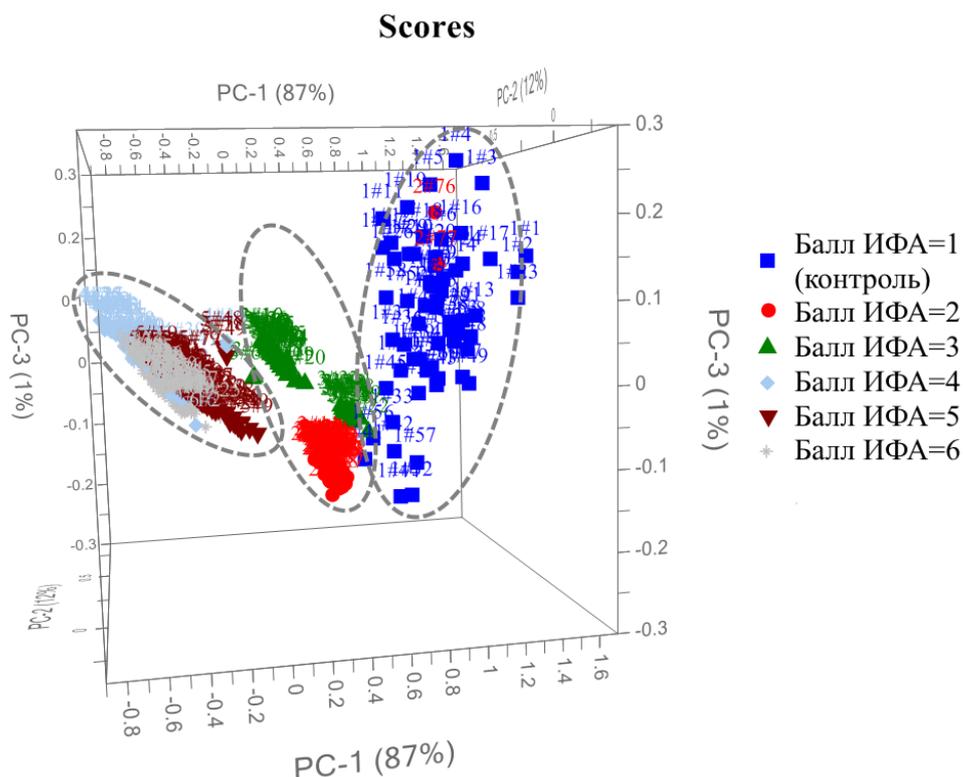


Рис. 2. Матрица счетов для исследованных образцов в 3d проекции

Как можно видеть на матрице счетов, точки, являющиеся отражением исследованных образцов хвои, объединились в 3 класса. Первый класс – образцы с ИФА= 1, что соответствует состоянию относительного экологического благополучия; второй – образцы с ИФА=2 и 3, что соответствует фазе антропогенной трансформации; третий – образцы с баллами ИФА=4,5 и 6, что соответствует сильно неравновесному состоянию и стадии антропогенной депрессии.

Далее БИК-спектры хвои были случайным образом пятикратно разделены на обучающие (2/3 спектров) и валидационные (1/3 спектров) выборки. Из обоих наборов были исключены 9 аномальных образцов, которые выпадали за границу области принятия решений. Для определения аномальных образцов первичные свойства всех образцов градуировочных наборов (спектры) оценивались на основании расчетов расстояния Махаланобиса [18]. На основе обучающих и валидационных выборок проводилось построение классификационных SIMCA-моделей с применением пятиблочной перекрестной проверки. БИК-спектры для каждого ИФА моделировались методом РСА обособленно, независимо от остальных, и проверялись на возможные

выбросы. Расчет расстояний между исследуемыми выборками в относительных единицах составил от 57 до 1391, что предопределяет возможность надежного различия исследуемых объектов [12].

Результаты SIMCA-классификации обучающих выборок хвои с расчетом оптимального количества главных компонент и % дисперсии для РС-1 представлены в таблице 4.

Таблица 4

Результаты 5-кратной SIMCA-классификации обучающих выборок хвои

	Правильно классифицированы, %	Неправильно и мультиклассифицированы, %	Неклассифицированы, %	Количество главных компонент	Дисперсия ГК-1, %
Балл ИФА= 1	80 / 90 / 85 / 97,5 / 90	5 / 0 / 5 / 2,5 / 2,5	15 / 10 / 10 / 0 / 7,5	2 / 2 / 2 / 2 / 2	64 / 64 / 68 / 66 / 66
Балл ИФА= 2	90,5 / 92,4 / 86,7 / 81 / 79,1	0 / 1,9 / 0 / 0 / 5,7	9,5 / 5,7 / 13,3 / 19 / 15,2	5 / 5 / 4 / 1 / 5	90 / 89 / 60 / 89 / 91
Балл ИФА= 3	85 / 80 / 80 / 80 / 85	0 / 15 / 10 / 20 / 0	15 / 5 / 10 / 0 / 10	1 / 3 / 1 / 1 / 1	99 / 93 / 100 / 93 / 99
Балл ИФА= 4	80 / 83 / 80 / 83 / 85	15 / 8 / 8 / 5 / 0	5 / 8 / 12 / 12 / 0	2 / 2 / 2 / 2 / 2	77 / 68 / 77 / 70 / 72
Балл ИФА= 5	86,7 / 90,5 / 79,1 / 96,2 / 81	1,9 / 1,9 / 1,9 / 1,9 / 0	11,4 / 7,6 / 19 / 1,9 / 19	2 / 2 / 2 / 2 / 2	62 / 81 / 78 / 83 / 63
Балл ИФА= 6	95 / 100 / 80 / 80 / 80	2,5 / 0 / 2,5 / 5 / 10	2,5 / 0 / 17,5 / 15 / 10	2 / 2 / 2 / 2 / 2	93 / 94 / 94 / 95 / 95
Средняя точность \pm SD (%) = 85,4 \pm 6,2					

Примечание: SD – среднеквадратичное отклонение.

Как можно видеть из таблицы 4, средняя точность классификации обучающих выборок составила от 85,4 %. Минимальное количество главных компонент составило 1, максимальное – 5, в свою очередь дисперсия РС-1 составила от 60 % до 100 % соответственно.

На следующем этапе проводилось валидация построенной модели. Для этого использовались валидационные наборы, содержащие образцы, не участвующие в построении модели. В таблице 5 представлены полученные результаты классификации для валидационных выборок.

Таблица 5

Результаты 5-кратной SIMCA-классификации валидационных выборок хвои

	Правильно классифицированы, %	Неправильно и мультиклассифицированы, %	Неклассифицированы, %
Балл ИФА= 1	80 / 80 / 85 / 95 / 90	5 / 5 / 0 / 0 / 0	15 / 15 / 15 / 5 / 10
Балл ИФА= 2	88,5 / 76,9 / 88,5 / 92,3 / 80,8	3,8 / 7,7 / 3,8 / 0 / 7,7	7,7 / 15,4 / 7,7 / 7,7 / 11,5
Балл ИФА= 3	90 / 85 / 80 / 80 / 80	0 / 5 / 5 / 5 / 0	10 / 10 / 15 / 15 / 20
Балл ИФА= 4	80 / 80 / 80 / 85 / 80	5 / 5 / 5 / 0 / 0	15 / 15 / 15 / 15 / 20
Балл ИФА= 5	80,8 / 80,8 / 88,5 / 88,5 / 80,8	7,7 / 7,7 / 0 / 3,8 / 3,8	11,5 / 11,5 / 11,5 / 7,7 / 15,4
Балл ИФА= 6	90 / 90 / 85 / 80 / 80	0 / 0 / 5 / 10 / 5	10 / 10 / 10 / 10 / 15
Средняя точность \pm SD (%) = 84,0 \pm 4,9			

Примечание: SD – среднеквадратичное отклонение.

Как можно видеть из таблицы 5, средняя точность классификации валидационных выборок, которая принимается в качестве итогового значения точности классификации, составила от 84 %.

Заключение. В результате проведенного сравнительного исследования хвойных насаждений установлено, что обследованные территории г. Минска характеризуются разным уровнем антропогенной нагрузки: от слабой до критической. Полученные по ИФА результаты коррелируют с интегральным зонированием территории г. Минска, выполненным на основании данных мониторинга на стационарных пунктах наблюдений [14]. Таким образом, нарастание флуктуирующей асимметрии хвои является своеобразным маркером ухудшения условий роста. Исследование морфолого-анатомических параметров хвои в городской среде по сравнению с контролем (экологически чистый район) показало достоверные различия ($p < 0,05$) по всем параметрам, за исключением толщины, что также позволяет использовать их в биоиндикационных целях. Доказано, что с помощью БИК-спектроскопии и формального независимого моделирования аналогий классов можно построить классификационные модели, позволяющие осуществить дифференциацию хвои сосны обыкновенной с территорий, испытывающих разную степень антропогенной нагрузки (ИФА=1-6). Средняя точность разработанной классификационной SIMCA-модели составила $85,4 \pm 6,2$ (%) – на обучающей выборке и $84,0 \pm 4,9$ (%) – на валидационной. В целом проведенное комплексное исследование позволило получить объективную картину экологического статуса сосновых насаждений г. Минска в условиях комбинированного воздействия многих антропогенных факторов.

Полученные в работе результаты могут быть использованы при реализации региональных экологических программ разных уровней, ведении локального мониторинга сосновых насаждений и разработке рекомендаций по проведению мероприятий по снижению ущерба, наносимого им загрязнениями.

Авторы выражают благодарность Винниковой Д. Д., студентке Международного государственного экологического института им. А.Д. Сахарова БГУ, Затыке У. А., студентке Полесского государственного университета за помощь в сборе хвои и проведении исследований по расчетам ИФА и МАП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bazzaz F. A. Plant biology in the future // *Proceedings of the National Academy of Sciences* / F. A. Bazzaz. – 2001. – Vol. 98, No 10. – P. 5441-5445.
2. Nykytiuk P. Phytoindication: Basic diagnostic characteristics and approaches / P. Nykytiuk // *Danish Scientific Journal*. – 2020. – Vol. 35. – P. 5-9.
3. Lyanguzova I. Effects of High and Low Aerotechnogenic Emissions of Heavy Metals on Wild Plants / I. Lyanguzova, P. Katjutin // *Forests*. – 2023. – Vol. 14, No. 8. – P. 1650.
4. Шергина О. В. Оценка экосистемных функций городских лесов по показателям почв и древесных растений / О. В. Шергина, А. С. Миронова, Ю. С. Тупицына // *Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Экология и безопасность жизнедеятельности*. – 2022. – Т. 30, № 4 – С. 447-458.
5. Ярмишко В. Х. Состояние ассимиляционного аппарата сосны. Влияние промышленного атмосферного загрязнения на сосновые леса Кольского полуострова / В. Х. Ярмишко. – Л., 1990. – С. 55–64.
6. Deposited particles, element concentrations and needle injuries on an industrial pollution transect II Environ / P. Rautio [et al.] // *Pollut. Ser. A Ecol. Biol.* – 1998. – Vol. 103. – P. 81–89.
7. Поворова О. В. Влияние качества урбанизированной среды г. Могилева на количественные характеристики устьиц сосны обыкновенной (*Pinus sylvestris*) / О. В. Поворова, В. А. Ливинская // *Вестник МГУ. МГУ им. Кулешова, Могилев*. – 2019. – № 2 (54). – С. 79–89.
8. Коротченко И. С. Флуктуирующая асимметрия хвои *Pinus sylvestris* L. как биоиндикационный показатель загрязнения природных сред города Красноярска / И. С. Коротченко, А. Н. Алексеева // *Вестник Оренбургского государственного педагогического университета. Электронный научный журнал*. – 2021. – № 2. – С. 27-38.

9. Влияние антропогенной нагрузки на химический состав хвои сосны обыкновенной *Pinus Silvestris* и ели европейской *Picea Abies* в г. Твери / Е. М. Тарасова [и др.] // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Химия. – 2018. – № 3. – С. 103–118.
10. Хох А. Н. Влияние антропогенного загрязнения на морфолого-анатомические параметры и спектральные характеристики хвои сосны обыкновенной / А. Н. Хох, В. Б. Звягинцев // Вестник Оренбургского государственного педагогического университета. Электронный научный журнал. – 2021. – № 1 (37) – С. 69–80.
11. Kherif F. Principal component analysis / F. Kherif, A. Latypova //Machine learning. – Academic Press, 2020. – P. 209-225. – <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-815739-8.00012-2>
12. Bächle H. Classification of thermally modified wood by FT-NIR spectroscopy and SIMCA / H. Bächle, B. Zimmer, G. Wegener //Wood Science and Technology. – 2012. – Vol. 46. – P. 1181-1192. – <https://doi.org/10.1007/s00226-012-0481-z>.
13. Ochoa-Muñoz A. F. Missing data in multiple correspondence analysis under the available data principle of the NIPALS algorithm / A. F. Ochoa-Muñoz, V. M. González-Rojas, C. E. Pardo // Dyna. – 2019. – Vol. 86, No. 211. – P. 249-257.
14. Хомич В. С. Городская среда : геоэкологические аспекты / В.С. Хомич [и др.]. – Минск : Беларуская навука, 2013. – 301 с.
15. Alaouri H. A. A. The possibility of using Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) Needles as biomonitor in the determination of heavy metal accumulation / Alaouri H. A. A. [et al.] //Applied Ecology & Environmental Research. – 2020. – Vol. 18, No 2. – P. 1-23. – DOI: <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-3056754/v1>.
16. Зотикова А. П. Сравнительная оценка структурно-функциональной организации листового аппарата хвойных растений на территории г. Горно-Алтайска / Зотикова А. П. [и др.] // Вестник Томского государственного университета. – 2007. – № 299. – С. 197-200.
17. Nanda A. Multiple comparison test by Tukey's honestly significant difference (HSD): Do the confident level control type I error/ Nanda A. [et al.] //International Journal of Statistics and Applied Mathematics. – 2021. – Vol. 6, No 1. – P. 59-65. – DOI:10.22271/math.2021.v6.i1a.636.
18. Sun Y. et al. A sample selection method specific to unknown test samples for calibration and validation sets based on spectra similarity //Spectrochimica Acta Part A: Molecular and Biomolecular Spectroscopy. / Sun Y. [et al.]. – 2021. – Vol. 258. – P. 119870. – <https://doi.org/10.1016/j.saa.2021.119870>.

Поступила в редакцию 24.05.2024 г.

COMPREHENSIVE ANALYSIS OF SCOTTS PINE NEEDLES (*PINUS SYLVESTRIS*L.) IN MINSK

A. N. Khokh, V. B. Zvyagintsev

The paper presents the results of a comparative study of Scots pine needles from different districts of the city of Minsk. It has been established that the studied territories are characterized by a wide range of fluctuations in the fluctuating asymmetry index (from 2 to 6), i.e. the influence of anthropogenic factors is assessed from weak to critical levels. It has been proven that deterioration in environmental quality, in addition to disruption of bilateral characteristics, directly affects the morphological and anatomical parameters of needles. With the help of NIR spectroscopy and formal independent modeling of class analogies, classification models were built that allow differentiation of needles according to the level of anthropogenic load. The average accuracy of the developed SIMCA classification model was 85.4±6.2 (%) on the training set and 84.0±4.9 (%) on the validation set. The results obtained can be used in bioindication studies of the quality of the urban environment.

Keywords: Scots pine, needles, morphological and anatomical parameters, fluctuating asymmetry, NIR spectra, SIMCA, anthropogenic factors.

Хох Анна Николаевна

заведующий лабораторией исследования материалов, веществ и изделий Научно-практического центра государственного комитета судебных экспертиз, г. Минск, Республика Беларусь.
E-mail: 1ann1hoh@gmail.com

Звягинцев Вячеслав Борисович

кандидат биологических наук, доцент кафедры лесозащиты и древесиноведения Белорусского государственного технологического университета, г. Минск, Республика Беларусь.
E-mail: mycolog@tut.by

Khokh Anna

Head of the Laboratory of Materials, Substances and Products Research of Scientific and Practical Centre of The State Forensic Examination Committee of The Republic of Belarus,
Minsk, Republic of Belarus

Zvyagintsev Vyacheslav Borisovich – PhD

(Biology), Assistant Professor of the Department of Forest Protection and Wood Science, Belarusian State Technological University,
Minsk, Republic of Belarus

Научное издание

**Вестник Донецкого национального университета.
Серия А: Естественные науки**

2024. – № 1

Технический редактор: *М.В. Фоменко*

Свидетельство о регистрации СМИ ДНР Серия ААА № 000077 от 21.11.2016 г.

Адрес редакции:
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»,
ул. Университетская, 24,
283001, г. Донецк, ДНР, РФ.
Тел: +7 (856) 302-92-56, 302-09-92.
E-mail: vestnikdonnu_a@mail.ru
URL: <http://donnu.ru/vestnikA>
