

**ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по научно-методической
и учебной работе

Е.И. Скафа

«28» июня 2017 г.



**Рабочая программа учебной дисциплины
«Стохастические дифференциальные уравнения»**

Направление подготовки:

Магистерская программа:

Программа подготовки:

Квалификация:

Форма обучения:

01.04.02 Прикладная математика и
информатика

актуарная математика

академическая магистратура

магистр

очная

Донецк 2017

УТВЕРЖДАЮ:

Декан факультета математики и
информационных технологий
В.Н. Андриенко



Программа составлена с учетом Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 28 августа 2015 г. № 911.

Программа учебной дисциплины «Стохастические дифференциальные уравнения» составлена на основе ГОС ВПО по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика, утвержденному приказом Министерства образования и науки ДНР от «04» апреля 2016 г. № 288, зарегистрированному в Министерстве юстиции ДНР от 22 апреля 2016 г. № 1191, «Положения об организации учебного процесса в образовательных организациях высшего профессионального образования Донецкой Народной Республики», утвержденного приказом Министерства образования и науки ДНР «30» октября 2015 г. № 750» (с изменениями и дополнениями), учебного плана по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика (магистерская программа: актуарная математика) (форма обучения: очная), утвержденного Ученым Советом Университета от 31.03.2017 г., протокол № 3 и основной образовательной программы, утвержденной приказом ректора (№ 77/05 от 06.05 2017 г.).

Разработчик:

Профессор, доктор физико-математических наук,
профессор кафедры теории вероятностей и
математической статистики

Б.В. Бондарев

Программа учебной дисциплины утверждена на заседании кафедры теории вероятностей и математической статистики
Протокол № 17 от 21.06.2017 г.

Заведующий кафедрой

Б.В. Бондарев

Программа учебной дисциплины одобрена учебно-методической комиссией факультета математики и информационных технологий
Протокол № 11 от 21.06.2017 г.

Председатель учебно-методической
комиссии факультета

Н.И. Пономаренко

1. Область применения и место дисциплины в учебном процессе:

Курс «Стохастические дифференциальные уравнения» является дисциплиной базовой части Блока 1 «Дисциплины (модули)» по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика (магистерская программа: актуарная математика).

Дисциплина реализуется на факультете математики и информационных технологий кафедрой теории вероятностей и математической статистики.

Изучение данной дисциплины основывается на базе дисциплин: Математический анализ, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и математическая статистика.

Знание теоретических положений дисциплины может существенно помочь в научно-исследовательской работе.

2. Структура дисциплины (модуля)

<i>Характеристика учебной дисциплины</i>		
Направление подготовки	01.04.02 Прикладная математика и информатика	
Магистерская программа	актуарная математика	
Программа подготовки	академическая магистратура	
Квалификация	магистр	
Количество содержательных модулей	1	
Дисциплина базовой / вариативной части образовательной программы	дисциплина вариационной части Блока 1	
Формы контроля	1 модульный контроль, 1 экзамен	
Показатели	очная форма обучения	заочная форма обучения
Количество зачетных единиц (кредитов)	5	
Год подготовки	1	
Семестр	1	
Количество часов	180	
- лекционных	36	
- практических, семинарских	36	
- лабораторных		
- самостоятельной работы	108	
в т.ч. индивидуальное задание		
Недельное количество часов,	10	
в т.ч. аудиторных	4	

3. Описание дисциплины

Цели и задачи

Цель – изложение ряда разделов теории стохастических дифференциальных уравнений с целью получения студентами основных представлений, знаний по дисциплине «Стохастические дифференциальные уравнения».

Задачи дисциплины: в процессе изучения дисциплины «Стохастические дифференциальные уравнения» студенты должны иметь представление об основных методах теории стохастических дифференциальных уравнений для развития практических навыков построения стохастических моделей различных процессов естествознания.

Требования к результатам освоения дисциплины. Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС

ВО РФ по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика и основной образовательной программы высшего образования направления подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика (магистерская программа: актуарная математика):

а) общекультурных (ОК):

- способностью к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК-1);
- готовностью к саморазвитию, самореализации, использованию творческого потенциала (ОК-3);

б) общепрофессиональных (ОПК):

- готовностью к коммуникации в устной и письменной формах на государственном языке Российской Федерации и иностранном языке для решения задач профессиональной деятельности (ОПК-1);
- способностью самостоятельно приобретать с помощью информационных технологий и использовать в практической деятельности новые знания и умения, в том числе в новых областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности, расширять и углублять свое научное мировоззрение (ОПК-3);

в) профессиональных (ПК):

научно-исследовательская деятельность:

- способность проводить научные исследования и получать новые научные и прикладные результаты самостоятельно и в составе научного коллектива (ПК-1);
- способность разрабатывать и анализировать концептуальные и теоретические модели решаемых научных проблем и задач (ПК-2);

проектная и производственно-технологическая деятельность:

- способность разрабатывать и применять математические методы, системное и прикладное программное обеспечение для решения задач научной и проектно-технологической деятельности (ПК-3);
- способность разрабатывать и анализировать концептуальные и теоретические модели решаемых задач проектной и производственно-технологической деятельности (ПК-4);

организационно-управленческая деятельность:

- способность управлять проектами, планировать научно-исследовательскую деятельность, анализировать риски, управлять командой проекта (ПК-5);
- способностью организовывать процессы корпоративного обучения на основе информационных технологий и развития корпоративных баз знаний (ПК-6);
- способность разрабатывать и оптимизировать бизнес-планы научно-прикладных проектов (ПК-7).

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать: основы теорий, которые составляют ядро курса «Стохастические дифференциальные уравнения»; терминологию и аппарат основных понятий изученного курса; роль и место курса в общей естественнонаучной картине мира;

уметь: применять на практике методы решения задач теории случайных процессов;

владеть: навыками работы с литературой по теории случайных процессов и ее применению, электронными библиотеками и сетевыми ресурсами сети Интернет (по тематике курса «Стохастические дифференциальные уравнения»), с целью использовать данные современных научных исследований для решения научных и профессиональных задач.

4. Содержание дисциплины и формы организации учебного процесса

Курс дисциплины «Стохастические дифференциальные уравнения» предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические занятия, самостоятельную работу студента.

В учебном процессе широко применяются активные и интерактивные формы проведения занятий (разбор конкретных ситуаций, дискуссия, полемика), внеаудиторная самостоятельная работа, балльно-рейтинговая система оценки успеваемости, личностно-ориентированное обучение, проблемное обучение, блочно-модульное обучение.

Материал излагается с использованием объяснительно-иллюстративных и исследовательских методов преподавания.

Самостоятельная работа студентов предусматривает выполнение индивидуальных заданий, подготовку к практическим занятиям, изучение учебно-методической литературы и ресурсами сети Интернет, составление конспектов.

Порядковый номер	Краткое содержание темы
Содержательный модуль 1	
Тема 1. Некоторые сведения из теории вероятностей.	Сходимость случайных последовательностей. Неравенства для математических ожиданий. Случайные процессы.
Тема 2. Случайные процессы.	Марковские и диффузионные процессы. Случайные процессы с независимыми приращениями. Винеровский и пуассоновский процессы. Численное моделирование пуассоновского и гауссовского распределений.
Тема 3. Стохастические интегралы.	Стохастические интегралы по винеровскому процессу и стохастические дифференциальные уравнения диффузионного типа. Стохастический интеграл Ито. Процессы Ито. Формула Ито. Стохастические дифференциальные уравнения Ито. Стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере.
Тема 4. . Стохастические интегралы по мартингалам и стохастические дифференциальные уравнения со скачкообразной компонентой.	Стохастический интеграл по мартингалу. Формула Ито для процессов Ито со скачкообразной компонентой. Стохастические дифференциальные уравнения со скачкообразной компонентой. Интегральное представление решения линейного стохастического дифференциального уравнения со скачкообразной компонентой.
Тема 5. Диффузионные математические модели динамических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений.	Общий вид нелинейных диффузионных моделей. Линейные диффузионные модели. Диффузионные модели физических и технических систем. Модель тепловых флуктуаций частиц в веществах и электрических зарядов в проводниках. Формула Найквиста. Модели стохастической финансовой математики.
Тема 6. Математические задачи, связанные со стохастическими дифференциальными уравнениями.	Фильтрация. Оптимальное стохастическое управление. Стохастическая устойчивость. Оценивание параметров.
Тема 7. Вероятностные	Вероятностное представление решения задачи Дирихле. Вероятностные представления решения задачи Коши. О малой

представления решений задач Дирихле и Коши для уравнений в частных производных параболического типа.	эффективности применения численных методов для обыкновенных дифференциальных уравнений к стохастическим дифференциальным уравнениям.
---	--

Тематический план

[illegible]

5. Методические рекомендации для проведения лекционных, практических и лабораторных занятий.

Лабораторные занятия не предусмотрены учебным планом.

ТЕМЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

<i>№ n/n</i>	<i>Название темы</i>	<i>Количество часов</i>
1.	Свойства стохастического интеграла с переменным верхним пределом.	3
2.	Стохастический дифференциал от произведения функций.	3
3.	Стохастический дифференциал от сложной функции.	3
4.	Формула Ито.	3
5.	Стохастические дифференциальные уравнения первого порядка.	3
6.	Линейные стохастические дифференциальные уравнения.	3
7.	Пуассоновский процесс.	3
8.	Стохастический интеграл по Пуассоновскому процессу.	3
9.	Применение стохастических интегралов в моделировании процесса риска.	3
10.	Построение модели изменения капитала страховой компании.	3
11.	Уравнения Колмогорова.	3
12.	Однородные по времени решения стохастических дифференциальных уравнений.	3
	ВСЕГО	36

ТЕМЫ ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ

<i>№ n/n</i>	<i>Название темы</i>	<i>Количество часов</i>
1.	Винеровский процесс. Свойства. Признаки.	2
2.	Пуассоновский процесс.	3
3.	Формула Ито.	2
4.	Обобщенная формула Ито.	3
5.	Стохастические дифференциальные уравнения разных порядков.	2
6.	Существование и единственность решений стохастических дифференциальных уравнений.	3
7.	Модель изменения капитала страховой компании.	3
8.	Марковские процессы.	2
9.	Диффузионные процессы.	3
10.	Уравнения Колмогорова.	2
11.	О мере в пространстве функций, соответствующих диффузионным процессам.	2
12.	Теоремы о точном росте решений стохастических уравнений.	3
13.	Эргодические теоремы.	3
14.	Устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений.	3
	ВСЕГО	36

6. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов.

ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

№ п/п	Название темы	Количество часов
1.	Понятие о стохастических дифференциальных уравнениях.	7
2.	Общий вид стохастического дифференциального уравнения. 6	7
3.	Стохастические дифференциальные уравнения, приводящиеся к линейным.	7
4.	Обобщенная формула Ито.	8
5.	Пуассоновский процесс.	7
6.	Применение стохастических интегралов в моделировании процесса риска.	8
7.	Уравнения Колмогорова для плотности вероятности перехода.	7
8.	Построение модели изменения капитала страховой компании.	5
9.	Уравнения Колмогорова для плотности вероятности перехода.	8
10.	Дифференцируемость решений стохастических уравнений по начальным данным.	8
11.	Формулы для плотности вероятности перехода.	7
12.	Ограниченность и неограниченность решений стохастических уравнений.	6
13.	Дифференцируемость решений стохастических уравнений по начальным данным.	8
14.	Распределение функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений.	8
15.	Эргодические теоремы.	7
	ВСЕГО	108

7. Индивидуальные задания содержатся в методических указаниях.

Индивидуальная работа

Пример одного из вариантов индивидуальной работы

Вариант 1

1. Пусть B_t - одномерный винеровский процесс. Записать дифференциал $dY_t = dg(X_t)$ в стандартной форме, если

1) $dX_t = dB_t, g(x) = 2 - 3x^2$

2) $dX_t = dB_t, g(t, x) = \sin t \cos x$

2. Запишите процесс $X_t = (tB_t, t + B_t)$ в стандартной форме.

4. (B_1, B_2, B_3) - трехмерный винеровский процесс.

Записать процесс $X_t = (B_1^2 + B_2 + B_3, B_1 + B_2^2 + B_3, B_1 + B_2 + B_3^2)$ в стандартной форме.

8. Контрольные вопросы к промежуточной аттестации

1. Винеровский процесс. Свойства. Признаки.
2. Свойства стохастического интеграла с переменным верхним пределом.
3. Стохастический дифференциал от произведения функций и от сложной функции.
4. Формула Ито.
5. Стохастические дифференциальные уравнения первого порядка.

6. Линейные стохастические дифференциальные уравнения, приводящиеся к линейным.
7. Существование и единственность решений стохастических дифференциальных уравнений.
8. Стохастический интеграл по Пуассоновскому процессу.
9. Формула Ито. Обобщение.
10. Применение стохастических интегралов в моделировании процесса риска.
11. Модель изменения капитала страховой компании.

9. Образец модульного контроля (ОБРАЗЕЦ ВАРИАНТА И КРИТЕРИЙ ОЦЕНИВАНИЯ)

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и информационных технологий

Направление подготовки:	01.04.02 Прикладная математика и информатика
Магистерская программа:	актуарная математика
Программа подготовки:	академическая магистратура
Семестр	I
Учебная дисциплина	Стохастические дифференциальные уравнения

МОДУЛЬНАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

ВАРИАНТ №1

1. Винеровский процесс. Свойства. Признаки.
2. Существование и единственность решений стохастических дифференциальных уравнений.

Утверждено на заседании кафедрой теории вероятностей и математической статистики,
протокол № ____ от «__» _____ 20__ г.

Зав. кафедрой _____
Преподаватель _____

Критерии оценивания модульного контроля

<i>Номер задания</i>	<i>Количество баллов</i>
Задание 1	15
Задание 2	15
Всего	30

10. Образец экзаменационного билета

Теоретические вопросы к экзамену

1. Винеровский процесс. Свойства. Признаки.
2. Свойства стохастического интеграла с переменным верхним пределом.
3. Стохастический дифференциал от произведения функций и от сложной функции.
4. Формула Ито.
5. Стохастические дифференциальные уравнения первого порядка.
6. Линейные стохастические дифференциальные уравнения, приводящиеся к линейным.
7. Существование и единственность решений стохастических дифференциальных уравнений.
8. Стохастический интеграл по Пуассоновскому процессу.
9. Формула Ито. Обобщение.
10. Применение стохастических интегралов в моделировании процесса риска.

11. Модель изменения капитала страховой компании.
12. Марковские процессы. Диффузионные процессы.
13. Уравнения Колмогорова.
14. О мере в пространстве функций, соответствующих диффузионным процессам.
15. Формулы для плотности вероятности перехода.
16. Уравнения Колмогорова для плотности вероятности перехода.
17. Однородные по времени решения стохастических дифференциальных уравнений.
18. Ограниченность и неограниченность решений стохастических уравнений.
19. Теоремы о точном росте решений стохастических уравнений.
20. Эргодические теоремы.
21. Устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений.
22. Дифференцируемость решений стохастических уравнений по начальным данным.
23. Распределение функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений.

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и информационных технологий

Направление подготовки:

01.04.02 Прикладная математика и информатика

Магистерская программа:

актуарная математика

Программа подготовки:

академическая магистратура

Семестр

I

Учебная дисциплина

Стохастические дифференциальные уравнения

БИЛЕТ №1

1. Модель изменения капитала страховой компании.
2. Формула Ито.
3. Решить стохастическое дифференциальное уравнение и сделать проверку

$$d\eta(t) = (e^t + \eta(t))dt + e^t dw(t), \quad \eta(0) \equiv 0.$$

Утверждено на заседании кафедрой теории вероятностей и математической статистики, протокол № ____ от «__» _____ 20__ г.

Зав. кафедрой

Преподаватель

Критерии оценивания экзамена

<i>Номер задания</i>	<i>Количество баллов</i>
Задание 1	15
Задание 2	15
Задание 3	10
Всего	40

11. Критерии оценивания

Оценка знаний студентов проводится по 100-балльной шкале согласно следующим критериям:

**Распределение баллов, которые могут получить студенты
в процессе изучения дисциплины**

Организационно учебная работа студента	СРС		
	Индивидуальная работа	Модульный контроль	Экзаменационная работа
max 10 баллов	max 20 баллов	max 30 баллов	max 40 баллов
	Решение практических заданий		

Шкала соответствия баллов национальной шкале

Оценка по шкале ECTS	Оценка по 100-балльной шкале	Оценка по государственной шкале (экзамен, дифференцированный зачет)	Оценка по государственной шкале (зачет)
A	90-100	5 (отлично)	зачтено
B	80-89	4 (хорошо)	зачтено
C	75-79	4 (хорошо)	зачтено
D	70-74	3 (удовлетворительно)	зачтено
E	60-69	3 (удовлетворительно)	зачтено
FX	35-59	2 (неудовлетворительно) с возможностью повторной сдачи	не зачтено
F	0-34	2 (неудовлетворительно) с возможностью повторной сдачи при условии обязательного набора дополнительных баллов	не зачтено

12. Материально-техническое обеспечение учебного процесса

Для проведения лекционных и лабораторных занятий требуется аудитория на группу, оборудованная меловой или интерактивной доской.

13. Рекомендованная литература

№п/п	Наименование	Количество экземпляров в библиотеке ДонНУ	Наличие электронной версии в ЭБС
Основная литература			
1.	Бондарев Б. В. Стохастические дифференциальные уравнения. Практикум [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие/ Б. В. Бондарев. – Донецк: ДонНУ, 2017 - электронные данные (1 файл).	0	+
2.	Бондарев Б. В. Стохастические дифференциальные уравнения [Электронный ресурс]: Учебное пособие/ Б. В. Бондарев. – Донецк: ДонНУ, 2017 - электронные данные (1 файл).	0	+
3.	Стохастические модели в экономике [Электронный ресурс]: (письменная справка) / [сост. Н. А. Фесенко]; ДонНУ, Науч. б-ка, Справ. - библиогр. отд. - Донецк: ДонНУ, 2015. -	0	+

	электронные данные. (1 файл).		
4.	Бондарев Б. В., Болдырева В. О. Анализ рисков в страховании, - Донецк: ООО «Восточный издательский дом», 2014. – 136 с. Места выдачи: АНЛ (своб. 3 экз. из 3), Чз1 (своб. 3 экз. из 3), Чз3 (своб. 1 экз. из 1), Выс (своб. 3 экз. из 3).	10	-
5.	Бондарев, Б. В. Анализ рисков в страховании [Электронный ресурс]: монография / Б. В. Бондарев, В. О. Болдырева; Донецкий нац. ун-т. - Донецк: ДонНУ, 2014. - электронные данные (1 файл).	0	+
6.	Бондарев, Б. В. Моделирование эволюций цен рискованных активов, эволюций капитала страховых компаний и накопительных фондов: учеб. пособие / Б. В. Бондарев, Т. В. Жмыхова, А. В. Баев ; Донецкий нац. ун-т. - Донецк: ДонНУ, 2014. - 275 с. Места выдачи: АУЛ (своб. 5 экз. из 5), АНЛ (своб. 1 экз. из 1), Чз1 (своб. 1 экз. из 1), Выс (своб. 5 экз. из 5).	12	-
<i>Дополнительная</i>			
7.	Бондарев, Б. В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение в финансовой математике и математической экономике: учеб. пособие / Б. В. Бондарев, Т. В. Жмыхова. - Донецк: Норд-Пресс, 2005. - 175 с. Места выдачи: АНЛ (своб. 1 экз. из 1), Чз1 (своб. 1 экз. из 1), Выс (своб. 1 экз. из 1).	3	-
8.	Бондарев, Б. В. Стохастическое исчисление в задачах финансовой и актуарной математики. Оценка рисков в страховании [Электронный ресурс]: монография / Б. В. Бондарев, О. Е. Сосницкий. - Донецк: ДонНУ, 2013. - электронные данные (1 файл).	0	-
9.	Власенко, Л.А. Стохастические дифференциально-разностные уравнения типа Соболева с аддитивным белым шумом / Л. А. Власенко, А.Г. Руткас // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика: наук.журнал / Донецький нац. ун-т; голов. ред.: Б. В. Бондарев. - Донецк, 2012. - № 1. - С. 105-114. Места выдачи: Чз4 (своб. 1 экз. из 1).	1	-
10.	Гихман, И. И. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения / И. И. Гихман, А. В. Скороход; АН УССР ; Ин-т математики. - К. : Наук. думка, 1982. – 612 с. Места выдачи: АНЛ (своб. 1 экз. из 2), Чз1 (своб. 1 экз. из 2), Чз3 (своб. 1 экз. из 1), Выс (своб. 1 экз. из 2).	7	-
11.	Ширяев, А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1.: Факты. Модели. / А. Н. Ширяев. - М.: Фазис, 1998. - 512 с.	2	-

14. Информационные ресурсы

1. <http://mondnr.ru/> – Министерство образования и науки Донецкой Народной республики
2. <https://www.donippo.org/> – ГОУ ДПО «Донецкий республиканский институт дополнительного педагогического образования»
3. <http://ippo-vm.at.ua/> – Отдел математики Донецкого РИДПО
4. <http://resobrnadzor.ru/> –Республиканская служба по контролю и надзору в сфере образования и науки
5. www.newlibrary.ru -новая электронная библиотека ДонНУ.
6. www.edu.ru -федеральный портал российского образования.
7. www.mathnet.ru-общероссийский математический портал.
8. www.elibrary.ru - научная электронная библиотека.
9. www.nehudlit.ru-электронная библиотека учебных материалов.